

Collection

Math'x

Terminale **S** *Obligatoire*

NOUVELLE EDITION

Math'x

 Didier



Collection

Math'x

Terminale S Obligatoire

Yves Alvez
Marie-Hélène Le Yaouanq

Annick Carême
Bernard Chareyre
Nathalie Cleirec
Hélène Gastin
Daniel Guillemet
Chantal Perfetta

Table de références des crédits photographiques

Intérieur : p. 8 : © D. Ponton/GettyImages - **p. 15 :** © P. Barret/Corbis - **p. 23 :** © Collection Roger Viollet - **p. 64 :** © Altitudes/Y. Arthus-Bertrand - **p. 124 :** © AKG Images Paris - **p. 133 :** © SPL/Cosmos - **p. 223 :** © PhotoDisc - **p. 278 :** DR - **p. 289 :** © N. Blotti - **p. 421 :** © D. Farall/PhotoDisc - **p. 422 :** © AKG Images Paris - **p. 431 :** © AP/Sipa - **p. 432 :** © Collection Kharbine-Tapabor

Nous avons recherché en vain les auteurs ou les ayants droit de certains documents reproduits dans ce livre. Leurs droits sont réservés aux Éditions Didier.

Couverture : Sophie Bodson

Maquette intérieure : Francois Lecardonnell

Composition, mise en pages, schémas : MCP

Dessinateurs : Fabrice Caro : 359 ; Didier Crombez : 172, 360, 411 ; Sylvie Fontaine : 62 ;

Rony Turlet : 146, 235, 368, 369, 397

« Le photocopillage, c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le photocopillage menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération.

En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. »

« La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. » (alinéa 1^{er} de l'article 40) – « Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal. »

AVANT-PROPOS

Les intentions

Les auteurs ont tenu à être au plus près des recommandations et de l'esprit du programme (B.O. n° 4, 30 août 2001, hors série) et à répondre à plusieurs exigences :

- s'inscrire dans la **progression des apprentissages** du lycée pour faciliter l'introduction et l'assimilation des nouveaux concepts et connaissances de terminale S ;
- permettre un travail réel d'apprentissage, de recherche et de réflexion de tous les élèves ;
- familiariser les élèves avec une **démarche scientifique** par des phases d'observation, d'expérimentation suivie de modélisation et de démonstration ;
- amener les élèves à l'**autonomie** nécessaire pour répondre aux exigences des **nouvelles épreuves du baccalauréat**.

La structure du manuel

14 chapitres en un seul tome pour une appropriation progressive du programme durant l'année scolaire :

- en prenant appui sur les connaissances de la classe de première et en les prolongeant ;
- en dégageant et en mettant bien en valeur les nouveautés de la classe de terminale ;
- en mêlant dans des situations-problèmes les phénomènes discrets et continus.

On y trouve les rubriques suivantes :

■ **Activités d'approche.** Très diversifiées, elles permettent au professeur d'introduire le cours de manière simple et efficace pour que tous les élèves puissent l'aborder sans difficulté.

■ **Cours.** Une présentation claire pour repérer aisément les résultats essentiels. Les pages de droite contiennent des démonstrations et des exercices d'application rédigés de façon très détaillée et accompagnés de points-méthode pour favoriser un travail autonome de l'élève.

■ **Travaux pratiques.** Des niveaux variés et des situations suffisamment riches pour développer ou approfondir les nouvelles notions. On retrouvera ceux explicitement mentionnés dans le programme.

■ **Exercices résolus.** Une solution très détaillée et des commentaires aident l'élève dans son travail.

■ **Exercices.** Classés par rubriques : Entraînement, Approfondissement, Problèmes, et « **Objectif Bac** » :

- **18** certains exercices sont corrigés en fin de manuel
- **guide** les exercices guidés pour aider l'élève, en dégageant des méthodes, à mettre en œuvre les compétences de base dans des situations plus riches
- **avec ROC** pour préparer l'élève à réinvestir les démonstrations du cours en situation
- **vu au BAC** pour permettre à l'élève de se situer par rapport à l'examen du baccalauréat

Outils TICE

Conformément au programme, l'utilisation de calculatrice, logiciel de géométrie ou tableur accompagne tous les chapitres ; ils sont en relation avec le CD-Rom.

■ **Calculatrices** : 9 pages en fin de manuel aident les élèves à se familiariser avec les fonctions utiles.

■ **CD-Rom** : disponible pour une utilisation en établissement, avec **des animations** illustrant les situations étudiées ou les notions du cours **CD**

SOMMAIRE

Chapitre 1

Suites et fonctions. Étude globale	6
■ Activités	6
■ Cours	10
1. Fonction. Courbe représentative	10
2. Notion de suite	10
3. Suites arithmétiques et géométriques	12
4. La démonstration par récurrence	14
5. Comparer	16
6. Sens de variation d'une fonction	18
■ Travaux pratiques	22
■ Exercices	30

Chapitre 2

Suites et fonctions. Étude locale et asymptotique	42
■ Activités	42
■ Cours	44
1. Limite finie en l'infini	44
2. Limite infinie en l'infini	50
3. Limite d'une fonction en a ($a \in \mathbb{R}$)	54
4. Théorèmes	56
■ Travaux pratiques	60
■ Exercices résolus	66
■ Exercices	68

Chapitre 3

Continuité, dérivation et étude de fonctions	80
■ Activités	84
■ Cours	84
1. Dérivabilité	84
2. Continuité	90
3. Étude du sens de variation	94
■ Travaux pratiques	96
■ Exercices résolus	102
■ Exercices	103

Chapitre 4

Fonction exponentielle	114
■ Activités	114
■ Cours	116
1. Fonction exponentielle	116
2. Étude de la fonction $x \mapsto e^x$	120
3. Équation différentielle $y' = ky$	122
■ Travaux pratiques	124
■ Exercices résolus	127
■ Exercices	129

Chapitre 5

Logarithme népérien	140
■ Activités	140
■ Cours	142
1. La fonction \ln	142
2. Relations fonctionnelles de \ln	142
3. Dérivabilité de \ln	144
4. Limites	144
■ Travaux pratiques	146
■ Exercices résolus	151
■ Exercices	153

Chapitre 6

De l'exponentielle à a^b, $x^{\frac{1}{n}}$, $y' = ay + b$	
Croissances comparées	162
■ Activités	162
■ Cours	164
1. Équation différentielle $y' = ay + b$	164
2. Croissances comparées	164
3. Puissance d'exposant réel	166
4. Fonctions exponentielles	168
■ Travaux pratiques	170
■ Exercices résolus	173
■ Exercices	175

Chapitre 7

Calculs d'aire. Intégrales. Primitives	186
■ Activités	186
■ Cours	188
1. Intégrale d'une fonction	188
2. Propriétés de l'intégrale	190
3. Intégrale et primitives	192
4. Aide au calcul intégral	196
■ Travaux pratiques	198
■ Exercices résolus	204
■ Exercices	206

Chapitre 8

TP et problèmes de synthèse	222
■ Travaux pratiques	222
■ Exercices	235

Chapitre 9

Nombres complexes	250
■ Activités	250
■ Cours	254
1. Forme algébrique	254
2. Forme trigonométrique	256
3. Conjugué, inverse et quotient	260
4. Équation du second degré	262
5. Opérations et géométrie	264
■ Travaux pratiques	268
■ Exercices résolus	273
■ Exercices	275

Chapitre 10

Barycentres. Droites et plans de l'espace	292
■ Activités	292
■ Cours	294
1. Barycentre de n points pondérés	294
2. Caractérisations barycentriques	298
3. Représentation paramétrique	300
■ Travaux pratiques	302
■ Exercices résolus	305
■ Exercices	308

Chapitre 11

Produit scalaire dans l'espace	320
■ Activités	320
■ Cours	322
1. Produit scalaire : du plan à l'espace	322
2. Applications	326
■ Travaux pratiques	330
■ Exercices résolus	335
■ Exercices	339

Chapitre 12

Conditionnement et indépendance	350
■ Activités	350
■ Cours	354
1. Probabilités conditionnelles	354
2. Indépendance	356
3. Modélisation d'expériences « indépendantes »	358

■ Travaux pratiques	360
■ Exercices résolus	364
■ Exercices	368

Chapitre 13

Lois de probabilité et combinatoire	380
■ Activités	380
■ Cours	384
1. Loi équirépartie	384
2. Dénombrement	386
3. Loi de Bernoulli et loi binomiale	390
■ Travaux pratiques	392
■ Exercices résolus	397
■ Exercices	401

Chapitre 14

Exemples de lois continues	412
■ Activités	412
■ Cours	416
1. Loi de probabilité continue (ou à densité)	416
2. Deux exemples de lois continues	418
■ Travaux pratiques	420
■ Exercices résolus	424
■ Exercices	426
■ Exercices corrigés	434
■ Programmation des calculatrices	437
■ Index	447

Suites et fonctions : étude globale

CD Activité 1 ➔ Des chevrons

OBJECTIF

Rentrer en douceur !

Un carré ABCD de côté 4 est coloré à l'aide de chevrons bleus et jaunes de largeur 1 (unité : 1 cm).

Pour chaque x de $[0 ; 4]$, on trace le carré AMNP de côté x comme sur la figure ci-contre.

($AM = MN = NP = AP = x$) et on note $S(x)$ l'aire de la partie du carré AMNP qui est colorée en jaune.

1. Faire une figure et calculer $S(x)$ pour chacune des valeurs suivantes de x : 0,4 ; 1,5 ; 2,3.

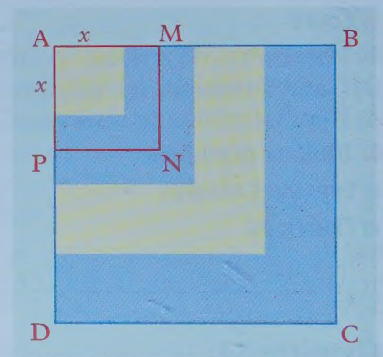
2. a. Expliciter $S(x)$ en fonction de x (on distinguera plusieurs cas).

b. Tracer la courbe Γ représentant la fonction S dans un repère orthonormé avec pour unité graphique 2 cm.

3. Quelle est l'aire du carré AMNP ?

Déterminer graphiquement puis par le calcul les valeurs de x pour lesquelles exactement la moitié du carré AMNP est colorée en jaune.

4. En déduire par lecture graphique pour quelles valeurs de x la moitié du carré AMNP au moins est colorée en jaune.



D'après une idée du CREEM.

Activité 2 ➔ Pas à pas

OBJECTIF

Mettre en place la démonstration par récurrence.

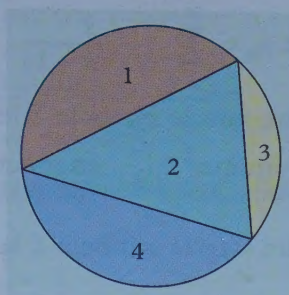
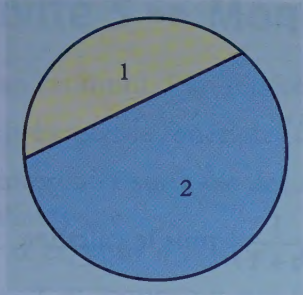
A ■ Situation 1

En reliant deux points d'un cercle par un segment, on détermine deux régions dans le disque. (Voir figure page suivante.)

En reliant deux à deux trois points d'un cercle, on détermine quatre régions.

1. Dessiner un cercle, placer quatre points dessus puis tracer tous les segments les reliant deux à deux. Combien de régions compte-t-on ?

2. Combien de régions peut-on penser obtenir avec cinq points ? Vérifier sur un dessin. De même avec six.



B ■ Situation 2

Soit $u_1 = \frac{1}{1 \times 2}$, $u_2 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3}$, $u_3 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4}$,

$u_4 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5}$, et plus généralement :

$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$.

1. Calculer sous forme de fraction irréductible u_1 , u_2 , u_3 , u_4 et u_5 .
2. Que peut-on attendre pour u_6 ? Calculer u_6 .
3. Quel résultat est attendu pour u_{101} ? Ce résultat est-il certain ?
Quelqu'un a eu le courage de calculer u_7 , u_8 , u_9 , etc. jusqu'à u_{100} et a trouvé $u_{100} = \frac{100}{101}$. Calculer u_{101} .
4. Plus généralement, si pour un entier k , $k \geq 1$, on a calculé u_k et trouvé que $u_k = \frac{k}{k+1}$, quelle sera l'expression du terme suivant u_{k+1} ?
5. Connaissant u_6 , quel terme peut-on en déduire grâce à la question 4 ? Puis quel autre terme ? Comment connaître u_{10} ? $u_{1\ 000}$?
6. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Activité 3 ➔ Le symbole Σ

1. Le nombre $\alpha = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5}$ est une somme de termes qui sont tous de la forme $\frac{1}{k \times (k+1)}$. Pour quelle valeur de k obtient-on le premier terme de α ? le deuxième ? le troisième ? le quatrième ?

Notation

On écrira α sous la forme $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k \times (k+1)}$. Cette écriture désigne la somme

de tous les termes $\frac{1}{k \times (k+1)}$ obtenus en remplaçant successivement k par 1, par 2, par 3 et par 4.

2. a. Écrire, sans le symbole Σ , le nombre $\sum_{k=1}^5 k^2$.

- b. Écrire, avec le symbole Σ , la somme :

$$3 \times 4^2 + 4 \times 5^2 + 5 \times 6^2 + 6 \times 7^2 + 7 \times 8^2.$$

OBJECTIF

S'assurer de la compréhension du symbole Σ .

Le symbole Σ se lit « sigma ».

3. Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \times (k+1)}$.

a. Écrire sans le symbole Σ les nombres u_5 et u_6 .

b. Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n .

c. Écrire sans le symbole Σ le nombre $\sum_{k=1}^6 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ puis le calculer.

d. Montrer que $\frac{1}{k \times (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

En déduire u_n en fonction de n .

4. Pour aller plus loin

a. Calculer $\sum_{k=1}^n 1$; $\sum_{k=0}^n 2$; $\sum_{k=3}^{209} 10$; $\sum_{k=p}^q 1$ ($p < q$).

b. Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$$\sum_{k=1}^{12} k^2 = \sum_{k=0}^{11} (k+1)^2 ; \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} + 1 \right) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + 1 ; \quad \sum_{k=1}^n \lambda u_k = \lambda \sum_{k=1}^n u_k ;$$

$$\sum_{k=1}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=1}^n v_k ; \quad \sum_{k=1}^n (u_k v_k) = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) \left(\sum_{k=1}^n v_k \right).$$

λ, u_k, v_k désignent des réels et n un entier naturel non nul.

Activité 4 ➔ Tracé en toile d'araignée

OBJECTIF

Représenter graphiquement sur un axe une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ à l'aide de la courbe représentant la fonction f .

On considère la suite u définie par : $u_0 = -0,5$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f \text{ est la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2.$$

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm). Tracer très soigneusement sur $[-1 ; 9]$ la courbe P représentant la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$.

3. Construction des premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses

a. Placer u_0 sur l'axe des abscisses. Sachant que $u_1 = f(u_0)$, placer u_1 sur l'axe des ordonnées.

Soit A_1 le point de Δ d'ordonnée u_1 . Quelle est son abscisse ? Placer u_1 sur l'axe des abscisses.

b. Sachant que $u_2 = f(u_1)$, expliquer comment placer u_2 sur l'axe des abscisses. Effectuer la construction.

c. Expliquer comment placer u_3 sur l'axe des abscisses.

d. Effectuer de même la construction pas à pas des termes u_4, u_5, \dots, u_9 sur l'axe des abscisses.

4. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite (u_n) à l'aide de cette représentation graphique ?



Activité 5 ➔ Monotonie

Le plan est muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

1. Représenter la fonction f définie sur $[-2 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$.
2. Représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes des deux suites u et v définies par :
 - $u_0 = 6$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n + 2}$;
 - $v_0 = -1$ et, pour tout $n \geq 0$, $v_{n+1} = f(v_n) = \sqrt{v_n + 2}$.
3. a. Que penser de l'affirmation suivante : « Si f est croissante, une suite (u_n) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ est une suite croissante » ?
b. Quel sens de variation de (u_n) peut-on conjecturer selon les valeurs de u_0 ?

Activité 6 ➔ Nombre de diagonales

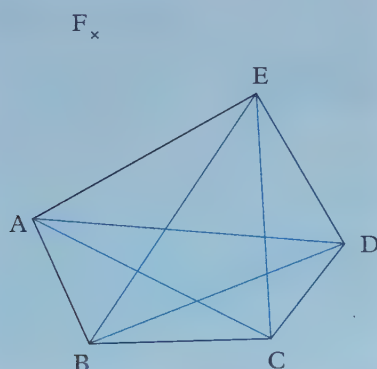
Problème posé : Quel est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à 30 côtés ?

1. Observation

Déterminer graphiquement d_3, d_4, d_5, d_6, d_7 .
Quelle relation peut-on conjecturer entre d_n et d_{n+1} ?

2. La relation de récurrence

- a. Un cas particulier : Reproduire le pentagone ABCDE ci-dessous et ses diagonales en bleu. Tracer l'hexagone ABCDEF. Tracer en rouge les diagonales de ABCDEF qui n'étaient pas diagonales de ABCDE. Quelles sont-elles ?



- b. Généralisation : Quelles sont les diagonales du polygone $A_1A_2\dots A_nA_{n+1}$ autres que celles du polygone $A_1A_2\dots A_n$ ($n \geq 3$) ?
En déduire que $d_{n+1} = d_n + n - 1$ pour tout $n \geq 3$.

3. Expression de d_n en fonction de n

La connaissance de d_3 et de la relation de récurrence permet de le calcul pas à pas de d_{30} . Plus généralement, d_n peut s'exprimer en fonction de n .

- a. La relation $d_{k+1} = d_k + k - 1$ est valable pour tout $k \geq 3$.
Écrire cette relation successivement pour $k=3, k=4, k=5, k=6, k=7$ puis ajouter membre à membre les égalités ainsi écrites. Quel terme cela permet-il de calculer ?
- b. Déterminer par le même procédé d_n en fonction de n pour $n \geq 4$.
- c. Résoudre le problème posé au départ.

OBJECTIF

Prévenir certaines idées fausses.

OBJECTIF

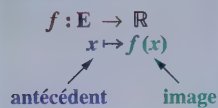
Résoudre un problème en introduisant une suite récurrente. Utiliser un procédé de simplification en cascade.

Vocabulaire

Un polygone est dit **convexe** si tout segment dont les extrémités sont à l'intérieur du polygone est entièrement situé à l'intérieur du polygone. On peut faire un dessin et... compter, ou s'intéresser à la suite (d_n) , où d_n désigne le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés.

1. Fonction. Courbe représentative

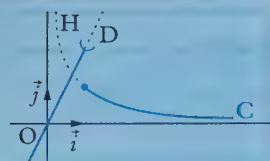
Notation



Une fonction numérique f de la variable réelle est déterminée par la donnée d'une partie E de \mathbb{R} (appelée ensemble de définition de f) et d'un procédé qui permet d'associer à chaque x de E un nombre réel et un seul, noté $f(x)$.

Dans le plan muni d'un repère, la courbe C représentative d'une fonction f définie sur E est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ où x décrit E . Pour chaque x de E , il existe un unique point d'abscisse x sur la courbe.

Exemple : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x$ si $x < 1$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \geq 1$. La courbe C représentative de f coïncide avec la droite D d'équation $y = 2x$ sur $] -\infty ; 1[$ et avec l'hyperbole H d'équation $y = \frac{1}{x}$ sur $[1 ; +\infty[$.



Égalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si :

- elles ont le même ensemble de définition E ;
- pour tout x de E , $f(x) = g(x)$.

Exemple : Les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ne sont pas les mêmes puisque leurs ensembles de définition sont différents.

2. Notion de suite

En associant à tout entier $n \geq 3$ le nombre réel $u_n = \sqrt{n-3}$, on définit une fonction u d'une partie de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

Une suite réelle est une fonction de \mathbb{N} ou d'une partie de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

Notations

La suite u est aussi notée (u_n) ce qui se lit **suite de terme général u , indice n** .
On pourra noter $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite u définie pour tout $n \geq n_0$.

Représentations graphiques d'une suite :

- sur un axe, on place les premiers termes de la suite sur l'axe réel ;
- dans le plan muni d'un repère, on place les points de coordonnées (n, u_n) .

Une suite (u_n) peut être définie soit par la donnée de son terme général en fonction de n soit par une relation de récurrence et la donnée de premiers termes.

Exemples :

- $u_0 = 3$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 5$. Alors $u_1 = 1$, $u_2 = -3$.
- $v_1 = 2$ et, $v_2 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $v_{n+2} = 2v_n - v_{n+1}$. Alors $v_3 = 3$.

Remarque

Il est équivalent d'écrire :

- pour tout $n \geq 1$, $v_{n+2} = 2v_n - v_{n+1}$;
- ou, pour tout $n \geq 2$, $v_{n+1} = 2v_{n-1} - v_n$.

→ ILLUSTRATION

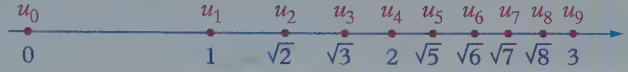
■ Représentations graphiques d'une suite

1. Dont le terme général u_n est donné en fonction de n

Après avoir calculé les premiers termes de la suite, on peut les représenter graphiquement :

- sur un axe

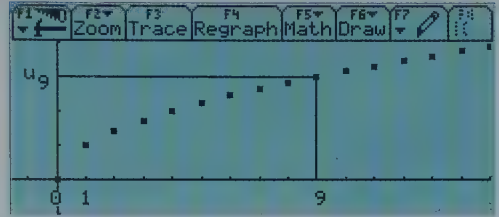
Exemple : $u_n = \sqrt{n}$ pour $n \geq 0$.



- ou dans le plan muni d'un repère

Exemple : $u_n = \sqrt{n}$ pour $n \geq 0$.

Les termes de la suite sont représentés par les points de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ qui ont une abscisse entière.



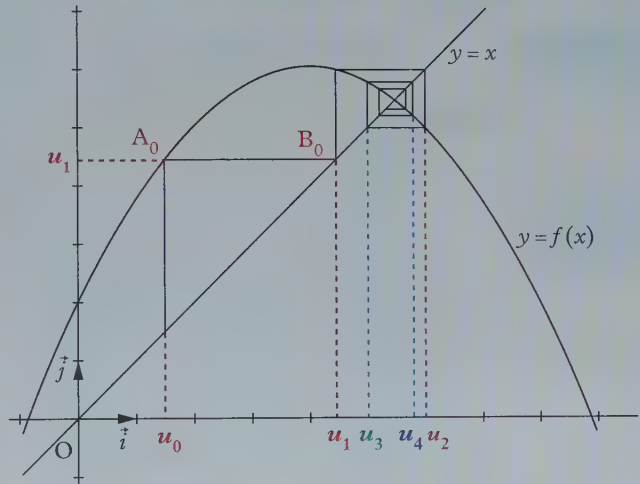
2. Dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$

Le plan étant muni d'un repère, on peut représenter graphiquement les premiers termes de cette suite sans les calculer à l'aide de la courbe C représentant la fonction f et de la droite Δ d'équation $y = x$.

Programme de construction

- placer u_0 sur l'axe des abscisses ;
- placer le point A_0 de C_f d'abscisse u_0 ;
- placer le point B_0 de Δ de même ordonnée que A_0 ;
- placer u_1 l'abscisse de B_0 sur l'axe des abscisses.

Recommencer à partir de u_1 les mêmes étapes pour placer u_2 , etc.



→ APPLICATION

Exercice 1 Simplifier une fonction rationnelle

Ayant affiché sur une calculatrice la courbe C d'équation

$$y = \frac{2x^2 - 8x - 10}{2x + 2}, \text{ on a obtenu le graphique ci-contre.}$$

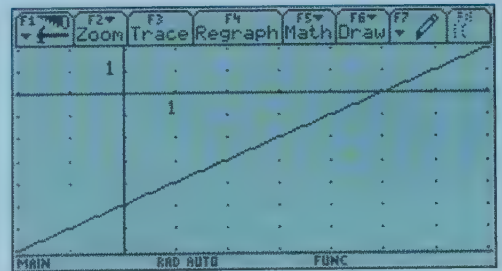
Reconnaître la courbe C .

Solution

Le trinôme du second degré $2x^2 - 8x - 10$ a pour racines -1 et 5 donc se factorise en $2(x + 1)(x - 5)$.

Par suite $f(x) = \frac{2(x + 1)(x - 5)}{2(x + 1)} = x - 5$ pour tout $x \neq -1$.

La fonction f n'est définie que sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alors que la fonction affine $g : x \mapsto x - 5$ est définie sur \mathbb{R} . Elles ne sont donc pas égales. La courbe représentative de f n'est pas la droite d'équation $y = x - 5$. Elle coïncide avec cette droite sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

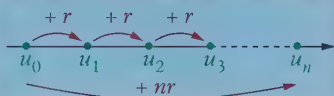


3. Suites arithmétiques et géométriques

Définition →

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r (indépendant de n) tel que pour tout n , $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r s'appelle la raison de la suite.

Représentation graphique sur un axe →

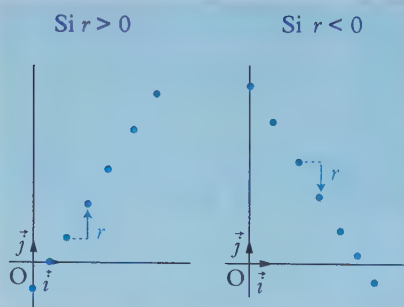


Terme général →

Pour tous entiers p et n ,
 $u_n = u_p + (n - p) \times r$.
En particulier, $u_n = u_0 + n \times r$.

Représentation graphique dans le plan →

Suites $(u_n)_{n \geq 0}$



Limites →

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ -\infty & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

Somme de termes consécutifs →

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes de la somme par la demi-somme des termes extrêmes, soit :

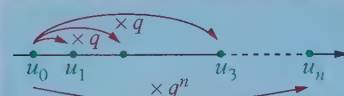
$$\left(\text{nombre de termes} \right) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2 + \dots + n = n \times \frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

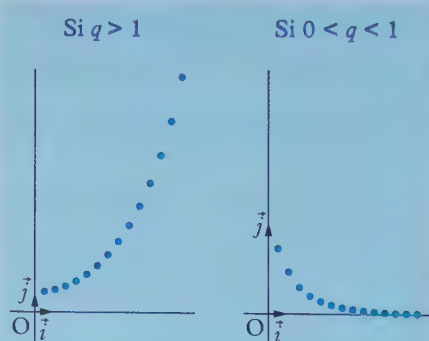
Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q non nul (indépendant de n) tel que pour tout n , $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le réel q s'appelle la raison de la suite.



Pour tous entiers p et n ,
 $u_n = q^{n-p} \times u_p$.
En particulier, $u_n = q^n \times u_0$.

Suites $(q^n)_{n \geq 0}$ avec $q > 0$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \end{cases}$$

La somme de N termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q différente de 1 est égale au produit du premier terme de la somme par $\frac{1 - q^N}{1 - q}$, soit :

$$(\text{1er terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

→ APPLICATIONS

Exercice 2 Utiliser les formules concernant les suites arithmétiques

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on connaît deux termes : $u_{15} = \frac{5}{4}$ et $u_{37} = \frac{49}{4}$.

- Calculer le premier terme et la raison de la suite.
- Calculer une somme de termes consécutifs de cette suite.

Solution

1. La formule du terme général, donnée à la page précédente, permet d'écrire la relation $u_{37} = u_{15} + (37 - 15)r$ dans laquelle r est la raison de la suite. On en déduit $r = \frac{1}{2}$.

La même formule nous donne $u_0 = u_{15} + (0 - 15)r$ soit $u_0 = -\frac{25}{4}$.

2. Soit $S = \sum_{k=15}^{37} u_k$. Par propriété $S = \text{Nombre de termes} \times \left(\frac{u_{15} + u_{37}}{2}\right)$.

Détermination du nombre de termes de la somme : $\underbrace{u_1, \dots, u_{14}}_{14 \text{ termes}}, u_{15}, \dots, u_{37}$.
} 37 termes

La somme contient donc $37 - 14 = 23$ termes.

$$\text{D'où } S = 23 \times \left(\frac{\frac{5}{4} + \frac{49}{4}}{2}\right) = \frac{621}{4}.$$

Raisonnement

De façon générale, de u_p à u_n ($p < n$), il y a $n - (p - 1)$ termes.

voir aussi exercices n° 20, 22

Exercice 3 Utiliser un changement de suite inconnue

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$.
 On pose $v_n = u_n + 4$ pour tout n de \mathbb{N} .

- Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
- a. En déduire v_n puis u_n en fonction de n .
 b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Solution

1. Pour tout n de \mathbb{N} ,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 \text{ d'où } v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2 + 4 = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

$$\text{Comme } u_n = v_n - 4, \text{ on obtient } v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - 4) + 2 = \frac{1}{2}v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2. a. Par propriété, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$ avec $v_0 = u_0 + 4 = 5$.

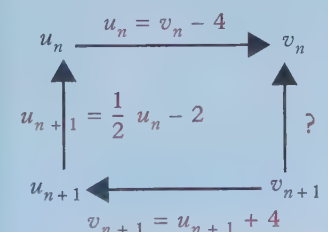
$$\text{Par conséquent, } v_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } u_n = -4 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

b. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

Par théorème d'opérations sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -4$.

Méthode

Pour exprimer v_{n+1} en fonction de v_n , on peut s'aider du schéma suivant :



voir aussi exercices n° 23, 24

4. La démonstration par récurrence

Démonstration par récurrence →

Pour démontrer qu'une propriété dépendant d'un entier n est vraie pour tout $n > n_0$ (n_0 entier naturel donné), on procède en trois étapes.

- 1. Initialisation :** on montre que la propriété est vraie quand $n = n_0$.
- 2. Hérédité :** on montre que si la propriété est vraie pour un entier $k \geq n_0$ (c'est l'hypothèse de récurrence), ALORS elle est vraie pour l'entier suivant $k + 1$.
- 3. Conclusion :** la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Vocabulaire

Un **axiome** est une proposition placée au départ d'une théorie et qui n'est pas déduite d'autres propositions.

Le principe de récurrence est un **axiome** de la construction de l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels. Il ne se démontre donc pas. Le mécanisme d'un raisonnement par récurrence est détaillé à la page ci-contre.

Exemple : Soit (u_n) donnée par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 2^n$.

1. Initialisation : Montrons que la propriété est vraie pour $n = 4$, c'est-à-dire que $u_4 \geq 2^4$. Calculons u_4 . On a successivement :

$$u_1 = u_0^2 + 1 = 1, \quad u_2 = u_1^2 + 1 = 2, \quad u_3 = u_2^2 + 1 = 5 \text{ et enfin } u_4 = u_3^2 + 1 = 26.$$

Comme $2^4 = 16$, l'inégalité $u_4 \geq 2^4$ est bien vraie.

2. Hérédité : Supposons que l'on sache que, pour un entier $k \geq 4$, la propriété est vraie, c'est-à-dire que $u_k \geq 2^k$ (c'est l'hypothèse de récurrence). Montrons qu'elle est vraie pour l'entier suivant $k + 1$, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geq 2^{k+1}$. Pour comparer u_{k+1} et 2^{k+1} , étudions le signe de $u_{k+1} - 2^{k+1}$ c'est-à-dire de $u_k^2 + 1 - 2^{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence, $u_k \geq 2^k$. Donc, en élevant au carré ces nombres positifs, $u_k^2 \geq (2^k)^2$ et, en ajoutant $1 - 2^{k+1}$ à chaque membre,

$$u_{k+1} - 2^{k+1} \geq 2^{2k} + 1 - 2^{k+1}.$$

Or $2^{2k} + 1 - 2^{k+1} = 2^k(2^k - 2) + 1$. Comme $k \geq 1$, $2^k - 2$ est positif, donc $2^k(2^k - 2) + 1$ aussi et $2^k(2^k - 2) + 1$ également.

On a donc :

$$u_{k+1} - 2^{k+1} \geq 0 \quad \text{ou encore} \quad u_{k+1} \geq 2^{k+1}.$$

La propriété est héréditaire à partir de l'indice 4.

3. Conclusion : La propriété étant vraie pour $n = 4$ et héréditaire à partir de 4, elle est vraie pour tout $n \geq 4$.

En pratique

Dans la partie « Hérédité », on doit utiliser à un moment donné l'hypothèse de récurrence.

Principe de récurrence fort →

Si une propriété dépendant de l'entier naturel n vérifie les conditions suivantes :

- elle est vraie quand $n = n_0$,
 - pour tout $n > n_0$, si la propriété est vraie pour tout entier k compris entre n_0 et n , ALORS elle est vraie pour $n + 1$,
- on peut en déduire que la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.

→ RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Si l'on calcule $5^n - 2^n$ pour différentes valeurs de n , $n \in \mathbb{N}^*$:

$$5^1 - 2^1 = 3, \quad 5^2 - 2^2 = 21 = 3 \times 7, \quad 5^3 - 2^3 = 117 = 3 \times 39,$$

il semble que l'on obtienne toujours un multiple de 3.

Nous allons démontrer par récurrence que la proposition « $5^n - 2^n$ est multiple de 3 » est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

• **Étape 1 (initialisation)** : Nous montrons que la proposition « $5^n - 2^n$ est multiple de 3 » est vraie quand $n = 1$.

Si $n = 1$, $5^n - 2^n = 3$. C'est bien un multiple de 3.

La proposition est vraie quand n prend la valeur 1.

• **Étape 2 (hérédité)** : Supposons que l'on sache que la proposition est vraie quand n est égal à un entier k , $k \geq 0$. Montrons que la proposition est encore vraie quand n est égal à $k + 1$.

Supposons donc que la proposition est vraie pour cet entier k (c'est l'hypothèse de récurrence).

Ceci signifie que $5^k - 2^k$ est un multiple de 3 : il existe donc un entier a tel que $5^k - 2^k = 3a$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } 5^{k+1} - 2^{k+1} &= 5 \times 5^k - 2 \times 2^k = (3 + 2) \times 5^k - 2 \times 2^k \\ &= 3 \times 5^k + 2 \times (5^k - 2^k) = 3 \times 5^k + 2 \times (3a) = 3 \times (5^k + 2a) \end{aligned}$$

où $5^k + 2a$ est un entier.

Ainsi $5^{k+1} - 2^{k+1}$ est un multiple de 3 et la proposition reste donc vraie quand n prend la valeur $k + 1$.

• **Étape 3 (conclusion)** : Nous allons combiner les étapes 1 et 2.

La proposition est vraie quand $n = 1$ (étape 1)

Par l'étape 2 ↓ (avec dans le rôle de k la valeur 1 pour laquelle on sait que la proposition est vraie)

La proposition est vraie quand $n = 2$

Par l'étape 2 ↓ (avec dans le rôle de k la valeur 2 pour laquelle **on vient de prouver** que la proposition est vraie)

La proposition est vraie quand $n = 3$

Par l'étape 2 ↓ (avec dans le rôle de k la valeur 3 ...)

La proposition est vraie quand $n = 4$

Petit à petit ↓ on arrivera par exemple à :

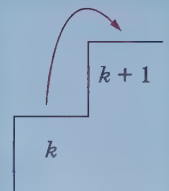
La proposition est vraie quand $n = 2\ 152$

et on pourra de même atteindre tout entier $n \geq 1$.

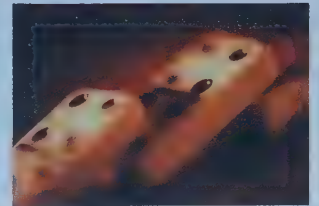
Conclusion (étape 3) : la proposition est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Raisonnement

Attention ! Des exemples ne permettent pas d'être sûr que la proposition est bien vraie pour tout entier (voir activité 2, situation 1).



Illustration



Comme dans le principe de récurrence, deux conditions doivent être remplies :

- le premier domino tombe ;
- la chute de tout domino entraîne la chute du suivant.

5. Comparer

A ■ Comparer deux nombres

Soit deux réels a et b : $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$, $a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$. Pour **comparer deux nombres**, on peut **étudier le signe de leur différence**.

Propriété 1 →

- $a \leq b \Leftrightarrow a + k \leq b + k$ (quel que soit le signe de k).
- $a \leq b \Leftrightarrow k \times a \leq k \times b$ si $k > 0$; $a \leq b \Leftrightarrow k \times a \geq k \times b$ si $k < 0$.
- On peut ajouter membre à membre deux inégalités écrites dans le même sens : si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.

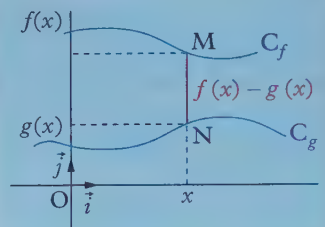
B ■ Comparer deux fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur E . On dit que $f \geq g$ sur E si et seulement si pour tout x de E , $f(x) \geq g(x)$.

Interprétation graphique

Dans le plan muni d'un repère, « C_f est au-dessus de C_g » sur E .

De même, si $f \leq g$ sur E , C_f est « en dessous » de C_g sur E .



En repère orthonormé,
 $MN = |f(x) - g(x)|$.

C ■ Suite ou fonction majorée, minorée, bornée

Définition 1 →

Soit m et M deux réels.

- Une suite (u_n) est majorée par M si, pour tout n , $u_n \leq M$.
- Une fonction f est majorée par M sur E si, pour tout x de E , $f(x) \leq M$.
- Une suite (u_n) est minorée par m si, pour tout n , $m \leq u_n$.
- Une fonction f est minorée par m sur E si, pour tout x de E , $m \leq f(x)$.
- Une suite est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.
- Une fonction est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

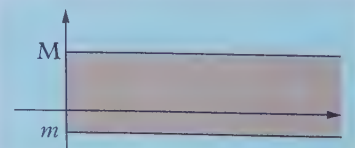
Remarques

- M est un nombre réel fixé (indépendant de n ou de x).
- Si une suite (ou fonction) est majorée, elle a une infinité de majorants.
- Soit M un **majorant** d'une fonction f sur E . S'il existe α dans E tel que $M = f(\alpha)$, M est le maximum de f sur E (il est unique).
- Pour montrer qu'une suite (u_n) est bornée, il suffit de montrer que, pour tout n , $|u_n| \leq M$. De même pour une fonction.

Exemple : une suite à termes positifs est minorée par 0.

Représentation graphique d'une suite bornée par m et M :

- sur un axe : tous les termes de la suite sont compris entre m et M ;
- dans le plan : tous les points sont situés dans la bande délimitée par les droites d'équations $y = m$ et $y = M$.



On peut bien sûr faire des remarques analogues sur la notion de **minorant**.

→ APPLICATION

Exercice 4 Majorer une suite

On définit la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 2$.

- Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
En déduire que la suite (u_n) est majorée.

Solution

1. Par définition de la suite,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Comme $\frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq 2$. La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

2. Soit $k \geq 2$.

• Comparons $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ c'est-à-dire $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{(k-1)k}$.

Comme $k \geq 2$, on a $0 < k-1 < k$; comme $k > 0$, on peut multiplier chaque membre de l'inégalité par k , d'où $0 < k(k-1) < k^2$. La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, pour tout $k \geq 2$,

$$\frac{1}{(k-1)k} > \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} > \frac{1}{k^2}.$$

• Montrons que la suite est majorée.

Pour cela on écrit l'inégalité $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ (valable pour $k \geq 2$) pour k prenant chacune des valeurs de 2 à n :

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

...

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

On ajoute membre à membre toutes ces inégalités :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

En simplifiant le membre de droite, on obtient :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{n}$$

et en ajoutant 1 à chaque membre de l'inégalité :

$$u_n < 2 - \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \geq 2.$$

Or $2 - \frac{1}{n} < 2$ donc $u_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$ et par conséquent $u_n < 2$ pour tout $n \geq 2$.

La suite (u_n) est donc majorée par 2.

Méthode

Pour majorer une fraction $\frac{1}{a}$ ($a > 0$), il suffit de minorer son dénominateur a par b strictement positif :
si $0 < b < a$,
alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Méthode

Pour majorer une somme, on peut majorer chaque terme de la somme puis ajouter membre à membre les inégalités (si elles sont écrites dans le même sens).

Raisonnement

On ne peut pas conclure que $2 - \frac{1}{n}$ est un majorant de la suite car ce n'est pas un réel indépendant de n .

6. Sens de variation d'une fonction

A ■ Sens de variation et opérations

Si u et v sont deux fonctions définies sur un même intervalle I , on peut définir sur I les fonctions $u + v$ et ku ($k \in \mathbb{R}$). De la propriété 1, on déduit :

Propriété 2 →

- Si $k > 0$, les fonctions u et ku ont même sens de variation sur I ;
- si $k < 0$, les fonctions u et ku ont des sens de variation contraires sur I .
- Si u et v sont croissantes sur un même intervalle I , $u + v$ l'est aussi ;
- si u et v sont décroissantes sur un même intervalle I , $u + v$ l'est aussi.

La même propriété s'applique aux suites.

Exemple : La fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ est la somme des fonctions de référence $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ toutes deux croissantes sur $[0 ; +\infty[$. Par suite, f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Attention Ne pas « inventer » des propriétés analogues pour le produit et le quotient. Par exemple, les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = g(x) = x$ sont croissantes sur \mathbb{R}^- et leur produit $fg : x \mapsto x^2$ est décroissant sur \mathbb{R}^- .

B ■ Sens de variation d'une composée de deux fonctions

• Notation et schéma

$v \circ u$ est la composée de u suivie de v :

$$x \xrightarrow{u} u(x) = X \xrightarrow{v} v(X) = v(u(x)) = v \circ u(x)$$

Propriété 3 →

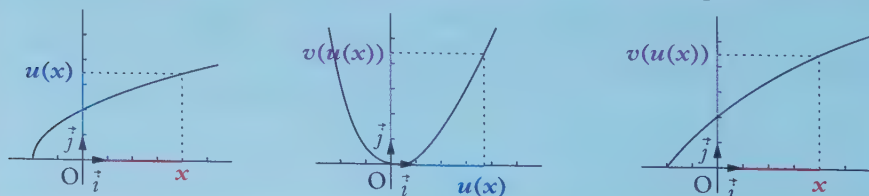
Soit les fonctions u et v telles que u soit définie sur un intervalle I , à valeurs dans un intervalle J , et v définie sur J :

- si u et v sont toutes les deux croissantes ou décroissantes sur leurs intervalles de définition respectifs, alors $v \circ u$ est croissante sur I ;
- si u et v sont, l'une croissante et l'autre décroissante sur leurs intervalles de définition respectifs, alors $v \circ u$ est décroissante sur I .

On obtient des propriétés analogues avec la stricte monotonie.

CD • Interprétation graphique

Courbe représentative de u Courbe représentative de v Courbe représentative de $v \circ u$



Pour tout $x \geq -2$, $u(x)$ est positif. Pour représenter $v \circ u(x)$, on utilisera donc la courbe représentative de v uniquement sur $[0 ; +\infty[$.

Pour trouver le sens de variation de $v \circ u$, le sens de variation de v sur $] -\infty ; 0]$ n'intervient pas.

→ APPLICATION

Exercice 5 Étudier le sens de variation d'une composée

Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Remarque : \mathbb{R}^* n'est pas un intervalle. Il faudra considérer les intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$.

Solution 1

« À la main »

f s'obtient par le montage : $x \mapsto x^2 \mapsto \frac{1}{x^2}$.

• Soit a et b appartenant à $]-\infty ; 0[$.

Si $a < b$,

alors $a^2 \geq b^2$

avec a^2 et b^2 strictement positifs,

d'où $\frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{b^2}$

c'est-à-dire $f(a) \leq f(b)$.

Donc f est croissante sur $]-\infty ; 0[$.

La fonction f étant paire, on en déduit son sens de variation sur $]0 ; +\infty[$; déterminons néanmoins directement ce sens de variation.

• Soit a et b appartenant à $]0 ; +\infty[$.

Si $a < b$,

alors $a^2 \leq b^2$

avec a^2 et b^2 strictement positifs,

d'où $\frac{1}{a^2} \geq \frac{1}{b^2}$

c'est-à-dire $f(a) \geq f(b)$.

Donc f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

car la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty ; 0[$

car la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$

car la fonction carrée est croissante sur $]0 ; +\infty[$

car la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$

Traduction en termes de composée

f est la composée de la fonction carrée suivie de la fonction inverse.

• On se place sur $I =]-\infty ; 0[$.

La fonction carrée est décroissante sur $I =]-\infty ; 0[$,

et à valeurs dans $J =]0 ; +\infty[$,

la fonction inverse est décroissante sur $J =]0 ; +\infty[$.

Donc f est croissante sur $]-\infty ; 0[$.

• On se place sur $I =]0 ; +\infty[$.

La fonction carrée est croissante sur $I =]0 ; +\infty[$,

et à valeurs dans $J =]0 ; +\infty[$,

la fonction inverse est décroissante sur $J =]0 ; +\infty[$.

Donc f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Remarque. On peut aussi traduire cette solution sous la forme suivante :

- si x est positif, quand x augmente, x^2 augmente en restant positif et donc $\frac{1}{x^2}$ diminue ;
- si x est négatif, quand x augmente, x^2 diminue en restant positif et donc $\frac{1}{x^2}$ augmente.

Solution 2

On déduit le sens de variation de f du signe de sa dérivée.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* et $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$. (Expliquer pourquoi.)

Sachant que x^3 a même signe que x , on en déduit que :

- sur $]-\infty ; 0[$, $x < 0$ donc $x^3 < 0$ et $f'(x) > 0$. Par suite, la fonction f est croissante sur $]-\infty ; 0[$;
- sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$ donc $x^3 > 0$ et $f'(x) < 0$. Par suite, f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

voir aussi exercices n° 14, 45, 46

C ■ Sens de variation d'une suite

Définition 2 →

- Une suite (u_n) est croissante si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite (u_n) est décroissante si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite (u_n) est constante si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite est monotone si elle est soit croissante soit décroissante.

Exemples :

- La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n>0}$ est décroissante car, pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.
- La suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 1}$ n'est pas monotone car, pour tout entier non nul n , si n est pair, $u_{n+1} < 0 < u_n$, et si n est impair, $u_{n+1} > 0 > u_n$.

Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.

En pratique

Pour déterminer le sens de variation d'une suite, on peut :

- déterminer le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
- comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, lorsque $u_n > 0$ pour tout n :
 - si, pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ et (u_n) est croissante ;
 - si, pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ et (u_n) est décroissante ;
- montrer par récurrence que, pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n$ ou $u_{n+1} \leq u_n$.

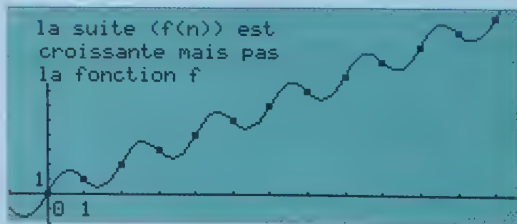
D ■ Variation de suite et de fonction

• Soit (u_n) une suite telle que $u_n = f(n)$ où f est une fonction connue.

Si f est croissante sur \mathbb{R}^+ , $n+1 > n \Rightarrow f(n+1) \geq f(n)$ d'où $u_{n+1} \geq u_n$; la suite u est croissante.

Si f est décroissante sur \mathbb{R}^+ , la suite u est décroissante.

La réciproque est fautive comme le montre le contre-exemple ci-contre où $f(x) = x + \sin(\pi x)$ et $u_n = f(n) = n$.



• Soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

La monotonie de f n'assure pas celle de u .

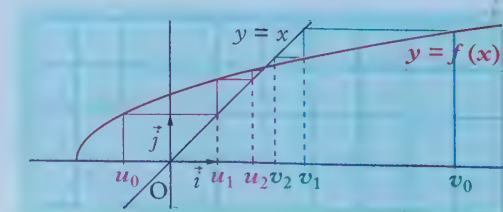
Exemple :

Soit $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = \sqrt{x+2}.$$

La fonction f est croissante sur $[-2 ; +\infty[$ mais suivant la valeur de u_0 , la suite est croissante ou décroissante.

(Voir exercice 7, page ci-contre.)



→ APPLICATIONS

Exercice 6 Étudier le sens de variation d'une suite définie par $u_n = f(n)$

Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \sqrt{n} - 3$ et $v_n = n + \frac{3}{4n+2}$ pour $n \geq 0$.

Solution

• $u_n = f(n)$ où $f(x) = \sqrt{x} - 3$. La suite est représentée par les points rouges sur le graphique ci-dessous. La fonction racine carrée étant croissante sur \mathbb{R}^+ , la fonction f l'est également. De ce fait,

$$n+1 > n \geq 0 \Leftrightarrow f(n+1) \geq f(n).$$

Ainsi $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n . La suite est donc croissante.

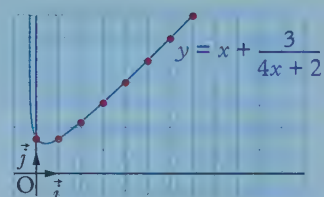
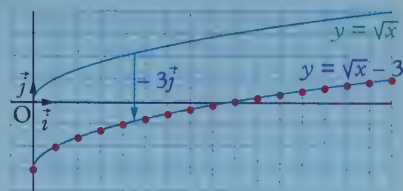
• Étudions le signe de $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= n+1 + \frac{3}{4(n+1)+2} - \left(n + \frac{3}{4n+2} \right) \\ &= 1 + \frac{12n+6-12n-18}{(4n+6)(4n+2)} = \frac{4n^2+8n}{(2n+3)(2n+1)}. \end{aligned}$$

Le numérateur est une somme de deux termes positifs ou nuls (car $n \geq 0$) donc est positif ou nul. Le dénominateur est un produit de deux facteurs strictement positifs (comme $n \geq 0$, $2n+3 \geq 3$ et $2n+1 \geq 1$), il est donc strictement positif.

On en déduit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$.

La suite (v_n) est donc croissante (alors que $f: x \mapsto x + \frac{3}{4x+2}$ ne l'est pas sur $[0; +\infty[$).



voir aussi exercice n° 66

Exercice 7 Étudier le sens de variation d'une suite (u_n) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$.

Étudier le sens de variation des suites u et v définies sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n+2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Solution

La fonction f est croissante sur $[-2; +\infty[$ (si $-2 \leq a < b$, $0 \leq a+2 < b+2$ donc $\sqrt{a+2} < \sqrt{b+2}$).

Montrons par récurrence que :

$$\text{pour tout } n \geq 0, -2 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

1. Initialisation : $u_0 = 6$, $u_1 = \sqrt{8} \approx 2,8$ donc $-2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ est vérifié pour $n = 0$.

2. Hérédité : supposons que, pour un entier k , $k \geq 0$, on ait $-2 \leq u_{k+1} \leq u_k$.

Alors $f(-2) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$ car f est croissante sur $[-2; +\infty[$. Comme $f(-2) = 0$, on a bien $-2 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$.

La propriété est héréditaire.

3. Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq u_n$.

La suite (u_n) est décroissante.

Montrons par récurrence que :

$$\text{pour tout } n \geq 0, v_{n+1} \geq v_n \geq -2.$$

1. Initialisation : $v_0 = -1$, $v_1 = 1$ donc $v_{n+1} \geq v_n \geq -2$ est vérifié pour $n = 0$.

2. Hérédité : supposons que, pour un entier k , $k \geq 0$, on ait $v_{k+1} \geq v_k \geq -2$.

Alors $f(v_{k+1}) \geq f(v_k) \geq f(-2)$ car f est croissante sur $[-2; +\infty[$. Comme $f(-2) = 0$, on a bien $v_{k+2} \geq v_{k+1} \geq -2$.

La propriété est héréditaire.

3. Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $v_{n+1} \geq v_n$.

La suite (v_n) est croissante.

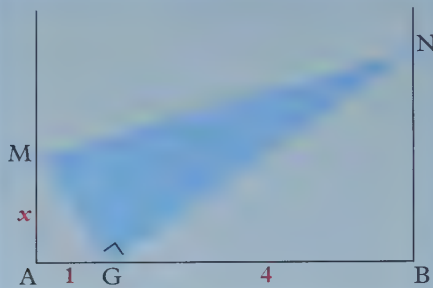
Remarque : L'ordre de leurs deux premiers termes détermine le sens de variation de chacune des suites ; du fait de la stricte croissance de f , cet ordre se transmet en effet aux termes suivants (hérédité).

voir aussi exercices n° 37, 53, 54

CD 1. Une somme de deux fonctions

OBJECTIF : Travailler sur des équations ou inéquations du second degré, sur la somme de deux fonctions de monotonie différente et sur l'interprétation graphique d'une expression de la forme $f(x) - g(x)$ à partir d'une situation géométrique.

Soit G un point d'un segment $[AB]$. Sur deux demi-droites perpendiculaires à $[AB]$, on place les points M et N tels que MGN soit un triangle rectangle en G . On note x la distance AM et $S(x)$ l'aire du triangle MGN .
Données numériques : $AG = 1$, $GB = 4$.



1. Faire la figure pour $x = 10$, $x = 2$ et $x = 0,4$, l'unité graphique étant le centimètre.

2. Montrer que les triangles MAG et GBN sont semblables et en déduire que :

$$S(x) = 2x + \frac{2}{x} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

3. a. Peut-on trouver x tel que $S(x) = 1$?

Pour quels réels x a-t-on $5 \leq S(x) \leq \frac{17}{2}$?

b. Résoudre $S(x) \geq 4$. Que représente 4 pour la fonction S ?

4. On note H le point de $[GM)$ tel que $GH = x$ et K le point de $[GN)$ tel que $GK = 4$.

a. Justifier que les points H et K appartiennent aux segments $[GM]$ et $[GN]$.

b. Quelle est l'aire $A(x)$ du triangle HGK ?

Tracer la courbe C_A représentant la fonction A dans un repère orthonormé avec pour unité graphique 2 cm (placer l'origine du repère en bas à gauche de la feuille).

c. Quelle est l'aire $B(x)$ de $MHKN$?

Tracer la courbe C_B représentant la fonction B sur le graphique précédent.

d. Exprimer $S(x)$ en fonction de $A(x)$ et $B(x)$ et en déduire le tracé point par point de la courbe C_S représentant S .

5. Interpréter graphiquement $S(x) - A(x)$ à l'aide des courbes C_S et C_A .

Quelle est la limite de $S(x) - A(x)$ en $+\infty$? en 0 ?

Interpréter pour la situation géométrique étudiée.

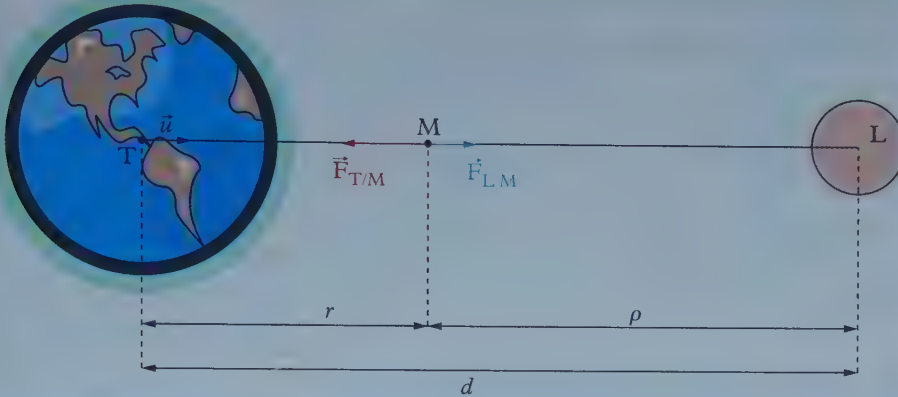
6. Reprendre la question 5 pour $S(x) - B(x)$.

7. Montrer que $S\left(\frac{1}{x}\right) = S(x)$ et que $A\left(\frac{1}{x}\right) = B(x)$ pour tout $x > 0$.

Comment aurait-on pu déduire les résultats obtenus à la question 6 des résultats obtenus à la question 5 ?

2. Entre la Terre et la Lune

OBJECTIF : Modéliser une situation d'attraction gravitationnelle à l'aide d'une fonction rationnelle ; en étudier les variations sans recourir à la dérivée.



Une masse ponctuelle m placée en M entre la Terre et la Lune subit de la part de la Terre une force d'attraction gravitationnelle :

$$\vec{F}_{T/M} = -\frac{G \cdot m_T \cdot m}{r^2} \vec{u}$$

où r est la distance de M au centre T (Terre), m_T la masse de la Terre, G la constante de gravitation universelle et \vec{u} un vecteur unitaire orienté de T vers M.

De même la Lune exerce sur la masse m une force d'attraction gravitationnelle :

$$\vec{F}_{L/M} = \frac{G \cdot m_L \cdot m}{\rho^2} \vec{u}$$

où m_L est la masse de la Lune et ρ la distance de M au centre L de la Lune.

On note $d = TL$, r_T le rayon de la Terre et r_L celui de la Lune. On a donc $r_T \leq r \leq d - r_L$.

1. Justifier que la résultante des deux forces est $\vec{F} = -\left(\frac{Gm_T m}{r^2} - \frac{Gm_L m}{(d-r)^2}\right) \vec{u}$.

2. Quel est le sens de variation de chacune des fonctions qui à tout r de $[r_T ; d - r_L]$ associe $\frac{Gm_T m}{r^2}$ et $\frac{Gm_L m}{(d-r)^2}$? Interpréter.

3. On note $f(r) = \frac{Gm_T m}{r^2} - \frac{Gm_L m}{(d-r)^2}$.

Quel est le sens de variation de f sur $[r_T ; d - r_L]$?

4. Tracer la courbe Γ représentant f sur une calculatrice (*).

5. a. Résoudre l'équation $f(r) = 0$. (On parle alors d'**équigravité**.)

b. En déduire le signe de $f(r)$.

6. Exprimer l'intensité F de \vec{F} en fonction de f . En déduire le sens de variation de F en fonction de r et tracer sa courbe représentative. Interpréter.

(*) **Pour l'application numérique**, on prendra : $r_T \approx 6,37 \times 10^6$ m, $r_L \approx 1,74 \times 10^6$ m, $m_T \approx 6 \times 10^{24}$ kg, $m_L \approx \frac{1}{81} m_T$, $d \approx 3,8 \times 10^8$ m, $G \approx 6,67 \times 10^{-11}$ SI et $m \approx 1,02$ kg.



Isaac Newton
(1642-1727)

Méthode

On pourra s'aider d'une application du cours (exercice 5, p. 19).

3. Une décroissance exponentielle Prise en main du tableur

OBJECTIF : Explorer les aspects numériques et graphiques d'une décroissance exponentielle et prendre en main le tableur en établissant une feuille de calcul automatisé.

On administre à un patient un médicament par une injection intraveineuse (de courte durée). La concentration du médicament dans le sang est immédiatement maximale, puis elle diminue en fonction du temps. On fait l'hypothèse (H) suivante :

la **diminution de la concentration** entre deux instants t_0 et t_1 est proportionnelle à la fois à la durée $t_1 - t_0$ et à la concentration à l'instant t_0 .

On note C_0 la concentration initiale et C_n la concentration au bout de n minutes. On prendra pour unité de temps la minute et pour unité de concentration la concentration initiale ; ainsi $C_0 = 1$ (à la fin de l'injection).

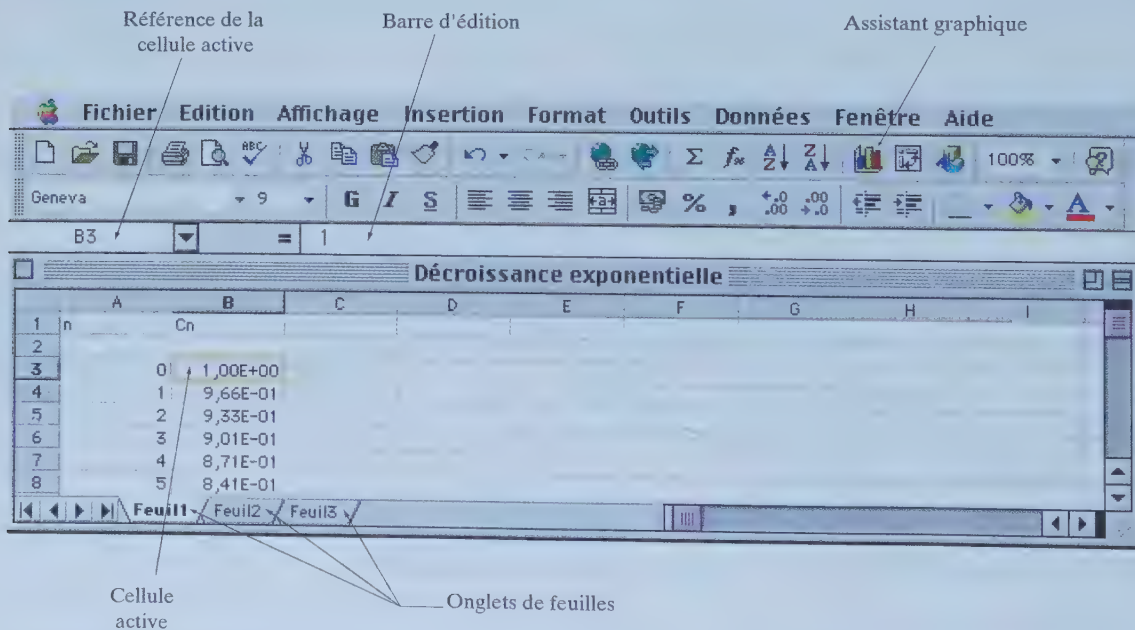
Sous cette hypothèse, on parle de **décroissance exponentielle**.

1. Mise en équation

Expliquer pourquoi l'hypothèse (H) conduit à la relation $C_{n+1} - C_n = -kC_n$, où k est une constante positive. Expliciter, pour tout $n \geq 0$, C_{n+1} en fonction de C_n .

2. Étude du cas où k prend la valeur $k_1 = 0,034$

On souhaite calculer les premiers termes de la suite C_n à l'aide d'un tableur, puis la représenter graphiquement. La feuille de calcul que l'on va créer sera analogue à celle figurant ci-dessous, où sont présentés différents éléments.



a. Programmer sur tableur le calcul de C_n en fonction de n pour $0 \leq n \leq 300$. On fera afficher les termes C_n en format scientifique avec deux décimales.

(Voir la suite de ce TP à la page 26.)

Méthode
Suivre le mode d'emploi A page ci-contre.

Utilisation d'un tableur

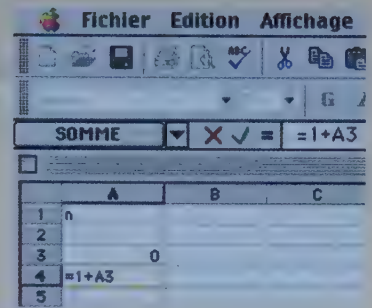
Lancer le tableur de votre choix : *Excel*, *Lotus*... pour obtenir une feuille de calcul vierge.

Mode d'emploi A

Entrer des données et des formules

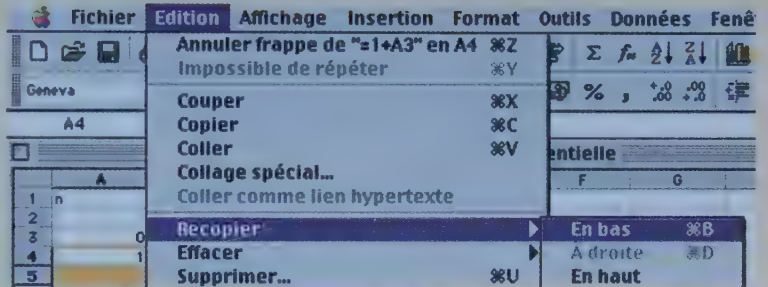
Pour entrer la liste des indices en colonne A : sélectionner la cellule A1 (en cliquant avec la souris) et taper le titre **n** ; sélectionner la cellule A3 et taper le premier indice **0** ; sélectionner A4 et taper la formule **= 1 + A3** ; valider (touche entrée).

Le calcul se fait automatiquement.



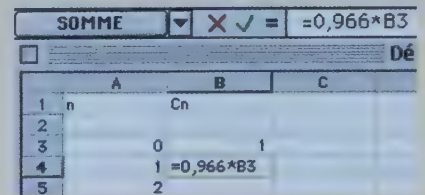
Recopier une formule

Pour recopier cette formule vers le bas, sélectionner les cellules A4 à A303 destinées à recevoir la suite des indices (cliquer sur A4 et glisser jusqu'à A303 en maintenant le bouton de la souris enfoncé) : les cellules sélectionnées se trouvent en surbrillance. Ensuite, cliquer sur *Edition*, *Recopier*, *En bas*. Cliquer successivement sur les cellules A5, A6, etc. et observer la barre d'édition. Quelles formules contiennent ces cellules ?



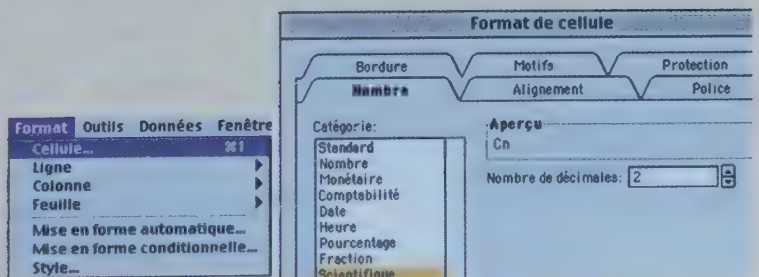
On dit que, dans la formule **= 1 + A3** contenue dans A4, la référence A3 est une **référence relative** (elle repère en fait la cellule située immédiatement au-dessus de celle dans laquelle on entre la formule). Lors d'une recopie vers le bas, cette référence relative se transforme en incrémentant le numéro de ligne (le 3 devient successivement 4, 5, etc.).

En cellule B1, taper le titre **C_n**. Indiquer ensuite la valeur de C₀ : **1** dans la cellule B3. Dans la cellule B4, taper la formule **= 0,966*B3** et la recopier vers le bas après avoir mis en surbrillance les cellules B4 à B303.



Choisir un format de cellule

Pour afficher les éléments de la colonne B en format scientifique, mettre la colonne en surbrillance (en cliquant sur son nom « B ») et utiliser le menu *Format*.



b. Tracer le graphique donnant l'évolution de la concentration sur cinq heures.

c. La demi-vie

Observation

Au bout de combien de minutes la concentration initiale aura-t-elle été divisée par 2 ?

Quelle est la concentration au bout de 30 minutes ?

Au bout de combien de minutes aura-t-elle été divisée par 2 ?

Que constate-t-on ?

Tester cette conjecture sur d'autres durées.

Justification

Exprimer C_{n+20} en fonction de C_n .

Justifier le résultat observé précédemment.

Méthode

Suivre le mode d'emploi B page ci-contre.

3. Étude du cas où k varie

a. Créer une nouvelle feuille de calcul dans laquelle on entrera la valeur de k dans la cellule D1 et les termes C_n seront recalculés automatiquement lorsque l'on changera k .

b. Reprendre la question 2 c avec pour valeurs de k :

$$k_2 = 0,015 \quad \text{puis} \quad k_3 = 0,045.$$

Méthode

Suivre le mode d'emploi C page ci-contre.

4. Calcul d'une somme

OBJECTIF : Déterminer expérimentalement une formule de calcul possible d'une somme ; différencier conjecture, test de validation et démonstration.

Soit $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(k-1)$ pour $n \geq 1$.

On cherche à expliciter u_n en fonction de n .

1. Calculer à la main les termes u_1, u_2, u_3, u_4 .

2. Montrer que, pour tout $n \geq 1, u_{n+1} = \frac{n}{n+1} u_n + n$.

Entrer la suite sur la calculatrice. Quelles valeurs de u_{10}, u_{20}, u_{30} donne-t-elle ?

3. Représenter graphiquement sur la calculatrice les termes u_n pour $0 \leq n \leq 30$. Ces points sont situés sur une courbe d'allure familière. Quel est le type de la courbe ? Quel type d'expression de u_n en fonction de n peut-on conjecturer ?

4. À l'aide de valeurs de u_n calculées précédemment, déterminer précisément quelle pourrait être l'expression de u_n .

Vérifier pour d'autres valeurs de n .

5. Quelle est l'expression de u_n en fonction de n ?

Méthode

Pour l'utilisation de la calculatrice, voir page 437 et suivantes selon la calculatrice utilisée.


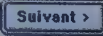

Méthode

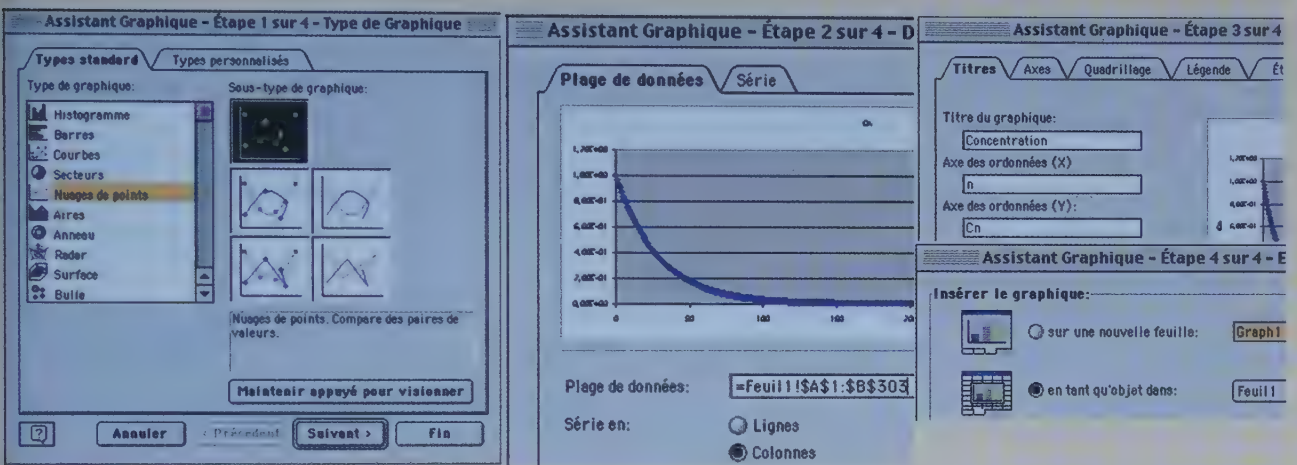
Attention ! On se rappellera l'activité 2.

Utilisation d'un tableur (suite)

Mode d'emploi B

Faire un graphique

Pour tracer le graphique, mettre en surbrillance les colonnes A et B (en cliquant sur le nom « A » et en glissant sur le nom « B »), puis sélectionner l'assistant graphique  et compléter les différents écrans de l'assistant graphique comme indiqué. Utiliser le bouton  pour changer d'écran et le bouton  pour coller le graphique sur la feuille de calcul.



Assistant Graphique - Étape 1 sur 4 - Type de Graphique

Type de graphique: **Nuages de points**

Sous-type de graphique: **Nuages de points. Compare des paires de valeurs.**

Assistant Graphique - Étape 2 sur 4 - D

Plage de données: **=Feuil1!\$A\$1:\$B\$303**

Série en: Colonnes

Assistant Graphique - Étape 3 sur 4

Titre du graphique: **Concentration**

Axe des ordonnées (X): **n**

Axe des ordonnées (Y): **Cn**

Assistant Graphique - Étape 4 sur 4 - E

Insérer le graphique: en tant qu'objet dans: **Feuil1**

Mode d'emploi C

Utiliser une adresse absolue

À l'aide des onglets, passer en feuille 2. Entrer $k =$ en cellule C1 et la valeur de k en cellule D1.

Remplir la colonne A et les cellules B1 et B3 comme précédemment. Reprendre alors la méthode utilisée dans le A en tapant dans la cellule B4 la formule

$= (1 - D1) * B3$. Recopier cette formule vers le bas et observer les formules contenues dans les cellules B5 ou B6. Correspondent-elles à nos besoins ?

Ici on a besoin que la référence à la valeur de k soit bloquée lors de la recopie. C'est ce que l'on appelle une **référence absolue**. On utilise pour cela le symbole \$ (disponible au clavier). La désignation D1 est remplacée par \$D\$1.

Corriger la formule de la cellule B4 et la recopier vers le bas. Mettre successivement en D1 les valeurs k_1 , k_2 et k_3 (la feuille sera automatiquement recalculée) afin de répondre à la question 3 b du TP3.

Décroissa			
	A	B	C
1	n	Cn	k=
2			0,034
3		0	1
4		1	=(1-D1)*B3
5		2	

Décroissa			
	A	B	C
1	n	Cn	k=
2			0,034
3		0	1
4		1	=(1-\$D\$1)*B3
5		2	

5. Un problème de calculatrice

OBJECTIF : Connaître le principe de dichotomie (partie A) qui sera utilisé dans des démonstrations du chapitre 2 ; comprendre comment fonctionne un programme (avec boucle et test) en le faisant « tourner à la main » (partie B).

La touche $\sqrt{\quad}$ de ma calculatrice ne fonctionne plus et j'ai besoin d'une valeur approchée de $\sqrt{19}$. Les autres touches semblent fonctionner correctement. Comment faire ?

A. ➔ L'algorithme

- Étape 1.** Je sais que $\sqrt{19}$ appartient à l'intervalle $I_0 = [4 ; 5]$. (Pourquoi ?) Je coupe I_0 en deux intervalles de même longueur : $[4 ; 4,5]$ et $]4,5 ; 5]$. Il est sûr que $\sqrt{19}$ appartient à l'un des deux. Je calcule $4,5^2$ (ouf, la touche puissance fonctionne !). Dans quel intervalle I_1 puis-je localiser $\sqrt{19}$?
- Étape 2.** Je sais que $\sqrt{19} \in I_1$. Je vais donc couper I_1 en deux intervalles de même longueur et, comme précédemment, localiser $\sqrt{19}$ dans l'un de ces deux intervalles que j'appellerai I_2 . Quel est l'intervalle I_2 ?
- Généralisation.** On a trouvé que $\sqrt{19}$ appartient à un intervalle I_n ($n \in \mathbb{N}$) dont on note a_n et b_n les bornes : $I_n = [a_n ; b_n]$. Expliquez comment construire un intervalle I_{n+1} de longueur moitié contenant $\sqrt{19}$.
- Exprimez en fonction de n la longueur de l'intervalle I_n . Quelle est l'amplitude de l'encadrement de $\sqrt{19}$ obtenu en calculant I_{20} ? Pas mal comme précision, mais le calcul de I_{20} paraît bien long ! Voyons comment on peut programmer ce calcul sur la calculatrice.

Vocabulaire

Cette méthode porte le nom de **dichotomie** (du grec *dikhotomos*, coupé en deux).

B. ➔ La programmation

On connaît $I_0 = [a_0 ; b_0] = [4 ; 5]$ et on souhaite calculer les bornes a_p et b_p de I_p pour un entier $p \geq 0$.

Écrire un programme sur la calculatrice, c'est écrire une suite d'instructions que la calculatrice effectuera une par une de façon automatique lorsqu'on lancera le programme.

Pour comprendre un programme, le tester et trouver d'éventuelles erreurs, il est souvent intéressant de le faire « tourner à la main », c'est-à-dire de se « prendre pour la calculatrice » et d'effectuer les unes après les autres, à la main, les instructions rencontrées à chaque ligne.

C'est ce que nous allons faire en prenant comme valeur de l'indice de fin la valeur 3, c'est-à-dire qu'à la fin du programme, la calculatrice doit nous donner $I_3 = [a_3 ; b_3]$.

- Sur la page ci-contre, un tableau récapitule les instructions du programme, des commentaires et l'état des variables. Le début du tableau est rempli. Lisez-le attentivement, recopiez-le puis complétez les colonnes **État des variables** ligne par ligne. Continuez ainsi le tableau jusqu'à ce que vous arriviez à la fin du programme. Que représentent les valeurs de a et b affichées alors par la calculatrice ?
- Entrez le programme dans la calculatrice (aide page 444).
- Faites tourner le programme pour obtenir l'intervalle $I_{20} = [a_{20} ; b_{20}]$. Comparez avec la valeur de $\sqrt{19}$ affichée par une calculatrice.

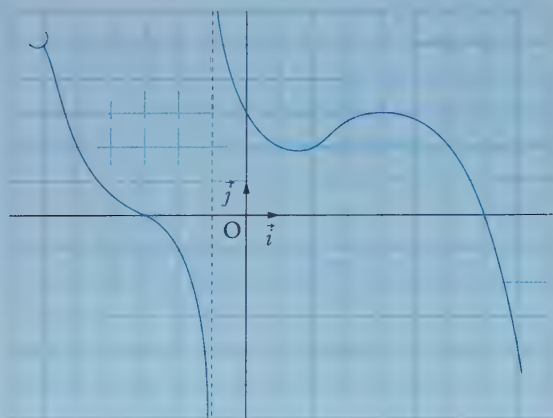
Programme		Commentaires	État des variables			
Ligne	Instructions		a	b	n	p
Entrée des données						
L1	Demander « valeur de a_0 »	La calculatrice va donc afficher à l'écran : <i>valeur de a_0 ?</i>				
L2	Ranger la valeur entrée par l'utilisateur dans la variable a	L'utilisateur va taper la valeur de a_0 , 4 dans notre exemple, et la calculatrice va la ranger dans une case de sa mémoire (imaginez une boîte aux lettres) qui portera l'adresse a .	4			
L3	Demander « valeur de b_0 »	La calculatrice va donc afficher à l'écran : <i>valeur de b_0 ?</i>	4			
L4	Ranger la valeur entrée par l'utilisateur dans la variable b	L'utilisateur va taper la valeur de b_0 , 5 dans notre exemple, et la calculatrice va la ranger dans une case de sa mémoire (une autre boîte aux lettres) qui portera l'adresse b .	4	5		
L5	Demander « indice de début »					
L6	Ranger la valeur entrée par l'utilisateur dans la variable n	L'indice de début est 0 dans notre exemple.				
L7	Demander « indice de fin »					
L8	Ranger la valeur entrée par l'utilisateur dans la variable p					
Test d'arrêt						
L9	Test 1 : n est-il égal à p ? Si oui, afficher a et b ; fin du programme. Sinon, effectuer les instructions qui suivent	La calculatrice compare les valeurs contenues dans n et p . Pour l'instant, n est différent de p . Donc on passe aux lignes suivantes (les valeurs des variables sont inchangées).				
Boucle						
L10	Test 2 : Si $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > 19$, ranger la valeur de $\frac{a+b}{2}$ dans b . Sinon, ranger la valeur de $\frac{a+b}{2}$ dans a	La calculatrice calcule $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ avec les valeurs contenues dans a et b . Pour l'instant, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{4+5}{2}\right)^2 = 20,25$. Comme $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > 19$, la calculatrice range la valeur de $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ soit $\frac{4+5}{2} = 4,5$ dans b à la place de la valeur 5 qui y figurait.				
L11	Ranger la valeur $n + 1$ dans n	La calculatrice calcule $n + 1$ avec la valeur contenue dans n (soit $0 + 1$) et range le résultat dans n (ce qui efface la valeur précédente).				
L12	Revenir à l'instruction de la ligne L9	La calculatrice va effectuer à nouveau l'instruction de la ligne L9.				
Test d'arrêt						
L9						
Boucle (second passage)						
L10						
...

→ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Dans toute la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Courbes

1 La courbe ci-dessous représente une fonction f .



Déterminer par lecture graphique :

- $f(4)$ et $f(0)$;
- l'ensemble de définition de f ;
- les solutions de $f(x) = 0$;
- le signe de $f(x)$;
- le signe de $f(x) - 2$;
- le signe de $f(x) - x - 1$ (on tracera la droite d'équation $y = x + 1$) ;
- le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$.

2 Résoudre graphiquement à l'aide des courbes des fonctions de référence :

- $x^2 \geq 9$;
- $x^2 \leq 100$;
- $\frac{1}{x} \leq 4$;
- $x^2 \leq \frac{1}{x}$;
- $\frac{1}{x} > x$;
- $\sqrt{x} > x - 2$.

3 Représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = x^2$ si $x \leq 1$ et $f(x) = 1 - x$ si $x > 1$.

4 Définit-on une fonction sur \mathbb{R} en associant à tout x réel 1 si x est positif ou nul, -1 s'il est négatif ou nul ?

5 Représenter graphiquement la fonction h qui à tout réel x associe $\max\left(x^2 - x - 5; \frac{3}{x}\right)$, où $\max(a, b)$ désigne le plus grand des deux nombres a et b .

6 Attention aux bornes !

1. Représenter la courbe d'une fonction f définie sur $[0; 4]$ sachant que :

- elle est croissante sur $[0; 2]$,
- elle est décroissante sur $[2; 4]$.

La fonction f admet-elle nécessairement un minimum ? un maximum ?

2. Représenter la courbe d'une fonction g définie sur $[0; 4]$ sachant que :

- elle est croissante sur $[0; 2[$,
- elle est décroissante sur $]2; 4]$,
- elle n'admet pas de maximum sur $[0; 4]$.

7 Des points communs

Soit P la courbe d'équation $y = x^2 + 1$ et D_k la droite d'équation $y = kx$ ($k \in \mathbb{R}$).

1. Déterminer suivant les valeurs de k le nombre de points d'intersection de P et D_k .

2. Soit φ la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à tout k associe le nombre de points d'intersection de P avec D_k . Représenter graphiquement la fonction φ .

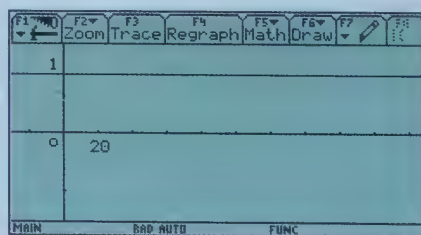
8 Faut-il faire confiance à la calculatrice ?

1. Tracer sur une calculatrice la courbe d'équation $y = \cos(2\pi x)$ pour $-3 \leq x \leq 7$.

2. On a représenté cette même courbe sur une calculatrice TI 92 pour :

$$-30 \leq x \leq 208 \quad \text{et} \quad -1,5 \leq y \leq 1,5$$

et l'écran suivant a été obtenu.



Est-ce la courbe attendue ?

3. L'écran d'une calculatrice est composé de points (pixels) qui sont marqués ou non suivant le tracé à afficher (c'est un tracé « point par point »). L'écran de la TI 92 comporte 103 lignes et 239 colonnes de pixels. Expliquer l'affichage obtenu ci-dessus.

4. L'écran d'une TI 82 comportant 62 lignes et 95 colonnes de pixels, proposer un intervalle sur lequel le même phénomène se produirait.

9 Donner à l'aide d'une calculatrice l'allure de la courbe d'équation $y = \frac{15}{(x-1)^3} - \frac{10}{x^2}$, ... toute la courbe.

Fonctions polynômes et rationnelles

Rappel : Une fonction f définie sur \mathbb{R} est une fonction polynôme si on peut trouver des réels a_0, a_1, \dots, a_n ($n \in \mathbb{N}$) tels que :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

pour tout x réel.

Une fonction est une fonction rationnelle si on peut l'écrire comme un quotient de deux fonctions polynômes.

10 Dire si chacune des fonctions suivantes est une fonction polynôme ou non.

- a. $f(x) = 2x^2 + 5$; b. $f(x) = \frac{3}{5}x$;
 c. $f(x) = \frac{2x^3 + 5}{4}$; d. $f(x) = 2x + \sqrt{x} - 5$;
 e. $f(x) = \frac{2x-1}{3x+4}$; f. $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + \frac{2}{x}$;
 g. $f(x) = 2x + \sin x$; h. $f(x) = (3x-4)^3$.

11 Dire si chacune des fonctions suivantes est une fonction rationnelle ou non :

- a. $f(x) = \frac{2x-1}{3x+4}$; b. $f(x) = \frac{2+\sqrt{x}}{3x-1}$;
 c. $f(x) = \frac{3}{5}x - 4$; d. $f(x) = x - \frac{2}{x}$;
 e. $f(x) = \frac{2+\cos x}{x^2+1}$; f. $f(x) = \frac{27x^5 - 4x^3}{x^3}$.

Opérations sur les fonctions

12 Déterminer $u \circ v(x)$ et $v \circ u(x)$ pour :

- a. $u(x) = x^2 - 3$ et $v(x) = 2\sqrt{x}$;
 b. $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = 3x + 5$;
 c. $u(x) = 2 \sin x$ et $v(x) = 2x^2 - 1$.

13 Écrire les fonctions suivantes comme des sommes, produits, quotients ou composées de fonctions.

- a. $f(x) = 2x + \sqrt{x}$;
 b. $f(x) = \frac{2x^3 \sqrt{x}}{5}$;
 c. $f(x) = (x-1)(3x^2+2) + 2$;
 d. $f(x) = \sin(2x)$;
 e. $f(x) = (2x+4)^3$; f. $f(x) = x\sqrt{x+5}$;
 g. $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$; h. $f(x) = 3x - \frac{4}{5x+2}$;
 i. $f(x) = \cos^2 x$; j. $f(x) = 2x \cos x$.

14 Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles dont on peut trouver le sens de variation en utilisant les résultats sur le sens de variation d'une somme, du produit par une constante ou d'une composée ?

- a. $f(x) = x^2 + 3x$ sur \mathbb{R}^+ ;
 b. $f(x) = x^2 + 3x$ sur \mathbb{R}^- ;
 c. $f(x) = x - \frac{3}{x}$ sur $]0; +\infty[$;
 d. $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$;
 e. $f(x) = \sqrt{2x-4}$ sur $[2; +\infty[$;
 f. $f(x) = \frac{4}{x-3}$ sur $]3; +\infty[$;
 g. $f(x) = \sin(2x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$;
 h. $f(x) = \frac{3}{(2x-4)^2}$ sur ... (on ne va quand même pas tout vous dire : à vous de trouver les intervalles...).

Suites, écritures

15 On connaît le premier terme u_1 d'une suite et on sait que chaque terme est égal à la somme de 4 et du terme précédent multiplié par 3.

- Calculer u_2, u_3, u_4 .
- Écrire la relation de récurrence sous différentes formes :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \dots \text{ pour tout } n \geq \dots \\ u_n &= \dots \text{ pour tout } n \geq \dots \\ u_{n-1} &= \dots \text{ pour tout } n \geq \dots \end{aligned}$$

16 Écrire, à l'aide du symbole Σ , les sommes suivantes.

- a. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}$ ($n \geq 2$) ;
 b. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1}$ ($n \geq 2$) ;
 c. $f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f(2)$ ($n \geq 1$).

17 Calcul à la main

Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

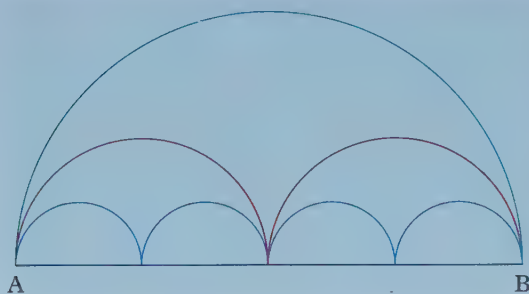
- a. $u_n = 2 + \frac{2}{n}$ pour tout $n \geq 1$;
 b. $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = -2u_n + 1$;
 c. $u_2 = 3$ et pour tout $n \geq 3$, $u_n = \sqrt{u_{n-1}}$;
 d. pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=0}^n k(k+1)$.

Suites arithmétiques, géométriques

18 Par quel chemin ?

On construit des chemins successifs pour aller de A à B, formés de demi-cercles.

Le premier chemin en vert comporte un seul demi-cercle, le second chemin en rouge comporte deux demi-cercles de même rayon, le troisième en bleu comporte quatre demi-cercles de même rayon, etc.



On note L_n la longueur du n -ième chemin ($n \geq 1$).

1. Exprimer L_1 , L_2 et L_3 en fonction de $a = AB$.
2. Que peut-on dire de la suite (L_n) (justifier) ?

19 La main verte

Le 1^{er} janvier 2002, on a acheté un ficus et un cactus de hauteurs respectives 0,50 m et 1,50 m. La hauteur du ficus augmente de 20 % par an et celle du cactus de 4 %.

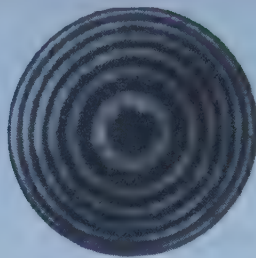
On note u_n et v_n les hauteurs respectives en mètres du ficus et du cactus le 1^{er} janvier de l'année $(2002 + n)$.

1. Donner les valeurs de u_0 et v_0 . Calculer u_1 et v_1 .
2. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et v_{n+1} en fonction de v_n .
b. En déduire u_n et v_n en fonction de n .
3. En calculant les premiers termes des deux suites, déterminer en quelle année le ficus rattrapera le cactus.

20 Un coureur de fond décide de s'entraîner pour le marathon. La première semaine, il court sur sa distance habituelle de 10 000 m.

1. En supposant que chaque semaine il allonge sa distance d'entraînement de 1 500 m, au bout de combien de semaines atteindra-t-il les 42,195 km d'un marathon ? Quelle distance totale aura-t-il alors parcourue à l'entraînement ?
2. En supposant maintenant qu'il augmente chaque semaine la distance parcourue à l'entraînement de 10 %, déterminer à la calculatrice au bout de combien de semaines il atteindra la distance du marathon. Quelle distance totale aura-t-il alors parcourue à l'entraînement ?

21 Anneaux de Newton



Ce phénomène d'interférence en optique fait apparaître des anneaux sombres successifs délimités par des cercles dont les rayons r_k sont proportionnels à la racine carrée des nombres entiers : $r_k = a\sqrt{k}$. Étudier la suite des aires des disques successifs.

22 Soit (u_n) et (v_n) les suites définies sur \mathbb{N} par :

$$u_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Démontrer que la suite de terme général $w_n = u_n + v_n$ (respectivement $t_n = u_n - v_n$) est une suite géométrique (respectivement arithmétique).

2. En déduire les sommes :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

23 La suite (u_n) est définie pour tout n de \mathbb{N} par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 3u_n - 6.$$

On pose $v_n = u_n - 3$ pour tout n de \mathbb{N} .

1. Montrer que (v_n) est géométrique.
2. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
3. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

24 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout n

$$\text{de } \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 1.$$

1. On pose $v_n = u_n + \alpha$.

Montrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle (v_n) est une suite géométrique.

2. Exprimer alors v_n et u_n en fonction de n .
3. Étudier la convergence de la suite (u_n) .

25 Faut-il faire confiance à la calculatrice (bis) ?

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{11}$, et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 100u_n - 9$.

1. Quelles sont les valeurs de $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{10}$ données par la calculatrice ?
2. Calculer à la main u_1, u_2 . Quelle est la valeur de u_{10} ?
3. Que s'est-il passé sur la calculatrice ?

Suites majorées, minorées

26 Montrer que la suite (u_n) est bornée par m et M .

- a. $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \geq 1$, $m = 1$, $M = 3$;
 b. $u_n = 2 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ pour tout $n \geq 1$, $m = 1$, $M = 3$.

27 Soit $u_n = n + \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

- À l'aide d'une calculatrice, dire si la suite (u_n) semble monotone, minorée, majorée.
- Étudier le sens de variation de (u_n) .
- Montrer que la suite est minorée. Est-elle majorée ?

28 La suite u est donnée par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_n = (-1)^n \times 2 + u_{n-1}$.

- Calculer $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$.
Quelle conjecture peut-on faire sur la suite (u_{2n}) ? et sur la suite (u_{2n+1}) ?
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , puis u_{n+1} en fonction de u_{n-1} .
- Démontrer les conjectures faites à la question 1.

29 Soit $u_n = 2 - \frac{(-1)^n}{2n+1}$ pour $n \geq 0$.

- Représenter graphiquement les premiers termes de la suite et la droite D d'équation $y = 2$.
- Exprimer $|u_n - 2|$ en fonction de n et interpréter graphiquement cette expression.
- Montrer que la suite (u_n) est bornée.
- Que se passe-t-il quand n tend vers $+\infty$?

Récurrence

30 On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

- Calculer u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 .
- Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^n - 1$.

31 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ pour tout n de \mathbb{N} .

- Émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n .
- Démontrer cette conjecture.

32 On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_0 = 0$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$.

- Calculer v_1, v_2, v_3 .
- A-t-on $v_n = n(n+1)$ pour tout n de \mathbb{N} ?

33 Observer la figure ci-dessous formée de n colonnes et n rangées de points.

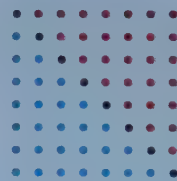
1. Exprimer en fonction de n le nombre total de points.

En déduire le nombre de points bleus et le nombre de points rouges.

2. En déduire l'expression en fonction de n de la somme

$$1 + 2 + \dots + n, \text{ pour } n \geq 1.$$

Redémontrer cette formule par récurrence.



34 Un grand classique

Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

35 On définit la suite u pour tout $n \geq 0$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Montrer que la suite est bornée par 1 et 2.

36 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{2u_n + 3}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f définie

$$\text{sur } [0; +\infty[\text{ par } f(x) = \frac{2}{2x+3}.$$

2. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que la suite (u_n) est bornée par 0 et 1.

37 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par

$$u_1 = -1 \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_{n+1} > u_n$.

2. Qu'en déduit-on pour la suite (u_n) ?

38 On donne ci-dessous une liste de propriétés.

Pour lesquelles peut-on envisager une démonstration par récurrence (que l'on ne fera pas) ?

(A) Pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

(B) Pour tout x réel positif, $x^2 + 1 \geq x$.

(C) Pour tout x réel, $(1+x)^6 \geq 1+6x$.

(D) Pour tout entier naturel n , pour tout réel positif x , $(1+x)^n \geq 1+nx$.

39 Pour démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \leq n^3$$

Max a fait une jolie démonstration par récurrence.

1. Retrouver la démonstration de Max.

2. Expliquer le commentaire du professeur :

« Correct, mais bien maladroit ! »

→ Que sais-je ?

Vrai ou faux ?

On justifiera les réponses données aux **exercices 40 à 56**.

40 Pour toute fonction f définie sur $[0 ; 1]$, on a :
 • soit $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ pour tout x de $[0 ; 1]$;
 • soit $f(0) \geq f(x) \geq f(1)$ pour tout x de $[0 ; 1]$.

41 Une fonction f majorée sur un intervalle I admet un maximum sur I .

42 Une fonction croissante sur I ne peut pas être majorée.

43 Si f n'admet pas de majorant sur un intervalle I , alors f est croissante sur I .

44 La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ est bornée par -1 et 1 .

45 La fonction f définie sur $]-\infty ; 2]$ par $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$ est décroissante sur $]-\infty ; 2]$.

46 Si u et v sont deux fonctions décroissantes sur $[-1 ; 0]$, $v \circ u$ est croissante sur $[-1 ; 0]$.

47 La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + n + 5$, est une suite arithmétique de raison $n + 5$.

48 La suite géométrique de premier terme -2 et de raison 3 a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

49 La somme $5 + 7 + 9 + \dots + 1\ 213$ comporte 605 termes.

50 Une suite croissante ne peut pas être majorée.

51 Une suite croissante est minorée.

52 Une suite à termes tous positifs ne peut pas être strictement décroissante.

53 La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = 2u_n - 3$, est croissante.

54 La suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = 2u_n - 3$, est croissante.

55
$$\sum_{k=0}^n (2k + 3) = \sum_{k=1}^{n+1} (2k + 1).$$

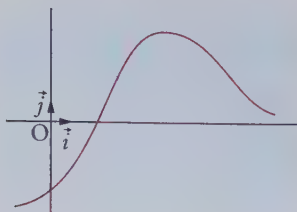
56 Pour tout n entier naturel non nul, on note $n!$ le produit des n premiers entiers non nuls, c'est-à-dire $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.
 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n!$ admet 2^{n-1} diviseurs positifs.

QCM

Dans les **exercices 57 à 60**, choisir la ou les réponses justes.

57 Soit f la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. Alors :

- A. l'équation $f(x) = 3$ a une seule solution ;
- B. il existe a et b tels que $a \neq b$ et $f(a) = f(b)$;
- C. $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$;
- D. $a \neq 3 \Rightarrow f(a) \neq f(3)$;
- E. $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$.



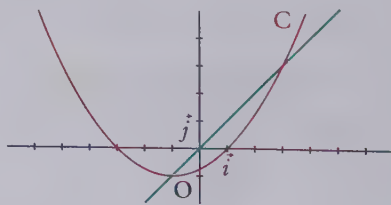
58 Si $u_n = 1 - 2 + 4 + \dots + (-1)^n 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$:

- A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$;
- B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$;
- C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$;
- D. (u_n) n'a pas de limite.

59 On définit (u_n) par $u_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$. On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = u_n + 2$.

- A. (v_n) est géométrique ;
- B. $v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$;
- C. $u_n = -2 + \frac{1}{2^{n-3}}$;
- D. (u_n) converge ;
- E. pour tout $n \geq 10$, $-2 < u_n < -1,99$.

60 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction représentée par la courbe C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.



- A. Si $u_0 = -2$, la suite (u_n) est convergente.
- B. Si $u_0 = 1$, la suite (u_n) est croissante.
- C. Si $u_0 < -5$, la suite (u_n) est décroissante.
- D. Si $u_0 > 3$, la suite (u_n) est décroissante.

→ Un sujet vu au BAC (extrait)

61 On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

- Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
- Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
- Conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Épreuve nationale, juin 2004.

Solution

1. Pour comparer u_n et u_{n+1} , étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$. Comme n est positif, $2n + 3$ l'est aussi, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n de \mathbb{N} . La suite (u_n) est donc croissante.

2. a. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $u_n > n^2$.

• **Initialisation.** Il s'agit de montrer que la propriété est vraie pour $n = 0$, c'est-à-dire que $u_0 > 0^2$. Comme $u_0 = 1$, par énoncé, et $0^2 = 0$, la propriété est bien vérifiée pour $n = 0$.

• **Hérédité.** Soit $k \geq 0$. On suppose que la propriété est vraie pour $n = k$ et on veut démontrer qu'elle est vraie pour $n = k + 1$.

Hypothèse de récurrence : $u_k > k^2$.

À démontrer : $u_{k+1} > (k+1)^2$.

Par énoncé, $u_{k+1} = u_k + 2k + 3$.

Par hypothèse de récurrence, $u_k > k^2$. On en déduit que :

$$u_{k+1} > k^2 + 2k + 3$$

ce qui s'écrit encore $u_{k+1} > (k+1)^2 + 2$.

Comme $(k+1)^2 + 2 > (k+1)^2$, on a $u_{k+1} > (k+1)^2$.

La propriété est héréditaire.

• **Conclusion.** Étant vraie pour 0 et héréditaire à partir de 0, la propriété est vraie pour tout entier naturel n , c'est-à-dire que, pour tout n de \mathbb{N} , $u_n > n^2$.

3. On sait que $u_0 = 1$; on calcule alors les premiers termes suivants : $u_1 = 4$, $u_2 = 9$, $u_3 = 16$, $u_4 = 25$. Dans la liste 1, 2, 4, 9, 16, 25 on reconnaît les carrés des premiers entiers non nuls. On conjecture que :

$$\text{pour tout } n \geq 0, u_n = (n+1)^2.$$

Démontrons-le par récurrence.

• **Initialisation.** Il s'agit de montrer que la propriété est vraie pour $n = 0$ c'est-à-dire que $u_0 = (0+1)^2$.

Or $u_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$.

On a donc bien $u_n = (n+1)^2$ pour $n = 0$.

• **Hérédité.** Soit $k \geq 0$. On suppose que la propriété est vraie pour $n = k$ et on veut démontrer qu'elle est vraie pour $n = k + 1$.

Hypothèse de récurrence : $u_k = (k+1)^2$.

À démontrer : $u_{k+1} = (k+2)^2$.

Par énoncé, $u_{k+1} = u_k + 2k + 3$. Ayant $u_k = (k+1)^2$ par hypothèse de récurrence, on en déduit que :

$$u_{k+1} = (k+1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4$$

c'est-à-dire $u_{k+1} = (k+2)^2$.

La propriété est héréditaire.

• **Conclusion.** Étant vraie pour 0 et héréditaire à partir de 0, la propriété est vraie pour tout entier naturel n , c'est-à-dire que, pour tout n de \mathbb{N} , $u_n = (n+1)^2$.

le jour du BAC

Question 2 : La suite étant définie par récurrence, on ne peut obtenir un terme qu'à partir du précédent. De ce fait pour démontrer qu'un terme quelconque de la suite vérifie une certaine condition, on doit penser à un raisonnement par récurrence.

Question 3 : Pour conjecturer l'expression de u_n en fonction de n , on a besoin des premiers termes. Leur calcul conduit à la liste 1, 4, 9, 16, 25 où l'on reconnaît 1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 et 5^2 .

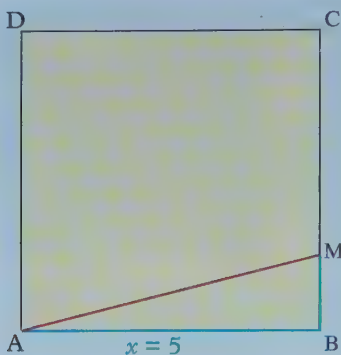
On sait donc que $u_n = (n+1)^2$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et l'on conjecture qu'il en est de même pour les termes suivants.

→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Fonctions

62 CD Le chapiteau

Le carré ABCD a pour côté 4.
Le point M part de A et parcourt le carré dans le sens ABCD. On note x la distance parcourue par M depuis A et $f(x) = AM$.



- Déterminer $f(x)$ pour $x \in [0 ; 4]$.
- Déterminer $f(x)$ pour $x \in [4 ; 8]$. Quel est le sens de variation de f sur $[4 ; 8]$?
- Tracer la courbe Γ représentant f sur $[0 ; 8]$.
- Justifier par des considérations géométriques que la courbe Γ admet la droite d'équation $x = 8$ pour axe de symétrie.
- Construire la courbe Γ sur $[0 ; 16]$.

63 Soit a et b deux réels positifs.

- Comparer les nombres $\frac{a^2 + b^2}{2}$ et $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

2. Interprétation graphique du résultat

On considère les points A, B et J de la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$ qui ont pour abscisses respectives a , b et $\frac{a+b}{2}$.

- Quelles sont les coordonnées du milieu I de [AB] ?
- Interpréter graphiquement le résultat de la question 1.
- Par lecture graphique sur les courbes de référence, comparer, pour a et b réels strictement positifs :

a. $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ et $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$;

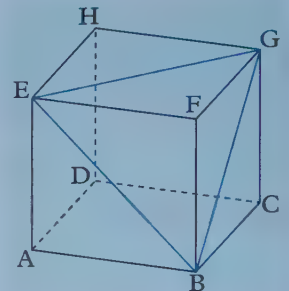
b. $\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\frac{\cos(a) + \cos(b)}{2}$

si $0 \leq a < b \leq \frac{\pi}{2}$;

c. $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$ et $\frac{2}{a+b}$.

64 CD Un peu d'espace

On coupe le cube ABCDEFGH par un plan P parallèle au plan (EBG) et on s'intéresse au périmètre et à l'aire de la section obtenue.



On pose $a = AB$.

- Cas où le plan coupe l'arête [EF] en un point K.
 - Dessiner la section du cube. Quelle est sa nature ?
 - On note x la distance FK. Exprimer en fonction de x le périmètre $p(x)$ et l'aire $a(x)$ de la section.
- Pour aller plus loin :** cas où le plan coupe l'arête [HE] en un point J.
 - Dessiner la section du cube. Quelle est sa nature ?
 - On note x la distance HJ. Exprimer en fonction de x le périmètre $q(x)$ et l'aire $s(x)$ de la section.
 - Quelle est la section d'aire maximale ?

Sens de variation d'une suite

65 Étudier le sens de variation des suites définies par :

- $u_n = 2\sqrt{n}$ pour tout $n \geq 0$;
- $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

66 Même exercice que le 65 avec :

- $u_n = 2^n - n$ pour $n \geq 0$;
- $u_n = n^2 - 4n + 3$ pour $n \geq 0$; $v_n = n^2 - 4n + 3$ pour $n \geq 2$.

Suites majorées, minorées

67 Montrer que la suite (u_n) est bornée par m et M .

- $u_n = \frac{3-n}{2+n}$ pour tout $n \geq 0$, $m = -1$, $M = \frac{3}{2}$;
- $u_n = \frac{n + \sin(n)}{n}$ pour tout $n \geq 1$, $m = 0$, $M = 2$.

68 Soit $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ pour $n \geq 0$:

- Calculer u_0 , u_1 , u_2 , u_3 .
- Montrer que, pour $k \geq 0$,

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2(2k+1)} - \frac{1}{2(2k+3)}$$

- En déduire que la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

Suites arithmétiques, géométriques

69 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = 0.$$

(On posera $q = \frac{x+1}{x-1}$.)

70 Calculez le nombre d'ascendants à la 10^e génération, que vous possédez.

71 Un triangle arithmétique

Dans ce triangle, chaque nombre est la somme des trois nombres situés au-dessus (celui situé immédiatement au-dessus et ses deux voisins).

				1						
			1	1	1					
		1	2	3	2	1				
	1	3	6	7	6	3	1			
1	4	10	16	19	16	10	4	1		
1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1

Quelle est la somme des nombres de la n -ième rangée de ce triangle ? Justifier.

72 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 2$ et,

pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

1. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , $u_n \neq 1$.
2. On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

73 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour

tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{u_n + 1}$.

1. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , $1 < u_n < 3$.
2. On pose $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique ; en préciser le premier terme et la raison.
 - b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Programmation

74 Programme à décrypter

On retrouve cet ancien programme.

1. Demander un nombre ; le ranger dans la variable X.
2. Demander une valeur entière ; la ranger dans la variable p.
3. Ranger 0 dans la variable n.
4. Effectuer le test : $n = p$?
5. Si oui, afficher n et X. Fin du programme.
Si non, augmenter n de 1,
remplacer X par $X^2 - 2X + 3$,
revenir à la ligne 4.

1. Quelles sont les trois variables utilisées dans ce programme ?
2. En s'inspirant du TP 5, faire tourner ce programme à la main en prenant comme valeur 1 pour X à la ligne 1 et comme valeur 4 pour p à la ligne 2.
3. Quel calcul est ainsi automatisé ici ?

75 Programme à créer

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Créer un programme permettant de faire afficher le premier entier n pour lequel la valeur de u_n donnée par la calculatrice sera supérieure à un nombre réel a donné. Quel est cet entier pour $a = 2$? $a = 4$? $a = 6$?

76 Tableur

Sur la feuille de calcul ci-dessous, on a affiché les deux formules entrées dans les cellules B3 et C3.

	A	B	C
1	n	u(n)	v(n)
2	0	1	4
3	1	=B2+2*C2	=2*B2+C2
4	2		
5	3		
6	4		

1. Quels nombres figureront dans les cellules B3 et C3 ?
2. On recopie vers le bas ces deux formules sur les trois lignes suivantes (c'est-à-dire sur la plage de cellules B4 : C6).
Quelles formules figureront dans les cellules B4 et C4 ?
Quels seront les nombres affichés dans ces cellules ?
3. Reprendre les mêmes questions pour B5 et C5.
4. Quelles sont les suites u et v dont on calcule ici les premiers termes ?

Réurrence

- ✓ **77** 1. Comparer 2^n et n^2 pour différentes valeurs de n .
 2. Résoudre l'inéquation $2n^2 \geq (n+1)^2$.
 3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n > 3$, $2^n \geq n^2$.
 4. Pour quelles valeurs de n a-t-on $2^n \geq n^2$?

- ✓ **78** Pour un entier $k \geq 1$, on note $k!$ (ce qui se lit « factorielle k ») le produit des k premiers entiers non nuls.
 Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1.$$

- ✓ **79** Montrer que, pour tout entier naturel n , $4^n - 1$ est un multiple de 3.

- 80** On définit les fonctions polynômes P_n pour $n \geq 0$ par $P_0(x) = x$ et pour tout $n \geq 0$:

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x+1).$$

Montrer que $P_n(x) = x(x+1)(x+2) \dots (x+n)$ pour tout $n \geq 0$.

- 81** On place, sur un axe muni d'un repère, deux points A et B d'abscisses respectives a et b telles que $a < b$.

On pose $A_0 = A$, $B_0 = B$ et on construit pour tout $n \geq 1$ les points A_n et B_n , barycentres respectivement de $(A_{n-1}, 3)$, $(B_{n-1}, 2)$ et de $(A_{n-1}, 2)$, $(B_{n-1}, 3)$.

On note a_n et b_n les abscisses des points A_n et B_n .

1. Dans cette question $a = 1$ et $b = 6$. Calculer a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , a_3 , b_3 et placer les points correspondants.

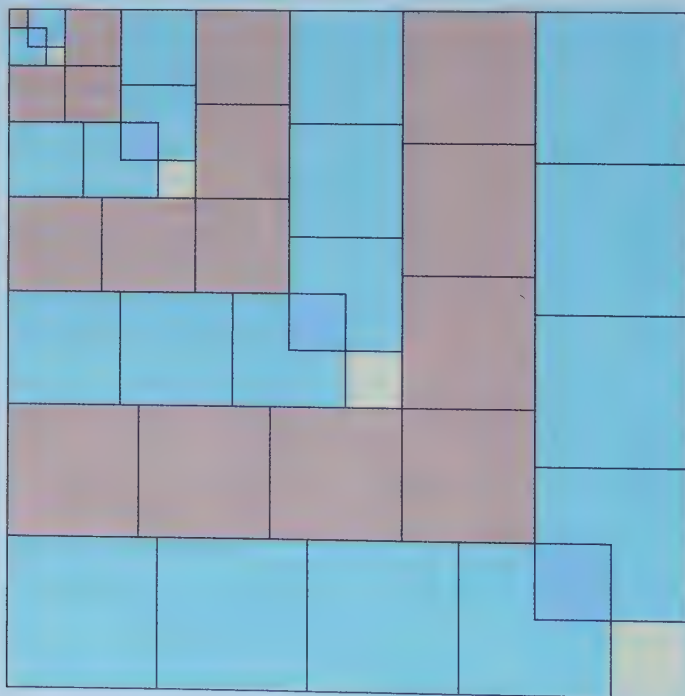
2. Donner l'expression de a_n et b_n en fonction de a_{n-1} et b_{n-1} pour tout $n \geq 1$.

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $a_n \leq b_n$.

En déduire le sens de variation des suites (a_n) et (b_n) .

- 82 a.** Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$.

b. La « preuve sans mots » de cette égalité a été proposée en 1984 par Solomon Colomb. Expliquer pourquoi son dessin permet bien de montrer la formule établie ci-dessus. (Indication : $k^3 = k \times k^2$.)



Source : *Jeux mathématiques et mathématiques des jeux*, J.-P. Delahaye, Bibliothèque pour la science.

83 Inégalité de Bernoulli

On considère dans le plan muni d'un repère la courbe C_n d'équation $y = (1+x)^n$ et la droite D_n d'équation $y = 1 + nx$ où n est un entier naturel.

1. Quelles sont les courbes C_1 et D_1 ?
2. Déterminer la position relative sur \mathbb{R}^+ des courbes C_2 et D_2 .
3. Faire de même pour C_3 et D_3 .
4. Comparer graphiquement $(1+x)^4$ et $1+4x$, $(1+x)^5$ et $1+5x$ pour $x \geq 0$.
5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour x réel positif.

84 Diviseurs de $n!$

1. Écrire les diviseurs positifs de $1! = 1$, $2! = 1 \times 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3$, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$.
2. Émettre une conjecture sur le nombre de diviseurs positifs de $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
3. Infirmer ou démontrer cette conjecture.

85 Montrer que les deux propositions « $10^n - 1$ est multiple de 9 » et « $10^n + 1$ est multiple de 9 » sont héréditaires à partir de $n = 0$.

Sont-elles vraies pour tout $n \geq 0$?

86



ON VIENT DE DÉMONTRER QUE N POINTS QUELCONQUES DU PLAN SONT TOUJOURS ALIGNÉS.

Voici le texte de la démonstration :

1. Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 2$.
2. Hérédité : Supposons que k points quelconques du plan sont toujours alignés. Montrons que $k + 1$ points du plan sont toujours alignés. Notons A_1, A_2, \dots, A_{k+1} des points quelconques du plan. Par hypothèse de récurrence, les k points A_1, A_2, \dots, A_k sont alignés sur une droite que l'on notera D . De même, les k points A_2, A_3, \dots, A_{k+1} sont alignés sur une droite que l'on notera D' . Or les points A_2, \dots, A_k appartiennent à la fois à D et D' . Donc D et D' sont confondues et ainsi les points A_1, A_2, \dots, A_{k+1} sont alignés.
3. Conclusion : la propriété étant vraie pour $n = 2$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \geq 2$.

Que penser de cela ?

D'après la revue *Tangente*.

87 La copie de Zoé

Zoé devait résoudre l'exercice suivant :

« Montrer que la suite (u_n) définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{n+1} \text{ pour } n \geq 0, \text{ est majorée par } 2. »$$

Sa réponse est rédigée ci-dessous.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 2$.

• Initialisation : je montre que la propriété est vraie pour $n = 0$.

Je calcule u_0 : $u_0 = 1 + 1 = 2$ donc l'inégalité $u_n \leq 2$ est vérifiée pour $n = 0$.

• Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un entier $k \geq 0$

c'est-à-dire que $u_k \leq 2$ et montrons qu'elle est vraie pour $k+1$ c'est-à-dire que $u_{k+1} \leq 2$.

Je sais que $u_{k+1} = 1 + \frac{1}{k+2}$. Or $k \geq 0$ donc $k+2 \geq 2$ et $\frac{1}{k+2} \leq \frac{1}{2}$.

J'en déduis que $1 + \frac{1}{k+2} \leq 1 + \frac{1}{2}$ c'est-à-dire que : $u_{k+1} \leq \frac{3}{2}$.

Comme $\frac{3}{2} \leq 2$, on a bien $u_{k+1} \leq 2$.

• Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir du rang 0, donc elle est vraie pour tout n . J'ai donc montré que la suite est majorée par 2.

Expliquer pourquoi le professeur n'est pas satisfait de la réponse de Zoé.

88 Pour chercher

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que, pour tout nombre entier naturel n :

$$x_0^3 + x_1^3 + \dots + x_n^3 = (x_0 + x_1 + \dots + x_n)^2.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n , il existe un entier naturel m tel que :

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Concours général 1991.

→ PROBLÈMES

89 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \text{pour } n \geq 1$$

et

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases} \quad \text{pour } n \geq 1$$

Partie A. Conjectures

- Calculer les quatre premiers termes de chacune des deux suites.
- Les représenter graphiquement sur la droite réelle.
- Quelles conjectures peut-on faire sur chacune des suites (sens de variation, majorant, minorant, comparaison, limites) ?

Partie B. À l'aide d'un raisonnement par récurrence

- Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq v_n$.
- En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont monotones.
- Démontrer qu'elles sont bornées par 1 et 13.

Partie C. À l'aide de suites auxiliaires

- On pose, pour tout n de \mathbb{N}^* , $w_n = v_n - u_n$.
 - Démontrer que $(w_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique.
 - Exprimer w_n en fonction de n pour tout n de \mathbb{N}^* .
- On pose pour tout n de \mathbb{N}^* , $t_n = 3u_n + 8v_n$. Démontrer que la suite (t_n) est constante et préciser la valeur de t_n pour tout n de \mathbb{N}^* .
- En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n , puis préciser la limite des suites (u_n) et (v_n) .

90 CD Un problème d'emprunt immobilier

Pour financer l'achat d'une maison, Marc emprunte un capital C à sa banque à un taux fixe t . Chaque mois, il va rembourser une mensualité fixe m sur une durée de N mois.

La mensualité m payée le n^{e} mois ($1 \leq n \leq N$) se compose de deux parts :

- le remboursement d'une partie du capital notée C_n ;
- le paiement des intérêts notés I_n calculés, pour une durée d'un mois, sur le capital restant dû au début du n^{e} mois.

On notera R_n le capital restant à rembourser à la fin du n^{e} mois.

1. Observation d'un tableau d'amortissement

Sa banque a simulé un prêt de 120 000 € sur 15 ans à un taux de 5,1 %.

(Voir le tableau ci-après.)

Emprunt immobilier				
Capital emprunté (en euros) = 120000		Taux = 5,1%		
		Durée = 180		
n-ième mois	capital restant dû	mensualité	intérêts payés	capital remboursé
1	120000			
2	119554,78	955,22	510,00	445,22
3	119107,68	955,22	508,11	447,11
4	118658,67	955,22	506,21	449,01
5	118207,75	955,22	504,30	450,92
6	117754,92	955,22	502,38	452,83
7	117300,17	955,22	500,46	454,76
8	116843,48	955,22	498,53	456,69
9	116384,85	955,22	496,58	458,63
10	115924,27	955,22	494,64	460,58
11	115461,73	955,22	492,68	462,54

- Vérifier que $I_1 = C \times \frac{t}{12}$ et que $I_2 = R_1 \times \frac{t}{12}$.
- Que vaut $I_n + C_n$?
- Comment varient I_n et C_n au cours du temps ?
- Quel lien y a-t-il entre R_{n+1} , R_n et C_{n+1} ?

2. Étude théorique

- Exprimer R_0 , I_1 , C_1 et R_1 en fonction de C , t , m .
- Justifier que pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$C_n = m - I_n = m - \frac{t}{12} R_{n-1} ;$$

$$C_n = R_{n-1} - R_n .$$

- En déduire que, pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$$C_{n+1} - C_n = \frac{t}{12} C_n .$$

puis que (C_n) est une suite géométrique.

- Le remboursement s'arrêtera lorsque tout le capital aura été remboursé, c'est-à-dire quand :

$$\sum_{n=1}^N C_n = C$$

Calculer $\sum_{n=1}^N C_n$ puis montrer que :

$$m = C \times \frac{t}{12} \times \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{12}\right)^N - 1} \right) .$$

- Vérifier le montant de la mensualité annoncée dans le tableau d'amortissement donné à la question 1. Quel est le coût total de ce crédit (c'est-à-dire la somme des intérêts versés) ? Quel pourcentage du capital emprunté cela représente-t-il ?
- Inversement, déterminer la durée du prêt permettant à Marc d'emprunter le même capital au même taux mais en limitant sa mensualité à 870 €.

3. Prolongement possible sur tableau

Réaliser un tableau d'amortissement analogue à celui présenté à la question 1.

91 Nombres triangulaires et carrés

Les pythagoriciens associaient des figures aux nombres. Nous nous intéressons ici à des nombres figurés particuliers (voir schéma ci-après).

Nombres carrés



Nombres triangulaires



On note C_n le nombre figuré par un carré dont le côté comporte n points et T_n le nombre figuré par un triangle dont la base comporte n points.

Le but du problème est de trouver des nombres à la fois triangulaires et carrés.

Partie A. Quelques exemples

- Expliciter en fonction de n les nombres C_n et T_n .
- Déterminer à l'aide d'une calculatrice deux nombres à la fois triangulaires et carrés.
- Vérifier que 41 616 est à la fois triangulaire et carré.

Partie B. Une condition nécessaire et suffisante

1. Supposons que l'entier N soit à la fois le nombre C_p et le nombre T_q où p et q sont dans \mathbb{N}^* .

Montrer que les nombres x et y tels que $x=p$ et $y=2q+1$ sont des entiers naturels non nuls tels que $N=x^2$ et $y^2-8x^2=1$.

2. Soit N un entier naturel non nul.

Supposons qu'il existe deux entiers naturels non nuls x et y tels que $N=x^2$ et $y^2-8x^2=1$.

- Montrer que y^2 est impair et que $y^2 \geq 9$.
 - En déduire qu'il existe un entier naturel q non nul tel que $y=2q+1$.
 - Montrer que N est à la fois carré et triangulaire.
3. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier naturel N non nul soit à la fois carré et triangulaire.

Partie C. D'autres solutions

On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0=1$, $y_0=3$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$x_{n+1}=3x_n+y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1}=8x_n+3y_n.$$

On note alors $N_n=x_n^2$.

a. Vérifier que N_0, N_1, N_2 sont des nombres à la fois triangulaires et carrés.

b. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, x_n et y_n sont des entiers naturels non nuls tels que $y_n^2-8x_n^2=1$. Que peut-on en déduire pour N_n ?

c. Déterminer trois nouveaux nombres triangulaires et carrés.

Point Info

L'équation $y^2-8x^2=1$ aux inconnues entières x et y est une équation connue en arithmétique sous le nom d'équation de Pell-Fermat. On montre que toutes ses solutions sont données par les entiers x_n et y_n construits précédemment. Ceci permet de démontrer que les seuls nombres à la fois triangulaires et carrés sont les nombres N_n trouvés ici ($n \in \mathbb{N}^*$).

92 Estimation d'une aire

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et C sa courbe représentative dans un repère ortho-normé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On prendra pour unité graphique 1 cm.

- Déterminer le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- Tracer soigneusement la courbe C sur $[1; 9]$.
- On cherche à estimer l'aire notée A_n de la portion du plan colorée en vert.



Pour tout $k \geq 1$, on note M_k le point de la courbe d'abscisse k et r_k le rectangle délimité par les droites d'équation $x=k$, $x=k+1$, l'axe des abscisses et la parallèle à l'axe des abscisses passant par M_{k+1} .

a. Placer les points M_1, M_2, \dots, M_9 sur la figure et tracer les rectangles r_1, r_2, \dots, r_8 .

b. Déterminer l'aire de r_1 , de r_2 , et de façon générale l'aire de r_k pour $k \geq 1$.

4. Soit $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 2$.

a. Interpréter graphiquement u_n .

b. Montrer que, pour tout entier k , $k \geq 1$, on a :

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$$

c. En déduire, pour tout $k \geq 1$, l'encadrement :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

d. En déduire que, pour tout $n \geq 2$,

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) \leq u_n \leq 2(\sqrt{n} - 1) \quad (R).$$

5. On considère maintenant les rectangles R_n délimités par les droites d'équation $x=n$, $x=n+1$, l'axe des abscisses et la parallèle à l'axe des abscisses passant par M_n .

a. Tracer sur la figure les rectangles R_1, R_2, \dots, R_8 .

b. Calculer l'aire de R_n .

c. Montrer que la somme des aires des rectangles R_1, R_2, \dots, R_{n-1} est $v_n = 1 + u_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.

d. De l'encadrement (R), déduire que :

$$v_n \leq 2\sqrt{n-1} - 1.$$

6. Donner un encadrement de A_n en fonction de n . Quelle valeur approchée de A_{100} peut-on proposer ? avec quelle précision ?

Suites et fonctions

Étude locale et asymptotique

Activité 1 ➔ Notion de convergence

OBJECTIF

Mettre en commun les idées apparues à propos de la notion de suite convergente ; en débattre pour l'affiner peu à peu et faire comprendre la définition.

Vous connaissez les trois formulations suivantes, vues en classe de première S, elles ont la même signification.

- La suite (u_n) converge vers 5.
- La suite (u_n) a pour limite 5 quand n tend vers $+\infty$.
- u_n tend vers 5 quand n tend vers $+\infty$.

Proposez une définition de la convergence (sans utiliser les formulations équivalentes citées ci-dessus).

Activité 2 ➔ Limite finie en 0

OBJECTIF

Introduire la notion de limite finie d'une fonction en un réel.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$, et sa courbe représentative C dans un repère orthogonal du plan.

1. **a.** Tracer C sur votre calculatrice pour $-10 \leq x \leq 10$ et $-1,5 \leq y \leq 1,5$.
b. Quelle propriété de symétrie semble posséder la courbe C ?
Le démontrer.

2. **a.** Graphiquement, quel semble être le maximum de f sur l'intervalle $[-5 ; 5]$?

- b.** Afficher la table de valeurs de f à partir de $x = -5$ avec un pas de 1.
La conjecture sur le maximum de f semble-t-elle vérifiée ? Expliquer.

3. **a.** Faire un zoom autour du point $A(0 ; 1)$.

- b.** Trouver en utilisant la fonction Trace de la calculatrice un nombre α tel que pour $-\alpha \leq x \leq \alpha$, avec $x \neq 0$, il semble que :

$$0,9 \leq f(x) \leq 1.$$

De même proposer un nombre β tel que pour $-\beta \leq x \leq \beta$, avec $x \neq 0$, il semble que :

$$0,99 \leq f(x) \leq 1.$$

- c.** Conjecturer la limite de f en 0.
(Ce résultat sera démontré au chapitre 3.)

4. Soit L un réel et g une fonction définie sur $] -5 ; 5[- \{0\}$.

Proposer une définition de « la fonction g a une limite L quand x tend vers 0. »

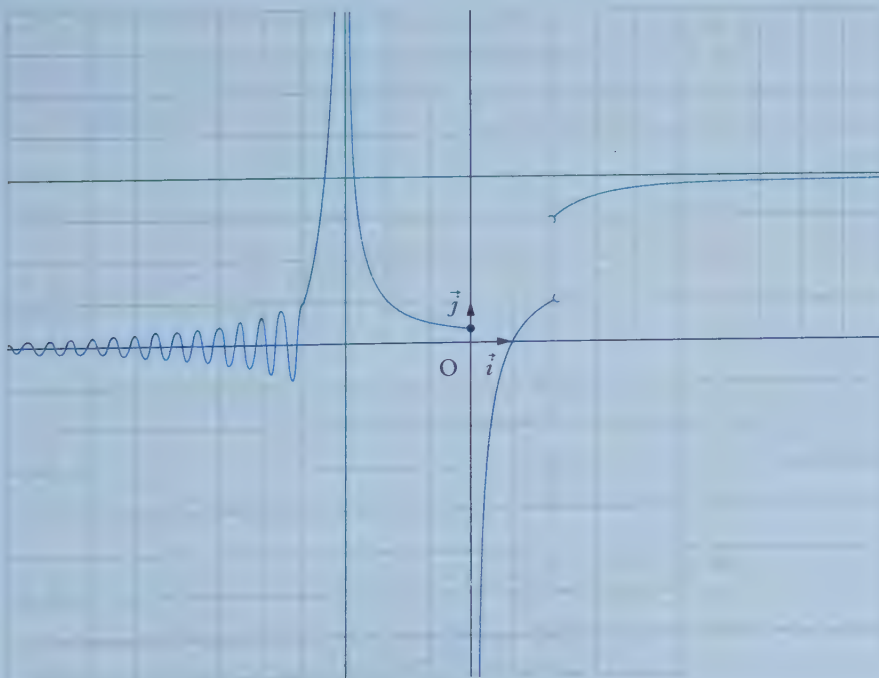
Activité 3 → Lecture graphique de limites

Sur le graphique situé à la fin de l'activité figurent la courbe représentative d'une fonction f , en bleu, et des asymptotes à cette courbe, en vert.

Le tracé est supposé significatif, c'est-à-dire que l'on peut prolonger la courbe en dehors de la zone de tracé en conservant la même allure.

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer si possible les images de -4 , 0 et 2 .
2. Quel est l'ensemble de définition de f ?
3. En quels réels semble-t-il pertinent de chercher une limite de f ?
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
La courbe admet-elle une asymptote en $+\infty$?
5. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
La courbe admet-elle une asymptote en $-\infty$?
6. Quelle est la limite de f en -3 ?
7. a. Quelle est la limite de f quand x tend vers 2 par valeurs supérieures ? par valeurs inférieures ?
b. La fonction f a-t-elle une limite en 2 ?
8. a. Quelle est la limite de f quand x tend vers 0 avec $x \leq 0$? avec $x > 0$?
b. La fonction f a-t-elle une limite en 0 ?
9. La fonction f a-t-elle une limite en 1 ?
10. La phrase suivante vous semble-t-elle juste :
« si une fonction g est définie en a , $g(x)$ tend vers $g(a)$ quand x tend vers a » ?
(Justifier.)
11. Tracer différentes courbes représentant une fonction définie sur $[0 ; 2]$ et n'ayant pas de limite en 1 .



1. Limite finie en l'infini

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

A ■ Suites convergentes

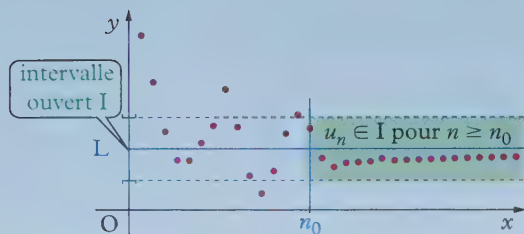
1. Définitions

Définition 1 → La suite (u_n) converge vers un réel L si, et seulement si, tout intervalle ouvert I contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

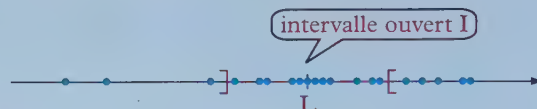
Autrement dit, pour tout intervalle ouvert I contenant L on peut trouver un indice n_0 tel que $u_n \in I$ pour tout $n \geq n_0$.

Interprétations graphiques

• dans le plan



• sur la droite réelle



(u_n) converge vers L si, et seulement si, tout intervalle ouvert I contenant L contient tous les u_n sauf un nombre fini d'entre eux.

Définition 2 et propriété 1 → • Si une suite (u_n) converge vers un réel L , L est unique. On l'appelle la limite de la suite.

• Une suite est convergente si, et seulement si, elle converge vers une limite finie L . Dans le cas contraire, elle est dite divergente.

Notation

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$.

En pratique

- Tout intervalle ouvert contenant L contient un intervalle centré en L du type $]L - \alpha ; L + \alpha[$ ($\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$). Il suffit donc de considérer ce type d'intervalle.
- Pour montrer qu'une suite converge on revient rarement à cette définition. On utilise les théorèmes d'opérations (voir page 56) ou de comparaison (voir page 50).

Exemples :

- Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n>0}$, $\left(\frac{1}{n}\right)_{n>0}$, $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n>0}$, $k \in \mathbb{N}^*$, et $(q^n)_{n \geq 0}$ pour $-1 < q < 1$ convergent vers 0.
- La suite $(u_n)_{n>0}$ de terme général $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite. Elle diverge.

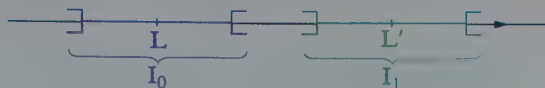
Remarques

- (u_n) converge vers L si et seulement si la suite $(|u_n - L|)$ des distances entre u_n et L converge vers 0.
- La suite (u_n) converge vers L si et seulement si la suite (u_{n+1}) converge vers L (voir exercice n° 6, p. 68).
- La suite (u_n) définie dans \mathbb{N} converge vers L si et seulement si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers L (voir exercice n° 87, p. 76).

→ DÉMONSTRATION

■ Propriété 1 : unicité de la limite

Supposons que la suite (u_n) ait deux limites distinctes L et L' . L et L' étant distincts, on peut déterminer deux intervalles ouverts I_0 et I_1 contenant respectivement L et L' et d'intersection vide.



Il existe un rang N_0 à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle I_0 contenant L et un rang N_1 à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle I_1 contenant L' .

Alors pour $n > \max(N_0, N_1)$ tous les termes de la suite (u_n) devraient être à la fois dans les intervalles I_0 et I_1 . Comme I_0 et I_1 ont une intersection vide, cela est impossible.

Conclusion : la suite (u_n) ne peut pas avoir deux limites distinctes.

→ APPLICATIONS

Exercice 1 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 4$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

On admet que (u_n) converge.

Déterminer sa limite.

Solution

Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = L$.

Par théorème d'opération, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}u_n + 1 = \frac{1}{2}L + 1$ c'est dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \frac{1}{2}L + 1$. Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L.$$

Par unicité de la limite, $L = \frac{1}{2}L + 1$ d'où $L = 2$.

voir aussi exercices n° 9, 10

Exercice 2 Utiliser la définition pour démontrer

Démontrer qu'une suite (u_n) converge vers 0 si et seulement si la suite $(|u_n|)$ converge vers 0.

Solution

Si (u_n) tend vers 0 alors dans tout intervalle ouvert de centre 0, c'est-à-dire tout intervalle de la forme $]-\alpha ; \alpha[$ ($\alpha > 0$), on trouve tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

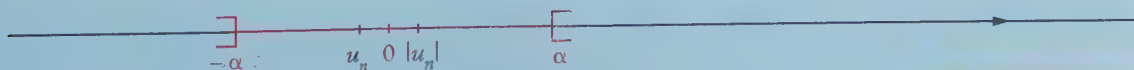
Or dire qu'un terme u_n de la suite se trouve dans $]-\alpha ; \alpha[$, $\alpha > 0$, signifie que $|u_n| < \alpha$, donc $|u_n|$ est aussi dans l'intervalle $]-\alpha ; \alpha[$ à partir du même rang.

Il en résulte que la suite $(|u_n|)$ tend aussi vers 0.

Réciproquement : Si $(|u_n|)$ tend vers 0, alors tout intervalle $]-\alpha ; \alpha[$ ($\alpha > 0$) contient tous les termes $|u_n|$ de la suite à partir d'un certain rang.

Or si $|u_n|$ est dans l'intervalle $]-\alpha ; \alpha[$, alors $|u_n| < \alpha$, donc u_n est aussi dans l'intervalle $]-\alpha ; \alpha[$ à partir du même rang.

Donc la suite (u_n) tend vers 0.



voir aussi exercices n° 3 à 6

2. Limite finie et ordre

Propriété 2 → Toute suite convergente est bornée.

- Propriété 1** →
1. Soit (u_n) une suite de réels, convergente vers L et majorée par un réel M à partir d'un certain rang, alors $L \leq M$.
 2. Soit (u_n) une suite de réels, convergente vers L et minorée par m à partir d'un certain rang, alors $m \leq L$.
 3. Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels, convergentes respectivement vers L et L' avec $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $L \leq L'$.

Cas particuliers

Soit (u_n) une suite qui converge vers L .

- Si les termes u_n sont positifs à partir d'un certain rang, alors $L \geq 0$.
- Si les termes u_n sont négatifs à partir d'un certain rang, alors $L \leq 0$.

Théorème 1 → Soit (u_n) , (x_n) et (v_n) trois suites de réels définies dans \mathbb{N} telles que :

Théorème des gendarmes

- à partir d'un certain rang, $u_n \leq x_n \leq v_n$;
- les suites (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite L .

Alors la suite (x_n) converge et a pour limite L .

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie dans \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Nous ne pouvons pas appliquer les théorèmes d'opérations sur les limites pour cette suite. En remarquant que, pour tout n dans \mathbb{N}^* , $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ et en appliquant le théorème des gendarmes, nous en déduisons que la suite (u_n) a pour limite 0.

3. Suites monotones convergentes

- Théorème 2** →
1. Toute suite croissante et majorée converge.
 2. Toute suite décroissante et minorée converge.
- ADMIS

Remarque

Ce théorème permet de démontrer la convergence de certaines suites sans avoir à déterminer la limite.

Attention Une suite décroissante et minorée par m converge, mais pas forcément vers m !

Si $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ ($n > 0$), (u_n) est minorée par 0, décroissante, mais (u_n) converge vers 1.

- Propriété 4** → Soit (u_n) une suite de réels définie dans \mathbb{N} convergente vers L .
- Suite monotone convergente
- Si (u_n) est croissante, alors pour tout n dans \mathbb{N} , $u_n \leq L$.
 - Si (u_n) est décroissante, alors pour tout n dans \mathbb{N} , $u_n \geq L$.

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 2

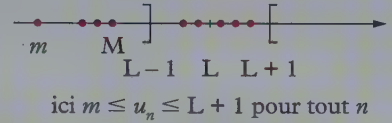
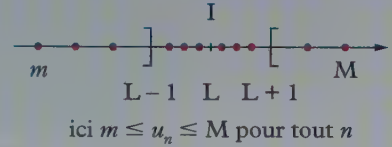
Soit (u_n) une suite convergeant vers L .

L'intervalle $I =]L - 1 ; L + 1[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

• Si aucun terme de la suite n'est en dehors de I , la suite est bornée par $L - 1$ et $L + 1$.

• Si certains termes de la suite sont en dehors de I , comme ils sont en nombre fini, l'un d'eux est plus petit que tous les autres, et l'un d'eux est le plus grand. Notons m le plus petit et M le plus grand de ces termes n'appartenant pas à I .

Alors tous les termes de la suite sont plus grands que le plus petit des deux réels m et $L - 1$ et plus petits que le plus grand des deux réels M et $L + 1$. La suite est donc bornée.



■ Propriété 3

1. Soit (u_n) une suite convergeant vers L et telle que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq M$.

Supposons que $M < L$ et considérons un intervalle I ouvert contenant L et ne contenant pas M . Il existe un entier n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $u_n \in I$; de ce fait pour $n \geq n_1$, on a $u_n > M$.

Pour un entier n à la fois plus grand que n_0 et n_1 , on aurait donc $u_n \leq M$ et $u_n > M$.

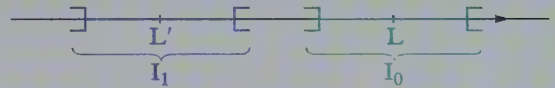
C'est impossible. On en déduit que $L \leq M$.

2. La suite $(-u_n)$ converge vers $-L$ et est majorée par $-m$, donc d'après 1 $-L \leq -m$, soit $L \geq m$.

3. Supposons $L > L'$. L et L' étant distincts, on peut déterminer deux intervalles ouverts I_0 et I_1 contenant respectivement L et L' et d'intersection vide.

• Il existe un rang N_0 à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle I_0 contenant L et un rang N_1 à partir duquel tous les termes de la suite (v_n) sont dans l'intervalle I_1 contenant L' .

• Il existe un entier P tel que, pour $n \geq P$, $u_n \leq v_n$. Pour n supérieur à la fois à N_0 , N_1 et P on a donc $u_n > v_n$ et $u_n \leq v_n$, ce qui est impossible. Donc $L \leq L'$.



■ Théorème 1 : théorème des gendarmes

Soit I un intervalle ouvert contenant L .

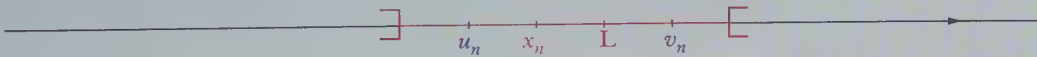
À partir d'un rang N_1 , tous les termes de la suite (u_n) sont dans I car (u_n) converge vers L .

À partir d'un rang N_2 , tous les termes de la suite (v_n) sont aussi dans I car (v_n) converge vers L .

À partir d'un rang P , nous avons, pour tout $n > P$, $u_n \leq x_n \leq v_n$.

Donc, pour n supérieur à la fois à N_1 , N_2 , P on a $u_n \in I$, $v_n \in I$ et $u_n \leq x_n \leq v_n$.

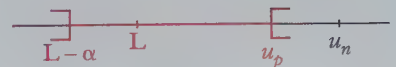
Il en résulte que $x_n \in I$ pour tout $n > \max(N_1, N_2, P)$. La suite (x_n) converge donc vers L .



■ Propriété 4 : suite croissante convergente

1. Supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p > L$.

La suite (u_n) étant croissante pour tout $n > p$, $u_n \geq u_p$.



On considère l'intervalle ouvert $I =]L - \alpha ; u_p[$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$. I contient L , et pour $n > p$, $u_n \notin I$. C'est impossible car la suite (u_n) converge vers L , donc à partir d'un rang N tous les termes de la suite doivent être dans I .

Conclusion : tous les termes de la suite (u_n) sont donc tels que $u_n \leq L$.

2. La suite (u_n) est décroissante et converge vers L donc la suite $(-u_n)$ est croissante et converge vers $-L$.

Nous en déduisons : pour tout n , $-u_n \leq -L$ c'est-à-dire, pour tout n , $u_n \geq L$.

4. Suites adjacentes

Définition 3 →
Suites adjacentes

On dit que deux suites de réels (u_n) et (v_n) définies dans \mathbb{N} sont adjacentes si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées :

1. (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;
2. pour tout entier n dans \mathbb{N} , $u_n \leq v_n$;
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Exemple :

Les suites $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n>0}$ et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n>0}$ sont adjacentes.

Théorème 3 →
Théorème des suites adjacentes

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, elles convergent vers une même limite L .

De plus, si $u_n \leq v_n$ pour tout n , on a $u_n \leq L \leq v_n$ pour tout n de \mathbb{N} .



Remarque

Dans la définition 3, on peut se restreindre aux conditions 1 et 3, car la condition 2 est en fait une conséquence des deux autres conditions.

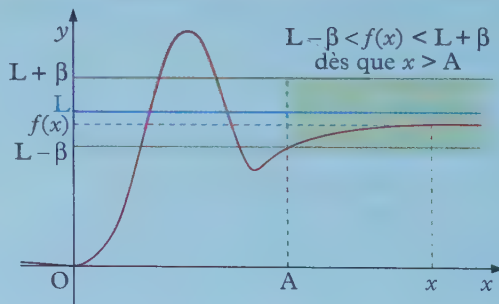
B ■ Fonctions

Définition 4 →

• Soit f une fonction définie dans un intervalle $]a; +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$).

La fonction f a pour limite un réel L quand x tend vers $+\infty$ si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant L contient aussi tous les réels $f(x)$ pour x assez grand.

• La droite $\Delta : y = L$ est alors appelée asymptote (horizontale) à la courbe de f en $+\infty$.



Notation

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$
- ou $\lim_{+\infty} f = L$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$
- ou $\lim_{-\infty} f = L$.

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Remarques

- On énonce de même cette définition quand x tend vers $-\infty$.
- Dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, c'est dire que, pour tout intervalle $]L - \beta ; L + \beta[$ ($\beta > 0$), il existe un réel A tel que, pour tout $x > A$, $f(x) \in]L - \beta ; L + \beta[$.

→ DÉMONSTRATION

■ Théorème 3

La suite (u_n) étant croissante, pour tout n dans \mathbb{N} , $u_0 \leq u_n \leq v_n$.

La suite (v_n) étant décroissante, pour tout n dans \mathbb{N} , $u_n \leq v_n \leq v_0$.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par v_0 et la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 .

D'après le théorème 2, les suites (u_n) et (v_n) convergent donc respectivement vers des réels L et L' .

La suite $(u_n - v_n)$ converge alors vers $L - L'$, or $(u_n - v_n)$ converge vers 0, donc par unicité de la limite, $L = L'$.

Conclusion : Les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite L .

La suite (u_n) est croissante et converge vers L , la suite (v_n) est décroissante et converge aussi vers L , d'après la propriété 4 nous en déduisons :

$$u_n \leq L \leq v_n.$$

→ APPLICATION

Exercice 3 Montrer que deux suites sont adjacentes

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies dans \mathbb{N}^* par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.

Solution

• Étudions le sens de variation des suites (u_n) et v_n .

Pour tout n dans \mathbb{N}^* :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Comme $\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2n+2}$, la suite (u_n) est croissante.

• De même :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Comme $n > 0$, $v_{n+1} - v_n < 0$, la suite (v_n) est décroissante.

• $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ donc $v_n \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

On en déduit que ces deux suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite L .

Point Info

On montre que ces suites ont pour limite $\ln(2)$, avec $\ln(2) = 0,693$ à 10^{-3} près.

voir aussi exercices n° 16 à 18

2. Limite infinie en l'infini

A ■ Suites

Définition 5 →

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ ou encore qu'elle diverge vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle $] \lambda ; +\infty[$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_0 .

Notation

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Remarque

On définit de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemples :

- Les suites (n^k) , $k \in \mathbb{N}^*$, et (a^n) , $a > 1$, divergent vers $+\infty$.
- La suite $(-\sqrt{n})$ diverge vers $-\infty$.

En pratique

Pour montrer qu'une suite diverge vers $+\infty$, on utilise en général les théorèmes d'opérations (voir page 56) ou de comparaison (ci-dessous).

Théorème 4 →

Théorème de comparaison

Soit deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple :

Si $v_n = n + \sin n$ pour tout $n \geq 0$, alors $v_n \geq n - 1$ pour tout n .

De $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Théorème 5 →

1. Si (u_n) est une suite croissante de nombres réels non majorée, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
2. Si (u_n) est une suite décroissante de nombres réels non minorée, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Attention

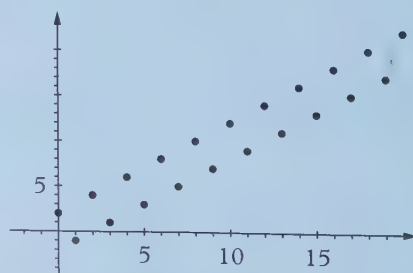
Une suite qui diverge vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante à partir d'un certain rang.

Exemple :

Si $u_n = n + 2 \times (-1)^n$, $u_n \geq n - 2$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

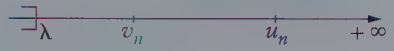
par théorème de comparaison, mais (u_n) n'est pas croissante à partir d'un certain rang comme l'illustre la représentation graphique ci-contre.



→ DÉMONSTRATIONS

■ Théorème 4

1. Si $v_n \rightarrow +\infty$, tout intervalle $] \lambda ; +\infty[$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang N . Comme $u_n \geq v_n$ à partir d'un rang P , pour $n > \max(N, P)$, tous les termes de la suite (u_n) sont dans I . La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.
2. Il suffit de considérer les suites $(-u_n)$ et $(-v_n)$. Nous avons $-v_n \rightarrow +\infty$ et $-u_n \geq -v_n$ à partir d'un certain rang. En appliquant 1 : $-u_n \rightarrow +\infty$, donc $u_n \rightarrow -\infty$.



■ Théorème 5

1. Soit un intervalle $] \lambda ; +\infty[$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). La suite (u_n) n'étant pas majorée, il existe un entier p tel que $u_p > \lambda$. La suite (u_n) étant croissante pour tout $n \geq p$, $u_n > \lambda$. Donc tout intervalle $] \lambda ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.
2. Si (u_n) est une suite décroissante non minorée, $(-u_n)$ est une suite croissante non majorée. D'après le 1 : $-u_n \rightarrow +\infty$, donc $u_n \rightarrow -\infty$.

→ APPLICATION

Exercice 4 Utiliser des théorèmes de comparaison

Soit $u_n = \frac{3^n}{n^3}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que $v_n = 3\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^3$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- Montrer que pour tout $n \geq 7$, $v_n \geq 2$.
 - En déduire que, pour tout $n \geq 8$, $v_7 \times v_8 \times \dots \times v_{n-1} \geq 2^{n-7}$, puis que $u_n \geq 2^{n-7}u_7$.
- Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Solution

$$1. v_n = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} \times \frac{n^3}{3^n} = \frac{3^{n+1} \times n^3}{3^n \times (n+1)^3} = 3 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = 3 \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^3.$$

De $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on déduit par théorèmes d'opération que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$.

2. a. Si $n \geq 7$, $n+1 \geq 8$ donc $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{8}$ et $1 - \frac{1}{n+1} \geq \frac{7}{8}$, d'où $v_n \geq 3\left(\frac{7}{8}\right)^3$ par croissance de la fonction cube. Or $3\left(\frac{7}{8}\right)^3 > 2$, donc $v_n > 2$ pour $n \geq 7$.

b. $v_7 \times v_8 \times \dots \times v_{n-1} \geq 2 \times \dots \times 2$, produit de $n-7$ facteurs.
Donc $v_7 \times \dots \times v_{n-1} \geq 2^{n-7}$.

Or $v_7 \times \dots \times v_{n-1} = \frac{u_8}{u_7} \times \frac{u_9}{u_8} \times \dots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{u_n}{u_7}$ donc $\frac{u_n}{u_7} \geq 2^{n-7}$ et par suite $u_n \geq 2^{n-7}u_7$ car $u_7 > 0$.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n-7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^7} \times 2^n = +\infty$ car $2 > 1$.

Par théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

voir aussi exercice n° 23

B ■ Fonctions

1. Définitions

Définition 6 →

Notation

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$.

1. La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle $]\lambda ; +\infty[$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

2. La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle $]-\infty ; \lambda[$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

En pratique

On utilise les théorèmes d'opérations (voir page 56) ou de comparaison (propriété 5).

CD

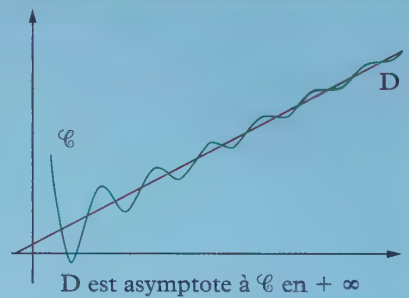
Définition 7 →

Asymptote

Soit f une fonction définie dans un intervalle $I =]\lambda ; +\infty[$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). La droite d'équation $y = ax + b$ (a, b réels) est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ si et seulement si :

$$f(x) = ax + b + h(x)$$

où h une fonction définie dans I telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h = 0$.



D est asymptote à C en $+\infty$

Remarques

- Si $a = 0$ on obtient l'asymptote horizontale d'équation $y = b$.
- Dire que la droite D d'équation $y = ax + b$ (a, b réels) est asymptote à la courbe représentant f en $+\infty$, c'est aussi dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.
- On a des définitions analogues en $-\infty$.

2. Comparaison et limites

Propriété 5 →

Soit f et g deux fonctions définies dans un intervalle $I =]a ; +\infty[$ (ou $I =]-\infty ; a[$), $a \in \mathbb{R}$, telles que, pour tout x dans I , $f(x) \geq g(x)$.

1. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} g = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} f = +\infty$.
2. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} f = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} g = -\infty$.

Exemple :

Si $f(x) = x^2 + \sin x$, pour tout x réel, $x^2 - 1 \leq f(x)$.

De $\lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} (x^2 - 1) = +\infty$ on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} f(x) = +\infty$.

→ DÉMONSTRATION

■ Propriété 5

1. Si $g(x) \rightarrow +\infty$, tout intervalle $] \lambda ; +\infty[$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x assez grand. Comme $f(x) \geq g(x)$ dans l'intervalle de définition I des fonctions f et g , il en résulte que toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand sont aussi contenues dans $] \lambda ; +\infty[$.

2. Nous avons $-f(x) \leq -g(x)$ pour tout réel x dans l'intervalle de définition I et $-f(x) \rightarrow +\infty$ donc d'après 1 : $-g(x) \rightarrow +\infty$, soit $g(x) \rightarrow -\infty$.

→ APPLICATION

Exercice 5 Montrer qu'une courbe admet une asymptote

Soit $f(x) = \frac{x^2 - x - 10}{x - 4}$ pour $x \neq 4$.

1. Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 4}$.
2. Montrer que la droite D d'équation $y = ax + b$ est asymptote en $+\infty$ et $-\infty$ à la courbe \mathcal{C} représentative de f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
3. Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à D .

Solution

$$1. ax + b + \frac{c}{x - 4} = \frac{ax^2 - 4ax + bx - 4b + c}{x - 4}.$$

On cherche donc a, b, c réels tels que, pour tout x réel, $x \neq 4$,

$$ax^2 + (-4a + b)x - 4b + c = x^2 - x - 10.$$

Il suffit de trouver a, b, c tels que :

$$\begin{cases} a = 1 \\ -4a + b = -1 \\ -4b + c = -10 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 + 4a = 3 \\ c = -10 + 4b = 2 \end{cases}$$

Par conséquent, $f(x) = x + 3 + \frac{2}{x - 4}$ pour tout $x \neq 4$.

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 4) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x - 4} = 0.$$

On a donc $f(x) = x + 3 + h(x)$ où $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ (avec $h(x) = \frac{2}{x - 4}$).

La droite $D : y = x + 3$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ et D est asymptote à \mathcal{C} en $-\infty$.

3. La position de \mathcal{C} par rapport à D est donnée par le signe de $f(x) - (x + 3)$ c'est-à-dire de

$$h(x) = \frac{2}{x - 4} :$$

- sur $] -\infty ; 4[$, $x < 4$ donc $x - 4 < 0$ et $h(x) < 0$ et \mathcal{C} est en dessous de D ,
- sur $] 4 ; +\infty[$, $x > 4$ donc $x - 4 > 0$ et $h(x) > 0$ et \mathcal{C} est au-dessus de D .

voir aussi exercices n° 37 à 39

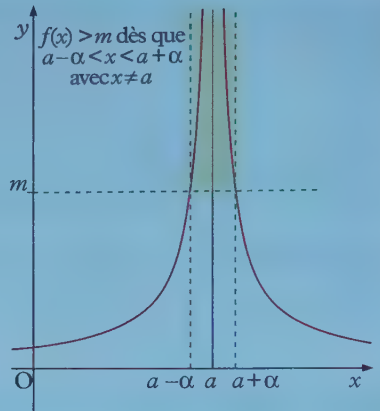
3. Limite d'une fonction en a ($a \in \mathbb{R}$)

Soit a un réel et I un intervalle ouvert contenant a ou dont a est une borne, f une fonction définie dans I sauf peut-être en a .

A ■ Limite infinie en a

Définition 8 →

On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a si et seulement si tout intervalle $]m; +\infty[$ ($m \in \mathbb{R}$), contient tous les réels $f(x)$ pour tout réel x dans I et assez proche de a .



Notation

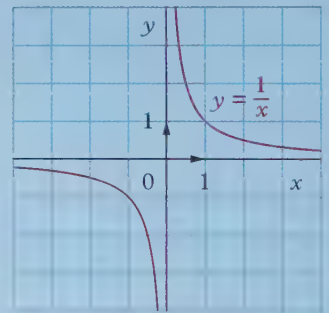
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

ou $\lim_{x \rightarrow a} f = +\infty$.

Remarques

- De même, f a pour limite $-\infty$ en a si, et seulement si, tout intervalle $]-\infty; m[$ ($m \in \mathbb{R}$) contient tous les réels $f(x)$ pour tout x réel dans I et assez proche de a .
- On doit parfois distinguer les cas où x tend vers a par valeurs inférieures à a ou par valeurs supérieures à a . Ainsi :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty.$$



Définition 9 →

La droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale) à la courbe de f en a si et seulement si $f(x)$ a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers a (éventuellement seulement à droite ou à gauche de a).

B ■ Limite finie en a

Définition 10 →

On dit que la fonction f tend vers L quand x tend vers a si et seulement si tout intervalle ouvert contenant L contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x dans I et assez proche de a .

Notation

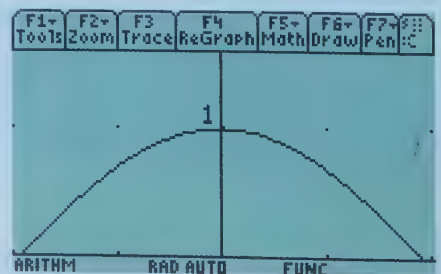
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ou $\lim_{x \rightarrow a} f = L$.

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ce résultat sera démontré et approfondi au chapitre 3.



→ APPLICATIONS

Exercice 6 Étudier une limite en a

Soit $f: x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2}$ définie dans $]-\infty; -2[\cup]-2; 1[\cup]1; +\infty[$.

Étudier la limite de f en 1 et en -2 .

Solution

• Pour $x \rightarrow 1$, $x^3 - 1 \rightarrow 0$ et $x^2 + x - 2 \rightarrow 0$ donc on ne peut pas déterminer immédiatement la limite de la fonction f en 1.

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ et $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.

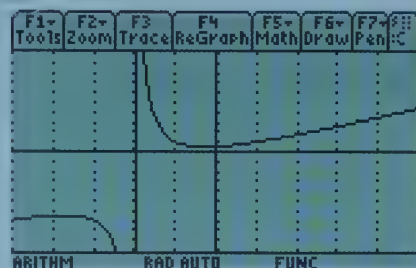
Il en résulte que, pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$,

or $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{3} = 1$.

• Pour $x \rightarrow -2$, $x^2 + x + 1 \rightarrow 3$ et $x + 2 \rightarrow 0$.

Si $x < -2$, $x + 2 < 0$ et si $x > -2$, $x + 2 > 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$.



voir aussi exercice n° 32

Exercice 7 Utiliser la définition de la limite finie en a

À l'aide de la définition, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$.

Solution

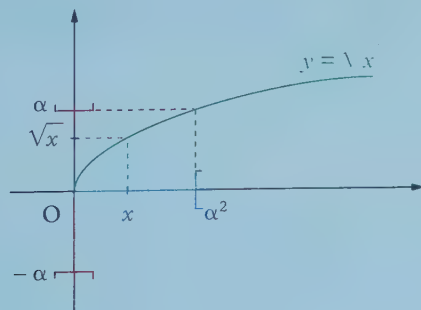
Il s'agit de montrer que tout intervalle ouvert $]0 - \alpha; 0 + \alpha[$ ($\alpha \in \mathbb{R}^{**+}$) contient tous les réels \sqrt{x} pour x suffisamment proche de 0.

Or $\sqrt{x} \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Donc $\sqrt{x} \in]0 - \alpha; 0 + \alpha[\Leftrightarrow -\alpha < \sqrt{x} < \alpha \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} < \alpha \Leftrightarrow 0 \leq x < \alpha^2$.

Pour $x \in [0; \alpha^2[$, $\sqrt{x} \in]-\alpha; \alpha[$.

Pour tout intervalle $] -\alpha; \alpha[$ contenant 0, on a bien montré que $\sqrt{x} \in]-\alpha; \alpha[$ à condition de prendre x assez proche de 0 (x dans l'intervalle $[0; \alpha^2[$).



4. Théorèmes

A ■ Théorèmes d'opérations

Les tableaux ci-dessous rassemblent les théorèmes d'opérations, admis, relatifs aux suites et aux fonctions.

L et L' y désignent des réels ; a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$;

(u_n) et (v_n) sont deux suites réelles et f et g deux fonctions.

Le symbole ? signifie qu'on ne peut pas conclure (on parle de forme indéterminée).

• Limite d'une somme

Si	$\lim_{+\infty (-\infty)} f$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	$\lim_{+\infty (-\infty)} g$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors	$\lim_{+\infty (-\infty)} (f+g)$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$?

• Limite d'un produit

Si	$\lim_{+\infty (-\infty)} f$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors	$\lim_{+\infty (-\infty)} kf$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} ku_n$ avec k constante réelle	kL	$+\infty$ si $k > 0$ $-\infty$ si $k < 0$	$-\infty$ si $k > 0$ $+\infty$ si $k < 0$	0 si $k = 0$

Si	$\lim_{+\infty (-\infty)} f$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
	$\lim_{+\infty (-\infty)} g$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors	$\lim_{+\infty (-\infty)} fg$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n)$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$?

• Limite d'un quotient

Si	$\lim_{+\infty (-\infty)} f$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
	$\lim_{+\infty (-\infty)} g$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$L' \neq 0$	$\frac{+\infty}{\text{ou } -\infty}$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors	$\lim_{+\infty (-\infty)} \frac{f}{g}$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$?	?

Exemple 6

1. Toute fonction polynôme non nulle admet en $-\infty$ et $+\infty$ même limite que son terme de plus haut degré.

2. Toute fonction rationnelle non nulle admet en $-\infty$ et $+\infty$ même limite que le quotient du terme de plus haut degré de son numérateur par le terme de plus haut degré de son dénominateur.

→ DÉMONSTRATION

■ Propriété 6

1. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des réels, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Pour $x \neq 0$, $P(x) = a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right]$. Par théorèmes d'opération, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n} \right] = 1$.

Donc $P(x)$ a même limite que $a_n x^n$ en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Soit $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + \dots + b_1 x + b_0}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $b_j \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$) avec $a_n \neq 0$, $b_p \neq 0$. Alors pour $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \times \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}}{1 + \frac{b_{p-1}}{b_p x} + \dots + \frac{b_1}{b_p x^{p-1}} + \frac{b_0}{b_p x^p}}$$

Par théorèmes d'opérations, $f(x)$ a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que $\frac{a_n x^n}{b_p x^p}$.

→ APPLICATION

Exercice 8 Lever une indétermination

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x\sqrt{x})$; b. $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n + (-1)^n}{n^2 - 1}$.

Solution

a. On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

$$x^2 - 2x\sqrt{x} = x^2 \left[1 - 2 \frac{\sqrt{x}}{x} \right] = x^2 \left[1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right] \text{ pour } x > 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1 \end{array} \right\} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x\sqrt{x}) = +\infty.$$

b. La suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Mais pour tout n de \mathbb{N} , $(-1)^n \geq -1$ donc $n + (-1)^n \geq n - 1$.

De $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$ on déduit par comparaison que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n + (-1)^n = +\infty$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

$$\text{Or } \frac{n + (-1)^n}{n^2 - 1} = \frac{n \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]}{n^2 \left[1 - \frac{1}{n^2} \right]} = \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

• Pour $n > 0$, $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par « théorème des

gendarmes » $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Par théorèmes d'opérations, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + (-1)^n}{n^2 - 1} = 0$.

Méthode

Pour lever la forme indéterminée « $\infty - \infty$ », on a mis l'infiniment grand prépondérant en facteur.

Méthode

Pour lever la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » on a mis les infiniments grands prépondérants au numérateur et au dénominateur en facteur.

B ■ Théorème des gendarmes

Théorème 6 → Si a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et I un intervalle ouvert contenant a ou dont a est une borne, si f, g, h sont trois fonctions définies dans I sauf peut-être en a telles que :

- pour tout x dans I , $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$,
- f et g ont la même limite L en a (L pouvant désigner un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$),

alors $\lim_a h = L$.

C ■ Théorème de composition

Théorème 7 → Les lettres α, β, λ désignent ou des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.
 I est un intervalle ouvert contenant α ou dont α est une borne.

J un intervalle ouvert contenant β ou dont β est une borne.

f une fonction définie dans I sauf peut-être en α .

g une fonction définie dans J sauf peut-être en β .

Si, pour tout réel x dans I , $f(x)$ est dans J alors $g \circ f$ est définie sur I et :

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow \alpha} f = \beta \text{ et } \lim_{x \rightarrow \beta} g = \lambda \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \alpha} g \circ f = \lambda.$$

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ (propriété 6), } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

$$\text{Par théorème de composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = +\infty.$$

Corollaire → Les lettres β, λ désignent ou des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Image d'une suite
par une fonction

- (v_n) est une suite définie dans \mathbb{N} telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \beta$;
- I est un intervalle ouvert contenant β ou dont β est une borne tel que, pour tout n dans \mathbb{N} , $v_n \in I$;
- f est une fonction définie dans I sauf peut-être en β telle que $\lim_{x \rightarrow \beta} f = \lambda$.

Alors la suite $(f(v_n))$ a pour limite λ en $+\infty$.

Remarque

Le résultat de ce corollaire est très utile pour déterminer les limites possibles d'une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
 (Voir l'exercice résolu 1, p. 66.)

Exemple :

Soit (v_n) , $n \in \mathbb{N}$, la suite définie par $v_n = \frac{n}{n+1}$, (v_n) a pour limite 1 en $+\infty$.

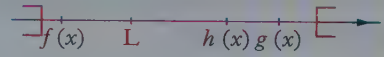
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ a pour limite $\sqrt{2}$ en 2, donc la suite $\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$ a pour limite $\sqrt{2}$.

→ DÉMONSTRATION

■ Théorème 6

Là aussi, nous allons utiliser un raisonnement semblable à celui utilisé dans le théorème 1 pour les suites. Soit un intervalle J contenant L , pour x suffisamment grand ou pour x suffisamment proche de a , $f(x)$ et $g(x)$ sont dans J .

Comme $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $h(x)$ est aussi dans J . Donc h a aussi pour limite L .



→ APPLICATIONS

Exercice 9 Utiliser le théorème des gendarmes

Déterminer :

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Solution

a. Soit f la fonction définie dans $]0 ; 1[$ par $f(x) = \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Pour tout x dans $]0 ; 1[$, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ donc :

$$-\sqrt{x} \leq f(x) \leq \sqrt{x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$, nous obtenons $\lim_0 f = 0$.

b. Soit f la fonction définie par $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ sur

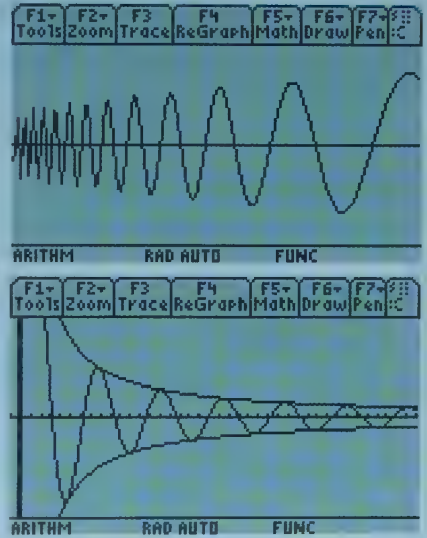
$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$. Pour tout x dans $]0 ; +\infty[$:

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad (1).$$

Pour $x \rightarrow +\infty$, $\frac{-1}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, il en résulte d'après le théorème des gendarmes que $\lim_{+\infty} f = 0$.

La fonction f étant paire, $\lim_{-\infty} f = 0$.

Remarque : L'encadrement (1) s'interprète graphiquement par le fait que la courbe représentative de f est située entre les hyperboles d'équation $y = \frac{1}{x}$ et $y = -\frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.



voir aussi exercices n° 21, 31

Exercice 10 Utiliser le théorème de composition

Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

Solution

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 3x - 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, par la propriété sur la limite d'un polynôme en $+\infty$.

• $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

Par théorème de composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 4} = +\infty$.

voir aussi exercice n° 28

1. Apprendre à bâtir des contre-exemples

OBJECTIF : Bien connaître certaines suites simples pour pouvoir bâtir des contre-exemples prouvant qu'une proposition est fausse.

A. ➔ Des suites classiques

1. Des suites monotones convergentes

Cette partie est à faire sans calculatrice.

- a. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{1}{n}$.
(Unités graphiques : 6 cm en ordonnée et 1 cm en abscisse.)
- b. Expliquer comment en déduire les représentations graphiques des suites v et w définies sur \mathbb{N}^* par $v_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $w_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour $n > 0$.
- c. Donner le sens de variation et la limite de chacune de ces suites.

2. Des suites alternées convergentes

- a. Représenter graphiquement les six premiers termes de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
(Unités graphiques : 4 cm en ordonnée et 1 cm en abscisse.)
- b. Expliquer comment en déduire les représentations graphiques des suites v et w définies sur \mathbb{N} par $v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et $w_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

3. Des suites divergentes

On considère les suites u, v et w définies sur \mathbb{N} par :

$$u_n = (-2)^n, \quad v_n = 2 \times (-1)^n \quad \text{et} \quad w_n = n + 5 \times (-1)^n.$$

Pour chacune, représenter graphiquement les premiers termes, étudier leur monotonie et leur limite.

B. ➔ Bâtir des contre-exemples

Chacune des propositions suivantes est fausse.

Établir un contre-exemple (sans utiliser les suites de la partie A) pour le prouver.

- a. Une suite qui diverge vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
- b. Une suite strictement croissante a pour limite $+\infty$.
- c. Une suite bornée est convergente.
- d. Une suite croissante majorée par 2 converge vers 2.
- e. Soit une suite (u_n) convergente.
Alors (u_n) est, à partir d'un certain rang, soit croissante majorée soit décroissante minorée.
- f. Si (u_n) est une suite divergente dont tous les termes sont non nuls, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge.
- g. Si tous les termes d'une suite appartiennent à l'intervalle $]0,99 ; 1,01[$, à partir d'un certain rang, alors la suite converge vers 1.

2. Courbes et asymptotes

OBJECTIF : Déterminer des asymptotes à une courbe représentative de fonction.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

A. ➔ Fonction rationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$ pour tout $x \neq 4$.

1. a. Étudier le sens de variation de f .
- b. Déterminer la limite de f quand x tend vers 4 par valeurs supérieures et quand x tend vers 4 par valeurs inférieures.

2. Étude en l'infini

- a. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.
 - b. Déterminer des réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-4}$ pour tout $x \neq 4$.
 - c. En déduire que C admet une même asymptote D en $+\infty$ et en $-\infty$.
Préciser la position de C par rapport à D.
3. Tracer C en utilisant tous les renseignements connus.

B. ➔ Une fonction composée

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

1. a. Écrire f comme une composée de deux fonctions.
 - b. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. a. Rappeler le sens de variation de la fonction carré sur $[0 ; +\infty[$.
En déduire que f a même sens de variation que la fonction f^2 .
- b. Dresser le tableau de variation de f .

3. Asymptote en $+\infty$

Quand x tend vers $+\infty$, $x^2 + 2x + 3$ a même limite que x^2 . On peut penser que $f(x)$ va « se comporter comme » $\sqrt{x^2}$, c'est-à-dire comme x .
Cherchons donc la limite en $+\infty$ de $f(x) - x$.

- a. Les théorèmes d'opération permettent-ils de déterminer cette limite ?
- b. Justifier que, pour $x > 0$,

$$f(x) - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x)(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} = \frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1}$$

- c. En déduire la limite de $f(x) - x$ en $+\infty$.
- d. Quelle asymptote de C peut-on en déduire ? Vérifier à la calculatrice.

4. Asymptote en $-\infty$

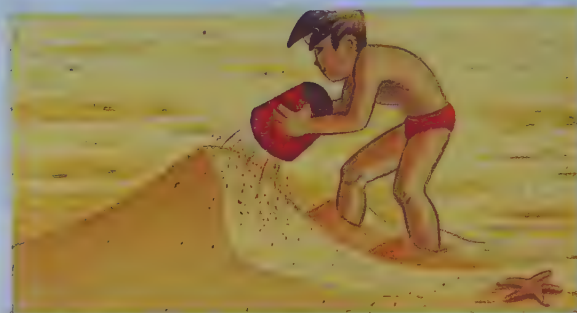
En reprenant la même démarche qu'à la question 3, déterminer une asymptote à C en $-\infty$.
Vérifier à la calculatrice.

3. Un petit peu plus, encore et encore

A. On pose $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

1. Première approche de la suite (h_n)

- a. Calculer les trois premiers termes de cette suite.
- b. Que vaut $u_n = h_{n+1} - h_n$?
Quelle est la limite de (u_n) ?
- c. Montrer que $h_{n+1} = h_n + \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 1$.
- d. Déterminer n_0 tel que $u_{n_0} \leq 10^{-2}$ et préciser h_{n_0} à l'aide de la calculatrice.
- e. Donner une conjecture sur la convergence de la suite (h_n) .



1 grain de sable + 1 grain de sable + ...

2. Étude mathématique

- a. Étudier la monotonie de la suite (h_n) .
- b. Exprimer $h_{2n} - h_n$. Quel est le plus petit des termes qui composent cette somme ?
- c. En déduire que $h_{2n} - h_n \geq \frac{1}{2}$.
- d. La suite (h_n) peut-elle converger ? (Utiliser la remarque p. 44.)
- e. En déduire que $h_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

B. On construit un toit de tuiles plates de la façon suivante : à la verticale du milieu de la première tuile, on met la deuxième ; si l'on a mis n tuiles, on met l'extrémité de la $(n+1)$ -ième au-dessus du centre de gravité du toit jusqu'alors construit, afin que ce toit ne s'écroule pas. Chaque tuile a une longueur de 2 unités et est affectée d'une masse égale à 1.

Soit n un entier naturel non nul. On appelle G_n le centre de gravité du toit formé de n tuiles et I_n le centre de gravité de la n -ième tuile. On choisit sur un axe horizontal une origine telle que G_1 ait pour abscisse 1. On note alors X_n l'abscisse de G_n .

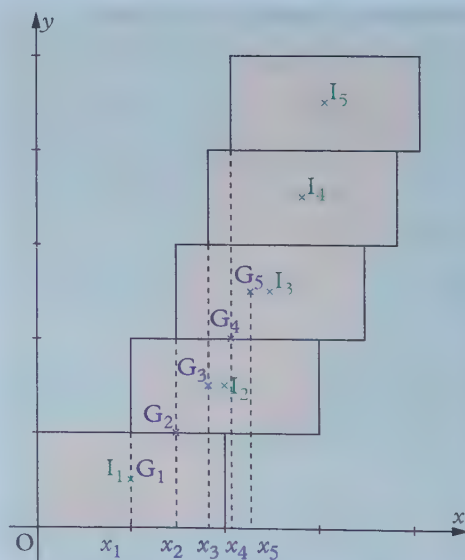
1. Calculer X_2 .
2. Déterminer l'abscisse de I_{n+1} en fonction de X_n .
3. Sachant que le centre de gravité du toit formé de $(n+1)$ tuiles est le barycentre de $(G_n; n)$ et de $(I_{n+1}; 1)$:

a. montrer que $(n+1)\overrightarrow{OG_{n+1}} = n\overrightarrow{OG_n} + \overrightarrow{OI_{n+1}}$;

b. en déduire que $X_{n+1} = X_n + \frac{1}{n+1}$.

4. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $X_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

5. Que peut-on en déduire concernant la longueur d'un tel toit ? Est-ce réalisable ?



4. Approximation de π : la méthode d'Archimède

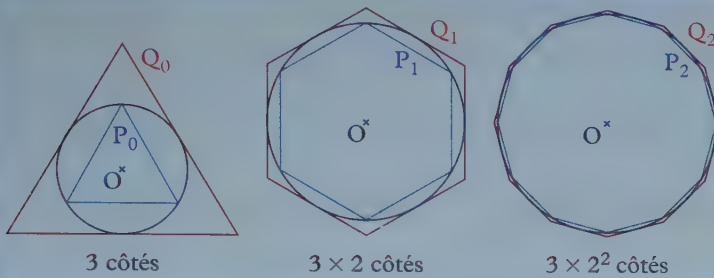
Une unité de longueur étant choisie, on considère un cercle \mathcal{C} de rayon 1 dont on note O le centre. Son périmètre est donc 2π et son demi-périmètre π .

L'idée d'Archimède est d'encadrer ce cercle par des polygones réguliers à 3×2^n côtés (voir dessin ci-dessous).

Point Info

En allant jusqu'à des polygones à 96 côtés, Archimède (III^e siècle avant J.-C.) a établi la proposition suivante (devenue célèbre depuis) :

« Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre, augmenté d'un segment compris entre les dix soixante et onzièmes et le septième de son diamètre. »



On notera P_n le polygone intérieur à 3×2^n côtés, p_n son demi-périmètre ;

Q_n le polygone extérieur à 3×2^n côtés et q_n son demi-périmètre.

On admet que tout polygone régulier inscrit dans un cercle a un périmètre inférieur à celui du cercle et tout polygone régulier circonscrit à un cercle a un périmètre plus grand que lui.

On aura donc, pour tout $n \geq 0$, $p_n < \pi < q_n$.

On s'interdira bien sûr d'utiliser la touche π de la calculatrice...

1. Conjecture

Quelles conjectures peut-on faire sur les suites (p_n) et (q_n) ?

2. Étude des polygones intérieurs

a. Construction des polygones P_n

P_0 est un triangle équilatéral (nommé ABC sur la figure ci-contre). Pour construire l'hexagone P_1 (nommé ADBECF sur la figure) à partir du triangle ABC, on a ajouté les sommets F, D et E, seconds points d'intersection du cercle avec les médiatrices des côtés du triangle ABC. Chaque polygone P_n engendrera de même le polygone P_{n+1} .

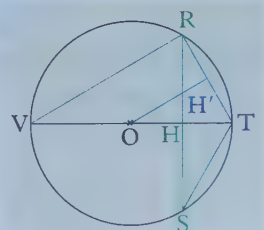
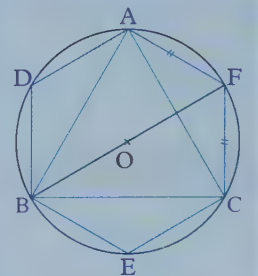
Calculer c_0 puis p_0 ; on rappelle que p_n est le demi-périmètre de P_n et c_n la longueur de son côté.

b. Justifier géométriquement que la suite (p_n) est croissante. Pourquoi est-elle convergente ?

c. Exprimer p_n en fonction de c_n et montrer que la suite (c_n) converge vers 0.

d. Passage de P_n à P_{n+1}

Sur la figure ci-contre, les points R et S sont deux sommets consécutifs du polygone P_n ; les points R, T et S sont trois sommets consécutifs de P_{n+1} et donc (OT) est la médiatrice de [RS]. On note H le milieu de [RS], H' le milieu de [RT] et V le point diamétralement opposé à T sur le cercle \mathcal{C} .



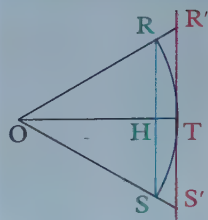
Notons a_n l'apothème de P_n , c'est-à-dire la distance de O à un côté de P_n .
 On a donc $OH = a_n$, $OH' = a_{n+1}$, $RS = c_n$ et $RT = c_{n+1}$.
 Montrer que les triangles VHR et $OH'T$ sont semblables.

En déduire que $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$, $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{2a_{n+1}}$ puis que $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{a_{n+1}}$.

3. Étude des polygones extérieurs

On construit R' et S' sur $[OR)$ et $[OS)$ tels que $(R'S')$ soit tangente en T au cercle \mathcal{C} .

- Justifier que $(R'S')$ est parallèle à (RS) et en déduire que $\frac{R'S'}{RS} = \frac{1}{a_n}$.
- Montrer que $[R'S']$ est bien un côté d'un polygone régulier Q_n circonscrit au cercle \mathcal{C} . Montrer que le demi-périmètre de Q_n est $q_n = \frac{p_n}{a_n}$.



c. En déduire que $\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{2a_n}{1+a_n}$ puis étudier le sens de variation de la suite (q_n) .

Montrer qu'elle converge.

4. Approximation de π

- En considérant le triangle ORH , exprimer a_n en fonction de c_n et montrer que la suite (a_n) converge vers 1.
- En déduire que les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes de même limite π .
- Calculer a_0 et q_0 puis recopier et compléter le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

n	Nombre de côtés de P_n et Q_n	a _n ≈	p _n ≈	q _n ≈
0				
1				
2				
...				
9				

Méthode

- Utiliser un tableur est très judicieux dans ce cas : voir TP tableur, p. 25.
- Avec la calculatrice, on programme le calcul de p_n et de q_n grâce à p_0 , q_0 et aux relations de récurrence qu'il faut réécrire pour TI sous la forme :

$$p_n = \frac{p_{n-1}}{\sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}} \text{ et } q_n = q_{n-1} \times \frac{2a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$$

d. Traduire en termes d'encadrement de π la proposition d'Archimède (citée au début du TP) et comparer avec les résultats obtenus pour les polygones à 96 côtés.

Point Info

Après Archimède, d'autres valeurs de π ont été calculées par des méthodes géométriques utilisant des polygones ayant un nombre suffisant de côtés. Par exemple vers 500, en Inde, Aryabhata obtient :

$$\frac{62\,832}{2\,000} \approx 3,141\,6 \text{ avec } 3 \times 2^7 \text{ côtés.}$$

En 1424, à Samarcande, Al-Kashi obtient ce qui correspond à 16 décimales exactes avec 3×2^{28} côtés.

En 1609, en Allemagne, Ludolphe de Cologne en obtient 35 avec 2^{62} côtés.

À partir du XVII^e siècle, les approches deviendront analytiques.



Bassin polygonal à 48 côtés.

5. Histoire de moyennes

OBJECTIF : Étudier différentes moyennes de deux nombres.

A. ➔ Quelques situations

Dans chacune des situations suivantes, calculez la moyenne demandée.

1. Sur une distance de 200 km, vous avez roulé à $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ la moitié du temps et $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ le reste du temps. Quelle est votre vitesse moyenne ?
2. Sur une distance de 200 km, vous avez roulé à $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ la moitié de la distance et à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur l'autre moitié. Quelle est votre vitesse moyenne ?
3. Le prix de l'essence a augmenté de 5 % au premier semestre puis de 15 % au second. Quel est le taux moyen d'augmentation par semestre pour cette année ?

B. ➔ Différentes moyennes

Soit a et b deux réels strictement positifs.

$m = \frac{a+b}{2}$; $g = \sqrt{ab}$ et h tel que $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ sont appelés respectivement la **moyenne arithmétique**, la **moyenne géométrique** et la **moyenne harmonique** de a et b .

1. Dans chacune des situations de la partie A, reconnaître le type de moyenne que l'on a calculé.

2. Interprétation géométrique

On suppose $0 < a \leq b$.

Soit A et B deux points tels que $AB = a + b$,

H le point de $[AB]$ tel que $AH = a$,

C le cercle de diamètre $[AB]$, O son centre,

P un point de C tel que (HP) soit perpendiculaire à (AB) ,

et K le projeté orthogonal de H sur $[OP]$.

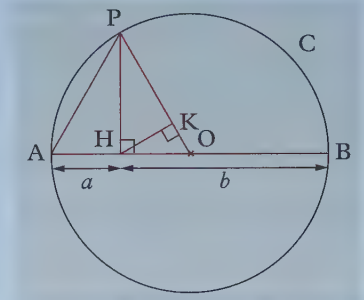
a. Justifier que $OP = m$.

b. Montrer que les triangles AHP et PHB sont semblables.

En déduire que $HP^2 = HA \times HB$ puis que $HP = g$.

c. Montrer que PKH et OPH sont semblables. En déduire que $PK = \frac{PH^2}{PO}$ puis que $PK = h$.

d. Classer par ordre croissant m , g et h .



C. ➔ Encore une autre moyenne

On définit les deux suites (a_n) et (b_n) (avec $0 \leq a \leq b$) par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout n de \mathbb{N} : a_{n+1} est la moyenne arithmétique de a_n et b_n et b_{n+1} est leur moyenne géométrique.

1. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , $a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b$.

2. Prouver que, pour tout n de \mathbb{N} , $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2} (b_n - a_n)$.

3. En déduire que, pour tout n de \mathbb{N} , $b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$.

4. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Leur limite commune est appelée **moyenne arithmético-géométrique** de a et b .

1 Passage à la limite

Soit (v_n) la suite définie dans \mathbb{N} par $v_0 = 1$ et, pour tout n dans \mathbb{N} , $v_{n+1} = \sqrt{12 + v_n}$.

1. Montrer par récurrence que (v_n) est minorée par 1, majorée par 4 et croissante.
2. En déduire la limite de (v_n) .

Solution

1. a. Initialisation : $v_0 = 1$ donc $1 \leq v_0 \leq 4$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que la propriété est vraie pour n , c'est-à-dire $1 \leq v_n \leq 4$ et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$, c'est-à-dire que $1 \leq v_{n+1} \leq 4$. Si $1 \leq v_n \leq 4$ alors $13 \leq 12 + v_n \leq 16$; il en résulte $1 \leq \sqrt{12 + v_n} \leq 4$, soit $1 \leq v_{n+1} \leq 4$.

Conclusion. Le principe de récurrence nous permet d'écrire que, pour tout n dans \mathbb{N} , $1 \leq v_n \leq 4$. La suite (v_n) est donc **minorée par 1** et **majorée par 4**.

b. Montrons par récurrence que, pour tout n dans \mathbb{N} , $v_n \leq v_{n+1}$.

Initialisation : $v_1 = \sqrt{13}$ donc $v_0 \leq v_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_n \leq v_{n+1}$ et montrons que $v_{n+1} \leq v_{n+2}$.

Si $v_n \leq v_{n+1}$ alors $12 + v_n \leq 12 + v_{n+1}$.

La suite (v_n) étant minorée par 1, on en déduit que $12 + v_n \geq 0$ et $12 + v_{n+1} \geq 0$, la fonction racine carrée étant croissante sur $[0 ; +\infty[$, $\sqrt{12 + v_n} \leq \sqrt{12 + v_{n+1}}$, soit $v_{n+1} \leq v_{n+2}$.

Conclusion. Le principe de récurrence nous permet d'écrire que, pour tout n dans \mathbb{N} , $v_n \leq v_{n+1}$. La suite (v_n) est donc **croissante**.

2. La suite (v_n) étant croissante et majorée par 4, elle converge vers une limite L par le théorème 2.

Comme pour tout n dans \mathbb{N} , $1 \leq v_n \leq 4$, on aura $1 \leq L \leq 4$.

(v_n) ayant pour limite L , la suite (v_{n+1}) a aussi pour limite L .

La suite $(12 + v_n)$ a pour limite $12 + L$, avec $12 + L \geq 0$. Par composition, il en résulte que la suite $(\sqrt{12 + v_n})$ admet pour limite $\sqrt{12 + L}$.

Les suites (v_{n+1}) et $(\sqrt{12 + v_n})$ étant égales, nous en déduisons par unicité de la limite $L = \sqrt{12 + L}$ avec $1 \leq L \leq 4$. L est donc une solution de l'équation $x = \sqrt{12 + x}$ dans l'intervalle $[1 ; 4]$.

Cette équation équivaut à $x^2 = 12 + x$ sur $[1 ; 4]$, et encore à $x^2 - x - 12 = 0$.

L'équation $x^2 - x - 12 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 49$.

Elle admet donc dans \mathbb{R} deux solutions distinctes : $\frac{1+7}{2} = 4$ et $\frac{1-7}{2} = -3$; d'où $L = 4$.

voir aussi exercices n° 11 à 15

2 Suite croissante majorée

Montrer que la suite (u_n) définie dans \mathbb{N} par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ est convergente.

Solution

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$ donc $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq 0$. La suite (u_n) est croissante.

Pour tout $k \geq 1$, $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k$.

Si $k \geq 2$, les entiers $2, 3, \dots, k$ sont supérieurs ou égaux à 2 d'où $k! \geq 2^{k-1}$.

D'où, si $n \geq 2$, $u_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$. Or $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

On a $1 - \frac{1}{2^n} < 1$ donc, pour tout n dans \mathbb{N} , $u_n \leq 3$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 3, elle converge donc vers une limite L et $L \leq 3$.

voir aussi exercice n° 89

3 Passage à l'expression conjuguée

Soit f la fonction définie dans \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ et \mathcal{C} sa courbe dans un repère du plan.

- Étudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Déterminer : **a.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$; **b.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x$.
- En déduire que la courbe \mathcal{C} admet deux asymptotes que l'on précisera.

Solution

1. Par la propriété sur la limite d'un polynôme en $-\infty$ et $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

Comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, par théorème de composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** Déterminons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$. Il s'agit d'une forme indéterminée.

Utilisons l'expression conjuguée de $\sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x > 0, \sqrt{x^2 + x + 1} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \frac{(x^2 + x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}. \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2$ par théorèmes de composition et d'opérations.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$, nous obtenons, d'après le théorème sur la limite d'un quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \frac{1}{2}.$$

b. De même $f(x) + x = \frac{(x^2 + x + 1) - x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$.

$$\text{Pour } x < 0, \sqrt{x^2} = |x| = -x \text{ donc } f(x) + x = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1}.$$

Par théorème de composition et d'opérations, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = -\frac{1}{2}$.

3. On en déduit par théorème d'opération que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x - \frac{1}{2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x + \frac{1}{2} = 0$.

La droite $D : y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$ et la droite $D' : y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote à \mathcal{C} en $-\infty$.

Remarque : En repère orthogonal D et D' sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $x = -\frac{1}{2}$ dont on peut montrer que c'est un axe de symétrie de \mathcal{C} .

voir aussi exercice n° 30

→ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Avec les définitions

1 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- Quelle est la limite de cette suite ?
- Déterminer à partir de quel entier tous les termes u_n appartiennent à l'intervalle :
 - $] -0,1 ; 0,1[$;
 - $] -0,01 ; 0,01[$;
 - $] -10^{-5} ; 10^5[$.

2 Soit $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$ pour tout n de \mathbb{N} .

- Exprimer $u_n - 2$.
- Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
- Déterminer à partir de quel entier tous les termes u_n appartiennent à l'intervalle :
 - $] 2 - 0,1 ; 2 + 0,1[$;
 - $] 2 - 0,01 ; 2 + 0,01[$;
 - $] 2 - 10^{-5} ; 2 + 10^5[$.

3 Exercice guidé

Soit (u_n) une suite qui converge vers -1 .
En revenant à la définition d'une suite convergente, démontrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n < 0$.

guide

- Compléter : dire que « (u_n) converge vers -1 », c'est dire que « tout intervalle ouvert contenant -1 ... ».
- Si c'est vrai pour tout intervalle ouvert contenant -1 , c'est vrai pour un intervalle particulier, qu'il suffit de bien choisir pour qu'il ne contienne que des réels négatifs.

4 En revenant à la définition d'une suite convergente, démontrer qu'une suite (u_n) converge vers L si, et seulement si, la suite $(u_n - L)$ converge vers 0 .

5 avec ROC En revenant à la définition d'une suite convergente, démontrer que si (u_n) est une suite convergente à termes positifs ou nuls, sa limite est positive ou nulle.

6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ , il en est de même pour la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
- La réciproque est-elle vraie ?

7 En revenant à la définition d'une suite convergente, montrer que si la suite (u_n) est telle que, pour tout n de \mathbb{N} , $0 \leq u_n \leq v_n$ où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

8 Un peu de logique pour mieux comprendre

1. Chaque salle du lycée possède sa propre clé, différente de celle des autres salles.
Y a-t-il une différence entre les deux phrases (A) et (B) suivantes ? Si oui, expliquer laquelle.
(A) Pour toute salle, il existe une clé qui permet d'ouvrir la salle.

(B) Il existe une clé qui, pour toute salle du lycée, ouvre cette salle.

2. Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = n^2 - 1$.

- Quelle est sa limite ?
- Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 - Pour tout n , il existe un entier M tel que $u_n \leq M$.
 - Il existe un entier M tel que pour tout n , $u_n \leq M$.

Unicité de la limite

9 Soit la suite définie par $u_0 = 12$ et par la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- Si (u_n) converge, quelle est sa limite ℓ ?
- On pose alors $v_n = u_n - \ell$ pour tout entier naturel n .
Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la limite.
- En déduire que la suite (u_n) converge.
- a. Tracer la droite $D : y = \frac{1}{2}x + 1$ dans un repère du plan et construire les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
b. Interpréter graphiquement les résultats des questions 1, 2 et 3.

10 Soit la suite définie par $u_0 = 3$ et par la relation $u_{n+1} = 3u_n - 4$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- Si (u_n) converge, quelle est sa limite ?
- On pose alors $v_n = u_n - \ell$ pour tout entier naturel n .
Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la limite.
- En déduire que la suite (u_n) ne converge pas.

Convergence monotone

11 Soit (u_n) la suite définie dans \mathbb{N} par $u_0 = 4$ et pour tout n dans \mathbb{N} , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 5$.

- Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 7.
- En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

12 Soit la suite u définie par son premier terme $u_0 = 4$ et par la relation $u_{n+1} = \sqrt{5 + u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- Représenter les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses d'un repère à l'aide de la courbe $\mathcal{C} : y = \sqrt{5 + x}$.
Quelles conjectures peut-on faire ?
- Montrer que pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 4$.
- Prouver que la suite u est décroissante.
- En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.

13 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$.

- Si la suite converge, quelles sont les valeurs possibles de sa limite L ?
- Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq u_n \leq 3$.
- Étudier le sens de variation de cette suite.
- Prouver que (u_n) converge et préciser sa limite.

14 $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}}}$ ou le nombre d'or
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
Expliquer le titre de l'exercice.

15 On considère la suite de premier terme $u_0 = 0$ et définie, pour tout entier positif, par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + u_n}$.

- Montrer que, pour tout entier n strictement positif, on a l'encadrement $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1$.
- Étudier le sens de variation de la suite et en déduire qu'elle converge.
- Déterminer la limite a de cette suite.

Suites adjacentes

16 Les suites $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n>0}$ et $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)_{n>0}$ sont-elles adjacentes ?

17 Donner deux suites adjacentes de limite commune -2 .

18 vu au BAC Exercice guidé

On définit les suites (a_n) et (b_n) par :

$a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et, pour tout n de \mathbb{N} ,

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n).$$

Soit D une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n .

- Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2 .
- Soit $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ dont on précisera le premier terme.
Exprimer u_n en fonction de n .
- Comparer a_n et b_n .
Étudier le sens de variation des suites (a_n) et (b_n) .
Interpréter géométriquement ces résultats.
- Démontrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout n de \mathbb{N} .
Démontrer que (v_n) est constante.
En déduire que les segments $[A_n B_n]$ ont tous le même milieu I .

6. Justifier que (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer leur limite.
Interpréter géométriquement ce résultat.

3. On conjecture d'après la première question que, pour tout $n \geq 0$, $a_n \leq b_n$.
Ces suites étant définies par récurrence, on peut essayer de démontrer ce résultat par récurrence.
On peut aussi utiliser le signe de u_n .

6. La limite de la suite (v_n) peut être calculée de deux façons ... mais elle est unique !

19 Vrai ou Faux ?

Soit (u_n) une suite décroissante, à termes strictement positifs, et de limite 1.

Les suites (u_n) et $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ sont adjacentes.

Limites de suites

20 Étudier la limite des suites suivantes.

a. $u_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{n}$; b. $u_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{(n+1)^2}$;

c. $u_n = \frac{2n + 3}{(n+1)^2}$; d. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

21 Quelle est la limite des suites suivantes ?

a. $u_n = n + (-1)^n$; b. $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$;

c. $u_n = \sin n - n$.

22 Étudier la limite des suites suivantes définies pour $n \geq 1$.

a. $u_n = \frac{n + \sin(n)}{n}$; b. $u_n = \frac{n + \sin n}{2n + \cos(n)}$.

23 On pose, pour $n > 0$:

$$u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2}.$$

1. Montrer que, si $0 \leq k \leq n$:

$$\frac{1}{(n+n)^2} \leq \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

2. En déduire un encadrement de u_n .

3. Quelle est la limite de cette suite ?

24 On pose, pour $n > 0$:

$$u_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+n}.$$

En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer la limite de la suite (u_n) .

25 Montrer que la suite définie par :

$$u_n = \frac{2 \times 3^n + 1}{3^n + 4}, \text{ pour tout entier naturel } n,$$

converge vers 2.

26 Déterminer la limite des suites définies sur \mathbb{N} par :

a. $u_n = \sqrt{n^2 + 6} - \sqrt{n^2 + 2}$;

b. $u_n = n\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

27 avec ROC Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 . Soit a un réel strictement positif.

1. Montrer qu'il existe un entier N_1 tel que, pour $n \geq N_1$,

$$\ell_1 - \frac{a}{2} < u_n < \ell_1 + \frac{a}{2}.$$

2. Montrer qu'il existe un entier N_2 tel que, pour $n \geq N_2$, $\ell_2 - \frac{a}{2} < v_n < \ell_2 + \frac{a}{2}$.

3. Trouver un rang N à partir duquel on ait :

$$\ell_1 + \ell_2 - a < u_n + v_n < \ell_1 + \ell_2 + a.$$

4. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$.

Limites de fonctions

28 Déterminer les limites en $-\infty$ et de $+\infty$ de :

a. $2x^2 + 3x - 1$; b. $-x^3 + 4x + 1$;

c. $\sqrt{x^4 + 3x + 2}$; d. $\sqrt{x^2 - x + 5}$.

29 Étudier la limite lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ de :

a. $\frac{2x+1}{x-3}$; b. $\frac{5x^2+3}{x^2}$; c. $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$.

30 Étudier la limite lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ de :

a. $\sqrt{x^2 + 2x - 3}$; b. $\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x$;

c. $\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x$.

31 Déterminer la limite en $+\infty$ de :

a. $x + \sin x$; b. $\frac{1}{x + \sin x}$; c. $\frac{\cos x}{x+1}$.

32 Étudier la limite de $f(x)$ en α dans les cas suivants.

a. $\frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$, $\alpha = 1$; b. $\frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$, $\alpha = \frac{1}{2}$;

c. $\frac{x^2 - 4x - 5}{x^3 + 1}$, $\alpha = -1$; d. $\frac{2x+1}{(x-2)^2}$, $\alpha = 2$.

33 On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Calculer les limites en α de :

a. $\frac{\sin(4x)}{\sin x}$, $\alpha = 0$; b. $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $\alpha = +\infty$;

c. $\sin\left(-\frac{1}{x}\right)$, $\alpha = +\infty$; d. $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $\alpha = +\infty$.

34 avec ROC En s'inspirant de la démonstration donnée pour les suites, montrer que si $f(x)$ tend vers un réel ℓ lorsque x tend vers 0, alors ℓ est unique.

35 avec ROC En s'inspirant de la démonstration faite pour les suites, montrer que si $f(x) \geq 0$ sur l'intervalle $]a; +\infty[$, ($a \in \mathbb{R}$) et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (ℓ réel), alors $\ell \geq 0$.

Asymptotes

Dans les exercices qui suivent, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

36 1. Démontrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe définie par l'équation $y = \frac{x^2}{x-1} = f(x)$.

2. Étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote.

3. Quelle autre asymptote possède cette courbe ?

37 Montrer que la courbe associée à la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)^2}$ admet une asymptote horizontale et deux asymptotes verticales.

38 Montrer qu'il existe des réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$:

$$\frac{x^2 - 1}{2x + 1} = ax + b + \frac{c}{2x + 1}.$$

En déduire que la courbe d'équation $y = \frac{x^2 - 1}{2x + 1}$ admet la même droite pour asymptote au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

39 Montrer que, pour tout réel x différent de 1 :

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire que la courbe d'équation $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ admet pour asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ une droite dont on déterminera une équation cartésienne.

Quelle est la position de la droite asymptote par rapport à la courbe ?

40 Démontrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe d'équation $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ en $+\infty$.

Avec des suites auxiliaires

41 Soit la suite réelle de premier terme $u_0 = 3$ et définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}$ pour tout entier naturel n .

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2. Tracer dans un repère du plan la courbe $\mathcal{C} : y = \frac{2}{1+x}$ et construire les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

Quelles conjectures peut-on faire ?

3. Démontrer que tous les termes de la suite sont positifs.

4. Si la suite (u_n) est convergente, démontrer que la limite ℓ est solution de l'équation $x^2 + x - 2 = 0$.

5. Soit la suite de terme général $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ pour tout entier naturel n .

Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique convergente et préciser sa limite.

6. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

42 On définit la suite réelle par $u_0 = 2$ et la relation

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5}{2u_n}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

On pose $v_n = \frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$ pour tout n de \mathbb{N} .

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Si (u_n) converge vers une limite L , quelle valeur peut prendre L ?

3. a. Montrer que $v_{n+1} = v_n^2$.

b. Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n .

c. Démontrer cette conjecture.

4. Prouver que $v_0 = -\frac{1}{(2 + \sqrt{5})^2}$ et que $|v_0| < \frac{1}{16}$.

5. En déduire la limite de la suite (v_n) , puis celle de la suite (u_n) .

43 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases} \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}.$$

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(n) = \sqrt{1 + x^2}$$

En utilisant f , montrer que (u_n) est divergente.

2. Soit (v_n) la suite définie dans \mathbb{N} par $v_n = u_n^2$.

a. Montrer que (v_n) est arithmétique.

b. Calculer v_n puis u_n en fonction de n et u_0 .

c. Déterminer la limite de (u_n) .

→ Que sais-je ?

Vrai ou faux ?

Pour les exercices 44 à 51, dire si la proposition est vraie ou fautive et justifier.

44 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4}{2 - x} = -\infty$.

45 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x - 5}{2x^2 + 3} = 0$.

46 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 7}{(x - 2)^2} = +\infty$.

47 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 5} - x = +\infty$.

48 La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 3$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe d'équation $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{2x - 4}$.

49 La suite (-2^n) diverge vers $-\infty$.

50 La suite $\left(\frac{n^2 + \sin n}{2n + 1}\right)$ diverge vers $+\infty$.

51 La suite $\left(\sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)\right)$ n'a pas de limite.

Dans les exercices 52 à 59, on ne justifiera que dans le cas d'une proposition fautive.

52 Une suite bornée est convergente.

53 Toute suite croissante positive converge.

54 Toute suite décroissante positive converge.

55 Une suite non majorée a pour limite $+\infty$.

56 Une suite ayant pour limite $+\infty$ n'est pas majorée.

57 La négation de la proposition « pour tout n , $u_n \leq 3^n$ » est « pour tout n , $u_n > 3^n$ ».

58 Si la suite (u_n^2) converge, la suite (u_n) converge.

59 Si la suite (u_n) tend vers $+\infty$, il existe au moins un entier naturel n tel que $u_n < u_{n+1}$.

QCM

Dans les exercices 60 à 63, choisir la ou les réponses justes (on ne demande pas de justification).

60 Formes indéterminées

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$:

A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0$; B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = -\infty$;

C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = -1$; D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n^2} = 0$.

61 On considère une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ pour tout n de \mathbb{N} .

A. Si la suite converge, sa limite est 6.

B. Si $u_0 \in [0 ; 6]$, la suite est croissante.

C. Si $u_0 \in [6 ; +\infty[$, la suite est minorée.

D. La suite $(u_n - 6)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

62 Suites convergentes

A. Si une suite (u_n) converge vers une limite réelle L , tous les termes u_n à partir d'un certain rang sont dans l'intervalle $]L - 0,1 ; L + 0,1[$.

B. Si une suite ne converge pas vers le nombre réel L , tous les termes à partir d'un certain rang sont en dehors de l'intervalle $]L - 0,1 ; L + 0,1[$.

C. Si une suite (u_n) converge vers une limite L et si $L > 0$, alors, à partir d'un certain rang, $u_n > 0$.

D. Si une suite convergente vers L a tous ses termes strictement positifs, alors $L > 0$.

63 Pour toute suite réelle (u_n) on a :

A. Si (u_n) n'est pas minorée elle est majorée.

B. Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs alors elle est convergente.

C. Si (u_n) est positive et strictement croissante alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

D. Si (u_n) converge alors (u_n) est bornée.

E. Si (u_n) converge vers un réel L non nul alors la suite $(2^n u_n)$ diverge.

→ Un sujet vu au BAC (extrait)

64 Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

→ Partie A. Question de cours

On suppose connus les résultats suivants.

(1) Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(2) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) croissante et (v_n) décroissante, alors, pour tout n appartenant à \mathbb{N} , on a $u_n \leq v_n$.

(3) Une suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors cette proposition : « Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite. »

→ Partie B

On considère une suite (u_n) , définie sur \mathbb{N} , dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1 .
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.

Juin 2005.

Solution

→ Partie A

Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes telles que (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

• Par (2), pour tout n , $u_n \leq v_n$. Or (v_n) étant décroissante, $v_n \leq v_0$ donc pour tout n , $u_n \leq v_n \leq v_0$.

La suite (u_n) étant croissante et majorée par v_0 , par (3) on déduit qu'elle converge. Soit L sa limite.

• De même pour tout n , $u_0 \leq u_n \leq v_n$. La suite (v_n) est décroissante minorée par u_0 , donc converge. Soit L' sa limite.

• Par théorème d'opération $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = L - L'$. Or par (1),

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$. Par unicité de la limite, $L - L' = 0$ soit

$L = L'$. Deux suites adjacentes ont donc la même limite.

→ Partie B

1. Faux. Soit $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout n de \mathbb{N} , la suite (u_n) est bien à termes tous non nuls et elle converge vers 0. Alors $v_n = -2(n+1)$ et la suite (v_n) a pour limite $-\infty$ donc n'est pas convergente.

2. Vrai. Supposons que la suite (u_n) est minorée par 2. C'est dire que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n \geq 2$. Alors pour tout n , $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ donc

$\frac{-2}{u_n} \geq -1$, soit $v_n \geq -1$. (v_n) est donc bien minorée par -1 .

3. Faux. Le contre-exemple donné à la question B1 le prouve.

4. Faux. Comme contre-exemple, prenons $u_n = (-1)^n$.

Le jour du BAC

Question A1 : Il faut bien avoir compris que lorsqu'on recherche un majorant de (u_n) (ici, on a pris v_0), celui-ci doit être plus grand que tous les réels u_n et indépendant de n .

Question B1 : Si (u_n) converge

vers L , $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ a pour limite $\frac{1}{L}$ si

$L \neq 0$. C'est le cas $L = 0$ qui pose problème. Pour bâtir un contre-exemple, on examine des suites simples

convergentes vers 0 : $\left(\frac{1}{n}\right)$ ou (q^n)

avec $0 < q < 1$. Ici, la suite devant être définie sur \mathbb{N} , on a pris $\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Question B3 : Il faut bien lire l'énoncé : quand la réponse est fausse, on demande un contre-exemple. Il ne s'agit pas de tenter une démonstration générale en manipulant des inégalités.

→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Calcul de limites

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan.

65 Démontrer que les droites d'équations $y = 8x$ et $y = 2x$ sont asymptotes à la courbe définie par l'équation $y = 5x + 3\sqrt{x^2 - 1}$. Étudier la position de la courbe par rapport à ses asymptotes pour $|x|$ suffisamment grand.

66 Étudier les limites en α de :

a. $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$, $\alpha = 1$; b. $\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 - x}$, $\alpha = 0$.

67 Déterminer la limite en $+\infty$ de :

$$x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x}.$$

68 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-5 ; 2\}$. Étudier les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, -5 et 2 .

69 Mêmes questions que l'exercice précédent avec :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2(x + 5)}.$$

70 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 6x + 5}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 ; 5\}$. Étudier les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, 1 et 5 .

71 On pose $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x} + 1$ pour tout réel x . Montrer que les droites d'équations $y = 2x + \frac{1}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}$ sont asymptotes à la courbe d'équation $y = f(x)$.

72 On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Étudier les limites de :

a. $\frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \sin x}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (on pourra poser $u = x + \frac{\pi}{4}$ et utiliser les formules de trigonométrie) ;

b. $2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

73 Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x^2 - x + 1 + \frac{a}{x} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

1. Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
2. Étudier la limite de f quand x tend vers 0 (discuter suivant les valeurs de a).

74 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 1} + ax + b.$$

1. Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$ en fonction des valeurs des paramètres réels a et b .
2. Étudier la limite de f quand x tend vers $-\infty$ en fonction des valeurs des paramètres réels a et b .

75 Soit la fonction f définie par :

$$x \mapsto \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1}.$$

1. Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$ en fonction des valeurs de a et b .
2. Étudier la limite de f quand x tend vers $-\infty$ en fonction des valeurs de a et b .

76 1. Montrer que, pour $x > -1$:

$$\frac{x^3 + x^2 + x}{x + 1} = x^2 + 1 - \frac{1}{x + 1}.$$

En déduire la limite de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{x + 1} - (x^2 + 1) \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty.$$

2. Quelle est la position de la courbe d'équation $y = \frac{x^3 + x^2 + x}{x + 1}$ par rapport à la branche de parabole

d'équation $y = x^2 + 1$ pour $x \geq 3$?

Représenter l'allure de ces deux courbes.

On dira que la parabole d'équation $y = x^2 + 1$ est asymptote à la courbe de f .

77 Pour aller plus loin

On considère une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

1. Supposons que la droite Δ d'équation cartésienne $y = ax + b$ ($a \neq 0$) soit asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$.

Posons alors $g(x) = f(x) - (ax + b)$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

a. Montrer que $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b. Montrer que $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$.

2. On suppose qu'il existe deux réels a et b ($a \neq 0$) tels que $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$.

En déduire que la droite Δ d'équation cartésienne $y = ax + b$ est asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$.

3. Application : Montrer que la courbe d'équation $y = \frac{x^2 + 5}{2x + 1}$ admet une asymptote oblique, dont on déterminera une équation cartésienne.

Étude de suites

78 On pose $u_n = \frac{n^2}{n!}$ pour tout entier naturel n .

- Calculer les six premiers termes de cette suite.
- Montrer que $u_{n+1} = \frac{n+1}{n^2} u_n$.
- Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2.
- Montrer que (u_n) converge.
- Déterminer la limite de la suite.

79 Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour n entier naturel.

- Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 2$.
- Montrer que la suite u est croissante. En déduire qu'elle admet une limite finie ℓ .
- Montrer que ℓ vérifie $\ell = \sqrt{2 + \ell}$.
- En déduire la valeur de ℓ .
- Soit v la suite définie par $v_0 = 3$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$ pour n entier naturel. En s'inspirant de la méthode utilisée pour (u_n) , montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite.

80 Soit θ un réel de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2 \cos \theta$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

- Démontrer que pour tout x réel : $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$.
- Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n = 2 \cos \frac{\theta}{2^n}$.
- En déduire la limite de la suite (u_n) .

81 Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ pour n entier naturel.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$.

2. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

3. En déduire que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent respectivement vers deux réels ℓ_0 et ℓ_1 .

4. Montrer que ℓ_0 et ℓ_1 sont solutions de l'équation :

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

En déduire la valeur de ℓ_0 et ℓ_1 .

5. Montrer alors que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

82 Suite (sin n)

- Donner une valeur approchée de $\cos 1$ et $\sin 1$.
- Des formules de trigonométrie**
 - Justifier que pour tout n de \mathbb{N} : $\sin(n+1) = \cos 1 \sin n + \sin 1 \cos n$.
 - Justifier que pour tout n de \mathbb{N} : $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \sin 1 \cos n$.

3. Des suites

On pose, pour tout n de \mathbb{N} , $u_n = \sin n$ et $v_n = \cos n$.

On supposera désormais que (u_n) a une limite finie L .

- Déduire de la relation établie en **2b** que (v_n) converge et préciser sa limite.
- Déduire alors de la relation établie en **2a** que $L = 0$.
- En considérant $u_n^2 + v_n^2$, montrer que $L^2 = 1$. Qu'en déduit-on ?
- Montrer que la suite $(\sin n)$ n'a pas de limite (finie ou non).

83 **CD** L'indécis a deux amis

Monsieur L'indécis se trouve à mi-chemin entre 2 de ses ami(e)s \mathcal{A} et \mathcal{B} . Il décide d'aller voir \mathcal{A} mais arrivé au milieu du chemin, il change d'avis et décide d'aller voir \mathcal{B} . Au milieu du chemin, il change d'avis et décide d'aller voir \mathcal{A} , au milieu du chemin, il change d'avis et décide d'aller voir \mathcal{B} , et ainsi de suite.

On notera A et B les points représentant les positions de \mathcal{A} et \mathcal{B} , I_0 le milieu de $[AB]$, I_1 le milieu de $[I_0A]$, I_2 celui de $[I_1B]$, I_3 celui de $[I_2A]$, etc. La droite (AB) étant munie du repère $(A; \overrightarrow{AB})$, on note x_n l'abscisse de I_n .

- En prenant 20 cm pour AB , représenter les points I_0, I_1, \dots, I_6 et calculer x_0, x_1, \dots, x_6 .
- La suite (x_n) est-elle monotone ?
- Donner les premiers termes de la suite (x_{2n}) . Semble-t-elle être monotone ? et la suite (x_{2n+1}) ?
- Montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$x_{2n+1} = \frac{1}{2} x_{2n} \quad \text{et} \quad x_{2n+2} = \frac{1}{2} (1 + x_{2n+1}).$$

EXERCICES

5. a. En déduire x_{2n+2} en fonction de x_{2n} .
 b. Montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$x_{2n} \leq \frac{2}{3}.$$

- c. Étudier le sens de variation de la suite (x_{2n}) .
 6. En déduire que la suite (x_{2n+1}) est croissante et majorée par $\frac{1}{3}$.
 7. Monsieur L'indécis pourra-t-il arriver chez \mathcal{A} ou \mathcal{B} ?
 8. Pour connaître plus précisément le sort de Monsieur L'indécis, montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$x_{2n} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$
 En déduire le comportement de Monsieur L'indécis quand n devient grand.

Prolongement : Qu'arrive-t-il à l'indécis s'il part d'un point quelconque situé entre A et B ?

Suites adjacentes

84 Soit les deux suites u et v définies par la donnée de u_0 et v_0 ($u_0 < v_0$) et les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

- Démontrer que la suite $v - u$ est une suite géométrique. Donner la limite de cette suite.
- Prouver que, la suite u est croissante et que la suite v est décroissante.
- Montrer que les deux suites u et v sont adjacentes.
- Montrer que la suite $v + u$ est une suite constante.
- En déduire la valeur de la limite commune des deux suites u et v .

85 On pose :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

- Soit $v_n = u_{2n}$. Montrer que (v_n) est croissante.
- Soit $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (w_n) est décroissante.
- Calculer, pour tout entier n non nul, $v_n - w_n$. En déduire que la suite $(v_n - w_n)$ converge vers 0.
- Montrer que (w_n) et (v_n) sont adjacentes.
- On appelle ℓ la limite commune de ces deux suites. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} \leq \ell \leq u_{2n+1}$. En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près en utilisant la calculatrice.
- Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ . (On utilisera l'exercice n° 87.)

Avec les définitions

86 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit p un entier naturel non nul.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ , il en est de même pour la suite $(u_{n+p})_{n \in \mathbb{N}}$.

2. La réciproque est-elle vraie ?

87 1. Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour tout entier naturel n :

$$p_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad q_n = u_{2n+1}.$$

Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ , il en est de même des suites (p_n) et (q_n) .

2. Réciproquement, on suppose que (p_n) et (q_n) convergent vers la même limite ℓ .

Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ .

Trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans I .

En déduire que (u_n) est une suite convergente de limite ℓ .

3. Application : Montrer que $((-1)^n)$ est divergente.

88 Montrer que si (u_n) est une suite convergente de limite $\ell > 0$, tous les termes de la suite sont strictement plus grands que $\frac{\ell}{2}$ pour n assez grand.

En déduire que, si (v_n) est une suite tendant vers $+\infty$, la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Suites définies par sommation

89 On note, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Partie A. Convergence de la suite (u_n)

- Calculer les trois premiers termes de cette suite.
- Montrer qu'elle est croissante.
- Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

En sommant ces inégalités membre à membre pour $2 \leq k \leq n$, montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.

4. Justifier que la suite (u_n) converge.

Euler a démontré en 1748 que la suite (u_n) converge vers $\frac{\pi^2}{6}$. On admettra ce résultat dans la suite de l'exercice.

Partie B. Encadrement de $\frac{\pi^2}{6}$

On considère alors les suites $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$

définies par $v_n = u_n + \frac{1}{n+1}$ et $w_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. Déterminer les limites des suites (v_n) et (w_n) .
2. Montrer que :

$$\forall n \geq 1, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$$

En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .

3. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

4. En déduire que, $\forall n \geq 1, v_n \leq \frac{\pi^2}{6} \leq w_n$.

- a. Montrer que, $\forall n \geq 1, 0 \leq w_n - v_n \leq \frac{1}{n^2}$.

- b. En déduire un entier p tel que pour $n \geq p$,

l'encadrement $v_n \leq \frac{\pi^2}{6} \leq w_n$ ait une longueur inférieure ou égale à 10^{-2} .

- c. À l'aide de la calculatrice, donner des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de v_p et w_p . En déduire un encadrement de $\frac{\pi^2}{6}$ par deux nombres décimaux à deux chiffres après la virgule. Préciser la longueur de cet encadrement.

Comparer avec la valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ fournie par la calculatrice.

90 Suites adjacentes et aire

1. Construire précisément la courbe C représentant la fonction sinus sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; on prendra un repère orthogonal avec 5 cm pour unité en ordonnée et 8 cm pour $\frac{\pi}{2}$ unités en abscisse.

On désigne par A l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe et l'axe des abscisses sur I.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_k = k \frac{\pi}{2n+1}$ avec $0 \leq k \leq 2^n$.

Pour $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, on construit sur chaque intervalle $[a_k; a_{k+1}]$ les rectangles R_k et R'_k de hauteurs respectives $\sin(a_k)$ et $\sin(a_{k+1})$.

- a. Construire R_k et R'_k pour $n=1$, puis $n=2$ et $n=3$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Quel est le nombre de rectangles R_k ?

3. a. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des aires des 2^n rectangles R_k est le nombre :

$$U_n = \frac{\pi}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sin(a_k).$$

- b. Exprimer la somme V_n des aires des 2^n rectangles R'_k .

- c. Calculer à 10^{-1} près :

$$U_1, U_2, U_3, V_1, V_2 \text{ et } V_3.$$

4. a. Montrer que :

$$U_{n+1} = \frac{\pi}{2^{n+2}} \left(\sum_{p=0}^{2^n-1} \sin\left(\frac{2p\pi}{2^{n+2}}\right) + \sum_{p=0}^{2^n-1} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2^{n+2}}\right) \right).$$

- b. En déduire que pour tout n dans \mathbb{N}^* :

$$U_{n+1} \geq \frac{\pi}{2^{n+2}} \left(\sum_{p=0}^{2^n-1} \sin\left(\frac{2p\pi}{2^{n+2}}\right) + \sum_{p=0}^{2^n-1} \sin\left(\frac{2p\pi}{2^{n+2}}\right) \right),$$

puis que $U_{n+1} \geq U_n$ pour tout n de \mathbb{N}^* .

5. En reprenant une démarche analogue, montrer que $V_{n+1} \leq V_n$ pour tout n de \mathbb{N}^* .

6. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n \leq A \leq V_n.$$

- a. Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

- b. Quelle est leur limite commune ?

7. Déterminer un encadrement de longueur 10^{-1} de A.

91 Pour aller plus loin

Le théorème « toute suite croissante et majorée est convergente » est-il vrai dans \mathbb{Q} ? Autrement dit : une suite de rationnels strictement croissante et majorée a-t-elle une limite rationnelle L ?

- 92 Montrer qu'une suite périodique non constante ne peut pas converger.

→ PROBLÈMES

93 D'après Bac

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ pour $x \neq -1$. Le plan est muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 4 cm). On note Γ la courbe représentant f .

Partie A. Étude d'une fonction

- Étudier les limites de f en $-\infty$, $+\infty$ et en -1 .
- Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- Justifier que si $x \in [1; 2]$, $f(x) \in [1; 2]$.
- Tracer la courbe Γ .

Partie B. Étude de deux suites

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n),$$

$$v_0 = 2 \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n).$$

- Construire sur l'axe des abscisses du repère les trois premiers termes de chacune des deux suites (on laissera apparents les traits de construction).
- Quelles conjectures peut-on faire sur les suites (u_n) et (v_n) ?
- Montrer par récurrence que :
 - pour tout n de \mathbb{N} , $1 \leq u_n \leq 2$;
 - pour tout n de \mathbb{N} , $u_n \leq u_{n+1}$;
 - pour tout n de \mathbb{N} , $1 \leq v_n \leq 2$;
 - pour tout n de \mathbb{N} , $v_{n+1} \leq v_n$.

- Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}.$$

En déduire que, pour tout n de \mathbb{N} ,

$$v_n - u_n \geq 0 \text{ et } v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4} (v_n - u_n).$$

- Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
- En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α . Déterminer la valeur exacte de α .

94 Suite de Babylone

Soit a un nombre réel strictement positif. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$

Partie A. Conjectures

- À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableau, conjecturer la limite de (u_n) pour $a = 1, 2, 4, 9, 16$.
- Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de (u_n) pour $a \in \mathbb{R}^{*+}$?

Partie B. Étude de la suite

1. Démontrer que, pour tout n , $u_n > 0$. Pour quelle valeur de u_0 la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle constante ?

2. On suppose, dans toute la suite du problème, que $u_0^2 - a \neq 0$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{a})^2 ;$$

$$u_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n} (u_n + \sqrt{a})^2.$$

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante pour $n \geq 1$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite (on ne demande pas de calculer cette limite dans cette question).

3. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

- Calculer v_{n+1} en fonction de v_n .
- Calculer v_{n+1} en fonction de v_1 et de n . En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

95 Soit (u_n) une suite définie dans \mathbb{N} , bornée, et telle que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Le but du problème est de savoir si une telle suite est convergente.

On admet que la suite $(\sin n)$ n'a pas de limite (voir exercice n° 82).

1. Donner des exemples de suites (u_n) bornées et telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

Sont-elles convergentes ?

2. Soit (v_n) la suite définie dans \mathbb{N} par $v_n = \sin(\sqrt{n})$.

- Exprimer v_{n^2} .
- Si (v_n) admet une limite L , quelle est alors la limite de la suite (v_{n^2}) ?
- La suite (v_n) a-t-elle une limite ?

3. Montrer que la suite (v_n) est bornée.

4. a. Soit p et q deux réels, $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$.

Calculer $a+b$ et $a-b$. En déduire :

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

b. Montrer que :

$$v_{n+1} - v_n = 2 \sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2}\right).$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 0$.

5. Conclure.

96 Théorème des suites adjacentes \Rightarrow toute suite croissante et majorée par un réel M converge.

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante et majorée par un réel M .

Nous allons montrer qu'une telle suite est convergente en deux étapes :

Partie A. Nous construirons par **dichotomie** une suite (a_n) formée de certains des termes de la suite (u_n) et une suite (b_n) de majorants de la suite (u_n) , qui convergeront vers une même limite L .

Partie B. On montrera que la suite (u_n) elle-même converge vers L .

Partie A

Définition des suites (a_n) et (b_n) : $a_1 = u_1$ et $b_1 = M$, et, pour tout $n \geq 1$,

• si $\frac{a_n + b_n}{2}$ est un majorant de la suite (u_n) , alors

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

• sinon, a_{n+1} est le premier terme de la suite (u_n)

supérieur à $\frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Si $\frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ est un majorant de (u_n)

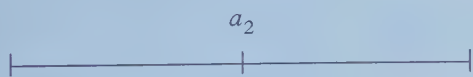
Alors on pose : $b_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ et $a_2 = a_1$



$$a_2 = a_1 = u_1 \quad b_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \quad b_1 = M$$

Si $\frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ n'est pas un majorant de (u_n)

Alors on pose : $b_2 = b_1$ et a_2 est le premier terme de la suite supérieur à $\frac{1}{2}(a_1 + b_1)$



$$a_1 = u_1 \quad \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \\ b_2 = b_1 = M$$

1. Un exemple pour commencer

Soit $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ pour $n \geq 1$.

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par $M = 2$ (voir l'application p. 21 du chapitre 1).

Nous admettrons que cette suite (u_n) converge vers

une limite étonnante : $\frac{\pi^2}{6}$.

a. Déterminer à l'aide de la calculatrice des valeurs approchées de u_n pour $1 \leq n \leq 8$. Représenter ces termes et M sur un axe avec pour unité graphique 20 cm.

b. Calculer et représenter sur l'axe $\frac{a_1 + b_1}{2}$. Déterminer a_2 et b_2 .

Calculer et représenter sur l'axe $\frac{a_2 + b_2}{2}$. Déterminer a_3 et b_3 en admettant que 1,75 est encore un majorant de la suite (u_n) .

c. Justifier que $0 \leq b_3 - a_3 \leq \frac{b_2 - a_2}{2} \leq \frac{b_1 - a_1}{2^2}$.

2. Cas général

a. Justifier par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

et que $0 \leq (b_n - a_n) \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$.

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

b. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite L .

Partie B

Soit I un intervalle ouvert contenant L .

1. Expliquer pourquoi on peut trouver un entier N tel que a_n et b_n appartiennent à I pour tout $n \geq N$.

2. Soit P l'entier tel que $u_P = a_N$ où N est l'entier déterminé à la question précédente.

Justifier que pour tout $n \geq P$, $a_N \leq u_n \leq b_N$. En déduire que pour tout $n \geq P$, $u_n \in I$.

3. Conclure.

Remarque : une suite croissante et majorée par un réel M converge \Rightarrow théorème des suites adjacentes : démonstration faite dans le cours.

Le théorème des suites adjacentes est équivalent au théorème : « Toute suite croissante majorée converge. »

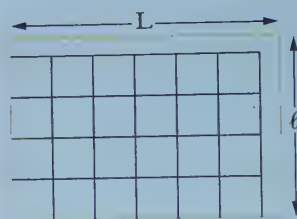
CD Activité 1 → Une fonction particulière

OBJECTIF

Une activité
de recherche
et de découverte.

Un fabricant de gommes expédie ses gommes dans de petits cartons d'emballage rectangulaires de périmètre 21 cm, avec une largeur ℓ et une longueur L .

Sachant que chaque gomme est posée sur sa base qui est un carré de côté 1 cm, et que les gommes sont rangées en une seule couche, représenter la fonction N donnant le nombre $N(\ell)$ de gommes que peut contenir un carton en fonction de la largeur ℓ .



Activité 2 → Fonction partie entière

Pour tout réel x , il existe un unique entier n dans \mathbb{Z} tel que $n \leq x < n + 1$.
 n est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

Cet entier n est appelé la **partie entière** du réel x et noté $E(x)$.

1. Donner $E(2,41)$, $E(2)$, $E(-3,1)$, $E(-3)$, $E(0)$, $E(0,008)$, $E(0,87)$, $E(0,999)$.
2. Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto E(x)$ dans $[-3 ; 3]$.
3. Montrer que $x \mapsto E(x)$ est croissante sur \mathbb{R} .
4. Montrer que, pour tout réel x , $x - 1 < E(x) \leq x$.

Activité 3 → Équations $f(x) = k$

La fonction f est définie sur l'intervalle $I = [-2 ; 5]$, telle que $f(-2) = -3$, $f(5) = 3$.

1. Tracer une courbe représentant f sachant de plus que :
 - a. l'équation $f(x) = 2$ a pour unique solution 3 ;
 - b. l'équation $f(x) = 2$ a exactement trois solutions ;
 - c. f est croissante sur I et l'équation $f(x) = 2$ a au moins pour solutions 2 et 3 ;
 - d. l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution.
2. Donner des conditions suffisantes, sur f , pour être sûr que l'équation $f(x) = k$ admette exactement une solution sur I , quel que soit le réel k compris entre $f(-2)$ et $f(5)$.

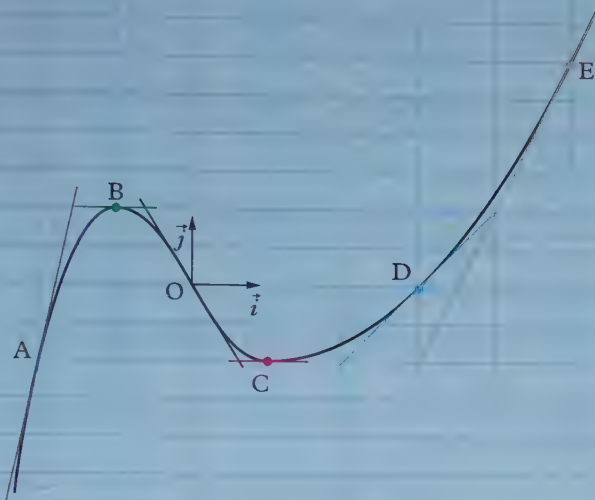
Activité 4 ➔ Tangente : aspect graphique

1. La courbe ci-dessous représente une fonction f dérivable sur \mathbb{R} et certaines de ses tangentes.

Lire graphiquement $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.

OBJECTIF

Revoir l'interprétation graphique de $f'(a)$.



2. On donne le tableau de valeurs suivant.

x	-2	0	3	6
$f(x)$	2	-3	2	0
$f'(x)$	-4	-1	0	-0,5

Tracer une allure possible de la courbe représentative de f en utilisant tous les renseignements donnés dans le tableau.

Activité 5 ➔ Dérivable ou non ?

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

A ■ Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

1. Représenter graphiquement f sur $]0 ; 2]$.

2. Soit g la fonction définie par :

$$g(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

avec $h \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[$.

a. Soit deux points M et A :

$$M(1+h ; f(1+h)) \quad \text{et} \quad A(1 ; 1).$$

À quoi correspond $g(h)$?

b. Déterminer la limite L en 0 de g . Tracer la droite Δ de coefficient directeur L passant par A . Que peut-on dire de Δ ?

OBJECTIF

Interpréter graphiquement des cas de dérivabilité et de non-dérivabilité.

B ■ Cas de la fonction racine carrée

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ et Γ la courbe représentant f .
Le point M est un point de Γ d'abscisse non nulle x .

- Exprimer le coefficient directeur de (OM) et déterminer sa limite en 0.
- Qu'en déduit-on sur les droites (OM) lorsque x tend vers 0 ?

C ■ Un problème en 0

Soit f la fonction définie par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- Représenter graphiquement sur l'écran d'une calculatrice la courbe d'équation $y = x \sin \frac{1}{x}$.
- Soit M_k un point de coordonnées $\left(k; k \sin \left(\frac{1}{k}\right)\right)$, $k \neq 0$.
 - Donner une équation cartésienne de la droite (OM_k) .
 - Tracer une droite (OM_k) pour $k = 0,1$; $k = 0,001$ sur l'écran d'une calculatrice.
 - Faire des zooms successifs centrés sur O . Les droites (OM_k) tracées semblent-elles se confondre avec (C) ?
 - La courbe (C) admet-elle une tangente en $O(0; 0)$?

Activité 6 ➔ Développement limité et meilleure approximation affine

OBJECTIF

Donner un sens à l'expression « meilleure approximation affine ».

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les fonctions :

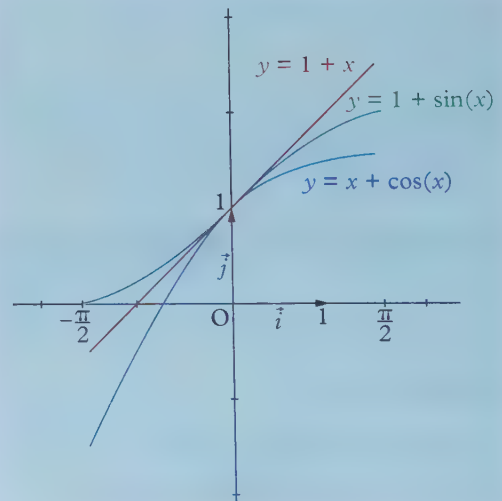
$$f_1 : x \mapsto x + 1 ;$$

$$f_2 : x \mapsto 1 + \sin(x) ;$$

$$f_3 : x \mapsto x + \cos(x).$$

- Représenter graphiquement ces trois fonctions sur l'écran d'une calculatrice.

- En effectuant deux zooms successifs centrés sur le point de coordonnées $(0; 1)$, qu'observe-t-on ?



- Que peut-on dire de la droite d'équation $y = x + 1$ pour chacune des courbes représentatives des fonctions f_2, f_3 ? Justifier.
- Écrire les développements limités respectifs d'ordre 1 en 0 des fonctions f_2, f_3 .
- En déduire la limite en 0 de :

$$x \mapsto \frac{f_k(x) - x - 1}{x} \quad \text{pour } 2 \leq k \leq 3.$$

On dit que $f_k(x) - x - 1$, avec $2 \leq k \leq 3$, est négligeable devant x au voisinage de 0.

6. Cherchons s'il existe une fonction affine $g: x \mapsto ax + b$ autre que $x \mapsto x + 1$ telle que $x \mapsto \frac{f_k(x) - g(x)}{x}$, pour $2 \leq k \leq 3$, ait pour limite 0 en 0. Pour cela :

a. Vérifier que, pour $x \neq 0$, $\frac{x + 1 - g(x)}{x} = 1 - a + \frac{1 - b}{x}$.

b. Sachant que :

$$\frac{f_k(x) - g(x)}{x} = \frac{f_k(x) - x - 1}{x} + \frac{x + 1 - g(x)}{x}$$

déduire que $\frac{f_k(x) - g(x)}{x} \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow 0$ si et seulement si $a = 1$ et $b = 1$.

c. Que peut-on en conclure ?

On dit que $x \mapsto x + 1$ est la meilleure approximation affine au voisinage de 0 de chacune des fonctions f_2 et f_3 .

Activité 7 ➔ Symétries d'une courbe

La courbe C représente une fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A ■ Axe de symétrie en repère orthogonal

I. Un exemple

La droite D a pour équation $x = 3$.

On a tracé la partie de la courbe C située « à gauche » de D.

1. Reproduire et compléter la courbe C sachant qu'elle est symétrique par rapport à D.

2. Quel est l'ensemble de définition E de f ? Par rapport à quel réel, E est-il symétrique ?

3. Placer le symétrique M' de M par rapport à D. Quelle est son ordonnée ? son abscisse x' ?

4. Justifier que, pour tout x de E, $f(6 - x) = f(x)$.

II. De façon générale

On suppose qu'une fonction f a un ensemble de définition E symétrique par rapport au réel a et que, pour tout x de E, $f(2a - x) = f(x)$.

Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan.

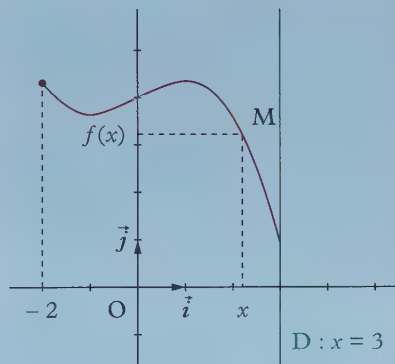
1. Quelles sont les coordonnées du point M' symétrique de M par rapport à la droite Δ d'équation $x = a$?

2. Justifier que $M \in C_f$ si et seulement si $M' \in C_f$. Qu'en déduit-on pour la courbe ?

B ■ Centre de symétrie

1. Déterminer les coordonnées $(x'; y')$ du point M' symétrique du point $M(x; y)$ par rapport à $\Omega(a; b)$.

2. Énoncer des conditions nécessaires et suffisantes sur f pour que la courbe C admette le point Ω pour centre de symétrie.



OBJECTIF

Établir des relations fonctionnelles traduisant une symétrie.

1. Dérivabilité

A ■ Fonction dérivable en a . Nombre dérivé

Définition 1 → Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a .

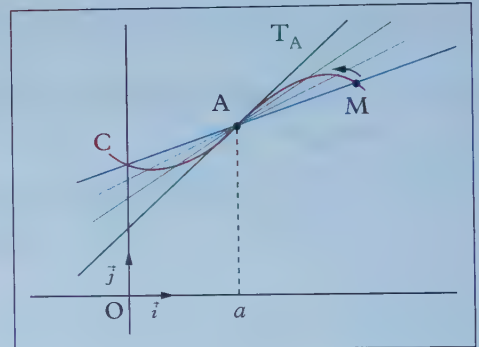
- La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a une limite finie quand h tend vers 0 (ce qui équivaut à $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite finie quand x tend vers a).
- Si f est dérivable en a , on appelle nombre dérivé de f en a , le nombre réel $f'(a)$ défini par :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

B ■ Interprétation graphique. Tangente

Soit C la courbe représentant f dans le plan muni d'un repère orthogonal. On considère les points $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$ de C avec $x \neq a$.

Alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ représente le coefficient directeur de la droite (AM) .



1. Cas où f est dérivable en a

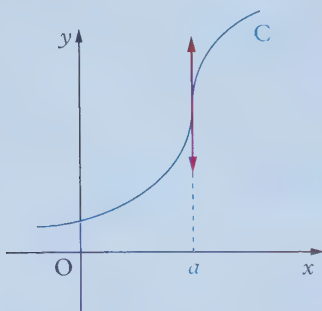
Les droites (AM) « tendent vers une position limite » quand x tend vers a .

Définition 2 et propriété 1 →

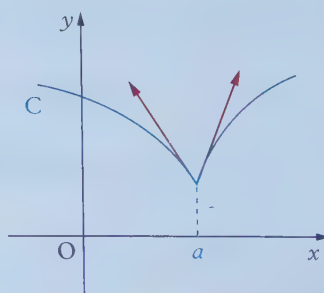
Si f est dérivable en a , on appelle tangente à la courbe C au point $A(a; f(a))$, la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$. Une équation de cette tangente est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

2. Cas où f n'est pas dérivable en a

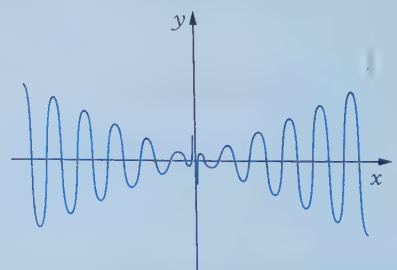
Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que C admet en A une **tangente verticale**.



Si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a des limites en a à droite et à gauche, distinctes, on dit que C admet « deux **demi-tangentes** ».



$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ peut ne pas avoir de limite en a , même à droite ou à gauche (voir activité 5).



→ APPLICATIONS

Exercice 1 Déterminer une tangente verticale

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.

Montrer que la courbe C d'équation $y = \sqrt{x}$ a une demi-tangente verticale en O.

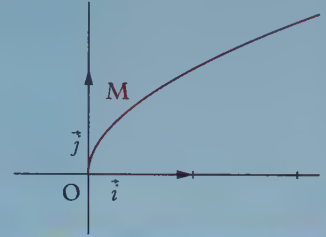
Solution

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ pour } x > 0.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \text{ avec } \sqrt{x} \text{ positif, donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty.$$

La courbe C admet donc une demi-tangente verticale en O.



voir aussi exercices n° 2, 45

Exercice 2 Étudier une dérivabilité ; déterminer des demi-tangentes

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 - x^2$ et P sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = |1 - x^2|$ et Γ sa courbe représentative.

1. Tracer P et préciser les tangentes aux points A et B de P d'abscisses respectives -1 et 1 .

2. a. Tracer Γ .

b. Étudier la dérivabilité de g en -1 et en 1 . Interpréter graphiquement pour Γ .

Solution

1. P est une parabole « orientée vers le bas » de sommet S(0 ; 1).

La fonction polynôme f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = -2x$.

Ainsi la tangente T_A en A a pour coefficient directeur $f'(-1) = 2$ et la tangente T_B en B a pour coefficient directeur $f'(1) = -2$.

2. a. Γ s'obtient en gardant la partie de P au-dessus de l'axe des abscisses et en prenant la symétrique par rapport à cet axe de la partie de P située en-dessous de l'axe.

b. Sur $[-1 ; 1]$, $f(x) \geq 0$ donc $g(x) = f(x)$. On en déduit que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1) = 2.$$

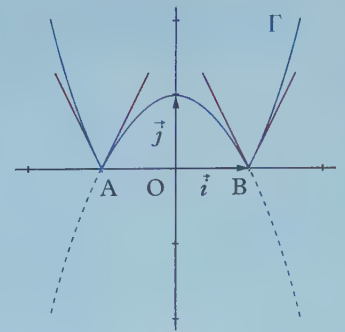
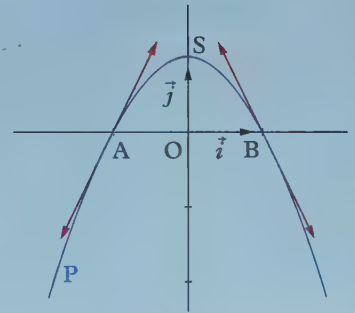
On dit que g est **dérivable à droite** en -1 et de nombre dérivé à droite $g'_d(-1) = 2$.

De même, sur $]-\infty ; -1]$, $f(x) \leq 0$ donc $g(x) = -f(x)$; ainsi g est **dérivable à gauche** en -1 et de nombre dérivé à gauche $g'_g(-1) = -f'(-1) = -2$.

Les nombres dérivés à droite et à gauche étant distincts, g n'est pas dérivable en -1 , mais Γ admet deux demi-tangentes au point A de coefficients directeurs respectifs 2 et -2 .

De même g est dérivable à gauche en 1 avec $g'_g(1) = f'(1) = -2$ et, à droite en 1, avec $g'_d(1) = -f'(1) = 2$.

À nouveau g n'est pas dérivable en 1 mais Γ admet deux demi-tangentes en B.



voir aussi exercices n° 1, 2, 60

C ■ Développement limité

Propriété 2 et
définition 3 →

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a .
• La fonction f est dérivable en a si et seulement si :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

(ce qui équivaut à $f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)$
avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$).

• $f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

(ou $f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$)

est appelé le développement limité d'ordre 1 de f en a .

Remarques

- $h\varphi(h)$ où $\varphi(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0 est négligeable devant h quand h est assez proche de 0 car $\frac{h\varphi(h)}{h}$ tend vers 0 quand h tend vers 0.
- La fonction $x \mapsto f(a) + (x - a)f'(a)$ est l'approximation affine de f en a ; la droite qui la représente est la tangente à la courbe de f au point $A(a ; f(a))$.

D ■ Fonction dérivée

Définition 4 →

Soit E un intervalle ou une réunion d'intervalles. La fonction f est dérivable sur E si et seulement si f est dérivable en tout réel a de E .
La fonction f' définie sur E par $x \mapsto f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de f .

Remarque

Il peut arriver que f' soit elle-même dérivable sur E et on note f'' sa dérivée ; dans ce cas on dit que f est deux fois dérivable sur E et que f'' est la **dérivée seconde** de f .
Si, à son tour, f'' est dérivable sur E , on note $f^{(3)}$ sa dérivée, et ainsi de suite, sous réserve d'existence ; on note alors $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f ($n \in \mathbb{N}^*$).

Propriété 3 →

Rappelons les dérivées des fonctions usuelles vues jusqu'ici.

I	$f(x)$	$f'(x)$
\mathbb{R}	k (constante réelle)	0
\mathbb{R}	x	1
\mathbb{R}	x^n ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$)	nx^{n-1}
\mathbb{R}	$\sin(x)$	$\cos(x)$
\mathbb{R}	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$]0 ; +\infty[\cup]-\infty ; 0[$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$]0 ; +\infty[$	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$	$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$]0 ; +\infty[\cup]-\infty ; 0[$	$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$-\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 2

Supposons f dérivable en a : soit ε la fonction définie au voisinage de 0 par :

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \quad \text{pour } h \neq 0 \text{ et } \varepsilon(0) = 0.$$

Nous en déduisons $h\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$, soit $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$.

Avec pour $h \rightarrow 0$, $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, car $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a)$.

Réciproquement :

si $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$ avec pour $h \rightarrow 0$, $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, alors pour $h \neq 0$, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = \varepsilon(h)$.

Pour $h \rightarrow 0$, $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ donc, pour $h \rightarrow 0$, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \rightarrow f'(a)$.

■ Propriété 3

$x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est dérivable dans l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ car les fonctions cosinus et sinus sont dérivables dans I et la fonction cosinus ne s'annule pas dans I .

En appliquant la règle de dérivation du quotient de deux fonctions dérivables, nous obtenons :

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

En remarquant que $\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2$, on obtient aussi :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

→ APPLICATION

Exercice 3 Donner trois interprétations de la dérivabilité

Interpréter de trois façons différentes le nombre dérivé de la fonction sinus en 0.

Solution

On sait que la fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} avec $\sin'(x) = \cos x$ d'où $\sin'(0) = \cos 0 = 1$.

• En termes de limite :

$$\sin'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

• En termes de développement limité au voisinage de 0 :

$$\sin(x) = x + x\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Remarque : on en déduit que $\sin(x) \approx x$ pour x voisin de 0.

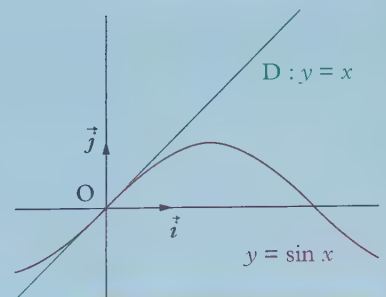
• Graphiquement :

la tangente à la courbe d'équation $y = \sin x$ au point O a pour coefficient directeur 1.

Conseil

Cette limite « indéterminée » est à connaître :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$



voir aussi exercices n° 3, 14

E ■ Théorèmes d'opérations et de composition

Théorème 1 → f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors :

$$f + g, \quad kf \quad (k \in \mathbb{R}), \quad fg \text{ le sont aussi.}$$

Si de plus g ne s'annule pas sur I , $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I .

Fonction	$f + g$	$k \in \mathbb{R}, kf$	fg	$\frac{1}{g}$	$\frac{f}{g}$
Fonction dérivée	$f' + g'$	kf'	$f'g + fg'$	$\frac{-g'}{g^2}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$

Corollaire 1 → Les fonctions polynômes et rationnelles sont dérivables sur tout intervalle de \mathbb{R} où elles sont définies.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}$ pour $x \neq -2$ et $x \neq 2$.

$$\text{Alors } f'(x) = \frac{2(x^2-4) - (2x-1)(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 8}{(x^2-4)^2} \text{ pour } x \neq -2 \text{ et } x \neq 2.$$

CD **Théorème 2** → u est une fonction dérivable sur un intervalle I et v est une fonction dérivable sur un intervalle J avec $u(I) \subset J$.

Alors $f = v \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout x de I :

$$f'(x) = u'(x) \cdot v'(u(x)).$$

Corollaire 2 → Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. Pour tout entier n , $n \geq 2$, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

2. Si u est strictement positive alors \sqrt{u} est dérivable et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

F ■ Notation différentielle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.

Pour tout $x \in I$ et tout h tel que $x+h \in I$:

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi = 0.$$

Posons $\Delta x = (x+h) - x = h$, $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x\varphi(\Delta x)$ et $\Delta y = f(x+h) - f(x)$.

(1) s'écrit alors :

$$(2) \quad \Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x\varphi(\Delta x).$$

Si $h \rightarrow 0$, $\varphi(h) \rightarrow 0$ donc $h\varphi(h) \rightarrow 0$. Lorsque Δx devient infinitésimal, (2) s'écrit $dy = f'(x) dx$.

$dy = f'(x) dx$ est l'écriture différentielle de (2). On note aussi $f' = \frac{df}{dx}$.

Remarque

En utilisant l'écriture différentielle pour $f = v \circ u$:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{du} \frac{du}{dx} \quad \text{soit} \quad \frac{df}{dx}(a) = \frac{dv}{du}(u(a)) \frac{du}{dx}(a).$$

→ DÉMONSTRATIONS

■ Théorème 1

Vu en 1^{re} S.

■ Théorème 2

f , u et v sont telles que f est définie sur un intervalle I , u est dérivable sur I , v est dérivable sur un intervalle J avec $u(I) \subset J$. Soit $a \in I$, u est alors dérivable en a et v dérivable en $b = u(a)$.

• Le but de la démonstration est d'arriver à écrire :

$$f(a+h) = f(a) + Lh + h\varepsilon(h) \quad \text{avec } L = u'(a)v'(u(a)) \quad \text{et } \lim_0 \varepsilon = 0$$

ce qui entraîne que f est dérivable en a d'après la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point et $f'(a) = u'(a)v'(u(a))$ pour tout $a \in I$.

• L'idée est d'utiliser les développements limités d'ordre 1 de u en a et de v en b , et de regrouper en un seul terme tous les termes négligeables devant h . Une démonstration est donnée à titre indicatif ci-dessous.

u étant dérivable en a , pour h tel que $a+h \in I$, on a :

$$(1) \quad u(a+h) = u(a) + hu'(a) + h\alpha(h) \quad \text{avec } \lim_0 \alpha = 0.$$

v étant dérivable en b , pour tout réel k tel que $b+k \in J$, on peut écrire :

$$(2) \quad v(b+k) = v(b) + kv'(b) + k\beta(k) \quad \text{avec } \beta(k) \rightarrow 0 \quad \text{pour } k \rightarrow 0.$$

$u(a+h) - u(a)$ a pour limite 0 quand h tend vers 0, $u(a+h) - u(a)$ est aussi proche de 0 qu'on le veut pour tout h assez proche de 0.

En choisissant h convenablement, on peut remplacer k par $u(a+h) - u(a)$ et b par $u(a)$ dans (2), on obtient :

$$(3) \quad v(u(a+h)) = v(u(a)) + (u(a+h) - u(a))v'(u(a)) + (u(a+h) - u(a))\beta(u(a+h) - u(a))$$

soit $v(u(a+h)) = v(u(a)) + (hu'(a) + h\alpha(h))v'(u(a)) + (hu'(a) + h\alpha(h))\beta(hu'(a) + h\alpha(h))$

ce qui donne :

$$(4) \quad f(a+h) = f(a) + hu'(a)v'(u(a)) + h[\alpha(h)v'(u(a)) + (u'(a) + \alpha(h))\beta(hu'(a) + h\alpha(h))].$$

$hu'(a) + h\alpha(h) \rightarrow 0$ pour $h \rightarrow 0$ et $\lim_0 \beta = 0$, donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions pour $h \rightarrow 0$, on a $\beta(hu'(a) + h\alpha(h)) \rightarrow 0$.

Comme, pour $h \rightarrow 0$, $\alpha(h)$ tend aussi vers 0, en désignant par $\varepsilon(h)$ l'expression entre crochets on obtient : $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ pour $h \rightarrow 0$. Il en résulte :

$$(5) \quad f(a+h) = f(a) + hu'(a)v'(u(a)) + h\varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

■ Corollaire 2

Il suffit d'appliquer le théorème 2 à $v \circ u$ avec :

- $v : x \mapsto x^n$ pour obtenir la dérivée de u^n ;
- $v : x \mapsto \sqrt{x}$ pour obtenir celle de \sqrt{u} .

→ APPLICATION

Exercice 4 Dériver une composée

Dériver la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Solution

$f = \sqrt{u}$ où $u(x) = x^2 - 1$. La fonction u est dérivable sur \mathbb{R} et la fonction racine carrée sur $]0 ; +\infty[$. Or $u(x) \in]0 ; +\infty[\Leftrightarrow x^2 > 1$.

Ainsi f est dérivable sur $]1 ; +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

voir aussi exercices n° 11, 12

2. Continuité

A ■ Définition

Définition 5 → Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a .

- f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout réel de I .

Interprétation graphique

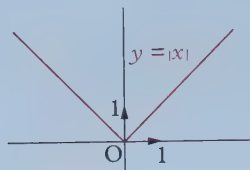
Dire que f est continue sur I signifie que l'on peut tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle I sans avoir à lever le crayon.

Notation

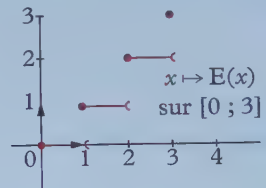
$E(x)$ est la partie entière de x (voir activité 2).

Exemples :

1 La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R} .



2 La fonction partie entière est discontinue en tout entier.



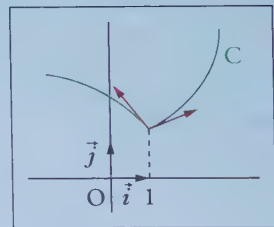
B ■ Dérivabilité et continuité

Théorème 3 → Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a .

- Si f est dérivable en a alors f est continue en a .
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

Attention La réciproque est fausse.

Dans l'exemple ci-contre, la courbe C représente une fonction continue en 1 mais non dérivable en 1.



Remarques

- Les fonctions qui, à tout x réel, associent x , x^2 , x^n ($n \in \mathbb{N}^*$), $\cos x$, $\sin x$, étant dérivables sur \mathbb{R} , sont continues sur \mathbb{R} .
- Les fonctions qui, à tout x réel non nul, associent $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont dérivables, donc continues sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
- De même, les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont dérivables, donc continues sur tout intervalle contenu dans leur ensemble de définition.

Propriété 4 → La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.

Remarque

La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 mais elle y est continue.

→ DÉMONSTRATIONS

■ Théorème 3

Si f est dérivable en a , $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$ où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Quand h tend vers 0, $\lim_{h \rightarrow 0} hf'(a) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} h\varepsilon(h) = 0$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$.

Autrement dit, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; la fonction f est continue en a .

■ Propriété 4

La fonction racine carrée étant dérivable sur $]0; +\infty[$, elle est continue sur $]0; +\infty[$. Montrons qu'elle est aussi continue en 0, c'est-à-dire que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \sqrt{0}$.

Pour tout intervalle ouvert $] -\alpha; \alpha[$ contenant 0, \sqrt{x} appartient à $] -\alpha; \alpha[$ si et seulement si $\sqrt{x} \leq \alpha$, c'est-à-dire $0 \leq x \leq \alpha^2$. Donc \sqrt{x} appartient à tout intervalle ouvert contenant 0 à condition de prendre x assez proche de 0.

C'est dire que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ ou encore que la fonction racine carrée est continue en 0.

→ APPLICATION

Exercice 5 Étudier une fonction définie de façon particulière en a

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. On admet que, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

Étudier la dérivabilité de f en 0.

Solution

1. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (voir exercice 9, application du cours, p. 59).

Ainsi $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = f(0)$ et par conséquent $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

f est continue en 0.

2. Cherchons la limite en 0 de $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2}$.

• Pour $x > 0$, $-\frac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq 0$ donc $-\frac{1}{6}x \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{6}x = 0$, par le « théorème des gendarmes », $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

Ainsi f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

• Pour $x < 0$, on remarque que la fonction f est paire dont f sera aussi dérivable à gauche en 0 avec $f'_g(0) = 0$.

Finalement f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

C ■ Théorèmes d'opérations et de composition

Des théorèmes d'opérations sur les limites on déduit les propriétés.

Propriété 5 →

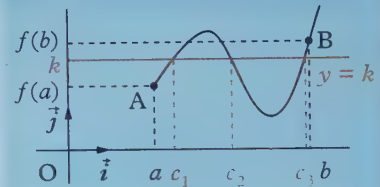
- Si u et v sont des fonctions continues sur un intervalle I , $u + v$, ku (k réel), uv le sont aussi ; si l'on suppose de plus que v ne s'annule pas sur I , $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont continues sur I .
- Si u est une fonction continue en a et v est continue en $u(a)$, alors $v \circ u$ est continue en a .
- Si u est une fonction continue sur un intervalle I , à valeurs dans un intervalle J sur lequel v est continue, alors $v \circ u$ est continue sur I .
- Si une suite (u_n) converge vers une limite L et si f est continue sur un intervalle contenant L alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(L)$.

D ■ Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4 →

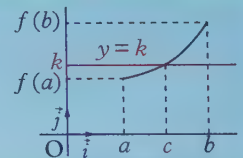
Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b , avec $a < b$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de $[a ; b]$ tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, f prend au moins une fois sur $[a ; b]$ toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.



Corollaire 3 →

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a ; b]$.



Convention →

Dans un tableau de variation, une flèche vers le haut (vers le bas) signifie que la fonction est continue et strictement croissante (décroissante).

On pourra donc visualiser le nombre de solutions d'une équation $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) sur le tableau de variation comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple :

Dans le tableau de variation ci-contre, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions sur $[-3 ; 6]$.

x	-3	c_1	c_2	6
$f(x)$	4	2	0	3

Corollaire 4 →

ADMIS

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ; λ, μ les limites de f aux bornes de I ; λ, μ désignant des réels, $+\infty$ ou $-\infty$, alors pour tout réel k strictement compris entre λ et μ , l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans I .

→ DÉMONSTRATIONS

■ Théorème 4

Supposons $a \leq b$ et $f(a) \leq k \leq f(b)$.

Nous allons définir par récurrence une suite (a_n) croissante avec $a_0 = a$ et une suite (b_n) décroissante avec $b_0 = b$ telles que, pour tout n dans \mathbb{N} ,

$$a_n \leq b_n, f(a_n) \leq k \leq f(b_n) \text{ et } (b_n - a_n) = 2^{-n}(b_0 - a_0).$$

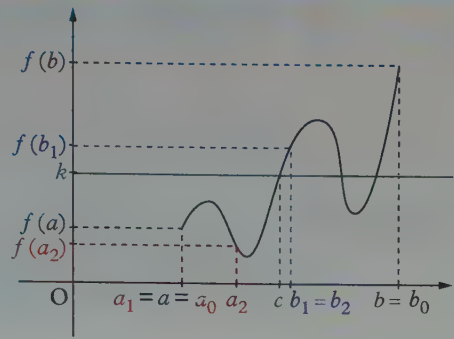
Pour $n=0$:

- $a_0 \leq b_0$ car $a \leq b$;
- $f(a_0) \leq k \leq f(b_0)$ car $f(a) \leq k \leq f(b)$;
- $(b_0 - a_0) = 2^0(b_0 - a_0)$ car $2^0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons construits les éléments a_0, a_1, \dots, a_n et b_0, b_1, \dots, b_n tels que :

- $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b_0$;
- pour $0 \leq p \leq n$,
 $f(a_p) \leq k \leq f(b_p)$ et $(b_p - a_p) = 2^{-p}(b_0 - a_0)$.

Pour construire les termes a_{n+1} et b_{n+1} , nous allons procéder de la façon suivante :



$$a_1 = a = a_0, \quad \frac{a+b}{2} \quad b = b_0 \quad b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \quad \text{car } f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) \geq k$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad b_1 = b_2 \quad a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad \text{car } f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) < k$$

Si $\frac{1}{2}(a_n + b_n)$ est tel que $f\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) \geq k$	Si $\frac{1}{2}(a_n + b_n)$ est tel que $f\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) < k$
Alors on pose : $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $a_{n+1} = a_n$.	Alors on pose : $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = b_n$.

Dans les deux cas, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, $f(a_{n+1}) \leq k \leq f(b_{n+1})$ et :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2} \times 2^{-n}(b_0 - a_0) \quad \text{d'où } b_{n+1} - a_{n+1} = 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0).$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence (voir chapitre 1), (a_n) est une suite croissante de $[a ; b]$, (b_n) une suite décroissante de $[a ; b]$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(b_n - a_n) = 2^{-n}(b_0 - a_0)$.

La suite de terme général $2^{-n}(b_0 - a_0)$ est géométrique de premier terme $b_0 - a_0$ et de raison $\frac{1}{2}$, elle a donc pour limite 0. La suite $(b_n - a_n)$ a donc pour limite 0. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Elles ont alors la même limite, que nous noterons c , et pour tout n dans \mathbb{N} , $a_n \leq c \leq b_n$ (voir le théorème des suites adjacentes du chapitre 2). Il en résulte $a \leq c \leq b$. f étant continue en c , $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ convergent vers $f(c)$. Les suites $(f(a_n))$, (k) et $(f(b_n))$ sont telles que, pour tout n dans \mathbb{N} , $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$ avec $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ de même limite $f(c)$. Il en résulte $k = f(c)$ (théorème des gendarmes).

Lorsque $f(b) \leq k \leq f(a)$, on raisonne comme précédemment :

- si $f\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) \geq k$, on pose $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = b_n$;
- si $f\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) < k$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.

■ Corollaire 3

D'après le théorème 4, l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c dans $[a ; b]$. f étant strictement monotone sur $[a ; b]$, pour tout $x \in [a ; b]$ et $x \neq c$, $f(x) \neq f(c)$. c est l'unique solution de $f(x) = k$ dans $[a ; b]$.

3. Étude du sens de variation

A ■ Fonctions monotones sur un intervalle

Rappelons les théorèmes suivants vus en classe de première et admis.

Théorème 5 → Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. Si f est croissante sur I alors, pour tout x dans I , $f'(x) \geq 0$.
2. Si f est décroissante sur I alors, pour tout x dans I , $f'(x) \leq 0$.

Dans la pratique, on utilise souvent les réciproques énoncées ci-dessous.

Théorème 6 → Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I .
2. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I .
3. Si pour tout x dans I , $f'(x) = 0$ alors f est constante dans I .

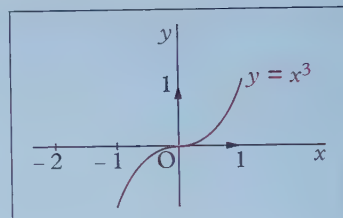
Théorème 7 → Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I .

Extréma

Si f a un maximum ou un minimum en $a \in I$ alors $f'(a) = 0$.

Remarque

La réciproque est fautive. En effet $f: x \mapsto x^3$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $] -1 ; 1[$ et $f'(0) = 0$, mais f n'admet ni minimum ni maximum en 0 sur l'intervalle $] -1 ; 1[$.



B ■ Fonctions strictement monotones

Rappelons que f est strictement croissante sur un intervalle I si et seulement si pour tous a et b de I ,

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$$

De même f est strictement décroissante sur I si et seulement si pour tous a et b de I ,

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b).$$

Théorème 8 → Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ (sauf peut-être en un nombre fini des réels où f' s'annulerait) alors f est strictement croissante sur I .
2. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ (sauf peut-être en un nombre fini des réels où f' s'annulerait) alors f est strictement décroissante sur I .

Ce théorème a été vu en 1^{re} S. Il reste encore vrai avec des hypothèses un peu plus faibles comme énoncé dans le corollaire suivant.

Corollaire 5 → Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$.

1. Si pour tout x dans $]a ; b[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $[a ; b]$.
2. Si pour tout x dans $]a ; b[$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $[a ; b]$.

→ DÉMONSTRATIONS

Les théorèmes cités à la page précédente ont été admis en 1^{ère} S.
Le corollaire 5 est démontré à l'exercice n° 75, page 110.

→ APPLICATION

Exercice 6 Utiliser une fonction auxiliaire

On considère la fonction P définie sur \mathbb{R} par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

- Étudier les limites de P en $-\infty$ et $+\infty$, son sens de variation ; dresser son tableau de variation.
- Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique α , et que $1,6 < \alpha < 1,7$.
En déduire le signe de $P(x)$.
- On considère la fonction f définie sur $E =]-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.
Déterminer le sens de variation de f.

Solution

1. Le polynôme $P(x)$ a même limite en $-\infty$ et $+\infty$ que son terme de plus haut degré $2x^3$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$.

P est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme avec $P'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$:

- sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[1 ; +\infty[$, $P'(x) \geq 0$, P' ne s'annulant qu'en 0 et 1, donc P est strictement croissante ;

- sur $[0 ; 1]$, $P'(x) \leq 0$, P' ne s'annulant qu'en 0 et 1, donc P est strictement décroissante.

On en déduit que P est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$.

La fonction P est dérivable sur \mathbb{R} et continue sur \mathbb{R} . On peut donc dresser son tableau de variation.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
P'(x)		+	0	-	0	+	
P(x)	$-\infty$	↗ -1		↘ -2		↗ $+\infty$	

2. • Sur $]-\infty ; 1]$, P admet pour maximum -1 donc P reste toujours négative et ne s'annule pas.
Sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution (l'existence vient de la continuité de P et l'unicité de la stricte croissance de P).

L'équation $P(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans \mathbb{R} .

De $P(1,6) \approx -0,49$ et $P(1,7) \approx 0,15$, on déduit que :

$$P(1,6) < P(\alpha) < P(1,7) \quad \text{donc} \quad 1,6 < \alpha < 1,7.$$

- Par stricte croissance de P sur $[1 ; +\infty[$, on sait que $P(x) < 0$ pour $x \in [1 ; \alpha[$ et $P(x) > 0$ pour $x > \alpha$. Finalement, $P(x) < 0$ pour $x < \alpha$, $P(x) = 0$ pour $x = \alpha$ et $P(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

3. La fonction f est une fonction rationnelle dérivable donc continue sur tout intervalle de son ensemble de définition E.

$$\text{De plus } f'(x) = \frac{-1 \cdot (1+x^3) - (1-x) \times 3x^2}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2} = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}.$$

On en déduit que, sur $E =]-1 ; +\infty[$, f' a même signe que P. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-1 ; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty[$.

voir aussi exercice n° 51

CD 1. L'éternel problème du rangement...

OBJECTIF : Étudier la continuité et la fonction partie entière.

Un fabricant de gommes en plastique expédie ses gommes en les rangeant en une seule couche dans de petits cartons d'emballage de périmètre $p = 22$ cm, de largeur ℓ et de longueur L , avec $\ell \leq L$. Il cherche à déterminer ℓ pour que le remplissage du carton soit optimal, c'est-à-dire avec le plus grand nombre de gommes en laissant le moins d'espace libre possible. Chaque gomme est schématisée par un carré de 1 cm de côté.

- Déterminer l'intervalle que peut décrire ℓ .
- Représenter graphiquement dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la fonction A qui à ℓ associe l'aire du carton.
- Déterminer le nombre de gommes rangées dans un carton lorsque ℓ vaut en centimètres :
0 ; 0,7 ; 1 ; 1,1 ; 1,8 ; 2 ; 2,4 ; 2,91 ; 3 ; 3,5.
- Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, représenter graphiquement la fonction N qui à ℓ associe le nombre de gommes contenues dans la boîte.
- Déterminer les points de discontinuité de N .
- Peut-on trouver une expression de $N(\ell)$ à l'aide de fonctions connues ?
- Quelle valeur de ℓ optimise le rangement ?

CD 2. La réfraction d'un rayon lumineux

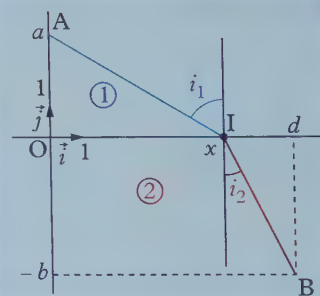
OBJECTIF : Utiliser l'étude des variations d'une fonction.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Les points A, I, B ont pour coordonnées respectives $(0 ; a), (x ; 0), (d ; -b)$ où a, d et b sont des constantes positives et $0 \leq x \leq d$.

Un rayon lumineux se propage du point A au point B , situés dans deux milieux distincts.

Il se déplace à la vitesse v_1 dans le milieu 1 de A à I ; et à la vitesse v_2 dans le milieu 2 de I à B (voir figure ci-contre).

On note $t(x)$ le temps mis par le rayon lumineux pour effectuer le trajet AIB .



1. Montrer que $t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-d)^2 + b^2}}{v_2}$ pour $x \in [0 ; d]$.

2. Déterminer les fonctions dérivées t' et t'' de t .

3. En déduire que t' est strictement croissante sur $[0 ; d]$ et s'annule en un unique point x_0 de

$[0 ; d]$ tel que $\frac{x_0}{v_1 \sqrt{a^2 + x_0^2}} = \frac{d - x_0}{v_2 \sqrt{(x_0 - d)^2 + b^2}}$ (on ne cherchera pas à calculer x_0).

4. En déduire le tableau de variation de t sur $[0 ; d]$ et que t est minimal en x_0 .

5. Selon le principe de Fermat, le rayon lumineux parcourt le trajet AIB en un temps minimal.

Montrer que cela revient à ce que les angles i_1 et i_2 désignés sur la figure vérifient $\frac{\sin(i_1)}{\sin(i_2)} = \frac{v_1}{v_2}$.

On désigne par c la vitesse de la lumière dans le vide, n_1 et n_2 les indices de réfraction respectifs de la lumière dans les milieux 1 et 2.

Sachant que $n_1 v_1 = n_2 v_2 = c$, en déduire la loi de Descartes :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2).$$

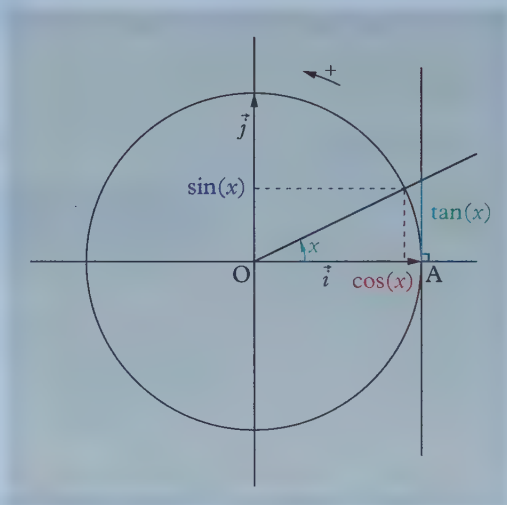
CD 3. La fonction tangente

OBJECTIF : Étudier la fonction tangente.

Sur le cercle trigonométrique, la tangente d'un réel x est définie comme ci-dessous :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

1. Pour quels réels x peut-on définir $\tan x$?
2. Montrer que \tan est impaire et interpréter sur le cercle trigonométrique représenté ci-contre.
3. Comparer pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
 $\tan(x + \pi)$ et $\tan(x)$.
4. En utilisant les questions 2 et 3, on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.



- a. Étudier les variations de \tan sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.
- b. Déterminer la limite de $\tan x$ quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2}$.
- c. Dresser le tableau de variation de \tan sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.
5. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
 - a. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ tangente en O à la courbe (T) représentative de la fonction tangente.
 - b. Déterminer la position de (T) par rapport à Δ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ et en déduire la position de (T) par rapport à Δ sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$.

Après avoir tracé (T) sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ avec Δ et son asymptote, en déduire le tracé de (T) sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$, puis sur $\left]-\frac{3\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$.

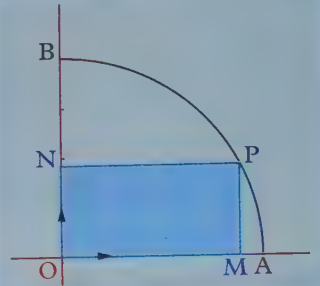
4. Étude de fonction à l'aide du logiciel Geoplan-Geospace

OBJECTIF : Étudier la fonction f qui à tout x de $[0 ; R]$ associe l'aire $f(x)$ du rectangle OMPN en se demandant en particulier si cette aire admet une valeur maximale pour une position particulière de M .

Remarque : Aucune connaissance du logiciel n'est nécessaire.

La situation géométrique étudiée


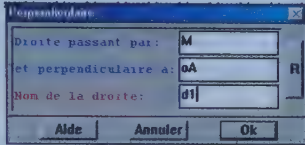



Le plan étant rapporté à un repère orthonormal de centre O , on considère un cercle C de centre O et de rayon R qui coupe l'axe des abscisses en $A(R ; 0)$ et l'axe des ordonnées en $B(0 ; R)$. On construit un rectangle OMPN avec M sur $[OA]$, N sur $[OB]$ et P sur le cercle C . Pour tout point M , on note $x = OM$.



A. Construction de la figure à l'aide du logiciel

On prendra, pour la construction uniquement, $R = 4$.

Constructions	Mode d'emploi	Commentaires
1. Ouvrez le logiciel. Vous obtenez une feuille de dessin analogue à celle-ci :		Ligne des menus déroulants. Barre d'icônes contenant 12 icônes.
2. Faites apparaître le repère.	Cliquez avec la souris sur l'icône repère de la barre d'outils.	Il s'agit d'une bascule (un autre clic sur l'icône fait disparaître le repère).
3. Créez le point A de coordonnées (4 ; 0).	Cliquez avec la souris sur le menu <i>Créer</i> , sélectionnez avec la souris <i>Point</i> , puis <i>Point repéré</i> , puis cliquez sur <i>dans le plan</i> . 	La flèche ► en fin de ligne indique l'existence d'un sous-menu.
	Une boîte de dialogue s'affiche. Entrez comme abscisse : 4, comme ordonnée : 0, comme nom du point : A, puis validez en cliquant sur OK. Attention ! Respectez majuscules et minuscules.	Vous pouvez vous déplacer dans les boîtes de dialogue avec la souris ou à l'aide des flèches ↑ et ↓ du clavier.

Constructions	Mode d'emploi	Commentaires
4. Créez le point B(0 ; 4).	De même par le menu <i>Créer, Point, Point repéré, dans le plan.</i>	En cas d'erreur : • Pour modifier un objet : cliquez sur l'icône  puis indiquez le nom de l'objet (par exemple : B) que vous voulez modifier et validez par OK. • Pour supprimer un objet : Allez dans le menu <i>Divers</i> , choisissez <i>Supprimer</i> . Une liste des constructions effectuées apparaît. Cliquez sur la ligne correspondant à l'objet que vous voulez supprimer, puis validez en cliquant sur OK.
5. Créez le cercle C de centre O et rayon 4.	Allez dans le menu <i>Créer</i> , choisissez <i>Ligne</i> , puis <i>Cercle</i> , puis cliquez sur <i>Défini par centre et rayon</i> . Entrez le centre : O, et le rayon : 4, le nom du cercle : C, puis validez par OK.	
6. Créez le point M mobile sur le segment [OA].	Par le menu <i>Créer, Point, Point Libre, sur un segment</i> . Entrez le nom du segment : OA, puis le nom du point : M, et validez en cliquant sur OK.	
7. Créez la droite orthogonale en M à (OA).	Par le menu <i>Créer, Ligne, Droite(s), perpendiculaire</i> . <div style="text-align: center;">  </div> Validez en cliquant OK.	
8. Créez le point P.	Par le menu <i>Créer, Point, Intersection droite-cercle, 2 points</i> . Entrez le nom de la droite : d1, le nom du cercle : C, le nom des deux points d'intersection : P Q (tapez les deux lettres séparées par un espace). Validez par OK.	
9. Créez la droite parallèle à (OA) passant par P.	Par le menu <i>Créer, Ligne, Droite(s), Parallèle</i> . Entrez alors la droite passant par : P, et parallèle à : OA, nommez cette droite d2 et validez par OK.	
10. Créez le point N.	Par le menu <i>Créer, Point, Intersection 2 droites</i> . Entrez le nom de la première droite : d2, celui de la deuxième droite : OB, du point : N. Validez par OK.	
11. Créez le rectangle OMPN.	Par le menu <i>Créer, Ligne, Rectangle, Défini par une diagonale</i> . Entrez comme diagonale : OP, et comme nom du rectangle : R. Validez par OK.	
12. Quelques réglages pour finir.	<ul style="list-style-type: none"> • Cliquez (plusieurs fois) sur l'icône  ou sur  pour agrandir ou réduire la figure. • Vous pouvez effacer les droites d1 et d2 pour avoir une figure plus claire : cliquez sur l'icône . Une boîte de styles apparaît. Cliquez sur <i>non dessiné</i>, puis sur un point quelconque de d1, puis sur un point quelconque de d2, puis sur <i>Fermer</i> pour fermer cette boîte de styles. 	Pour faire réafficher un objet non dessiné, cliquez sur cette même icône puis sur <i>dessiné</i> et choisissez dans la liste l'objet que vous voulez revoir dessiné.

B. ➔ Étude expérimentale de la fonction

Allez dans le menu *Piloter*, cliquez sur *Piloter au clavier*. Cliquez sur la phrase *M point libre sur le segment [OA]*, puis validez en cliquant sur OK.

Appuyez sur l'une des flèches \rightarrow ou \leftarrow du clavier pour déplacer M sur le segment [OA].

1. Amenez M en O. Que valent x et $f(x)$? Et quand M est en A ?

Rappel

$x = OM$ et $f(x)$ est l'aire de OMPN.

2. Amenez à nouveau M en O. En déplaçant M, observez la façon dont varie l'aire du rectangle OMPN en fonction de OM.

Quelle conjecture pouvez-vous faire sur le sens de variation de f ?

3. Précisons cette conjecture en faisant afficher les valeurs de x et de $f(x)$.

Constructions	Mode d'emploi	Commentaires
13. Créez la variable x .	Par le menu <i>Créer, Numérique, Calcul géométrique, Longueur d'un segment</i> . Entrez le nom du segment : OM, et le nom de la longueur : x .	La variable x est créée mais n'est pas affichée...
14. Affichez x .	Par le menu <i>Créer, Affichage, Variable numérique déjà définie</i> . Entrez le nom de la variable à afficher : x , et le nombre de décimales : 2.	
15. Calculez l'aire a du triangle OMP.	Par le menu <i>Créer, Numérique, Calcul géométrique, Aire d'un triangle</i> . Donner le nom du triangle : OMP, et le nom de l'aire : a .	Le seul calcul d'aire disponible est celui d'un triangle.
16. Calculez l'aire du rectangle OMPN (égale à $2a$).	Par le menu <i>Créer, Numérique, Calcul algébrique</i> . Entrez comme expression du calcul : $2 \cdot a$, puis comme nom du calcul : <i>aire</i> .	La variable aire est créée mais pas affichée.
17. Affichez l'aire du rectangle.	Par le menu <i>Créer, Affichage, Variable numérique déjà définie</i> . Entrez comme nom de variable à afficher : <i>aire</i> , précisez le nombre de décimales : 2.	

Déplacez à nouveau le point M. Quel tableau de variation pouvez-vous conjecturer pour la fonction f ?

C. ➔ Courbe représentative de f



Il s'agit de l'ensemble des points m de coordonnées $(x ; f(x))$.

Cliquez avec le bouton droit de la souris n'importe où sur l'écran, et en maintenant le bouton enfoncé, déplacez la souris.

Amenez ainsi votre repère en bas de l'écran de telle sorte que le point de coordonnées $(0 ; 8)$ soit visible à l'écran.

Méthode

Vous pouvez aussi réduire la figure (voir construction 12 de la page précédente).

Constructions	Mode d'emploi
18. Créez le point $m : (x ; f(x))$ c'est-à-dire $(x ; aire)$.	Par le menu <i>Créer, Point, point repéré, dans le plan.</i> Entrez l'abscisse : x , l'ordonnée : $aire$, le nom : m .
19. Gardez la trace du point m .	Allez dans le menu <i>Afficher, Sélection trace.</i> La liste des objets construits apparaît. Cliquez sur la dernière ligne <i>point de coordonnées $(x ; aire)$ dans le repère R_{Oxy}.</i> Validez par OK.
20. Tracez la courbe point par point.	Amenez le point M sur le point O. Cliquez sur l'icône  puis déplacez le point M jusqu'en A. Cliquez sur l'icône  pour sortir du mode « Trace ».
21. Tracez la courbe globalement.	Par le menu <i>Créer, Ligne, Courbe, Lieu d'un point.</i> Entrez le pilote : M, le nom du point qui décrit le lieu : m , le découpage : 1 000, et le nom de la courbe : g .

Lorsque vous déplacez M, le point m parcourt la courbe g .

Le menu *Fichier, Imprimer*, vous permet d'imprimer éventuellement la figure.

Le menu *Fichier, Quitter*, vous permet de quitter le logiciel Geoplan-Geospace.

D. ➔ Étude de f par le calcul

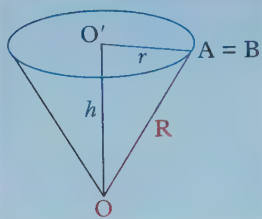
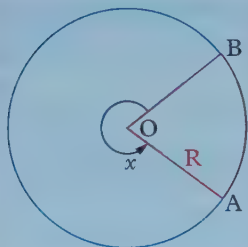
- 1.** Montrez que $f(x) = x\sqrt{R^2 - x^2}$ pour $x \in [0 ; R]$.
- 2.** Justifiez que f a même sens de variation que la fonction f^2 qui, à tout x de $[0 ; R]$, associe $(f(x))^2$.
- 3.** Étudiez le sens de variation de la fonction f^2 puis déduisez-en le tableau de variation de f .
- 4.** Pour quelle position de M obtient-on le rectangle OMPN d'aire maximale ?

Déterminer un maximum

Un marchand de frites confectionne ses cornets de frites de la manière suivante : il découpe un disque de papier de rayon R qu'il entaille selon un rayon ; il enroule ensuite le papier sur lui-même pour former un cône en recouvrant un secteur angulaire. Amateur de mathématiques, il se demande comment confectionner un cône de volume maximal.

On note :

- $2\pi - x$ l'angle de recouvrement,
- h la hauteur du cône,
- r le rayon de la base du cône.



Rappel : Le volume du cône est donné par la formule $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

1. Préciser l'ensemble des valeurs possibles de h pour que le problème ait un sens.
2. Exprimer r^2 en fonction de h^2 et de R^2 , puis le volume V du cône en fonction de h .
3. Étudier les variations de la fonction : $h \mapsto V(h)$ dans l'intervalle $[0 ; R]$, puis déterminer la valeur de h pour laquelle V est maximal.
4. Montrer que $x = 2\pi \frac{r}{R}$.
5. En déduire la valeur de x (en radians) correspondant au volume maximal. Donner une valeur approchée en degrés de l'angle x .

Solution

1. h désignant la hauteur du cône ainsi formé, h est une grandeur variant entre 0 ($x = 2\pi$) et R ($x = 0$).
2. Le triangle $OO'A$ est un triangle rectangle en O' donc $h^2 + r^2 = R^2$.

Par suite, $r^2 = R^2 - h^2$. Le volume du cône correspondant est alors $V(h) = \frac{\pi(R^2 - h^2)h}{3}$.

3. On étudie alors la fonction définie par $V(h) = \frac{\pi(R^2 - h^2)h}{3}$ pour h variant entre 0 et R . Cette fonction polynôme est dérivable, donc continue, sur $[0 ; R]$ et $V'(h) = \frac{\pi}{3}(R^2 - 3h^2)$.

h	0	$\frac{R}{\sqrt{3}}$	R
$V'(h)$		+	0 -
$V(h)$	0	↗ M ↘	
			0

V admet donc un maximum pour $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ et $M = V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \frac{2R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}R^3}{27}$.

4. Les longueurs du grand arc de cercle AB et du cercle de centre O' coloriés en bleu sont égales, donc $Rx = 2\pi r$. D'où $x = 2\pi \frac{r}{R}$.

5. Le volume maximal correspond donc à un angle x tel que $x = 2\pi \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2}}{R} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ce qui nous donne, à l'aide de la calculatrice, les valeurs approchées suivantes :

$$x \approx 5,13 \text{ rad} \quad \text{ou encore} \quad x \approx 293,94^\circ.$$

Le marchand de frites doit donc recouvrir un secteur angulaire de $66,06^\circ$.

voir aussi exercices n° 83 à 88

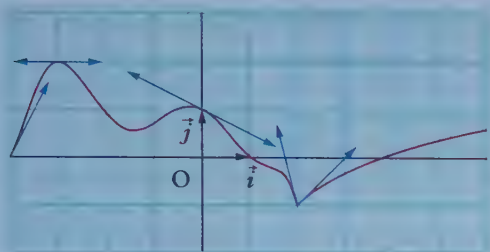
EXERCICES

→ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Dans toute la suite, le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définitions et graphiques

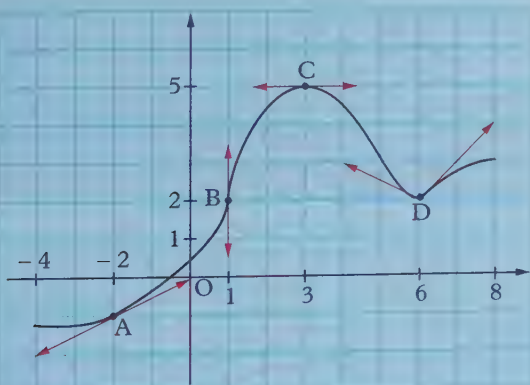
1 La fonction f est définie sur $[-4; 6]$.



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. f est-elle dérivable sur $[-4; 6]$?
3. Préciser les nombres dérivés connus.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$.
6. Le quotient $\frac{f(x) + 1}{x - 2}$ a-t-il une limite en 2 ?

2 On se donne la représentation graphique dans un repère orthonormal de la fonction f définie sur \mathbb{R} .



En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :

- f est-elle continue en tout point de \mathbb{R} ?
- f est-elle dérivable en $-2; 1; 3; 6$? Si oui, peut-on donner le coefficient directeur de la tangente ?

3 Traduire en termes de limite, de développement limité et interpréter graphiquement les renseignements suivants.

- f est dérivable en 3 et $f'(3) = -1$;
- la fonction carrée est dérivable en 1 de nombre dérivé 2.

4 Représenter la courbe d'une fonction f définie sur $[-5; 5]$ telle que :

$$f(-5) = -1, f(0) = 0, f(3) = -2, f'(3) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$$

et $f(5+h) = 2 + 3h + h\varepsilon(h)$ où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

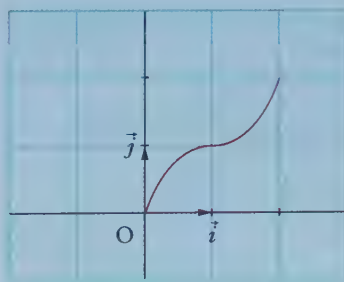
5 Donner le développement limité d'ordre 1 de la fonction racine carrée au voisinage de 1. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{1,02}$.

6 En physique, on utilise souvent les approximations suivantes pour x voisin de 0 :

$$\sin x \approx x \text{ et } \tan x \approx x.$$

Justifier cet usage.

7 La fonction f , deux fois dérivable sur $[0; 2]$, est représentée ci-dessous.



Par lecture graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Quel est le signe de f' ?
2. Quel est le sens de variation de f' ?
3. Quel est le signe de f'' ?

8 avec ROC

1. Montrer que si $f(x) = \alpha + \beta x + x\varepsilon(x)$ où α, β sont deux réels et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$, f est dérivable en 0 avec $f'(0) = \beta$.

2. En déduire, sans calcul, que les fonctions suivantes sont dérivables en 0.

- $f(x) = 1 + 2x + x^3$;
- $f(x) = 6 - 3x + x\sqrt{|x|}$.

EXERCICES

Calcul de dérivées

9 Donner la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a. $x \mapsto 3x^2 + 7x - 15$; b. $x \mapsto -x^3 + \frac{x^2}{4} - 5x$;

c. $x \mapsto \frac{x+2}{5}$; d. $x \mapsto \sqrt{x} + 5x^2$.

10 Préciser les ensembles de dérivabilité des fonctions suivantes et déterminer leurs fonctions dérivées.

a. $f: x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$; b. $f: x \mapsto \sin x + \tan x$;

c. $f: x \mapsto \cos x + \frac{1}{(x-1)^2}$;

d. $f: x \mapsto \sin x + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$.

11 Dériver une composée

Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction f définie par :

a. $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ sur \mathbb{R} ;

b. $f(x) = (x^2 - 2x + 4)^3$ sur \mathbb{R} ;

c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$ sur \mathbb{R} ;

d. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x - 2}$ sur $]-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty[$.

12 Existence et calcul des dérivées des fonctions :

a. $f: x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$; b. $f: x \mapsto \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$;

c. $f: x \mapsto (x-1)\sqrt{2x+1}$; d. $f: x \mapsto x\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$;

e. $f: x \mapsto (x-2)(x-4)^2$.

13 Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$; b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$;

c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$; d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{x}$.

14 Déterminer la limite en x_0 des fonctions suivantes.

a. $f: x \mapsto \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$, $x_0 = 2$;

b. $f: x \mapsto \frac{\sin x}{x - \pi}$, $x_0 = \pi$;

c. $f: x \mapsto \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

d. $f: x \mapsto \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{5}}{x-1}$, $x_0 = 1$.

15 Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

a. $f: x \mapsto x|x|$; b. $f: x \mapsto \sqrt{x+1}$;

c. $f: x \mapsto \sqrt{x^3 + 2x^2}$.

16 Des conditions nécessaires ou suffisantes ?

1. Des exemples

a. Soit $f(x) = x\sqrt{x}$ pour $x \in [0; +\infty[$.

Montrer que f est dérivable en 0.

b. Soit pour $x \in [1; +\infty[$:

$$u(x) = \sqrt{x-1}, \quad v(x) = \sqrt{x^2-1} \quad \text{et} \quad f(x) = u(x)v(x).$$

Étudier la dérivabilité en 1 des fonctions u , v et f .

2. Un peu de logique

On considère deux fonctions u et v définies sur un intervalle ouvert contenant a .

Dire si chacune des phrases suivantes est vraie ou fausse ; on donnera un contre-exemple pour chacune des phrases fausses.

A. Si u et v sont dérivables en a alors uv est dérivable en a .

B. Si u ou v n'est pas dérivable en a alors uv n'est pas dérivable en a .

C. Si u et v ne sont pas dérivables en a alors uv n'est pas dérivable en a .

D. Si uv n'est pas dérivable en a alors u et v ne sont pas dérivables en a .

E. Si uv n'est pas dérivable en a alors u ou v ne sont pas dérivables en a .

Tangente à une courbe

17 Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f , au point d'abscisse x_0 .

a. $f(x) = x^3 + 2x - 3$, $x_0 = 1$;

b. $f(x) = 2 \cos x + 1$, $x_0 = \pi$;

c. $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$, $x_0 = 2$.

18 Déterminer en quel(s) point(s) la courbe d'équation $y = f(x)$ a une tangente de coefficient directeur m .

a. $f(x) = x^3 - 2x - 3$, $m = 1$;

b. $f(x) = \cos(2x)$, $m = -2$;

c. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $m = \frac{1}{6}$.

19 Soit f la fonction définie pour $x \neq -5$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 5}.$$

On appelle C la courbe représentative de la fonction f .

1. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

2. Existe-t-il des tangentes à C admettant -7 pour coefficient directeur ?

20 Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent la même tangente au point d'abscisse -1 .

a. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x$ sur \mathbb{R} ;

b. $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x + 4$ sur \mathbb{R} ;

c. $h(x) = 2\sqrt{x+2}$ sur $[-2 ; +\infty[$.

21 Les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + x - 3 \text{ et } g(x) = \frac{-3}{x+2}$$

ont-elles une tangente commune en 1 ?

22 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^4 + 2x^3$ et (C) sa courbe représentative.

1. Déterminer les tangentes à (C) aux points d'abscisses respectives 0 et 1 .

2. Montrer que (C) traverse sa tangente en chacun de ces deux points. On pourra vérifier que :

$$f(x) - 2x + 1 = -(x-1)^3(x+1).$$

Axes, centres de symétrie

23 Montrer que la courbe représentant la fonction f admet la droite Δ pour axe de symétrie.

a. $f(x) = \sin x + \cos 2x$ sur \mathbb{R} , avec $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$;

b. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{-2x^2 + 4x + 6}$

pour $x \neq -1$ et $x \neq 3$, avec $\Delta : x = 1$.

24 Montrer que la courbe représentant la fonction f admet le point Ω pour centre de symétrie.

a. $f(x) = x^3 - 3x + 4$ sur \mathbb{R} , avec $\Omega(0 ; 4)$;

b. $f(x) = 2x + 3 + \frac{3}{x+2}$

sur $\mathbb{R} - \{-2\}$, avec $\Omega(-2 ; -1)$.

Théorème des valeurs intermédiaires. Continuité

25 La fonction f admet le tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$		
$f(x)$	3	\searrow	\nearrow	1	\searrow	$-\infty$

Par lecture du tableau, répondre aux questions suivantes.

1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$? Quelles sont les propriétés de la fonction f qui permettent de l'affirmer ?

2. Discuter suivant la valeur de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

26 1. Justifier que, pour tout $\alpha \in]0 ; 1[$, l'équation $\cos x = \alpha$ admet exactement deux solutions sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Donner des valeurs approchées à 10^{-2} près des solutions sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation $\cos x = \frac{1}{3}$.

27 Déterminer le nombre de solutions de l'équation $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$.

Étude de fonctions

28 Exercice guidé

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0.$$

On note C sa courbe représentative.

1. Étudier la parité de g .

2. Montrer que g est continue en 0 .

3. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

Interpréter graphiquement.

4. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

Interpréter graphiquement.

5. Étudier le sens de variation de g sur $[0 ; +\infty[$.

6. Tracer la courbe C .

guide

2. Il suffit de montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} g(x) = g(0)$.

La forme indéterminée obtenue et la forme de l'expression $g(x)$ peuvent orienter vers l'interprétation en termes de nombre dérivé.

3. Il s'agit ici de chercher la limite de $\frac{g(x) - g(0)}{x}$ quand x tend vers 0 . On pourra poser $h = x^2$.

29 Soit f la fonction définie sur $[-1 ; 4]$ par $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ et C sa courbe représentative.

1. Vérifier que f peut bien être définie sur $[-1 ; 4]$.

2. On pose $x = -1 + h$.

a. Exprimer $f(x)$ en fonction de h .

b. Étudier la dérivabilité de f en -1 .

c. Interpréter graphiquement.

3. Étudier la dérivabilité de f en 4 .

4. a. Justifier que f est continue sur $[-1 ; 4]$.

b. Étudier le sens de variation de f sur $[-1 ; 4]$.

5. Tracer la courbe C .

6. La courbe C admet-elle un axe de symétrie ?

→ Que sais-je ?

Vrai ou faux ?

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal.

30 Soit $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 3}$ pour tout x réel.

La tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 0 est la droite $T : y = \frac{3}{10}x - \frac{1}{3}$.

31 Si $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 2}$ pour tout $x \neq -2$, alors

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{(x + 2)^2 \sqrt{x^2 + 1}}$$
 pour tout $x \neq -2$.

32 Si $f(x) = (x^2 + 1)^3$ pour tout x réel, alors $f'(x) = 3(x^2 + 1)^2$ pour tout x réel.

33 Si $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$ sur $I =]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ alors,

pour tout x de I , $f'(x) = \frac{1}{1 + \sin(2x)}$.

34 $(1 + x)^8 = 1 + 8x + x\varepsilon(x)$ où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

35 Si f est dérivable sur \mathbb{R}^* et $f'(x) < 0$ sur \mathbb{R}^* alors f est strictement décroissante sur \mathbb{R}^* .

36 La courbe d'équation $y = \sin x - 3 \cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$, admet pour axe de symétrie la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$.

37 Si $f(1) = 2$ et $f(5) = -3$, f est décroissante sur $[1 ; 5]$.

38 Si f est continue sur $[-1 ; 1]$ avec $f(-1) = 3$ et $f(1) = -2$, il existe un unique x de $[-1 ; 1]$ tel que $f(x) = 0$.

39 Si f est continue sur $[-1 ; 1]$ avec $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, pour tout x de $[-1 ; 1]$, $f(x) = x$.

40 Si f est strictement décroissante sur $[-1 ; 1]$ avec $f(-1) = 5$ et $f(1) = -3$, il existe un unique x de $[-1 ; 1]$ tel que $f(x) = 0$.

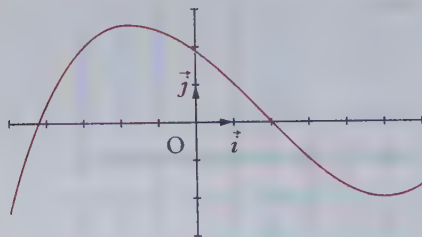
41 La fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \cos(\pi x)$, si $x < 1$, et $f(x) = x^2 - 2x$, si $x \geq 1$, est dérivable sur \mathbb{R} .

42 La dérivée troisième de la fonction inverse f sur \mathbb{R}^* est donnée par $f^{(3)}(x) = \frac{6}{x^6}$.

QCM

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal. Dans les exercices, choisir la ou les réponses justes (on ne demande pas de justification).

43 La courbe ci-dessous représente la fonction dérivée d'une fonction f dérivable sur $[-5 ; 6]$.



- A. f possède un extremum relatif en 5.
- B. f possède un maximum relatif en 2.
- C. L'équation $f(x) = k$ (k réel) possède au maximum trois solutions.
- D. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = -2$.

44 Soit k un réel. On définit la fonction f_k sur \mathbb{R} par $f_k(x) = x^3 + kx - 1$.

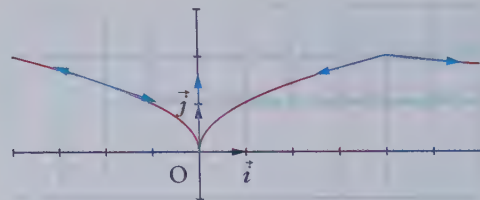
A. L'équation $f_k(x) = 0$ a toujours au moins une solution.

B. Le point $\Omega(0 ; -1)$ est centre de symétrie de la courbe représentant f_k dans un repère du plan.

C. Si $k \geq 0$, l'équation $f_k(x) = -1$ a une unique solution.

D. L'équation $f_k(x) = -1$ peut avoir exactement deux solutions.

45 La fonction f définie sur $[-4 ; 6]$ est représentée avec certaines de ses tangentes.



- A. f est dérivable en 0 ;
- B. $f'(-2) < 0$;
- C. f est continue en 4 ;
- D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

46 Il existe une fonction définie sur \mathbb{R} telle que :

- A. f est continue en 1, non dérivable en 1 ;
- B. f est dérivable en 1, non continue en 1 ;
- C. f est non dérivable en 1 et continue en 1 ;
- D. f n'est ni continue ni dérivable en 1.

→ Un sujet vu au BAC (extrait)

47 Une fonction a sur $[0 ; +\infty[$ le tableau de variation suivant.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	1	0	1

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n , respectivement comprises dans les intervalles $[0 ; 1]$ et $[1 ; +\infty[$.
2. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) .
3. Montrer que la suite (u_n) converge et trouver sa limite. Procéder de même pour la suite (v_n) .

La Réunion, juin 2004.

Solution

1. Pour $n \geq 2$, $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} < 1$. Par le tableau de variation, on peut

alors dire que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution u_n dans $[0 ; 1]$ et une unique solution v_n dans $[1 ; +\infty[$.

De plus $f(1) = 0$ donc 1 n'est pas solution ; il y a donc bien exactement deux solutions u_n et v_n avec $0 \leq u_n < 1 < v_n$.

2. Par définition de la suite (u_n) , pour tout $n \geq 2$:

- u_n et u_{n+1} appartiennent à $[0 ; 1]$;

- $f(u_n) = \frac{1}{n}$ et $f(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ d'où $f(u_{n+1}) < f(u_n)$.

La fonction f étant strictement décroissante sur $[0 ; 1]$, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \geq 2$.

La suite (u_n) est croissante.

De même, $f(v_n) = \frac{1}{n}$ et $f(v_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ d'où $f(v_{n+1}) < f(v_n)$

avec v_n et v_{n+1} compris dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$ sur lequel f est strictement croissante. On peut en déduire que :

$$v_{n+1} < v_n \text{ pour tout } n \geq 2.$$

La suite (v_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc converge. Ayant $0 \leq u_n \leq 1$, on sait que la limite L de (u_n) appartient à $[0 ; 1]$. La fonction f étant continue sur $[0 ; 1]$, la suite $(f(u_n))$ converge

vers $f(L)$. Mais comme $f(u_n) = \frac{1}{n}$, la suite $(f(u_n))$ converge vers 0.

Par unicité de sa limite, on a donc $f(L) = 0$.

On sait que $f(1) = 0$; de plus sur $[0 ; 1]$, f est strictement décroissante, donc si $0 \leq x < 1$, $f(x) > f(1)$ c'est-à-dire $f(x) > 0$.

On en déduit que, sur $[0 ; 1]$, $f(L) = 0 \Leftrightarrow L = 1$.

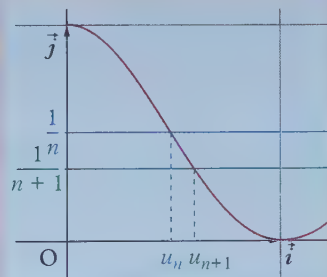
La suite (u_n) converge donc vers 1.

De même, la suite (v_n) est décroissante minorée par 1 donc convergente vers une limite L' appartenant à $[1 ; +\infty[$. À nouveau la suite $(f(v_n))$ converge vers $f(L')$ par continuité de f sur $[1 ; +\infty[$. Comme précédemment on en déduit que $f(L') = 0$, puis que $L' = 1$.

Le jour du BAC

Question 1 : Il faut se rappeler qu'une flèche vers le haut ou vers le bas dans un tableau de variation signifie que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle correspondant.

Question 2 : Comparer deux nombres revient à comparer leurs images par une fonction strictement monotone.



Question 3 : La seule limite que l'on puisse calculer directement est celle de $\left(\frac{1}{n}\right)$; qui n'est autre que $(f(u_n))$.

→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Études de fonctions

48 1. Représenter graphiquement la fonction sinus sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sin x = \frac{1}{n}$ admet une unique solution dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On la notera x_n .

b. Construire x_1, x_2, x_3 sur l'axe des abscisses.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (x_n) .

3. Soit $f(x) = x - \sin x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

a. Dresser le tableau de variation de f .

b. Résoudre l'équation $\sin x = x$.

4. Démontrer que la suite (x_n) converge et donner sa limite.

49 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos^3 x$ et Γ la courbe représentant f .

1. Montrer que Γ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

2. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Interpréter graphiquement.

3. Étudier f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et tracer Γ sur $[-2\pi; 2\pi]$.

50 Avec une dérivée seconde

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 + \sin x.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. a. Déterminer $f'(x)$.

b. Déterminer les limites de f' en $-\infty$ et $+\infty$.

c. Étudier son sens de variation.

d. Justifier que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} et en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

3. Dresser le tableau de variation de f .

51 Avec une fonction auxiliaire

1. Soit $P(x) = -4x^3 - 3x^2 + 2$ pour tout x réel.

a. Étudier les limites de P en $-\infty$ et $+\infty$ et déterminer son sens de variation.

b. En déduire le nombre de solutions de l'équation $P(x) = 0$, puis le signe de $P(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^3+1}.$$

a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Montrer que $f'(x)$ a même signe que $P(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de f .

52 Des variations au signe

Soit $f(x) = \tan x - x$ et $g(x) = \tan x - 2x$ pour

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

1. Étudier le sens de variation de f et de g .

2. En déduire que, pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$:

$$x \leq \tan x \leq 2x.$$

53 Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par :

$$f(x) = x^2 + x - 1.$$

1. Donner le tableau de variation de f .

2. Montrer que, pour tout élément y de $[-1; 5]$, il existe un unique élément x de $[0; 2]$ tel que $f(x) = y$.

3. En partant de la relation $y = x^2 + x - 1$, exprimer x en fonction de y .

Point Info

Si f est une fonction telle que :

- tout x de $[0; 2]$ a une unique image dans $[-1; 5]$,

- tout y de $[-1; 5]$ a un unique antécédent dans $[0; 2]$,

on dit que f est une bijection de $[0; 2]$ sur $[-1; 5]$.

La fonction qui, à tout y de $[-1; 5]$, associe son antécédent x dans $[0; 2]$ s'appelle la bijection réciproque de f , noté f^{-1} .

$$[0; 2] \xrightarrow{f} [-1; 5]$$

$$x \mapsto y$$

$$f^{-1}$$

54 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 1.$$

1. a. En étudiant les variations de f , montrer que l'équation (E) : $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles et qu'elles appartiennent à $[-2; 2]$.

b. Donner une valeur approchée de chacune d'elles à 10^{-2} près.

2. Montrer que, pour tout réel α :

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

3. a. Montrer que $x = 2 \cos \alpha$ est solution de (E) si et seulement si $\cos(3\alpha) = \frac{1}{2}$.

b. En déduire les solutions de (E).

55 Soit f la fonction définie pour $x \neq -1$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 1}{(x+1)^2}.$$

1. Trouver trois réels a, b, c tels que :

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

2. Trouver un point A en lequel la tangente à la courbe \mathcal{C} est une droite \mathcal{D} parallèle à la droite d'équation $3x - y = 0$. Calculer les coordonnées du point B, intersection de \mathcal{D} et de \mathcal{C} .

Continuité, dérivabilité

- 56** Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. f est-elle continue sur \mathbb{R} ?
2. f est-elle dérivable en 0 ?
(Utiliser $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.)
3. f est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?

- 57** On pose, pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{2x^2 + |x|}{x}$.

1. Simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x > 0$.
L'expression ainsi obtenue admet-elle une limite lorsque x tend vers 0 ?
2. Simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x < 0$.
L'expression ainsi obtenue admet-elle une limite lorsque x tend vers 0 ?
3. Tracer la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $x \neq 0$.
4. Peut-on trouver un réel a tel que, en posant $g(0) = a$ et pour $x \neq 0$, $g(x) = f(x)$, la fonction g soit continue en 0 ?

- 58** 1. Étudier la continuité sur \mathbb{R} des fonctions suivantes :

- a. $x \mapsto 1 + x + |x|$; b. $x \mapsto |x| + |x + 2|$.

2. Sont-elles dérivables en 0 ?

- 59** Étudier la continuité de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sup(2x - 1 ; 4x + 5)$, où :

- $\sup(a ; b) = a$ si $a \geq b$,
- $\sup(a ; b) = b$ si $a < b$.

- 60** On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = E(x) \sin(\pi x).$$

1. Exprimer $f(x)$ à l'aide de $\sin(\pi x)$ lorsque x appartient à l'un des intervalles $[-1 ; 0[$, $[0 ; 1[$, $[1 ; 2[$.
En déduire que f est continue sur $[-1 ; 2[$.
2. Étudier la dérivabilité de f en $x = 0$ et en $x = 1$.
Étudier les variations de f sur $[-1 ; 2[$.
3. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- 61** On considère l'application f définie de \mathbb{R} sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2(2 - x)$ si $x \in [0 ; 2[$ et, pour tout réel x , $f(x) = f(x + 2)$.

1. Étudier la restriction de f à l'intervalle $[0 ; 2[$ et tracer la courbe représentative de f sur cet intervalle dans un repère orthonormal.

2. Comment peut-on en déduire la courbe représentative de la restriction de f à $[2n ; 2n + 2[$ où n est un entier relatif ?

3. Démontrer que, si $x \in [2n ; 2n + 2[$,

$$f(x) = (x - 2n)^2(2n + 2 - x).$$

4. Est-ce que f est continue sur \mathbb{R} ? dérivable sur \mathbb{R} ?

- 62** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = x^n \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

2. f est-elle dérivable sur \mathbb{R}^* ?

3. Pour quelles valeurs de n , f est-elle dérivable en 0 ?

- 63** Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = x^n \sqrt{1 - x} \text{ pour } x \leq 1.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n .

2. Déterminer l'unique élément a_n de $]0 ; 1[$ tel que $f'_n(a_n) = 0$ pour $n \geq 1$.

3. Donner le tableau de variation de f_n pour $n \geq 1$, en distinguant les cas n pair et n impair.

4. Représenter dans un même repère f_1 et f_2 .

- 64 Pour aller plus loin (1)**

Soit la fonction $f(x) = E(x) + [x - E(x)]^2$ définie sur \mathbb{R} .

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x + 1) = f(x) + 1$.

Qu'en déduit-on pour les points $M(x ; f(x))$ et $M'(x + 1 ; f(x + 1))$?

2. Tracer la courbe d'équation $y = f(x)$ pour x appartenant à $[0 ; 1]$.

3. En déduire la représentation graphique de f pour x appartenant à \mathbb{R} .

4. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

- 65 Pour aller plus loin (2)**

Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}.$$

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x + 1) = f(x) + 1$.

Que peut-on dire des points $M(x ; f(x))$ et $M'(x + 1 ; f(x + 1))$?

2. Tracer la représentation graphique de f sur $[0 ; 1]$, puis sur $[-5 ; 5]$.

3. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

Dérivées successives

66 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ définie pour $x \neq 0$.

- Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ pour $x \neq 1$.
- Déterminer $f^{(n)}(x)$ pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

67 Soit $f(x) = \frac{1}{x-1}$ pour $x \neq 1$.

Déterminer $f^{(n)}(x)$ pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

68 1. Démontrer que, pour tout réel x , la dérivée n -ième de la fonction \cos est $x \mapsto \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$ et

celle de la fonction \sin est $x \mapsto \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$.

- En déduire la dérivée n -ième de la fonction $x \mapsto \cos(ax + b)$ où a et b sont des réels fixés.
- Déterminer la dérivée n -ième de la fonction $x \mapsto \sin^2(x)$.

69 Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7$.

Démontrer que pour tous réels x_0 et h :

$$P(x_0 + h) = P(x_0) + hP'(x_0) + \frac{h^2}{2}P''(x_0) + \frac{h^3}{6}P'''(x_0).$$

Donner une valeur approchée par défaut de $P(3,002)$ à 10^{-4} près, puis à 10^{-7} près.

Théorème des valeurs intermédiaires

70 Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$

- Donner le tableau de variation de f .
- En déduire que, pour tout élément y de $[-1; 0]$, il existe un unique élément x de $[0; 1]$ tel que $f(x) = y$.
- En partant de la relation $y = x^4 - 2x^2$, exprimer x en fonction de y appartenant à $[-1; 0]$.

71 Soit n un entier naturel.

Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left] \frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi \right[$.

72 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x(x+1)}{x-2}$.

- Étudier et représenter graphiquement cette fonction.
- Utiliser la courbe précédente pour déterminer, suivant les valeurs du paramètre m , le nombre de racines de l'équation $x^2 + (1-m)x + 2m = 0$.

3. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre m , le nombre de solutions de l'équation :

$$\cos(2u) + 2(1-m)\cos(u) + 4m + 1 = 0$$

où u appartient à $[0; 2\pi[$.

Pour démontrer

73 Soit f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} et dérivables en x_0 .

1. Montrer que :

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = [f(x) - f(x_0)]g(x) + [g(x) - g(x_0)]f(x_0).$$

2. En utilisant la définition 1, montrer que la fonction produit fg est dérivable en x_0 et déterminer $(fg)'(x_0)$.

74 En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que si f et g sont deux fonctions définies sur \mathbb{R} et dérivables en x_0 telles que $g(x_0) \neq 0$:

a. il existe un intervalle I de centre x_0 sur lequel g ne s'annule pas ;

b. la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

75 Soit f une fonction continue sur $]a; b[$ et dérivable sur $]a; b[$.

En résolvant cet exercice on démontre le corollaire 5 lié au théorème 8.

Partie A

f' est strictement positive sur $]a; b[$, donc, d'après le théorème 8, f est strictement croissante sur $]a; b[$.

1. Supposons qu'il existe un réel α dans $]a; b[$ tel que $f(\alpha) \leq f(a)$ et soit β tel que $a < \beta < \alpha$.

a. Montrer que, si $a < x < \beta$, alors :

$$f(x) < f(\beta) < f(\alpha).$$

b. En déduire que cela est en contradiction avec le fait que f est continue en a .

c. De a et b, déduire que, si $a < x < b$, alors :

$$f(a) < f(x).$$

2. Supposons qu'il existe un réel λ dans $]a; b[$ tel que $f(b) \leq f(\lambda)$ et soit μ tel que $\lambda < \mu < b$.

a. Montrer que, si $\mu < x < b$, alors :

$$f(\lambda) < f(\mu) < f(x).$$

b. En déduire que cela est en contradiction avec le fait que f est continue en b .

c. De a et b, déduire que, si $a < x < b$, alors :

$$f(x) < f(b).$$

3. Conclure.

Partie B

f' est strictement négative sur $]a; b[$, en utilisant $-f'$, montrer que f est strictement décroissante sur $]a; b[$.

Comparaison

76 Démontrer que pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x.$$

77 Soit un réel positif. On cherche à comparer :
 $\cos(\sin x)$ et $\sin(\cos x)$.

On pose $f(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$.

1. Montrer que f est paire, périodique de période 2π .

2. Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que :

$\sin(\cos x) \leq \cos x$ et $\cos(\sin x) \geq \cos x$
 (on pourra utiliser l'exercice n° 78, 3b).

Conclure.

3. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Montrer que :

$$\sin(\cos x) \leq 0 \quad \text{et} \quad \cos(\sin x) \geq 0.$$

Conclure.

4. Quel est le signe de la fonction f ?

78 Position d'une courbe par rapport à ses tangentes

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable sur I . Le but de ce problème est d'étudier la position de la courbe représentative (Γ) de la fonction f par rapport à ses tangentes.

1. Soit a un point de l'intervalle I qui n'est pas une borne de I . Donner une équation de la tangente (D_a) à (Γ) au point d'abscisse a .

2. On suppose que f' est croissante sur I

a. Étudier le signe de la fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$.

b. En déduire la position de (Γ) par rapport à (D_a) .

c. Exemple : On pose $f(x) = \tan x$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Prouver que sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan x \geq x$. Tracer dans le plan rapporté à un repère orthonormé la courbe représentative de f et ses tangentes en 0 et en $\frac{\pi}{4}$.

3. On suppose ici que f' est décroissante sur I

a. Déterminer la position de (Γ) par rapport à sa tangente en a .

b. Exemple : On pose $f(x) = \sin x$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Prouver que sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq x$.

Tracer dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f , ses tangentes en 0 et en $\frac{\pi}{2}$.

4. On suppose que f est deux fois dérivable sur I

a. À quelle condition la fonction f sera-t-elle convexe sur I ? concave sur I ? (Voir Point Info ci-après.)

b. Supposons qu'il existe un point a de I qui ne soit pas une borne de I tel que $f''(a) = 0$ et, pour tout x appartenant à I , $f''(x) \leq 0$ si $x \leq a$ et $f''(x) \geq 0$ si $x \geq a$.

On pose $g(x) = f(x)$ si x appartient à I et $x \leq a$. Montrer que la courbe de g est située en dessous de sa tangente en a .

On pose $h(x) = f(x)$ si x appartient à I et $x \geq a$. Montrer que la courbe de h est située au-dessus de sa tangente en a . En déduire que la courbe de f traverse sa tangente en a .

On dit alors que f a un **point d'inflexion**.

c. Exemple : On pose $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$ pour $0 \leq x \leq 2$.

Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on déterminera. Déterminer une équation de la tangente en ce point ?

Point Info

Lorsque la courbe de f est située au-dessus de chacune de ses tangentes, on dit que la fonction f est **convexe** sur I .

Si la courbe de f est située en dessous de chacune de ses tangentes, on dit alors que f est une fonction **concave** sur I .

Pour chercher

79 **CD** Montrer que la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.

Si f est une fonction dérivable, de dérivée paire, peut-on en conclure que f est impaire ?

80 **CD** Montrer que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire.

Soit f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée impaire. On pose $g(x) = f(x) - f(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que g est une fonction constante. Quelle est la valeur de cette constante ? Qu'en déduit-on sur f ?

81 Un alpiniste commence l'ascension d'une montagne à 8 heures du matin et atteint le sommet à 8 heures du soir. Il redescend le lendemain matin à 8 heures en suivant le même chemin.

Montrer qu'il existe un point du chemin où l'alpiniste s'est trouvé à la même heure à la montée et à la descente.

82 Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$.

1. Montrer qu'il existe un réel x de $[0; 1]$ tel que $f(x) = x$.

2. Pour tout entier naturel non nul, on note f^n la fonction $f \circ f \circ f \circ \dots \circ f$ où f est répétée n fois.

Montrer qu'il existe un réel x compris entre 0 et 1 tel que, pour tout entier naturel n non nul, $f^n(x) = x$.

→ PROBLÈMES

83 Optimisation d'une aire

Partie A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie, pour tout x de $[-2; 2]$, par $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$. On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal ; on prendra pour unité graphique 4 cm.

1. Intervalle d'étude

Expliquer pourquoi on peut limiter l'étude de f à l'intervalle $[0; 2]$.

2. Dérivabilité de f

- Étudier la dérivabilité de f en 2 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0; 2[$ et calculer sa dérivée f' .
- Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur $[0; 2]$.

3. Représentation graphique de f

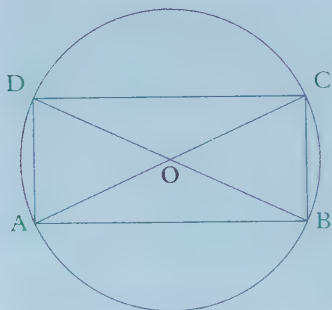
- Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
- Justifier que, pour tout x de $[0; 2]$, $f(x) \leq 2x$. En déduire la position de C par rapport à T , sur $[0; 2]$.
- Tracer C et T sur $[-2; 2]$.

4. Solutions de l'équation (E) : $f(x) = 1$

Prouver que l'équation (E) admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2; 2]$. Donner un encadrement de ces réels à 10^{-3} près.

Partie B. Étude d'une aire

Soit Γ un cercle de rayon $r = 1$ et ABCD un rectangle inscrit dans Γ .



On pose $AB = x$ et on associe, à ce réel x , l'aire $A(x)$ du rectangle ABCD.

- Préciser quel intervalle J peut décrire le réel x et calculer $A(x)$.
- Déterminer, à l'aide des résultats de la partie A :
 - pour quelle valeur de x l'aire du rectangle ABCD est maximale ; préciser dans ce cas, la valeur de l'aire et la nature de ABCD ;
 - pour quelle(s) valeur(s) de x , l'aire du rectangle ABCD est égale à 1.

84 Avec des dérivées successives

Partie A

On définit sur $[0; \pi]$ les fonctions f , g et h par :

$$f(x) = x - \sin x, \quad g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x \text{ et}$$

$$h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x.$$

- Étudier le sens de variation de f et en déduire son signe.
- Reprendre la question 1 pour la fonction g , puis la fonction h .
- En déduire que, pour tout x de $[0; \pi]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

Partie B

On pose, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{cases} u_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2} \\ v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \end{cases}$$

- Déduire de la partie A que, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$u_n \leq v_n.$$

- Justifier que, pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4.$$

En déduire, à l'aide de la partie A que, pour tout n de \mathbb{N}^* , $v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq u_n$.

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$; en déduire que la suite (u_n) converge.

85 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Nous allons étudier la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto x \sin x$.

- Montrer que, pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$f'(x) = \cos(x)(x + \tan(x)).$$

- Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \tan(x) + x$ pour $x \geq 0$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.
- Montrer que $x \mapsto \tan(x) + x$ s'annule, sur chaque intervalle $\left] \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$, en un unique point a_k , et en déduire le signe de $f'(x)$.
- Étudier la position de la courbe (C) représentative de f par rapport à sa tangente en O.
- Montrer que les points $M\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right)$ appartiennent à une des droites $y = x$ ou $y = -x$ et, qu'en ces points, la courbe (C) est tangente aux droites précédentes.
- Tracer (C).

86 Équations du second degré et fonctions

Pour tout α réel non nul, on considère l'équation, à l'inconnue réelle x , $(E_\alpha) : \alpha x^2 - 2x + 1 = 0$.

1. Des exemples

Résoudre les équations (E_α) pour $\alpha = 1, -1, -3$.

2. Résolution générale

a. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles (E_α) admet deux solutions réelles (préciser si elles sont confondues ou distinctes).

b. Exprimer les solutions de (E_α) en fonction de α .

c. On définit, sur $D =]-\infty ; 0[\cup]0 ; 1]$, les fonctions f et g par :

$$f(\alpha) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \alpha}} \quad \text{et} \quad g(\alpha) = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \alpha}}.$$

Montrer que, pour tout α de D , $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$ sont les solutions de (E_α) .

3. Étude de la fonction f

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 0 .

Interpréter graphiquement.

b. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c. Tracer sa courbe représentative C_f dans le plan muni d'un repère orthonormé avec pour unité graphique 4 cm.

4. Étude de la fonction g

Reprendre la question 3 pour la fonction g .

On tracera sa courbe représentative C_g dans le même repère que C_f .

5. Réciproquement

a. Justifier que tout x non nul est solution de l'équation (E_α) avec $\alpha = \varphi(x)$ où φ est la fonction

définie sur \mathbb{R}^* par $\varphi(x) = \frac{2x - 1}{x^2}$.

b. Étudier le sens de variation de φ , ses limites en 0 , $+\infty$ et $-\infty$.

c. Tracer la courbe Γ représentant φ sur le même graphique que C_f et C_g , d'une autre couleur. Quelle conjecture peut-on faire sur la courbe Γ par rapport à la réunion de C_f et C_g ?

87 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Le but du problème est de représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sin^3 x}{(1 + \sin x)^2}.$$

On appellera (C) la courbe représentative de f .

1. Déterminer l'ensemble D_f de définition de f .

2. Montrer que f est périodique, de période 2π .

3. Calculer, pour x élément de D_f , $f(\pi - x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire que la courbe représentant f sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ admet un axe de symétrie que l'on précisera.

4. On pose $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

a. Montrer que f est dérivable sur I .

b. Déterminer le signe de $f'(x)$.

c. Donner le tableau de variation de f sur I .

5. a. Tracer la courbe (C) , pour x élément de I , en indiquant les points à tangente horizontale.

b. En utilisant la question 3, compléter la courbe

(C) pour $x \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$.

c. En déduire (C) pour x élément de D_f .

88 Partie A

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{(1 + \cos x)^2} \quad \text{pour tout } x \text{ tel que } \cos x \neq -1.$$

On nomme C sa courbe représentative ; on prendra pour unités graphiques 2 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée.

1. Réduction de l'intervalle d'étude

a. Préciser l'ensemble de définition E de f .

b. Montrer que, pour tout x de E , $f(x + 2\pi) = f(x)$. Interpréter graphiquement.

c. En déduire que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0 ; \pi[$.

2. Étude de f sur $I = [0 ; \pi[$

a. Montrer que, pour tout x de I ,

$$f'(x) = \frac{2 \cos x - 1}{(1 + \cos x)^2}.$$

En déduire le sens de variation de f sur I .

b. Montrer que, pour tout x de I , $f(x) = \frac{\sin \frac{x}{2} \cos x}{2 \left[\cos \frac{x}{2} \right]^3}$.

En déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} f(x)$. Interpréter graphiquement.

c. Résoudre sur I l'équation $f(x) = 0$. Interpréter graphiquement.

3. Représentation graphique

Tracer C sur $]-\pi ; \pi[\cup]\pi ; 3\pi[$. On précisera tous les éléments connus par l'étude précédente.

Partie B. Des triangles de même périmètre

On considère les triangles ABC isocèles en A de périmètre 6 cm.

On note $AB = AC = a$, $x = \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ et $A(x)$ l'aire du triangle.

1. Vérifier que x appartient à $]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

2. a. Exprimer BC en fonction de a .

b. Exprimer a en fonction de $\cos x$.

3. Exprimer $A(x)$ en fonction de $f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.

4. Montrer que A est maximale pour une valeur x_0 de x que l'on précisera ; calculer ce maximum et préciser la nature du triangle ABC dans ce cas.

5. Montrer qu'il existe deux triangles isocèles de périmètre 6 cm et d'aire 1 cm². Donner une valeur approchée des côtés de ces deux triangles.

Activité 1 → La loi de décroissance radioactive

OBJECTIF

Traduire la décroissance radioactive et introduire la notion d'équation différentielle.

■ Le contexte

Le nombre de noyaux (ou d'atomes) d'une source radioactive diminue au cours du temps, tout noyau étant instable et susceptible de se désintégrer. S'il est impossible de prévoir la date de désintégration d'un noyau donné, on admet que la probabilité qu'il se désintègre pendant une unité de temps est la même pour des noyaux identiques et reste inchangée au cours du temps (un noyau ne vieillit donc pas).

Cette probabilité de désintégration, que l'on note λ , est donc une caractéristique propre au type de noyaux. C'est la **constante radioactive** : plus λ est grand, plus le nucléide est radioactif.

On désigne par N_0 le nombre initial de noyaux de la source radioactive et par $N(t)$ le nombre de noyaux restants (non désintégrés) à l'instant t .

A ■ Évolution du nombre de noyaux

1. Exprimer la proportion de noyaux se désintégrant entre les instants t et $t + 1$ à l'aide de $N(t)$ et de $N(t + 1)$.

Justifier qu'une approximation de $N(t + 1)$ est donnée par :

$$N(t + 1) \approx (1 - \lambda)N(t).$$

2. On suppose dans cette question que $N_0 = 10\,000$ et $\lambda = 0,1$.

- Dresser le tableau de valeurs de N pour $t \in [0 ; 20]$ avec un pas de 1.
- Donner la représentation graphique correspondante point par point.

B ■ Relation entre N et N'

On suppose la fonction $t \mapsto N(t)$ dérivable sur \mathbb{R} .

1. Justifier que, pour tout réel t , on a :

$$N(t + 1) \approx N(t) + N'(t).$$

2. Dédire des questions **A 1** et **B 1** que la loi de décroissance du nombre de noyaux peut être modélisée par $N'(t) = -\lambda N(t)$.

Cette équation $N' = -\lambda N$, où l'inconnue N est liée à sa dérivée, est appelée **équation différentielle**.

Activité 2 → Équation $y' = y$ avec $y(0) = 1$

On cherche une fonction f solution de l'équation différentielle $y' = y$, c'est-à-dire dérivable sur \mathbb{R} avec, pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$, et telle que $f(0) = 1$. On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé. On prendra 1 cm pour unité graphique et on laissera un espace de 12 cm au-dessus de l'axe des abscisses.

OBJECTIF

Construire pas à pas une solution approchée de l'équation $y' = y$ (méthode d'Euler).

A ■ Avec un pas de 1

1. a. Préciser le point A_0 de C d'abscisse 0 et le coefficient directeur de la tangente à C en ce point.

b. Tracer cette tangente sur $[0 ; 1]$.

On obtient un segment $[A_0A_1]$ qui approche la courbe C sur $[0 ; 1]$.

c. Quelle est l'ordonnée de A_1 ?

On la prend pour valeur approchée de $f(1)$ qui reste inconnu.

d. Quel est le coefficient directeur de la tangente à C au point de C d'abscisse 1 ? Par quelle courbe peut-on approcher C sur $[1 ; 2]$?

Quelle valeur approchée de $f(2)$ obtient-on ainsi ?

2. Plus généralement

a. Rappeler l'approximation affine de f au voisinage d'un réel a .

b. En déduire que, pour tout réel a , $f(a + 1) \approx 2f(a)$.

c. Connaissant $f(0) = 1$, quelles valeurs approchées de $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ obtient-on ? et pour $f(-1)$, $f(-2)$, $f(-3)$?

d. Acheter le tracé de la courbe approchée pour C sur $[-3 ; 3]$.

B ■ Avec un pas de 0,5

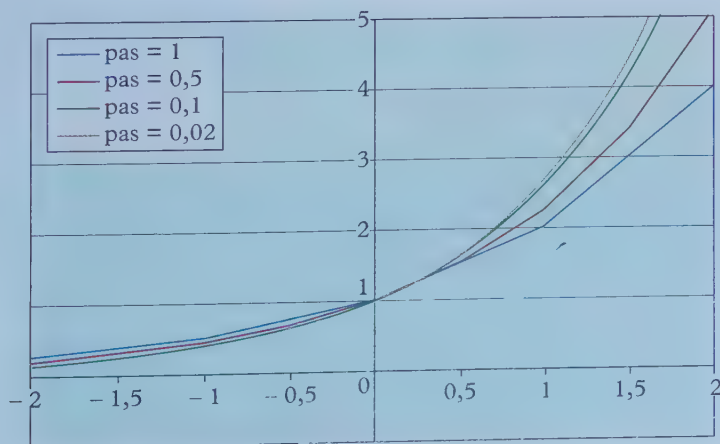
a. Montrer que $f(a + 0,5) \approx 1,5f(a)$.

b. Quelles valeurs approchées de $f(0,5)$, $f(1)$, $f(1,5)$, ..., $f(3)$ obtient-on ? et pour $f(-0,5)$, $f(-1)$, ..., $f(-3)$?

c. Tracer, sur le même graphique que précédemment, la courbe approchée que l'on obtient ainsi pour C sur $[-3 ; 3]$.

C ■ Avec un tableur

En réduisant le pas δ de la subdivision, on obtient les quatre courbes ci-dessous. Que peut-on observer ?



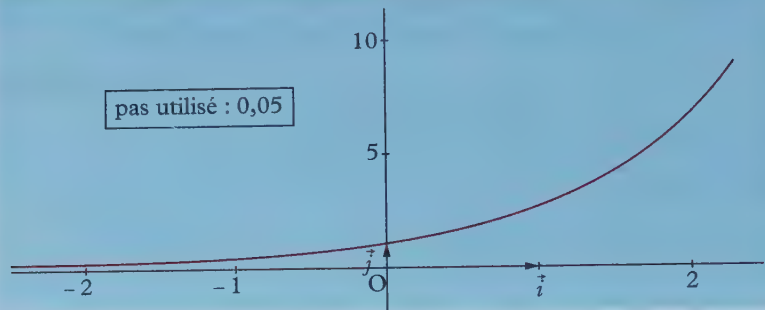
1. Fonction exponentielle

A ■ L'équation différentielle (E) : $y' = y$ avec $y(0) = 1$

On cherche les solutions de (E), c'est-à-dire les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

La méthode d'Euler, dont la démarche « pas à pas » permet de construire la courbe d'une solution approchée de l'équation (E) sur un intervalle de \mathbb{R} , amène à conjecturer l'existence d'une telle solution.



Lemme 1 → Si f est une solution de (E) alors, pour tout réel x ,

$$f(-x)f(x) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) \neq 0.$$

**Théorème 1 et
Définition 1** →

Il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que : $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Elle est appelée **fonction exponentielle** ; on la note **exp**.

Autrement dit :

- exp est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout x réel, $\exp'(x) = \exp(x)$;
- $\exp(0) = 1$.

B ■ Les relations fonctionnelles

Théorème 2 →

1. Pour tout réel x , $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
2. Pour tous réels x et y , $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
3. Pour tous réels x et y , $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
4. Pour tout réel x et pour tout entier relatif p ,
 $\exp(px) = (\exp(x))^p$.

→ DÉMONSTRATIONS

■ Lemme 1

Pour tout x , $f(x)f(-x) = 1$ et f ne s'annule donc pas sur \mathbb{R} .

On pose, pour x réel, $\varphi(x) = f(x)f(-x)$; f étant dérivable sur \mathbb{R} , φ l'est aussi et, pour tout réel x , on a :

$$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0.$$

φ est donc constante sur \mathbb{R} et $\varphi(0) = 1$ donne, pour tout réel x , $\varphi(x) = 1$, ou $f(x)f(-x) = 1$. *Soit x_0 tel $f(x_0) = 0$*

La propriété est établie d'où, pour tout réel x , $f(x) \neq 0$.

*alors $f(x_0) \times f(-x_0) = 1$
donc $0 \times f(-x_0) = 1$
 $0 = 1$
→ absurde*

■ Théorème 1

La méthode d'Euler a permis de conjecturer l'existence d'une solution f de (E) telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Cette existence est dorénavant admise.

Par contre, l'unicité de cette solution peut être établie.

• On suppose qu'il existe une fonction g qui soit également solution de (E) et on cherche à établir $f = g$.

D'après le lemme 1, montrer que, pour tout réel x , $f(x) = g(x)$ équivaut à montrer que, pour tout réel x , $f(-x)g(x) = 1$ (on multiplie chaque membre de la première égalité par le réel non nul $f(-x)$).

• Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = f(-x)g(x)$.

$$\rightarrow h = h' \text{ et } h(0) = 1$$

h est dérivable sur \mathbb{R} et $h'(x) = -f'(-x)g(x) + f(-x)g'(x) = -f(-x)g(x) + f(-x)g(x) = 0$, donc h est constante sur \mathbb{R} et $h(0) = 1$; d'où, pour tout réel x , $f(-x)g(x) = 1$. Alors $f = g$ et f est unique.

■ Théorème 2

Relation 1

Cette propriété a été établie (voir lemme 1).

Relation 2 : relation fondamentale de transformation de somme en produit

Soit a un réel quelconque. Il suffit d'établir, pour tout réel x , $\exp(x+a) = \exp(x) \exp(a)$, que la relation 1 permet d'écrire encore : $\exp(x+a) \exp(-x) = \exp(a)$.

Pour cela, on définit la fonction h_a qui à tout réel x associe $h_a(x) = \exp(x+a) \exp(-x)$.

h_a est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x :

$$h'_a(x) = \exp(x+a) \exp(-x) + \exp(x+a)(-\exp(-x)) = 0$$

d'où h_a est une fonction constante et, comme $h_a(0) = \exp(a)$, l'égalité souhaitée est établie.

Relation 3

Pour tous réels x et y :

$$\begin{cases} \exp(x-y) = \exp(x) \exp(-y) & \text{d'après la relation 2} \\ \exp(x) \exp(-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} & \text{d'après la relation 1} \end{cases}$$

Relation 4

• Soit $P(n)$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

* $P(0)$ est vraie car $\exp(0) = 1$ et $(\exp(x))^0 = 1$.

* k étant un entier de \mathbb{N} , on suppose $P(k)$ vraie, c'est-à-dire $\exp(kx) = (\exp(x))^k$ et on veut établir que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\exp((k+1)x) = (\exp(x))^{k+1}$.

Or, d'après la relation 2, $\exp((k+1)x) = \exp(kx) \exp(x)$ et, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\exp(kx) = (\exp(x))^k.$$

On en déduit $\exp((k+1)x) = (\exp(x))^k \exp(x) = (\exp(x))^{k+1}$.

* Le principe de récurrence permet de conclure que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Lorsque $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on peut poser $p = -n$ avec n dans \mathbb{N}^* . Alors, d'après la relation 1,

$$\exp(px) = \exp((-n)x) = \exp(-(nx)) = \frac{1}{\exp(nx)}.$$

Or $\frac{1}{\exp(nx)} = \frac{1}{(\exp(x))^n}$, d'après ce qui précède car $n \in \mathbb{N}$, et $\frac{1}{(\exp(x))^n} = (\exp(x))^{-n} = (\exp(x))^p$.

$e = \exp(1) \approx 2,718\ 28$
 (voir TP 2 p. 125).
 Sur une calculatrice,
 taper e^x 1 pour
 obtenir e .

C ■ Nombre e et notation « puissance »

1. Conventions

- D'après la relation 4 établie précédemment, on a :
 pour tout entier relatif p , $\exp(p) = \exp(p \times 1) = (\exp(1))^p$.

Définition 2 → On note « e » le nombre $\exp(1)$.

- On obtient, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\exp(p) = e^p$.
 On décide de prolonger cette égalité, vraie sur \mathbb{Z} , à l'ensemble des nombres réels par la convention d'écriture suivante.

Convention : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.

Exemples :

- $\exp(-1) = e^{-1}$.
- $\exp(2x - 1) = e^{2x - 1}$.

2. Incidence

On peut observer que les relations fonctionnelles de la fonction $x \mapsto e^x$ gagnent en naturel et simplicité lorsqu'on adopte cette notation « puissance ».

Pour tous réels x et y :

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} ; \quad e^{x+y} = e^x e^y ; \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

D ■ Caractérisation fonctionnelle de la fonction exponentielle

- La fonction \exp est une fonction dérivable sur \mathbb{R} qui vérifie :
 pour tous réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.
- L'étude du problème réciproque « quelles sont les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que, pour tous réels x et y , $f(x + y) = f(x)f(y)$? » conduit au résultat suivant.

Théorème 3 → Il existe une seule fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que :

- pour tous réels x et y , $f(x + y) = f(x)f(y)$;
- $f'(0) = 1$.

Il s'agit de la fonction exponentielle « \exp ».

Remarque

Les théorèmes 1 et 3 sont équivalents ; chacun énonce une propriété qui caractérise la fonction exponentielle.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ f' = f \\ f(0) = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow f = \exp \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ \text{pour tous réels } x \text{ et } y, f(x + y) = f(x)f(y) \\ f'(0) = 1 \end{array} \right.$$

→ DÉMONSTRATIONS

■ Théorème 3

Quelles sont les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que, pour tous réels x et y , $f(x+y) = f(x)f(y)$?

• Soit f une telle fonction. Pour a réel quelconque, on considère la fonction ψ_a qui associe, à tout réel t , le réel $\psi_a(t) = f(t+a) - f(t)f(a)$.

f étant dérivable sur \mathbb{R} , ψ_a l'est également et $\psi'_a(t) = f'(t+a) - f'(t)f(a)$.

ψ_a est bien sûr nulle et donc sa dérivée ψ'_a l'est aussi.

Pour $t=0$, on obtient alors, pour a réel quelconque, $0 = f'(a) - f'(0)f(a)$.

Cette égalité étant vraie pour n'importe quel réel a , on peut écrire, pour tout réel x , $f'(x) = f'(0)f(x)$.

• Comme $f'(0) = 1$, pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$.

Alors f est solution de l'équation différentielle $y' = y$ et vérifie aussi $f(0) = 1$.

D'après le théorème 1, f n'est autre que la fonction exponentielle.

→ APPLICATION

Exercice 1 Calculer avec l'exponentielle

1. Pour x réel quelconque, calculer $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ et en déduire le signe de e^x .
2. Montrer que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = (e^x + e^{-x})^2 - e^x(e^x + e^{-3x})$ est constante.
3. Montrer que la fonction g définie dans \mathbb{R} par $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est impaire.
4. Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation $e^{2x} - 3e^x + e = 0$.

Solution

1. D'après les relations 2 ou 4, on a $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = e^x$ et donc $e^x \geq 0$; mais comme \exp ne s'annule pas sur \mathbb{R} , on déduit à l'aide du lemme 1 que $e^x > 0$ pour tout réel x .

2. Pour tout réel x ,

$$f(x) = [(e^x)^2 + 2e^xe^{-x} + (e^{-x})^2] - [e^xe^x + e^xe^{-3x}] = e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} - e^{-2x} = 2.$$

3. • g est bien définie dans \mathbb{R} (car $e^x > 0$ d'après la solution de la question 1 et donc $e^x + 1 \neq 0$).

• Quand $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et :

$$g(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -g(x)$$

d'où g est impaire.

Autre solution :
$$\frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{(e^{-x} - 1) \cdot e^x}{(e^{-x} + 1) \cdot e^x} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}.$$

4. Cette équation peut s'écrire $(e^x)^2 - 3e^x + e = 0$ et on peut prendre $X = e^x$ comme inconnue auxiliaire. L'équation équivaut alors au système
$$\begin{cases} e^x = X \\ X^2 - 3X + e = 0 \end{cases}$$

Mais le discriminant de l'équation $X^2 - 3X + e = 0$ est $\Delta = 9 - 4e$ qui est négatif. Cette équation n'a donc pas de solution et le système, bien sûr, non plus.

voir aussi exercices n° 7, 16, 38

2. Étude de la fonction $x \mapsto e^x$

A ■ Sens de variation et limites

On sait déjà que \exp est dérivable sur \mathbb{R} , donc continue sur \mathbb{R} .

Propriété 1 →

- Pour tout x dans \mathbb{R} , $e^x > 0$.
- \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
\exp		1	e	$+\infty$

Remarques

• Il résulte de la stricte croissance de \exp que, pour x et y dans \mathbb{R} :

$$e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 ; \quad e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 ;$$

$$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y ; \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y.$$

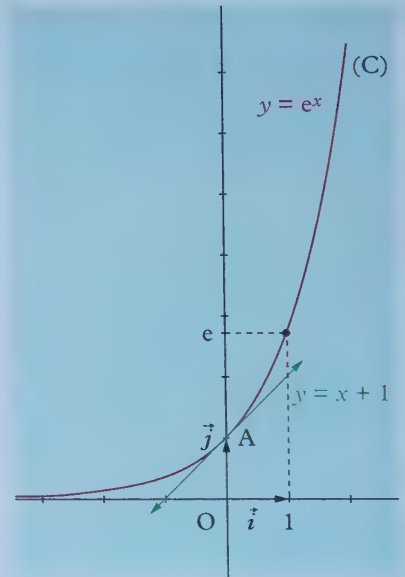
• L'axe des abscisses d'un repère du plan est asymptote à la courbe (C) : $y = e^x$ en $-\infty$.

B ■ Étude locale au voisinage de 0

On sait que $\exp'(0) = \exp(0) = 1$.

On en déduit :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, par définition du nombre dérivé en 0 ;
- \exp a pour approximation affine $x \mapsto x + 1$ au voisinage de 0 ;
- la tangente à (C) : $y = e^x$ au point A(0 ; 1) est la droite (D) d'équation $y = x + 1$.



On montre de plus que (C) est au-dessus de (D), c'est-à-dire, pour tout x réel, $e^x \geq x + 1$ (voir l'exercice n° 2, page ci-contre).

C ■ Autres limites de référence

Propriété 2 →

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.

Remarque

Dire que $\frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ signifie que « e^x écrase x » quand x tend vers $+\infty$.

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 1

Signe

• On a déjà établi que $e^x > 0$ pour tout réel x , à partir des relations fonctionnelles (voir exercice 1, p. 119). Mais la continuité de \exp permet de retrouver ce résultat à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires :

– la fonction \exp est continue sur \mathbb{R} et ne s'annule en aucun point de \mathbb{R} , elle garde donc un signe constant sur \mathbb{R} (en effet, s'il existait a et b réels tels que $\exp(a) \exp(b) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires conduirait à l'existence d'un réel c tel que $\exp(c) = 0$, ce qui est faux) ;

– comme, de plus, $\exp(0) > 0$, on en déduit $\exp(x) > 0$ pour tout réel x .

Sens de variation

La fonction \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} car sa dérivée \exp est strictement positive sur \mathbb{R} !

Limites en l'infini

• On montre que, pour tout réel x ,

$e^x \geq x + 1$ (voir exercice 2 ci-dessous), on a, par théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et (D) d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) d'équation $y = e^x$.

■ Propriété 2

• $\frac{e^x}{x} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \right)^2$; comme $e^x \geq x + 1$ pour tout x (voir exercice 2 ci-dessous), $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{1}{2}x + 1$ et *a fortiori* $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{1}{2}x$, donc :

$$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{2} \sqrt{x} \quad \text{pour } x > 0.$$

On obtient donc $\frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{4}x$ et, par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\left(\frac{e^x}{x}\right)^{-1} = 0$.

→ APPLICATION

Exercice 2 Étudier les variations d'une fonction pour prouver une inégalité

En considérant la fonction d définie sur \mathbb{R} par $d(x) = e^x - x - 1$, montrer que, pour tout x réel, $e^x \geq x + 1$.

Solution

d est dérivable sur \mathbb{R} , et $d'(x) = \exp(x) - 1$:

$$\begin{cases} d'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \exp(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0 \\ d'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \exp(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi d est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$. Alors la fonction d admet sur \mathbb{R} un minimum égal à $d(0)$. Comme $d(0) = 0$, on a donc $d(x) \geq 0$ pour tout réel x , c'est-à-dire $e^x \geq x + 1$. On a donc le tableau de variation ci-contre.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$d'(x)$		$-$	$+$
d			

voir aussi exercice n° 78

3. Équation différentielle $y' = ky$

A ■ Dérivée d'une fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Propriété 3 → Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

Exemples :

- $f : x \mapsto e^{0,5x}$ est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 0,5e^{0,5x}$.
- $g : x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = -e^{-x}$.
- $h : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, comme la fonction racine carrée, et $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$.

B ■ Résolution de l'équation $y' = ky$

La fonction $x \mapsto e^{kx}$, où k est un réel fixé, est dérivable sur \mathbb{R} et sa fonction dérivée est $x \mapsto ke^{kx}$.

La fonction $x \mapsto e^{kx}$, où k est un réel fixé, est solution de $y' = ky$.
On démontre le théorème suivant.

Théorème 4 → Une fonction f dérivable sur \mathbb{R} est solution de l'équation différentielle $y' = ky$, où k est un réel fixé, si et seulement si, pour tout réel x , $f(x) = Ce^{kx}$ où C désigne une constante réelle.

Exemple :

L'équation différentielle $y' = 0,5y$ admet pour solutions les fonctions $x \mapsto Ce^{0,5x}$, où C est une constante réelle quelconque.

C ■ Équation $y' = ky$ avec condition initiale

Théorème 5 → Soit x_0 et y_0 deux réels ; il existe une fonction unique f solution de l'équation différentielle $y' = ky$ et vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Autrement dit :

Il existe une fonction unique f solution de l'équation différentielle $y' = ky$ dont la courbe, dans un repère donné, passe par le point $M_0(x_0 ; y_0)$.

Exemple :

Parmi les solutions $x \mapsto Ce^{0,5x}$ avec C réel quelconque, de l'équation différentielle $y' = 0,5y$, il en existe une et une seule dont la courbe passe par le point $A(1 ; e)$; il s'agit de la fonction $x \mapsto e^{0,5x+0,5}$.

Remarque

Au chapitre 6, on verra que e^{kx} peut s'écrire sous la forme $(e^k)^x = a^x$.
Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ky$ avec $y(0) = 1$, données par $f(x) = e^{kx}$, seront alors appelées fonctions exponentielles de base a , où $a = e^k$, généralisant la fonction exponentielle \exp .

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 3

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I ; comme $x \mapsto e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} , alors la fonction composée $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I (voir théorème 2 de la dérivée de la composée du chapitre 3) et sa fonction dérivée est $x \mapsto e^{u(x)} u'(x)$.

■ Théorème 4

1. La fonction $x \mapsto Ce^{kx}$, avec C constante réelle, est dérivable sur \mathbb{R} et admet pour dérivée $x \mapsto Cke^{kx}$; il s'agit donc bien d'une solution de l'équation différentielle $y' = ky$.

2. Réciproquement, considérons une fonction f solution de l'équation différentielle $y' = ky$ et posons, pour tout réel x , $g(x) = f(x)e^{-kx}$.

Alors, pour tout réel x :

$$g'(x) = f'(x)e^{-kx} + f(x)(-k)e^{-kx} \quad \text{c'est-à-dire} \quad g'(x) = e^{-kx}(f'(x) - kf(x)).$$

Or f étant une solution de $y' = ky$, nous avons, pour tout réel x , $f'(x) - kf(x) = 0$.

Nous en déduisons que, pour tout réel x , $g'(x) = 0$; **g est donc une fonction constante sur \mathbb{R} .**

Donc il existe un réel C tel que, pour tout réel x , $g(x) = C$ c'est-à-dire $f(x)e^{-kx} = C$.

En multipliant les deux membres de l'égalité par e^{kx} , on obtient $f(x) = Ce^{kx}$.

De 1 et 2, il résulte que :

Toute solution f de $y' = ky$ est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = Ce^{kx}$ où C est une constante réelle.

■ Théorème 5

• Soit f une solution de l'équation $y' = ky$, où k est un réel fixé. D'après le théorème 4, f est de la forme $x \mapsto Ce^{kx}$, avec C réel.

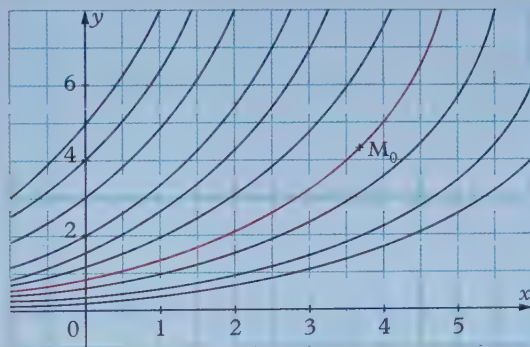
• Mais $f(x_0) = y_0$ équivaut à $Ce^{kx_0} = y_0$.

Ce qui revient, en multipliant les deux membres de l'égalité par e^{-kx_0} , à $C = y_0 e^{-kx_0}$.

Il en résulte qu'il existe une unique fonction f solution de $y' = ky$ et vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

C'est la fonction f définie dans \mathbb{R} par :

$$f(x) = y_0 e^{-kx_0} e^{kx} = y_0 e^{k(x-x_0)}.$$



→ APPLICATION

Exercice 3 Résoudre une équation $y' = ky$ avec condition initiale

Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ telle que $y(1) = 3$.

Solution

Les solutions de (E) : $y' = 2y$ sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = Ce^{2x}$ où C est une constante réelle.

Alors $f(1) = 3$ si et seulement si $Ce^2 = 3$ c'est-à-dire $C = \frac{3}{e^2} = 3e^{-2}$.

La solution cherchée est la fonction f telle que $f(x) = 3e^{-2}e^{2x}$, soit :

$$f(x) = 3e^{2x-2} \quad \text{pour tout } x \text{ réel.}$$

voir aussi exercices n° 43, 44

CD 1. Courbes à sous-tangente constante

OBJECTIF : Rechercher les fonctions dérivables dont la courbe représentative possède une certaine propriété géométrique.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} dont la dérivée f' ne s'annule pas sur I et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

En tout point M de (C) , d'abscisse m , on considère la tangente Δ_m en M à (C) .

Δ_m coupe l'axe des abscisses (Ox) en un point T .

Si l'on désigne par N le projeté orthogonal de M sur (Ox) , le segment $[TN]$ est appelé sous-tangente en M à la courbe (C) .

Il s'agit de déterminer les fonctions f dont la courbe représentative (C) admet des sous-tangentes $[TN]$ de longueur constante.

1. Justifier que Δ_m coupe l'axe (Ox) en un point T et que $T \neq N$.

2. Déterminer les coordonnées de T en fonction de m et montrer que $TN = \left| \frac{f(m)}{f'(m)} \right|$.

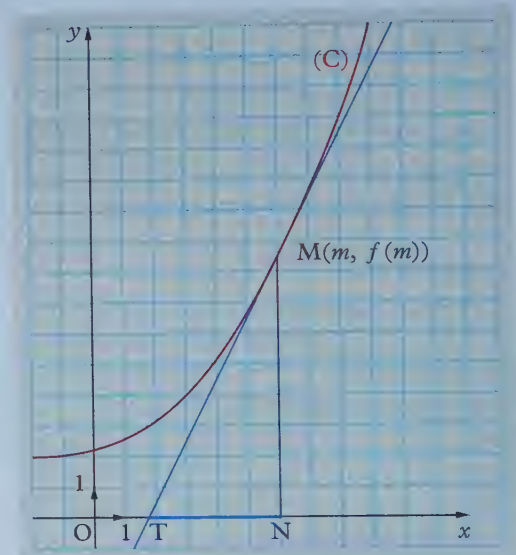
3. Soit k un réel strictement positif.

a. Montrer que :

$$TN = k \Leftrightarrow \left(f'(m) = \frac{1}{k} f(m) \text{ ou } f'(m) = -\frac{1}{k} f(m) \right).$$

b. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{k} y & (1) \\ y' = -\frac{1}{k} y & (2) \end{cases}$$



c. En déduire l'ensemble des fonctions dérivables dont la courbe représentative a des sous-tangentes de longueur constante k .

4. a. Montrer qu'il existe exactement deux fonctions f et g , dérivables sur \mathbb{R} , dont la courbe passe par le point $A(0 ; 1)$ et admet des sous-tangentes de longueur 2.

b. Construire ces deux courbes dans le même repère ainsi que quelques sous-tangentes et vérifier que la propriété géométrique évoquée est bien satisfaite.

Point Info

C'est par ce type de problème que Leibniz (1646-1716) a vu la nécessité d'introduire « le calcul différentiel » et qu'il inventa le calcul infinitésimal. En effet, le calcul algébrique ne permettait pas d'y apporter une réponse.



2. Encadrement de $x \mapsto e^x$ sur $] -\infty ; 0]$ et approximation de e

OBJECTIF : Établir et utiliser un encadrement de la fonction exponentielle par des fonctions polynômes.

A. ➔ Positions relatives de trois courbes

Le plan est rapporté à un repère orthogonal.

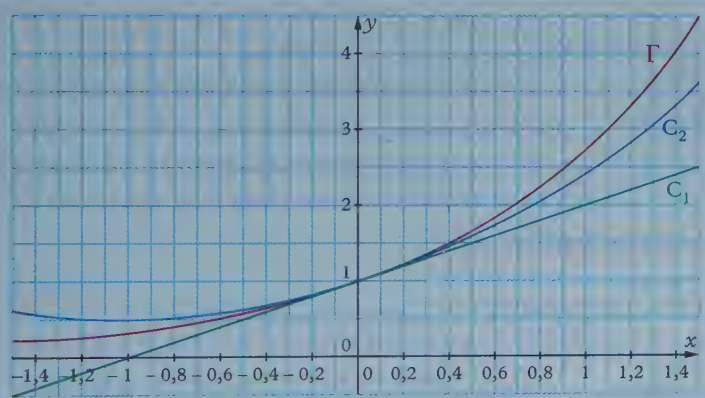
1. Étudier les variations de f_1 définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto e^x - (1 + x)$ puis en déduire son signe.

Procéder de même avec la fonction $f_2 : x \mapsto e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$.

2. En déduire que, pour tout réel $x \in] -\infty ; 0]$, $1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

3. Montrer que les courbes C_1 , Γ et C_2 , représentant respectivement les fonctions $x \mapsto 1 + x$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2}$, admettent la même tangente au point d'abscisse 0 (on dit qu'elles sont tangentes au point d'abscisse 0).

Sur la figure ci-dessous, on a construit C_1 , C_2 et Γ , en se limitant à l'intervalle $[-1,5 ; 1,5]$.



B. ➔ Amélioration de l'encadrement et approximation de e

1. À l'aide de nouvelles fonctions f_3, f_4, f_5 et f_6 bien choisies, établir, comme dans les questions A1 et A2, que, pour tout réel $x \in] -\infty ; 0]$, on a successivement :

$$\bullet 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!};$$

$$\bullet 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}.$$

2. En donnant à x une valeur particulière, donner un encadrement de $\frac{1}{e}$.

En déduire une valeur approchée de e à 10^{-2} près.

Point Info

Le nombre e , comme le nombre π , fait partie des constantes les plus célèbres des mathématiques. Ces nombres apparaissent dans la célèbre formule d'Euler, $e^{i\pi} = -1$, que l'on a désignée comme « la présence de la main de Dieu ».

Les nombres e et π ont en commun de ne pas être rationnels (ils ne peuvent pas s'écrire sous forme fractionnaire), mais aussi de n'être les racines d'aucun polynôme à coefficients entiers (on dit qu'ils sont transcendants).

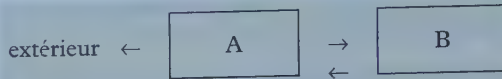
Ils se distinguent en cela du nombre $\sqrt{2}$, qui est également irrationnel mais qui n'est pas transcendant (il est en effet racine du polynôme $x^2 - 2$).

La transcendance du nombre e a été démontrée en 1872 par Charles Hermite et celle de π par Ferdinand Von Lindemann en 1882.

3. Changement de milieu

OBJECTIF : Mettre en œuvre des fonctions exponentielles et des équations différentielles dans un contexte de biochimie.

Deux milieux A et B sont séparés par une membrane poreuse. À l'instant $t = 0$, on injecte 10 cg d'une substance S dans le milieu A. Cette substance diffuse en permanence entre les deux milieux, une partie étant éliminée vers l'extérieur.



Le réel positif t désignant le temps exprimé en heures, on appelle $a(t)$ la quantité de substance S dans le milieu A à l'instant t et $b(t)$ la quantité de substance S dans le milieu B à l'instant t . On admet que les fonctions $a : t \mapsto a(t)$ et $b : t \mapsto b(t)$ sont définies et dérivables sur $[0 ; +\infty[$ et vérifient $a'(t) = -5a(t) + 2b(t)$ et $b'(t) = 2a(t) - 2b(t)$. De plus, on admet que $a(0) = 10$ et $b(0) = 0$.

A. ➔ Explicitation des fonctions « quantité de substance »

On considère les fonctions u et v définies sur $[0 ; +\infty[$ respectivement par :

$$u(t) = a(t) + 2b(t) \quad \text{et} \quad v(t) = -2a(t) + b(t).$$

1. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
2. Montrer que u et v sont respectivement solutions de $y' = -y$ et $y' = -6y$.
3. Résoudre ces équations différentielles sur $[0 ; +\infty[$ et déterminer les expressions des fonctions u et v , en tenant compte des conditions initiales.
4. En déduire que $a(t) = 2(4e^{-6t} + e^{-t})$ et $b(t) = 4(e^{-t} - e^{-6t})$.

B. ➔ Étude comparée des quantités de substance

1. Déterminer les limites des fonctions a et b en $+\infty$. Interpréter.
2. Calculer $a'(t)$ pour $t \geq 0$ et en déduire les variations de la fonction a .
3. Calculer $b'(t)$ pour $t \geq 0$ et montrer que $b'(t)$ est du signe de $f(t) = 6 - e^{5t}$. Étudier les variations de f et prouver que l'équation $f(t) = 0$ admet une solution unique t_0 dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près. En déduire le signe de $f(t)$ puis les variations de b .
4. Prouver que c'est à l'instant t_0 , et à cet instant seulement, que les quantités de substance des milieux A et B sont égales.
5. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant au dixième le plus proche.

t	0	0,1	0,2	t_0	0,5	0,6	0,7	1	2
$a(t)$									
$b(t)$									

6. Construire dans un repère orthogonal, d'unités graphiques 10 cm pour 1 h en abscisse et 1 cm pour 1 cg en ordonnée, les courbes des restrictions de a et b à l'intervalle $[0 ; 2]$.
7. Commenter l'évolution des quantités de substance des milieux A et B en fonction du temps.

EXERCICES RÉSOUS

1 Tangentes aux courbes des fonctions \exp et $\frac{1}{\exp}$

1. Soit C_1 et C_2 les courbes d'équations $y = e^x$ et $y = \frac{1}{e^x}$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Justifier qu'elles sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et les construire.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On désigne respectivement par M_a et N_a les points de C_1 et de C_2 d'abscisse a , et par (T_a) et (T'_a) les tangentes à C_1 et à C_2 en M_a et N_a .
- a. Construire les tangentes (T_0) et (T'_0) , puis (T_1) et (T'_1) . Que peut-on conjecturer ?
- b. Prouver, dans le cas général, que les droites (T_a) et (T'_a) sont perpendiculaires.
3. Les droites (T_a) et (T'_a) coupent respectivement l'axe des abscisses en P_a et Q_a .
- a. Déterminer le milieu I_a du segment $[P_a Q_a]$ et calculer la longueur du segment $[P_a Q_a]$.
- b. En déduire une méthode de construction des tangentes à C_1 et C_2 en M_a et N_a .

Solution

1. Comme, pour tout réel x , on a $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$, les courbes C_1 et C_2 ont respectivement pour équations $y = e^x = \exp x$ et $y = e^{-x} = \exp(-x)$. Ces courbes sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : C_1 est une courbe de référence ; C_2 s'en déduit par symétrie.

2. a. Les tangentes (T_0) et (T'_0) , d'une part, et les tangentes (T_1) et (T'_1) , d'autre part (voir figure), paraissent perpendiculaires.

b. (T_a) et (T'_a) sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur directeur de l'une et un vecteur directeur de l'autre sont orthogonaux. Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ ayant pour dérivées $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -e^{-x}$, (T_a) et (T'_a) ont respectivement pour coefficients directeurs e^a et $-e^{-a}$. Ainsi $\vec{u}(1 ; e^a)$ est un vecteur directeur de (T_a) et $\vec{v}(1 ; -e^{-a})$ est un vecteur directeur de (T'_a) . Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + e^a \times (-e^{-a}) = 1 - 1 = 0$, (T_a) et (T'_a) sont orthogonales.

3. a. Une équation de (T_a) est $y = e^a(x - a) + e^a$ et une équation de (T'_a) est $y = -e^{-a}(x - a) + e^{-a}$.

- L'abscisse x de P_a vérifie $e^a(x - a) + e^a = 0$ soit encore $e^a(x - a + 1) = 0$; e^a étant non nul, $x = a - 1$.
- L'abscisse x de Q_a vérifie $-e^{-a}(x - a) + e^{-a} = 0$ soit encore $e^{-a}(-x + a + 1) = 0$; e^{-a} étant non nul, $x = a + 1$.

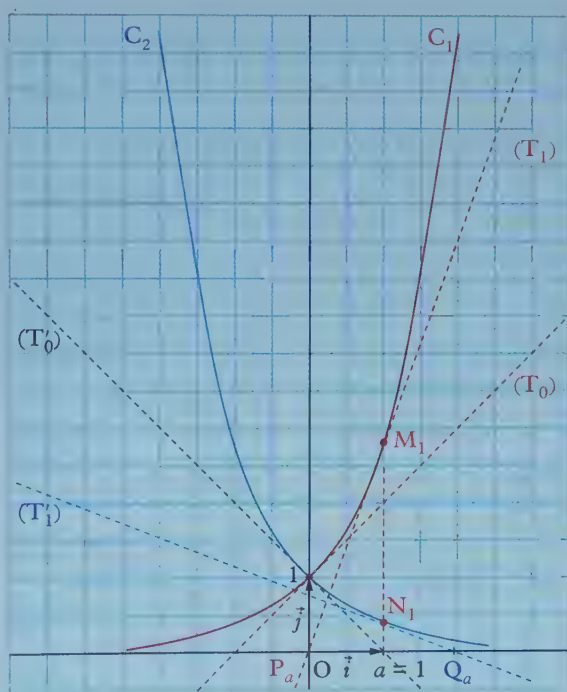
En conclusion, on a $P_a(a - 1 ; 0)$ et $Q_a(a + 1 ; 0)$. D'où les coordonnées du milieu I_a de $[P_a Q_a]$:

$$\left(\frac{a - 1 + a + 1}{2} ; 0 \right) \text{ soit encore } (a ; 0).$$

De plus, $P_a Q_a = |(a + 1) - (a - 1)| = 2$. La longueur du segment $[P_a Q_a]$ est donc constante.

b. On déduit des résultats précédents la démarche de construction suivante.

- Sur la droite d'équation $x = a$, on dispose des points M_a , N_a et I_a . I_a étant le milieu de $[P_a Q_a]$ et $P_a Q_a$ ayant pour longueur 2, on peut construire sur l'axe des abscisses les points P_a et Q_a tels que $\vec{P_a I_a} = \vec{I_a Q_a} = \vec{i}$.
- Les tangentes cherchées sont alors les droites $(P_a M_a)$ et $(Q_a N_a)$.



voir aussi exercices n° 34, 40

2 Des fonctions associées

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{P} par $f(x) = xe^x$ et $g(x) = \frac{x}{e^x}$.

On désigne respectivement par C et C' leurs courbes représentatives dans le plan muni du repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Calculer les limites des fonctions f et g en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Étudier le sens de variation de chaque fonction. Préciser leur tangente en O .
- Prouver que C et C' admettent une tangente commune Δ en O .
- Construire C , Δ et C' . Quelle conjecture peut-on faire sur C et C' ?
- Justifier algébriquement la propriété observée.

Solution

1. • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donnent $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (propriété 2) donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (propriété 2).

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$ par théorème d'opération (car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$).

2. f et g sont dérivables sur \mathbb{R} comme produit et quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R} (avec $e^x \neq 0$).
 $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$ et, en écrivant $g(x) = xe^{-x}$, on a :

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x).$$

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , $f'(x)$ et $g'(x)$ sont respectivement du signe de $1+x$ et $1-x$. Il en résulte les tableaux de variation suivants.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f	0	\searrow $-\frac{1}{e}$	\nearrow $+\infty$

x	$-\infty$	$+1$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$
g	$-\infty$	\nearrow $\frac{1}{e}$	\searrow 0

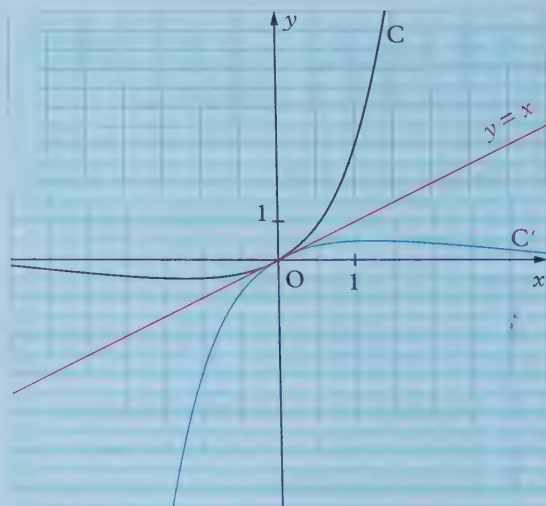
3. Comme $f(0) = g(0) = 0$ et $f'(0) = g'(0) = 1$, C et C' admettent pour tangente en O la même droite Δ d'équation $y = x$.

4. Tracé des courbes et conjecture : C et C' semblent symétriques par rapport à O .

5. La courbe C ayant pour équation $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, on sait que la courbe $S_O(C)$ symétrique de C par rapport à l'origine du repère a pour équation $y = -f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Pour prouver que $S_O(C) = C'$, il suffit donc d'établir, pour tout réel x $g(x) = -f(-x)$.

Or $-f(-x) = -(-xe^{-x}) = xe^{-x} = g(x)$, ce qui prouve la symétrie des courbes C et C' par rapport à O .



voir aussi exercices n° 36, 83

→ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Courbes associées

- 1** 1. Représenter graphiquement la fonction exponentielle dans un repère orthonormal.
 2. Utiliser la courbe C obtenue en 1 pour construire celle de chacune des fonctions suivantes :
- a. $f(x) = e^{-x}$; b. $g(x) = 1 - e^x$;
 c. $h(x) = e^{|x|}$; d. $k(x) = e^{x-1}$.

Propriétés algébriques

Dans les exercices 2 à 5, simplifier les expressions données.

- 2** a. $\exp(3) \cdot \exp(2)$; b. $\exp(2) \cdot \exp(-2)$;
 c. $\frac{\exp(x)}{\exp(3x)}$; d. $(\exp(x))^3$.
- 3** Simplifier les expressions suivantes, pour $x \in \mathbb{R}$:
- a. $(\exp(x))^5 \cdot (\exp(-2x))^2$;
 b. $\exp(-3x+1) \cdot (\exp(x))^3$.
- 4** a. $e^{-3} \times e^4$; b. $e^5 \times e^{-5}$; c. $(e^2)^3 \times e$.
- 5** a. $\frac{e^{-4x}e}{(e^{-x})^2}$; b. $(e^x - e^{-x})^2 - e^{-x}(e^{3x} + e^{-x})$.
- 6** Établir, pour $x \in \mathbb{R}$, les égalités suivantes :
- a. $\frac{1 - e^x}{e^{2x}} = e^{-2x} - e^{-x}$; b. $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.
- 7** Vérifier que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ est constante.

- 8** Vérifier que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est impaire, comparer $g'(x)$ et $1 - g^2(x)$.

- 9 avec ROC** On rappelle que la fonction exponentielle, notée \exp , a les trois propriétés suivantes :
- \exp est une fonction dérivable sur \mathbb{R} ;
 - sa fonction dérivée, notée \exp' , est telle que, pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$;
 - $\exp(0) = 1$.
- En n'utilisant que ces trois propriétés de la fonction \exp , démontrer successivement que :
- pour tout nombre réel x , $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$;
 - pour tout nombre réel a et tout nombre réel b , $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$.

Équations, inéquations et systèmes

Dans les exercices 10 à 22, résoudre sur \mathbb{R} les équations ou inéquations données.

- 10** a. $\exp(x) = e$; b. $\exp(x) = 1$;
 c. $\exp(x) = -2$.
- 11** a. $\exp(-x) = 0$; b. $\exp(-x) = 1$;
 c. $\exp(-x) = e$.
- 12** a. $e^{2x-1} = e^3$; b. $e^{x^2} = 1$;
 c. $e^{4x-1} = \frac{1}{e}$.
- 13** a. $e^x - e^{-x} = 0$; b. $e^x + e^{-x} = 0$.
- 14** a. $e^{-x+4} = (e^{-x})^4$; b. $e^{x^2-4} = (e^x+2)^2$.
- 15** $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ (on pourra poser $X = e^x$).
- 16** $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$.
- 17** $e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0$.
- 18** a. $e^{\frac{x}{2}} < e$; b. $e^{-x} > 1$.
- 19** a. $e^{-x+5} > e^x$; b. $e^{x^2} \leq (e^x)^2$.
- 20** $e^{2x} + 3e^x - 4 > 0$ (on pourra poser $X = e^x$).
- 21** $e^{2x} - (1+e)e^x + e \geq 0$.
- 22** $e^x + e^{-x} \geq 2$.

23 avec ROC 1. Question de cours
 La fonction exponentielle est la fonction dérivable sur \mathbb{R} , solution de l'équation différentielle $y' = y$, telle que $\exp(0) = 1$. On sait de plus que, pour tout

x réel, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

- a. Démontrer que pour tous x, y réels :
- $$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Pour cela, on pourra introduire la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \exp(x+y) \cdot \exp(-x)$.

- b. En déduire que, pour tout x réel :
- $$(\exp(x))^2 = \exp(2x).$$

2. Application

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $e^{2x} + e^x - 2 = 0$.

EXERCICES

Limites et asymptotes

Pour les exercices 24 à 31, calculer les limites et interpréter graphiquement.

✓ 24 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1}$; b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1}$.

✓ 25 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$; b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x}$.

✓ 26 a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x}$; b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x}$.

27 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-x+1}$;

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-x+1}$.

✗ 28 a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{x}$; b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-e^x}{x}$;

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^x}{x}$.

✗ 29 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x + 1$; b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x + 1$
(que peut-on dire de la droite $D : y = x - 1$?).

✓ 30 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 5e^x + 1$;

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 5e^x + 1$.

✗ 31 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$; b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$.

Études de fonctions

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

✗ 32 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (e^x - 1)^2$ et C sa courbe représentative.

- Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.
- Étudier les variations de f et construire C .

✗ 33 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$.

- Calculer les limites de f aux bornes de $E = \mathbb{R}^*$ et en déduire l'existence de trois asymptotes à $C : y = f(x)$.
- Étudier les variations de f et tracer C .

34 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + e^{-x}$.

- a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Prouver que la courbe C qui représente f admet une asymptote D et préciser leur position relative.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (on pourra mettre e^{-x} en facteur).

- Étudier les variations de f .
- Construire C et D .

35 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + \frac{1-e^x}{1+e^x}$ et on désigne par C sa courbe représentative (unité graphique : 2 cm).

- Montrer que cette fonction est impaire.
- Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}.$$

- Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- Prouver que les droites $D : y = x + 1$ et $D' : y = x - 1$ sont asymptotes à la courbe C .
- Étudier les variations de la fonction f .
- Tracer la courbe C .

✗ 36 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ et C sa courbe représentative.

- Justifier que, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.
- Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, et interpréter graphiquement.
- Étudier les variations de f et tracer C .
- Prouver que $I\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de C .
- Déterminer une équation de la tangente T à C en I .

6. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$.

a. Prouver que $\varphi'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{4(e^x + 1)^2}$.

b. Donner le sens de variation de φ .

c. Calculer $\varphi(0)$ et en déduire le signe de $\varphi(x)$. Quelle interprétation graphique du signe de φ peut-on donner à l'aide de C et T ?

37 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1}.$$

Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

38 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 e^{-x}$ et C sa courbe représentative.

- a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = 4 \left\{ \frac{x}{2} \right\}^2 \left\{ \frac{x}{2} \right\}$ et

en déduire la limite en $+\infty$ de f .

- Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f .
- Tracer C .

39 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$.

- Justifier que la fonction f est bien définie sur \mathbb{R} . On pourra argumenter graphiquement en supposant connue la position relative des courbes représentant les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$.
- Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement.
- Étudier les variations de f et construire C .

40 1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E) : $e^x - e^{-x} = 0$ et étudier le signe de $D(x) = e^x - e^{-x}$.

2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

- Prouver que f est impaire.
- Dans la suite de l'exercice, on étudie f sur $]0; +\infty[$. Calculer la limite de f en 0^+ .
- Prouver que, pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
- Justifier que C admet trois asymptotes et construire C .

Équations différentielles

41 Méthode d'Euler

On cherche une fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(x)$ et $f(0) = 1$.

En appliquant la méthode d'Euler à partir du point $A(0; 1)$, avec un pas de 0,5, quelles valeurs approchées de $f(0,5)$, $f(1)$, $f(1,5)$ et $f(2)$ obtient-on ?

42 Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

- $y' = -2y$;
- $y' - y = 0$;
- $2y' - 3y = 0$;
- $y = -2y'$.

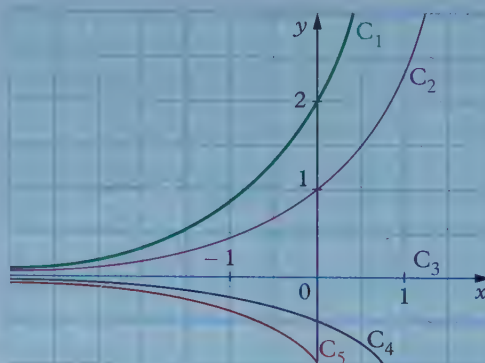
43 Déterminer dans chaque cas une équation différentielle de type $y' = ay$, avec a réel, admettant f pour solution.

- $f(x) = -2e^{3x}$;
- $f(x) = 3e^{-0,4x}$.

44 Les équations suivantes comportent une condition initiale. Les résoudre sur \mathbb{R} en s'efforçant d'écrire leur solution f sous une forme simple.

- $y' + 2y = 0$ et $f(0) = -1$;
- $y' = y$ et $f(0) = e$;
- $2y' + 3y = 0$ et $f(2) = 1$;
- $2y - 5y' = 0$ et $f(-1) = e^{0,6}$.

45 On a construit dans un même repère les courbes représentatives de quelques solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = y$.



- Donner toutes les solutions sur \mathbb{R} de l'équation (E).
- Quelles sont les cinq solutions de (E) représentées ci-dessus ?

46 vu au BAC Exercice guidé

On considère l'équation différentielle :

$$y' - 2y = e^{2x} \quad (E).$$

- Démontrer que la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).
- Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ (E_0).
- Démontrer qu'une fonction v définie sur \mathbb{R} est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
- En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
- Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.
- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x + 1)e^{2x}$. On note C la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
 - Tracer C .

1. Il s'agit de vérifier que u est dérivable sur \mathbb{R} et que, pour tout x réel, $u'(x) - 2u(x) = e^{2x}$.

3. Attention, il s'agit de démontrer une équivalence !

Dire que, $(v - u)$ est solution de (E_0), c'est dire que $(v - u)'(x) - (v - u)(x) = 0$ pour tout x réel, c'est-à-dire $v'(x) - u'(x) - v(x) + u(x) = 0$.

On se rappellera que u est solution de (E_0) c'est-à-dire que $u'(x) - u(x) = \dots$

4. Il faut faire la synthèse des questions 2 et 3 : les solutions de (E) sont les fonctions v telles que $v - u$ soit une solution de (E_0), c'est-à-dire par la question 2, $v(x) - u(x) = \dots$.
Connaissant $u(x)$, on trouve $v(x)$.

EXERCICES

47 1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2e^{-x} + \frac{1}{2}(x+1).$$

Calculer $f'(x) + f(x)$ et en déduire une équation différentielle de la forme $y' + y = ax + b$ dont f est solution.

2. On se propose de trouver toutes les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' + y = \frac{1}{2}x + 1$.

a. Prouver que la fonction affine $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2}(x+1)$ est une solution de (E).

b. Prouver qu'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} est solution de (E) **si et seulement si** la fonction $f - \varphi$ est solution de l'équation (E') : $y' + y = 0$.

c. Résoudre l'équation (E') et en déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Applications

48 vu au BAC On admet que la charge q d'un condensateur est donnée, en fonction du temps t exprimé en secondes ($t \geq 0$), par $q(t) = 6(1 - e^{-0,2t})$.

1. Démontrer que la fonction q est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ (le condensateur se charge).

2. Calculer la limite Q de la fonction q lorsque t tend vers $+\infty$ (Q étant la charge maximale du condensateur).

3. a. Tracer la représentation graphique C de la fonction q dans un plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm).

b. Justifier qu'il existe un instant t_0 unique tel que $q(t_0) = 5,7$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

c. Au bout de combien de secondes la charge du condensateur sera-t-elle supérieure à 5,7 ?

49 vu au BAC Dans un laboratoire agroalimentaire, une population de bactéries évolue selon le modèle défini par la fonction P d'expression :

$$P(t) = 300e^{0,12t}$$

où t est exprimé en jours et compris dans l'intervalle $[0 ; 28]$.

1. Étudier les variations de P sur $[0 ; 28]$ et tracer la courbe représentative de P dans le plan rapporté à un repère orthogonal avec l'échelle suivante :

- sur l'axe des abscisses, 1 cm représente deux jours ;
- sur l'axe des ordonnées, 1 cm représente 500 bactéries.

2. Le service d'hygiène doit intervenir lorsque le nombre de bactéries dépasse 5 000.

a. Déterminer graphiquement au bout de combien de jours il devra intervenir.

b. Déterminer ce nombre de jours en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et en donnant une valeur approchée arrondie à l'unité inférieure.

50 Une décroissance radioactive

Les noyaux radioactifs sont des noyaux instables ; ils se désintègrent spontanément.

On souhaite étudier l'évolution au cours du temps d'une population de noyaux d'iode 131 comportant à $t=0$, début de l'observation, $N_0 = 10^{11}$ noyaux. Au temps t , exprimé en jours, on note $N(t)$ le nombre de noyaux observés.

Première étape : expérimenter en physique

En mesurant le nombre de désintégrations entre les instants t et $t + \Delta t$, on se rend compte que ce nombre fluctue d'une expérimentation à l'autre, mais que, en moyenne, pour de petits intervalles de temps Δt , le rapport $\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t) \times \Delta t}$ semble constant.

Seconde étape : modéliser

Pour modéliser cette situation, on fait l'hypothèse que, pour de petits intervalles de temps Δt :

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t) \times \Delta t} = -\lambda$$

où λ est une constante réelle.

On cherche donc une fonction N , dérivable sur $[0 ; +\infty[$ satisfaisant cette condition.

Partie A. Vers une équation différentielle

1. De la situation physique étudiée, déduire le signe de λ (λ est appelée constante de radioactivité).

2. a. Montrer que l'hypothèse faite équivaut à la relation $N(t + \Delta t) - N(t) = -\lambda N(t) \times \Delta t$.

(On dit que le nombre de désintégrations entre deux instants est proportionnel au nombre de noyaux et à la durée.)

b. En déduire $\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}$.

3. Faisons tendre l'accroissement Δt vers 0.

a. Donner les limites de $\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}$ et de $-\lambda N(t)$.

b. En déduire que N vérifie la relation :

$$N'(t) = -\lambda N(t).$$

Partie B. Expression du nombre de noyaux

1. a. Résoudre l'équation $y' = -\lambda y$.

b. Expliciter $N(t)$ en fonction de t et de λ .

2. Soit Γ la courbe représentant la fonction N dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Sachant que pour l'iode 131, $\lambda \approx 0,086$ jours⁻¹, représenter Γ sur $[0 ; 60]$.

3. Estimer le nombre de noyaux au bout d'un an. Quel commentaire peut-on faire ?

Point Info

L'iode 131 est très utilisé à petites doses en médecine où il sert d'abord à l'étude du fonctionnement de la thyroïde, puis au traitement des hyperthyroïdies et des cancers de la thyroïde.

51 Un corps radioactif se désintègre en transformant une partie de ses noyaux. On désigne par $N(t)$ le nombre de noyaux (ou atomes) à l'instant t (t est le temps exprimé en jours).

On peut établir (voir l'activité 1 de ce chapitre) que la fonction N est solution de l'équation différentielle :

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

où λ est un réel positif appelé **constante radioactive du corps**.

1. Soit N_0 le nombre de noyaux à l'instant $t=0$. Déterminer $N(t)$ en fonction de N_0 , λ et t .

2. On appelle **période** ou **demi-vie** du corps radioactif le temps T au bout duquel le nombre d'atomes de ce corps a diminué de moitié.

a. Prouver que $e^{\lambda T} = 2$.

b. Justifier qu'il existe un nombre réel unique α tel que $e^\alpha = 2$.

À l'aide de la fonction *Table* de la calculatrice, donner un encadrement de α de longueur 10^{-3} .

c. Dédurre de a et b l'approximation $\lambda T \approx 0,693$.

d. Déterminer la constante radioactive de l'iode 131 sachant que sa période est de 8,06 jours. Déterminer la période du stentium 90 sachant que sa constante radioactive est de $6,66 \times 10^{-5}$.

52 Méthode d'Euler

Un ballon stratosphérique est constitué d'une enveloppe gonflée d'un certain volume d'hélium, d'une nacelle et de divers capteurs et instruments permettant de transmettre au sol les mesures effectuées. L'ensemble a pour masse m .

On se place dans un référentiel terrestre où l'on considère un axe (Oz) vertical, orienté vers le haut. L'origine O représente la position du bas de la nacelle à l'instant $t=0$, instant auquel on lâche le ballon sans vitesse initiale.

Le temps t est exprimé en secondes et les distances en mètres.

On nomme $v_z(t)$ la composante de la vitesse sur l'axe (Oz) , c'est-à-dire la vitesse ascensionnelle du ballon, à l'instant t ($t \geq 0$).

Modélisation

En faisant différentes hypothèses, on peut modéliser la force de frottement \vec{F}_R de l'air sur l'enveloppe par $F_R = kv^2$ où k est un coefficient qui dépend du ballon.

Le bilan des forces projeté sur l'axe (Oz) permet d'obtenir la relation :

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{k}{m} v_z^2 + \left(\frac{\rho_0 V}{m} - 1\right) g_0$$

où V désigne le volume de l'enveloppe, supposée sphérique de rayon r , et ρ_0 la masse volumique de l'air.

On prendra pour l'application numérique :

$$g_0 \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad \rho_0 = 1,22 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \\ m = 8,00 \text{ kg}, \quad r = 1,30 \text{ m} \text{ et } k = 2,91 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}.$$

1. Écrire une équation différentielle dont v_z est solution.

2. On utilise maintenant la méthode d'Euler avec un pas de 0,25 s.

a. Montrer que l'approximation affine de v_z à l'instant t est :

$$v_z(t + \Delta t) \approx v_z(t) + \left(-\frac{k}{m} v_z^2 + \left(\frac{\rho_0 V}{m} - 1\right) g_0\right) \Delta t.$$

b. On appelle v_n la vitesse à l'instant :

$$t = n \times 0,25 \text{ secondes.}$$

Montrer que $v_{n+1} \approx v_n - 0,091 v_n^2 + 0,99$.

c. Représenter par une courbe approchée l'évolution de la vitesse v_z en fonction du temps pour $0 \leq t \leq 3$.

d. Estimer une valeur approchée de la « vitesse limite » du ballon.

Remarque : Pour effectuer cette modélisation, on a, par exemple, supposé que le volume de l'enveloppe était constant.

En fait, ce volume augmente avec l'altitude, suite à la baisse de pression atmosphérique ; de même d'autres paramètres supposés constants ici sont modifiés avec l'élévation du ballon, et ce modèle doit donc être modifié au bout d'un certain temps, le ballon finissant même par exploser à une altitude comprise entre 20 et 30 km...



Suite et exponentielle

53 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \text{pour tout } n \geq 0, \quad u_{n+1} = 2 - e^{-u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que cette suite est définie et la représenter graphiquement.

2. Montrer que cette suite est bornée.

3. Montrer qu'elle est monotone.

→ Que sais-je ?

Vrai ou faux ?

On justifiera les réponses données aux exercices.

54 Pour tout x réel,

$$e^{2x}(e^x - 1)^2 - (e^{2x} - e^x)^2 = 0.$$

55 $\frac{e^x}{e^{-x}} = (e^x)^2.$ **56** $\exp(0,5) = \frac{e}{2}.$

57 Pour tout réel a , $e^a = \sqrt{e^{2a}}.$

58 La droite d'équation $y = x - 1$ est une tangente à la courbe C de la fonction $x \mapsto e^{-x}.$

59 Ce raisonnement est juste : « Comme $e^x > 0$ pour tout x réel, on a $e^{-x} > 0$ pour tout x réel. »

60 Soit f la solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 1.$ En approchant f par la méthode d'Euler à partir de $x = 0$, avec un pas de $0,5$, on obtient 16 pour valeur approchée de $f(2).$

61 $x \mapsto e^{-x}$ est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = -y$ prenant la valeur 1 en $0.$

62 La solution de l'équation différentielle $y' = -3y$, vérifiant $y(2) = 1$, est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{6-3x}.$

63 Toute solution f , définie sur \mathbb{R} , de l'équation différentielle $y' = ky$, où k est une constante réelle, est telle que pour tout réel a et tout réel b :

$$f(a+b) = f(a)f(b).$$

64 La fonction f définie par $f(t) = 2(1 - 2e^{-3t})$, pour tout t de \mathbb{R} , est solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 6.$

65 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-2} = +\infty.$

66 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = -\infty.$

67 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{2x^2 - 3} = +\infty.$

68 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2.$

69 Le raisonnement suivant est juste :
 « Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 3) = -\infty$, et $e^{-x} > 0$ pour tout x réel, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 3)e^{-x} = -\infty. »$$

QCM

Dans les exercices 70 à 73, choisir la ou les réponses justes.

70 Soit f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- A. g est impaire.
- B. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -f(-x).$
- C. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + f(x) > 0.$
- D. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 - g(x)^2 = 1.$
- E. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2f(x)g(x) = g(2x).$

Source : ESIEE 2001.

71 Un peu de logique

- A. Il existe un réel x tel que $e^x + e^{-x} \geq 2.$
- B. Pour tout réel x , $e^x + e^{-x} \geq 2.$
- C. Il existe un réel x tel que $e^x + e^{-x} < 2.$
- D. Pour tout réel $x > 0$, $e^{-x} - e^x < 0.$

72 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}.$$

- A. f est impaire.
- B. $f(x) = 1 - \frac{2}{1 + e^{-2x}}$ pour tout x réel.

C. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 - e^{-\frac{x}{2}}}{1 + e^{-\frac{x}{2}}}$ pour tout x réel.

D. Dans un repère du plan, la courbe C représentant la fonction f admet une unique tangente de coefficient directeur $-1.$

73 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x}, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \cos x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On appelle C sa courbe représentative dans un repère du plan. Soit Γ la représentation graphique de la fonction exponentielle ($x \mapsto e^x$) dans le même repère.

- A. Dans la portion de plan correspondant aux points d'abscisse négatives, C est l'image de Γ par la symétrie axiale dont l'axe de symétrie est l'axe des abscisses.
- B. f est continue en $0.$
- C. f est dérivable en $0.$
- D. L'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $[0 ; \pi].$

Source : concours FESIC.

→ Un sujet vu au BAC (extrait)

74 On désigne par f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et par f' sa fonction dérivée.

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

- (1) pour tout nombre réel x , $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$;
- (2) $f'(0) = 1$;
- (3) la fonction f' est dérivable sur \mathbb{R} .

1. a. Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) \neq 0$.

b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) pour tout nombre réel x , $f''(x) = f(x)$, avec f'' la fonction dérivée seconde de f .

3. On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

c. En déduire les fonctions u et v .

d. En déduire que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

La Réunion, juin 2004.

Solution

1. a. Par (1), $[f'(x)]^2 = 1 + [f(x)]^2$ donc $[f'(x)]^2 \geq 1$ pour tout réel x et, par conséquent, **$f'(x) \neq 0$ pour tout x réel.**

b. On applique la relation (1) vraie pour tout réel x , à $x = 0$:

$$[f'(0)]^2 - [f(0)]^2 = 1.$$

Par (2), on déduit que $[f(0)]^2 = 0$, soit **$f(0) = 0$.**

2. Les fonctions f et f' étant supposées dérivables sur \mathbb{R} , la fonction g qui à x associe $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2$ est aussi dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = 2f'(x)f''(x) - 2f'(x)f(x)$.

Or par (1), $g(x) = 1$ pour tout x réel, donc $g'(x) = 0$, c'est-à-dire :
pour tout réel x , $2f'(x)[f''(x) - f(x)] = 0$.

Comme d'après **1a**, pour tout x , $f'(x) \neq 0$, nous en déduisons :
pour tout réel x , $f''(x) - f(x) = 0$, soit **$f''(x) = f(x)$ pour tout x .**

3. a. $u(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 1$; $v(0) = f'(0) - f(0) = 1$.

b. Les fonctions u et v sont dérivables sur \mathbb{R} .

• Pour tout réel x , $u'(x) = f''(x) + f'(x)$ soit $u'(x) = f(x) + f'(x)$ d'après **2**.

Ainsi, pour tout x réel, $u'(x) = f(x) + f'(x)$, c'est-à-dire **$u = u'$.**

• De même, pour tout réel x , $v'(x) = f''(x) - f'(x) = f(x) - f'(x)$ d'où $v'(x) = -(f'(x) - f(x)) = -v(x)$. On a donc **$v' = -v$.**

c. • $u' = u$ et $u(0) = 1$, donc u est la solution de l'équation différentielle $y' = y$ prenant la valeur 1 en 0. Par définition, **$u = \exp$.**

• $v' = -v$ et $v(0) = 1$, donc v est la solution de l'équation différentielle $y' = -y$ prenant la valeur 1 en 0. Les solutions de l'équation différentielle $y' = -y$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} et de la forme $x \mapsto Ce^{-x}$, avec C constante réelle. Celle qui prend la valeur 1 en 0 est telle que $Ce^0 = 1$, soit $C = 1$.

Il en résulte que v est la fonction définie sur \mathbb{R} par **$v(x) = e^{-x}$.**

4. Pour tout réel x , $u(x) - v(x) = 2f(x)$.

On en déduit que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{u(x) - v(x)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Le jour du BAC

Question 2 : Pour comprendre l'indication donnée par l'énoncé, il faut interpréter l'égalité (1) en termes de fonction : la fonction qui à x associe $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2$ est la fonction constante égale à 1. Ces deux fonctions ont donc la même dérivée.

Question 3 : Penser à interpréter une relation entre une fonction et sa dérivée en termes d'équation différentielle : par exemple, dire que $v' = -v$ signifie que v est une solution de l'équation différentielle $y' = -y$.

Question 4 : Si on connaît la somme $S = a + b$ et la différence $D = a - b$ de deux nombres a et b , on peut trouver chacun de ces deux nombres ; il suffit d'utiliser les relations $S + D = 2a$ et $S - D = 2b$. Le même principe est utilisé ici pour trouver f .

→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

75 Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivants :

a.
$$\begin{cases} e^{x-y} = e \\ \frac{e^{2y}}{e^x} = \frac{1}{e^3} \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} e^{x+1} - e^{-y} = 0 \\ e^x + e^{-y-1} = 2 \end{cases} \quad (\text{on posera } e^x = X \text{ et } e^{-y} = Y).$$

Continuité et dérivabilité

76 Étudier la continuité et la dérivabilité en zéro des fonctions suivantes et interpréter graphiquement.

a. f définie sur $[0 ; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

b. h définie sur \mathbb{R} par
$$\begin{cases} h(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

77 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Soit $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, la dérivée $k^{\text{ième}}$ de f , on pose $f^{(0)} = f$.

1. Montrer que $f^{(k)}(x) = H_k(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, pour tout réel x , où H_k est un polynôme de degré k de même parité que k et vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout réel } x, H_{k+1}(x) = H'_k(x) - xH_k(x).$$

Les polynômes H_k portent le nom de polynôme de Hermite. *Charles Hermite est un mathématicien français (1822-1901).*

2. Montrer par récurrence que pour tout n dans \mathbb{N} :

$$H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0.$$

Études de fonctions

78 vu au BAC Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On suppose que pour tout réel x :

$$-f(x) \leq f'(x) \leq f(x).$$

On désigne par g et h les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = e^x f(x) \text{ et } h(x) = e^{-x} f(x).$$

1. Montrer que g et h sont dérivables sur \mathbb{R} et déterminer leurs fonctions dérivées.

2. Montrer que g est une fonction croissante et que h est une fonction décroissante sur \mathbb{R} .

3. Dédire que, si $f(0) = 0$, alors pour tout réel x : $f(x) = 0$.

79 vu au BAC 1. Étudier la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 1 - e^x$.

Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormal et préciser l'asymptote oblique.

2. Soit λ un nombre réel et la fonction f_λ définie sur \mathbb{R} par $f_\lambda(x) = \lambda(x+1) - e^x$.

a. On note Γ_λ la courbe représentative de f_λ . Trouver l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles f_λ admet un maximum.

b. Soit M_λ le point d'ordonnée maximale de Γ_λ . Donner une équation de l'ensemble des points M_λ .

80 Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Prouver que f est continue et dérivable en 0. Interpréter graphiquement.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$.

En déduire que la courbe représentative C de f admet une asymptote D . On écrira :

$$xe^{\frac{1}{x}} - x = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}.$$

Justifier que C et D n'ont aucun point commun.

3. Construire C et D dans un repère orthonormal.

81 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{\cos x}$.

1. Justifier que f est paire et périodique de période 2π . En déduire qu'il suffit d'étudier et de représenter f en se limitant à l'intervalle $I = [0 ; \pi]$.

2. Dédire le sens de variation de f sur I de ceux des fonctions \cos et \exp ; en dresser le tableau.

3. Calculer la dérivée de f et retrouver les résultats de la question 2. Préciser de plus en quels points la courbe C_1 qui représente f sur I admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

4. Construire C_1 et en déduire la courbe de f sur l'intervalle $[-\pi ; 3\pi]$.

→ PROBLÈMES

82 vu au BAC

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 8,25te^{-t}$. On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C ?
2. Étudier les variations de f .
3. Recopier et compléter le tableau suivant (on donnera pour $f(t)$ des valeurs arrondies à 10^{-2} près).

t	0	0,15	0,5	0,75	1	1,25	2	3	3,5	4
$f(t)$										

4. Construire C ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

Partie B

Un médicament est injecté par voie intramusculaire. Il passe du muscle au sang puis est éliminé par les reins. La quantité de médicament présente dans le sang, (exprimée en cg) en fonction du temps (exprimé en heures) est $f(t) = 8,25te^{-t}$ pour $t \geq 0$.

1. Calculer la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 2 heures 30 minutes.
2. Le médicament n'est efficace que si la quantité est supérieure ou égale à 1 cg. Par lecture graphique, en faisant apparaître les constructions utiles, résoudre $f(t) \geq 1$. En déduire l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace (t sera exprimé en heures et minutes).

83 vu au BAC

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + xe^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

On notera C_f et C_g les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

Partie A. Étude de f aux bornes de son intervalle de définition

1. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = xe^{-x} \left(\frac{1}{2}xe^x - e^x + 1 \right).$$

En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- b. On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = f(x) - g(x)$. Déterminer la limite de h en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
- c. En utilisant le signe de $h(x)$, étudier la position relative des courbes C_f et C_g .

Partie B. Sens de variation de f et courbes

1. a. Calculer la dérivée f' de f .
Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = (x-1)(1-e^{-x}).$$

Étudier le signe de $f'(x)$.

- b. Dresser le tableau des variations de f .
2. Donner le tableau des variations de g .
3. Tracer C_f et C_g .

84

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Partie A. Étude de f

1. Étudier la parité de f et en déduire une propriété de sa courbe C .
2. Calculer la limite de f en $+\infty$. En déduire celle en $-\infty$ et interpréter graphiquement.
3. Étudier les variations de f (on proposera deux méthodes : sans ou avec dérivée).
4. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse 1 (on rappelle que $e^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{e}}$).
5. Construire C et ses tangentes aux points d'abscisses -1 , 0 et $+1$.

Partie B. Position par rapport à une tangente

On se propose d'étudier la position de la courbe C par rapport à sa tangente T au point d'abscisse 1. On considère pour cela la fonction φ définie sur \mathbb{R}

$$\text{par } \varphi(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{\sqrt{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}} \right).$$

1. Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ pour x réel.
2. Étudier les variations de la fonction φ' , calculer $\varphi'(0)$ et en déduire le signe de φ' .
Faire de même avec la fonction φ et conclure.

85 vu au BAC

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y - y' = \frac{e^x}{x^2}.$$

On cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0 ; +\infty[$.

1. a. Démontrer que la fonction u définie sur $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = \frac{e^x}{x}$ est solution de (E).
- b. Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0 ; +\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$ définie sur $]0 ; +\infty[$ est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.
- c. En déduire toutes les solutions définies sur $]0 ; +\infty[$ de l'équation (E).
2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x} e^x.$$

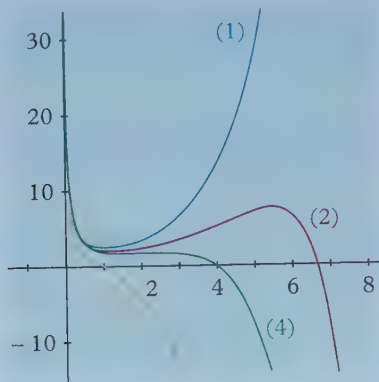
- a. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

EXERCICES

b. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation $f'_k(x) = 0$.

3. On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On a tracé sur le graphique ci-après les courbes C_{-1} , $C_{-0,25}$, $C_{-0,15}$ et C_0 .

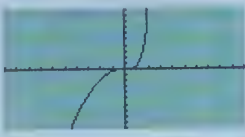
En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).



86 vu au BAC On considère la fonction numérique

$$f \text{ définie par } f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.



Partie A. Conjectures

À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant :

- le sens de variation de f sur $[-3; 2]$?
- la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?

Dans la suite du problème, on se propose de valider ou non ces conjectures.

Partie B. Contrôle de la première conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel

- Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$.
- Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x .
- En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} . On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
- Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

3. Sens de variation de f sur \mathbb{R}

- Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.
- En déduire le sens de variation de la fonction f .
- Que pensez-vous de votre première conjecture ?

Partie C. Contrôle de la deuxième conjecture

Soit (C) la courbe représentant la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.
- On considère la fonction h définie sur $[0; 1]$ par $h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}$.
 - Déterminer le sens de variation de h .
 - De l'encadrement de α trouvé à la partie A, déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
 - Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?
- a. Montrer que la courbe (C) coupe l'axe $(x'x)$ en O et en un autre point d'abscisse β .
b. Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} .

Partie D. Tracé de la courbe

On se propose de tracer la partie Γ de la courbe (C) correspondant à l'intervalle $[-0,2; 0,4]$ dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec les unités suivantes :

- sur l'axe $(x'x)$, 1 cm représentera 0,05 ;
- sur l'axe $(y'y)$, 1 cm représentera 0,001.

87 Partie A

Soit f_1 la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f_1(x) = e^x - x.$$

- Étudier les variations de f_1 et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Préciser l'asymptote.
- Déduire des variations de f_1 que, pour tout réel x , $1 + x \leq e^x$.
- On définit sur \mathbb{N}^* la suite (u_n) par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

- Étudier le sens de variation de cette suite.
- En utilisant la question 2, démontrer que, pour tout n dans \mathbb{N}^* , $u_n < e$. Justifier la convergence de la suite (u_n) .
- Vérifier que, pour tous réels x et y ,
 $f_1(x+y) + x + y = [f_1(x) + x][f_1(y) + y]$.

Partie B

Dans cette seconde partie, on se propose de déterminer l'ensemble E de toutes les fonctions f , dérivables sur \mathbb{R} et vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x+y) + x + y = [f(x) + x][f(y) + y] \quad (I).$$

- a. En posant $x = y = \frac{X}{2}$, démontrer que :
pour tout f dans E et pour tout réel X , $f(X) + X \geq 0$.
b. Démontrer que si f appartient à E , alors nécessairement $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
- Déterminer la fonction f lorsque $f(0) = 0$.

3. a. Démontrer que s'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) + x_0 = 0$ alors :

pour tout réel x , $f(x) + x = 0$.

On pourra, par exemple, remarquer que $x = (x - x_0) + x_0$ et utiliser la relation (I).

b. En déduire que, si $f(0) = 1$, alors, pour tout réel x , $f(x) + x > 0$.

c. On suppose que $f(0) = 1$ et on pose $f(1) + 1 = a$. Démontrer par récurrence que :

pour tout n dans \mathbb{N} , $f(n) + n = a^n$ ($a^0 = 1$).

En déduire que, pour tout n dans \mathbb{Z} , $f(n) = a^n - n$.

4. On pose pour tout f dans E , $f'(0) + 1 = k$.

Soit c un réel donné quelconque.

En dérivant par rapport à x les deux membres de la relation :

$$f(x+c) + x + c = [f(x) + x][f(c) + c],$$

démontrer que, pour tout f dans E et pour tout réel c ,

$$f'(c) + 1 = k[f(c) + c].$$

5. La question 4 prouve donc que toute fonction f de E vérifie la relation (II) :

pour tout réel x , $f'(x) + 1 = k[f(x) + x]$

avec $k = f'(0) + 1$.

On pose pour tout f de E et pour tout réel x :

$$g(x) = f(x) + x.$$

a. Exprimer $g'(x)$ en fonction de k et $g(x)$.

b. Trouver les fonctions g vérifiant cette dernière relation et en déduire les fonctions f solutions de (I).

88 Fonctions hyperboliques et trigonométrie hyperbolique

Pour tout réel t , on pose :

$$\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

ch est l'abréviation de **cosinus hyperbolique** et **sh** l'abréviation de **sinus hyperbolique**.

Partie A. Étude des fonctions

1. a. Sur l'écran d'une calculatrice, tracer les courbes représentatives des fonctions **ch** et **sh**.

b. Étudier la parité des fonctions **ch** et **sh**.

c. Étudier les variations des fonctions **ch** et **sh** et leurs limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Soit f et g les fonctions définies sur :

$$E =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$$

par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ et $g(x) = -f(x)$.

a. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative Γ dans le plan rapporté à un repère orthonormal. On montrera que la droite $\Delta : y = x$ est asymptote à Γ en $+\infty$ et que $\Delta' : y = -x$ est asymptote à Γ en $-\infty$.

b. En déduire la courbe représentative Γ' de la fonction g . On admet que $\Gamma \cup \Gamma'$ est une hyperbole (H).

c. Montrer que $M(x ; y) \in (H)$ si et seulement si :

$$x^2 - y^2 = 1.$$

3. a. Montrer que, pour tout réel t , le point de coordonnées $(\operatorname{ch}(t) ; \operatorname{sh}(t))$ est un point de (H).

b. Quelle partie de la courbe (H) parcourt le point $M(\operatorname{ch}(t) ; \operatorname{sh}(t))$ lorsque t décrit \mathbb{R} ?

Partie B. Trigonométrie hyperbolique

1. a. Pour tous réels a et b , démontrer que :

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) ;$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a).$$

b. En déduire $\operatorname{ch}(a-b)$ et $\operatorname{sh}(a-b)$.

2. a. Pour tous réels p et q , montrer que :

$$\bullet \operatorname{ch}(p) + \operatorname{ch}(q) = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) ;$$

$$\bullet \operatorname{ch}(p) - \operatorname{ch}(q) = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right) ;$$

$$\bullet \operatorname{sh}(p) + \operatorname{sh}(q) = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) ;$$

$$\bullet \operatorname{sh}(p) - \operatorname{sh}(q) = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right) ;$$

(on pourra utiliser $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$).

b. Relever les différences avec la trigonométrie circulaire.

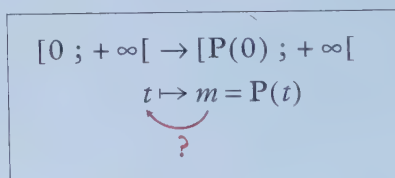
Activité 1 → Go back Terry

OBJECTIF

Faire comprendre par un exemple concret la notion de bijection réciproque.

En l'absence de facteurs d'inhibition, l'accroissement d'une population de bactéries cultivées en laboratoire est proportionnel à la population et à la durée suivant la loi $P'(t) = 0,1P(t)$ où $P(t)$ désigne le nombre de bactéries à l'instant t exprimé en jours.

- Sachant qu'à l'instant $t=0$, la population initiale est donnée par $P(0) = 2 \times 10^8$, exprimer $P(t)$ en fonction de t .
- Dresser le tableau de variation de la fonction P sur $[0 ; +\infty[$ et la représenter graphiquement dans un repère orthogonal sur $[0 ; 15]$ (on prendra 1 cm pour un jour en abscisse et 1 cm pour 10^8 bactéries en ordonnée).
- Déterminer graphiquement un instant t_1 tel que $P(t_1) = 2P(0)$. On arrondira au jour près.
 - Déterminer graphiquement un instant t_2 tel que $P(t_2) = 4P(0)$.
 - Déterminer graphiquement un instant t_3 tel que $P(t_3) = 3P(0)$.
- Montrer que l'on peut définir une fonction sur $[P(0) ; +\infty[$ en associant à tout $m \geq P(0)$ un réel positif t tel que $P(t) = m$, ce qui correspond à la représentation ci-dessous.



Activité 2 → Symétrie axiale et bijection réciproque

OBJECTIF

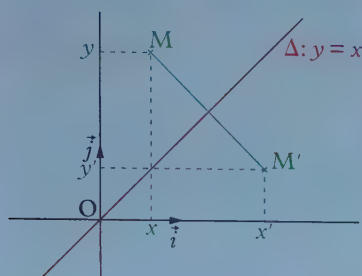
Dans un repère orthonormal du plan, déterminer une relation entre les courbes représentatives d'une bijection et de sa bijection réciproque.

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal du plan.

A ■ Symétrie axiale d'axe la première bissectrice $\Delta : y = x$

Montrer que les points $M(x ; y)$ et $M'(x' ; y')$, avec x, y, x', y' réels, sont symétriques par rapport à Δ si et seulement si $y' = x$ et $x' = y$.

(Voir la représentation graphique ci-après.)



B ■ Bijection réciproque de $x \mapsto x^2$

Pour tout a de $[0 ; +\infty[$, l'équation $x^2 = a$ admet pour unique solution dans $[0 ; +\infty[$: \sqrt{a} . On dit que $x \mapsto x^2$ est une **bijection** de $[0 ; +\infty[$ dans $[0 ; +\infty[$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ de $[0 ; +\infty[$ dans $[0 ; +\infty[$ est appelée la **bijection réciproque** de $x \mapsto x^2$.

$$\begin{array}{c}
 [0 ; +\infty[\rightarrow [0 ; +\infty[\\
 x \mapsto x^2 \\
 \sqrt{a} \leftarrow a
 \end{array}$$

1. Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, représenter graphiquement, sur $[0 ; +\infty[$, Δ et les courbes \mathcal{C} et \mathcal{R} d'équations respectives $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$.
2. On note s la symétrie d'axe Δ .
 - a. Soit M un point de \mathcal{C} , montrer que $s(M)$ est un point de \mathcal{R} .
 - b. Soit P un point de \mathcal{R} , montrer que P est l'image d'un point de \mathcal{C} .
 - c. Que peut-on en déduire pour les courbes \mathcal{C} et \mathcal{R} ?

C ■ Bijection réciproque de $x \mapsto e^x$

1. a. Dresser le tableau de variation de $x \mapsto e^x$ en faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b. Pour tout réel $a > 0$, que peut-on en déduire pour l'équation $e^x = a$?
 - c. En déduire que $x \mapsto e^x$ admet une bijection réciproque $g :]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 2. a. Montrer que les courbes représentatives (E) de $x \mapsto e^x$ et (L) de g sont symétriques par rapport à $\Delta : y = x$.
 - b. Représenter graphiquement ces deux courbes avec leurs tangentes T et T' aux points A de coordonnées $(0 ; 1)$ pour (E) et A' de coordonnées $(1 ; 0)$ pour (L).
- On admettra la propriété « une symétrie axiale s conserve la tangence » (c'est-à-dire qu'elle transforme la tangente à une courbe Γ en un point A en la tangente à la courbe image de Γ au point $s(A)$, image de A).

Point Info

John Neper – ou Napier – (1550-1617), mathématicien écossais, construisit, en vue du calcul numérique, les premières tables de logarithmes dits naturels ou népériens de base $e = 2,718\ 281\ 828 \dots$ destinées à simplifier les calculs de trigonométrie sphérique alors essentiels pour l'astronomie et la navigation.

Henry Briggs (1561-1631), mathématicien anglais travaillant sur les logarithmes, suggéra à John Napier d'utiliser 10 comme base des logarithmes. Briggs conçut une table de logarithmes où il calcula les 14 premières décimales pour les 31 000 premiers entiers.

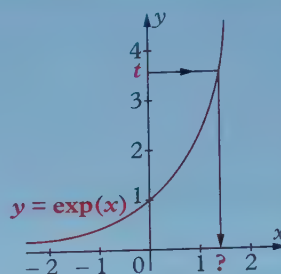
1. La fonction ln

Théorème 1 et définition 1 →

1. L'équation $\exp(x) = t$, où t est un réel quelconque strictement positif, admet une solution unique dans \mathbb{R} .

2. Il existe une fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui, à tout réel t , $t > 0$, associe l'unique réel x tel que $\exp(x) = t$.

Cette fonction est appelée fonction logarithme népérien, elle est notée \ln .



Vocabulaire

1. On dit que la fonction \exp est une **bijection** de \mathbb{R} dans $]0; +\infty[$.

2. La fonction \ln est elle-même une bijection de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} . On dit qu'il s'agit de la **bijection réciproque** de la fonction \exp .

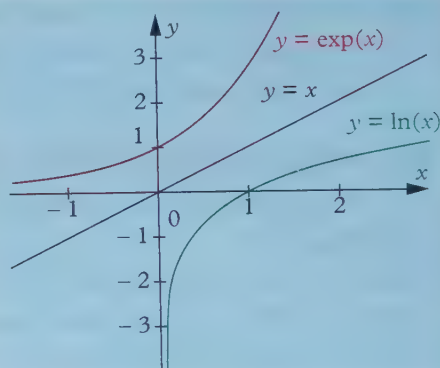
exp	t	$\frac{1}{e}$	1	2	e	3	e^2	4	e^3	ln
	x	-1	0	$\ln 2$	1	$\ln 3$	2	$\ln 4$	3	

Corollaire 1 →

\ln est donc la fonction définie sur $]0; +\infty[$ telle que, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\exp(x) = t \Leftrightarrow x = \ln(t) \text{ ou encore } e^x = t \Leftrightarrow x = \ln(t).$$

- $\ln(x)$ existe si et seulement si x est strictement positif.
- Pour $x > 0$, $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Pour $x > 0$ et $y > 0$,
 $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$.
- Pour $x > 0$, $\exp(\ln(x)) = x$
ou encore $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$
ou encore $\ln(e^x) = x$.



Corollaire 2 →

En repère orthonormal, les courbes $C : y = \exp(x)$ et $\Gamma : y = \ln(x)$ sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

2. Relations fonctionnelles de ln

Propriété 1 →

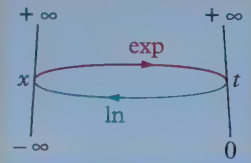
1. Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. Pour tout réel $x > 0$: $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
3. Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$: $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
4. Pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier relatif p : $\ln(x^p) = p \ln(x)$.
5. Pour tout réel $x > 0$: $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$.

→ DÉMONSTRATIONS

■ Théorème 1

- La fonction \exp est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .
- Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement 0 et $+\infty$.

Le théorème des valeurs intermédiaires (chapitre 3, p. 92), permet alors d'affirmer que l'équation $\exp(x) = t$, avec $t \in]0 ; +\infty[$, admet une solution unique x dans \mathbb{R} .



■ Corollaire 1

Le schéma ci-dessus résume entièrement la définition de la fonction « logarithme népérien ». Chaque conséquence en résulte immédiatement (utiliser le schéma !).

■ Corollaire 2

Soit $C : y = \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$ et $\Gamma : y = \ln(x)$, $x \in]0 ; +\infty[$.

On rappelle que la symétrie S_{Δ} d'axe $\Delta : y = x$ est définie analytiquement en repère orthonormal par $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ et on se propose de montrer que $S_{\Delta}(C) = \Gamma$.

Une équation de C est $y = \exp(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et donc une équation de $S_{\Delta}(C)$ est $x' = \exp(y')$ avec $y' \in \mathbb{R}$, soit encore $y' = \ln(x')$ avec $x' > 0$ ou si l'on préfère $y = \ln(x)$ avec $x > 0$. On peut donc affirmer que $S_{\Delta}(C)$ n'est autre que Γ .

■ Propriété 1

Relation 1 : Comparons, pour $x > 0$ et $y > 0$, les réels $a = \ln(xy)$ et $b = \ln(x) + \ln(y)$.

Comme la fonction \exp est une bijection de \mathbb{R} dans $]0 ; +\infty[$, il suffit de prouver que $\exp(a) = \exp(b)$.

Or $\exp(a) = \exp(\ln(xy)) = xy$ et, d'après la définition du logarithme,

$$\exp(b) = \exp(\ln(x) + \ln(y)) = \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y)) = xy.$$

Il en résulte $\exp(a) = \exp(b)$ et donc $a = b$.

Relation 2 : De la relation 1, on déduit pour $x > 0$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) = \ln(1) = 0$.

Relation 3 : Elle se déduit des relations 1 et 2 ; pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

Relation 4 : Posons, pour $x > 0$ et p dans \mathbb{Z} , $a = \ln(x^p)$ et $b = p \ln(x)$.

Il suffit de prouver l'égalité : $\exp(a) = \exp(b)$.

Or $\exp(a) = \exp(\ln(x^p)) = x^p$ et par ailleurs $\exp(b) = \exp(p \ln(x)) = [\exp(\ln(x))]^p = x^p$.

Relation 5 : Pour $x > 0$, $\ln(x) = \ln((\sqrt{x})^2) = 2 \ln(\sqrt{x})$ d'où l'égalité cherchée.

→ APPLICATION

Exercice Résoudre dans \mathbb{R} : **a.** $\exp(x) = 8$; **b.** $2 \ln^2(x) - 3 \ln(x) - 2 = 0$.

Solution

a. $E = \mathbb{R}$; $x = \ln(8)$ ou encore $x = 3 \ln(2)$.

b. $E =]0 ; +\infty[$; on pose $X = \ln(x)$; l'équation devient $2X^2 - 3X - 2 = 0$ que l'on résout :

• $X = 2 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

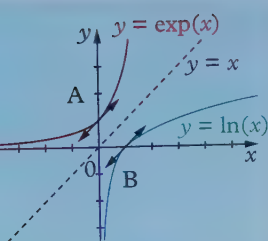
ou

• $X = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$.

Les solutions sont donc e^2 et $e^{-\frac{1}{2}}$.

voir aussi exercices n° 15, 16

3. Dérivabilité de \ln



A ■ Approximation affine au voisinage de 1

Étude graphique : La courbe C d'équation $y = \exp(x)$ admet en $A(0 ; 1)$ une tangente (T) , parallèle à $\Delta : y = x$ et d'équation $y = x + 1$. La courbe $\Gamma : y = \ln(x)$, symétrique de C par rapport à Δ , admet en $B(1 ; 0)$ une tangente (T') qui est parallèle à (T) et qui a donc pour coefficient directeur 1.

Cela permet de conjecturer la dérivabilité de \ln en 1 avec pour nombre dérivé $(\ln)'(1) = 1$. De ce résultat, il résulte la propriété suivante :

Propriété 2 →

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ ou encore $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.
- Pour tout réel $h > -1$, $\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Ou encore :

pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) = x - 1 + (x - 1)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque : Pour h voisin de 0, $\ln(1+h) \approx h$.

B ■ Fonction dérivée

Propriété 3 →

\ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et, pour $x > 0$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

Corollaire 1 →

- \ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$.
- Pour tout réel $a > 0$: $\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a > 1$; $\ln(a) < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

Corollaire 2 →

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Si u est une fonction dérivable sur I et strictement positive sur I alors $f = \ln \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout réel x

de I , $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

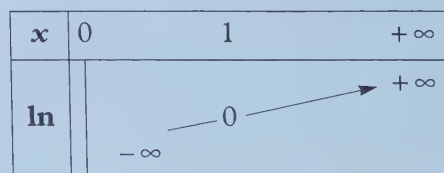
4. Limites

Théorème 2 →

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

Conséquence

L'axe des ordonnées est asymptote à $\Gamma : y = \ln(x)$.



→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 2

- Les deux limites et les deux égalités traduisent chacune la dérivabilité de \ln au point 1.
- Il en résulte les approximations : pour h voisin de 0, $\ln(1+h) \approx h$ et, pour x voisin de 1, $\ln(x) \approx x-1$.

■ Propriété 3

Soit $a > 0$; calculons $\lim_{h \rightarrow 0} T(h)$ avec $T(h) = \frac{\ln(a+h) - \ln(a)}{h} = \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)}{h} = \frac{1}{a} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}}$.

Or $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{a} = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ (voir la propriété 2) donnent en composant : $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \frac{1}{a}$.

Cette limite étant réelle, la fonction \ln est dérivable en tout point $a > 0$ et $\ln'(a) = \frac{1}{a}$.

■ Corollaires 3 et 4

1. • \ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $(\ln)'(x) > 0$; \ln est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
- Les équivalences résultent de la stricte croissance de \ln sur $]0 ; +\infty[$ et de $\ln(1) = 0$.

2. Les hypothèses $\left\{ \begin{array}{l} u \text{ est dérivable sur } I \\ u \text{ prend ses valeurs dans }]0 ; +\infty[\end{array} \right.$ et la dérivabilité de \ln sur $]0 ; +\infty[$ donnent la dérivabilité

de la fonction $\ln \circ u$, et f a pour dérivée $f' : x \mapsto \ln'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

■ Théorème 2

- Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Il s'agit de prouver que, pour tout réel $A > 0$ fixé (aussi grand soit-il), on peut trouver x_0 tel que pour tout $x > x_0$, $\ln(x) > A$. Or $\ln(x) > A$ équivaut à $x > e^A$. En prenant $x_0 = e^A$, on a donc l'assurance d'avoir $\ln(x) > A$ pour tout $x > x_0$; d'où la limite attendue.

- Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$.

Pour $x > 0$, $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x) = -\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$.

- Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

On a $\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X}$ (en posant $X = \ln x$).

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$.

Par théorème de composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

- Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

En écrivant $x \ln(x) = -\frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(x)}{x} = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

1. À la suite de Képler (TP tableur)

OBJECTIF : Conjecturer une loi.

Le tableau ci-dessous donne pour chaque planète du système solaire sa période de révolution et le rayon de son orbite considérée comme circulaire. Ces valeurs sont reprises dans le graphique représentant la période en fonction du rayon. (Voir mode d'emploi du tableur page 27.)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Planète	r (en m)	T (en s)				
2	Mercure	5,79E+10	7,60E+06				
3	Vénus	1,08E+11	1,94E+07				
4	Terre	1,49E+11	3,16E+07				
5	Mars	2,28E+11	5,94E+07				
6	Jupiter	7,78E+11	3,74E+08				
7	Saturne	1,42E+12	9,30E+08				
8	Uranus	2,87E+12	2,66E+09				
9	Neptune	4,50E+12	5,20E+09				
10	Pluton	5,91E+12	7,82E+09				

- Combien de points apparaissent sur le graphique ? pour combien de planètes ? Expliquer ce phénomène.
- Pour contourner ce problème, on peut soit représenter les données sur un papier spécial (papier logarithmique) soit représenter non plus T en fonction de r mais $\ln(T)$ en fonction de $\ln(r)$.
 - Entrer sur une feuille de calcul les données des colonnes A, B et C.
 - Afficher en colonne D les valeurs de $\ln(r)$ et en colonne E les valeurs de $\ln(T)$ correspondantes.
 - Faire afficher le graphique donnant $\ln(T)$ en fonction de $\ln(r)$ (style nuage de points). Combien de points apparaissent sur ce nouveau graphique ?
- Étude expérimentale.** Les points semblent à peu près alignés. Déterminons à l'aide du tableur l'équation d'une droite Δ qui permet d'ajuster les points représentés.
 - Entrer en F3 la formule $=\frac{(E3-E2)}{(D3-D2)}$ et la recopier vers le bas jusqu'à la cellule F10. Interpréter graphiquement les résultats figurant dans les cellules F3 à F10. Quel coefficient directeur m peut-on retenir expérimentalement pour Δ ?
 - Faire afficher en colonne G les valeurs de $\ln(T) - m \ln(r)$. Quelle équation peut-on proposer pour Δ ?

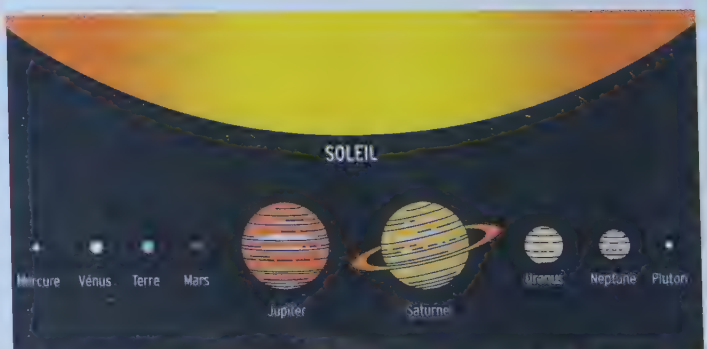
4. Conclusion. En déduire que, pour les neuf planètes étudiées,

$$T \approx k(\sqrt{r})^3 \text{ où } k \text{ est une constante.}$$

Point Info

La relation $T \approx k(\sqrt{r})^3$ est la troisième loi de Képler.

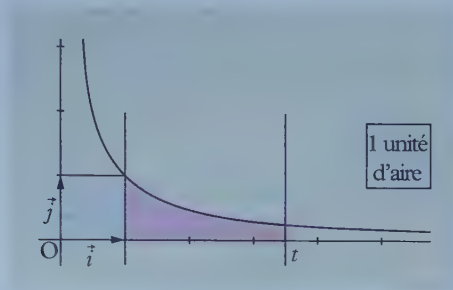
À l'époque, Képler (1571-1630) n'avait pu utiliser que les six planètes alors connues du système solaire. Uranus ne fut découverte qu'en 1781, Neptune en 1846, Pluton en 1930.



2. Aire sous l'hyperbole

OBJECTIF : Étudier une interprétation graphique de la fonction \ln .

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la branche d'hyperbole H d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x > 0$. Pour tout $t \geq 1$, on désigne par $\mathcal{A}(t)$, l'aire de la portion de plan limitée par H , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$ (en mauve ci-dessous). L'unité d'aire associée au repère est l'aire d'un rectangle de côtés $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$, c'est-à-dire $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.



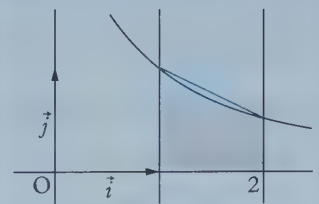
A. ➔ Exploration

1. Quelle est la valeur de $\mathcal{A}(1)$? Quel est le signe de $\mathcal{A}(t)$ pour tout $t > 1$?
2. Quel est le sens de variation de \mathcal{A} sur $[1 ; +\infty[$?
3. Sur une feuille de papier millimétré, tracer avec soin la courbe H sur $]0 ; 6]$ (on prendra un repère orthonormal avec pour unité graphique 4 cm).
En utilisant le quadrillage de la feuille, déterminer une valeur approchée de chacun des réels :

$$\mathcal{A}(2), \mathcal{A}(3), \mathcal{A}(4), \mathcal{A}(5) \text{ et } \mathcal{A}(6).$$

B. ➔ Un encadrement

1. Colorier l'aire sous l'hyperbole qui est égale à $\mathcal{A}(2)$. Encadrer cette aire par celles d'un rectangle et d'un trapèze (voir figure ci-contre) et démontrer que $0,5 < \mathcal{A}(2) < 0,75$.



2. Plus généralement, montrer de la même façon que, pour tout

$$h > 0, \frac{h}{1+h} \leq \mathcal{A}(1+h) \leq \frac{(2+h)h}{2(1+h)} \quad (1).$$

Remarque : on admettra que sur $]0 ; +\infty[$, tout segment reliant deux points de la courbe H est situé au-dessus de la courbe.

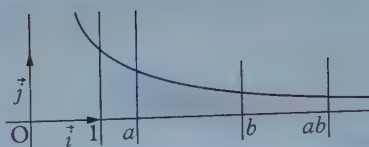
C. ➔ Une relation fondamentale

Soit a et b deux réels tels que $1 \leq a$ et $1 \leq b$. On pourra supposer que $1 \leq a \leq b$.

1. Placer les points $I(1 ; 0)$, $A(a ; 0)$, $B(b ; 0)$, $C(ab ; 0)$ et les points I' , A' , B' et C' de H d'abscisses respectives 1 , a , b et ab . Dessiner les trapèzes $II'B'B$ et $AA'C'C$.

Calculer les aires de ces trapèzes. Que constate-t-on ?

2. On admet que l'aire sous l'hyperbole H vérifie la même propriété, c'est-à-dire que les aires des parties hachurées en rouge et en bleu sur la figure ci-contre sont égales.



a. Exprimer à l'aide de \mathcal{A} les aires des parties hachurées en rouge et en bleu.

b. Montrer que, pour tous a et b de $[1 ; +\infty[$, $\mathcal{A}(ab) = \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}(b)$ (2).

D. ➔ Détermination de la fonction \mathcal{A}

1. Dérivabilité en 1

Soit h un nombre positif. En utilisant l'encadrement (1), montrer que \mathcal{A} est dérivable en 1 et préciser $\mathcal{A}'(1)$.

2. Dérivabilité en t ($t \geq 1$)

a. Montrer à l'aide de la relation (2) que, pour tout $h > 0$,

$$\mathcal{A}(t+h) = \mathcal{A}(t) + \mathcal{A}\left(1 + \frac{h}{t}\right)$$

puis que $\frac{\mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t)}{h} = \frac{1}{t} \times \frac{\mathcal{A}(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$ avec $\varepsilon = \frac{h}{t}$.

b. En déduire que \mathcal{A} est une fonction dérivable en tout t de $[1 ; +\infty[$ et préciser sa fonction dérivée.

Quelle est la dérivée de la fonction qui à tout t de $[1 ; +\infty[$ associe $\mathcal{A}(t) - \ln(t)$? En déduire $\mathcal{A}(t)$.

Point Info

C'est en 1647, dans l'*Opus Geometricum*, que Grégoire de Saint Vincent, jésuite belge, s'est intéressé aux aires de portions de plan sous une hyperbole et a mis en évidence des relations fonctionnelles.

3. Logarithme décimal

OBJECTIF : Introduction d'une autre fonction logarithme.

On définit la fonction \log sur $]0 ; +\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ (\log est appelé **logarithme décimal**).

1. Calculer $\log(1)$, $\log(10)$, $\log(100)$, $\log(10^{-2})$, et plus généralement $\log(10^n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

2. Montrer que la fonction \log a le même sens de variation que la fonction \ln et les mêmes limites.

3. Comment peut-on tracer point par point sa courbe représentative à partir de la courbe d'équation $\tilde{y} = \ln x$? Effectuer cette construction.

4. Choisir une des relations algébriques de \ln (relations 1, 2, 3, 4 ou 5 p. 00) et vérifier que le logarithme décimal possède la même propriété. On admettra qu'il en est ainsi des autres relations.

5. Le pH d'une solution aqueuse est défini par la relation $\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+]$ où $[\text{H}_3\text{O}^+]$ désigne la concentration en ions H_3O^+ (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$).

a. Calculer le pH correspondant à $[\text{H}_3\text{O}^+] = 4,0 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Calculer la concentration en ions H_3O^+ d'une solution dont le pH est égal à 7.

b. Comment évolue le pH quand la concentration diminue?

c. Que devient le pH quand la concentration est divisée par 10? par 100?

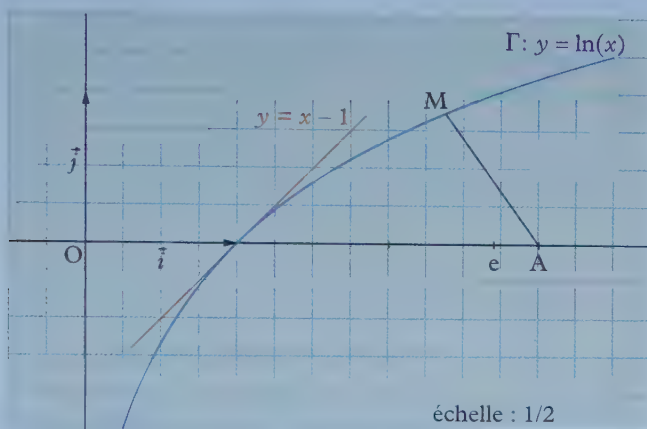
d. Que devient la concentration quand le pH diminue de 1? de 2?

CD 4. Distance à $\Gamma : y = \ln(x)$

OBJECTIF : Montrer qu'il existe un point M_0 de Γ , et un seul, tel que la distance AM_0 , dans le plan muni d'un repère orthonormal, soit minimale avec $A(3 ; 0)$. Cette distance est alors appelée distance du point A à la courbe et notée $d(A, \Gamma)$.

Approche expérimentale

Reproduire la courbe dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.
À l'aide d'une règle graduée, évaluer $d(A, \Gamma)$.



A. ➔ Étude d'une fonction auxiliaire

1. Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a $\ln(x) < x^2 + 1$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - 3 + \frac{\ln(x)}{x}$.
 - a. Calculer les limites de f .
 - b. Étudier les variations de f (on pourra utiliser l'inégalité obtenue à la question 1).
 - c. Prouver qu'il existe un réel $\alpha > 0$ unique tel que $f(\alpha) = 0$ et déterminer un encadrement de α de longueur 10^{-1} .
 - d. Dédire des questions **b** et **c** le signe de $f(x)$.

B. ➔ Distance du point A à la courbe Γ

1. On considère la fonction d qui, à tout x réel strictement positif, associe la distance AM , où A est le point de coordonnées $(3 ; 0)$ et M le point de Γ d'abscisse x .
 - a. Exprimer $d(x)$ en fonction de x ; calculer $d'(x)$ et montrer que $d'(x)$ est du signe de $f(x)$.
 - b. En déduire que la fonction d admet un minimum en α .
2. On note M_0 le point de Γ d'abscisse α et (T_0) la tangente à Γ en M_0 .
 - a. Montrer que (AM_0) est perpendiculaire à (T_0) .
 - b. Montrer que $\ln \alpha = -\alpha^2 + 3\alpha$.

À l'aide de Γ et d'une autre courbe de référence, placer α , puis M_0 et (T_0) .

5. À la manière de Képler

OBJECTIF : Découvrir une méthode de calcul de $\ln(x)$ pour $x > 1$.

Voici une méthode utilisée par Képler pour calculer $\ln(x)$ pour un réel $x > 1$ donné :

1. Il prend la racine carrée de x plusieurs fois de suite.

$$x \longrightarrow \sqrt{x} \longrightarrow \sqrt{\sqrt{x}} \longrightarrow \dots \longrightarrow x'$$

2. Il soustrait 1 au résultat obtenu.

3. Il multiplie par 2 autant de fois qu'il a pris la racine carrée.

$$y \longleftarrow \dots \longleftarrow 2^2(x' - 1) \longleftarrow 2(x' - 1) \longleftarrow x' - 1$$

A. ➔ Expérimentation

Appliquer ce procédé à $x = 2$ en appliquant 10 fois la racine carrée.

Comparer avec $\ln(2)$ le résultat ainsi obtenu.

Tester ce procédé pour d'autres réels x , $x > 1$ avec $n = 10$.

B. ➔ Justification théorique

Soit $x > 1$ un réel donné. On considère les suites u et v définies par :

$$\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \text{ pour } n \geq 0 \end{cases} \text{ et } v_n = 2^n(u_n - 1) \text{ pour } n \geq 0.$$

1. Exprimer x en fonction de u_1 , de u_2 , de u_3 et plus généralement de u_n .

2. Étude de la suite (u_n)

a. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 1$.

b. En montrant que $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{\sqrt{u_n} + 1}$, prouver que $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

c. En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (x - 1)$.

3. a. Étudier le sens de variation des fonctions f et g définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = \ln(1 + t) - t \quad \text{et} \quad g(t) = \ln(1 + t) - t + \frac{1}{2}t^2.$$

b. En déduire que, pour tout $h \geq 0$, $h - \frac{1}{2}h^2 \leq \ln(1 + h) \leq h$.

4. De l'encadrement précédent, déduire successivement que pour tout $n \geq 0$:

$$(1) \quad -\frac{(u_n - 1)^2}{2} \leq \ln(u_n) - (u_n - 1) \leq 0 ;$$

$$(2) \quad -2^{n-1} (u_n - 1)^2 \leq \ln(x) - 2^n(u_n - 1) \leq 0 ;$$

$$(3) \quad -\frac{1}{2^{n+1}} (x - 1)^2 \leq \ln(x) - v_n \leq 0 \text{ (on utilisera la question 2c)}$$

5. Justifier la méthode de Képler.

6. Quelle valeur de n choisir pour obtenir une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-1} près de $\ln(10)$? de $\ln(100)$?

EXERCICES RÉSOLUS

1 Soit $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

1. Exprimer $f(3)$ en fonction de $\ln 2$.
2. Préciser l'ensemble de définition E de f (le plus grand possible !).
3. Peut-on écrire « pour tout x de E , $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1)$ » ?

Solution

1. $f(3) = \ln 8 = 3 \ln 2$ d'après la relation 4.
2. $x \in E \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$ d'où $E =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.
3. Non ! Cette égalité n'est vérifiée que pour $x+1 > 0$ et $x-1 > 0$, c'est-à-dire lorsque $x > 1$.

voir aussi exercices n° 3, 6

2 Étudier le signe de $f(x) = 2 \ln(x-1) + 3$.

Solution

$2 \ln(x-1) + 3$ existe si et seulement si $x-1 > 0$ soit $x > 1$.
On résout sur $]1; +\infty[$ l'inéquation $2 \ln(x-1) + 3 > 0$.

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x-1 > e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x > 1 + e^{-\frac{3}{2}}$.
- De même, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 + e^{-\frac{3}{2}}$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 + e^{-\frac{3}{2}}$.

En résumé, $f(x) > 0$ sur $]1 + e^{-\frac{3}{2}}; +\infty[$, $f(x) < 0$ sur $]1; 1 + e^{-\frac{3}{2}}[$.

Commentaire

Étudier le signe d'une expression, c'est la comparer à 0. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ ne permet pas de connaître le signe de $f(x)$. Il faut aussi résoudre une inéquation $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$.

voir aussi exercices n° 22, 23

3 Étude de fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -x + \frac{\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. a. Montrer que (C) admet deux asymptotes.
- b. Étudier la position de (C) par rapport à son asymptote oblique.
2. a. Étudier les variations de la fonction φ définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = -x^2 + 1 - \ln x$. (On ne cherchera pas à tracer la courbe représentative de φ .)
- b. Calculer $\varphi(1)$ et en déduire le signe de $\varphi(x)$ en fonction de x .
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. Tracer la courbe (C).

Solution

1. a. Pour tout $x > 0$, $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \ln x$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Par théorème d'opération, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty$. Il en résulte que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).

De plus, $f(x) = -x + \frac{\ln x}{x}$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Ainsi la droite Δ d'équation $y = -x$ est asymptote à (C).

b. Pour $0 < x < 1$, $\ln x < 0$; pour $x > 1$, $\ln x > 0$; $\ln 1 = 0$.

Il en résulte que :

- pour $0 < x < 1$, $f(x) + x < 0$;
- pour $x > 1$, $f(x) + x > 0$;
- $f(1) + 1 = 0$.

Donc la courbe (C) est en dessous de Δ sur $]0 ; 1[$, elle est au-dessus de Δ sur $]1 ; +\infty[$, et le point de coordonnées $(1 ; -1)$ est commun à la courbe (C) et à Δ .

2. a. Les fonctions $x \mapsto -x^2 + 1$ et $x \mapsto -\ln(x)$ sont dérivables sur $]0 ; +\infty[$ donc la fonction φ , somme de ces deux fonctions, est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Pour tout x dans $]0 ; +\infty[$,

$$\varphi'(x) = -2x - \frac{1}{x}, \text{ donc } \varphi'(x) < 0 \text{ sur }]0 ; +\infty[.$$

La fonction φ est donc strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

b. Signe de φ :

$\varphi(1) = 0$ car $\ln(1) = 0$. Il résulte de la stricte décroissance de φ :

- si $0 < x < 1$ alors $\varphi(x) > \varphi(1)$, c'est-à-dire $\varphi(x) > 0$;
- si $x > 1$ alors $\varphi(x) < \varphi(1)$, c'est-à-dire $\varphi(x) < 0$.

3. • Dérivée

$f(x) = -x + \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$. Comme u et v

sont dérivables sur $]0 ; +\infty[$ avec $v(x) \neq 0$, $\frac{u}{v}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Alors f est une somme de deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = -1 + \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = -1 + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}.$$

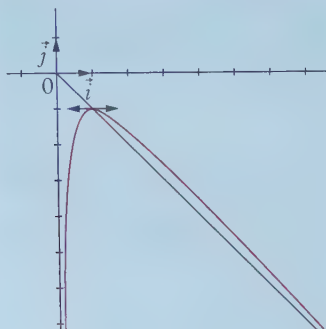
• Sens de variation

Comme x^2 est strictement positif, $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$.

De la question 2b, on déduit le tableau de variation suivant.

x	0	1	$+\infty$
f'(x)		+	0
f(x)	$-\infty$	-1	$-\infty$

4. Courbe représentative



Commentaires

Question 1b : Pour étudier la position respective de C et de Δ , on étudie le signe de la différence $f(x) - (-x) = f(x) + x$.

Question 2a : La fonction φ est une somme de deux fonctions. La fonction \ln est croissante sur $]0 ; +\infty[$ mais la fonction qui, à x associe $-x^2 + 1$, est décroissante sur $]0 ; +\infty[$. On ne peut donc pas conclure directement. Le sens de variation de φ est donc donné par le signe de sa dérivée.

Question 3 : La fonction φ est une « fonction auxiliaire » dont seul le signe nous intéresse. Il était donc inutile de chercher ses limites en 0 et $+\infty$.

Question 4 : Pour tracer la courbe :

1. On trace les asymptotes connues : axe des ordonnées et droite d'équation $y = -x$.

2. On trace les tangentes connues : ici $f'(1) = 0$ donc la courbe admet au point d'abscisse 1 une tangente horizontale.

3. On place des points remarquables trouvés au cours de l'étude.

4. On trace la courbe en respectant le sens de variation de f et en s'aidant des tangentes et asymptotes connues.

→ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Définition, courbe

1 Résoudre :

- a. $e^x = 1$; b. $e^x = 4$; c. $e^{2x} = 2$;
 d. $4e^{-x} - 3 = 12$; e. $e^{2x-1} = 2$; f. $e^{-x} = -5$.

2 Résoudre :

- a. $\ln(x) = 3$; b. $\ln(2x) = 0$;
 c. $2 \ln(x) - 1 = 6$; d. $\ln(2x - 1) = 3$;
 e. $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1$; f. $\ln(x^2) = 4$.

3 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

- a. $f(x) = \ln(2x - 1)$; b. $f(x) = \ln(e^x - 1)$;
 c. $f(x) = \frac{1}{1 - \ln(x)}$; d. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$.

4 À partir de sa mise en culture, l'évolution d'une population de bactéries en fonction du temps est donnée par $P(t) = 10^6 e^{0,5t}$ où t est exprimé en heures.

Calculer :

- a. le nombre de bactéries mises en culture à $t = 0$;
 b. le nombre de bactéries obtenues au bout d'une heure ;
 c. le temps au bout duquel la population initiale aura été multipliée par 2, par 4.

5 Expliquer comment tracer dans un repère orthonormé du plan chacune des courbes suivantes à partir de la courbe C représentant la fonction \ln .

- a. $C_1 : y = \ln(x) + 4$; b. $C_2 : y = \ln(x + 4)$;
 c. $C_3 : y = \ln(-x)$; d. $C_4 : y = |\ln(x)|$.

Propriétés algébriques

6 Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les réels :

- a. $\ln(8)$; b. $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$; c. $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
 d. $4 \ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{4} \ln(4)$; e. $\ln(2e^3)$;
 f. $\ln\left(\frac{e}{2}\right)$; g. $2 \ln(4) - \ln(4e^2)$.

7 Sans calculatrice, comparer les nombres u et v .

- a. $u = \ln(4) + \ln(3)$, $v = \ln(7)$;
 b. $u = \ln(9) - \ln(2)$, $v = \ln(7)$;
 c. $u = 2 + \ln(3)$, $v = \ln(15)$.

8 Même exercice que le 7 avec :

- a. $u = 3 \ln(e^5)$, $v = 13 - \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$;
 b. $u = 1 - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$, $v = \ln(\sqrt{e^3})$;
 c. $u = \log(10^2)$, $v = \ln(10^2)$.

9 Exprimer plus simplement les réels :

$$\ln(e^{2x}), \ln(2e^x), \ln\left(\frac{e^{4x}}{4}\right) - 2 \ln(2e^{2x+1}).$$

10 Les réels a et b étant strictement positifs, avec $a > b$, mettre chacune des expressions suivantes sous la forme $\ln(\alpha)$.

- a. $2 \ln(a) + \ln(b)$; b. $\ln(a) - 3 \ln(b)$;
 c. $\ln(2a) + 3$; d. $4 \ln(a) - 2$.

11 Étudier la parité de la fonction f définie sur

$$]-1 ; 1[\text{ par } f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

12 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Tracer la courbe représentant f sur une calculatrice. Que se passe-t-il ? Expliquer.

13 Expliquer comment tracer dans un repère orthonormé du plan la courbe d'équation $y = \ln(x^2)$ à partir de celle représentant \ln .

14 **Décroissance radioactive : demi-vie**

On modélise l'évolution du nombre de noyaux radioactifs présents à l'instant t dans un échantillon par une fonction N_t , définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$, telle que $N'(t) = -\lambda N(t)$ où λ est une constante réelle.

Le temps t est exprimé en secondes et λ en s^{-1} .

1. Exprimer $N(t)$ en fonction de λ , de t et du nombre N_0 de noyaux présents à l'instant $t = 0$.

2. a. Exprimer, en fonction de λ , le temps $t_{1/2}$, temps au bout duquel la moitié des noyaux présents à $t = 0$ se seront désintégrés.

Remarque : $t_{1/2}$ est appelée la demi-vie de l'élément radioactif étudié.

b. Montrer que, pour $t \geq 0$, $N(t + t_{1/2}) = \frac{1}{2} N(t)$.

Interpréter cette relation.

c. Pour tout entier naturel k , on note N_k le nombre de noyaux à $t = k \times t_{1/2}$.

Quelle est la nature de la suite (N_k) ?

Équations

15 Résoudre les équations suivantes puis vérifier les solutions trouvées à l'aide de la calculatrice.

- a. $\ln(4x^2 - 1) = \ln(x + 2)$;
 b. $\ln(2x - 1) + \ln(2x + 1) = \ln(x + 2)$.

16 Résoudre les équations :

- a. $x \ln(x) = 0$;
 b. $\ln(x + 7) = \ln(3 - x)$;
 c. $\ln(x - 13) = 2 \ln(x + 3)$;
 d. $\ln(x - 1) - \ln(3x + 4) = \ln(5x)$;
 e. $(\ln x)^2 + \ln(x) - 2 = 0$.

17 Résoudre les équations :

- a. $2e^{2x-1} = 3e^x$;
 b. $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$;
 c. $-e^{-x} + 3e^x - 2 = 0$.

18 Résoudre les systèmes :

a.
$$\begin{cases} 2 \ln(x) - 3 \ln(y) = 4 \\ \ln(x) + \ln(y) = 3 \end{cases}$$
 b.
$$\begin{cases} e^x + e^y = 4 \\ \frac{e^x}{e^y} = 7 \end{cases}$$

19 Résoudre le système
$$\begin{cases} \ln(x + y) = 1 \\ \ln(x) + \ln(y) = 0 \end{cases}$$

Inéquations

20 Déterminer pour quelles valeurs de x :

- a. $\ln(x) > 10$; b. $\ln(x) > 10^2$;
 c. $\ln(x) > 10^6$.

21 Déterminer un entier p tel que, pour $n \geq p$:

- a. $3^n \geq 10^6$; b. $0,7^n \leq 10^{-4}$; c. $(\ln 1,4)^n \leq 10^{-3}$.

22 Résoudre les inéquations suivantes.

- a. $\ln(x) > 2$;
 b. $2 \ln(x) - 1 < 5$;
 c. $\ln(x - 13) < 2 \ln(x + 3)$.

23 Même exercice que le 22 avec :

- a. $(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 \geq 0$;
 b. $\ln(x^2 + 1) < 0$;
 c. $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) \leq \ln(x^2 - 1)$.

24 Résoudre les inéquations suivantes.

- a. $e^{2x-3} > 5$;
 b. $2e^{2x} - 4 \leq 0$;
 c. $e^{2x} - 7e^x + 12 > 0$;
 d. $e^{2x} - 3e^x + 1 \leq 0$.

Dérivées

25 Déterminer sur quel(s) intervalle(s) chacune des fonctions suivantes est dérivable et calculer sa dérivée.

- a. $f(x) = x \ln(x)$; b. $f(x) = \ln(2x - 1)$;
 c. $f(x) = \ln(e^x - x)$; d. $f(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$.

26 Même exercice que le 25 avec :

- a. $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1)$;
 b. $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$;
 c. $f(x) = 2x^2 - (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)$;
 d. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

27 avec ROC On rappelle que, pour tous x et y réels strictement positifs, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

1. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, tracer les courbes C et Γ d'équations respectives $y = \ln(x)$ et $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Montrer que les tangentes respectives à ces deux courbes en leur point d'intersection sont orthogonales.

Limites

28 Déterminer la limite de f en α .

- a. $f(x) = 2 \ln(x - 3) + x$, $\alpha = +\infty$ et $\alpha = 3$;
 b. $f(x) = \ln(e^x + 1)$, $\alpha = -\infty$ et $\alpha = +\infty$;
 c. $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $\alpha = +\infty$.

29 Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.

- a. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, $\alpha = 0$;
 b. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x+1}$, $\alpha = +\infty$;
 c. $f(x) = \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}$, $\alpha = 0$.

30 Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f définie par :

- a. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)$ sur $\left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$;
 b. $f(x) = (1-x) \ln(1-x) - x \ln(x)$ sur $]0 ; 1[$.

31 Soit $f(x) = \ln(e^x + 1)$. Montrer que :

$$f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$$
.

En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$.

- 32** 1. a. Tracer sur une calculatrice la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ pour $0 \leq x \leq 1\ 000\ 000$.
 b. Comment doit-on choisir y pour que la courbe soit tracée en plein écran ?
 c. Tracer alors la courbe représentant la fonction \ln sur cette même fenêtre.
 Que constate-t-on ?
 d. Quelle limite peut-on conjecturer pour le rapport $\frac{(\ln x)}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers $+\infty$?
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ (on pourra poser $h = \sqrt{x}$).

Étude de fonctions

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 33** 1. Étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2$: limites en 0 et $+\infty$, sens de variation.
 2. Tracer la courbe représentative de f .

- 34** Même exercice que le 33 avec :
 $f(x) = 2x^2 - 1 - \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$.

35 On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$.

1. a. Étudier le sens de variation de f .
 b. En déduire que, pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} > \ln(x)$.
2. a. Montrer que, pour tout $x > 1$, $0 < \frac{(\ln x)}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$.
 b. Retrouver ainsi la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$.

36 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

et C sa courbe représentative.

1. Montrer que f est définie sur $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$.
 2. Étudier le sens de variation de f .
 3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 4. Dresser le tableau de variation de f .
 5. Montrer que la droite Δ d'équation $y = -\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe. Étudier la position de C par rapport à Δ .

37 Soit f la fonction définie sur $]0; 2[$ par $f(x) = \ln(2x - x^2)$ et C sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2. a. Montrer que la droite D , d'équation $x = 1$, est un axe de symétrie de la courbe C .
 b. Tracer la courbe C .

38 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2}x + \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right).$$

1. Étudier les variations de f ainsi que les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 2. Montrer que la courbe C représentative de f admet deux asymptotes verticales et une asymptote oblique Δ d'équation $y = \frac{3}{2}x$.
 3. Tracer la courbe C avec ses asymptotes.

39 Avec une dérivée seconde

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - (x+1) \ln x.$$

On note C sa courbe représentative.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 b. Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.
 2. a. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 b. Étudier le sens de variation de f' .
 c. Calculer $f'(1)$ et en déduire la signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
 3. Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe C avec pour unité graphique 1 cm.

40 Avec une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{\ln(x)}{x+1}.$$

Soit Γ sa courbe représentative.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x \ln(x) - x - 1.$$

- a. Étudier les sens de variation de g .
 b. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
 c. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $]0; +\infty[$.
 Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
 d. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

2. Étude de f

- a. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
 b. Montrer que la fonction dérivée f' de f a même signe que g .
 c. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
 3. Tracer la courbe Γ . On précisera la tangente au point de Γ d'abscisse 1.

→ Que sais-je ?

Vrai ou faux ?

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

41 $6 \ln(\sqrt{2}) - \ln\left(\frac{2^3}{3^2}\right) = \ln(9)$.

42 $e^{2x} - 1 = 3 \Leftrightarrow x = \ln(2)$.

43 Pour tout $x > 0$, $2 + \ln(x) = \ln(2x)$.

44 Pour tout réel x , $e^{\ln(x)} = x$.

45 Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.

46 Pour tout réel x , $\ln(x^2) = 2 \ln(x)$.

47 $\ln(e^x - 1)$ est défini pour $x > 0$.

48 $\ln(x^3) = 3 \Leftrightarrow x = e$.

49 $\ln(x^2) > 2 \Leftrightarrow x < -e$ ou $x > e$.

50 Pour tout x réel,
 $\ln(e^{2x} + 1) - \ln(1 + e^{-2x}) = 2x$.

51 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x+1} = 0$.

52 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$.

53 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln(x^2 - 1) = 0$.

54 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 1$.

55 La courbe d'équation $y = \ln(e^x - 1)$ admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote en $+\infty$.

56 La courbe d'équation $y = x \ln(x) - x$ admet en son point d'intersection avec l'axe des abscisses une tangente de coefficient directeur -1 .

57 La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \ln(x)$, si $x > 0$, est dérivable en 0.

58 Pour tout réel x , $\ln(x) \leq x - 1$.

59 Pour tout réel x de $] -1; +\infty[$,
 $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}$.

60 La suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$ est une suite convergente.

QCM

61 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2$. Alors :

A. $f(x) = 2 \ln(x)$ pour tout $x > 0$;

B. $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ pour tout $x > 0$;

C. f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$;

D. il existe a et b réels strictement positifs tels que $f(ab) = f(a) + f(b)$;

E. pour tous a et b réels strictement positifs, $f(ab) = f(a) + f(b)$.

62 Soit λ un réel. La fonction f est la solution de l'équation différentielle $y' = \lambda y$ qui prend la valeur 1 en 0.

A. f est une fonction décroissante si et seulement si λ est négatif ;

B. $f(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{-\ln \lambda}{2}$;

C. pour tout réel m strictement positif, l'équation $f(t) = m$ a une unique solution ;

D. pour tout n de \mathbb{N}^* , on note u_n l'unique solution de l'équation $f(t) = \frac{1}{n}$. Alors la suite (u_n) est arithmétique.

63 Soit, pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$. Alors :

A. pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - 1$;

B. f est décroissante sur \mathbb{R} ;

C. il existe un unique réel a tel que $f(a) = 0$;

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

E. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Source : ESIEE 1995.

64 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$, de courbe représentative C dans un repère orthonormal.

A. $f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$;

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$;

C. la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe C ;

D. la droite d'équation $y = -\ln 2$ est asymptote à la courbe C.

Source : Sélection FESIC.

→ Un sujet vu au BAC (extrait)

65 Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + x - \frac{1 + \ln(x)}{x}$. On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère la fonction auxiliaire φ définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\varphi(x) = 2x^3 + x^2 + \ln(x)$.

a. Étudier le sens de variation de φ .

b. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution unique qu'on appellera α .

c. En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x .

2. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative C ?

c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

Amérique du Sud, novembre 1999.

Solution

1. a. Sur $]0 ; +\infty[$, les fonctions de référence $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^2$ et \ln sont toutes les trois **strictement** croissantes, donc φ l'est également.

b. Par théorèmes d'opération,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

La fonction φ est continue sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions continues sur $]0 ; +\infty[$ de limite $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$, donc elle s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ (théorème des valeurs intermédiaires) et, de la stricte croissance de φ , on peut déduire qu'elle ne s'annule qu'une seule fois sur $]0 ; +\infty[$.

c. La fonction φ étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$:

• si $x < \alpha$, $\varphi(x) < \varphi(\alpha)$, c'est-à-dire $\varphi(x) < 0$;

• si $x > \alpha$, $\varphi(x) > \varphi(\alpha)$, c'est-à-dire $\varphi(x) > 0$.

2. a. $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. De plus, par le théorème 2, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Par théorème d'opérations, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Compte tenu de l'ensemble de définition de f , x tend vers 0 en restant strictement positif. D'une part, $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) = 0$, et d'autre part,

$$\frac{1 + \ln(x)}{x} = \frac{1}{x} (1 + \ln(x)) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \ln(x) = -\infty.$$

Par conséquent $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(x)}{x} = -\infty$ et, par somme,

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. La courbe C admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote en 0.

c. Sur $]0 ; +\infty[$ la fonction f est dérivable et :

$$f'(x) = 2x + 1 - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - (1 + \ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}.$$

Ainsi $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$. On en déduit que :

• sur $]0 ; \alpha]$, $f'(x) \leq 0$, f' ne s'annulant qu'en α , f est strictement décroissante ;

• sur $[\alpha ; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$, f' ne s'annulant qu'en α , f est strictement croissante.

Le jour du BAC

Question 1a : En lisant l'énoncé, repérer la formulation de la question 1b qui oriente a priori vers l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires.

On sait alors que l'on aura besoin de la stricte monotonie de φ pour pouvoir conclure à l'unicité de la solution de l'équation $\varphi(x) = 0$.

Question 2a et b : Les recherches de limites conduisent à une forme indéterminée.

Essayer de faire intervenir les formes indéterminées données en cours, quitte à transformer l'écriture de la fonction si nécessaire.

Question 2c : La fonction φ n'est qu'une fonction auxiliaire dont on détermine le signe pour pouvoir étudier celui de la dérivée f' de f .

De nombreuses fonctions faisant intervenir fonctions polynômes et logarithme ont, de la même façon, une dérivée dont on ne sait pas étudier le signe directement, et nécessitent l'étude d'une fonction auxiliaire.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Courbes

66 1. Pour tous réels strictement positifs a et b , comparer $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$.

2. Tracer la courbe représentative de la fonction logarithme népérien, placer deux points M et N, d'abscisses respectives a et b , et interpréter alors graphiquement l'inégalité obtenue.

67 Soit A le point d'abscisse α de la courbe Γ représentant la fonction \ln .

1. Écrire une équation de la tangente à Γ en A.
2. Déterminer en quel point celle-ci coupe l'axe des ordonnées.
3. En déduire une construction géométrique de la tangente en A à la courbe Γ .

Étude de fonctions

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

68 Soit f la fonction définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

1. Étudier les limites de f en 0 et en 1.
2. Étudier le sens de variation de f .
3. Représenter graphiquement f .
4. Montrer que $x \mapsto \frac{\pi(x)}{x}$ a pour limite 0 en $+\infty$ et interpréter ce résultat.

Point Info

Combien y a-t-il de nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier x ? Cette question a été si souvent posée que les mathématiciens ont donné un nom à ce nombre : $\pi(x)$. En 1896, Hadamard et De La Vallée Poussin ont démontré que, pour de grandes valeurs de x , $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$. Plus précisément la limite de $\frac{\pi(x)}{x}$ est égale à 1 quand x tend vers $+\infty$. (On pourra voir à ce sujet le manuel de spécialité page 41.)

- 69** 1. Pour tout réel x , on pose $u(x) = x + 1 + e^{-x}$. Montrer que, pour tout réel x , $u(x) > 0$.
2. Pour tout réel x , on pose $f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$ et on désigne par C la courbe représentative de f . Étudier le sens de variation de f .

3. a. Montrer que pour tout réel x :

$$f(x) = -x + \ln(xe^x + e^x + 1).$$

b. En déduire que la droite Δ d'équation $y = -x$ est asymptote à C en $-\infty$.

c. Étudier la position de C par rapport à Δ .

d. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $0 < f(x) - \ln(x) < \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$. En déduire la limite

en $+\infty$ de $x \mapsto f(x) - \ln(x)$. Préciser la position de C par rapport à la courbe $\Gamma : y = \ln(x)$.

e. Tracer C, Γ et Δ .

70 Exercice guidé

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln(x) - \frac{3}{2} \right) \text{ pour tout } x > 0.$$

Soit C la courbe représentant f .

1. a. Montrer que f est continue en 0.
- b. f est-elle dérivable en 0? Interpréter ce résultat pour la courbe C.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
4. Tracer C.

1. a. Dire que f est continue en 0, c'est dire que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Il s'agit donc de prouver que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0, \text{ c'est-à-dire } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2}{2} \left(\ln(x) - \frac{3}{2} \right) = 0.$$

La recherche de cette limite conduisant à une forme indéterminée, on essaye de transformer $f(x)$ pour faire intervenir la limite de $x \ln(x)$ en 0, connue par propriété du cours.

2. b. La fonction f étant définie de façon particulière en 0, il est impossible d'appliquer un théorème d'opération et l'on revient à la définition :

le rapport $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ a-t-il une limite finie en 0?

71 avec ROC On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

1. Rappeler $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$ et démontrer ce résultat.
2. On nomme f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
 - a. Déterminer le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$ et préciser sa limite en $+\infty$.
 - b. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
 - c. Tracer la courbe représentative de f .

72 ln et la piste de ski

Soit f la fonction définie sur $]0 ; 12[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{12-x}{x} \right) + 1.$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan (unité graphique : 1 cm).

1. a. Étudier les variations de f .
b. Montrer que le point $I(6 ; 1)$ est un centre de symétrie de C .

c. Construire C et préciser le point d'intersection de C et (Ox) .

2. La courbe C' représentative de la restriction de f à l'intervalle $[2 ; 10]$ représente le profil d'une piste de ski.

a. Prouver que la pente de cette piste ne dépasse jamais 30 %.

b. Pour quelle valeur de x , cette pente est-elle minimale ?

73 On cherche une fonction f telle que, pour tous x et y de son ensemble de définition, on ait :

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (\text{R}).$$

1. Un cas trivial

Si f est définie en 0, en appliquant (R) à $x=y=0$, déterminer $f(0)$. En appliquant (R), avec $y=0$, déterminer $f(x)$ pour tout x réel.

Quelle fonction f obtient-on ? Vérifie-t-elle bien la relation (R) ? Semble-t-elle pertinente ?

2. Une solution plus intéressante

On supposera donc dorénavant que f n'est pas définie en 0. Plus précisément, on cherche une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ qui vérifie (R).

a. En appliquant (R) à $x=y=1$, déterminer $f(1)$.

b. Fixons un réel $a > 0$.

Quelles sont les dérivées des fonctions qui, à x , associent $f(a)$, $f(x) + f(a)$ et $f(ax)$?

c. En déduire que si f vérifie (R), pour tout $x > 0$,

$$f'(ax) = \frac{1}{a} f'(x), \text{ puis que } f'(a) = \frac{k}{a}, k \text{ constante.}$$

d. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Logarithme et suite

74 Étudions la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \text{ pour } n \geq 0 \end{cases} \text{ puis la suite } (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

définie par $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$ pour tout entier n .

1. a. Montrer que, pour tout entier n , u_n est positif.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

c. En déduire qu'elle converge et trouver sa limite.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = e^{-S_n}$ et en déduire que S_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

75 Dérivées successives

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f (ainsi $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.).

Montrer par récurrence que, pour tout n entier,

$$n \geq 1, f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}} \text{ où } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont}$$

deux suites définies par $u_1 = 1$, $v_1 = -1$, et pour tout

$$n \geq 1, u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n, v_{n+1} = -(n+1)v_n.$$

3. Exprimer v_n en fonction de n puis montrer par récurrence que, pour tout n de \mathbb{N}^* , on a :

$$u_n = (-1)^{n+1} n! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

76 Soit x un entier naturel non nul.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante en termes d'encadrement pour que l'écriture décimale de x comporte exactement n chiffres.

2. Déterminer le nombre de chiffres de l'écriture décimale de 12^{253} .

3. Exprimer en fonction de x le nombre de chiffres de son écriture décimale.

4. Évaluer le nombre de chiffres de $2^{30\,402\,457} - 1$, plus grand nombre premier connu à la fin de l'année 2005 (record du 15 décembre 2005).

77 1. Démontrer que, pour tout x strictement positif,

$$\frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

2. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

a. Déduire de 1 que $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq v_n \leq \ln(2)$.

b. Montrer que la suite v_n converge et déterminer sa limite.

→ PROBLÈMES

78 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x}$; on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$.

a. Étudier le sens de variation de g et ses limites en 0 et en $+\infty$. (On ne demande pas sa représentation graphique.)

b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée a ; en déterminer une valeur approchée à 5×10^{-2} près.

c. Étudier le signe de g .

2. Étude de f

a. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$ et préciser les asymptotes éventuelles.

b. Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire le sens de variation de f .

3. Construction de C

a. Soit D la droite d'équation $y = x$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection B de D et de C ; préciser la position de C par rapport à D . Vérifier que D est une asymptote de C .

b. Construire la courbe C et la droite D en précisant la tangente à la courbe C en B .

79 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm). Soit f l'application définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On appelle Γ la courbe représentative de f . On se propose d'étudier f et de construire Γ , après avoir précisé sa position par rapport à la courbe représentative de \ln et par rapport à l'une de ses tangentes.

Partie A. Préliminaires

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On donne les valeurs approchées :

$$\ln 2 \approx 0,69; \quad \ln 3 \approx 1,10; \quad \ln 10 \approx 2,30.$$

En déduire des valeurs approchées de $\ln 0,2$ et $\ln 0,3$.

2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}^{**} par :

$$g(x) = x + 1 + \ln x.$$

a. Étudier les variations de g , et calculer ses limites en 0 et en $+\infty$.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .

Prouver que $0,2 < \alpha < 0,3$.

c. En déduire le signe de g sur \mathbb{R}^{**} .

3. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}^{**} par :

$$h(x) = x \ln x + \frac{1-x^2}{2}.$$

a. Calculer ses dérivées première et seconde : h' et h'' .

b. Étudier les variations puis le signe de h' ; en déduire les variations et le signe de h .

Partie B. Étude de f

1. Montrer que f est continue en 0.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour f ? Interpréter graphiquement.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$ (on utilisera la question A2b).

5. Étudier le signe de f' (on utilisera la question A2c) et donner le tableau de variation de f .

Partie C. Construction de Γ

1. a. Pour tout $x > 0$, on pose $\varphi(x) = f(x) - \ln x$. Étudier le signe de $\varphi(x)$ en fonction de x , et calculer la limite de φ en $+\infty$.

b. On note L la courbe représentative de la fonction \ln .

Interpréter graphiquement les résultats obtenus à la question 1a.

2. Déterminer une équation de la tangente Δ à Γ au point d'abscisse 1.

Étudier la position relative de Γ et de sa tangente Δ (on utilisera la question A3b).

3. Construire L , Δ et donner l'allure de Γ .

80 Suite de fonctions

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x(n-1 + \ln x) \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0.$$

On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan (unité graphique : 5 cm).

1. a. Étudier f_1 (continuité en 0, dérivabilité, variations, limites).

b. Construire C_1 .

2. Étudier de même f_0 et tracer C_0 sur le même graphique.

3. a. Étudier f_n .

b. On note I_n le point de C_n où la tangente est parallèle à (Ox) .

Montrer que, lorsque n varie, tous les points I_n appartiennent à une même droite D .

c. Montrer que, C_{n+1} est l'image de C_n par

l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{e}$.

Tracer alors C_2 dans le repère donné.

81 Partie A

On désigne par f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - e^{\frac{x}{2}}$ et on appelle C la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Étudier les variations de f et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f .
- Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x .
- Tracer la courbe C et la tangente au point d'abscisse 0.
- Soit m un réel. Résoudre graphiquement, suivant les valeurs de m , l'équation $f(x) = m$.
Si $m = 1$, résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 1$.

Partie B

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(e^x - e^{\frac{x}{2}}\right)$.

On note Γ la courbe représentative de g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Préciser les limites de g en 0 et en $+\infty$.
- Calculer $g'(x)$ et déterminer le signe de $g'(x)$ en utilisant le signe de $f'(x)$ et le signe de $f(x)$. Dresser le tableau de variation de g .
- Démontrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$g(x) - x = \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right).$$

Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe.

Étudier la position de la courbe Γ par rapport à D .

- Construire Γ et D . Préciser le point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. (On utilisera un graphique différent de celui de la partie A.)

82 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe Γ d'équation $y = \ln(x)$ (unité graphique : 5 cm).

- Tracer soigneusement la courbe Γ sur $]0; 2]$. Placer le point A de Γ qui semble être le plus proche de l'origine du repère. Quelle est environ la plus petite distance entre O et un point de Γ ?
- Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 + \ln(x).$$

- Déterminer le sens de variation de φ .
- Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0,5; 1]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. En déduire le signe de $\varphi(x)$.
- Pour tout x de $]0; +\infty[$, on considère le point M de Γ d'abscisse x .
 - Soit $f(x) = OM^2$.
Montrer que $f(x) = x^2 + (\ln x)^2$.
 - Déterminer le sens de variation de f .
 - En déduire que la distance OM entre O et un point M de Γ est minimale pour le point $T(\alpha; \ln(\alpha))$. Placer T sur le graphique. Montrer que la tangente en T à la courbe Γ est orthogonale à Γ .

83 Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ et C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

- Étudier le sens de variation de f sur \mathbb{R} .
- Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- Montrer la relation (R) :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } f(x) = x + \ln(1 + e^{-x}).$$

En déduire l'existence d'une asymptote à C_f en $+\infty$.

- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A de coordonnées $(0; \ln 2)$.
- Tracer la courbe C_f en utilisant tous les renseignements obtenus précédemment.

Partie B

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \ln(1 + e^{-x})$ et C_g sa courbe représentative.

- Montrer que, pour tout x réel, $g(x) = f(-x)$.
- Par quelle transformation la courbe C_g se déduit-elle de la courbe C_f ?

Tracer C_g sur le même graphique que C_f .

- Pour tout réel x , on considère le point P , milieu du segment $[MN]$, où M et N sont les points respectivement de C_f et C_g de même abscisse x . Donner une équation de la courbe Γ décrite par P quand x décrit \mathbb{R} .

La tracer point par point sur le même graphique que C_f et C_g .

Partie C

Pour m réel, $m \neq -1$, on note f_m la fonction définie

sur \mathbb{R} par $f_m(x) = \frac{f(x) + mg(x)}{1 + m}$ et C_m sa courbe représentative.

- Reconnaître les courbes C_0 et C_1 .
- Pour x réel, on note M, N, G_m les points d'abscisse x respectivement sur C_f, C_g et C_m . Que représente le point G_m pour les points M et N ?
- Vérifier que toutes les courbes C_m passent par le point $A(0; \ln 2)$.
- À l'aide de la relation (R), montrer que :

$$f_m(x) = -\frac{mx}{1 + m} + \ln(1 + e^x) \quad (1).$$

- En déduire que $f'_m(x) = \frac{e^x - m}{(1 + m)(1 + e^x)}$.
- Déterminer le sens de variation de f_m en distinguant les cas $m < -1$, $-1 < m < 0$ et $m > 0$.
- De (1), déduire que C_m admet une asymptote en $-\infty$.
- Montrer que $f_m(x) = \frac{x}{1 + m} + \ln(1 + e^{-x})$.
Que peut-on en déduire quand m tend vers $+\infty$?
- Donner l'allure des courbes C_{-2} et C_3 .

$$a^b, x^{\frac{1}{n}}, y' = ay + b$$

croissances comparées

Activité 1 ➔ En puissance

OBJECTIF

Reprendre contact avec les formules relatives aux puissances, à l'exponentielle et au logarithme puis introduire une nouvelle notation.

A ■ Vrai ou Faux ?

- a. $3^5 \times 2^3 = 6^8$; b. $\frac{6^{n+3}}{3^n} = 2^{n+3}$ ($n \in \mathbb{Z}$) ; c. $e^{3 \ln 2} = 8$;
 d. $e^{-2 \ln \sqrt{2}} = -2$; e. $e^{2 \ln a} = a^2$ pour tout a réel.

B ■ Vers de nouvelles puissances

1. Écrire plus simplement $e^{3 \ln x}$, $e^{-4 \ln x}$ pour $x > 0$.
 2. Écrire sous la forme e^α chacun des réels suivants :

$$x^4 ; x^{-2} ; \frac{1}{x^3} \text{ pour } x > 0.$$

3. Plus généralement

Pour quels réels a et b peut-on définir le réel $e^{b \ln a}$?

Dans ce cas, en s'inspirant des cas précédents où b était un entier, quelle autre notation sous forme de puissance peut-on envisager pour le réel $e^{b \ln a}$?

4. Écrire alors sous forme e^α les réels suivants :

$$2^{1,6} ; \sqrt{3}^{4,01} ; 10^{-7,6}.$$

C ■ Des puissances aux racines

1. Écrire sous forme e^α le réel $x^{\frac{1}{2}}$ pour $x > 0$ et en déduire son carré. Comment peut-on encore exprimer ce réel en fonction de x ?
 2. Soit n un entier naturel non nul et x un réel strictement positif.

En reprenant la même démarche que dans la question précédente, calculer $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n$.

Activité 2 ➔ Intérêts composés

OBJECTIF

Introduire l'équation $x^{10} = 2$ et la racine dixième.

On place une somme de 5 000 € à i % par an, cette somme étant bloquée pendant 10 ans. Les intérêts sont capitalisés tous les ans.

On note C_0 le capital initial et C_n le capital obtenu au bout de n années ($n \geq 1$).

1. Dans cette question uniquement, on prend $i \% = 4 \%$.
 a. Déterminer la nature de la suite (C_n) puis exprimer C_n en fonction de n .
 b. Quel est le capital obtenu au bout de 10 ans ?

2. Montrer que, de façon générale, pour $n \geq 0$, $C_n = C_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$.

3. On cherche quelle doit être la valeur i_0 de i pour que le capital ait doublé au bout de 10 ans.

a. Montrer que i_0 est solution de l'équation (E) à l'inconnue i :

$$\left(1 + \frac{i}{100}\right)^{10} = 2.$$

b. À la calculatrice, trouver une valeur approchée de i_0 à 0,1 près.

c. Par le calcul, on pose $x = 1 + \frac{i}{100}$.

Montrer que, sur $]0 ; +\infty[$, $x^{10} = 2$ équivaut à $10 \ln x = \ln 2$; en déduire x puis i_0 .

Activité 3 ➔ Une équation différentielle en chimie

Lors d'une réaction d'oxydoréduction, on note x le volume de solution versé à l'instant t de la réaction (t est en secondes) et a la valeur limite de x correspondant à la réaction totale ($a > 0$).

x est donc une fonction du temps telle que, pour tout t positif :

$$0 \leq x(t) \leq a \quad \text{et} \quad x(0) = 0.$$

On sait que la fonction x vérifie l'équation différentielle (1) :

$$\frac{dx}{dt} = K(a - x)$$

où K est une constante dépendant des réactifs mis en présence.

On veut déterminer x en fonction de t .

1. Nous allons effectuer un changement de fonction inconnue.

Posons $y = a - x$, y représentant le volume de solution restant à verser pour que la réaction soit complète.

a. Calculer $y(0)$.

b. Calculer $\frac{dy}{dt}$ en fonction de $\frac{dx}{dt}$. En déduire que y est solution d'une équation différentielle plus simple que (1).

c. Résoudre sur $[0 ; +\infty[$ l'équation différentielle (2) :

$$\frac{dy}{dt} = -Ky.$$

d. Donner la solution de (2) qui vérifie $y(0) = a$.

2. Déduire de ce qui précède que $x(t) = a(1 - e^{-Kt})$.

Étudier les variations de x sur $[0 ; +\infty[$.

3. On a obtenu expérimentalement $x(10) = 4,2$ et $x(20) = 7,5$.

a. Montrer que a vérifie la relation :

$$(a - 4,2)^2 = a(a - 7,5).$$

En déduire la valeur de a .

b. Tracer la représentation graphique de la fonction x dans un repère en prenant $a = 19,6$.

OBJECTIF

Introduire une équation différentielle $y' = ay + b$, et la résoudre.

1. Équation différentielle

$y' = ay + b$

Théorème 1 → Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$) sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Propriété 1 → Soit deux réels x_0 et y_0 ; il existe une seule solution f de $y' = ay + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$) vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Exemple :

Cherchons la fonction g , solution de (E) : $y' = 2y - 3$, telle que $g(0) = 1$.

On sait que $g(x) = Ce^{2x} + \frac{3}{2}$ où C est une constante réelle.

Alors $g(0) = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$.

Donc g est définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}$.

2. Croissances comparées

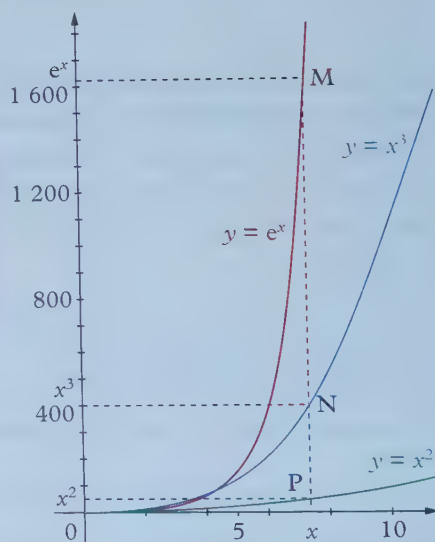
Il s'agit de comparer le comportement des fonctions \exp et \ln à celui des fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Théorème 2 → Si n est un entier strictement positif :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

On peut retenir qu'au voisinage de $+\infty$:

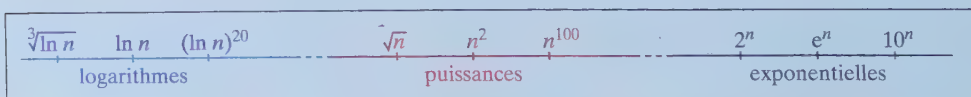
- « toute puissance x^n de x , $n \in \mathbb{N}^*$, l'emporte sur le logarithme » ;
- « la fonction exponentielle l'emporte sur toute puissance x^n de x , $n \in \mathbb{N}^*$ ».



Application

Pour les suites (u_n) et (v_n) considérées sur le graphique ci-dessous, pour u_n

à gauche de v_n , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = +\infty$.



→ DÉMONSTRATIONS

■ Théorème 1 et propriété 1

Pour $a \neq 0$, (E) : $y' = ay + b$ équivaut à $y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$.

Si on note $z = y + \frac{b}{a}$ alors $z' = y'$ et (E) équivaut à (E') : $z' = az$.

Les solutions de (E') sont les fonctions g définies sur \mathbb{R} par $g(x) = Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) + \frac{b}{a} = g(x)$, c'est-à-dire $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, C étant une constante réelle quelconque.

De plus, $f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow C = \frac{y_0 + \frac{b}{a}}{e^{ax_0}}$. Il y a donc une seule solution de (E) vérifiant $f(x_0) = y_0$.

■ Théorème 2

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

• $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{n} \frac{\ln(x^n)}{x^n}$. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ (chapitre 5) donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^n}{x^n} = 0$ par théorème de composition. Par suite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

• $x^n \ln x = -\frac{\ln \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}$. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc, en utilisant le résultat précédent, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ par théorème de composition.

• $\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{n \ln x}} = e^{x - n \ln x}$. De $x - n \ln x = x \left(1 - n \frac{\ln x}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - n \ln x = +\infty$ puis, par composition, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Pour tout x réel et $n \in \mathbb{N}^*$

$x^n e^x = \frac{(-1)^n (-x)^n}{e^{-x}}$. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$, on déduit, par composition, en utilisant le résultat précédent que

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)^n} = +\infty$ et donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-x)^n}{e^{-x}} = 0$ puis que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

→ APPLICATION

Exercice 1 Déterminer une limite

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x - \ln x$.

Solution

Pour $x > 0$, $x^2 - x - \ln x = x^2 \left[1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2}\right]$.

De $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

on déduit par théorèmes d'opérations que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x - \ln x = +\infty.$$

Méthode

Les croissances comparées en l'infini permettent de savoir quel terme « l'emporte » sur les autres et de le mettre en facteur pour lever une indétermination.

voir exercices n° 12 à 16

3. Puissance d'exposant réel

A ■ Notation a^b avec b réel et a réel strictement positif

On sait que, pour tout x réel strictement positif et p entier relatif, $e^{p \ln x} = x^p$.

Définition 1 → Si a est un réel strictement positif et b un réel quelconque, on appelle a « puissance » b et on note a^b le réel $e^{b \ln a}$:

$$a^b = e^{b \ln a} \quad \text{pour } a \in \mathbb{R}^{*+}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Propriété 2 → Soit a, b, c et d des réels tels que $a > 0, b > 0$;

Règles de calculs algébriques

- $\ln(a^b) = b \ln a$;
- $a^{c+d} = a^c a^d$;
- $a^{-c} = \frac{1}{a^c}$;
- $(a^c)^d = a^{cd}$;
- $(ab)^c = a^c b^c$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$.

Remarque : Ces formules sont analogues à celles que l'on connaît déjà avec des exposants entiers.

B ■ Racines énièmes

Propriété 3 et définition 2 → Soit n un entier naturel non nul. Si a est un réel positif, l'équation $x^n = a$ admet une solution unique dans $[0 ; +\infty[$, cette solution est appelée **racine énième** de a et notée $\sqrt[n]{a}$.

Racine énième d'un réel positif

- Si a est un réel strictement positif, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Exemple :

Pour $x > 0$, $x^{\frac{1}{2}}$ est une autre écriture de \sqrt{x} :

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8 \quad \text{ou} \quad 4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8.$$

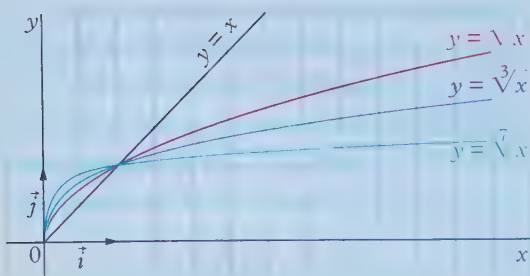
Propriété 4 et définition 3 → Si n est un entier naturel non nul, on appelle fonction racine énième la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

La fonction racine énième

Sur $]0 ; +\infty[$, $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ et f est dérivable avec $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

Remarques

- f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- Si $n = 1$, $f(x) = x$, f est dérivable en zéro et sa courbe représentative est une demi-droite.
- Si $n \geq 2$, f n'est pas dérivable en 0 mais sa courbe représentative admet une tangente verticale à l'origine du repère.
- Si $p \in \mathbb{Z}, -q \in \mathbb{Z}^*$, la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ est dérivable avec $f'(x) = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$ pour $x > 0$.



→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 2

En utilisant les propriétés des fonctions logarithme et exponentielle népériennes :

- $\ln(a^b) = \ln(e^{b \ln a}) = b \ln a$ pour $a > 0$;
- si $y = a^{c+d}$ avec $a > 0$, alors $y > 0$ et :

$$\ln y = (c+d) \ln a = c \ln a + d \ln a = \ln(a^c) + \ln(a^d) = \ln(a^c a^d) \text{ d'où } y = a^c a^d ;$$

- si $y = (ab)^c$ avec $a > 0$ et $b > 0$, alors $y > 0$ et :

$$\ln y = c \ln(ab) = c(\ln a + \ln b) = c \ln a + c \ln b = \ln(a^c b^c) \text{ d'où } y = a^c b^c .$$

Les trois autres égalités se démontrent de la même façon.

■ Propriété 3

Soit l'équation (E) : $x^n = a$ sur $]0 ; +\infty[$ où a est un réel positif ou nul.

- Si $a = 0$, la seule solution de (E) est alors $x = 0$.
- Si $a > 0$, alors $x > 0$ et on sait que si b et c sont deux réels strictement positifs, $b = c \Leftrightarrow \ln b = \ln c$.

On a donc (E) $\Leftrightarrow n \ln x = \ln a$ d'où (E) $\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{n} \ln a$ et par suite (E) $\Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{n} \ln a}$.

(E) a bien une solution unique dans $]0 ; +\infty[$ qui est $\sqrt[n]{a} = e^{\frac{1}{n} \ln a}$, et si on utilise la définition de la puissance d'un réel positif, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

- **Conclusion :** (E) admet une solution unique dans $]0 ; +\infty[$, pour tout $a \geq 0$, et si $a > 0$, cette solution peut s'écrire $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

■ Propriété 4

$$f(x) = e^{\frac{1}{n} \ln x} = e^{u(x)} \text{ avec } u(x) = \frac{1}{n} \ln x .$$

La fonction u est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} , donc la fonction composée $\exp \circ u$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = u'(x) \times \exp \circ u(x)$.

$$\text{Ce qui donne } f'(x) = e^{\frac{1}{n} \ln x} \frac{1}{nx} = \frac{1}{n} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{x^1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \text{ pour } x > 0 .$$

→ APPLICATION

Exercice 2 Utiliser des exposants rationnels pour résoudre des équations

Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'équation (E) : $5x(x^2 + \sqrt{x}) = 3(1 + x^3)$. On posera $X = x\sqrt{x}$.

Solution

(E) peut aussi s'écrire $2x^3 + 5x\sqrt{x} - 3 = 0$.

Posons $X = x\sqrt{x}$, X peut aussi s'écrire $x^1 x^{\frac{1}{2}}$ c'est-à-dire $x^{\frac{3}{2}}$ et de plus $X \geq 0$.

(E) peut alors s'écrire $2X^2 + 5X - 3 = 0$. Cette équation a pour solutions :

$$X_1 = \frac{1}{2} \text{ et } X_2 = -3 .$$

Seule X_1 convient. Il faut alors résoudre, sur $]0 ; +\infty[$, $x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$, ce qui équivaut à $x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ et par suite à $x = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$.

voir exercices n° 23, 24, 25

4. Fonctions exponentielles

Les solutions de l'équation différentielle $y' = \alpha y$, $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$, sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = Ce^{\alpha x}$.

Il existe une unique solution telle que $f(0) = 1$, donnée par $f(x) = e^{\alpha x}$. On peut désormais écrire $f(x) = (e^\alpha)^x$ puisque $e^\alpha > 0$. Autrement dit, $f(x) = a^x$ avec $a = e^\alpha$.

Ces fonctions sont aussi appelées des fonctions exponentielles.

On retrouve la fonction exp comme cas particulier pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire $a = e$.

Définition 4 → Soit a un réel strictement positif, on appelle fonction exponentielle de base a la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

Cas particuliers

- Si $a = 1$, f est la fonction constante égale à 1.
- Si $a = e$, f est la fonction exponentielle népérienne exp.

La fonction f exponentielle de base a définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a^x$ est la composée de la fonction linéaire $x \mapsto (\ln a)x$ suivie de la fonction exp.

On obtient immédiatement par théorème de composition les résultats suivants :

- f est dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = a^x \ln a$;
- si $a > 1$, f est strictement croissante sur \mathbb{R} et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 ;$$

- si $0 < a < 1$, f est strictement décroissante sur \mathbb{R} et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty .$$

On résume ces résultats dans les tableaux de variation suivants.

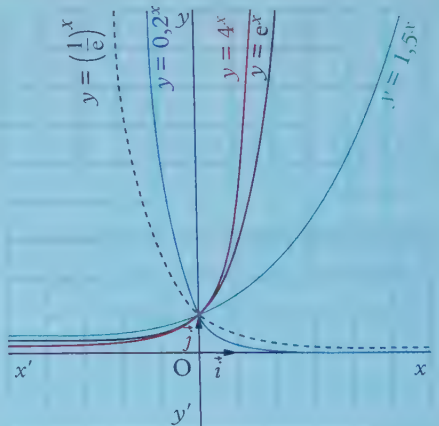
Propriété 5

- Si $a > 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x	0	1	$+\infty$

- Si $0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x	$+\infty$	1	0



Remarques

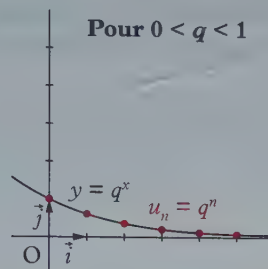
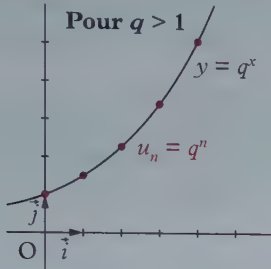
- Dans le cas où $a > 1$, le comportement est analogue à celui de la fonction exp qui correspond au cas où $a = e$.
- Dans le cas où $0 < a < 1$, le comportement est analogue à celui de la fonction qui à x associe e^{-x} qui correspond au cas où $a = \frac{1}{e}$.
- Pour $a > 0$ et $a \neq 1$, de la stricte monotonie de f , on déduit $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

→ ILLUSTRATION

■ Fonctions exponentielles et suites géométriques (q^n)

Pour $q > 0$, et n entier naturel, $q^n = \exp_q(n)$ où \exp_q désigne la fonction exponentielle de base q .

La représentation graphique de la suite (q^n) est donc formée, pour $q > 0$, des points d'abscisses entières de la courbe représentant la fonction exponentielle de base q .



→ APPLICATION

Exercice 3 Étudier des positions respectives des courbes $C_a : y = a^x$

Le plan est rapporté à un repère $(\vec{O} ; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal.

1. Soit a et b deux réels strictement positifs avec $a < b$.

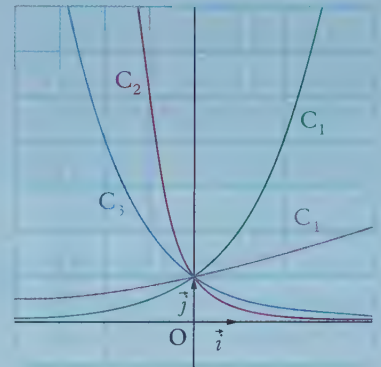
a. Étudier la position de C_a et C_b d'équations $y = a^x$ et $y = b^x$.

b. Quelle précision supplémentaire peut-on apporter sur ces deux courbes dans le cas où $b = \frac{1}{a}$?

2. On a représenté ci-contre les courbes d'équations suivantes :

$$y = 2^x, \quad y = 0,2^x, \quad y = 1,2^x \quad \text{et} \quad y = 0,5^x.$$

Retrouver l'équation de chacune des courbes.



Solution

1. a. La position respective de C_a et C_b est donnée par la comparaison de $b^x = e^{x \ln b}$ et $a^x = e^{x \ln a}$. Or, pour tout x réel, $b^x - a^x = e^{x \ln b} - e^{x \ln a}$.

De $0 < a < b$, on déduit que $\ln a < \ln b$. On distingue ensuite deux cas :

- si $x \geq 0$, $x \ln a \leq x \ln b$ puis $e^{x \ln a} \leq e^{x \ln b}$, soit $a^x \leq b^x$ car \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} ;
- si $x \leq 0$, $x \ln a \geq x \ln b$ d'où $e^{x \ln a} \geq e^{x \ln b}$, c'est-à-dire $a^x \geq b^x$.

La courbe C_b est donc au-dessus de la courbe C_a sur $[0 ; +\infty[$ mais en dessous sur $]-\infty ; 0]$.

b. Si $b = \frac{1}{a}$, $b^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$. Si on note \exp_a et \exp_b les fonctions exponentielles de bases respectives

a et b , on a, pour tout x réel, $\exp_b(x) = \exp_a(-x)$.

Les courbes C_a et C_b sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Les courbes C_1 et C_4 représentent des fonctions croissantes. Ce sont les courbes d'équation $y = 1,2^x$ et $y = 2^x$, comme $1,2 < 2$, on déduit de la question 1 que la courbe C_1 est celle d'équation $y = 2^x$ et C_4 celle d'équation $y = 1,2^x$.

Les courbes d'équations $y = 2^x$ et $y = 0,5^x$ étant symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, on en déduit que C_3 a pour équation $y = 0,5^x$. Pour finir, C_2 a pour équation $y = 0,2^x$.

1. Une utilisation en statistiques

OBJECTIF : Réaliser un ajustement par la méthode de Meyer.

Au cours d'une expérience de physique, on a mesuré les variations de l'intensité I d'un courant (en mA) dans un circuit pendant qu'on augmentait la tension U (en V) aux bornes d'une lampe. Les résultats obtenus figurent dans le tableau suivant (k représente le numéro de la mesure).

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Intensité I_k	36	51	81	100	132	155	175	200	222	250
Tension U_k	0,1	0,2	0,5	0,8	1,5	2	2,5	3	4	5

1. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, placer les dix points M_k de coordonnées $(I_k ; U_k)$; ce sera la figure 1.

Le **but** du TP est de trouver une fonction dont la courbe passe le plus près possible de ces dix points.

2. Pour chaque valeur de k , on pose $x_k = \ln I_k$ et $y_k = \ln U_k$.

a. Recopier et compléter le tableau suivant (les résultats seront arrondis au millième le plus proche).

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k										
y_k										

b. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, placer les dix points $N_k(x_k ; y_k)$ sur une figure 2.

c. Les dix points précédents sont pratiquement alignés, on va donc chercher une équation de droite passant le plus près possible de ces dix points.

Déterminer les coordonnées de G isobarycentre des points N_1, N_2, N_3, N_4 et N_5 , puis celles de H isobarycentre des cinq points restants.

Placer G et H sur la figure 2 et tracer (GH) .

Donner l'équation réduite de la droite (GH) .

On dit que la droite (GH) **ajuste linéairement** le nuage formé par les points N_1, \dots, N_{10} .

La méthode utilisée est appelée **méthode de Meyer**.

3. Dans la suite, on prendra comme équation de (GH) la « forme approchée » :

$$y = 2,012x - 9,495.$$

a. En posant $x = \ln I$ et $y = \ln U$, déterminer α et β tels que $U = \beta I^\alpha$.

b. Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(I) = 7,5 \times 10^{-5} I^{2,012}$.
En remplaçant $I^{2,012}$ par $e^{2,012 \ln I}$, étudier les variations de f .

c. Tracer la courbe représentative de f dans le repère de la figure 1.

Remarque : La formule théorique de physique correspondant à ces mesures est $U = RI^2$ où R est la résistance de la lampe.

2. La calculatrice a-t-elle raison ou tort ?

OBJECTIF : Comprendre les calculs de racines énièmes faits par la calculatrice.

1. Étude de la fonction racine cubique

On appelle f la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

- a. Étudier le comportement de f aux bornes de son ensemble de définition.
- b. Calculer $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$, en déduire le sens de variation de f .
- c. Étudier la dérivabilité de f en 0.

On obtient la représentation graphique ci-contre (figure 1).

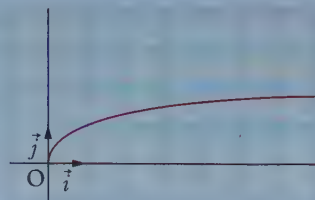


Figure 1

2. Tracé à la calculatrice

Représenter la fonction f sur une calculatrice graphique. Pour de nombreux modèles, la courbe qui apparaît sur l'écran est celle de la figure 2. Il y a évidemment une contradiction !

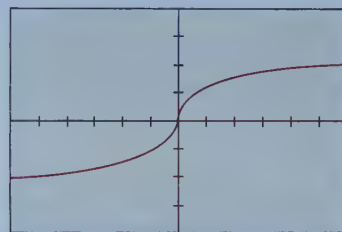


Figure 2

3. Explication

Montrer que l'équation $x^3 = a$ admet une solution unique x_0 dans \mathbb{R} pour tout réel a (on pourra utiliser les variations de $g(x) = x^3$ sur \mathbb{R}).

Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par $a \mapsto h(a)$, $h(a)$ étant l'unique

solution dans \mathbb{R} de l'équation $x^3 = a$. C'est la fonction h que représentent les calculatrices et non la fonction f . Cela se produit pour toutes les fonctions racines énièmes pour n impair.

Remarque : Théoriquement, $(-8)^{\frac{1}{3}}$ n'a pas de sens, pourtant la plupart des calculatrices donnent $(-8) \square (1 \div 3) = -2$ (car -2 est la solution de $x^3 = -8$). Dans ce cas, il vaut mieux utiliser la notation $\sqrt[3]{-8}$.

3. Croissance comparée de $n!$ et 5^n

OBJECTIF : Comparer $n!$ et 5^n .

On veut étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_n = \frac{n!}{5^n}$ pour $n \geq 0$.

1. En programmant une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-5} près des dix premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer ?

2. Soit la suite de terme général v_n définie par $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour $n \geq 0$.

Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $v_n > 1$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

3. a. Montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel $v_n > 2$.

b. Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 10, $u_n > 2^{n-10} u_{10}$.

En déduire la limite de la suite (u_n) .

4. Généralisation

Reprendre les questions 2 et 3 pour la suite dont le terme général est $w_n = \frac{n!}{p^n}$ pour $n \geq 0$, p étant un entier naturel tel que $p \geq 1$ (il faudra bien sûr changer la valeur de n_0).

4. Une application des équations différentielles à la biologie

OBJECTIF : Utiliser une équation différentielle $y' = ay + b$.

Une étude sur le comportement d'organismes vivants placés dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence a conduit à modéliser l'évolution de la population par une fonction N telle que :

$$(1) \quad N'(t) = 2N(t) - 0,0045(N(t))^2$$

où t est le temps exprimé en heures ($t \geq 0$), $N(t)$ représente le nombre d'individus présents dans l'enceinte à l'instant t , et $N(0) = 1000$ est le nombre initial d'individus.

Le but de l'exercice est de déterminer la fonction N .

1. On se propose de remplacer (1) par une équation différentielle plus simple puis de la résoudre.

a. On suppose que la fonction N ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ et on pose, pour tout $t \geq 0$:

$$q(t) = \frac{1}{N(t)}.$$

Calculer la dérivée de la fonction q .

b. Montrer que N est solution de (1) si et seulement si q est solution de :

$$(2) \quad q'(t) = -2q(t) + 0,0045.$$

c. Donner la forme générale des solutions de (2), en déduire la forme générale des solutions de (1).

d. Montrer que la solution de (1) vérifiant les conditions initiales est :

$$N(t) = \frac{1}{0,00225 - 0,00125e^{-2t}}.$$

2. Étude de la fonction trouvée

On appelle (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (5 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 sur l'axe des ordonnées).

a. Étudier les variations de N sur $[0 ; +\infty[$.

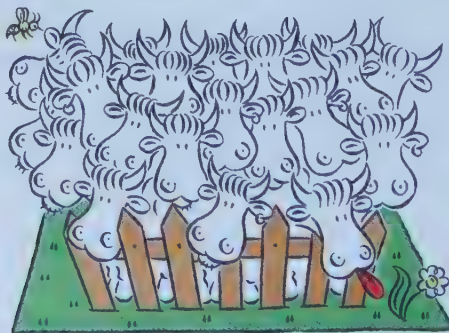
b. Montrer que (Γ) admet une asymptote (d) au voisinage de $+\infty$.

c. Donner une équation de (T) tangente à la courbe au point d'abscisse nulle.

d. Représenter (Γ) , (d) et (T) dans le repère.

3. Déterminer graphiquement puis par le calcul l'instant t où la population initiale aura diminué de moitié.

D'après BTS Analyses biologiques, 1998.



EXERCICES RÉSOUS

1 Déterminer la limite des fonctions suivantes quand x tend vers $+\infty$:

a. $f(x) = x^2\sqrt{x} - \ln x$ pour $x > 0$; **b.** $g(x) = \frac{1,1^x}{x^{11}}$.

Solution

a. $f(x) = x^2\left(\sqrt{x} - \frac{\ln x}{x^2}\right)$ pour $x > 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, par propriété, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. Par théorème d'opération, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $g(x) = \frac{e^{x \ln 1,1}}{x^{11}} = \frac{e^{x \ln 1,1}}{(x \ln 1,1)^{11}} \times (\ln 1,1)^{11}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln 1,1 = +\infty$, car $\ln 1,1 > 0$, et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^{11}} = +\infty$ par propriété.

Par théorème de composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 1,1}}{(x \ln 1,1)^{11}} = +\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

voir aussi exercices n° 12 à 16

2 1. Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 1 - 2^x$.

2. Résoudre l'inéquation $2^x \leq x + 1$ sur \mathbb{R} .

Solution

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \left(\frac{x}{e^{x \ln 2}} + \frac{1}{2^x} - 1 \right) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x \ln 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 2}{e^{x \ln 2}} \times \frac{1}{\ln 2} = 0$ (utilisation de la limite usuelle $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$).

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$.

• La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions dérivables et $f'(x) = 1 - \ln 2 \cdot 2^x$.

$f'(x) = 0$ équivaut à $2^x = \frac{1}{\ln 2}$, c'est-à-dire $e^{x \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$, soit $x \ln 2 = \ln\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$ et donc $x = -\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$.

$f'(x) > 0$ équivaut à $2^x < \frac{1}{\ln 2}$, c'est-à-dire $x < -\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$ car $\ln 2$ est positif.

On obtient alors le tableau de variation suivant (on remarquera que $f(0) = f(1) = 0$).

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		0	$f(x_0)$	0	$-\infty$

$$x_0 = -\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$$

2. L'inéquation $2^x \leq x + 1$ équivaut à $f(x) \geq 0$.

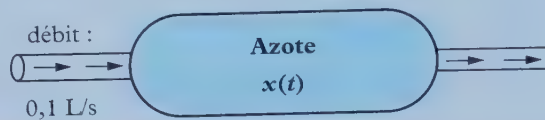
Par la réponse à la question 1, $f(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [0 ; 1]$ et, par suite, l'ensemble des solutions de $2^x \leq x + 1$ est $S = [0 ; 1]$.

voir aussi exercices n° 39, 78, 79

3 Un problème de mélange

Un réservoir contient dix litres d'air composé de 20 % d'oxygène et de 80 % d'azote. On injecte de l'azote, dans ce réservoir, à raison de 0,1 litre par seconde ; le même débit de gaz s'échappe du réservoir. Le mélange des gaz est supposé homogène. On appelle $x(t)$ la proportion volumique d'azote contenu dans le réservoir à l'instant t et $V(t)$ le volume d'azote contenu dans le réservoir à l'instant t ; t est exprimé en secondes et $V(t)$ en litres.

1. Quelle relation lie $V(t)$ et $x(t)$?
2. Quel est le volume d'azote entrant dans le réservoir entre les instants t et $t + \Delta t$? Quel est le volume d'azote sortant du réservoir dans le même temps ?
3. En déduire la variation ΔV du volume d'azote contenu dans le réservoir entre les instants t et $t + \Delta t$; puis la variation Δx du pourcentage d'azote.
4. En faisant tendre Δt vers 0, montrer que la fonction x vérifie $x'(t) = 0,01(1 - x(t))$.
5. Déterminer la fonction $x(t)$.
6. Au bout de combien de temps le réservoir contiendra-t-il 99 % d'azote ?



Solution

1. Le réservoir contenant dix litres de mélange, par définition, on a $V(t) = 10x(t)$.
2. Le débit d'azote valant 0,1 L/s, le volume d'azote entrant dans le réservoir entre t et $t + \Delta t$ est de $0,1\Delta t$. Le débit de sortie étant identique, le volume d'azote sortant du réservoir dans le même temps est $0,1x(t)\Delta t$ car la proportion d'azote dans le mélange de sortie est $x(t)$. (On suppose que Δt est suffisamment petit pour que l'on puisse considérer que la concentration en azote ne change pas entre les instants t et $t + \Delta t$.)
3. La variation du volume d'azote entre t et $t + \Delta t$ est :

$$\Delta V = (1 - x(t))0,1\Delta t.$$

Celle du pourcentage d'azote est :

$$\Delta x = \frac{\Delta V}{10} = \frac{0,1}{10} (1 - x(t))\Delta t.$$

4. Comme $x(t + \Delta t) - x(t) = 0,01(1 - x(t))\Delta t$, la fonction x vérifie la relation :

$$x'(t) = 0,01(1 - x(t)).$$

Cela signifie que x est solution de l'équation différentielle $y' = 0,01(1 - y)$, que l'on peut encore écrire $y' = -0,01y + 0,01$.

5. En résolvant l'équation différentielle précédente, on trouve que $x(t) = 1 + Ke^{-0,01t}$ où K est une constante réelle. Comme $x(0) = 0,80$, on trouve K en résolvant $1 + Ke^0 = 0,80$. Donc :

$$x(t) = 1 - 0,2e^{-0,01t}.$$

6. On résout $1 - 0,2e^{-0,01t} = 0,99$; soit encore $e^{-0,01t} = \frac{1}{20}$ donc $t = -100 \ln\left(\frac{1}{20}\right) = 100 \ln(20)$.

Le réservoir contiendra donc 99 % d'azote au bout de $100 \ln(20)$ secondes, c'est-à-dire approximativement cinq minutes.

voir aussi exercices n° 6, 7, 8, 60, 61

→ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Équations différentielles

1 Résoudre les équations différentielles :
a. $y' = 4y + 2$; **b.** $2y' - 5y = -3$.

2 avec ROC

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' = 5y$.
 2. En posant $z = y - \frac{2}{5}$, déterminer les solutions de :
 $y' = 5y - 2$ (E).

3 Pour chacune des équations différentielles suivantes, donner la solution vérifiant $f(a) = b$.

- a.** $y' - 3y = 2$, $a = 0$, $b = 1$;
b. $3y' + 4y = 1$, $a = 1$, $b = 3$;
c. $y' = 2(y + 1)$, $a = 2$, $b = 4$.

4 1. Résoudre l'équation différentielle (E_k) :

$$y' = k(y - 1) \quad (k \in \mathbb{R}).$$

2. Trouver k pour que (E_k) admette comme solution une fonction f telle que $f(0) = 2$ et $f(1) = 4$.

5 Suite à un incident nucléaire, on relève à l'instant t (en heures) le nombre $y(t)$ de particules radioactives recueillies par un appareil de mesure radioactive pendant une seconde. Une étude approfondie amène à faire l'hypothèse que y est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = a(y - 2)$$

où a est une constante positive.

- Déterminer la solution générale de l'équation (E).
- Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 170$.
- Sachant que $y(6) = 9$, déterminer la valeur de a .

6 Dissolution

On dispose d'une substance soluble dans l'eau. À l'instant $t = 0$, on en verse 50 grammes dans un volume d'eau suffisant pour qu'elle se dissolve en totalité. On note $x(t)$ la quantité dissoute à l'instant t ; $x(t)$ est exprimée en grammes et t en secondes.

1. Modèle : on admet que la vitesse de dissolution de cette substance est proportionnelle à la quantité non encore dissoute.

a. Justifier l'existence d'un réel λ tel que :

$$x'(t) = \lambda(50 - x(t)).$$

b. De quelle équation différentielle (E) la fonction x est-elle solution ?

2. a. Montrer que $x(t) = -50e^{-\lambda t} + 50$.

b. Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en quatre minutes, déterminer λ et exprimer $x(t)$ en fonction de t .

7 Effet Joule

On se propose d'étudier l'échauffement d'un conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité constante. Par effet Joule, le conducteur s'échauffe et sa température $\theta(t)$ (en °C) est fonction du temps t (en secondes).

À l'instant $t = 0$ de la mise sous tension, la température du conducteur est $\theta(0) = 0$ °C.

Dans les conditions de l'expérience, le bilan énergétique se traduit par l'équation :

$$\theta'(t) + 20\lambda\theta(t) = 2$$

où λ est une constante dépendant du conducteur et des conditions de l'expérience.

On prend $\lambda = 5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.

- Exprimer $\theta(t)$ en fonction de t .
- Quel est le temps nécessaire pour que la température du conducteur atteigne une valeur de 10 °C ?
- Calculer la température limite du conducteur, c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t)$.
- Tracer la courbe Γ représentative de θ dans un repère du plan.

8 La cuisson du jambon

Une société produit des jambons industriels. Les jambons sont d'abord moulés, puis cuits à température constante par convection.

Chaque jambon est moulé à $T_0 = 10$ °C avant d'être introduit dans un four maintenu à température constante de 75 °C. La température $T(t)$ (en °C) au cœur du jambon vérifie à chaque instant t ($t \geq 0$ en heures) l'équation différentielle :

$$(E) \quad \frac{dT}{dt} + KT = 75K$$

K étant une constante positive dépendant des conditions de cuisson.

- Déterminer T en fonction de t , c'est-à-dire la solution de (E) qui vaut 10 en $t = 0$.
- Au bout de neuf heures, la température à cœur atteint 62 °C. Déterminer la valeur de la constante K .
- Étudier la fonction $t \rightarrow T(t)$ sur l'intervalle $[1 ; 15]$ et tracer la courbe représentative de cette fonction.

9 On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' - y = 2e^x.$$

- Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (2x + 1)e^x$ est solution de (E).
- Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' - y = 0$.
- Résoudre (E').
- En déduire toutes les solutions f de (E).

EXERCICES

10 Soit (E) l'équation différentielle $y' + 3y = x$.

1. a. Si P est une fonction polynôme solution de (E), quel doit être le degré de P ?

b. Déterminer une fonction polynôme P solution de (E).

2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - P$ est solution de l'équation :

$$(E') \quad y' + 3y = 0.$$

3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

11 vu au BAC On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' - 2y = e^{2x}.$$

1. a. Démontrer que la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_0) \quad y' - 2y = 0.$$

c. Démontrer qu'une fonction v définie sur \mathbb{R} est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E₀).

d. En déduire les solutions de l'équation (E).

e. Déterminer la fonction f , solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormal. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+1)e^{2x}$ et on note (C) la courbe représentative de f dans ce repère.

a. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Étudier les variations de f , dresser son tableau de variation et représenter (C).

Croissance comparée Étude de fonctions

12 Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x \ln x$; b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + \ln(x+1)$;

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x - x^2 + x$; d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{2x}$.

13 Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x$; b. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \frac{1}{x}$;

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$; d. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x$.

14 Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x}$; b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$;

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{-x}$; d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$.

15 Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 - 4}$;

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{x^2}$;

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{\ln x}$;

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{e^x}$.

16 Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(2x^3)$;

b. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2 + x)$;

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^x$;

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2}$.

17 vu au BAC Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - x + 1 - \ln x$.

1. Étudier f (variation, limites).

2. Donner une représentation graphique de f .

Dans les exercices 18 à 20, étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

18 $f(x) = x^2 \left(\ln x - \frac{3}{2} \right)$ sur $]0 ; +\infty[$.

19 $f(x) = x^2 e^{-x}$ sur \mathbb{R} .

20 $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

21 avec ROC

1. On prend pour prérequis la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$.

2. Soit f la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \ln x$ si $x > 0$.

a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b. Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative dans un repère du plan.

22 Pour tout n entier naturel non nul, on appelle f_n la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + n \ln x}{x^2}$$

et C_n sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 5 cm). Toutes les courbes seront tracées sur le même graphique.

1. Étudier le sens de variation et les limites en 0 et $+\infty$ des fonctions f_1 et f_2 .

Dresser leurs tableaux de variation.

2. Tracer les courbes C_1 et C_2 .

3. a. Étudier le sens de variation de f_n et ses limites en 0 et $+\infty$.

b. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ en fonction de x . Interpréter graphiquement.

Racines énièmes

23 Résoudre dans $]0; +\infty[$:
a. $x^3 = 8$; **b.** $x^5 = 100$; **c.** $(x-1)^3 = 2$.

24 Résoudre les équations :
a. $x^{\frac{1}{5}} = 3$; **b.** $x^{\frac{2}{3}} = 5$; **c.** $(x+2)^{\frac{1}{4}} = 3$.

25 Résoudre les inéquations :
a. $x^{\frac{5}{3}} \geq 2$; **b.** $(x-2)^{\frac{2}{7}} \leq 3$.

26 Écrire sous la forme d'une puissance rationnelle de x :

a. $(x^2 x^{\frac{1}{3}})^2$; **b.** $x^{\frac{1}{4}} x x^{-\frac{2}{5}}$; **c.** $\frac{x^{-2} x^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{2}{5}}}$; **d.** $\sqrt[4]{x^3 x^{\frac{1}{2}}}$.

27 Simplifier les expressions suivantes.

a. $\frac{5\sqrt{4}\sqrt{8}(\sqrt[5]{3}\sqrt[3]{4})^2}{\sqrt{\sqrt{2}}}$; **b.** $\frac{15\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}(\sqrt{9})^3}{\sqrt[4]{27}(\sqrt{\sqrt{3}})^2}$.

28 En utilisant la formule :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

transformer l'expression $\frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}}$ de telle sorte que son dénominateur soit un entier.

29 Calculer la dérivée de f .

a. $f(x) = 5\sqrt[3]{x}$; **b.** $f(x) = x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{3}{4}}$; **c.** $f(x) = \frac{2}{x^{\frac{5}{3}}}$;

d. $f(x) = \sqrt{x-1}(x-1)^2$ de deux façons différentes.

30 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} \quad \text{si } x \geq 1.$$

1. Calculer $f'(x)$ pour $x > 1$.

2. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$; interpréter graphiquement.

31 Étudier les fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^{\frac{4}{5}}$ sur $]0; +\infty[$ et $f(0) = 0$ (étudier la dérivabilité en 0) ;

b. $f(x) = x^{\frac{7}{3}}$ sur $]0; +\infty[$ et $f(0) = 0$ (étudier la dérivabilité en 0) ;

c. $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ sur $]0; +\infty[$.

Fonctions exponentielles

32 Écrire sous forme a^b , avec $a \in \mathbb{R}^{**}$ et $b \in \mathbb{R}$:
 $e^{2 \ln 5}$; $e^{-\ln 3}$; $e^{\pi \ln \pi}$; $e^{(\ln 5)^2}$.

33 Comparer sans calculatrice les réels :
a. $3^{\ln 9}$ et $5^{\ln 3}$; **b.** $16^{\frac{-1}{6}}$ et $2^{\frac{-2}{3}}$.

Pour les exercices 34 à 36, résoudre les équations données dans \mathbb{R} .

34 **a.** $10^{2x-5} = 100$; **b.** $5^{x+3} = 13$;
c. $7^{3x-2} = 14$; **d.** $8^{5-x} = 11$.

35 **a.** $2^{x+1} = 3^{2x-3}$; **b.** $2 \cdot 5^{2-x} = 5 \cdot 2^{3x+2}$;
c. $3^{2x} = 5^{1-x}$; **d.** $2^{x+1} \cdot 3^x = 6^{2x}$.

36 **a.** $4^x - 2^{x+1} = 8$ (poser $X = 2^x$) ;
b. $9^x - 8 \cdot 3^x + 15 = 0$;
c. $2^{x+1} + 2^{x+2} = 5^{x-1} + 5^{x-2}$.

37 Résoudre dans \mathbb{R} :

a. $2^x > 10$; **b.** $5^{x+1} \leq 5^{2x+3}$;
c. $(0,5)^x > 10$; **d.** $(0,2)^x \geq (0,2)^{-x+2}$.

38 Étudier sur \mathbb{R} les fonctions définies par :

a. $f(x) = 4^x$; **b.** $g(x) = \frac{1}{4^x}$;

c. $h = f + g$.

39 Soit les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = \frac{3^t + 3^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{3^t - 3^{-t}}{2}.$$

On note respectivement (C) et (Γ) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormal.

1. Étudier la parité de f et g . Étudier les variations de f et g et dresser leurs tableaux de variation complets.

2. Déterminer les limites de $f(t) - g(t)$ en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement.

3. Représenter (C) et (Γ) dans un même repère.

40 La croissance d'une culture de bactéries est modélisée par la fonction C définie sur \mathbb{R}^+ par $C(t) = 15,9^t$ où t désigne le nombre d'heures écoulées depuis le début de l'observation et $C(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t ($t \geq 0$).

1. Combien y aura-t-il de bactéries au bout d'une heure ? au bout de 15 minutes ?

2. Au bout de combien de temps le nombre initial de bactéries aura-t-il doublé ? aura-t-il été multiplié par 1 000 ?

3. Peut-on dire que la population de bactéries augmente à une vitesse proportionnelle à la population présente ?

→ Que sais-je ?

Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, la justifier par une démonstration ou exhiber un contre-exemple.

41 Pour $a > 0$, on a $(a^2 a^{-\frac{3}{2}})^4 = a^5$.

42 Si une population augmente de 0,3 % par an, alors, elle augmente de 3 % en dix ans.

43 La fonction $x \mapsto 3^{-x}$ est définie si et seulement si $x > -\ln 3$.

44 Si la fonction y est solution de l'équation différentielle $y' = y + 1$, alors la fonction $u = \frac{1}{y}$ vérifie $u' + u + u^2 = 0$.

45 La fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $h(x) = \sqrt[4]{x^3}$ est dérivable en 0.

46 La fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = 2xe^{-3x}$ est une solution de l'équation différentielle $y' + 3y = e^{-3x}$.

47 Si f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ alors $f'(x) = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

48 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^4} = +\infty$.

49 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\ln x} = 0$.

50 La fonction f étant définie sur $]0; +\infty[$, par $f(x) = 3x\sqrt[3]{x}$, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 1$ a pour coefficient directeur 4.

51 La fonction $f : x \mapsto 2^x - 4x$ est définie sur \mathbb{R} . Elle est croissante sur $]2 - \frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}; +\infty[$.

52 La limite en 1 de la fonction f , définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(\ln x)^\alpha}$, où α est un réel, est égale à $+\infty$, lorsque $\alpha < 0$.

53 Il existe au moins un réel x tel que $3^{4x} - 2 \times 3^{2x} + 2$ soit nul.

QCM

Indiquer les réponses justes pour chaque question (il peut y en avoir plusieurs).

54 Positif ?

Pour $x > 0$, on définit $u(x) = 5 - x^{\frac{2}{3}}$.

Alors $u(x) > 0$ équivaut à :

- A. $x > 0$; B. $0 < x < 5 \ln \frac{2}{3}$;
C. $0 < x < 5\sqrt{5}$.

55 Une population

Une population augmente de 9 % par an. Alors elle double approximativement en :

- A. 8 ans ; B. 10 ans ; C. 12 ans.

56 Dérivabilité

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^{\frac{5}{2}} \text{ pour } x > 0.$$

- A. f n'est pas dérivable en 0 ; B. $f'(0) = 0$;
C. $f'(x) = x\sqrt{x}$ pour $x > 0$; D. $f'(0) = \frac{5}{2}$.

57 Équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 2y = 1.$$

A. La fonction $t \mapsto e^{-2t} + e^{-\ln 2}$ est solution de (E).

B. Les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto ke^{2t} + \frac{1}{2}$ avec k réel.

C. La solution g de (E) telle que $g(0) = -\frac{1}{2}$ est la fonction $g(t) = \frac{1 - 2e^{-2t}}{2}$.

58 Trois écritures

Soit (E) l'équation $4y' - y = 0$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme :

- A. $f(x) = ke^{4x}$ avec k réel ;
B. $f(x) = k\sqrt[4]{e^x}$ avec k réel ;
C. $f(x) = \frac{k}{e^{4x}}$ avec k réel.

→ Un sujet vu au BAC (extrait)

59 L'étude en laboratoire d'une population de petits rongeurs montre que sa croissance est exponentielle. En réalité, dans le secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs (exprimé en milliers) vivant au temps t (exprimé en années) dans cette région et on admet que la fonction u ainsi définie satisfait aux conditions suivantes :

$$(E) \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} & (E_1) \\ u(0) = 1 & (E_2) \end{cases}$$

1. On suppose que, pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$. On considère, sur $[0 ; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que u satisfait aux conditions (E) si et seulement si h satisfait aux conditions :

$$(E') \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4} h(t) + \frac{1}{12} & (E'_1) \\ h(0) = 1 & (E'_2) \end{cases}$$

2. Déterminer l'expression de h puis de u .

3. Comment se comporte la population quand t tend vers l'infini ?

Bac S national, 2005.

Solution

1. • On pose $h = \frac{1}{u} \Leftrightarrow u = \frac{1}{h}$. Supposons que u satisfasse les conditions (E). On a $h(0) = \frac{1}{u(0)} = 1$. La condition (E'_2) est remplie.

• $u = \frac{1}{h}$ donne $u' = -\frac{h'}{h^2}$. On remplace dans (E_1) qui devient :

$$-\frac{h'(t)}{[h(t)]^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{h(t)} - \frac{1}{12} \frac{1}{[h(t)]^2}.$$

En multipliant par $-[h(t)]^2$, on a $h'(t) = -\frac{1}{4} h(t) + \frac{1}{12}$ soit (E'_1).

Réciproquement, supposons que h satisfasse les conditions (E'). On en déduit $u(0) = \frac{1}{h(0)} = 1$ (E_2) et $h' = -\frac{u'}{u^2}$.

D'où $-\frac{u'(t)}{[u(t)]^2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{u(t)} + \frac{1}{12}$. En multipliant par $-[u(t)]^2$, on

obtient $u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12}$ soit (E_1).

2. D'après le cours, les solutions de l'équation $h'(t) = -\frac{1}{4} h(t) + \frac{1}{12}$

sont les fonctions $y = ke^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}$ avec k réel quelconque. La condi-

tion initiale $h(0) = 1$ implique $k = \frac{2}{3}$ d'où $h(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{4}}$.

On en déduit $u(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{t}{4}}}$.

3. Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-\frac{t}{4}}$ tend vers 0 et $u(t)$ tend vers 3.

Le jour du BAC

Question 1 : L'énoncé demande une équivalence entre les conditions (E) et (E'). Il faut donc démontrer les deux implications : (E) \Rightarrow (E') et (E') \Rightarrow (E). Il faut aussi penser à vérifier à chaque fois les conditions 1 et 2. L'hypothèse de l'énoncé $u(t) > 0$ pour tout t assure que tous les calculs sont définis.

Question 2 : Voilà le but de l'idée un peu « magique » du changement de variable $h = \frac{1}{u}$: se ramener à une équation du cours du type $y' = ay + b$, qu'on sait résoudre.

Question 3 : Contrairement au modèle « sans prédateur » où la population de rongeurs tend vers l'infini de manière exponentielle, la population tend ici vers une limite finie : elle triple !

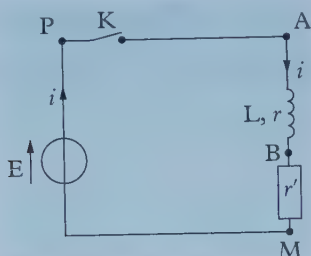
→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Équations différentielles

60 Retard à l'allumage

On s'intéresse à l'intensité i du courant électrique dans un circuit RL soumis à une tension constante E à partir de l'instant $t = 0$ (où on ferme l'interrupteur).

Le circuit est représenté ci-dessous.



On établit en physique que i est une fonction du temps t qui vérifie la relation : $E = L \frac{di}{dt} + Ri$, où E , L et $R = r + r'$ sont des constantes positives.

- Déterminer les solutions de cette équation différentielle.
- Sachant que $i(0) = 0$, déterminer l'expression de $i(t)$ en fonction de L , R et E .
- Déterminer la valeur limite I_0 de $i(t)$, correspondant au régime permanent.
- Donner une allure de la courbe représentant i en fonction de t . Expliquer le titre.
- Exprimer le temps $t_{1/2}$ auquel l'intensité du courant est $\frac{1}{2} I_0$.

61 Le thé d'Isaac

Isaac se verse une tasse de thé brûlant (80°C) et s'intéresse à la température $T(t)$ du thé t minutes plus tard. $T(t)$ est exprimée en $^\circ\text{C}$.

On admet que la loi de refroidissement de Newton peut s'appliquer à cette situation : la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant.

- Sachant que la température ambiante est de 21°C , écrire une équation différentielle vérifiée par la fonction T .
- Résoudre cette équation différentielle.
- Sachant qu'au bout de cinq minutes, le thé est encore à une température de 70°C , montrer que :

$$T(t) = 59 \left(\frac{49}{59} \right)^{\frac{t}{5}} + 21.$$

- Au bout de combien de temps la température du thé sera-t-elle inférieure à 40°C ?

62 vu au BAC On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + y = x + 1$, y étant une fonction réelle de la variable réelle x .

- On pose $z = y - x$; écrire l'équation différentielle (F) vérifiée par z .
 - Résoudre (F) puis (E).
- On appelle y_a la solution de (E) telle que $y_a(0) = a$ ($a \in \mathbb{R}$) et (C_a) la courbe représentative de y_a dans le plan muni d'un repère orthonormal.

a. Étudier les variations de y_a et donner l'allure de (C_a) dans les trois cas suivants :

$$a < 0, \quad a = 0, \quad a > 0.$$

- Montrer que, pour tout réel a , la tangente à (C_a) au point d'abscisse -1 passe par l'origine des axes.
 - Plus généralement, nous allons montrer que toutes les tangentes aux courbes (C_a) en un point d'abscisse x_0 donnée se coupent sur (C_0) .
- Donner une équation de (T_a) , tangente à (C_a) au point d'abscisse x_0 .
 - Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (T_a) et (T_b) pour $a \neq b$ et conclure.

63 On cherche une fonction f définie et strictement positive sur \mathbb{R}^+ qui soit solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - y^2$ et vérifie $f(0) = 1$.

- Montrer que f est solution de (E) si et seulement si la fonction $g = \frac{1}{f}$ est solution de :

$$(E') \quad y' = -2y + 1.$$

- Résoudre (E') .
- Calculer $g(0)$ et en déduire $g(t)$.
- Déterminer $f(t)$ et vérifier que $f(t) > 0$ sur \mathbb{R}^+ .

quels

- Traduire « f est solution de (E) », « g est solution de (E') ».

Utiliser $f = \frac{1}{g}$, d'où $f' = \dots$.

Avec des fonctions puissances

64 Sans utiliser de valeurs approchées, classer les nombres suivants par ordre croissant :

$$\sqrt[3]{28}; \quad \sqrt[4]{15}; \quad \sqrt{13}; \quad \sqrt[9]{80}; \quad \sqrt[12]{100}.$$

65 Soit $a = \sqrt[3]{25 + 10\sqrt{5}} + \sqrt[3]{25 - 10\sqrt{5}}$.

On veut montrer que a est un réel très simple.

- Grâce à la calculatrice, quelle hypothèse peut-on faire sur la valeur de a ?
- Calculer $a^3 - 15a$.
- Montrer que l'équation $x^3 - 15x - 50 = 0$ admet une unique solution réelle. Conclure.

66 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt[3]{x}}$.

- Étudier et interpréter la dérivabilité de f en 0.
- Étudier les variations de f .

67 Soit la fonction f définie sur $[-1; +1]$ par :

$$\begin{cases} (1-x)^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}} & \text{si } x \in]-1; 1[\\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

- Étudier la dérivabilité de f en -1 et $+1$; que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
- Calculer la dérivée de f sur $]-1; +1[$; en déduire le sens de variation de f sur $[-1; +1]$.
- Représenter (C).

68 Soit, dans un même repère orthonormé, les courbes :

- (Γ) d'équation $y = e \ln x$, pour $x > 0$;
- (C_n) d'équation $y = n^{\sqrt{x}}$, pour $n \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On pose $f_n(x) = n^{\sqrt{x}} - e \ln x$, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- Étudier les variations de f_n ; en déduire le signe de f_n ; interpréter graphiquement.
 - Montrer que (C_n) et (Γ) ont un point commun et que leurs tangentes en ce point sont identiques.
2. Tracer (C_1), (C_2) et (Γ), ainsi que leurs tangentes remarquables.

69 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 e^x.$$

- Étudier les limites et les variations de f .
- Étudier la position relative de la courbe (C) qui représente f et de la courbe (E) qui représente la fonction $x \mapsto e^x$. Construire (C) et (E) dans un même repère orthonormal.
- Soit un réel m tel que $m > e$. La droite d'équation $y = m$ coupe la courbe (C) en un point A et la courbe (E) en un point B. Déterminer m tel que $AB = 1$.

70 Des fonctions puissances à exposant réel

1. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

a. Si $x > 0$, $f(x)$ peut alors s'écrire $e^{\sqrt{2} \ln x}$. Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

b. Étudier la limite de f en $+\infty$.

c. Étudier la dérivabilité de f en 0 et en tirer une conséquence graphique.

2. On définit sur $]0; +\infty[$ la fonction g par $g(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ si $x > 0$ et $g(0) = 0$.

Reprendre la question 1 pour étudier g .

3. On définit sur $]0; +\infty[$ la fonction h par $h(x) = x^{-\sqrt{2}}$, étudier les variations de h et ses limites aux bornes de $]0; +\infty[$.

4. Représenter dans un même repère orthonormal les courbes de f , g et h .

71 Fonctions $x \mapsto x^\alpha$ où α réel

Soit α un réel et f_α la fonction qui à tout $x > 0$ associe $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

- Écrire $f_\alpha(x)$ sous forme exponentielle.
- On suppose $\alpha < 0$.
 - Étudier le sens de variation de f_α .
 - Déterminer la limite de f_α en $+\infty$ et en 0.
 - Tracer dans un même repère orthonormé du plan les courbes C_α représentant f_α pour : $\alpha = -0,4$; $\alpha = -1$ et $\alpha = -1,7$.

3. On suppose $\alpha > 0$.

- Étudier le sens de variation de f_α et ses limites en 0 et $+\infty$.
- On pose $g_\alpha(x) = x^\alpha$ si $x > 0$ et $g_\alpha(0) = 0$. Justifier que la fonction g_α est continue en 0. Est-elle dérivable en 0 ?
- Tracer sur le graphique de la question 2 que les courbes Γ_α représentant les fonctions g_α pour : $\alpha = 0,4$; $\alpha = 0,5$; $\alpha = 1$; $\alpha = 1,7$; $\alpha = 2$.

72 avec ROC In et les puissances réelles

Partie A

On sait que, sur $]0; +\infty[$, la courbe $\Gamma : y = \ln x$ est située sous la courbe $C_{\frac{1}{2}} : y = \sqrt{x}$.

Établir cette propriété, à l'aide de la fonction d telle que $d(x) = \sqrt{x} - \ln x$, pour $x > 0$.

Partie B

On souhaite, plus généralement, étudier la position relative sur $]0; +\infty[$ des courbes $C_\alpha : y = x^\alpha$ et $\Gamma : y = \ln x$, selon les valeurs du réel strictement positif α . Pour cela, on définit pour $\alpha > 0$, la fonction d_α telle que $d_\alpha(x) = x^\alpha - \ln x$, pour $x > 0$.

1. Étude du cas $\alpha = \frac{1}{3}$

- Étudier les variations de la fonction $d_{\frac{1}{3}}$ et montrer que l'équation $d_{\frac{1}{3}}(x) = 0$ admet deux solutions a et b dont on déterminera un encadrement de longueur 0,1.
- En déduire le signe de $d_{\frac{1}{3}}$ et interpréter graphiquement.

2. Étude du cas général

- Étudier les variations de la fonction d_α et en déduire qu'elle admet au point $x = \alpha^{-\frac{1}{\alpha}}$ un minimum m_α que l'on calculera.
 - Étudier le signe de m_α suivant les valeurs de α et préciser pour quelle valeur α_0 de α , $m_\alpha = 0$.
 - En déduire le nombre de points d'intersection des courbes C_α et Γ selon les valeurs de α .
 - Justifier que C_{α_0} et Γ sont tangentes (c'est-à-dire, admettent une tangente commune (T)).
3. Construire, dans un même repère orthogonal, les courbes Γ , $C_{\frac{1}{2}}$, $C_{\frac{1}{3}}$, $C_{\frac{1}{e}}$ et la tangente (T).

73 a contre b

a et b étant deux nombres réels strictement positifs, on veut comparer a^b et b^a sans recours à la calculatrice (par exemple, comparer $\pi^{\sqrt{10}}$ et $\sqrt{10}^\pi$).

1. Établir l'équivalence :

$$a^b \geq b^a \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} \geq \frac{\ln b}{b}.$$

2. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

a. Étudier le comportement de f aux bornes de $]0; +\infty[$.

b. Étudier les variations de f .

3. À l'aide de ce qui précède, comparer a^b et b^a dans les cas suivants :

$$0 < a < b \leq e \quad \text{et} \quad e \leq a < b.$$

74 $(1+x)^r$ contre $1+x^r$

Soit r un nombre rationnel positif ou nul.

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (1+x)^r - x^r - 1.$$

1. Étudier les variations de f dans le cas où $r \in]0; 1[$. En déduire le signe de f .

2. Étudier les variations de f dans le cas où $r \in]1; +\infty[$. En déduire le signe de f .

3. Étudier les cas où $r=0$ et $r=1$.

4. En déduire que pour tout x strictement positif :

- $(1+x)^r \leq 1+x^r$ si $r \in [0; 1]$;
- $(1+x)^r \geq 1+x^r$ si $r \in [1; +\infty[$.

75 Une famille encadrée

Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur

$[0; 1]$ par $f_n(x) = x^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ pour $0 < x < 1$,
 $f(0) = f_n(1) = 0$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm). On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n .

1. Montrer que (C_0) est un demi-cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2. Soit $n \geq 1$.

a. Calculer $f'_n(x)$ pour $0 < x < 1$ et montrer que

$f'_n(x)$ et $\left(n + \frac{1}{2}\right) - (n+1)x$ ont le même signe.

b. Étudier la dérivabilité de f_n en 0 et 1.

c. Donner le tableau de variation de f_n .

(On ne demande pas le calcul du maximum de f_n .)

3. a. Soit $x \in [0; 1]$ et $n \geq 0$.

Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

b. En déduire les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}) .

c. Tracer (C_0) , (C_1) et (C_2) dans le même repère.

Exponentielles de base a

76 Pour tout X réel, on pose :

$$P(X) = 3X^2 - 10X + 3.$$

1. Factoriser $P(X)$.

2. En déduire les solutions des inéquations suivantes :

a. $3^{2x} - 10 \times 3^x + 3 > 0$; b. $2^x + 2^{-x} \leq \frac{10}{3}$.

77 Soit l'équation différentielle sur \mathbb{R} :

$$(E) \quad y' + y \ln 3 = 2^x \ln 6.$$

1. Montrer qu'il existe un réel strictement positif a tel que la fonction $x \mapsto a^x$ soit une solution particulière de (E).

2. Soit u une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

On pose $f(x) = u(x) \times 2^x$, pour x réel.

a. Prouver que f est solution de (E) si, et seulement si, u est solution de l'équation différentielle :

$$(E') \quad y' + y \ln 6 = \ln 6.$$

b. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

c. Déterminer la solution f_0 de (E) telle que $f_0(0) = 0$.

3. Étudier la fonction $x \mapsto 2^x - 3^{-x}$ et dresser son tableau de variation complet.

78 Par l'absurde

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2^x + x$.

1. a. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Étudier le sens de variation de f .

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $2^x + x = n$ admet une solution unique dans \mathbb{R} que l'on notera u_n .

3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a. Montrer que cette suite est strictement croissante.

b. Montrer que si on suppose que cette suite admet une limite finie ℓ , on aboutit à une contradiction.

c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

79 Solutions non triviales

Le but de l'exercice est de déterminer si l'équation $2^x + 3^x = 5^x$ admet d'autres solutions dans \mathbb{R} que la solution évidente $x = 1$.

1. Expliquer pourquoi passer au logarithme (...) ou à l'exponentielle (...) ne donne rien d'intéressant.

2. On pose $\varphi(x) = 2^x + 3^x - 5^x$, pour x réel, et on cherche à savoir comment varie la fonction φ . Calculer $\varphi'(x)$; l'étude de son signe paraît-elle réalisable ?

3. On pose $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$, pour x réel.

a. Justifier que f est une fonction décroissante.

b. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. En déduire le nombre de solutions de (E).

→ PROBLÈMES

80 vu au BAC On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

1. Montrer que la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E).

2. On pose $y = z + h$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle $z' - 2z = 0$.

b. Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).

3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0.

4. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1.$$

a. Déterminer le sens de variation de la fonction g et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthogonal du plan.

81 Une réaction chimique

On considère la transformation de l'iodure de tertio-butyle en hydroxyle de tertio-butyle et iodure d'hydrogène. On note $c(t)$ la concentration molaire en hydroxyde de tertio-butyle obtenue dans la réaction à l'instant t .

On émet l'hypothèse que la vitesse de formation $\frac{dc}{dt}$ d'hydroxyde de tertio-butyle en fonction du temps vérifie l'équation différentielle :

$$(E) \quad \frac{dc}{dt} + 0,33c = 0,034 \quad 32.$$

1. a. Donner la solution générale de cette équation sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. Préciser la solution particulière vérifiant $c(0) = 0$.

2. On note $x(t)$ le degré d'avancement de la réaction à l'instant t , c'est-à-dire le quotient de $c(t)$ par la concentration molaire initiale de l'iodure qui vaut ici $0,104 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

a. Vérifier que $x(t) = 1 - e^{-0,33t}$.

On note (C) la courbe représentative de x dans un repère orthogonal (unité graphique : 1 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

b. Étudier le comportement de x en $+\infty$, préciser l'asymptote (D) à la courbe (C).

c. Déterminer le sens de variation de x sur $[0 ; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

d. Représenter (D) et (C).

3. Déterminer, par le calcul, le temps à partir duquel on peut prévoir que le degré d'avancement de la réaction sera supérieur ou égal à 0,98.

82 Analyse thermique

Lors de la réalisation d'une analyse thermique, la différence de température θ entre le four et un échantillon, considérée comme une fonction du temps, vérifie l'équation différentielle :

$$(E) \quad \theta' + K\theta = V_0.$$

θ est en $^{\circ}\text{C}$, t est en s, V_0 qui représente la vitesse de montée en température à l'instant initial est en $^{\circ}\text{C} \cdot \text{s}^{-1}$ et K qui représente le coefficient de diffusion thermique est en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

1. Donner la solution générale de (E) sur $[0 ; +\infty[$.

2. a. Sachant qu'à $t = 0$ on a $\theta = 0$, montrer que :

$$\theta(t) = \frac{V_0}{K} (1 - e^{-Kt}).$$

b. Exprimer alors t en fonction de θ , V_0 et K .

c. En prenant $V_0 = 0,1$ et $K = 3 \times 10^{-6}$, déterminer, pour $\theta = 40$, la valeur exacte de t puis une valeur approchée à une seconde près.

3. Soit la fonction θ définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$\theta(t) = \frac{10^5}{3} (1 - e^{-3 \cdot 10^{-6}t}).$$

Faire l'étude complète de la fonction θ et dresser son tableau de variation.

83 Taux d'alcoolémie

Une personne absorbe, à jeun, une certaine quantité d'alcool. Son taux d'alcoolémie, noté $a(t)$, est fonction du temps t écoulé depuis l'ingestion ($t \geq 0$).

On exprime t en heures et $a(t)$ en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$.

On admet que a est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = \lambda e^{-t}$,

où λ est une constante qui dépend de la personne et des conditions d'expérimentation.

Partie A. Résolution de l'équation (E)

On pose, pour tout t appartenant \mathbb{R}^+ , $h(t) = \lambda t e^{-t}$.

1. Montrer que la fonction h est solution de (E).

2. Montrer que la fonction f est une solution de (E) sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $f - h$ est solution de (E') : $y' + y = 0$.

3. En déduire toutes les solutions de (E), puis que $a(t) = \lambda t e^{-t}$ pour $t \geq 0$.

Partie B. Étude de fonction

On suppose dorénavant que $\lambda = 5$.

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction a .
b. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.

2. a. Tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; on prendra pour unité graphique 2 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée.

b. Au bout de combien de temps (arrondi à cinq minutes près) cette personne aura-t-elle un taux d'alcoolémie qui restera inférieur à $0,5 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$?

84 Évolution d'une quantité de bactéries

Dans un milieu de culture, une population microbienne évolue au cours du temps. Elle passe de N_0 éléments à N_1 éléments au bout de 15 heures.

Si on note $N(t)$ le nombre de bactéries au bout de t heures, on admet que $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$ où k est une constante dépendant du type de bactéries et t est exprimé en heures.

1. En utilisant $N(15) = N_1$, exprimer k en fonction de N_0 et de N_1 puis démontrer que :

$$N(t) = N_0 \left(\frac{N_1}{N_0} \right)^{\frac{t}{15}}$$

2. On suppose que la population a triplé au bout de 15 heures.

a. Exprimer $N(t)$ en fonction de t , étudier les variations de N sur $[0 ; 15]$ et dresser son tableau de variation.

b. On prend dorénavant $N_0 = 1\ 000$. Tracer la courbe représentative de N sur l'intervalle $[0 ; 15]$.

c. Au bout de combien de temps la population dépasserait-elle 10 000 bactéries ?

3. Au bout des 15 heures, on verse dans le milieu un antibiotique qui détruit les bactéries. On admet

que, pour $t \geq 15$, $N(t) = 3\ 000 \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{t-15}{10}}$.

a. Étudier les variations de N sur $[15 ; +\infty[$ et compléter la courbe de la question 2b.

b. Au bout de combien de temps les bactéries sont-elles toutes mortes ($N(t) < 1$) ?

85 Nombre de solutions

On se propose de déterminer le nombre de solutions dans \mathbb{R} de l'équation $2^x = 2(x+1)$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2^x - 2(x+1)$, pour tout réel x .

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près du réel x_0 tel que $f'(x_0) = 0$).

3. Dresser le tableau de variation de f (on ne calculera pas $f(x_0)$ mais on montrera que $f(x_0) \leq 0$).

4. En déduire que l'équation $2^x = 2(x+1)$ admet deux solutions α et β , avec $\alpha < x_0 < \beta$.

Montrer que β est un entier naturel et donner un encadrement de longueur 10^{-2} du réel α .

5. Applications

a. Justifier que, pour tout $x \geq 3$, $2^x \geq 2(x+1)$.

b. On admet que lorsqu'on lance n fois, $n \geq 2$, une pièce de monnaie bien équilibrée, la probabilité d'obtenir au plus une fois Pile est $p_n = \frac{n+1}{2^n}$.

Combien de fois doit-on lancer la pièce pour que

p_n soit égale à $\frac{1}{2}$? supérieure à $\frac{1}{2}$? inférieure à $\frac{1}{2}$?

86 Optimisation

Une entreprise a décidé de mener une campagne publicitaire par correspondance. Le but du problème est de déterminer le nombre d'envois permettant à l'entreprise de réaliser le bénéfice maximal.

1. Soit la fonction R définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$R(x) = 10^4 x \times 0,85^{x-1}$$

a. Déterminer la limite de R quand x tend vers $+\infty$.

b. Étudier les variations de R et dresser son tableau de variation.

2. Si x représente le nombre d'envois, en dizaines de milliers, une étude préalable a montré que le montant total en euros des recettes attendues à l'issue de cette campagne peut être estimé par $R(x)$ pour $x \in [0 ; 10]$.

a. Représenter R sur l'intervalle $[0 ; 10]$. On choisira comme unités 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 5000 sur l'axe des ordonnées.

b. On suppose qu'il y a au moins 10 000 envois. Le coût de la campagne publicitaire pour les 10000 premiers envois est de 3000 euros, chaque envoi supplémentaire coûte 0,23 €. Montrer que le coût total en euros de cette campagne est :

$$C(x) = 700 + 2\ 300x \text{ pour } x \in [1 ; 10].$$

Représenter le segment de droite correspondant sur la même figure que la courbe de la fonction R .

3. Le bénéfice tiré de cette campagne publicitaire est donné par $B(x) = R(x) - C(x)$.

a. Calculer $B'(x)$ et $B''(x)$ et montrer que $B''(x) < 0$ sur $[1 ; 10]$. En déduire que l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique a dans $[1 ; 10]$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur $[1 ; 10]$. En déduire le nombre d'envois nécessaires pour obtenir un bénéfice maximal et ce que vaut alors ce bénéfice.

D'après BTS Comptabilité et gestion.

87 Famille de fonctions

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

On considère la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = xe^{-x^2}$ et on appelle (C_1) sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de f_1 .

2. Calculer la limite de f_1 en $+\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

3. Dresser le tableau de variation de f_1 .

4. On appelle (Δ) la droite d'équation $y = x$.

Déterminer la position de (C_1) par rapport à (Δ) .

Que représente (Δ) pour (C_1) ?

5. Tracer (C_1) et (Δ) .

Partie B

On considère la fonction f_3 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_3(x) = x^3 e^{-x^2}$ et on appelle (C_3) sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel x positif, $f_3'(x)$ a le même signe que $3 - 2x^2$.

- En déduire le sens de variation de f_3 .
- Calculer la limite de f_3 en $+\infty$.
Interpréter graphiquement le résultat.
 - Déterminer les positions relatives des courbes (C_1) et (C_3) .
 - Tracer (C_3) dans le même repère que (C_1) .

Partie C

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n .

- Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum.

- On appelle S_n le point de (C_n) d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$.

Montrer que, pour tout n , (C_n) passe par S_2 .
Placer S_1 , S_2 et S_3 sur la figure.

- Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \exp \frac{x}{2} \left(-1 + \ln \left(\frac{x}{2} \right) \right).$$

- Étudier le sens de variation de g .
- Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$.
En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2 .

88 Comparaison de deux moyennes

Partie A

Soit a, b et c trois réels strictement positifs. On appelle moyenne arithmétique de a et b le nombre $\frac{a+b}{2}$ et moyenne géométrique de a et b le nombre \sqrt{ab} .

- En utilisant une identité remarquable usuelle, démontrer que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$, en déduire que

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

2. Cas de trois réels

- Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a+2x}{3} - a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}.$$

Étudier les variations de f et en déduire que pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$, l'égalité n'ayant lieu que si $x = a$.

- Déduire de la question précédente que :

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \left(\frac{b+c}{2}\right)^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}.$$

- En utilisant la question 1, déduire que :

$$\frac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{\frac{1}{3}}.$$

Partie B. Pour aller plus loin

Soit a_1, \dots, a_n n réels strictement positifs, le but du problème est de montrer la relation :

$$P(n) : \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}, \quad n \geq 2.$$

Cet exercice est basé sur une démonstration due à Cauchy.

- Démontrer que $P(2)$ est vraie.

- On suppose $n = 4$.

- En écrivant $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2}$

et en utilisant $P(2)$, montrer que :

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4}}.$$

- En déduire que $P(4)$ est vraie.

3. Généralisation

- En écrivant :

$$\frac{a_1 + \dots + a_{2n}}{2n} = \frac{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}}{2},$$

montrer que si $P(n)$ est vraie, alors $P(2n)$ est vraie.

- En déduire alors que $P(2), P(4), P(8), \dots, P(2^p)$ sont vraies pour tout entier p strictement positif.

- En supposant que $P(n)$ soit vraie, montrer que :

$$\frac{a_1 + \dots + a_{n-1} + \frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1}.$$

En déduire que :

$$\frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \sqrt[n]{\frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1}}$$

puis que $P(n-1)$ est vraie.

- En considérant que $P(4)$ est vraie et en utilisant la question 4, déduire que $P(3)$ est vraie.

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer un entier naturel p non nul tel que :

$$2^p \leq n < 2^{p+1}.$$

En utilisant le fait que $P(2^{p+1})$ est vraie, montrer que $P(n)$ est vraie.

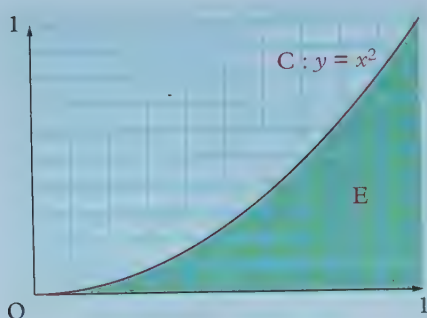
- Conclure.

7

Calculs d'aire Intégrales Primitives

Activité 1 → Aire sous une parabole

C est la courbe représentant, dans un repère orthogonal, la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^2$. On cherche à évaluer l'aire A du « domaine E situé sous la courbe C », c'est-à-dire limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, en fonction d'une certaine unité.



A ■ En utilisant le quadrillage

1. Donner un encadrement de l'aire a de E, exprimée en « petits carreaux ».
2. Donner un encadrement de l'aire A de E, exprimée en unités d'aire (aire du rectangle unité).
3. Si on prend pour unités graphiques 10 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées, donner un encadrement de l'aire A' de E, exprimée en cm^2 .

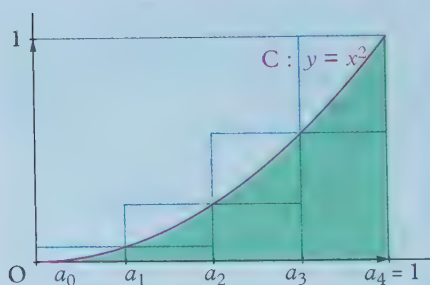
B ■ Avec d'autres rectangles

On subdivise l'intervalle $[0 ; 1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, à

l'aide des nombres $a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{n}, \dots, a_k = \frac{k}{n}, \dots, a_n = 1$.

On construit sur chaque intervalle $[a_k ; a_{k+1}]$ où $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ les rectangles R_k et R'_k de hauteurs respectives $f(a_k)$ et $f(a_{k+1})$.

On note U_n et V_n les sommes respectives des aires des rectangles R_k et R'_k .



1. Pour $n = 4$

- a. Exprimer les sommes U_4 et V_4 en fonction des réels $f(a_0), f(a_1), f(a_2), f(a_3)$ et $f(a_4)$.
- b. En déduire un encadrement de A par deux décimaux d'ordre 2 (voir figure ci-contre).

2. Pour n quelconque

a. Montrer que, dans le cas général, on a :

$$U_n = \frac{1}{n} [f(a_0) + f(a_1) + \dots + f(a_{n-1})] \text{ et } V_n = \frac{1}{n} [f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)].$$

b. Quel encadrement de l'aire A peut-on écrire ?

c. Établir par récurrence que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

d. Calculer U_n et V_n en fonction de n et prouver que ces deux suites convergent vers la même limite.

e. En déduire la valeur exacte de A .

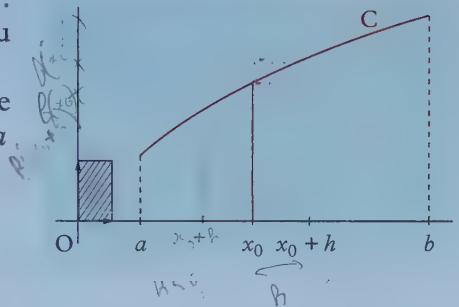
Activité 2 ➔ Primitives et calcul intégral

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$.

On donne ci-contre sa courbe, C dans un repère orthogonal du plan. L'unité d'aire est l'aire du rectangle unité, hachuré.

À tout réel x_0 de $[a; b]$, on associe l'aire $S(x_0)$ du domaine limité par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = x_0$.

On reproduira la figure ci-contre.



A ■ Étude de la fonction aire S

1. Soit h un réel strictement positif.

a. Hachurer le domaine dont l'aire est $S(x_0 + h) - S(x_0)$.

b. Encadrer $S(x_0 + h) - S(x_0)$ à l'aide de la fonction f .

c. Calculer $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(x_0 + h) - S(x_0)}{h}$.

2. Soit h un réel strictement négatif.

a. Hachurer le domaine dont l'aire est $S(x_0) - S(x_0 + h)$.

b. Procéder de même et calculer $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{S(x_0 + h) - S(x_0)}{h}$.

3. En déduire que la fonction S est dérivable en x_0 et préciser $S'(x_0)$.

On dit que la fonction S est une primitive de f sur $[a; b]$.

B ■ Application au calcul de $\int_{-1}^2 t^2 dt$

1. Que représente géométriquement cette intégrale, par définition ?

2. À tout réel x de $[-1; 2]$, on associe l'aire $S(x) = \int_{-1}^x t^2 dt$ du domaine

situé sous la courbe de la fonction $f: t \mapsto t^2$ entre -1 et x .

a. Que peut-on dire de cette fonction S , d'après l'étude faite en partie A ?

b. Montrer que la fonction $F: t \mapsto \frac{1}{3} t^3$ est une primitive sur \mathbb{R} de f .

c. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout x de $[-1; 2]$:

$$S(x) = F(x) + C.$$

d. Justifier les égalités :

$$\int_{-1}^2 t^2 dt = S(2) - S(-1) \quad \text{puis} \quad \int_{-1}^2 t^2 dt = F(2) - F(-1).$$

1. Intégrale d'une fonction

A ■ Aire sous la courbe et intégrale

Soit f une fonction définie sur $[a ; b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

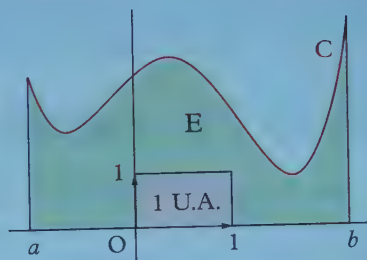
Propriété 1 et définition 1 →

ADMIS

• Si f est continue et positive sur $[a ; b]$, alors le domaine E situé sous la courbe C admet une aire.

• On appelle intégrale de a à b de la fonction f , l'aire, en unités d'aire, du domaine E situé sous sa courbe.

On note $\int_a^b f(x) dx = A(E)$.



Remarques

• E est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

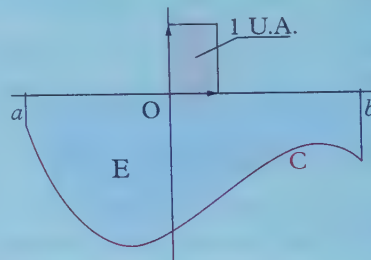
• On peut aussi écrire $A(E) = \int_a^b f(t) dt$ ou $A(E) = \int_a^b f(u) du$ ou ...

On dit que la variable apparaissant dans l'intégrale est « muette ».

Définition 2 →

Si f est continue et négative sur $[a ; b]$, on appelle intégrale de a à b de f , l'opposé de l'aire, en unités d'aire, du domaine E situé entre C et l'axe des abscisses.

On note $\int_a^b f(x) dx = -A(E)$.



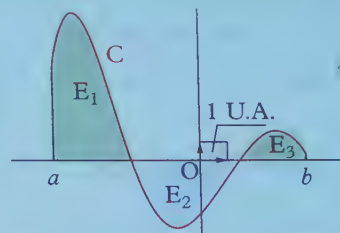
Remarque

Pour englober les cas $f \geq 0$ et $f \leq 0$ des définitions 1 et 2, on peut dire que l'intégrale de a à b de f est « l'aire algébrique » du domaine E situé entre C et l'axe des abscisses (aire comptée positivement si $f \geq 0$ et négativement si $f \leq 0$).

Définition 3 →

Si f est continue et de signe non constant sur $[a ; b]$, alors l'intégrale de a à b de f est la somme des « aires algébriques » des domaines situés entre C et l'axe des abscisses :

$$\int_a^b f(x) dx = A(E_1) - A(E_2) + A(E_3).$$



→ APPLICATIONS

Exercice 1 Calculer des intégrales d'une fonction affine

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -0,5x + 1$.

1. Calculer les intégrales $I = \int_0^2 f(x) dx$ et $J = \int_2^6 f(x) dx$.

2. En déduire la valeur de $K = \int_0^6 f(x) dx$.

Solution

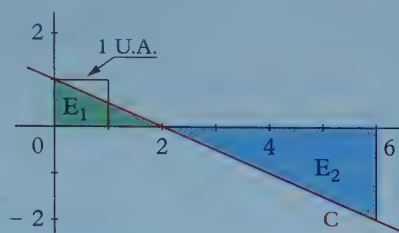
1. • Par définition, f étant continue et positive sur $[0 ; 2]$,

l'intégrale I est l'aire, en unités d'aire, du domaine E_1 situé sous sa courbe C ; ce domaine E_1 est un triangle rectangle d'aire $A(E_1) = \frac{2 \times 1}{2} = 1$. On a donc $I = 1$.

• Sur l'intervalle $[2 ; 6]$, f est continue et négative ; par définition, l'intégrale de f sur $[2 ; 6]$ est l'opposée de l'aire du domaine E_2 situé entre C et l'axe des abscisses ; or E_2 est un triangle rectangle d'aire $\frac{4 \times 2}{2} = 4$. Il en résulte $J = -A(E_2) = -4$.

2. Sur $[0 ; 6]$, f ne garde pas un signe constant ; la définition 3 conduit à calculer K en sommant les aires « algébriques » des domaines E_1 et E_2 :

$$K = A(E_1) - A(E_2) = 1 - 4 = -3.$$



voir aussi exercices n° 2, 3

Exercice 2 Calculer $L = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$

Soit g la fonction définie sur $[-1 ; 1]$ par $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ et C sa courbe représentative en repère orthonormal.

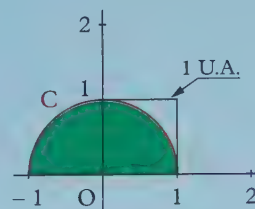
Reconnaître C et en déduire le calcul de L .

Solution

• La courbe C a pour équation $y = \sqrt{1-x^2}$ avec $x \in [-1 ; 1]$. Cela équivaut à $y^2 = 1 - x^2$ ou encore $x^2 + y^2 = 1$ avec $y \geq 0$. C est donc le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 1.

• La fonction f étant continue et positive sur $[-1 ; 1]$, l'intégrale de f est l'aire du domaine situé sous sa courbe.

$$\text{Il en résulte } L = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi \times 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$



voir aussi exercice n° 54

Exercice 3 Calculer $I_k = \int_a^b k dx$, pour k réel

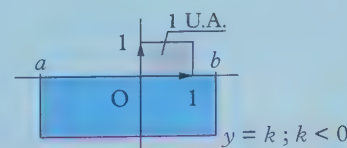
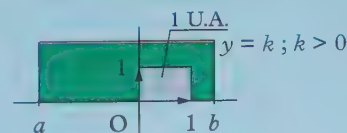
Solution

La fonction constante $x \mapsto k$ est bien continue sur $[a ; b]$.

• Pour $k \geq 0$, I_k est l'aire d'un rectangle de côtés k et $b - a$; d'où $I_k = A(E) = k(b - a)$.

• Pour $k < 0$, I_k est l'opposé de l'aire du rectangle de côtés $|k| = -k$ et $b - a$; d'où $I_k = -A(E') = -(-k)(b - a) = k(b - a)$.

Conclusion : pour tout réel k , $\int_a^b k dx = k(b - a)$.



B ■ Extension de la notation (convention)

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors pour tous réels a et b de I :

- si $a \geq b$, alors $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$;
- si $a = b$, alors $\int_a^b f(x) dx = 0$.

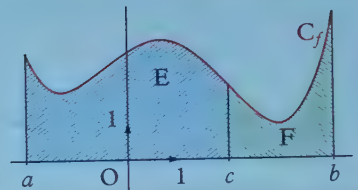
2. Propriétés de l'intégrale

A ■ Relation de Chasles

Propriété 2 →

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors, pour tous réels a , b et c de I :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



B ■ Linéarité

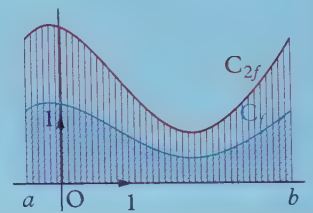
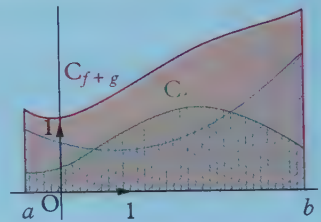
Propriété 3 →

Linéarité
(admise)

Si f et g sont deux fonctions continues sur I , alors, pour tous réels a et b de I et pour tout réel λ :

$$\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx ;$$

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx .$$



C ■ Positivité et ordre

Propriété 4 →

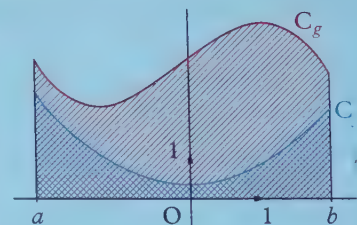
f et g étant continues sur $[a ; b]$:

$$\bullet \text{ si } f \text{ est positive, alors } \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

$$\text{si } f \text{ est négative, alors } \int_a^b f(x) dx \leq 0 ;$$

$$\bullet \text{ si } f \leq g \text{ sur } [a ; b],$$

$$\text{alors } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$



Attention Les réciproques sont fausses !

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 2

• Cas où f est continue et positive sur $[a; b]$, avec $a < c < b$: dans ce cas (voir figure) ; la relation de Chasles résulte immédiatement de la relation intuitive – admise – sur les aires : $A(E_1 \cup E_2) = A(E_1) + A(E_2)$.

• Cas où f est continue et positive sur $[a; b]$, avec $a < b < c$: comme dans le cas précédent, on a $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ d'où $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$, et par extension de la notation (voir B), on a bien $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

On admet la validité de cette relation dans tous les autres cas (signe de f et réels a , b et c quelconques).

■ Propriété 4

• Si f est continue et positive sur $[a; b]$, son intégrale I sur $[a; b]$ est, par définition, une aire ; d'où $I \geq 0$.

• Si f est continue et négative sur $[a; b]$, I est l'opposée d'une aire et donc $I \leq 0$.

• Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, $f - g$ est continue et négative d'où $\int_a^b (f - g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$ est négatif.

→ APPLICATION

Dans les exercices 4 et 5, on s'intéresse à $I = \int_1^e \ln(x) dx$, $J = \int_{\frac{1}{e}}^e \ln(x) dx$ et $K = \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln(x) dx$.

Exercice 4 Comparer...

1. Préciser, si possible, le signe de I , J et K .

2. Comparer, sans calcul, I et $L = \int_1^e (x - 1) dx$.

Solution

1. \ln étant continue et positive sur $[1; e]$, continue et négative sur $[\frac{1}{e}; 1]$, la propriété 4 donne $I \geq 0$ et $K \leq 0$. Par contre, elle ne renseigne pas sur le signe de J car \ln ne garde pas un signe constant sur $[\frac{1}{e}; e]$.

2. \ln et $x \mapsto x - 1$ sont continues sur $[1; e]$ et telles que, pour $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ car la courbe de \ln est située sous sa tangente en $A(1; 0)$. La propriété 4 donne alors $I \leq L$.

voir aussi exercice n° 4

Exercice 5 Calculer...

On suppose connues les valeurs des intégrales I et J : $I = 1$ et $J = \frac{2}{e}$.

En déduire les valeurs des intégrales K (voir ci-dessus) et $M = \int_1^e [1 + \ln(x^2)] dx$.

Solution

• La relation de Chasles donne $\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^e \ln(x) dx + \int_e^1 \ln(x) dx$, d'où $K = J - I = \frac{2}{e} - 1$.

• Pour $x > 0$, $\ln(x^2) = 2 \ln x$, d'où $M = \int_1^e (1 + 2 \ln x) dx$; puis, par propriété de linéarité, on a :

$$M = \int_1^e 1 dx + 2 \int_1^e \ln x dx \text{ d'où } M = (e - 1) + 2K = e + \frac{4}{e} - 3.$$

voir aussi exercice n° 1

D ■ Valeur moyenne d'une fonction

Définition 4 → Si f est une fonction continue sur $[a; b]$, $a \neq b$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$ le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Remarques

• $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ généralise la moyenne $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, d'où son nom.

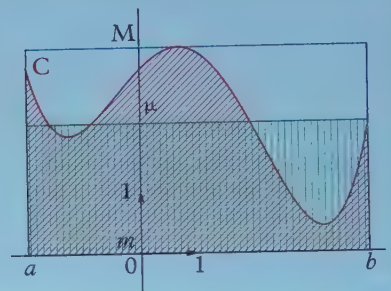
• Lorsque f est continue et positive sur $[a; b]$, l'aire du domaine situé sous la courbe C de f coïncide avec celle du rectangle de dimensions $b-a$ et μ .

Propriété 5 → Si f est une fonction continue sur $[a; b]$, telle que $m \leq f \leq M$, alors on a :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

qui s'écrit aussi :

$$m \leq \mu \leq M.$$



Exemple :

Sur la figure ci-dessus, en admettant que C soit la courbe d'une fonction f continue sur $[-2; 4]$ telle que, pour tout x de $[-2; 4]$, on ait $\frac{2}{5} \leq f(x) \leq \frac{10}{3}$, on peut écrire :

$$6 \times \frac{2}{5} \leq \int_{-2}^4 f(x) dx \leq 6 \times \frac{10}{3}.$$

3. Intégrale et primitives

A ■ Notion de primitive

Définition 5 → Soit f une fonction continue sur un intervalle I . On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto x^2$ admet $F : x \mapsto \frac{1}{3}x^3$ comme primitive sur \mathbb{R} .

Propriété 6 → Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a appartient à I , alors l'existence de fonctions primitives

la fonction $\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I .

Exemple :

φ définie sur \mathbb{R}^+ par $\varphi(x) = \int_1^x \sqrt{t} dt$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$.

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 5

f étant continue sur $[a; b]$, $a < b$, et ayant, pour tout réel x de $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, la propriété 4 donne

$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$. En intégrant les constantes (voir exercice 3 des applications du cours, page 189),

on obtient $\int_a^b m dx = m(b-a)$ et $\int_a^b M dx = M(b-a)$ d'où les inégalités $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

■ Propriété 6

Dans l'activité 2 page 187, on a établi dans le cas particulier où f est continue, **strictement croissante et positive**, que

« la fonction aire » S , définie sur $[a; b]$ par $S(x) = \int_a^x f(t) dt$, était une primitive de f .

On admet, plus généralement, qu'il en est de même pour la fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ dès que f est **continue** sur I et cela, quel que soit le réel a de I .

→ APPLICATIONS

Exercice 6 Encadrer avec les inégalités de la moyenne

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'intégrale $J_n = \int_n^{n+2} e^{\frac{1}{x}} dx$.

Déterminer un encadrement de J_n et en déduire la limite de J_n en $+\infty$.

Solution

• La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ est continue et strictement décroissante ; pour $x \in [n; n+2]$, on a donc $e^{\frac{1}{n+2}} \leq f(x) \leq e^{\frac{1}{n}}$, d'où, par les inégalités de la moyenne, $[(n+2) - n]e^{\frac{1}{n+2}} \leq \int_n^{n+2} f(x) dx \leq [(n+2) - n]e^{\frac{1}{n}}$.

Il en résulte l'encadrement $2e^{\frac{1}{n+2}} \leq J_n \leq 2e^{\frac{1}{n}}$, pour tout n non nul.

• De $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n+2}} = 1$, on déduit, par le théorème des gendarmes, que la suite (J_n) converge vers 2.

voir aussi exercice n° 7

Exercice 7 Déterminer une primitive de forme connue

Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 e^{-x}$ admet sur \mathbb{R} une primitive F de la forme $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$, où a , b et c sont des réels.

Solution

• F est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout x réel, on a $F'(x) = (2ax + b)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)(-e^{-x})$, soit encore $F'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$.

• F sera une primitive de f sur \mathbb{R} si et seulement si $-a = 1$, $2a - b = 0$ et $b - c = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = -1$, $b = -2$ et $c = -2$.

En conclusion, f admet bien une primitive F sur \mathbb{R} de la forme voulue, définie par $F(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

B ■ Ensemble des primitives d'une fonction

Propriété 7 →

- Toute fonction continue sur I admet une infinité de primitives sur I .
- Si F est l'une d'elles, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G telles que $G(x) = F(x) + k$, avec k réel.

Exemple :

$F : x \mapsto -\cos x$ est une primitive sur \mathbb{R} de $f : x \mapsto \sin x$. Les primitives sur \mathbb{R} de f sont donc les fonctions G telles que $G(x) = -\cos x + k$, avec k réel quelconque.

Propriété 8 →

Primitive
sous condition

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , α un réel de I et β un réel, alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(\alpha) = \beta$.

Exemple :

Une primitive F sur \mathbb{R} de $f : x \mapsto \sin x$ est de la forme $F(x) = -\cos x + k$, avec k réel. $F(\pi) = 2$ si et seulement si $-\cos \pi + k = 2$, c'est-à-dire lorsque $k = 1$. La primitive de f cherchée est donc la fonction $F_0 : x \mapsto 1 - \cos x$.

Corollaire →

Si f est une fonction continue sur I , et a un réel de I , alors la fonction $\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant pour $x = a$.

Exemple :

Sur $]0 ; +\infty[$, la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$ est la primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$. Tout comme la fonction \ln !

Cette primitive étant unique, il s'agit donc de \ln et pour $x > 0$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

C ■ Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Propriété 9 →

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a et b sont deux réels de I , alors, pour toute primitive F de f sur I , $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Exemples :

- La fonction continue $f : x \mapsto x^2$ admettant $F : x \mapsto \frac{1}{3}x^3$ comme primitive sur \mathbb{R} , l'intégrale $\int_0^1 x^2 dx$ est égale à $F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$ (voir activité 1 page 186).

- Le calcul de l'intégrale $K = \int_0^6 f(x) dx$, avec $f(x) = -0,5x + 1$ a été effectué dans l'exercice 1 (applications du cours) page 189, par un calcul d'aires ; on a trouvé $K = -3$. Désormais, en utilisant la propriété, il suffit de trouver une primitive F de f sur $[0 ; 6]$ et de calculer $K = F(6) - F(0)$.

Or une primitive F de f est donnée par $F(x) = -0,25x^2 + x$.

Comme $F(6) = -3$ et $F(0) = 0$, on obtient bien, à nouveau, $K = -3$.

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 7

Pour toute fonction f continue sur I , l'existence d'une primitive est assurée, d'après la propriété 6, par la fonction $\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$. Mais alors, toute fonction $\varphi + k$, avec k réel, est encore une primitive de f sur I .

Réciproquement, si F et G sont des primitives de f sur I , on a $G' = F' = f$, d'où $(G - F)' = 0$. $G - F$ étant dérivable et de dérivée nulle sur I , il en résulte que $G - F$ est une fonction constante sur I . D'où $G = F + k$.

■ Propriété 8

Soit f une fonction continue sur I et F l'une de ses primitives. D'après la propriété 7, toute primitive G de f est de la forme $F + k$ avec k réel. $G(\alpha) = \beta$ équivaut donc à $F(\alpha) + k = \beta$ ou encore à $k = \beta - F(\alpha)$.

L'unicité de k assure l'unicité d'une primitive G vérifiant la condition $G(\alpha) = \beta$.

■ Corollaire

La fonction $\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I , d'après la propriété 6, et elle vérifie $\varphi(a) = 0$ d'après la convention (B page 190). D'après la propriété 7, elle est la seule primitive satisfaisant cette condition.

■ Propriété 9

D'après le corollaire de la propriété 8, $\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I qui vérifie $\varphi(a) = 0$.

D'après la propriété 7, les primitives F et φ sont liées par $\varphi = F + k$, où k est un réel.

L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$, égale à $\varphi(b)$, vaut encore $\varphi(b) - \varphi(a)$, qui coïncide en effet avec le réel $F(b) - F(a)$.

→ APPLICATIONS

Exercice 8 Parler d'une fonction que l'on ne connaît pas vraiment !

Que peut-on dire, sans calculs, de la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \int_{-1}^x (3t^2 + e^{-t}) dt$?

Solution

- $f : t \mapsto 3t^2 + e^{-t}$ étant continue sur \mathbb{R} , h est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f (propriété 6).
- Toute primitive de f sur \mathbb{R} est donc de la forme $h + k$, où k est un réel quelconque (propriété 7).
- Comme $h(-1) = 0$, h est la seule primitive de f sur \mathbb{R} s'annulant pour $x = -1$ (propriété 8).
- Ayant $h' = f$ et $f > 0$ sur \mathbb{R} , h est croissante sur \mathbb{R} ; $h(-1) = 0$ donne $h > 0$ sur $]-1; +\infty[$ et $h < 0$ sur $]-\infty; -1[$.

voir aussi exercices n° 5, 41, 45

Exercice 9 Déterminer l'expression d'une fonction (dont on a déjà parlé !)

Calculer $h(x) = \int_{-1}^x (3t^2 + e^{-t}) dt$, pour x réel.

Solution

$f : t \mapsto 3t^2$ et $g : t \mapsto e^{-t}$ admettant pour primitives :

$$F : t \mapsto t^3 \text{ et } G : t \mapsto -e^{-t},$$

on en déduit que $F + G : t \mapsto t^3 - e^{-t}$ est une primitive de $f + g$ sur \mathbb{R} .

D'où :

$$h(x) = [t^3 - e^{-t}]_{-1}^x = (x^3 - e^{-x}) - (-1 - e) = x^3 - e^{-x} + e + 1.$$

voir aussi exercice n° 24

4. Aide au calcul intégral

A ■ Des formulaires

Deux approches sont désormais possibles pour calculer une intégrale : soit par les aires (voir définitions 1, 2 et 3), soit par les primitives (voir propriété 9). Cependant la recherche de primitives, qui s'appuie sur les formules de dérivation, n'est pas toujours aisée ! On pourra s'aider des formulaires ci-dessous.

• Formulaire 1 (primitives usuelles)

Si f est définie par $f(x) = \dots$	sur $I = \dots$	ses primitives F sont telles que $F(x) = \dots$	
a (constante)	\mathbb{R}	$ax + k ; k \in \mathbb{R}$	
x^r avec : (i) r entier naturel non nul (ii) r entier relatif, $r \leq -2$ (iii) r rationnel et $r \neq -1$	(i) \mathbb{R} (ii) $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$ (iii) $]0 ; +\infty[$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + k, k \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{x}$	(i) $]0 ; +\infty[$ (ii) $]-\infty ; 0[$	(i) $\ln(x) + k ; k \in \mathbb{R}$ (ii) $\ln(-x) + k ; k \in \mathbb{R}$	dans les deux cas : $\ln x + k$
$\frac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$	$-\frac{1}{x} + k ; k \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$	$2\sqrt{x} + k ; k \in \mathbb{R}$	
e^x	\mathbb{R}	$e^x + k ; k \in \mathbb{R}$	
$\sin x$ $\cos x$	\mathbb{R}	$-\cos x + k ; k \in \mathbb{R}$	$\sin x + k ; k \in \mathbb{R}$

• Formulaire 2 (primitives de fonctions composées usuelles)

Si f est de la forme...	avec u dérivable sur I telle que...	alors une primitive F est de la forme...	
$u^p u'$ ($p \in \mathbb{Z}, p \neq -1$)	u ne s'annule pas sur I lorsque $p \leq -2$	$\frac{1}{p+1} u^{p+1}$	
$\frac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I	$-\frac{1}{u}$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I	$2\sqrt{u}$	
$\frac{u'}{u}$	(i) $u > 0$ sur I (ii) $u < 0$ sur I	(i) $\ln(u)$ (ii) $\ln(-u)$	dans les deux cas : $\ln u $
$u' e^u$		e^u	
$u' \sin u$ $u' \cos u$		$-\cos u$	$\sin u$

B ■ Une méthode d'intégration par parties

Propriété 10

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , telles que u' et v' soient continues sur I , alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Remarque : avant d'utiliser cette formule, il convient de se demander si la substitution de uv' par $u'v$ dans l'intégrale facilite la recherche de primitives.

→ DÉMONSTRATION

■ Propriété 10

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . On a $(uv)' = u'v + uv'$, avec u' et v' continues sur I , et donc $u'v$ et uv' aussi, ainsi que leur somme $(uv)'$.

En intégrant chaque membre, il vient, par linéarité : $\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$ soit encore

$$[(uv)(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx, \text{ qui n'est autre que la formule d'intégration par parties.}$$

→ APPLICATIONS

Exercice 10 Chercher des primitives pour calculer des intégrales

Calculer – si possible – les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 223x^{2006} dx ; J = \int_{-2}^{-1} \left(2t + 3 - \frac{5}{t} + \frac{6}{t^2} \right) dt ; K = \int_0^1 \frac{dx}{(3x-2)^2} \text{ et } L = \int_e^{e^2} \frac{\ln(t)}{t} dt.$$

Solution

• $x \mapsto 223x^{2006}$ étant continue sur $[0 ; 1]$,

$$\text{on peut écrire } I = 223 \int_0^1 x^{2006} dx = 223 \left[\frac{x^{2007}}{2007} \right]_0^1 = \frac{1}{9}.$$

• Sur $[-2 ; -1]$, $t \mapsto \frac{1}{t}$ admet pour primitive la fonction $t \mapsto \ln(-t)$;

$$\text{d'où } J = \left[t^2 + 3t - 5 \ln(-t) - \frac{6}{t} \right]_{-2}^{-1} = 3 + 5 \ln(2).$$

• En écrivant $\frac{1}{(3x-2)^2} = \frac{1}{3} \frac{3}{(3x-2)^2}$, f est de la forme $k \frac{u'}{u^2}$ qui se « primitive » en $k \left(-\frac{1}{u} \right)$. Pourtant, il serait vain de poursuivre : f n'est pas continue ni même définie sur $[0 ; 1]$, K n'existe pas.

• Pas de problème de continuité cette fois et f est de la forme $u'u$ avec $u(t) = \ln(t)$; une primitive de $u'u$ étant $\frac{1}{2} u^2$, on a $L = \left[\frac{1}{2} \ln^2(t) \right]_e^{e^2} = \frac{1}{2} \ln^2(e^2) - \frac{1}{2} \ln^2(e) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

voir aussi exercices n° 18 à 21

Conseil

Avant de se lancer dans le calcul de $\int_a^b f(x) dx$, il faut s'assurer que la fonction f est bien définie et continue sur un intervalle contenant a et b .

Exercice 11 Utiliser la méthode d'intégration par parties dans un calcul d'aire

Calculer l'aire du domaine E sous la courbe C d'équation $y = xe^{-0,5x}$ pour $x \in [0 ; 2]$, en unités d'aire.

Solution

La fonction $x \mapsto xe^{-0,5x}$ est continue et positive sur $[0 ; 2]$; par définition, l'aire du domaine E coïncide avec l'intégrale $\int_0^2 xe^{-0,5x} dx$. Le produit $xe^{-0,5x}$ ne pouvant être ramené à une forme connue,

il paraît intéressant d'intégrer par parties en posant $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-0,5x} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -2e^{-0,5x} \end{cases}$.

Ces quatre fonctions étant continues sur $[0 ; 2]$,

$$\begin{aligned} \int_0^2 xe^{-0,5x} dx &= [x(-2e^{-0,5x})]_0^2 - \int_0^2 -2e^{-0,5x} dx = -\frac{4}{e} + 2[-2e^{-0,5x}]_0^2 = -\frac{4}{e} - 4 \left[\frac{1}{e} - 1 \right] \\ &= 4 - \frac{8}{e} \approx 1,06 \text{ (u.a.)}. \end{aligned}$$

voir aussi exercices n° 26 à 29

1. Quadrature de la parabole par Thabit Ibn Qurra

OBJECTIF : Déterminer l'aire d'un domaine situé sous une courbe.

On note \mathcal{C} la courbe représentative dans un repère orthonormal de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur \mathbb{R}^+ et \mathcal{D} le domaine défini par $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq \sqrt{x}$, où a est un réel positif fixé.

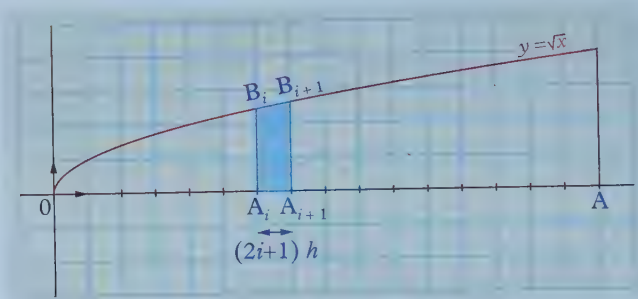
Point Info

Thabit Ibn Qurra, médecin, philosophe, linguiste, astronome et mathématicien domina toutes les connaissances de son époque (ix^e siècle).

A. ➔ Question préliminaire

Montrer que
$$\sum_{p=1}^n (2p+1)^2 = \frac{n(4n^2 + 12n + 11)}{3}.$$

B. ➔ Méthode historique



On note A le point de coordonnées $(a ; 0)$. Étant donné un entier naturel n non nul, on définit sur le segment $[OA]$ les $n + 1$ points $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'abscisses respectives $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ telles que $a_0 = 0$, et pour tout i compris entre 0 et $n - 1$, $a_{i+1} = a_i + (2i + 1)h$ où $h = \frac{a}{n^2}$; on appelle $(B_i)_{0 \leq i \leq n}$ les $n + 1$ points de mêmes abscisses que les points $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ et situés sur la courbe \mathcal{C} .

1. Dans cette question, on suppose que $n = 4$. Recopier le schéma ci-dessus et représenter les points $(A_i)_{0 \leq i \leq 4}$, ainsi que les points $(B_i)_{0 \leq i \leq 4}$.
2. On revient maintenant au cas général.
 - a. Déterminer les coordonnées des points $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(B_i)_{0 \leq i \leq n}$.
 - b. Soit p un entier tel que $0 \leq p \leq n - 1$. Quelle est l'aire du trapèze $(A_p A_{p+1} B_{p+1} B_p)$?
 - c. Déterminer l'aire, que l'on notera S_n , obtenue en sommant l'aire des trapèzes précédents pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n - 1$.
 - d. En déduire l'aire du domaine \mathcal{D} .

C. ➔ Méthode moderne

Retrouver le résultat précédent en utilisant les calculs d'intégrale à l'aide de primitives.

2. Calcul approché d'une intégrale

OBJECTIF : Utiliser des suites adjacentes pour encadrer une aire.

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$.

À défaut de connaître une primitive de la fonction continue $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$ (qui en admet pourtant une infinité !), on se propose d'évaluer l'aire A du domaine situé sous sa courbe C , dans un repère orthogonal, en unités d'aire.

1. Construire, avec précision, la courbe C .

2. Encadrement de A

On subdivise l'intervalle $[0 ; 1]$ en 2^n intervalles de longueur $\frac{1}{2^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide des nom-

bres $a_k = \frac{k}{2^n}$ où k est un entier, $0 \leq k \leq 2^n$.

On considère sur chaque intervalle $[a_k ; a_{k+1}]$ pour $0 \leq k \leq 2^n - 1$, le rectangle R_k de hauteur $f(a_k)$ et le rectangle R'_k de hauteur $f(a_{k+1})$.

On note V_n la somme des aires des rectangles R_k et U_n la somme des rectangles R'_k .

a. Exprimer U_n et V_n en fonction de n et des réels $f(a_k)$.

b. Quel encadrement de A peut-on écrire ?

3. Étude des suites $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$

a. • Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{k}{2^n}\right)$; puis en regroupant les termes où k est pair

et ceux où k est impair, montrer que $U_n = \frac{1}{2^n} \left(\sum_{p=1}^{2^{n-1}} f\left(\frac{2p}{2^n}\right) + \sum_{p=1}^{2^{n-1}} f\left(\frac{2p-1}{2^n}\right) \right)$.

• Justifier que $\sum_{p=1}^{2^{n-1}} f\left(\frac{2p-1}{2^n}\right) \geq \sum_{p=1}^{2^{n-1}} f\left(\frac{2p}{2^n}\right)$ et en déduire que, pour tout $n \geq 2$, $U_n \geq U_{n-1}$.

b. Montrer de même que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(\frac{2p}{2^n}\right) + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(\frac{2p+1}{2^n}\right) \right)$ puis

que, pour $n \geq 2$, $V_n \leq V_{n-1}$.

c. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $V_n - U_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.

d. Justifier que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes et que leur limite commune est A .

4. Une valeur approchée de A (et donc de I)

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq A \leq V_n$.

a. Déterminer à partir de quel rang p , on a $0 \leq V_n - U_n \leq 10^{-3}$.

b. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, donner une valeur approchée de A , donc de I , à 10^{-3} près.

Remarque : on pourra déterminer la valeur exacte de I en faisant l'exercice n° 57, p. 212.

3. Lien entre volumes et intégrales

OBJECTIF : Retrouver des formules de volumes usuels et généraliser.

A. ➔ Volume d'un cône

Soit un cône régulier de sommet S , de hauteur h et de base circulaire de rayon R . On note V le volume de ce cône.

On construit un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\overrightarrow{OS} = h\vec{k}$ (voir figure ci-contre).

Soit $z \in]0 ; h[$, on coupe le cône par le plan parallèle à (xOy) passant par le point $(0 ; 0 ; z)$, la section obtenue est un disque de rayon $r(z)$.

On note Δz un petit accroissement de la variable z .

On définit ainsi un tronc de cône de hauteur Δz et de bases de rayons respectifs $r(z)$ et $r(z + \Delta z)$.

On note ΔV le volume de ce tronc de cône.

1. En assimilant le tronc de cône à un cylindre de rayon $r(z)$ et de hauteur Δz , donner une expression de ΔV .

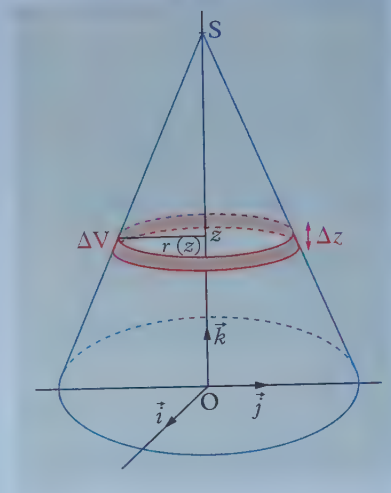
2. Démontrer que $r(z) = \frac{R}{h} (h - z)$, en déduire que :

$$\Delta V = \frac{\pi R^2}{h^2} (h - z)^2 \Delta z.$$

On admet que l'on peut en déduire :

$$\frac{dV}{dz}(z) = \frac{\pi R^2}{h^2} (h - z)^2 \text{ et } V = \int_0^h \frac{dV}{dz}(z) dz.$$

3. Calculer l'intégrale ci-dessus et vérifier que l'on retrouve bien la formule usuelle du volume d'un cône.



B. ➔ Volume d'une sphère

Soit une sphère de centre O et de rayon R . On note V le volume de cette sphère. On construit un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (voir figure ci-dessous).

On utilise la même méthode que dans la partie A.

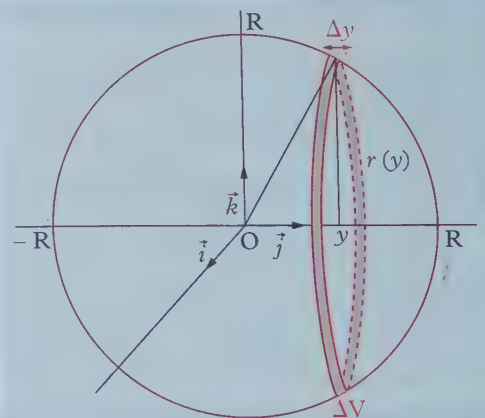
Soit $y \in]-R ; +R[$, on assimile la « tranche » de sphère de largeur Δy à un cylindre de rayon $r(y)$ et de hauteur Δy .

1. Calculer $r(y)$ en fonction de R et de y et en déduire que $\Delta V = \pi(R^2 - y^2)\Delta y$.

2. En admettant que :

$$\frac{dV}{dy}(y) = \pi(R^2 - y^2) \text{ et que } V = \int_{-R}^R \frac{dV}{dy}(y) dy,$$

calculer V et montrer que l'on retrouve la formule usuelle du volume d'une sphère.



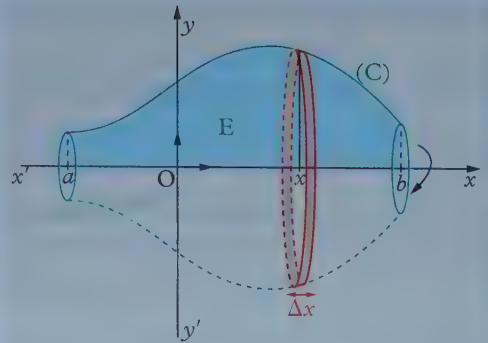
C. ➔ Volume d'un solide de révolution

Soit f une fonction continue positive sur l'intervalle $[a ; b]$ ($a < b$). On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On note E le domaine du plan limité par (C) , l'axe $x'x$ et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.

On fait tourner E autour de l'axe $x'x$ et on cherche le volume V du solide engendré, en unités de volume.

Pour cela, on complète le repère en un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.



1. Une formule générale

Soit $x \in]a ; b[$. On assimile la tranche de solide d'épaisseur Δx à un cylindre de rayon $f(x)$ et de hauteur Δx et on note ΔV son volume.

On a alors $\Delta V = \pi(f(x))^2 \Delta x$ et on admet que :

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx \text{ (en unités de volumes).}$$

2. Applications

a. Déterminer le volume, en unités de volume, du solide engendré par la révolution autour de l'axe $x'x$ de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1 ; 5]$. Donner ce volume en cm^3 dans le cas où l'unité graphique est 2 cm.

b. Reprendre l'énoncé de la question 1 avec la courbe d'équation $y = e^x$ sur l'intervalle $[-2 ; +2]$.

4. En moto

OBJECTIF : Calculer une distance parcourue par un mobile à l'aide d'une intégrale.

Pour comparer l'efficacité des reprises à bas régime de deux motos, on mesure leur vitesse instantanée toutes les deux secondes pendant une accélération. La vitesse instantanée de chaque moto est croissante. On a obtenu les résultats suivants (les vitesses sont exprimées en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) :

t en secondes	0	2	4	6	8	10
Vitesse moto A	12	38	50	57	68	92
Vitesse moto B	12	18	27	39	54	72

On cherche à calculer maintenant les distances parcourues, exprimées en mètres, par chacune des motos pendant cette période d'accélération.

1. Sur l'intervalle de temps $[0 ; 2]$

a. Quelle distance, **en mètres**, aurait parcourue la moto A pendant ces deux secondes, si sa vitesse avait été constante et égale à $12 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$? Et si sa vitesse constante avait été de $38 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$? Quel encadrement de la distance, en mètres, parcourue par la moto A peut-on en déduire ?

b. Faire de même pour la moto B, avec les vitesses $12 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

2. Sur l'intervalle de temps [0; 10]

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 1 cm pour 1 seconde en abscisse et 1 cm pour $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en ordonnée).

- Convertir toutes les vitesses du tableau en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et placer les points $(t; v(t))$ correspondants (utiliser des couleurs différentes pour les motos A et B).
- Montrer que les encadrements obtenus à la question 1 peuvent s'interpréter à l'aide d'aires de rectangles que l'on précisera et construira (utiliser plusieurs couleurs).
- Construire de même sur les autres intervalles $[2; 4]$, $[4; 6]$, $[6; 8]$ et $[8; 10]$, les rectangles dont les aires encadrent les distances parcourues par chaque moto.
- Par quelles sommes peut-on alors encadrer la distance, en mètres, parcourue par chaque motard sur l'intervalle de temps $[0; 10]$? Déterminer ces encadrements, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

3. Sur un intervalle de temps $[t; t + \Delta t]$

On désigne par $d(t)$ la distance en mètres parcourue par une moto entre les instants 0 et t et par $v(t)$ sa vitesse instantanée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ à l'instant t .

- Donner, pour $\Delta t > 0$, un encadrement de $d(t + \Delta t) - d(t)$ et calculer $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d(t + \Delta t) - d(t)}{\Delta t}$.
- On admet qu'il en serait de même avec $\Delta t < 0$. Que peut-on dire de la fonction d ? En déduire que la distance parcourue en mètres par une moto au bout de t secondes est :

$$d(t) = \int_0^t v(x) \, dx.$$

- On suppose connues les vitesses instantanées v_A et v_B respectives des motos A et B, en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$:

$$v_A(t) = \frac{3}{16} t^3 - \frac{23}{8} t^2 + 18t + 12 \quad \text{et} \quad v_B(t) = \frac{3}{8} t^2 + \frac{9}{4} t + 12.$$

- Vérifier que v_A et v_B correspondent bien aux données du tableau initial.
- Calculer les distances d_A et d_B , en mètres, parcourues respectivement par les motos A et B pendant ces 10 secondes.

5. Encadrements, majorations d'erreurs

OBJECTIF : Obtenir et utiliser des encadrements d'intégrales

A. ➔ Majorations d'erreurs

1. Cas général

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$). On suppose qu'il existe un réel $k > 0$ tel que, pour tout x de $[a; b]$, $|f'(x)| \leq k$ (ou $-k \leq f'(x) \leq k$).

Montrer que, pour tout x de $[a; b]$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) \, dt \quad \text{et} \quad -k(x - a) \leq \int_a^x f'(t) \, dt \leq k(x - a).$$

En déduire sur $[a; b]$ un encadrement de $f(x) - f(a)$, puis une majoration de $|f(x) - f(a)|$.

2. Quelle erreur commet-on en donnant 10 comme valeur approchée de $\sqrt{101}$?

Soit $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ sur $[100; 121]$, majorer $|f'(x)|$ sur $[100; 121]$ et, en utilisant la question 1, montrer qu'un majorant de l'erreur commise en prenant 10 comme valeur approchée de $\sqrt{101}$ est 0,05.

3. Quelle erreur commet-on en donnant $\frac{1}{2}$ comme valeur approchée de $\sin 31^\circ$?

a. Soit g définie sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \sin x$ et soit h définie sur $[30; 90]$ par $h(x) = \frac{\pi}{180} x$.

Justifier que la fonction $f = g \circ h$ est la fonction qui, à tout angle donné en degrés dans l'intervalle $[30; 90]$, associe son sinus.

b. Calculer $f'(x)$ et montrer qu'un majorant k de $|f'(x)|$ sur $[30; 90]$ est $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{180}$.

c. En utilisant la question 1, donner sous forme d'un décimal d'ordre 3 un majorant de l'erreur commise en prenant $\frac{1}{2}$ comme valeur approchée de $\sin 31^\circ$.

B. ➔ Convergence de certaines suites

Soit les suites définies sur \mathbb{N}^* par :

$$\text{pour tout } n, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

On définit sur $[1; +\infty[$ les fonctions f et g par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}.$$

a. Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) .

b. Encadrer les fonctions f et g sur l'intervalle $[k; k+1]$ ($k \in \mathbb{N}^*$) et en déduire que pour tout entier k non nul :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{1}{k^2}.$$

c. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les intégrales $I_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$ et $J_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2} dx$.

d. En utilisant la relation de Chasles sur les intégrales, montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} - 1 \leq I_n \leq u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} - 1 \leq J_n \leq v_n.$$

e. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et en déduire que la suite (u_n) diverge.

f. Montrer que la suite (J_n) est majorée par 1 ; prouver que la suite (v_n) converge vers un réel compris entre 1 et 2.

1 Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 4}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $x \in]1; +\infty[$, on ait $f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.

2. Calculer $\int_2^5 f(x) dx$.

Solution

1. On cherche a , b et c tels que, pour $x > 1$, $f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{ax(x^2-1) + b(x-1) + c(x+1)}{x^2-1}$.

Soit encore, $f(x) = \frac{ax^3 + x(-a+b+c) + (c-b)}{x^2-1}$. Par identification des coefficients, on obtient le sys-

$$\text{tème } \begin{cases} a = 1 \\ -a + b + c = -3, \text{ ce qui donne, après résolution} \\ c - b = -4 \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}. \text{ Donc } f(x) = x + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-1}.$$

$$\begin{aligned} 2. \int_2^5 f(x) dx &= \int_2^5 \left(x + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-1} \right) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \ln(x+1) - 3 \ln(x-1) \right]_2^5 \\ &= \left(\frac{25}{2} + \ln 6 - 3 \ln 4 \right) - \left(\frac{4}{2} + \ln 3 - 3 \ln 1 \right) = \frac{21}{2} - 5 \ln 2. \end{aligned}$$

voir aussi exercice n° 32

2 En utilisant la formule d'intégration par parties, déterminer les primitives de :

$$x \mapsto h(x) = x \ln x \text{ sur }]0; +\infty[\text{ et } x \mapsto \varphi(x) = \ln(x+1) \text{ sur }]-1; +\infty[.$$

Solution

• Une primitive de h sur $]0; +\infty[$ est définie par $H_1(x) = \int_1^x t \ln t dt$. Calculons cette intégrale par parties : on pose $u(t) = \ln t$ (donc $u'(t) = \frac{1}{t}$) et $v'(t) = t$ (donc on peut choisir $v(t) = \frac{t^2}{2}$).

u et v sont bien deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et leurs dérivées sont continues, d'où

$$H_1(x) = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} dt, \text{ c'est-à-dire } H_1(x) = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_1^x - \frac{1}{2} \int_1^x t dt.$$

$$\text{Donc } H_1(x) = \left[\frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^2}{4} \right]_1^x = \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} \right) \text{ et finalement } H_1(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Comme les primitives sont définies à une constante près et que $\frac{1}{4}$ est une constante, on peut dire que les primitives de h sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions H telles que $H(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + k$ ($k \in \mathbb{R}$).

• Une primitive de φ sur $] -1; +\infty[$ est définie par $\Phi_0(x) = \int_0^x \ln(t+1) dt$. Pour calculer cette intégrale, posons $u(t) = \ln(t+1)$ (donc $u'(t) = \frac{1}{t+1}$) et $v'(t) = 1$ (donc on peut choisir $v(t) = t$ ou mieux encore $v(t) = t+1$, pour avoir uv' le plus simple possible). Les fonctions u et v sont bien dérivables à dérivées continues donc $\Phi_0(x) = [(t+1) \ln(t+1)]_0^x - \int_0^x \frac{1}{t+1} (t+1) dt$ c'est-à-dire :

$$\Phi_0(x) = [(t+1) \ln(t+1)]_0^x - \int_0^x dt = [(t+1) \ln(t+1) - t]_0^x \text{ d'où } \Phi_0(x) = (x+1) \ln(x+1) - x.$$

Conclusion. Les primitives de φ sur $] -1; +\infty[$ sont les fonctions Φ telles que :

$$\Phi(x) = (x+1) \ln(x+1) - x + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

voir aussi exercice n° 84

3 Soit la suite d'intégrales (I_n) où $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1. Que peut-on en conclure ?

2. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = 1 - J_n$ avec $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Solution

1. Pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$, on a $0 \leq x \leq 1$ donc $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ (1) et $0 \leq x^n \leq 1$ (2). Sur $[0 ; 1]$, on déduit de (1) que $1 \leq 1+x^{n+1} \leq 1+x^n$ et par suite, la fonction inverse étant décroissante sur $]0 ; +\infty[$, que $0 \leq \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^{n+1}} \leq 1$.

En utilisant le lien entre intégrales et ordre, on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}} dx \leq \int_0^1 1 dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 \leq I_n \leq I_{n+1} \leq 1.$$

Donc la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. On peut en déduire que la suite est convergente.

2. a. Pour tout réel x de $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n : $\frac{1}{1+x^n} = \frac{1+x^n - x^n}{1+x^n} = 1 - \frac{x^n}{1+x^n}$. En utilisant la linéarité de l'intégration, on obtient $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ ce qui donne $I_n = 1 - J_n$.

b. De (2), on déduit que pour tout entier naturel n , $1+x^n \geq 1$ et donc que $0 \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$, puis que

$0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$. D'où, en utilisant le lien entre ordre et intégrales, $0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx$.

Comme $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, cela donne $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.

En utilisant le théorème des gendarmes, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1$.

voir aussi exercices n° 60, 61, 62

4 Dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm, on considère les courbes C et D d'équations respectives $y = x + 1 + e^{-x}$ et $y = x + 1$ pour $x \in [0 ; +\infty[$.

1. Montrer que C admet D pour asymptote et que C est au-dessus de D.

2. Calculer, en cm^2 , l'aire A_λ du domaine E_λ délimité par C, D et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$ ($\lambda > 0$). Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

Solution

1. On pose $f(x) = x + 1 + e^{-x}$ et $\Delta(x) = f(x) - (x + 1) = e^{-x}$.

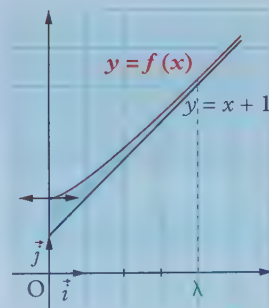
Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Delta(x) = 0$ et $\Delta(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$, C admet D pour asymptote en $+\infty$ et C est au-dessus de D.

2. $A(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx - \int_0^\lambda (x + 1) dx = \int_0^\lambda (f(x) - (x + 1)) dx$. Donc, en unités

d'aire, soit ici, en cm^2 , $A(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^\lambda = (1 - e^{-\lambda})$.

On a $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\lambda}) = 1$.

Remarque : le domaine situé entre C et D est illimité et a cependant une aire finie !

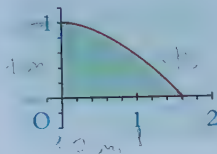


voir aussi exercices n° 33, 34

→ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Aires et intégrales

1 On considère la fonction f paire et périodique de période π , définie sur \mathbb{R} dont la courbe sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est représentée ci-dessous :



On admet que l'aire de la surface colorée en vert est égale à une unité d'aire.

1. Calculer les intégrales suivantes :

a. $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx$; b. $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$;

c. $K = \int_0^{2\pi} f(x) dx$.

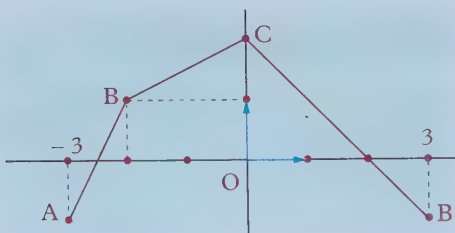
2. a. On considère la fonction $g = 3f$ définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Calculer $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$.

b. Les unités graphiques sont 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Que vaut, en cm^2 , l'aire de la surface limitée par la courbe représentant g , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$?

2 La fonction f , définie sur $[-3; 3]$, a pour courbe représentative la courbe ci-dessous :



1. Interpréter graphiquement et déduire les valeurs des intégrales suivantes :

a. $I = \int_{-2}^0 f(x) dx$; b. $J = \int_2^3 f(x) dx$;

c. $K = \int_2^{+2} f(x) dx$; d. $L = \int_{-3}^{-2} f(x) dx$.

2. a. Quelle est la valeur moyenne de f sur $[0; 2]$?
b. Quelle est la valeur moyenne de f sur $[-3; 3]$?

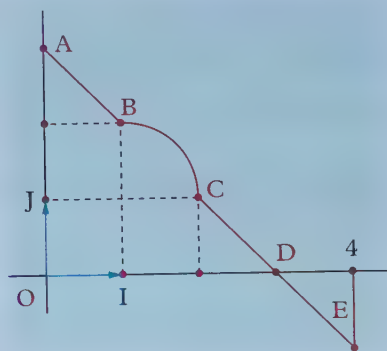
3. Le repère est orthonormal et l'unité graphique est égale à 0,8 cm.

Que vaut, en cm^2 , l'aire de la surface limitée par la courbe représentant f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$?

3 La courbe constituée des deux segments $[AB]$ et $[CE]$ et d'un quart de cercle \widehat{BC} représente une fonction f .

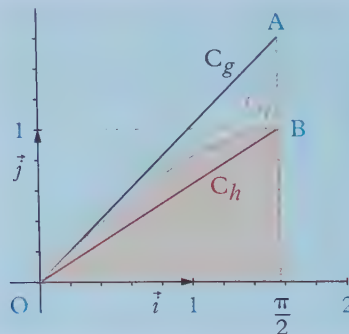
1. Calculer les intégrales suivantes :

a. $U = \int_0^3 f(x) dx$; b. $V = \int_3^4 f(x) dx$.



2. Quelle est la valeur moyenne de f sur $[0; 3]$? sur $[0; 4]$?

4 1. On donne les points $A\left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $B\left[\frac{\pi}{2}; 1\right]$ dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit g et h les fonctions respectivement représentées sur l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par les segments $[OA]$ et $[OB]$.



a. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx$

et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - h(x)) dx$.

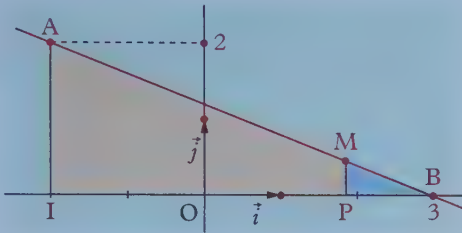
Interpréter graphiquement la dernière intégrale.

b. L'unité graphique est égale à 2 cm.
Que vaut, en cm^2 , l'aire de la surface limitée par la courbe représentant h , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$?

2. On admet que la courbe C_f , représentant une fonction f , est au-dessous de la droite (OA), et au-dessus de la droite (OB), sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

En déduire un encadrement de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

5 Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(-2; 2)$ et $B(3; 0)$ et la fonction f définie sur \mathbb{R} dont la représentation graphique est la droite (AB).



- Soit M un point du segment $[AB]$ d'abscisse x .
 - Calculer l'aire $F(x)$ du trapèze IPMA.
 - Vérifier que, pour tout $x \in [-2; 3]$, $F'(x) = f(x)$.
- Calculer l'aire $G(x)$ du triangle BMP. Calculer $G'(x)$.
- Expliquer les résultats obtenus.

6 1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
 $f(t) = \sin^5(t)$.

- Vérifier que f est impaire et périodique.
 - En déduire $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$ et $J = \int_0^{2\pi} f(t) dt$.
2. Calculer $K = \int_0^2 g(x) dx$ après avoir étudié la parité et la périodicité de la fonction $g(x) = \sin(\pi x)$.

7 On connaît le tableau de variation d'une fonction f :

x	0	1	2	3	5
$f(x)$	-1	0	2	1	2

- Donner des encadrements des intégrales suivantes :
- $I = \int_0^1 f(x) dx$; b. $J = \int_2^5 f(x) dx$;
 - $K = \int_1^3 f(x) dx$.

Primitives et intégrales

Pour les exercices 8 à 14, donner une primitive de chacune des fonctions f sur l'intervalle I .

- 8 $I = \mathbb{R}$.
 a. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$; b. $f(x) = (x+3)^2$;
 c. $f(x) = (4-x)^3$; d. $f(x) = x^2(x^3+1)^{2007}$.

- 9 $I =]0; +\infty[$.
 a. $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; b. $f(x) = \frac{3}{x+2}$;
 c. $f(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$; d. $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^4}$.

- 10 $I =]0; +\infty[$.
 a. $f(x) = 5\sqrt{x^2}$; b. $f(x) = 4x^{-\frac{1}{3}}$;
 c. $f(x) = (x^2+x)\sqrt{x}$; d. $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$.

- 11 $I =]1; +\infty[$.
 a. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$; b. $f(x) = \frac{1}{x} (\ln x)^3$;
 c. $f(x) = (x^3-x)\sqrt{x^2-1}$;
 d. $f(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}$.

- 12 $I = \mathbb{R}$.
 a. $f(x) = e^{x+1}$; b. $f(x) = e^{3x-5}$;
 c. $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$; d. $f(x) = e^x \sqrt[3]{e^x+2}$.

- 13 $I = \mathbb{R}$.
 a. $f(x) = \cos x$; b. $f(x) = \sin(3x)$;
 c. $f(x) = \sin^2(x)$; d. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x+2}$.

- 14 $I = \mathbb{R}$.
 a. $f(x) = \cos^2 x$; b. $f(x) = \cos x \sin 2x$;
 c. $f(x) = \sin^3(x)$
 (Indication : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.)

Pour les exercices 15 à 17, déterminer la primitive de chacune des fonctions f sur l'intervalle I , vérifiant la condition indiquée.

- 15 $I = \mathbb{R}$.
 a. $f(x) = (2x+3)^4$, $f(0) = 5$.
 b. $f(x) = 3x(x^2+1)^4$, $f(\sqrt{2}) = 1$.

EXERCICES

16 $I =]0 ; +\infty[$.

a. $f(x) = \frac{2}{(3x+2)^3}$, $f(2) = 4$.

b. $f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 5}{x}$, $f(1) = 3$.

17 $I = \mathbb{R}$.

a. $f(x) = e^{2x}(e^x - 3)$, $f(\ln 2) = -\frac{1}{3}$.

b. $f(x) = xe^{x^2}$, $f(1) = 2e$.

Calculs d'intégrales

Pour les exercices 18 à 23, calculer les intégrales proposées en utilisant une primitive.

18 a. $\int_0^2 (2x+1) dx$;

b. $\int_3^4 (t^3 + 2t^2 - 4t + 1) dt$;

c. $\int_{-2}^2 (x+1)^2 dx$; d. $\int_{-1}^2 t(t^2+2)^3 dt$.

19 a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3\theta) d\theta$; b. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt$;

c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos \theta d\theta$; d. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt$.

20 a. $\int_1^4 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) dx$; b. $\int_{-1}^1 \frac{dt}{3t-5}$;

c. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; d. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$.

21 a. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$; b. $\int_0^4 te^{t^2} dt$;

c. $\int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t}$; d. $\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx$;

e. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$; f. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$.

22 a. $\int_{-2}^2 (2^t + 2^{-t}) dt$; b. $\int_0^1 \frac{3^t+1}{4^t} dt$;

c. $\int_1^4 x^{\frac{5}{2}} dx$; d. $\int_1^9 (x+1)\sqrt{x} dx$.

23 Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^4 (|x-1| + |x-3|) dx$;

b. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx$;

c. $\int_{-2}^2 |t^2 + 3t + 2| dt$;

d. $\int_0^2 \max(1, t) dt$.

24 Pour $x \in \mathbb{R}$, soit :

$$I(x) = \int_0^x \cos^2 t dt \quad \text{et} \quad J(x) = \int_0^x \sin^2 t dt.$$

Calculer $I(x) + J(x)$ et $I(x) - J(x)$.
En déduire la valeur de $I(x)$ et de $J(x)$.

25 Soit f et g les fonctions définies sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = x^2(1-x)^3 \quad \text{et} \quad g(x) = x^3(1-x)^2.$$

On désigne par C_f et C_g les courbes de f et g dans un repère orthonormal.

1. a. Vérifier que, pour tout x appartenant à $[0 ; 1]$:

$$f(x) = g(1-x).$$

b. Que peut-on en déduire pour les points $M(x ; f(x))$ et $N(1-x ; g(1-x))$?
Et pour les courbes C_f et C_g ?

2. Montrer que :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$$

a. à l'aide de la question 1 ;

b. par le calcul.

Intégrations par parties

Pour les exercices 26 à 29, calculer les intégrales proposées en utilisant une ou plusieurs intégrations par parties.

26 a. $\int_{-2}^3 e^x(x+1) dx$; b. $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx$.

27 a. $\int_1^e \ln t dt$ (remarque : $\ln t = 1 \times \ln t$) ;

b. $\int_1^e t^n \ln t dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

28 $\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2} dt$.

29 a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$; b. $\int_0^{\pi} (x^2+1) \cos x dx$.

30 Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I en fonction de J puis J en fonction de I .

2. En déduire I et J .

31 Soit $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+2}} \frac{\ln t}{t^2} dt$, où $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer I_n à l'aide d'une intégration par parties.

b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

32 vu au BAC 1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

a. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que

l'on ait, pour tout $x > 1$, $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.

b. Trouver une primitive G de g sur $]1; +\infty[$.

2. Trouver une primitive F de la fonction f définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x \, dx$.

On donnera le résultat exact sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$ avec p et q rationnels.

D'après Bac S, septembre 2004.

Aire, valeur moyenne, volume

33 1. Dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm), dessiner la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 3x$ et la droite (d) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

2. Calculer l'aire, en cm^2 , de la portion de plan limitée par la parabole, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 3$.

3. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (d) et (P).

b. On pose $I = 4 \int_0^7 \left(\frac{7}{2}x - x^2\right) dx$.

Calculer I .

De quelle portion de plan I représente-t-elle l'aire en cm^2 ?

34 Pour tout x de l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,

on pose $f(x) = \sin x$.

1. Dans un repère orthonormal (unité graphique : 3 cm), dessiner (C), la courbe représentative de f .

2. Calculer la valeur moyenne de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Calculer l'aire de la portion de plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

35 Soit la fonction f définie sur $I =]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$$

1. Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout réel de I , on ait $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.

2. Donner la forme générale des primitives de f sur I .

3. Donner la primitive F de f vérifiant $F(2) = 4$.

4. Calculer la valeur moyenne de f sur $[2; 4]$.

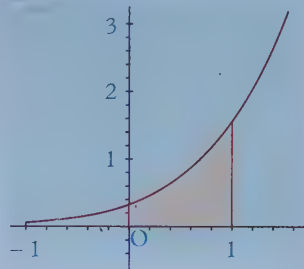
36 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 2}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel de \mathbb{R} , on ait $f(x) = ae^x + \frac{be^x}{e^x + 2}$.

2. Donner la forme générale des primitives de f sur \mathbb{R} .

3. Donner la primitive F de f vérifiant $F(0) = 0$.

4. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe de la fonction f représentée ci-dessous et la droite d'équation $x = 1$.



37 1. Calculer la distance parcourue par un train entre les instants $t = 0$ et $t = 10$ mn lorsque sa vitesse est définie en km/h par :

$$v(t) = \begin{cases} \text{si } 0 \leq t < 1, & v(t) = t^2 \\ \text{si } 1 \leq t < 2, & v(t) = t \\ \text{si } 2 \leq t < 9, & v(t) = 2 \\ \text{si } 9 \leq t < 10, & v(t) = -2t + 20 \end{cases}$$

Indication : on admet que, sur un intervalle $[t_1; t_2]$ où la fonction v est continue, la distance parcourue est donnée par $\int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt$.

2. Quelle est la vitesse moyenne sur ce parcours ?

38 Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

1. Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

2. Soit D le domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Calculer l'aire du domaine D en unités d'aire, puis en cm^2 .

3. En faisant tourner le domaine autour de l'axe des abscisses, on engendre un solide S . On admet que le volume de S est donné par :

$$V = \pi \int_0^2 (f(x))^2 \, dx$$

a. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in [0; 2]$, $(f(x))^2 = \frac{ae^x}{e^x + 1} + \frac{be^x}{(e^x + 1)^2}$.

b. En déduire la valeur de V en unités de volume, puis en cm^3 .

→ Que sais-je ?

Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, justifier par une démonstration ou exhiber un contre-exemple.

39 La valeur moyenne d'une fonction impaire continue sur \mathbb{R} est égale à 0 sur n'importe quel intervalle de la forme $[-a; a]$ où a réel, $a > 0$.

40 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$.

41 On pose, pour $x > 1$, $f(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t+1}} dt$.

Alors la limite de $\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ quand x tend vers 3 est égale à $\frac{1}{3}$.

42 Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$, positive, qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Alors $F: t \mapsto \int_1^t f(x) dx$ tend vers une limite finie quand t tend vers $+\infty$.

43 $\int_0^{\pi} \cos^2(2t) dx = \frac{\pi}{4}$.

44 Il existe des fonctions f , telles que $\frac{f'}{f}$ admet pour primitive $\ln(-f)$.

45 La fonction F définie sur $]-\infty; 1[$ par $F(x) = \int_{-1}^x \frac{e^t}{t-1} dt$ est décroissante.

46 La suite numérique définie par :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(\theta) d\theta, \text{ pour } n \geq 1$$

est une suite décroissante.

47 Soit f une fonction impaire, continue sur \mathbb{R} . Alors, pour tout a positif :

$$\int_{-a}^a f^2(t) dt = 2 \int_0^a f^2(t) dt.$$

48 $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = \ln \frac{4}{3}$.

49 La valeur moyenne de \ln sur $[2; 4]$ est : $\mu = 3 \ln 2$.

QCM

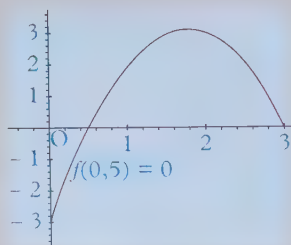
Indiquer les réponses justes pour chaque question (il peut y en avoir plusieurs).

50 À partir d'une courbe

Soit f la fonction définie sur $[0; 3]$ dont la courbe est reproduite ci-contre.

On pose, pour $x \in [0; 3]$:

$$F(x) = \int_{0,5}^x f(t) dt.$$



- A. $F(3) > 0$.
- B. F est croissante sur $[0; 3]$.
- C. La fonction F admet un minimum en 0,5.
- D. La valeur moyenne de f sur $[0; 3]$ est positive.

51 Soit $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- A. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.
- B. La suite (I_n) est croissante.
- C. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
- D. (I_n) converge vers 0.

52 En composant

On pose, pour $x \in]-1; 1[$:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

- A. La fonction F est paire.
- Pour $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2} \right[$, on pose $G(t) = F \circ \sin(t)$.
- B. La dérivée de G est égale à 1.
- C. Pour $x \in]-1; 1[$, $G(x) = x$.
- D. $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

→ Un sujet vu au BAC (extrait)

53 On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x+1) \text{ et } g(x) = e^x - 1.$$

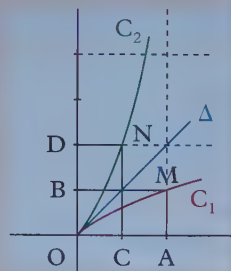
On désigne par C_1 et C_2 les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (voir ci-contre).

- Vérifier que C_1 et C_2 ont une tangente commune au point O.
- Démontrer que C_1 et C_2 sont symétriques par rapport à cette tangente.
- Soit a un réel strictement positif. On se propose de calculer le nombre

$$I(a) = \int_0^a \ln(x+1) dx \text{ de deux façons différentes.}$$

a. Par des considérations d'aires, montrer que $I(a) = a \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx$.
En déduire la valeur de $I(a)$.

b. Retrouver la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégration par parties.



La Réunion, 2005.

Solution

1. O appartient à C_1 et à C_2 car $f(0) = g(0) = 0$. Pour $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \text{ et } g'(x) = e^x \text{ donnent } f'(0) = g'(0) = 1.$$

C_1 et C_2 ont donc bien $\Delta : y = x$ pour tangente en O.

2. • Si $M(a ; b)$ est un point quelconque du plan, alors $N(b ; a)$ est le point symétrique de M par rapport à Δ .

En effet, le milieu I de $[MN]$, de coordonnées $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b+a}{2}\right)$, est

un point de Δ et $\overrightarrow{MN}(b-a ; a-b)$ est normal à Δ si $a \neq b$.

• $M(a ; b)$ appartient à C_1 se traduit par $b = f(a)$ avec $a \geq 0$ soit $\ln(a+b) = b$ avec $b \geq 0$ ou encore $a+b = e^b$ qui équivaut à $N(b ; a)$ appartient à C_2 . Il résulte de cette équivalence que C_1 et C_2 sont symétriques par rapport à Δ .

3. a. $I(a)$ est l'aire du domaine compris entre C_1 , l'axe des abscisses, et le segment $[AM]$; elle est égale à la différence entre l'aire du rectangle OAMB ($a \times \ln(a+1)$) et l'aire du domaine limité par l'axe des ordonnées, la courbe C_1 et le segment $[BM]$. Mais par la symétrie d'axe Δ , cette dernière aire est aussi celle du domaine limité par la courbe C_2 , l'axe des abscisses et le segment $[CN]$, qui se calcule par :

$$\int_0^{\ln(a+1)} g(x) dx = [e^x - x]_0^{\ln(a+1)} = a - \ln(a+1).$$

Donc $I(a) = a \ln(a+1) - a + \ln(a+1)$.

b. Intégrons I par parties avec, sur $[0 ; a]$:

$$U(x) = \ln(x+1), \quad U'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad V'(x) = 1, \quad V(x) = x+1.$$

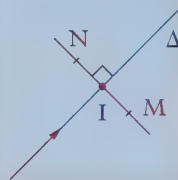
On en déduit $I(a) = [(x+1) \ln(x+1)]_0^a - \int_0^a 1 dx$ soit

$$I(a) = (a+1) \ln(a+1) - a.$$

le jour du BAC

Question 1 : La tangente est entièrement définie par la valeur de la fonction et de sa dérivée. On calcule l'équation de la tangente parce qu'elle est nécessaire plus loin.

Question 2 : Les deux propriétés, le milieu de $[MN]$ appartient à Δ et \overrightarrow{MN} orthogonal à Δ , traduisent bien la symétrie de M et N par rapport à Δ .



Question 3a : Le raisonnement est à noter : on passe d'une intégrale à son interprétation en terme d'aire puis en retour d'une aire à l'intégrale qui la calcule.

Question 3b : Ne pas oublier de préciser que ces quatre fonctions sont continues.

Retenir surtout l'astuce qui consiste à prendre $x+1$ plutôt que x comme primitive de $V'(x) = 1$ pour simplifier le calcul de la dernière intégrale.

→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Aires et intégrales

54 Soit R un réel strictement positif, on considère la fonction f définie sur $[0 ; R]$ par $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

- Étudier les variations de f sur $[0 ; R]$.
- a. Soit $I\left(0 ; \frac{R}{2}\right)$. Montrer que pour tout point M de (C) , $OM = R$. Quelle est la nature de (C) ?
- b. En déduire $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$.

55 Intégrales de fonctions en escalier

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer $\int_n^{n+\frac{1}{2}} E(x) dx$.
- On pose $f(x) = E(x)$ pour $x \in [n ; n+1[$ et $f(n+1) = n$.

Justifier que $\int_n^{n+1} f(x) dx$ existe et la calculer.

On se permet de noter $\int_n^{n+1} E(x) dx$ à la place de $\int_n^{n+1} f(x) dx$.

- En utilisant la relation de Chasles, calculer le réel $a_n = \int_0^n E(x) dx$ représentant l'aire de la section du plan comprise entre les droites $x=0$, $x=n$ et la représentation graphique de la fonction E .
- Soit x un réel positif. On pose $g(x) = \int_0^x E(t) dt$.
 - Calculer $g(x)$ si $x \in [0 ; 1[$.
 - Calculer $g(x)$ si $x \in [1 ; 2[$.
 - Calculer $g(x)$ en fonction de x , $E(x)$ et $a_{E(x)}$.
 - Donner la représentation de g sur $[0 ; 3]$.
 - D'après cette représentation graphique, g est-elle continue ? dérivable ?

2. Par une méthode analogue, déterminer les primitives de g sur \mathbb{R} .

3. a. Montrer que pour tout réel x , on a :

$$f(x) + g(x) = 1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x.$$

b. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^2 x dx$.

57 avec ROC 1. Soit f une fonction continue et croissante sur $[a ; b]$. Démontrer que la fonction définie sur $[a ; b]$ par $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur cet intervalle.

2. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

On pose, pour $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- Calculer la dérivée de la fonction $u \mapsto F(\tan(u))$ définie pour u appartenant à $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.
- Démontrer que $F(\tan(u)) = u$ pour tout u .
- En déduire la valeur exacte de $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.

58 Soit x un réel positif.

On pose $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t+1} dt$.

1. a. Montrer que pour tout réel x positif :

$$\frac{e^x}{x+1} \geq 1.$$

- En déduire que $f(2) \geq 1$.
- a. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ .
- En déduire qu'il existe un réel c appartenant à $[1 ; 2]$ tel que $f(c) = 1$.
- Calculer $f'(x)$. En déduire que f est croissante.
- Démontrer que, pour tout x positif, $f(x) \geq x - 1$. En déduire la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

59 Calcul approché d'une intégrale

Soit la fonction f définie sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

On se propose de déterminer une valeur approchée

à 10^{-2} près de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

- En étudiant les variations de la fonction f , montrer que, pour $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.
- En déduire un encadrement de I . Cet encadrement permet-il d'obtenir une valeur approchée de I à la précision voulue ?

Primitives et intégrales

56 Le but de l'exercice est de trouver les primitives sur \mathbb{R} de f et g définies par $f(x) = \cos^4 x$ et $g(x) = \sin^4 x$ puis d'utiliser les résultats obtenus.

1. a. En utilisant les formules de trigonométrie, montrer que pour tout x réel :

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}.$$

b. Donner les primitives de f sur \mathbb{R} .

2. a. Prouver que, pour tout réel x de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}.$$

En déduire que :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx.$$

b. Prouver que $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

c. Calculer l'intégrale $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} dx$.

d. En déduire une valeur approchée de I à 10^{-2} près.

Suites et intégrales

60 1. On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx.$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

b. Prouver que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

c. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$$

2. On considère la suite réelle (a_n) définie sur \mathbb{N}^* par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier

naturel n non nul, $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$.

b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

61 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \tan x dx.$$

1. Montrer que, pour tout x de $[0; 1]$:

$$x^n \tan x \leq x^n \tan 1.$$

2. En déduire que la suite (I_n) converge vers 0.

3. En effectuant une intégration par parties, prouver que, pour tout entier naturel n :

$$(n+1)I_n = \tan 1 - \int_0^1 (1 + \tan^2 x)x^{n+1} dx.$$

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1 + \tan^2 x)x^{n+1} dx$.

En déduire la limite de (nI_n) .

62 On définit la fonction f sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

1. Étudier les variations de f .

2. Pour tout entier $n \geq 8$, on pose :

$$U_n = f(8) + f(9) + \dots + f(n).$$

a. Démontrer que pour tout entier $k \geq 8$:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k).$$

b. En déduire $U_{n+1} - f(8) \leq \int_8^{n+1} f(t) dt \leq U_n$.

c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_n = \int_8^{n+1} f(t) dt.$$

d. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.

63 Soit n un entier naturel. On pose, pour $n = 0$,

$$u_0 = \int_0^1 1 dx; \text{ pour } n > 0, u_n = \int_1^e (\ln x)^n dx.$$

1. Montrer que $u_n \geq 0$.

2. Déterminer le signe de $u_n - u_{n+1}$.

En déduire que la suite (u_n) est monotone.

3. Montrer que la suite (u_n) est une suite convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 0$.

4. En effectuant une intégration par parties, montrer que $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$, pour tout n de \mathbb{N} .

5. À l'aide de cette relation, montrer que la limite de la suite (u_n) ne peut pas être strictement positive.

En déduire la limite de la suite (u_n) .

64 On considère les deux suites de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2}$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}.$$

1. Démontrer que la suite v converge vers $\frac{1}{2}$.

2. a. Démontrer que pour tout x réel positif ou nul :

$$-x \leq \int_0^x \cos t dt \leq x.$$

En déduire que $-x \leq \sin x \leq x$.

b. Déduire du 2a que, pour tout x réel positif ou nul :

$$-\frac{x^2}{2} \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}.$$

Puis que $-\frac{x^3}{6} \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$.

c. Justifier alors, que pour tout x réel positif ou nul :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

3. a. Prouver que pour tout $n \geq 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \leq n^4.$$

b. Dédurre du 2 l'inégalité :

$$v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq v_n$$

pour tout entier naturel non nul.

c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. Quelle est sa limite ?

65 Suites adjacentes et $\ln 2$

Soit l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$. On désigne par f la fonction définie sur $[1; 2]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

Partie A

1. Calculer I et en donner une interprétation géométrique.

2. Soit A l'aire du « domaine situé sous la courbe C », en unités d'aire.

On subdivise l'intervalle $[1; 2]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide des nombres

$$a_0 = 1, a_1 = 1 + \frac{1}{n}, \dots, a_k = 1 + \frac{k}{n}, \dots, a_n = 1 + \frac{n}{n} = 2.$$

Pour k entier, $0 \leq k \leq n-1$, on construit sur $[a_k; a_{k+1}]$ le rectangle R_k de hauteur $f(a_{k+1})$ et le rectangle R'_k de hauteur $f(a_k)$.

On note U_n la somme des aires des rectangles R_k et V_n la somme des rectangles R'_k .

Partie B. Encadrement de A

1. Construire la courbe C (unité graphique : 8 cm), ainsi que les rectangles R_k et R'_k lorsque $n = 4$.

2. Exprimer les sommes U_4 et V_4 en fonction des réels $f(a_0)$, $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$ et $f(a_4)$; en déduire un encadrement de A par deux décimaux d'ordre 2.

3. Montrer que, dans le cas général, on a :

$$U_n = \frac{1}{n} [f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)]$$

$$\text{et } V_n = \frac{1}{n} [f(a_0) + f(a_1) + \dots + f(a_{n-1})].$$

Quel encadrement de l'aire A peut-on écrire ?

Partie C. Étude des suites $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$

1. Montrer que, pour k entier, $0 \leq k \leq n-1$:

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \text{ et } V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}.$$

2. a. Calculer, pour $n \geq 1$, $U_{n+1} - U_n$; en déduire le sens de variation de la suite $(U_n)_{n \geq 1}$.

b. Procéder de même pour la suite $(V_n)_{n \geq 1}$.

3. Calculer $V_n - U_n$, pour $n \geq 1$;

en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n)$.

4. Justifier que les suites $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes et que leur limite commune est le nombre I .

Partie D. Une valeur approchée de $\ln 2$

a. Déterminer, à partir de quel rang p , on a :

$$V_n - U_n \leq 10^{-2}.$$

b. Montrer que $U_1 = 0,5$, puis à l'aide de 2b, définir par récurrence la suite $(U_n)_{n \geq 1}$.

À l'aide de la calculatrice, en mode RECURRENCE, donner une valeur arrondie à trois décimales de U_p , puis de V_p .

En déduire une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-2} près.

66 Suite rationnelle de limite e

Pour n entier naturel non nul, on définit sur $[1; e]$

la fonction f_n par $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$.

On pose alors $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$.

1. Montrer que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

2. Prouver que $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

3. En encadrant $(\ln x)^n$ sur $[1; e]$, montrer que $0 \leq I_n \leq 1$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{n!} = 0$.

4. Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

67 Suite rationnelle de limite e (bis)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx.$$

a. Calculer l'intégrale I_1 en utilisant l'intégration par parties.

b. En utilisant les théorèmes de comparaison, démontrer que, pour tout n , $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}$.

2. a. Soit $n, n \in \mathbb{N}^*$. Calculer et simplifier la dérivée de la fonction définie par $h_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

b. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

Justifier que la fonction f est dérivable et démontrer que $f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

c. En déduire que $I_n = f(0) - f(1)$.

3. a. Dédurre de tout ce qui précède que, pour tout n entier naturel :

$$0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \leq \frac{e}{n!}.$$

b. Calculer enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$.

68 avec ROC

Partie A

Démontrer la formule d'intégration par parties pour deux fonctions u et v dérivables sur $[a; b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a; b]$.

Partie B

Soit a et n deux entiers naturels non nuls. On pose

$$I(a, n) = \int_0^1 x^a (1-x)^n dx \text{ et } I(a, 0) = \int_0^1 x^a dx.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer

$$\text{que } I(a+1, n) = \frac{a+1}{n+1} I(a, n+1).$$

2. Prouver que $I(a, n) - I(a, n+1) = I(a+1, n)$.

En déduire que $I(a, n+1) = \frac{n+1}{n+a+2} I(a, n)$.

3. Calculer $I(a, 0)$.

4. Montrer que :

$$I(a, n) = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n}{(a+1) \times (a+2) \times \dots \times (a+n+1)}.$$

5. En déduire que $I(a, n) = \frac{n! a!}{(a+n+1)!}$.

Application : Calculer $I(2, 7)$.

Applications du calcul intégral

69 Puissance et énergie

Si la puissance P d'un système est constante pendant un temps Δt , l'énergie qu'il fournit pendant Δt est :

$$\Delta W = P \Delta t.$$

On admet que lorsque la puissance fournie par un système $t \mapsto P(t)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[t_1; t_2]$, l'énergie fournie dans l'intervalle $[t_1; t_2]$ est $\omega = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$.

1. Déterminer l'énergie calorifique dépensée pendant une période T dans une résistance R traversée par un courant alternatif d'intensité $i = I_m \sin(\omega t)$, sachant que la puissance calorifique est, à l'instant t , $P(t) = Ri^2$.

2. On définit l'intensité efficace I_e comme étant l'intensité continue qui, dans la même résistance, pendant la même durée T , produirait la même énergie calorifique.

a. Montrer que $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

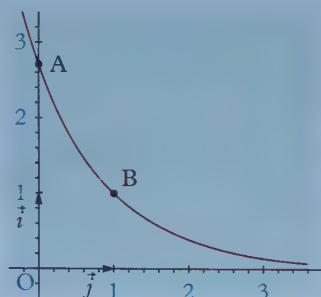
b. Calculer $\int_0^T \sin^2(\omega t) dt$.

En déduire que $I_e = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt$.

I_e est donc la **valeur moyenne** de i^2 sur $[0; T]$.

70 vu au BAC Volume

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur \mathbb{R} , solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 0$ et telle que $f(0) = e$.



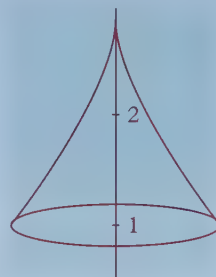
1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.

2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1; e]$.

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation d'inconnue x : $e^{1-x} = t$.

3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.

On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe \widehat{AB} comme représenté ci-dessous.



On admet que son volume V se calcule par :

$$V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt.$$

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.

D'après Bac S Amérique du Sud, 2004.

Prolongement du cours

71 Soit f une fonction continue croissante sur l'intervalle $[a; b]$.

1. Montrer que :

$$f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq f(b).$$

2. En déduire qu'il existe un réel c de $[a; b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t) dt = f(c)(b-a).$$

72 Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

1. Montrer que pour tout réel x de $[a; b]$:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

EXERCICES

2. En déduire que :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

73 Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et soit g une fonction continue positive sur $[a; b]$. On appelle M un majorant de $|f|$ sur $[a; b]$.

1. Prouver que :

$$-M \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq M \int_a^b g(t) dt.$$

2. En déduire que :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq M \int_a^b g(t) dt.$$

3. Application : Soit f une fonction continue bornée sur $[0; 1]$, montrer que $\int_a^b t^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

74 1. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ telle que son intégrale sur $[a; b]$ soit égale à 0. A-t-on $f=0$ sur $[a; b]$? Peut-on trouver un contre-exemple ?

2. Soit f une fonction continue positive sur $[a; b]$ telle que $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Montrons qu'alors $f=0$ sur $[a; b]$.

a. Soit F une primitive de f sur $[a; b]$. Démontrer que F est croissante sur $[a; b]$.

b. Démontrer que F est une constante sur $[a; b]$, puis conclure.

3. Application : Soit g une fonction continue sur $[a; b]$. En étudiant le signe de $|g| - g$, montrer que si $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b |g(x)| dx$, alors g est une fonction positive sur $[a; b]$.

75 Soit f une fonction impaire, continue sur \mathbb{R} .

À tout réel positif a , on associe $\varphi(a) = \int_{-a}^a f(t) dt$.

1. Déterminer la fonction φ lorsque $f(x) = \sin x$.

2. On revient au cas général.

Notons F une primitive de f sur \mathbb{R} .

a. Exprimer $\varphi(a)$ à l'aide de la fonction F .

b. En déduire que φ est dérivable sur \mathbb{R}^+ ; calculer $\varphi'(a)$ pour tout réel a positif.

c. Montrer que pour tout réel a positif :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0.$$

On vient de prouver le résultat suivant :
si f est une fonction continue impaire sur \mathbb{R} , alors pour tout réel $a > 0$, $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

3. Application : Calculer $\int_{-5}^5 \sin x \ln(x^2 + 1) dx$.

76 Soit f une fonction paire, continue sur \mathbb{R} . Soit a un réel positif; on pose :

$$\varphi(a) = \int_{-a}^a f(t) dt - 2 \int_0^a f(t) dt.$$

1. Déterminer la fonction φ lorsque $f(x) = \cos x$.

2. On revient au cas général.

Notons F une primitive de f sur \mathbb{R} .

a. Exprimer $\varphi(a)$ à l'aide de la fonction F .

b. En déduire que φ est dérivable; calculer $\varphi'(a)$ pour tout réel a positif.

c. Montrer que pour tout réel a positif :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

On vient de prouver le résultat suivant :

si f est une fonction continue paire sur \mathbb{R} , alors pour tout réel $a > 0$, $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.

3. Application : Calculer $\int_{-5}^5 (x^2 + |x|) dx$.

77 Soit f une fonction périodique sur \mathbb{R} de période T .

On pose $g(a) = \int_a^{a+T} f(t) dt$ pour tout réel a .

1. Soit F une primitive de f sur \mathbb{R} .

Exprimer $g(a)$ à l'aide de F .

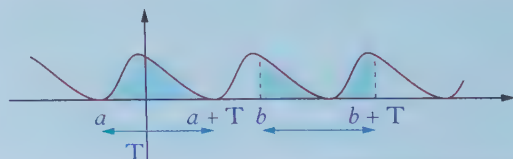
2. La fonction g est-elle dérivable sur \mathbb{R} ? Si oui, calculer sa dérivée.

3. En déduire que, pour tout réel a :

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

On peut en tirer le résultat suivant :

l'intégrale d'une fonction continue périodique sur un intervalle de longueur une période ne dépend pas de l'intervalle choisi.



4. Application : Calculer $\int_0^{2\pi} \sin^5 x dx$.

→ PROBLÈMES

78 avec ROC Avec des suites adjacentes

Partie A. Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

1. Limites

a. ROC

Prérequis : la fonction \exp est l'unique solution de l'équation $y' = y$ telle que $y(0) = 1$.

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$.

b. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Variations de f

a. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^x(1-x) - 1$.

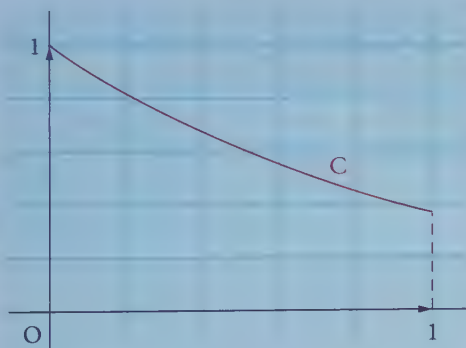
Étudier les variations de φ et en déduire que φ est une fonction négative sur \mathbb{R}^* .

b. Montrer que la dérivée f' de f est du signe de φ sur \mathbb{R}^* .

Dresser le tableau de variation de f .

Partie B. Aire sous une courbe exponentielle

Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = e^{-x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (voir figure ci-dessous).



On s'intéresse à l'aire A , en unités d'aire, du domaine situé sous la courbe C .

Pour obtenir un encadrement de A , on partage $[0; 1]$ en n parties, $n \in \mathbb{N}^*$; puis on construit sur

$\left[\frac{i}{n}; \frac{i+1}{n}\right]$ les rectangles R_i et R'_i de hauteurs res-

pectives $g\left(\frac{i+1}{n}\right)$ et $g\left(\frac{i}{n}\right)$, pour $0 \leq i \leq n-1$.

On note S_n la somme des aires des rectangles R_i et S'_n celle des rectangles R'_i .

3. Reproduire la courbe C et construire les rectangles R_i et R'_i , lorsque $n = 5$.

4. Retour au cas général

a. Quel encadrement de A peut-on écrire dans le cas général ?

b. Expliciter les sommes S_n et S'_n .

c. Justifier que $S_n = \frac{e^{-\frac{1}{n}}(1-e^{-1})}{n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)}$ et montrer que

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{e}\right) f\left(\frac{1}{n}\right).$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

d. Montrer de même que :

$$S'_n = \left(1 - \frac{1}{e}\right) f\left(-\frac{1}{n}\right) \text{ et calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n.$$

e. En déduire la valeur de A .

Partie C. Étude des suites (S_n) et (S'_n)

Démontrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

79 Par rotation et par parties

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{\sqrt{x}}.$$

On désigne par C (voir ci-dessous) sa courbe représentative dans le plan orienté P rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A. Quelques propriétés de f

1. Par lecture graphique, donner le tableau de variation de f .

2. Prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$

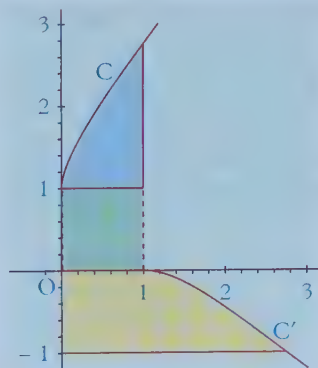
(poser $\sqrt{x} = t$).

Que peut-on en déduire pour f ? pour C ?

3. Montrer que f est continue en 0, puis sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie B. Interprétation de l'intégrale

$I = \int_0^1 f(x) dx$ comme aire de deux domaines



1. Justifier que I est l'aire $A(E)$, exprimée en unités d'aire, d'un certain domaine E que l'on précisera.

2. On considère la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a. Soit M un point du plan d'affixe $z = x + yi$ et M' son image par R , d'affixe $z' = x' + y'i$. Exprimer z' en fonction de z et en déduire que $x' = y$ et $y' = -x$.

En déduire x et y en fonction de x' et y' .

b. Soit A le point de C d'abscisse 1 ; donner les coordonnées de A et de son image A' par R .

Prouver que si $M(x; y)$ est un point de C , son image $M'(x'; y')$ par la rotation R appartient à la courbe C' d'équation $y = -(\ln x)^2$ pour $x \in [1; +\infty[$.

On admet que C' est l'image de la courbe C par la rotation R .

c. On désigne par E' l'image du domaine E par la rotation R (voir graphique).

Justifier que I est aussi l'aire $A(E')$ du domaine E' .

Partie C. Calcul de I

1. Justifier que $A(E') = e - J$, où J désigne l'intégrale $J = \int_1^e (\ln x)^2 dx$.

2. Prouver que la fonction G définie sur $]0; +\infty[$ par $G(x) = x^2 \ln^2(x) - 2 \ln x + 2x$ est une primitive de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln^2(x)$.

3. En déduire le calcul de J et la valeur de I .

80 Suites d'intégrales

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \text{ pour } n=0$$

et pour $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1. a. Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Calculer $f'(x)$ et en déduire u_0 .

b. Calculer u_1 .

2. a. Démontrer, sans chercher à calculer u_n , que (u_n) est décroissante.

b. Démontrer que pour tout x appartenant à $[0; 1]$:

$$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}.$$

En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \quad (1).$$

c. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. Pour tout entier $n \geq 3$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx.$$

a. Vérifier que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$u_n + u_{n-2} = I_n.$$

Par une intégration par parties portant sur I_n , montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}.$$

b. En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$(2n-1)u_n \leq \sqrt{2} \quad (2).$$

c. À l'aide des inégalités (1) et (2), démontrer que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.

81 vu au BAC Approche par un polynôme

Soit a appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$. Le but de l'exercice est d'approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5.

On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t} dt$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt.$$

1. Calculer $I_0(a)$ en fonction de a .

2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a .

3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4. Soit P le polynôme défini sur \mathbb{R} par :

$$P(x) = \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x.$$

Démontrer, en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$ que :

$$I_5(a) = \ln(1+a) - P(a).$$

5. Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$.

Calculer $J(a)$.

6. a. Démontrer que pour tout $t \in [0; a]$:

$$\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5.$$

b. Démontrer que pour tout $a \in [0; +\infty[$:

$$J(a) \leq I_5(a) \leq 0.$$

7. En déduire que pour tout $a \in [0; +\infty[$:

$$|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}.$$

8. Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

D'après Bac S Antilles-Guyane, juin 2004.

82 vu au BAC On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Étudier la parité de f .

Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?

2. Démontrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $e^{-x} \leq e^x$.

3. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- b. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
- c. Tracer Γ dans un repère adapté.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

1. Justifier l'existence de I_n et en donner une interprétation géométrique.
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$f(n+1) \leq I_n \leq f(n).$$
- b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
- c. Démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie C

Soit (J_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $J_n = \int_0^n f(x) dx$.

1. a. Démontrer que, sur $[0; +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{2e^x} \leq f(x) \leq \frac{1}{e^x}.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} (1 - e^{-n}) \leq J_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1 \quad (\text{R}).$$

2. Démontrer que la suite (J_n) est croissante. En déduire qu'elle converge vers un réel L et déduire de (R) un encadrement de L .

3. Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

On note v la primitive de u sur \mathbb{R} telle que $v(1) = \frac{\pi}{4}$.

On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \frac{\pi}{2}$.

- a. Démontrer que pour tout réel x , f est la dérivée de la fonction $x \mapsto v(e^x)$.
- b. En déduire la valeur exacte de L .

83

vu au BAC Le repère doit être « adapté » aux valeurs prises par $f(x)$, bien sûr.

B. 1. Penser à toutes les propriétés nécessaires.

B. 2. a. Utiliser les propriétés de comparaison de l'intégrale.

B. 2. c. Revoir les théorèmes concernant la convergence des suites. Que faut-il de plus à une suite décroissante pour qu'elle soit convergente ?

C. 1. Toujours la comparaison entre intégrales.

C. 2. Cette fois la suite est croissante. Aurait-elle une autre propriété ? (Voir (R)).

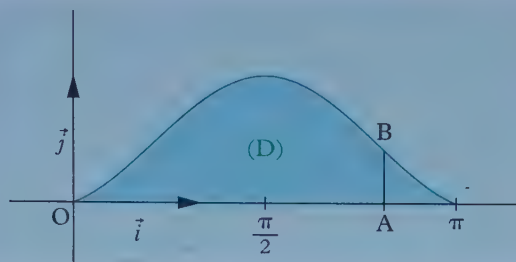
C. 3. Comment se traduit pour v , en termes de limite, la propriété de l'asymptote ?

C. 3. b. Il s'agit bien ici d'une **déduction**, pas d'un calcul. Exprimer d'abord J_n à l'aide de v .

83 vu au BAC Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

La courbe (C) représente la fonction f définie par $f(x) = \sin^2 x$, x étant élément de l'intervalle $[0; \pi]$.

Le domaine (D) est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq f(x)$.



1. a. Exprimer $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.
- b. Calculer l'aire en cm^2 du domaine (D) .
2. a. Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et $\cos^2 2x$.
 Puis en utilisant $\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$, exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 4x$ et de $\cos 2x$.
- b. En déduire la valeur de $\int_0^\pi \sin^4 x dx$.
3. Le nombre x étant élément de l'intervalle $[0; \pi]$, on considère les points A et B d'abscisse x , B appartenant à la courbe (C) . Le segment $[AB]$ pivotant autour de l'axe $(O; \vec{i})$ engendre un disque dans l'espace.
 Exprimer l'aire en cm^2 de ce disque en fonction de x .
4. En déduire le volume en cm^3 du solide obtenu par rotation de la courbe (C) autour de l'axe des abscisses.

84 vu au BAC On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \ln x) + 1 \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

- b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. a. Déterminer une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = 1$.

- b. On pose, pour $x > 0$, $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$.

Étudier le sens de variation de g' et son signe pour $x > 0$.

- c. En déduire le sens de variation de g puis la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (D) .
3. a. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer, en

fonction de n , le réel $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x dx$.

- b. En déduire, en fonction de n , l'aire A_n limitée par la courbe (C) , la tangente (D) et les droites d'équations $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.

- c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ et interpréter le résultat obtenu.

D'après Bac S national, septembre 2003.

85 Suite et fonction primitive

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$ et C sa courbe représentative, dans un repère orthonormal.

- Calculer la limite de f en $+\infty$; interpréter graphiquement.
- Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$; en déduire les variations de f .
- Tracer la courbe C (unité graphique : 2 cm).

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$.

- Interpréter graphiquement u_n .
- Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.
- En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
- Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Partie C

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

- Montrer que F est dérivable sur $[1; +\infty[$ et calculer $F'(x)$.
- En déduire le sens de variation de F .

- Démontrer que, pour tout réel t positif : $t + 2 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.

- En déduire que, pour tout x de l'intervalle $[1; +\infty[$, $F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^x (t+2)e^{1-t} dt$.

- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout x appartenant à $[1; +\infty[$:

$$\int_1^x (t+2)e^{1-t} dt = 4 - (x+3)e^{1-x}.$$

- En déduire que, pour tout x appartenant à $[1; +\infty[$, $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$.

- On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite (u_n) . Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

Source : Base de données, Inspection générale.

86 Un résultat utilisé en probabilité

Partie A. Étude de $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ pour $n \in \mathbb{N}$

- Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
- Montrer que la suite (I_n) est une suite décroissante positive (sans calculer I_n).
- En utilisant les questions précédentes, prouver que :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

En déduire la limite de la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

- On pose $t_n = (n+1)I_{n+1}I_n$.
a. Montrer que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante.
b. En déduire que $t_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout entier naturel n .
- On pose $v_n = nI_n^2$.

- En écrivant v_n sous la forme $\frac{n}{n+1} t_n \frac{I_n}{I_{n+1}}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_n$.

Partie B. Encadrement de $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

- Montrer que, pour tout réel $u > -n$:

$$\ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \leq \frac{u}{n}.$$

En déduire que pour tout réel $u > -n$:

$$\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u.$$

- Montrer que, pour tout réel t appartenant à $[0; \sqrt{n}]$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n},$$

puis que

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \leq e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}.$$

- En déduire alors l'encadrement suivant :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} dt.$$

Partie C. Autre expression de $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} dt$

Soit F une primitive de $t \mapsto \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ sur $[0; \sqrt{n}]$.

On pose $\varphi : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$
 $u \mapsto \sqrt{n} \sin u$.

- Exprimer $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} dt$ à l'aide de F .
- Montrer que $F \circ \varphi$ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et prouver que $(F \circ \varphi)'(t) = \sqrt{n}(\cos t)^{n+1}$.
- En déduire que :

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} u du = F(\sqrt{n}) - F(0).$$

- Prouver alors que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} dt = \sqrt{n}I_{n+1}$.

Partie D. Majoration de $\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} dt$ si $n \geq 2$

Soit G une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}$ sur $[0 ; \sqrt{n}]$.

On pose $\theta : \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$
 $u \mapsto \sqrt{n} \tan u$.

1. Exprimer $\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} dt$ à l'aide de G .

2. Montrer que $G \circ \theta$ est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer sa dérivée.

3. En déduire que :

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2} u \, du = G(\sqrt{n}) - G(0).$$

4. Prouver alors que $\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} dt \leq \sqrt{n} I_{n-2}$.

Partie E. Détermination de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

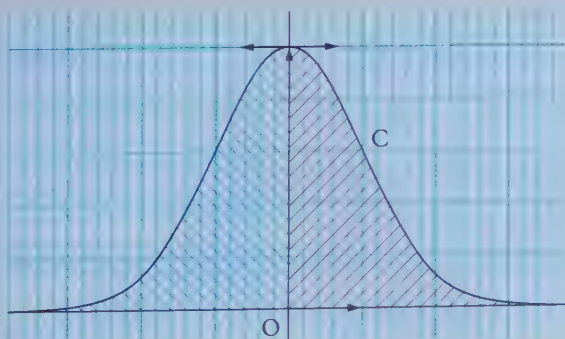
1. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$\sqrt{n} I_{n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \sqrt{n} I_{n-2}.$$

2. Démontrer que $\left(\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Point Info

La courbe C ci-dessous ayant pour équation $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$, la limite obtenue dans ce problème est l'aire du domaine (pourtant illimité) hachuré en rouge.



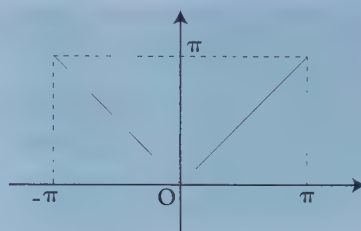
Si on note $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ce réel, on obtient par symétrie,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} \text{ et donc } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

La fonction φ définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, dont l'aire sous la courbe vaut 1, jouera un grand rôle en probabilité.

87 L'énergie d'un signal

Un signal u a dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la représentation graphique suivante sur $[-\pi ; \pi]$:



Partie A

1. Le signal u étant un signal pair, périodique de période 2π , recopier et compléter le graphe précédent pour t variant entre $-\pi$ et 3π .

2. Exprimer $u(t)$ en fonction de t pour tout nombre réel de $[0 ; \pi]$.

3. Calculer la valeur moyenne \bar{u} du signal sur $[-\pi ; \pi]$.

4. On appelle énergie transportée par le signal u , le réel $E(u)$ défini par $E(u) = \int_{-\pi}^{\pi} (u(t))^2 dt$.

a. Montrer que $E(u) = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt$.

b. Quelle est la valeur exacte de $E(u)$?

Partie B

On considère le signal V_0 défini, pour tout réel t , par :

$$V_0(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(t).$$

Ce signal est appelé signal polynôme trigonométrique de Fourier d'ordre 1 approximant le signal u .

1. Vérifier que V_0 est un signal pair, périodique de période 2π .

2. Calculer la valeur moyenne \bar{V}_0 de V_0 sur $[-\pi ; \pi]$.

3. Calculer la valeur exacte $E(V_0)$ de l'énergie transportée sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ par V_0 .

4. Calculer la valeur au centième près de $\frac{E(V_0)}{E(u)}$.

1. Comparaison des termes de deux suites

OBJECTIF : Comparer des suites géométriques et arithmétiques.

Zoé cherche du travail. Elle reçoit les trois propositions suivantes :

Proposition	Salaire brut annuel première année	Augmentation annuelle
P_1	27 000 euros	2 %
P_2	25 000 euros	3 %
P_3	25 000 euros	850 euros

A. ➔ À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice

1. Déterminer le salaire que Zoé touchera la deuxième année, la cinquième année, la dixième année, si elle accepte la proposition P_1 , la proposition P_2 , la proposition P_3 .

2. Au bout de combien d'années le salaire de la proposition P_2 dépassera-t-il :

a. celui de la proposition P_1 ? b. celui de la proposition P_3 ?

B. ➔ Par le calcul

On appelle respectivement u_n , v_n et w_n ($n \in \mathbb{N}^*$) le salaire annuel brut perçu la n -ième année pour les propositions P_1 , P_2 et P_3 .

1. Exprimer u_n , v_n et w_n en fonction de n .

Retrouver à l'aide de ces expressions les résultats de la question A1.

2. Montrer que $v_n \geq u_n$ équivaut à $\frac{25}{27} \geq \left(\frac{1,02}{1,03}\right)^{n-1}$.

Retrouver la réponse à la question A2a.

Rappel
 $1,03^x = e^{x \ln 1,03}$

3. Pour retrouver maintenant, par le calcul, la réponse à la question A2b, on se propose de résoudre l'inéquation $v_n \geq w_n$ d'inconnue n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Vérifier que $v_n \geq w_n \Leftrightarrow 25\,000 \times 1,03^{n-1} - 850(n-1) - 25\,000 \geq 0$.

Soit $u(x) = 25\,000 \times 1,03^x - 850x - 25\,000$.

Étudier les variations de u et démontrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une seule solution qui est dans l'intervalle $[9 ; 10]$. En déduire le signe de $u(x)$. Conclure.

2. Un problème de refroidissement

OBJECTIF : Comparer deux modélisations d'un même problème (un modèle discret (suite) et un modèle continu (fonction de la variable réelle)).

➔ La situation étudiée

Le système de refroidissement d'une machine est constitué d'un circuit contenant 20 litres d'eau. Dès que l'eau atteint une température de 80 °C, le circuit est rafraîchi par un courant d'eau froide à 16 °C : il entre très rapidement autant d'eau qu'il en sort à raison de 2 litres d'eau par seconde. L'eau entre à vitesse constante par de nombreux points ce qui permet de considérer que la température reste constamment homogène (c'est-à-dire qu'on a la même température en chaque point du circuit).



A. ➔ Calcul préliminaire

Si on mélange de façon homogène un litre d'eau à 16 °C et un litre d'eau à 80 °C, quelle sera la température du mélange obtenu ?
Et si on mélange 2 litres d'eau à 16 °C avec 18 litres d'eau à 80 °C ?

(On admettra que, pour un mélange effectué sur un intervalle de temps petit, la température du mélange est la moyenne des deux températures, pondérées par les volumes correspondants.)

B. ➔ Modélisation par une suite

On note $T_0 = 80$ la température du circuit lorsque se déclenche le refroidissement et T_n la température n secondes après, exprimée en degrés Celsius ($n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que $T_{n+1} = \frac{16 + 9T_n}{10}$.
2. Montrer que la suite u définie par $u_n = T_n - 16$ pour $n \geq 0$ est une suite géométrique. En déduire l'expression de u_n , puis de T_n en fonction de n .
3. Quand l'eau atteindra-t-elle une température de 30 °C ?

C. ➔ Modélisation par une fonction

On note t le temps écoulé depuis que le refroidissement a été déclenché, et $T(t)$ la température à l'instant t , t étant exprimé en secondes et $T(t)$ en degrés Celsius.

1. Quelle quantité d'eau entre en Δt secondes ?
Montrer que pour Δt petit :

$$T(t + \Delta t) = \frac{(20 - 2\Delta t) \times T(t) + 2 \times \Delta t \times 16}{20}$$

$$\text{puis que } \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} = -\frac{T(t) - 16}{10}.$$

2. En déduire que $T'(t) = -\frac{T(t) - 16}{10}$, puis que la fonction φ qui à t associe $T(t) - 16$ est solution de l'équation différentielle $y' = -0,1y$.
3. Déterminer $\varphi(t)$, puis $T(t)$ en fonction de t .
4. Quand l'eau atteindra-t-elle une température de 30 °C ?

D. ➔ Comparaison

1. Représenter graphiquement dans le plan la suite (T_n) pour $0 \leq n \leq 20$. On prendra pour unités graphiques 1 cm pour 1 seconde en abscisse et 1 cm pour 5 °C en ordonnée.
2. Tracer sur le même graphique la courbe représentant la fonction T. Commenter.

D'après Serge Mehl, <http://chronomath.irem.univ-mrs.fr>.

Point Info

Des mathématiques dans le monde réel

« Modéliser, c'est convertir un problème concret, issu du monde réel, en termes de nature mathématique. C'est transformer un besoin, plus ou moins bien exprimé, en équations, en essayant de rendre compte de toutes les contraintes.

Le mathématicien, qui ne voit que l'aspect mathématique, s'imagine toujours que la modélisation est chose facile ; pour lui, l'étape glorieuse est la résolution du problème mathématique une fois formalisé. Mais cette conception des choses est absolument erronée : c'est l'étape de modélisation qui est la plus délicate, la plus longue, et la plus périlleuse. Elle relève plus de l'art que de la science ; il faut parvenir, par de nombreuses discussions avec les utilisateurs, à bien comprendre leurs problèmes. On leur soumet un premier modèle, qui en général ne répond pas à leurs attentes, et on le modifie petit à petit, jusqu'à y parvenir aussi complètement que possible. Si on ne s'occupe pas de l'étape de modélisation, si on la néglige, si on la bâcle, et qu'on se précipite sur la résolution, on parvient inévitablement à "une excellente solution à un mauvais problème", et l'utilisateur est rarement prêt à payer pour une solution qui ne répond pas à ses attentes. »

Bernard Beauzamy, P.D.G. de la Société de Calculs mathématiques, 18 février 2001.

3. Écriture décimale d'un réel

OBJECTIF : Étudier deux suites liées à un réel et les reconnaître.

Soit x un nombre réel. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement définies par :

$$u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{E(10^n x) + 1}{10^n}.$$

On rappelle que $E(x)$ est la partie entière de x , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x .

1. Un exemple : $x = \sqrt{2}$

Déterminer alors u_0, u_1, u_2, u_3 , puis v_0, v_1, v_2, v_3 .

Que représentent u_0, u_1, u_2, u_3 , puis v_0, v_1, v_2, v_3 pour x ?

2. a. Justifier que, pour tout réel x , on a $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

b. En déduire que, pour tous entiers n et p , $u_n \leq x < v_p$.

c. En déduire ensuite que, pour tout entier naturel n :

$$10E(10^n x) < E(10^{n+1} x) + 1 \quad \text{et} \quad E(10^{n+1} x) < 10E(10^n x) + 10,$$

$$\text{puis que } u_n \leq u_{n+1} \quad \text{et} \quad v_{n+1} \leq v_n.$$

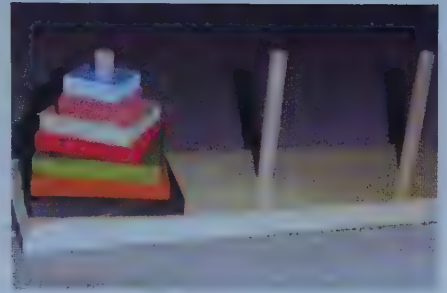
d. Démontrer que les deux suites sont adjacentes.

e. À partir de la question 2b, déterminer la limite commune de ces deux suites.

Remarque : (u_n) est la suite des approximations décimales à 10^{-n} près par défaut de x et (v_n) celle des approximations décimales à 10^{-n} près par excès de x .

4. Les tours de Hanoi

Le but de ce jeu (inventé par Édouard Lucas en 1883) est de déplacer n rondelles ($n \in \mathbb{N}$) de la tige 1 à la tige 3 en un nombre minimum de coups. Un coup consiste à déplacer une rondelle située au sommet d'une pile au sommet d'une autre pile.



Les règles du jeu sont les suivantes :

- on ne déplace qu'une seule rondelle à la fois ;
- une rondelle ne doit jamais se trouver au-dessus d'une rondelle plus petite qu'elle.

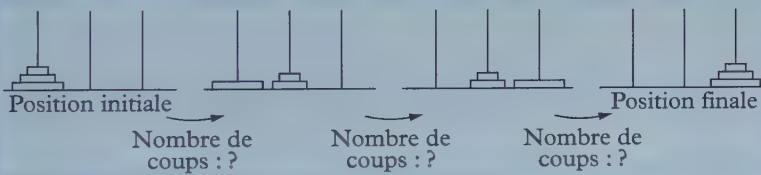
A. ➔ Pour de petites valeurs de n

1. Pour $n = 1$: déterminer le nombre minimum de coups permettant de déplacer la rondelle de la tige 1 à la tige 3.

2. Pour $n = 2$: reproduire et compléter les dessins ci-dessous matérialisant les trois étapes permettant de déplacer deux rondelles de la tige 1 à la tige 3 en un minimum de coups.



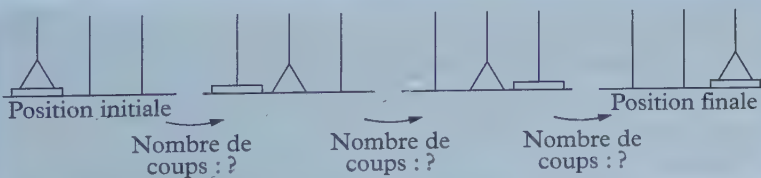
3. Pour $n = 3$: utiliser les dessins ci-dessous et le résultat trouvé pour $n = 2$ pour déterminer le nombre minimum de coups permettant de passer de la position initiale à la position finale.



B. ➔ Cas général

Le même procédé (celui de la question A3) permet de passer du cas n au cas $n + 1$: il suffit de traiter un lot de n rondelles lorsqu'il y en a $n + 1$ comme celui de deux rondelles dans le cas où il y en avait trois.

Reproduire et compléter le schéma suivant :



En appelant u_n le nombre minimal de coups permettant de déplacer n rondelles de la tige 1 à la tige 3, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

C. ➔ Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites respectivement définies par :

- pour $n \geq 2$, $u_n = 2u_{n-1} + 1$ et $u_1 = 1$;
- pour $n \geq 1$, $v_n = u_n + 1$.

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
3. Exprimer v_n en fonction de n . En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4. Déterminer u_{64} . Sachant qu'il faut une seconde pour déplacer une rondelle, combien faut-il d'années pour déplacer 64 rondelles ?

Point Info

Une légende qui remonte à la nuit des temps

Dans le fameux temple de Bénarès, sous le dôme marquant le centre du Monde, trône un socle de bronze sur lequel sont fixées trois aiguilles de diamant, chacune d'elles haute d'une coudée et fine comme la taille d'une guêpe. Sur une de ces aiguilles, à la Création, Dieu empila soixante-quatre disques d'or pur, du plus grand au plus petit, le plus large reposant sur le socle de bronze. Il s'agit de la tour de Bramah. Jour et nuit, inlassablement, les moines déplacent les disques d'une aiguille vers l'autre tout en respectant les immuables lois de Bramah qui obligent les moines à ne déplacer qu'un disque à la fois et à ne jamais le déposer sur un disque plus petit. Quand les soixante-quatre disques auront été déplacés de l'aiguille sur laquelle Dieu les déposa à la Création vers une des autres aiguilles, la tour, le temple et les brahmanes seront réduits en poussière, et le Monde disparaîtra dans un grondement de tonnerre.

CD 5. Quand on affine les suites

OBJECTIF : Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$) avec u_0 donné.

A. ➔ Un cas particulier

Existe-t-il un réel u_0 pour lequel la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante lorsque :

- a. $u_{n+1} = 3u_n + 1$; b. $u_{n+1} = au_n + b$?

B. ➔ Conjecture

1. Utiliser la calculatrice ou le fichier CD-Rom pour conjecturer la convergence éventuelle de chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$, les valeurs de u_0 , a et b figurant dans le tableau.

En cas de convergence, quelle semble être la limite ?

2. Certaines suites « semblent » avoir une limite. Pour quelles valeurs de a cela arrive-t-il ?

a	2	2	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	-1
b	1	1	0	2	2	-3	-4	3
u_0	5	-2	-2	1	5	-1	-1	1
Limite								

3. Maintenant, pour des valeurs fixées de a et de b , on choisit différentes valeurs de u_0 . Émettre une nouvelle conjecture.

a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
b	1	1	5	5	5	2	2	2
u_0	5	1	3	-2	12	5	-1	2
Limite								

C. ➔ Étude graphique

On a tracé dans un plan rapporté à un repère orthonormé deux droites, D d'équation $y = ax + b$ et Δ d'équation $y = x$.

1. Expliquer pourquoi, sur la figure 1, le terme $u_1 = au_0 + b$ se trouve à l'extrémité du trajet partant de u_0 sur l'axe des abscisses.
2. En itérant cette construction, indiquer si la suite est monotone et si elle semble converger. Si oui, vers quelle valeur ?
3. Reprendre la même démarche pour les figures 2, 3 et 4.

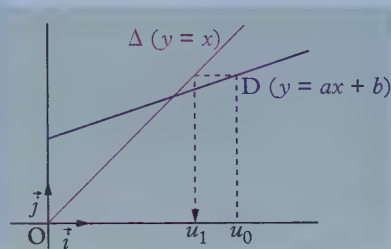


Figure 1

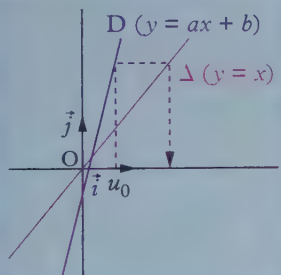


Figure 2

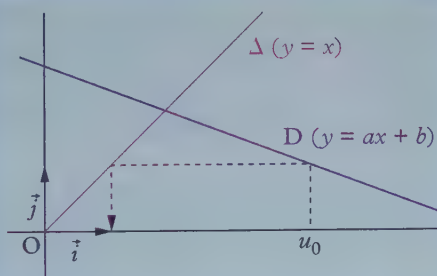


Figure 3

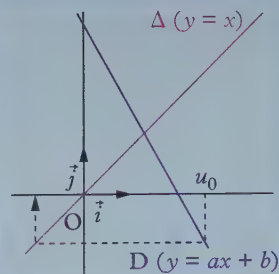


Figure 4

D. ➔ Démonstration

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$

1. Étudier la convergence de la suite (u_n) dans le cas où $a = 1$.
2. On suppose maintenant que $a \neq 1$.

Lorsque (u_n) n'est pas constante, on pose $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ pour tout entier n .

Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison a .

Exprimer alors v_n , puis u_n en fonction de a, b, u_0 et n .

À quelle(s) condition(s) (u_n) converge-t-elle ?

6. Accélération de convergence

OBJECTIF : Comparer des vitesses de convergence.

A. ➔ Une suite bien lente

Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

Nous avons déjà montré que cette suite est croissante et majorée. Elle converge donc.

Euler a prouvé en 1748 que sa limite ℓ est $\frac{\pi^2}{6}$.

n	$u(n)$	$\ell - u(n)$
1	1	6,4493E-01
2	1,25	3,9493E-01
3	1,361111111	2,8382E-01
4	1,423611111	2,2132E-01
5	1,463611111	1,8132E-01
6	1,491388889	1,5355E-01
7	1,511797052	1,3314E-01
8	1,527422052	1,1751E-01
9	1,539767731	1,0517E-01
10	1,549767731	9,5166E-02
50	1,625132734	1,9801E-02
90	1,633884456	1,1050E-02
96	1,634571465	1,0363E-02
97	1,634677746	1,0256E-02
98	1,63478187	1,0152E-02
99	1,6348839	1,0050E-02
100	1,6349839	9,9502E-03
101	1,63508193	9,8521E-03
102	1,635178047	9,7560E-03
200	1,639946546	4,9875E-03
500	1,642936066	1,9980E-03
800	1,643684848	1,2492E-03
900	1,643823573	1,1105E-03
996	1,643930555	1,0035E-03
997	1,643931561	1,0025E-03
998	1,643932565	1,0015E-03
999	1,643933567	1,0005E-03
1000	1,643934567	9,9950E-04
1001	1,643935565	9,9850E-04
1002	1,643936561	9,9751E-04

1. Observation

On a calculé sur tableur les valeurs de u_n et de $\ell - u_n$ et extrait les résultats donnés dans le tableau ci-contre. D'après ces résultats, comment doit-on choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-1} près ? à 10^{-2} près ? à 10^{-3} près ?

2. Justification

Soit p un entier, $p \geq 1$.

a. Exprimer pour $n > p$ la différence $u_n - u_p$.

b. Montrer que pour tout $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

c. En déduire que pour $n > p \geq 1$:

$$\frac{1}{p+1} - \frac{1}{n+1} \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

d. En déduire que $\frac{1}{p+1} \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p}$.

e. Comparer avec les résultats trouvés à la question 1.

f. Comment choisir p pour que u_p soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près ?

Cette suite converge si lentement qu'elle semble inexploitable pour trouver des valeurs approchées de $\frac{\pi^2}{6}$.

Point Info

C'est ainsi qu'en 1730, le mathématicien anglais James Stirling (1692-1770) remarque dans la préface de son *Traité sur la sommation et l'interpolation des séries infinies* : « Comme il arrive très souvent que les séries convergent si lentement vers la vérité, qu'elles ne conduisent pas plus au but proposé que si elles étaient en réalité divergentes j'ai montré quelques théorèmes (...) par lesquels on accède rapidement aux valeurs de ces séries. »

Nous allons étudier de nouvelles suites construites par la méthode de Stirling et comparer leur vitesse de convergence à celle de (u_n) .

B. ➔ Accélération de la convergence

1. Soit (v_p) et (v'_p) les suites définies par $v_p = u_p + \frac{1}{p+1}$ et $v'_p = u_p + \frac{1}{p}$ pour tout $p \geq 1$.

a. Montrer que (v_p) et (v'_p) sont des suites adjacentes de même limite ℓ .

b. Montrer que $0 \leq v'_p - v_p \leq \frac{1}{p^2}$.

c. Comment choisir p pour être sûr que v_p soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près ?

2. Soit (w_p) et (w'_p) les suites définies par $w_p = v_p + \frac{1}{2(p+1)(p+2)}$ et $w'_p = v_p + \frac{1}{2p(p+1)}$.

On pourrait à nouveau montrer que (w_p) et (w'_p) sont des suites adjacentes. Admettons-le.

a. Quelle est leur limite commune ? Montrer que $0 \leq w'_p - w_p \leq \frac{1}{p^3}$.

b. Comment choisir p pour être sûr que w_p soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près ?

3. Soit (z_p) et (z'_p) les suites définies par :

$$z_p = w_p + \frac{2}{3(p+1)(p+2)(p+3)} \quad \text{et} \quad z'_p = w_p + \frac{2}{3p(p+1)(p+2)}.$$

À nouveau (z_p) et (z'_p) sont des suites adjacentes de limite commune ℓ .

a. Montrer que $0 \leq z'_p - z_p \leq \frac{2}{p^4}$.

b. Comment choisir p pour être sûr que z_p soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près ?

C. ➔ Comparaison

Avec quelle précision u_p est-elle une valeur approchée de ℓ ? De même pour v_p ? w_p ? z_p ?
Recopier et compléter :

p	u_p est une valeur approchée de ℓ à	v_p est une valeur approchée de ℓ à	w_p est une valeur approchée de ℓ à	z_p est une valeur approchée de ℓ à
10				
100				
1 000				

Comparer pour $p = 10$, $p = 100$, $p = 1\ 000$ avec les résultats ci-dessous obtenus sur tableur.

n	$u(n)$	$\ell - u(n)$	$v(n)$	$\ell - v(n)$	$w(n)$	$\ell - w(n)$	$z(n)$	$\ell - z(n)$
1	1,000000000000	6,4E-01	1,500000000000	1,4E-01	1,583333333333	6,2E-02	1,611111111111	3,4E-02
10	1,549767731167	9,5E-02	1,640676822076	4,3E-03	1,644464700864	4,7E-04	1,644853201252	8,1E-05
100	1,634983900185	1,0E-02	1,644884890284	4,9E-05	1,644933424549	6,4E-07	1,644934052824	1,4E-08
1 000	1,643934566682	1,0E-03	1,644933567681	5,0E-07	1,644934066184	6,6E-10	1,644934066847	1,5E-12

Comparer avec la valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ donnée par une calculatrice.

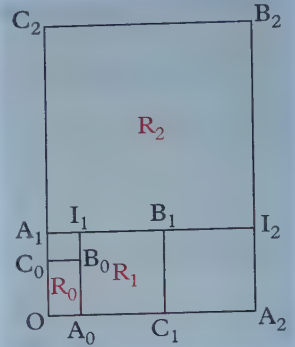
7. Une suite qui converge vers $\sqrt{2}$

OBJECTIF : Approcher $\sqrt{2}$ à l'aide d'une suite de nombres rationnels définis par un algorithme géométrique.

On considère le rectangle $OA_0B_0C_0$ tel que $OA_0 = 1$ et $OC_0 = 2$. On le note R_0 . On construit ensuite extérieurement à R_0 le carré $B_0C_0A_1I_1$, puis le carré $A_0I_1B_1C_1$. Le rectangle $OA_1B_1C_1$ est noté R_1 .

De la même manière, à partir du rectangle R_1 , on construit extérieurement le carré $B_1C_1A_2I_2$, puis le carré $A_1I_2B_2C_2$. Le rectangle $OA_2B_2C_2$ est noté R_2 . Et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel n , on note respectivement L_n et ℓ_n la longueur et la largeur de R_n . Le rapport $q_n = \frac{L_n}{\ell_n}$ est le format du rectangle R_n .



A. ➔ Relation de récurrence

1. Déterminer les six premiers termes de la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en donner une valeur approchée à 10^{-4} près. Comparer ces nombres à $\sqrt{2}$.

2. Exprimer les dimensions du rectangle R_{n+1} en fonction de celles du rectangle R_n .

En déduire que $q_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + q_n}$ pour tout entier naturel n .

B. ➔ Étude de la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 2]$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$ et sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 9 cm).

1. a. Étudier les variations de f et tracer la courbe C .

b. Vérifier que, pour tout réel x élément de l'intervalle $[1; 2]$, on a :

$$1 \leq f(x) \leq 2.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $1 \leq q_n \leq 2$.

c. Utiliser la courbe C et la droite Δ d'équation $y = x$ pour représenter les premiers termes de la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses.

2. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C et de Δ .

b. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1; 2]$ différent de $\sqrt{2}$, on a $\frac{f(x) - f(\sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} < 0$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $\frac{q_{n+1} - \sqrt{2}}{q_n - \sqrt{2}} < 0$.

Que peut-on dire des différents termes de la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par rapport à $\sqrt{2}$?

Point Info

Dans l'imprimerie, les standards usuels du papier, désignés par A0, A1, A3, ... ont été définis de telle sorte qu'une feuille et une demi-feuille aient le même format. Quel est ce format ?

3. a. Vérifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 2]$, on a l'égalité :

$$f(x) - f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} - x}{(1+x)(1+\sqrt{2})}.$$

Démontrer que $|f(x) - f(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{4} |x - \sqrt{2}|$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a :

$$|q_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |q_n - \sqrt{2}| \quad \text{puis que} \quad |q_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |q_0 - \sqrt{2}|.$$

c. Justifier que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.

8. Suite de Fibonacci et tableur

OBJECTIF : Étudier une suite de Fibonacci de façon expérimentale à l'aide d'un tableur, puis de façon théorique.

Les parties C et D peuvent être traitées indépendamment de la partie B.

A. ➔ Suite de Fibonacci

Problème étudié : De combien de façons peut-on mesurer une capacité de n litres à l'aide d'un récipient de 1 litre et d'un récipient de 2 litres ?

Soit F_n ce nombre de façons. Déterminer F_1 et F_2 . Montrer que $F_3 = 3$. Déterminer F_4 .

Justifier la relation :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{pour } n \geq 1.$$

On appelle suite de Fibonacci une suite vérifiant une telle relation de récurrence.

Cette relation de récurrence permet de calculer de proche en proche les termes de la suite. Le but du TP est de déterminer l'expression de F_n en fonction de n .

B. ➔ Étude expérimentale sur tableur

A	B
n	F(n)
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377

1. Entrer les noms « n » et « F(n) » dans A4 et B4.

Entrer la valeur 1 de n en A5.

Compléter ensuite la colonne A par les valeurs de n jusqu'à $n = 25$.

Entrer en colonne B les valeurs de F_1 et F_2 dans les cellules B5 et B6.

Entrer en B7 la formule permettant de calculer F_3 .

Compléter alors la colonne B par le calcul des termes F_n jusqu'à F_{25} .

2. Représenter graphiquement la suite (F_n) pour $1 \leq n \leq 25$ à l'aide de l'assistant graphique (style : nuage de points).

3. Quel type de croissance peut-on conjecturer ?

4. En colonne C, faire afficher $\ln(F_n)$ et représenter graphiquement la suite $(\ln(F_n))$.
Que remarque-t-on sur le graphique obtenu ?

5. Entrer en D1 la lettre a , en D2 une valeur réelle pour a (1 par exemple), en E1 la lettre b , en E2 une valeur réelle pour b (2 par exemple).

Aide

Revoir le mode d'emploi B page 25.

Aide

Revoir le mode d'emploi A page 25.

Aide

Revoir le mode d'emploi C page 25.

Programmer en colonne D (à partir de D5) le calcul des termes $an + b$ de telle sorte qu'ils soient automatiquement recalculés lorsque l'on changera les valeurs de a et b en D2 et E2. (**Attention** : certaines adresses devront donc être absolues.)

6. Représenter sur un même graphique les suites $(\ln(F_n))$ et $(an + b)$.

En modifiant les valeurs de a et b , déterminer deux valeurs pour lesquelles les graphiques sont pratiquement superposés.

7. Quelle approximation de $\ln(F_n)$ a-t-on obtenue ? Quelle approximation de F_n en déduit-on ?

Aide

Sélectionner les valeurs de n , maintenir la touche Ctrl du clavier enfoncée et sélectionner les valeurs de $\ln(F_n)$ et de $an + b$ correspondantes, puis aller dans l'assistant graphique (nuages de points).

C. ➔ Étude théorique

1. Déterminer les suites géométriques $(k^n)_{n \geq 1}$ qui vérifient la relation de récurrence (R) : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On notera q et q' les raisons obtenues ($q < q'$).

2. a. Montrer que toute suite v telle que $v_n = \alpha q^n + \beta q'^n$ vérifie la relation (R).

b. Réciproquement, supposons que $(w_n)_{n \geq 1}$ est une suite vérifiant la relation (R).

Déterminer α et β de telle sorte que les deux premiers termes de la suite $(\alpha q^n + \beta q'^n)$ soient les mêmes que ceux de la suite w .

Qu'en déduit-on pour les suites (w_n) et $(\alpha q^n + \beta q'^n)$ (on admettra qu'une suite vérifiant (R) est entièrement déterminée par ses deux premiers termes) ?

c. Quelles sont les suites vérifiant la relation (R) ?

3. En déduire l'expression de F_n en fonction de n , puis comparer avec l'expression obtenue expérimentalement.

D. ➔ Méfiance !

Sur la feuille de calcul, modifier les premiers termes F_1 et F_2 en remplaçant F_1 par 2 et F_2 par $1 - \sqrt{5}$. On obtient ainsi en colonne B les termes de la suite u définie par $u_1 = 2$, $u_2 = 1 - \sqrt{5}$ et la relation de récurrence (R).

1. Observer les termes u_n (aller au moins jusqu'à $n = 100$) ; que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite dans ce cas ?

2. Déterminer l'expression de u_n (on déterminera les valeurs α et β à l'aide de la question C2b). Quelle est la limite de la suite ?

3. Quelle raison peut-on trouver pour expliquer la mise en défaut du tableur ?

D'après une idée du groupe Math&Info de l'académie de Bordeaux.

Point Info

Léonard de Pise, dit Fibonacci, est un mathématicien italien (1180 env.-1250 env.). Son père, commerçant toscan qui dirigeait le bureau des douanes de Bougie en Algérie pour le compte de l'ordre des marchands de Pise, le fit venir près de lui et lui fit suivre les meilleures leçons sur les méthodes de calcul indo-arabes. Lors de différents voyages, il put également rencontrer des mathématiciens en Égypte, en Grèce, en Syrie, en Sicile. Convaincu de la supériorité de la numération de position arabe et désireux de mettre à la disposition de tous les connaissances ainsi acquises, il écrivit à son retour en Italie le *Liber abaci*.

Dans cet ouvrage de 459 pages, il présente la nouvelle numération indienne et le chiffre 0, les opérations sur les entiers et les fractions, le critère de divisibilité par 9, les méthodes pour déterminer le plus grand commun diviseur ainsi que de nombreux problèmes d'achat et de vente et des méthodes de résolution d'équations. C'est également dans ce livre qu'il introduisit la suite devenue célèbre et qui porte son nom.

9. Dynamique des populations

OBJECTIF : Mettre en œuvre des modèles discrets ou continus pour étudier l'évolution d'une population.

Une population (animale ou végétale) peut croître, décroître ou rester stable. Elle est donc en général dynamique ; cette dynamique résulte de différents processus (décès, naissance, immigration, émigration, consommation). Elle peut être décrite à l'aide de tableaux statistiques, de diagrammes mais elle peut également être modélisée à l'aide de fonctions mathématiques.

A. ➔ Le modèle de Malthus : un exemple discret

En 1798 dans sa publication *An Essay on the Principle of Population*, Thomas Malthus développe une vision particulièrement pessimiste du futur : l'accroissement de la population mondiale beaucoup plus rapide que celui des moyens de subsistance conduirait le monde à une situation désastreuse. Il y pose l'hypothèse suivante : « Lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle double tous les 25 ans et croît, de période en période, selon une proportion géométrique ».

1. On note P_0 la population mondiale en 1800 et P_n la population en l'année $1800 + n \times 25$ pour $n \geq 0$.

Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n suivant l'hypothèse de Malthus.

2. On estime P_0 à environ 0,91 milliards d'habitants. Suivant ce modèle, quelle population mondiale était alors prévisible pour l'année 2000 ? Comparer avec la situation actuelle.

3. Malthus supposait également que « les moyens de subsistance ne peuvent jamais augmenter plus rapidement que selon une progression arithmétique ». Expliquer son inquiétude.

4. Dans cet exemple, on s'est intéressé à la population aux instants $t_0 = 0$ (pour l'année 1800),

$t_1 = t_0 + \Delta t$, $t_2 = t_1 + \Delta t$, ... avec $\Delta t = 25$ ans. On note alors $r(t_n) = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n}$ le taux de

changement relatif de la population entre les instants t_n et t_{n+1} en prenant pour unité de temps Δt . Montrer que, dans ce modèle, r est constant.

B. ➔ Passage à un modèle continu

L'intervalle Δt entre deux observations de la population peut être réduit à 10 ans, 1 an, 1 mois, 1 jour, 1 heure, ... On considérera donc la population à chaque instant t notée $P(t)$ où P est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$, strictement positive, que l'on supposera dérivable.

Montrer que quand Δt tend vers 0, le taux de changement relatif de la population par unité de

temps $\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{P(t)\Delta t}$ a une limite finie notée $r(t)$ (appelée taux de changement relatif ins-

stantané) et que P est solution de l'équation différentielle (E) : $\frac{dP}{dt} = rP$.

C. ➔ Modèle de Malthus continu

Comme précédemment, ce modèle se caractérise par r constant : $r(t) = a$, a constante.

1. Exprimer $P(t)$ en fonction de a et de $P(0)$.

2. Déterminer l'évolution de la population si $a < 0$.

3. Si $a > 0$, montrer que dans le modèle de Malthus, la population croît sans limitation.

D. ➔ Étude d'un exemple

Les tableaux suivants donnent la population des États-Unis de 1790 à 1980 en millions d'habitants.

t	Année	Population
0	1790	3,929
10	1800	5,308
20	1810	7,240
30	1820	9,638
40	1830	12,861
50	1840	17,064
60	1850	23,192
70	1860	31,443
80	1870	38,558
90	1880	50,189

t	Année	Population
100	1890	62,980
110	1900	76,212
120	1910	92,228
130	1920	106,020
140	1930	123,200
150	1940	132,160
160	1950	151,330
170	1960	179,320
180	1970	203,300
190	1980	226,550

- Supposons que la population suive le modèle de Malthus. À l'aide des deux premières données, déterminer la valeur de a arrondie au 3^e chiffre après la virgule, puis l'expression de $P(t)$.
- Représenter sur un même graphique (à la main ou sur tableur) la courbe de P sur $[0 ; 190]$ et les données relevées dans le tableau ci-dessus. Que penser du modèle choisi ?

Le modèle de Malthus peut s'appliquer lorsque la population peut se développer sans contrainte ou parfois sur une courte période d'« explosion démographique ». Si les ressources sont limitées, l'accroissement de la population diminue quand la population augmente. Cherchons un modèle dans lequel r est une fonction décroissante de P la plus simple possible : une fonction affine.

E. ➔ Le modèle logistique : r fonction affine de P

On cherche donc une fonction affine r de P avec $r(P) = \alpha + \beta P$ et les contraintes suivantes :

- r est une fonction décroissante de P .
- Si P est petit, $r \approx a$ (constante) comme dans le modèle de Malthus. On considérera donc que si P tend vers 0, $r(P)$ tend vers a .
- Quand le temps passe, la population P tend vers une limite K (appelée capacité limite) et le taux de changement instantané r tend vers 0.

- Déterminer $r(P)$, puis montrer, en utilisant (E), que P est solution

de l'équation différentielle $\frac{dP}{dt} = a \left(1 - \frac{P}{K}\right) P$.

Soit $Q = \frac{1}{P}$. Montrer que Q est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dQ}{dt} = -aQ + \frac{a}{K}.$$

- Déterminer la solution générale de cette équation, puis montrer que :

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P(0)} - 1\right) e^{-at}}.$$

- Étude de la fonction P .** Pour $a > 0$, $K > P(0)$, déterminer le sens de variation de P et la limite de P en $+\infty$. Donner l'allure de sa courbe représentative.

- Application à l'exemple de la partie D.** La contrainte (2) permet de garder la même valeur de a qu'à la question D1. Déterminer K de telle sorte que $P(190) = 226,550$, puis représenter P sur le graphique de la question D2.

Dans la réalité, d'autres contraintes (des interactions entre espèces par exemple) sont aussi à prendre en compte et conduisent actuellement à des modèles beaucoup plus complexes.

Point Info

En 1845, le mathématicien belge Pierre-François Verhulst fut le premier à proposer un tel modèle de restriction de la croissance appelé « modèle logistique ».

Modéliser pour résoudre

1 On met un certain nombre de grains dans la première case d'un damier. Dans la seconde case, on met le même nombre de grains que dans la première case plus cinq grains. Ainsi de suite... Dans la n -ième case, on met le même nombre de grains que dans la $(n-1)$ -ième plus cinq grains. On a ainsi réparti 352 grains et utilisé plus d'une case.

Combien de cases a-t-on utilisées et combien de grains a-t-on mis dans la première case ?

(Aide : on sera amené à vérifier que n est un entier inférieur ou égal à 12.)

2 Château de cartes

Combien de cartes sont nécessaires pour fabriquer un château de cartes à n niveaux ($n \geq 1$) comme celui représenté ci-dessous ?



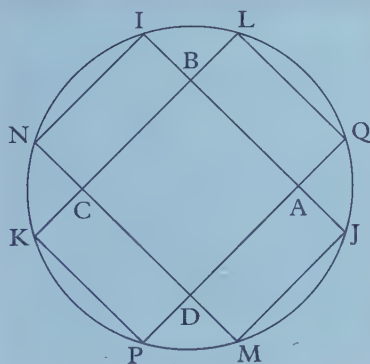
3 Jeu, set et maths

On désire placer quatre sets rectangulaires identiques sur une table ronde de rayon R . Ils ne peuvent ni se chevaucher, ni dépasser de la table.

Ils sont disposés comme indiqué sur la figure.

On veut que ces sets soient d'aire maximale.

Quelles doivent être leurs dimensions ?



Source : Rallye d'Alsace.

4 Élections

Lors de l'élection présidentielle française, en 2002, un certain nombre de candidats sont en présence au premier tour.

Chacun d'eux réunit exactement deux fois moins de voix que celui qui lui est immédiatement supérieur.

La question est : un deuxième tour sera-t-il nécessaire ?

5 La fermière va au marché

1. En chemin elle rencontre trois amis.

Au premier, elle donne la moitié des œufs que contient son panier plus un demi-œuf.

Au second, elle donne la moitié de ce qui lui reste plus un demi-œuf.

Idem pour le troisième. Il ne lui reste alors plus aucun œuf.

Combien avait-elle d'œufs au départ sachant qu'elle n'en a cassé aucun ?

2. Généraliser à n amis.

6 Dans une pièce à température constante de

20°C , à l'instant initial la température d'un liquide est de 70°C . Cinq minutes plus tard, elle est de 60°C . On admet que la vitesse de diminution de la température est proportionnelle à la différence entre la température du liquide et celle de la pièce. Quelle sera la température du liquide 30 minutes après l'instant initial ?

7 Un médicament s'élimine dans le sang à une

vitesse qui est proportionnelle à la quantité de médicament présente dans le sang.

Sachant que 3 heures après l'injection la moitié du produit a été éliminée, combien de temps faut-il attendre après l'injection pour que 90 % du produit soit éliminé ?

8 Diffusion de nouvelles technologies

La diffusion de nouvelles technologies est en général progressive et suit des lois assez semblables d'une technologie à l'autre.

Au début la diffusion est lente, les coûts étant élevés et les consommateurs peu enclins à changer leurs habitudes. Puis la diffusion s'accélère avant de ralentir. On constate que l'augmentation du nombre d'utilisateurs entre deux années consécutives est proportionnelle au nombre d'utilisateurs déjà existants et au nombre d'utilisateurs restant à convertir à l'usage de cette technologie.

On s'intéresse à l'évolution du nombre d'utilisateurs sachant que la première année, ils ne sont que 400 000 et que la deuxième année leur nombre augmente de 200 000. Le nombre d'utilisateurs potentiels à long terme est évalué à 40 millions. Combien d'utilisateurs peut-on prévoir 15 ans plus tard ?

→ PROBLÈMES

9 vu au BAC

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

1. Montrer que la fonction $f : t \mapsto (2-t)e^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0 ; 1]$.
En déduire la valeur de u_1 .

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ (R).

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus. Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par la deuxième calculatrice
1	7,1828182845E-01	7,1828182846E-01
2	4,3656365691E-01	4,3656365692E-01
3	3,0969097075E-01	3,0969097076E-01
4	2,3876388301E-01	2,3876388304E-01
5	1,9381941508E-01	1,9381941520E-01
6	1,6291649051E-01	1,6291649120E-01
7	1,4041543358E-01	1,4041543840E-01
8	1,2332346869E-01	1,2332350720E-01
9	1,0991121828E-01	1,0991156480E-01
10	9,9112182825E-02	9,9115648000E-01
11	9,0234011080E-02	9,0272128000E-02
12	8,2808132963E-02	8,3265536000E-02
13	7,6505728522E-02	8,2451968000E-02
14	7,1080199309E-02	1,5432755200E-01
15	6,6202989636E-02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E-02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E-03	3,3965641216E+02
18	-8,7016273909E-01	6,1128154189E+03
19	-1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	-3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	-7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	-1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	-3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	-8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	-2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? et les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de sa définition : pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n \geq 0.$$

2. a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel non nul n :

$$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n.$$

b. En déduire que, pour tout n non nul :

$$u_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n) :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Étant donné un réel a , on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \text{ et, pour tout entier naturel non nul } n, \\ v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

On s'intéresse à l'influence du terme initial a de cette suite sur son comportement à l'infini.

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a . (On rappelle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$.)

3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

10 Sans exponentielle ni logarithme

Le plan est rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ortho-normé.

On considère le point $A(-1 ; 0)$ et la parabole Γ d'équation $y = x^2$.

Pour tout a de $[0 ; +\infty[$, on note D_a la droite passant par A et de coefficient directeur a , M_a et N_a les points d'intersection de D_a avec Γ (éventuellement confondus) de telle sorte que M_a ait une abscisse inférieure ou égale à celle de N_a .

On construit le point P_a tel que $\overrightarrow{AP_a} = \overrightarrow{M_a N_a}$.
Le but du problème est de déterminer l'ensemble E décrit par P_a quand a décrit $[0 ; +\infty[$.

Partie A. Construction point par point

1. Tracer précisément Γ sur $[-2 ; 4]$.
2. Tracer D_a , M_a , N_a et P_a , pour :
 $a = 0,5$, $a = 1$, $a = 1,5$, $a = 2$, $a = 2,5$ et $a = 3$.

Partie B. Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x(\sqrt{4+x^2} - 2)$, et C sa courbe représentative.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$, son sens de variation et dresser son tableau de variation.
2. Préciser la tangente à C au point O .
3. Justifier que, pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{4+x^2} - 2 \leq x$. Quelle est la position de C par rapport à Γ ?
4. Tracer C sur le graphique fait à la partie A.

Partie C. Ensemble des points P_a

1. Déterminer les coordonnées des points M_a , N_a , P_a pour $a \geq 0$.
2. a. Montrer que tout point P_a appartient à la courbe C' d'équation $y = f(x+1)$.
b. Comment obtient-on C' à partir de C ? Tracer C' sur le graphique fait à la partie A.
3. a. Montrer que, pour tout $\alpha \geq 0$, l'équation $\sqrt{a^2 + 4a} = \alpha$ à l'inconnue réelle positive a admet une unique solution.
b. Qu'en déduit-on sur E ?

11 vu au BAC

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

Pour tout entier naturel n , on définit sur \mathbb{R} la fonction numérique f_n par :

$$f_0(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et pour } n \text{ entier naturel non nul,}$$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}.$$

On note Γ_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

On désigne par I_n l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$.

Partie A

1. a. Étudier les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$. Quelle est la conséquence graphique de ces résultats ?
b. Étudier les variations de f_1 .
2. a. Étudier les limites de f_3 en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. Étudier les variations de f_3 .
3. Tracer la courbe Γ_3 sur le dessin obtenu en 1c.
3. Calculer $I_1 + I_3$. En déduire la valeur de I_3 .
4. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par les courbes Γ_1 , Γ_3 et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

Pour cette partie, on dessinera la figure demandée dans un nouveau repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

1. a. Étudier les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

- b. Étudier les variations de f_0 .

2. Soit (a_n) la suite définie, pour n entier naturel non nul, par :

$$a_n = \int_0^n \frac{1}{1+t^2} dt.$$

- a. Interpréter graphiquement a_n .

- b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

- c. Montrer que, pour tout réel t , $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ et en déduire que $a_1 \leq 1$.

- d. Montrer que, pour tout réel t non nul, $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ et en déduire que, pour tout entier

naturel n non nul, $\int_1^n \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1 - \frac{1}{n}$.

- e. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n \leq 2$. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (a_n) ?

Partie C

Soit F la fonction telle que :

$$F(0) = 0, F \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } F'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. On pose, pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$:

$$H(x) = F(\tan(x)).$$

- a. Calculer $H(0)$.

- b. Montrer que H est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et calculer $H'(x)$.

- c. En déduire que, pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $H(x) = x$.

- d. Montrer que $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

2. On pose, pour tout x réel positif ou nul :

$$k(x) = F\left(\frac{1}{x+1}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right).$$

- a. Montrer que la fonction k est dérivable sur \mathbb{R}^+ et déterminer $k'(x)$.

- b. En déduire la valeur de $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right)$.

12 e est irrationnel

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

pour un entier naturel n , $n \geq 1$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0 ; 1]$ et que

$$f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

2. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx \leq \frac{1}{n!}$$

puis que $0 \leq f(0) - f(1) \leq \frac{1}{n!}$.

3. Soit u la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ pour tout entier naturel n , $n \geq 1$.
Déduire de la question précédente que :

$$0 \leq e - u_n \leq \frac{e}{n!}.$$

4. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

5. On pose pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

a. Montrer que (u_n) est strictement croissante et (v_n) strictement décroissante, puis que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n < e < v_n$.

c. Supposons que $e = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls.

Montrer qu'alors $qq!u_q < pq! < qq!u_q + 1$.

Que peut-on en déduire quant à la nature du réel e ?

13 Une suite qui converge vers \sqrt{a}

Soit a un nombre réel strictement positif. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout n , $u_n > 0$.

Pour quelle valeur de u_0 la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle constante ?

2. On suppose, dans toute la suite du problème, que $u_0^2 - a \neq 0$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\bullet u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{a})^2 ;$$

$$\bullet u_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n} (u_n + \sqrt{a})^2 .$$

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante pour $n \geq 1$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite (on ne demande pas de calculer cette limite dans cette question).

3. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} .$$

a. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n .

b. Calculer v_{n+1} en fonction de v_1 et de n .

En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (on pourra montrer que $\ln(v_{n+1})$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$).

4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5. Dans cette question, on fixe $u_0 = 2$ et $a = 2$.

Calculer u_1 , u_2 et u_3 (on donnera les résultats sous forme de fractions).

Démontrer que $u_1 - \sqrt{2} < 10^{-1}$.

En déduire que $u_2 - \sqrt{2} < \frac{1}{3} 10^{-2}$.

Trouver une majoration de l'erreur commise en prenant u_3 comme valeur approchée de $\sqrt{2}$.

14 1. Soit a un réel strictement positif. La fonction f est définie par $f(x) = \frac{ax+1}{x+a-1}$ ($x \neq 1-a$).

a. Démontrer que, pour toute valeur de a , l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution positive. On note Φ cette solution (Φ est appelé « nombre d'or »).

b. Vérifier que $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$.

2. Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \end{cases}$$

a. Vérifier que $x_{n+1} = g(x_n)$, g étant la fonction obtenue en remplaçant a par 1 dans l'expression de f .

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_n - \Phi = \frac{\Phi - x_{n-1}}{\Phi x_{n-1}} .$$

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n , x_n est un nombre rationnel supérieur à 1.

d. En déduire que :

• les termes de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont situés de part et d'autre de Φ ;

• $|x_n - \Phi| \leq \frac{|x_{n-1} - \Phi|}{\Phi}$ pour tout entier n non nul ;

• la suite $(|x_n - \Phi|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

e. Conclure sur la convergence de la suite $(|x_n - \Phi|)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Démontrer successivement que, pour tout entier naturel n :

$$|x_n - \Phi| \leq \frac{|x_0 - \Phi|}{\Phi^n}, \text{ puis que } |x_n - \Phi| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. En utilisant une calculatrice (ou un tableur), déterminer le rang à partir duquel $|x_n - \Phi| \leq 10^{-1}$.

Quel renseignement obtient-on sur la même question en utilisant l'inégalité $|x_n - \Phi| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$?

Comment expliquer cette différence ?

15 vu au BAC Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$ et soit \mathcal{C} la courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Étudier le sens de variation de f et donner le tableau de variation de f .

b. Tracer \mathcal{C} .

3. Soit $I = \int_{-3}^0 f(x) dx$.

a. Interpréter graphiquement I .

b. En utilisant l'intégration par parties, calculer

$$\int_{-3}^0 xe^x dx, \text{ puis } \int_{-3}^0 x^2 e^x dx.$$

c. En déduire la valeur exacte de I .

Partie B

1. Soit a et b deux nombres réels et g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = e^{(x^2 + ax + b)}.$$

Quelles sont les valeurs de a et b pour lesquelles le tableau de variation de g est celui donné ci-dessous ?

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	$+\infty$		$e^{-\frac{5}{4}}$	$+\infty$

2. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = e^{(x^2 - 3x + 1)}$ et Γ sa courbe représentative.

a. Démontrer que la droite D d'équation $x = \frac{3}{2}$ est axe de symétrie de Γ .

b. Justifier l'affirmation suivante : « 3,2 est une valeur approchée à 10^{-1} près d'une solution de l'équation $h(x) = 5$ ».

c. Soit α un nombre dont 1,7 est une valeur approchée à 0,5 près.

Établir que $0,28 \leq h(\alpha) \leq 0,47$.

Partie C

Soit u une fonction dérivable sur \mathbb{R} dont le tableau de variation est donné ci-dessous (a, b, c étant trois nombres réels).

Soit v_1, v_2, v_3 les fonctions définies par :

$$v_1(x) = e^{u(x)}; v_2(x) = u(e^x); v_3(x) = u(x)e^x.$$

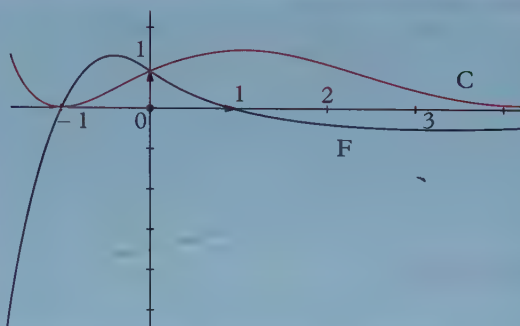
x	$-\infty$	0	a	b	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$		c	0	$+\infty$

1. Déterminer le sens de variation des fonctions v_1 et v_2 (en justifiant la réponse).

2. Indiquer un intervalle sur lequel il est possible de donner le sens de variation de la fonction v_3 ? (Justifier la réponse.)

16 vu au BAC

Partie A. Lectures graphiques



On donne dans un repère orthogonal les courbes C et F représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} . On sait que l'une de ces fonctions est la fonction dérivée de l'autre, on peut donc les noter g et g' .

1. Associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique. On justifiera le résultat en donnant un tableau où figurera sur l'intervalle

$$\left[-\frac{3}{2}; 4\right] \text{ le signe de } g'(x) \text{ et les variations de } g.$$

2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 0 ?

Partie B

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y' + y = 2(x + 1)e^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction f_0 définie sur \mathbb{R} par $f_0(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ est une solution de l'équation (E).

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E') \quad y' + y = 0.$$

3. Soit u une solution de (E'). Montrer que la fonction $f_0 + u$ est une solution de (E).

On admettra que, réciproquement, toute solution f de (E) est de la forme $f = f_0 + u$ où u est une solution de (E').

En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f(x)$ lorsque f est solution de (E).

4. Sachant que la fonction g de la partie A est solution de (E), déterminer $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

5. Déterminer la solution h de l'équation (E) dont la représentation graphique admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 0.

Partie C

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. On sait que f est dérivable sur \mathbb{R} : déterminer sa fonction dérivée et étudier son signe.

Donner le tableau de variation de f .

3. Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique : 2 cm), on note C' la représentation graphique de f .

- a. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C' au point Ω d'abscisse -1 .
- b. Tracer avec soin la courbe C' et la tangente T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
4. a. Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction f.
- b. Soit α un réel positif. Calculer en cm^2 l'aire notée $A(\alpha)$ de la zone du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C' et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

17 vu au BAC Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) > 0$.
2. a. Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x.$$

- b. En déduire que, pour tout x de \mathbb{R} :
- $$2 + \cos x + \sin x > 0.$$

c. Montrer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

3. a. Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} :

$$e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}.$$

- b. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
4. a. Montrer que, sur l'intervalle $[0; \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α .
- b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
5. Représenter la courbe \mathcal{C} sur $[0; 4]$.

Partie B

On veut calculer l'aire \mathcal{A} , exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1. Montrer que $\mathcal{A} = 2e - 2 + \int_0^1 (\cos t)e^{1-t} dt$.

2. On pose :

$$I = \int_0^1 (\cos t)e^{1-t} dt \text{ et } J = \int_0^1 (\sin t)e^{1-t} dt.$$

- a. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $I = -\cos 1 + e - J$; $J = -\sin 1 + I$.
- b. En déduire la valeur de I.
3. Déterminer la valeur exacte de \mathcal{A} en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de \mathcal{A} à 10^{-2} près par défaut.

Partie C

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

1. a. Montrer que la fonction h admet des primitives sur \mathbb{R} .

b. Calculer la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.

2. a. Déterminer $\ln(f(x))$ pour tout x de \mathbb{R} .

b. Étudier le sens de variation de la fonction H.

c. Déterminer le tableau de variation de H.

3. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$. (On ne demande pas de représenter Γ .)

On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

- a. Étudier la position relative de Γ et de Δ .
- b. Déterminer les abscisses des points communs à Γ et Δ .
4. a. Établir une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.
- b. Étudier la position relative de Γ et T.
5. Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

18 vu au BAC

Partie A. Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

2. Soit a et b deux réels et soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = (ax + b)e^x$.

- a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

b. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si $u + v$ est solution de (1).

c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 2e^x - x - 2.$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
- a. Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
- b. L'autre solution est appelée α .
Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C. Étude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur.)
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Étudier le sens de variation de f.
3. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la partie B.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.)

- Établir le tableau de variation de f .
- Tracer la courbe (\mathcal{C}), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

Partie D. Calcul d'aire

- Soit m un réel négatif.

Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x) dx$.
(On justifiera la réponse.)

- Calculer $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
 - En déduire $\int_m^0 f(x) dx$.
- Calculer la limite de $\int_m^0 f(x) dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.

19 vu au BAC

Partie A

On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' - 2y = -\frac{2}{1 + e^{-2x}}$$

- Déterminer la solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
- Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} , telle que $f(0) = \ln(2)$, et soit g la fonction définie par l'égalité :

$$f(x) = e^{2x}g(x).$$

- Calculer $g(0)$.
- Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.
- Montrer que f est solution de (E) si et seulement si :

$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

- En déduire l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

Partie B. Étude sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x})$

- On pose $h(x) = \ln(1 + e^{-2x}) - \frac{1}{e^{2x} + 1}$.
 - Étudier la limite de h en $+\infty$.
 - Étudier le sens de variation de h .
 - En déduire le signe de $h(x)$ pour tout x réel.
- Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $h(x)$.
- Étudier la limite de f en $+\infty$.
Montrer que $f(x) = e^{2x}[-2x + \ln(1 + e^{2x})]$.
En déduire la limite de f en $-\infty$.
- Dresser le tableau de variation de f .
- Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé en prenant 5 cm pour unité. Préciser la tangente au point d'abscisse nulle.

Partie C

- En remarquant que $\frac{1}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$, déterminer une primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{1 + e^{-2x}}$.

2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire (en cm^2) de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f définie à la partie B, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$. On donnera la valeur exacte de cette aire, ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie D

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$ (où f est la fonction définie à la partie B).

- Montrer que $f([0; 1]) \subset [0; 1]$, et en déduire que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \in [0; 1]$.
- Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est croissante.
En déduire qu'elle converge.
- Soit α sa limite.
Montrer que $f(\alpha) = \alpha$ et $\alpha \in [0; 1]$.
- Grâce à la représentation graphique de f , donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

20 Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

Partie A. Étude d'une fonction f

On définit la fonction f sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1).$$

- Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et A le point de \mathcal{C} d'abscisse 3.
Calculer l'ordonnée de A.

Soit B le point de \mathcal{C} d'abscisse $\frac{5}{4}$, P le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O; \vec{u})$ et H le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O; \vec{v})$.

Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H. Placer les points A, B, P et H dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et représenter la courbe \mathcal{C} .

Partie B. Utilisation d'une rotation

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. À tout point M du plan d'affixe z , la rotation r associe le point M' d'affixe z' .

- Donner z' en fonction de z .
On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x', y' réels). Exprimer x' et y' en fonction de x et y , puis exprimer x et y en fonction de x' et y' .
- Déterminer les coordonnées des points A', B' et P' images respectives des points A, B et P par la rotation r .

2. On appelle g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$ et Γ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

a. Montrer que lorsqu'un point M appartient à \mathcal{C} , son image M' par r appartient à Γ .

On admet que lorsque le point M décrit \mathcal{C} , le point M' décrit Γ .

b. Tracer sur le graphique précédent les points A' , B' , P' et la courbe Γ (l'étude des variations de g n'est pas demandée).

Partie C. Calcul d'intégrales

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} g(x) dx$.

Interpréter graphiquement cette intégrale.

2. a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire \mathcal{A} du domaine plan \mathcal{D} limité par les segments $[AO]$, $[OH]$ et $[HB]$ et l'arc de courbe \mathcal{C} d'extrémités B et A .

b. On pose $I = \int_{\frac{1}{4}}^3 \ln(\sqrt{1+x} - 1) dx$.

Trouver une relation entre \mathcal{A} et I , puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

21 vu au BAC

Partie A. Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité

1. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par Δ la droite d'équation $y = x + 1$ et par Γ la courbe d'équation $y = e^x$.

a. Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?

b. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ et donner l'allure de Γ .

2. a. Démontrer que, pour tout réel t , $e^t \geq t + 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. En déduire que, pour tout réel t , $e^{-t} + t + 1 \geq 2$,

et que, pour tout x de \mathbb{R}^{**} , on a $\frac{1}{x} + \ln x + 1 \geq 2$.

Partie B. Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = (x + 1) \ln x.$$

On appelle C la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

1. a. Étudier le sens de variation de g en utilisant la partie A.

b. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.

2. a. Déterminer une équation de la tangente D à C au point d'abscisse 1.

b. On appelle h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = g(x) - 2x + 2.$$

Étudier le sens de variation de h . (On pourra utiliser la question A2b.)

En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

c. Étudier la position de C par rapport à D .

3. Tracer C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

4. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $U_n = \int_n^{n+1} g(x) dx$.

a. Donner une interprétation géométrique de U_n .

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $g(n) \leq U_n \leq g(n+1)$.

c. En déduire le sens de variation de la suite (U_n) .

d. La suite (U_n) est-elle convergente ?

Partie C. Étude d'une primitive

G désigne la primitive de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

On a donc, pour tout x appartenant à l'intervalle

$$]0; +\infty[, G(x) = \int_1^x g(t) dt.$$

1. Quel est le signe de $G(x)$ suivant les valeurs de x ?

2. Calculer $G(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

3. Déterminer les limites de G en 0 et en $+\infty$.

Pour l'étude en $+\infty$, on pourra mettre x^2 en facteur dans l'expression $G(x)$.

Pour l'étude en 0, on admettra que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

22 vu au BAC

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} définie pour tout réel positif x par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On appelle C_n la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 3 cm).

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f_1 et déterminer sa limite en $+\infty$. Tracer C_1 en précisant la tangente à l'origine.

2. Pour n entier supérieur ou égal à 2, étudier les variations de la fonction f_n et déterminer sa limite en $+\infty$. Tracer C_3 sur une nouvelle feuille, en précisant la tangente à l'origine.

3. On note s_n la réflexion par rapport à la droite d'équation $x = n$ et C'_n l'image de C_n par s_n .

a. M étant le point du plan de coordonnées $(x; y)$, calculer les coordonnées de son image par s_n .

b. Montrer que C'_n est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$x \leq 2n \quad \text{et} \quad y = f_n(2n - x).$$

c. Tracer C'_3 sur la même feuille que C_3 .

Pour $x \leq 2n$, on pose $g_n(x) = f_n(2n - x)$.

d. En interprétant géométriquement les intégrales, justifier l'égalité :

$$\int_n^{2n} f_n(t) dt = \int_0^n g_n(t) dt.$$

4. Pour x élément de $]0; n]$, on pose :

$$h_n(x) = \ln(g_n(x)) - \ln(f_n(x)).$$

a. De l'étude des variations de h_n , déduire le signe de $h_n(x)$.

b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; n]$, on a $f'_n(x) \leq g'_n(x)$.

c. Déduire de ce qui précède l'inégalité :

$$\int_0^n f_n(t) dt \leq \int_n^{2n} f_n(t) dt.$$

Partie B

Pour tout réel positif x , on pose :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

1. Démontrer que la fonction F_n est croissante sur $[0; +\infty[$.

2. À l'aide d'intégrations par parties :

a. calculer $F_1(x)$;

b. démontrer que, pour tout réel positif x et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x).$$

3. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout réel positif x et tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$F_n(x) = n! \left[1 - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \right].$$

4. a. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = n!$.

b. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, on a :

$$F_n(x) \leq n!.$$

Partie C

1. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t) dt \leq n!$.

2. Déduire des résultats des parties A et B que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$0 \leq F_n(n) \leq \frac{n!}{2}$$

puis $\frac{1}{2} e^n \leq 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \leq e^n.$

23 Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie A. Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (1) :

$$y' - \frac{1}{n} y = -\frac{x+1}{n(n+1)}.$$

1. Déterminer, en fonction de n , deux réels a et b tels que la fonction affine qui à x associe $ax + b$ soit solution de l'équation (1).

2. Résoudre l'équation différentielle (2) :

$$y' - \frac{1}{n} y = 0.$$

3. Montrer qu'une fonction φ est solution de (1) si et seulement si la fonction ψ qui à x associe $\psi(x) = \varphi(x) - (ax + b)$ est solution de (2).

4. En déduire toutes les solutions de (1).

5. Déterminer la solution de (1) qui prend la valeur 0 en 0.

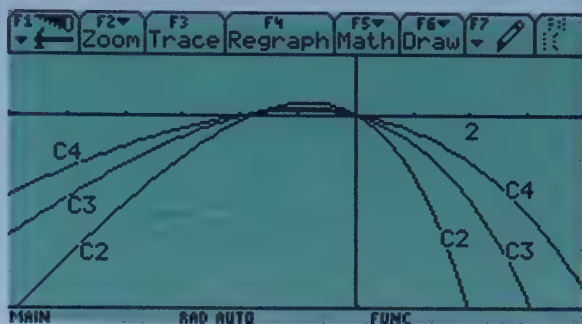
Partie B. Étude d'une famille de fonctions

On définit sur \mathbb{R} la fonction f_n par :

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - \exp\left(\frac{x}{n}\right).$$

On note C_n la courbe représentant f_n dans un repère orthogonal du plan.

En représentant à la calculatrice les fonctions f_n pour $n \in \{2; 3; 4\}$ avec pour fenêtre graphique $-6 \leq x \leq 4$, $-1 \leq y \leq 0,3$, on obtient l'écran suivant :



1. Conjectures

D'après le graphique ci-dessus, que peut-on conjecturer pour :

- le sens de variation des fonctions f_n ?
- les points d'intersection des courbes C_n avec l'axe des abscisses ?

2. Étude de cas particuliers

a. Étudier le sens de variation de la fonction f_2 et sa limite en $+\infty$.

b. Faire de même pour f_3 .

3. Étude générale

a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

b. Étudier le sens de variation de f_n et dresser son tableau de variation.

c. Justifier que f_n admet un maximum en un réel α_n . Quelle est la limite de α_n quand n tend vers $+\infty$ (on pourra poser $h = \frac{1}{n}$) ?

4. Intersection avec l'axe des abscisses

a. Justifier que la courbe C_n coupe l'axe des abscisses en O et en un autre point A_n .

On appellera x_n l'abscisse de ce point.

b. De l'étude des variations sur $]1; +\infty[$ de la fonction s qui à x associe $s(x) = \frac{2}{x} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, déduire que $f_n(-2) < 0$.

c. De l'étude des variations de la fonction t qui à tout $x > 0$ associe $t(x) = \frac{2x+1}{2x(x+1)} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$,

déduire le signe de $f_n\left(2n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$.

d. En déduire que pour tout $n \geq 2$:

$$-2 < x_n < 2n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

e. En déduire que la suite (x_n) converge et préciser sa limite.

f. Quels commentaires peut-on faire sur les conjectures graphiques faites à la partie A ?

24 On considère une suite réelle (p_n) satisfaisant la relation de récurrence (1) :

$$p_{n+4} = \frac{1}{4} (p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n).$$

Partie A. Étude des suites géométriques vérifiant (1)

1. Montrer que la suite géométrique de terme général $p_n = r^n$ (où r est un réel quelconque non nul) vérifie la relation (1) si et seulement si r est racine du polynôme $P(x) = 4x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$.
2. Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x-1)$ et préciser le quotient.
3. a. Étudier le sens de variation de la fonction Q définie par $Q(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. Préciser ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
b. Représenter graphiquement la fonction Q .
c. Prouver que Q s'annule une fois et une seule en une valeur a dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près (on pourra s'intéresser d'abord à l'intervalle $[-1; 0]$).
4. Déterminer les réels r tels que les suites géométriques de terme général $p_n = r^n$ vérifient la relation (1). Étudier la convergence de ces suites.

Partie B. Expérimentation

Dans cette partie uniquement, on pose :

$$p_0 = 1, p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, p_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

Expliquer comment calculer des valeurs approchées des termes de la suite jusqu'au terme p_n soit à l'aide d'un tableur soit en écrivant un programme sur une calculatrice.

Donner des valeurs approchées (à la précision de la calculatrice ou du tableur) des termes p_0, p_1, \dots, p_{10} .

Que peut-on conjecturer quant à la convergence de cette suite ?

Partie C. Convergence de la suite (p_n)

Dans le reste du problème, (p_n) est à nouveau une suite quelconque vérifiant (1). On lui associe deux suites (m_n) et (M_n) définies par :

• $m_n = \min(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3})$ c'est-à-dire le plus petit des quatre termes $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$.

• $M_n = \max(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3})$ c'est-à-dire le plus grand des quatre termes $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$.

1. Montrer que m_n est inférieur ou égal aux nombres $p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$ et p_{n+4} .
En déduire que la suite (m_n) est croissante.

Établir de même que la suite (M_n) est décroissante.

2. Prouver que, pour tout entier naturel n :

$$m_0 \leq m_n \leq p_n \leq M_n \leq M_0.$$

3. Prouver que les suites (m_n) et (M_n) sont convergentes et que leurs limites respectivement notées m et M vérifient $m \leq M$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$p_{n+4} \leq \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m_n \quad \text{et} \quad p_{n+4} \leq \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m.$$

En appliquant la dernière inégalité à $p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}$, montrer que $M_{n+4} \leq \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m$.

5. En déduire que $M \leq m$, puis que $M = m$ et établir la convergence de la suite (p_n) .

Pour chercher : peut-on exprimer la limite de (p_n) en fonction de p_0, p_1, p_2 et p_3 ?

QCM

Chaque question est pourvue de plusieurs réponses qui peuvent être vraies ou fausses. L'utilisation de la calculatrice est interdite.

25 Gaël écrit à Gaston : « Dans le port de Logique il y a au moins 100 bateaux.

Si un voilier a un seul mât alors il a une coque blanche.

Deux chalutiers verts sont en réparation.

Aucun chalutier rouge ne pêche ni la sardine ni le maquereau. »

Gaston peut en déduire que dans le port de Logique :

A. Il pouvait y avoir un voilier ayant deux mâts.

B. Tous les voiliers ayant une coque blanche avaient un seul mât.

C. Aucun voilier n'était en réparation.

D. Si un chalutier pêchait la sardine alors il n'était pas rouge.

E. Si un chalutier pêchait le bar alors il était rouge.

26 A. $\{x \in \mathbb{R}, |x-1| > 3-2x\} =]2; +\infty[$.

B. $\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 5 > 0\} = \mathbb{R}$.

C. Pour tout couple de réels non nuls (x, y) :

$$x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

D. Pour tout couple de réels (x, y) :

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0.$$

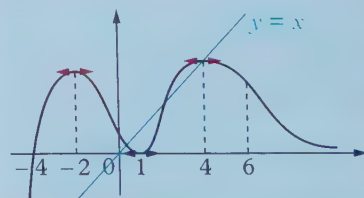
E. Pour tout couple de réels (x, y) :

$$xy - x^2 - 3y^2 \leq 0.$$

27 Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-4; +\infty[$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous. On précise que :

• pour tout $x \in [3; +\infty[$ $f(x) > 0$;

• la droite $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.



- A.** L'équation $f'(x) = 0$ admet au moins trois solutions sur $[-4; +\infty[$.
- B.** f' change de signe en $x = 1$.
- C.** $\{x \in [-4; 6], f(x) > x\}$ est un intervalle.
- D.** Pour tout $a \in [0; +\infty[$, l'équation $f(x) = a$ admet une solution dans l'intervalle $[-4; 6]$.
- E.** Il existe deux réels a et b tels que $a \neq b$ et $f(a) = f(b)$.

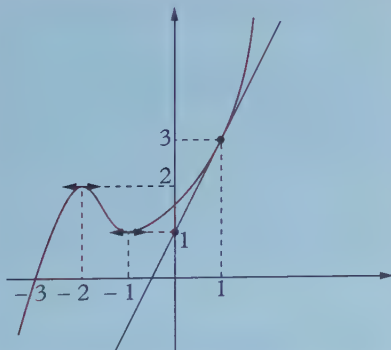
28 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$	4	1

Alors :

- A.** Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = a$ admet au moins une solution.
- B.** Pour tout $a \in]-\infty; 0[$, l'équation $f(x) = a$ admet exactement une solution.
- C.** La courbe de f admet deux asymptotes horizontales.
- D.** L'équation $f'(x) = 0$ possède au moins une solution.
- E.** Pour tout $x \in]3; +\infty[$, $f'(x) < 0$.

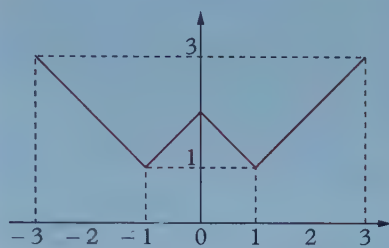
29 On considère la fonction f dérivable sur \mathbb{R} dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous. (On précise que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et que pour tout $x \in]-\infty; -3[$ $f(x) < 0$.)



Alors :

- A.** $f'(1) = 2$.
- B.** L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\{-3\}$.
- C.** L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq \frac{3}{2}$ est inclus dans $[0; +\infty[$.
- D.** L'ensemble $\{x \in [-3; 1], f'(x) \leq 0\} = [-2; -1]$.
- E.** L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \leq -1$ est $]-\infty; -3]$.

30 La fonction f « affine par morceaux » est définie sur $[-3; 3]$ et a la représentation graphique ci-dessous :



- A.** Il existe $\alpha \in]0; 3[$, $f([-a; a]) \subset [0; a]$.
- B.** Pour tout $\alpha \in]0; 3[$, $f([-a; a]) \subset [0; a]$.
- C.** Pour tout $\alpha \in [0; 2]$, il existe $\beta \in [-2; 2]$, $\alpha = f(\beta)$.
- D.** Pour tout $\alpha \in [0; 2]$, il existe $\beta \in [-2; 2]$, $\beta = f(\alpha)$.
- E.** Pour tout $\alpha \in [-3; 3]$, pour tout $\beta \in [-3; 3]$, $f([\alpha; \beta]) \subset [f(\alpha); f(\beta)]$.

31 Pour toute fonction f dérivable sur \mathbb{R} et vérifiant :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = 4 - f(-x - 2),$$

on a :

- A.** $f(-1) = 2$.
- B.** La courbe représentative de f admet un centre de symétrie.
- C.** La courbe représentative de f traverse sa tangente au point d'abscisse $x = -1$.
- D.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x - 1) = 4 - f(-1 - x)$.
- E.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -f'(-x - 2)$.

32 Soit \mathcal{F} l'ensemble des fonctions f réelles, dérivables sur \mathbb{R} et vérifiant :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+t}{2}\right) = \frac{1}{2} [f(x) + f(t)].$$

Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, on a :

- A.** $f(0) = 0$.
- B.** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$.
- C.** f est impaire.
- D.** $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, f'(x) = f'\left(\frac{x+t}{2}\right)$.
- E.** f' est une fonction constante.

33 On considère la fonction f définie sur $[0; 10]$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, et T_M la tangente à C au point M de C .

Alors :

- A.** Il existe un point M de C tel que T_M soit parallèle à l'axe des abscisses.
- B.** Il existe un point M de C tel que T_M soit parallèle à la droite (IJ) où $I(1; 0)$, $J(4; 3)$.
- C.** Il existe un point M de C tel que T_M ait pour coefficient directeur 8.

EXERCICES

- D.** Il existe deux points distincts M et N de C tels que T_M et T_N soient parallèles.
E. Il existe deux points distincts M et N de C tels que T_M et T_N soient perpendiculaires.

34 Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} . On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

Soit T_1 la droite d'équation $y = x + 1$ et T_2 la droite d'équation $y = 1 - x$.

Alors :

- A.** Si T_1 est tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse $x = 1$ alors $f'(1) = 1$.
B. Si T_1 est tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse $x = 1$ alors $f(1) = 1$.
C. Si T_2 est tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse $x = 3$ alors $f(3) = 4$.
D. Si T_1 est tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse $x = 1$ et T_2 est tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse $x = 3$ alors il existe $a \in]1 ; 3[$ tel que $f'(a) = 0$.
E. Si T_1 est tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse $x = 1$ et T_2 est tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse $x = 3$ alors f admet un maximum local en un point $b \in [1 ; 3]$.

35 Les fonctions suivantes sont dérivables en $x = 0$.

- A.** $x \mapsto x|x|$.
B. $x \mapsto |x| \sin x$.
C. $x \mapsto \sin |x|$.
D. $\begin{cases} x \mapsto x^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ x \mapsto x^3 - x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
E. $\begin{cases} x \mapsto x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ x \mapsto x - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

36 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x - \sin x.$$

Alors :

- A.** Pour construire la courbe représentative de f , il suffit d'étudier f sur $[0 ; \pi]$.
B. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = -4 \cos x \sin^2 x$.
C. f est décroissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
D. f est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$.
E. Pour tout k de \mathbb{N} , $f\left(\frac{\pi}{2} - k\pi\right) = f\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)$.

37 Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x| + 1}.$$

Alors :

- A.** f est paire.
B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.
C. f est dérivable en $x = 0$.

- D.** f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
E. f admet un minimum en $x = 0$.

38 Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sin x.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Alors :

- A.** f est périodique.
B. f est impaire.
C. Pour connaître \mathcal{C} il suffit d'étudier f sur $[0 ; \pi]$.
D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
E. f est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$.

39 Soit l'application $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x\sqrt{x^2 - x} \end{cases}$.

Alors :

- A.** g est continue en $x = 0$ et en $x = 1$.
B. g est dérivable en 0.
C. g est dérivable en 1.
D. $\forall x \in \left[-\frac{1}{2} ; 0\right], \frac{g(x)}{x^2} > 0$.
E. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{x^2} = -1$.

40 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

On note C la courbe de f dans un repère orthonormal. Alors :

- A.** f est croissante sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right]$.
B. Pour tout $x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right], f'(x) \geq 0$.
C. La droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.
D. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C au voisinage de $-\infty$.
E. La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote à C au voisinage de $-\infty$.

41 Pour toute fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que sa courbe représentative, dans un repère orthonormal, admette la droite d'équation $y = x - 1$ comme asymptote en $+\infty$, on a :

- A.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$.
D. Il existe $a \in [0 ; +\infty[$ tel que, pour tout $x \in [a ; +\infty[$, $f(x) \geq 5$.
E. Il existe $b \in [0 ; +\infty[$ tel que, pour tout $x \in [b ; +\infty[$, $f(x) \leq x$.

42 Soit $\mathbb{R}^{*+} = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

Pour toute application f de \mathbb{R}^{*+} dans \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^{*+} et vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on a :

A. $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad f'(x) \geq 0$.

B. Il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in [M; +\infty[\quad f'(x) \geq 0.$$

Dans le cas où $f'(x)$ admet une limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$:

C. Il est possible que ℓ soit nulle.

D. Il est possible que $\ell = \frac{5}{2}$.

E. Il est possible que $\ell = -1$.

43 A. $e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} = 2$.

B. $e^{\frac{1}{2} \ln 4} \times e^{-\ln \frac{1}{2}} = 4$.

C. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(e^x + 1) = x + \ln(e^{-x} + 1).$$

D. Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$:

$$\ln(x^3 + 1)^2 = 2 \ln(x^3 + 1).$$

E. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(e^{3x} + 1)^2 = 2 \ln(e^{3x} + 1).$$

44 A. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\ln(2^x) = x \ln 2$.

B. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\ln x = 2 \ln \sqrt{x}$.

C. Pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = -\ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$$

D. Pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\ln(x^2 + 4x + 4) = 2 \ln(x + 2).$$

E. Pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$[\ln(x+1)]^2 = \ln(2x+2).$$

45 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(1 + \sin^2 x) \text{ si } x \neq 0, \text{ et } f(0) = 0.$$

A. f est continue sur \mathbb{R} .

B. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

C. f est périodique de période π .

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

E. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} - f(x) \right)$.

46 Pour n entier naturel, $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur $I =]-1; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

et on désigne par \mathcal{C}_n , la courbe représentative de f_n .

A. Pour tout $n \geq 1$, la courbe \mathcal{C}_n passe par le point A de coordonnées $(1; \ln 2)$.

B. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0; 1]$, on a :

$$f_{n+1}(x) \geq f_n(x).$$

C. Pour tout $n \geq 1$, on a $f'_n(0) = 0$.

Pour tout $n \geq 1$, on désigne par a_n le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_n au point d'abscisse 1.

D. La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est géométrique.

47 Pour tout réel m , on considère l'équation (E_m) suivante, d'inconnue réelle x :

$$(E_m) : e^{2x} - 2e^x - m = 0.$$

A. L'unique valeur de m pour laquelle $x = 0$ est solution de l'équation (E_m) est $m = 0$.

B. Pour toute valeur de m , l'équation (E_m) admet au moins une solution.

C. Si $-1 < m < 0$, l'équation (E_m) a deux solutions positives.

D. Si $m > 0$, l'équation (E_m) a une unique solution.

48 Soit f et g les fonctions définies sur $I =]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) + e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^x - (x+1).$$

A. La fonction g est positive sur I .

B. Pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = \frac{e^{-x}}{x+1} g(x)$.

C. La fonction f est bijective de I sur $]0; +\infty[$.

D. Il existe un unique réel α dans I tel que $f(\alpha) = 0$.

49 Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(2t)}{t^2} dt$.

A. Pour tout $x > 0$, on a :

$$F'(x) = \frac{\ln(2x)}{x^2} - \ln(2).$$

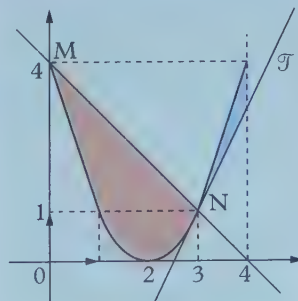
B. Pour tout $x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right]$, on a $F(x) < 0$.

C. Pour tout $x > 0$, on a :

$$F(x) = -\frac{\ln(2x)}{x} - \frac{1}{x} + \ln(2) + 1.$$

D. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln(2) + 1$.

50 On considère la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2 - 4x + 4$. On note $M(0; 4)$, $N(3; 1)$, \mathcal{T} la tangente à \mathcal{P} au point N , l'aire du domaine compris entre la parabole et (MN) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$ (domaine rouge sur la figure), J l'aire du domaine compris entre la parabole et \mathcal{T} et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 4$ (domaine bleu).



EXERCICES

Alors :

- A. L'équation de \mathcal{F} est $y = 2x - 6$.
 B. L'équation de la droite (MN) est $y = -x + 4$.
 C. $I = \int_0^3 (x^2 - 3x) dx$.
 D. $J = \int_3^4 (x-3)^2 dx$.
 E. $I = \frac{27}{2} J$.

51 Soit F la fonction définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt.$$

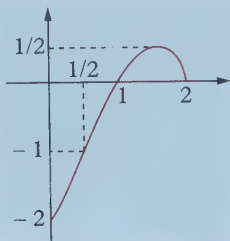
On ne cherchera pas à calculer directement F .

- A. La fonction F est positive et strictement croissante sur I .
 B. Pour tout $t \geq 0$, on a $\sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$.
 C. On a $\int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt = \frac{5}{4} - \left(x + \frac{5}{4}\right) e^{-x}$.
 D. Pour tout $x \in I$, on a $F(x) \leq \frac{5}{4}$.

52 Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} , on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal, $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Alors :

- A. Si \mathcal{C} est symétrique par rapport au point $I(1 ; 0)$ alors $\int_0^2 f(t) dt = 0$.
 B. Si \mathcal{C} est symétrique par rapport au point $I(1 ; 0)$ alors $\int_0^2 |f(t)| dt = 2 \int_0^1 |f(t)| dt$.
 Si \mathcal{C} a l'allure ci-dessous sur $[0 ; 2]$:

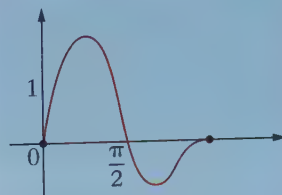


- C. $\int_0^2 f(t) dt \leq 0$.
 D. $\int_0^2 f(t) dt \geq -4$.
 E. $\int_0^2 f(t) dt = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt$.

53 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 4 \sin 2x \cos^2 \frac{x}{2}.$$

On donne ci-après sa représentation graphique sur $[0 ; \pi]$.



On a les résultats suivants :

- A. $\int_0^\pi f(x) dx \geq 0$.
 B. $\int_0^\pi f(x) dx = \int_\pi^{2\pi} f(x) dx$.
 C. $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$.
 D. $\int_0^\pi |f(x)| dx = \int_\pi^{2\pi} |f(x)| dx$.
 E. $\left| \int_0^\pi f(x) dx \right| = \int_0^\pi |f(x)| dx$.

54 A. $\int_0^\pi e^{\cos x} dx = \int_{-2\pi}^{-\pi} e^{\cos x} dx$.

B. $\int_0^\pi e^{\cos x} dx = \int_{-\pi}^0 e^{\cos x} dx$.

C. $\int_{-1}^0 x(x^2 + 1) dx = - \int_0^1 x(x^2 + 1) dx$.

D. La valeur moyenne de la fonction cosinus sur $[0 ; \pi]$ est égale à 0.

E. La valeur moyenne de la fonction exponentielle sur $[0 ; 1]$ est égale à e .

55 On considère l'équation différentielle :

$$y'(x) - 2y(x) = 0 \quad (E_1).$$

A. Les solutions de (E_1) sont les fonctions

$$y(x) = Ke^{\frac{x}{2}}, \text{ où } K \in \mathbb{R}.$$

B. L'équation (E_1) admet une unique solution vérifiant la condition $y(0) = 2$ et c'est la fonction $y(x) = e^{2x} + 1$.

On considère l'équation :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad u'(x) + u(x) = 2e^{-3x} \quad (E_2).$$

C. Une fonction f vérifie l'équation (E_2) si et seulement si la fonction g définie, par $g(x) = e^{3x}f(x) + 1$, est solution de l'équation (E_1) .

D. La fonction $f(x) = 2e^{-x} - e^{-3x}$ est l'unique fonction u vérifiant l'équation (E_2) et la condition $u(0) = 1$.

56 A. $y = ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$, est solution générale réelle de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$.

B. $y = -\frac{1}{2}x^2$ est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2 - x$.

C. $y = -\frac{1}{2}(x^2 + e^{-2x})$ est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2 - x$.

D. $y = -2 \cos x + \sin x$ est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 5 \cos x$.

57 Les suites suivantes sont divergentes :

A. $\left(\cos \frac{1}{n+1}\right)$.

B. $\left(\frac{\sin n}{\ln(n+2)}\right)$.

C. $\left(\frac{e^n}{n+1}\right)$.

D. $\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)$.

E. $\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(n+1)$.

58 Pour toutes suites réelles (u_n) et (v_n) , strictement positives, on a :

A. Si (u_n) et (v_n) sont décroissantes alors $(u_n v_n)$ est croissante.

B. Si (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante alors $(u_n + v_n)$ est monotone.

C. $(u_n v_n)$ ne peut converger vers 0.

D. Si (u_n) converge vers 2 et (v_n) est croissante alors $(u_n + v_n)$ est croissante.

E. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et (u_n) est décroissante alors (u_n) converge vers 1.

59 Pour toute suite numérique (u_n) , on a :

A. Si pour tout n de \mathbb{N} , $1 \leq u_n \leq 2$ alors (u_n) est convergente.

B. Si pour tout n de \mathbb{N} , $u_n - 3 \leq \frac{1}{n+1}$ alors (u_n) converge vers 3.

C. Si (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ alors (u_n) converge.

D. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$ alors (u_n) converge.

E. Si (u_n) converge vers 0 alors (u_n) est une suite croissante et négative ou décroissante et positive.

60 Soit (u_n) la suite numérique définie par :
 $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

Alors :

A. La suite (u_n) est croissante.

B. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq u_{2n+1}$.

C. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$.

D. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n-1} \leq u_{2n+1}$.

E. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n+1} \leq 2$.

61 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite géométrique de raison

$\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_1 = 2$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = \ln(u_n)$.

A. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = \frac{2}{3^n}$.

B. La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est arithmétique, de raison $-\ln(3)$.

C. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 3 \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

D. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k = \frac{1}{n} (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \ln(2) - \frac{n}{2} \ln(3).$$

62 Soit a un nombre réel et soit (u_n) la suite

définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{an + (-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$.

Alors :

A. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, (u_n) est monotone.

B. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, (u_n) est bornée.

C. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, (u_n) est convergente.

D. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

E. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

63 Pour toute suite réelle (u_n) on a :

A. Si (u_n) n'est pas minorée, elle est majorée.

B. Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs, elle est convergente.

C. Si (u_n) est positive et strictement croissante,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

D. Si (u_n) est bornée, (u_n) converge.

E. Si (u_n) converge, (u_n) prend un nombre fini de valeurs.

Activité 1 → Un peu de trigonométrie

OBJECTIF

S'assurer des connaissances de base en trigonométrie.

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Choisir la ou les réponses justes.

Si $M(0 ; -1)$, une mesure de $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ en radians est :

- a. 0 ; b. $\frac{\pi}{2}$; c. $\frac{3\pi}{2}$; d. $-\frac{9\pi}{2}$.

2. Choisir la ou les réponses justes.

Si $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$, une mesure de $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ en radians est :

- a. $\frac{7\pi}{6}$; b. $-\frac{5\pi}{6}$; c. $-\frac{\pi}{3}$; d. $\frac{19\pi}{6}$.

3. Déterminer à l'aide du cercle trigonométrique des réels θ tels que :

a. $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{1}{2}$;

b. $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c. $\cos \theta = \frac{1}{2}$.

4. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$;

b. $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$;

c. $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$;

d. $\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

5. Le réel a de $[0 ; \pi]$ est tel que $\cos a = 0,2$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. $\sin a = 0,8$;

b. $\sin a > 0,9$;

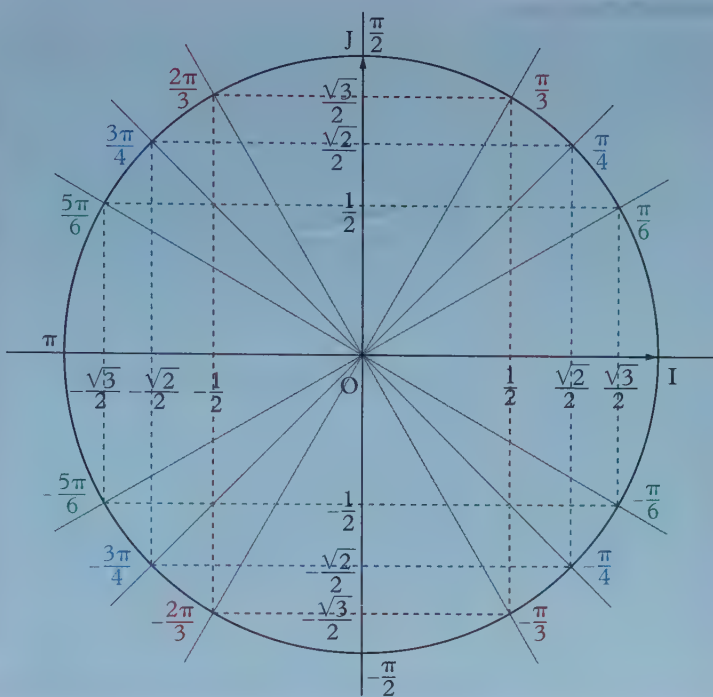
c. $\cos 2a = 0,4$;

d. $\cos 2a = -0,92$.

Rappels de trigonométrie

Valeurs remarquables des cosinus et sinus

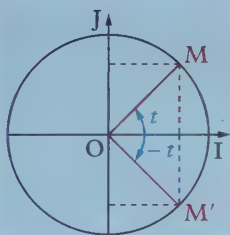
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



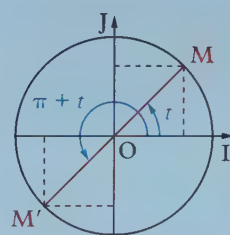
Angles associés

Pour tout réel t :

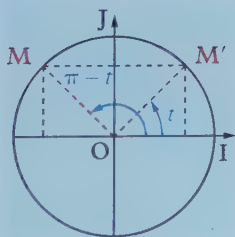
- $\cos(-t) = \cos t$
 $\sin(-t) = -\sin t$



- $\cos(t + \pi) = -\cos t$
 $\sin(t + \pi) = -\sin t$



- $\cos(\pi - t) = -\cos t$
 $\sin(\pi - t) = \sin t$

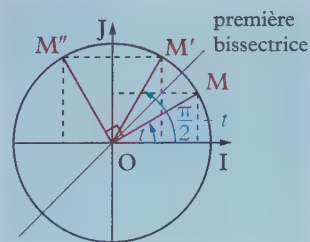


- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$

- $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$

- $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$



Formules d'addition

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

Activité 2 → Un nouvel ensemble

OBJECTIF

Introduire les nombres complexes.

A ■ Insuffisance de \mathbb{R}

1. Rappeler la signification des ensembles de nombres \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} et \mathbb{R} , et les ordonner à l'aide du symbole d'inclusion « \subset ».
2. En fait, chaque inclusion peut être motivée par le besoin de dépasser un obstacle... Proposer une équation (des plus simples) que l'on peut résoudre dans \mathbb{Z} mais pas dans \mathbb{N} , une autre que l'on peut résoudre dans \mathbb{D} mais pas dans \mathbb{Z} , une troisième ..., une quatrième ..., et enfin une cinquième que l'on ne peut pas résoudre dans \mathbb{R} .

B ■ Vers un nouvel ensemble

En 1545, le mathématicien italien Jérôme Cardan publie *l'Ars Magna*, ouvrage d'algèbre dans lequel il établit des formules de résolution pour certaines équations de degré 3.

À sa suite, Raphaël Bombelli, essayant d'appliquer ces formules à d'autres types d'équation de degré 3, est amené à introduire de nouveaux « nombres », comme « $\sqrt{-1}$ » dont le carré serait ... -1 !

Au XVII^e siècle, Descartes qualifie ces nombres « d'imaginaires » et au XVIII^e siècle Euler adopte la notation i en remplacement de $\sqrt{-1}$, symbole qui pose des problèmes de calcul (aurait-on $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$ ou $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$?)

On désigne donc par i un nouveau « nombre » tel que $i^2 = -1$.

1. En utilisant les mêmes règles de calcul que dans \mathbb{R} , calculer :

$$(2i)^2, (-2i)^2, (4i)^2, (-i)^2, (i\sqrt{3})^2, (1+2i)^2, (-1+2i)^2.$$

2. Montrer que si l'on se place dans un ensemble contenant tous les nombres réels mais aussi ces petits nouveaux comme i , $2i$, $-5i$, $1+2i$, etc., et en conservant les mêmes règles de calcul que dans \mathbb{R} , on peut désormais trouver des solutions aux équations suivantes qui n'ont pas de solutions réelles.

- | | |
|---|-------------------------|
| a. $x^2 + 4 = 0$ (trouver deux solutions) ; | b. $x^2 + 1 = 0$; |
| c. $x^2 + 2 = 0$; | d. $2x^2 + 5 = 0$; |
| e. $(x+1)^2 + 4 = 0$; | f. $(2x+1)^2 + 4 = 0$. |

C ■ Une légitimité graphique

Il a fallu attendre le début du XIX^e siècle avec Wessel, Argand et Gauss pour que ces nouveaux nombres gagnent leur « légitimité ». Tout comme, à tout réel x , on associe le point d'abscisse x sur une droite munie d'un repère, à tout nombre s'écrivant $a+bi$ (avec a et b réels), on associe le point M de coordonnées $(a; b)$ dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. Placer les points correspondant aux nombres $1+2i$, $1-2i$, $-1+2i$, $-1-2i$.
2. Placer les points correspondant aux solutions trouvées à la question B2.

Activité 3 → Repérage dans le plan

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

A ■ Coordonnées polaires

1. Lire graphiquement les coordonnées polaires des points A, B, C, D, E, F, G, H.

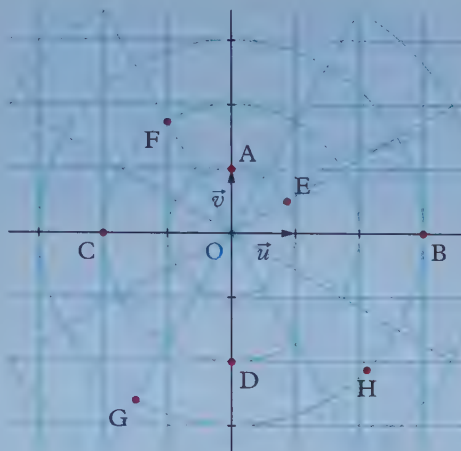
2. Quel est l'ensemble des points M de coordonnées polaires $[r ; \theta]$ tels que :

a. $r = 2$; b. $r \leq 3$;

c. $\theta = \frac{\pi}{6} (2\pi)$; d. $\theta = \pi (2\pi)$?

3. Caractériser par des conditions sur r ou θ l'ensemble des points $M[r ; \theta]$ suivant :

- a. le cercle de centre O et de rayon 1 ;
- b. la demi-droite $]OH)$;
- c. l'axe des ordonnées privé de O.



OBJECTIF

Revoir le repérage polaire. Interpréter géométriquement la multiplication par i .

B ■ Coordonnées polaires et cartésiennes

1. a. Construire, à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée, les points

$A\left[2 ; \frac{\pi}{6}\right]$ et $B\left[3 ; \frac{3\pi}{4}\right]$.

b. Déterminer les coordonnées cartésiennes de A et B.

2. Soit $C(-1 ; -\sqrt{3})$ et $D\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$. Déterminer les coordonnées polaires de ces deux points.

C ■ Coordonnées polaires et affixes

Soit M un point d'affixe z et M' , d'affixe z' , son image par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Dans cette question, on prend $z = \sqrt{3} + i$.

a. Déterminer les coordonnées polaires de M et M' .

b. En déduire les coordonnées cartésiennes de M' .

c. Déterminer z' et vérifier que $z' = iz$.

2. Soit $[r ; \theta]$ les coordonnées polaires de M.

Montrer comme à la question 1 que $z' = iz$.

3. Soit z'' l'affixe de l'image M'' de M' par R.

Exprimer z'' en fonction de z' puis en fonction de z . Quel résultat retrouve-t-on ?

Point Info

Dans son *Traité des quaternions* (1867), Peter Tait écrit : « Nous sommes ainsi en droit de conclure que $\sqrt{-1}$ est un opérateur, dont l'application agit d'une manière analogue à celle d'une manivelle qui ferait tourner d'un angle de 90° dans le sens positif. »

1. Forme algébrique

A ■ Ensemble \mathbb{C} des nombres complexes

Théorème 1 et définition 1 →

ADMIS

Il existe un ensemble noté \mathbb{C} , contenant \mathbb{R} , tel que :

- \mathbb{C} possède un élément noté i dont le carré i^2 est égal à -1 ;
- tout élément de \mathbb{C} s'écrit de manière unique $a + bi$ avec a et b réels.

Les éléments de \mathbb{C} sont appelés les nombres complexes. L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $a + bi$ avec a et b réels, est appelée la forme algébrique de z ; a est la partie réelle de z et b sa partie imaginaire.

Notation

$$a = \operatorname{Re}(z)$$

$$b = \operatorname{Im}(z)$$

Exemples :

- $z = 4 - 2i$ a pour partie réelle $\operatorname{Re}(z) = 4$ et partie imaginaire $\operatorname{Im}(z) = -2$;
- Si $\operatorname{Im}(z) = 0$ et $\operatorname{Re}(z) = -3$, on a $z = -3 + 0i$ que l'on écrit $z = -3$. C'est un réel.
- Si $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) = 2$, on a $z = 0 + 2i$, que l'on écrit $z = 2i$.

On définit sur \mathbb{C} une addition et une multiplication dont on admet qu'elles possèdent les mêmes propriétés que celles de \mathbb{R} (elles « prolongent » celles de \mathbb{R} à \mathbb{C}). En pratique, il suffit d'appliquer les propriétés de calcul usuelles dans \mathbb{R} en remplaçant i^2 par -1 . Par exemple :

$$(1 - i)(2 + 3i) = 2 + 3i - 2i - 3i^2 = 2 + i + 3 = 5 + i.$$

Définition 2 →

Si $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ avec a, b, a', b' réels, on définit :

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i \quad \text{et} \quad zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

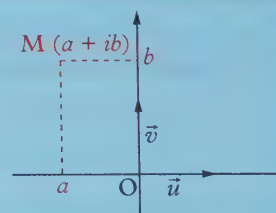
B ■ Représentation graphique

Désormais le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition 3 →

• À tout nombre complexe $a + bi$ où a et b sont réels, on associe le point $M(a ; b)$ appelé point image de z .

• Réciproquement, à tout point $M(a ; b)$, on associe le nombre complexe $a + bi$ appelé affixe de M .



Notation

Si M a pour affixe z , on note $M(z)$.

Propriété 1 →

Deux nombres complexes sont égaux :

- si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire ;
- si et seulement si ils ont le même point image.

Remarques

- Un nombre complexe est **réel** si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, ce qui revient à dire que son point image est situé sur l'axe des abscisses.
- Un nombre complexe est dit « **imaginaire pur** » si et seulement si sa partie réelle est nulle, ce qui revient à dire que son point image est situé sur l'axe des ordonnées.
- Soit $M(z)$, $M'(z')$ et α et β des **réels** tels que $\alpha + \beta \neq 0$. L'affixe du barycentre de (M, α) , (M', β) est $\frac{\alpha z + \beta z'}{\alpha + \beta}$; en particulier, l'affixe du milieu de $[MM']$ est $\frac{z + z'}{2}$.

→ DÉMONSTRATION

■ Propriété 1

C'est une conséquence directe de l'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique et de l'unicité des coordonnées cartésiennes d'un point dans un repère donné.

→ APPLICATIONS

Exercice 1 Représenter des nombres complexes, calculer des affixes

- Placer les points A, B, C, D, E d'affixes $a = 3 + \frac{3}{2}i$, $b = 2 - i$, $c = 4$, $d = -2i$, $e = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Calculer l'affixe du milieu I de [BD].

Solution

1. On connaît les coordonnées de ces points :

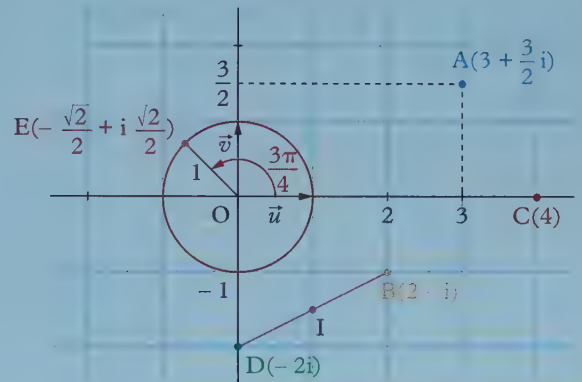
$$A\left(3; \frac{3}{2}\right), B(2; -1), C(4; 0), D(0; -2).$$

Comme $E\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, on reconnaît que

$$E\left(\cos \frac{3\pi}{4}; \sin \frac{3\pi}{4}\right); \text{ ses coordonnées polaires}$$

sont donc $\left[1; \frac{3\pi}{4}\right]$ ce qui permet de placer E.

$$2. \text{ L'affixe de I est } \frac{b+d}{2} = 1 - \frac{3}{2}i.$$



voir aussi exercices n° 5 à 7

Exercice 2 Calculer dans \mathbb{C}

Écrire chacun des nombres complexes sous forme algébrique.

- $z = (1 - i)(1 - 2i)$; $z' = (2 - 3i)^2$; $z'' = (1 + 2i)(1 - 2i)$.
- $z = (1 + i)^2$; $z' = (1 + i)^4$; $z'' = (1 + i)^{1000}$.

Solution

- $z = 1 - 2i - i + 2i^2 = 1 - 2i - i - 2 = -1 - 3i$;
 $z' = 4 - 12i + 9i^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$ et $z'' = 1 - 4i^2 = 5$.
- $z = 1 + 2i + i^2 = 2i$; $z' = z^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$;
 $z'' = (1 + i)^4 \times 250 = z'^{250} = (-4)^{250} = 4^{250}$.

Remarque

Les propriétés de calcul de l'addition et de la multiplication dans \mathbb{C} prolongeant celles de \mathbb{R} , on peut utiliser, comme dans \mathbb{R} , les identités remarquables.

voir aussi exercices n° 1 à 3

Exercice 3 Reconnaître des ensembles de points

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : **a.** z^2 soit réel ; **b.** z^2 soit imaginaire pur.

Solution

Soit $M(x; y)$, alors $z = x + yi$ avec x et y réels et $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Comme $x^2 - y^2$ et $2xy$ sont réels, z^2 est sous forme algébrique et $\text{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ et $\text{Im}(z^2) = 2xy$.

- z^2 est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. Or $2xy = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $y = 0$. L'ensemble des points M tels que z^2 est réel est la réunion des deux axes de coordonnées.
- z^2 est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle c'est-à-dire $x^2 - y^2 = 0$. L'ensemble cherché est la réunion des droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.

voir aussi exercice n° 10

2. Forme trigonométrique

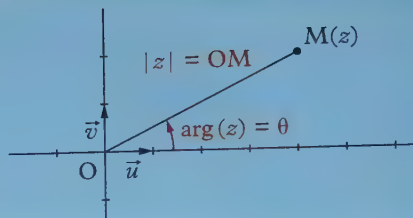
A ■ Module et argument

Définition 4 → Soit z un nombre complexe et M son point image.

- On appelle **module** de z le nombre réel positif égal à la distance OM .
- Si $z \neq 0$, on appelle **argument** de z tout nombre θ , mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Notations

$|z|$ est le module de z ;
 $\arg(z)$ est un argument de z .



Exemples :

- Le point image de i est $A(0 ; 1)$; par conséquent :

$$|i| = OA = 1$$

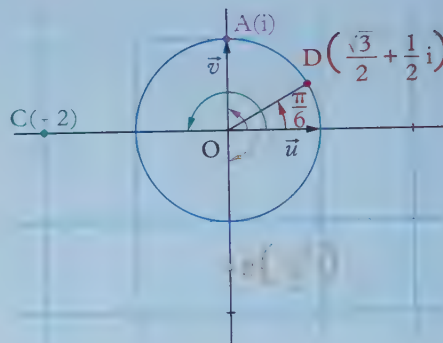
$$\text{et } \arg(i) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi).$$

$$\bullet \left| -\frac{3}{2}i \right| = OB = \frac{3}{2} ; \arg\left(-\frac{3}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi).$$

$$\bullet |-2| = OC = 2 ; \arg(-2) = \pi \quad (2\pi).$$

$$\bullet \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right| = OD = 1 ;$$

$$\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = (\vec{u}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{6} \quad (2\pi).$$



Propriété 2 → Deux nombres complexes z et z' non nuls sont égaux si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z') \quad (2\pi)$.

Remarques

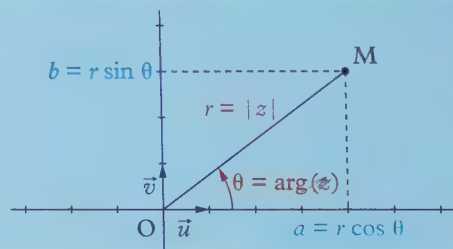
- 0 n'a pas d'argument.
- $|z| = 0$ si et seulement si $OM = 0$ c'est-à-dire $M = O$ ou encore $z = 0$.
- Si $z \neq 0$, $|z|$ et $\arg(z)$ sont les coordonnées polaires du point M image de z .
- Si z est un réel, le module de z est égal à la valeur absolue du réel z ; ceci justifie la notation employée. Un argument d'un réel z est 0 si $z > 0$, et π si $z < 0$.

Cas particuliers

- z est un réel non nul si et seulement si $\arg(z) = 0 \quad (\pi)$.
- z est imaginaire pur non nul si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

Propriété 3 → Soit $z = a + bi$ (a et b réels).

- Son module est $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Si z est non nul, un argument θ de z est tel que :
 $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$.



→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 2

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls. Leurs points images M et M' sont donc distincts de O . Alors $z = z'$ si et seulement si M et M' sont confondus, ce qui équivaut à dire que $OM = OM'$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \pmod{2\pi}$. Ainsi $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z') \pmod{2\pi}$.

■ Propriété 3

Soit M le point image de z . Alors M a pour coordonnées $(a; b)$ donc $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Si $z \neq 0$, M est distinct de O et a pour coordonnées polaires $[r; \theta]$.

Un résultat de première S donne alors $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$.

→ APPLICATIONS

Exercice 4 Déterminer des ensembles de points

Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a. $|z| = 5$?

b. $\arg(z) = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$?

c. $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$?

Solution

a. $|z| = 5 \Leftrightarrow OM = 5$. L'ensemble de ces points M est le cercle de centre O et de rayon 5.

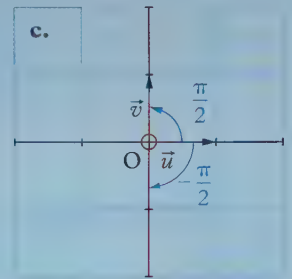
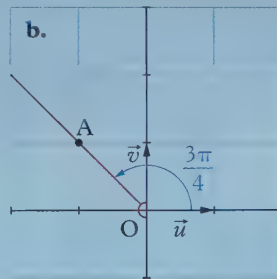
b. $\arg(z) = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

L'ensemble des points M est la demi-droite $]OA)$, avec A le point de coordonnées $(-1; 1)$.

c. $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ équivaut à :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

L'ensemble des points M est l'axe des ordonnées privé de l'origine O .



voir aussi exercices n° 14 à 17

Exercice 5 Déterminer les module et argument d'un nombre complexe

Déterminer les module et argument de z :

a. $z = -\sqrt{3} - i$;

b. $z = \sin \alpha + i \cos \alpha$.

Solution

a. $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$.

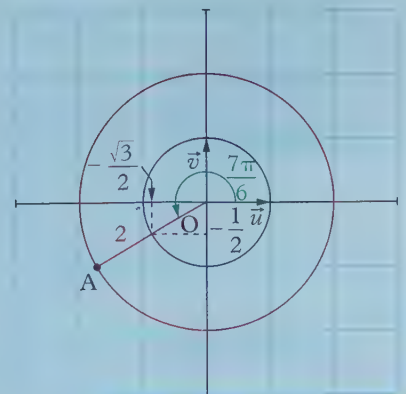
Si θ est un argument de z , $-\sqrt{3} = 2 \cos \theta$ et $-1 = 2 \sin \theta$.

Donc $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{1}{2}$. On en déduit, à l'aide du cercle

trigonométrique, que $\theta = \frac{7\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

b. $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ donc :

$$|z| = 1 \text{ et } \arg(z) = \frac{\pi}{2} - \alpha \pmod{2\pi}.$$



voir aussi exercices n° 18 à 21

B ■ Forme trigonométrique

Propriété 4 et
définition 5 →

- Pour tout nombre complexe non nul z ,
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$
 avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.

Cette écriture est appelée la **forme trigonométrique** de z .

- Réciproquement, si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec r et θ réels et $r > 0$, alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.

Corollaire 1 →

- Pour tous nombres complexes z et z' , $|zz'| = |z||z'|$.
Si z et z' sont non nuls, $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$.

Remarque

On en déduit que $|z^2| = |z|^2$ et, si $z \neq 0$, $\arg(z^2) = 2 \arg(z) \pmod{2\pi}$.
De manière générale, on montre par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \arg(z) \pmod{2\pi}$, si $z \neq 0$.

C ■ Notation exponentielle

Posons $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

D'une part, du corollaire 1, on déduit que $f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$.

D'autre part, si **on admet** que l'on peut prolonger les propriétés de la dérivation de la façon suivante – une fonction g donnée par $g(x) = a(x) + ib(x)$, où a et b sont des fonctions réelles de la variable réelle x dérivables sur \mathbb{R} , est dérivable sur \mathbb{R} avec $g'(x) = a'(x) + ib'(x)$ – on obtient $f'(\theta) = -\sin \theta + i \cos \theta = if(\theta)$.
Ainsi, f serait solution de l'équation différentielle $y' = iy$ avec $f(0) = 1$.
Par analogie avec le cas réel, on notera $f(\theta) = e^{i\theta}$.

Définition 6 →

Pour tout réel θ , on pose :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

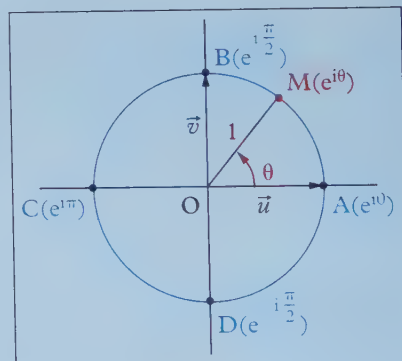
Autrement dit, $e^{i\theta}$ est le complexe de module 1 et d'argument θ .

Exemples :

- $e^{i0} = 1$; • $e^{i\pi} = -1$; • $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; • $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Remarque

$e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ équivaut à $\theta = \theta' \pmod{2\pi}$.

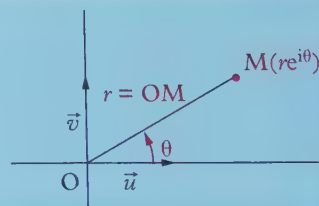


Propriété 5 et
définition 7 →

- Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous **forme exponentielle** :

$$z = re^{i\theta} \text{ où } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

- Réciproquement, si $z = re^{i\theta}$ avec r et θ réels et $r > 0$, $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.



Propriété 6 →

- Pour tous réels θ et θ' , $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$.
Pour tout entier relatif n , $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 4

Soit z un complexe non nul de module r et d'argument θ . Alors $z = a + ib$ avec $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$. Donc $z = r \cos \theta + i r \sin \theta$ soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Réciproquement, supposons que $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r > 0$.

Alors $z = r \cos \theta + i r \sin \theta$ donc $|z| = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{r^2} = r$ car $r > 0$. On a donc bien $r = |z|$.

De plus, z est non nul donc z s'écrit sous forme trigonométrique $r(\cos \theta' + i \sin \theta')$ où $\theta' = \arg(z)$ (2π).

On a alors $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z = r(\cos \theta' + i \sin \theta')$ avec $r \neq 0$.

On en déduit que $\cos \theta + i \sin \theta = \cos \theta' + i \sin \theta'$ puis, par unicité de l'écriture sous forme algébrique, que $\cos \theta = \cos \theta'$ et $\sin \theta = \sin \theta'$. Finalement $\theta = \theta' + 2k\pi$ c'est-à-dire $\theta = \arg(z)$ (2π).

■ Corollaire 1

Si z ou z' est nul, l'égalité $|zz'| = |z||z'|$ est vérifiée car les deux membres sont nuls.

Supposons z et z' non nuls et notons r, r', θ et θ' leurs modules et arguments respectifs.

Alors $zz' = r(\cos \theta + i \sin \theta) \times r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$

donc $zz' = rr'(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta)$.

On reconnaît que $zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$ où $rr' > 0$ puisque $r > 0$ et $r' > 0$.

Par la propriété 4, on en déduit que $|zz'| = rr'$ et $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$ (2π).

■ Propriété 5

Il suffit de réécrire la forme trigonométrique de z en utilisant la notation exponentielle.

■ Propriété 6

Par le corollaire 1,

$$|e^{i\theta}e^{i\theta'}| = |e^{i\theta}||e^{i\theta'}| = 1 \times 1 = 1 \text{ et } \arg(e^{i\theta}e^{i\theta'}) = \arg(e^{i\theta}) + \arg(e^{i\theta'}) \text{ donc } \arg(e^{i\theta}e^{i\theta'}) = \theta + \theta' \text{ (} 2\pi \text{)}.$$

Par conséquent $e^{i\theta}e^{i\theta'} = 1 \times e^{i(\theta + \theta')} = e^{i(\theta + \theta')}$. Par récurrence, on montre que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

→ APPLICATION

Exercice 6 Écrire sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle

1. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes 8 ; -3 ; $5i$; $-3i$.

2. Écrire sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z = 2 + 2i$.

Solution

$$1. 8 = 8e^{i0}; -3 = 3e^{i\pi}; 5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}}; -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Pour déterminer le module et un argument de ces différents nombres complexes, nécessaires à l'écriture de leur forme exponentielle, on utilise la position de leurs images respectives dans le plan complexe.

2. On reconnaît $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ sous sa forme trigonométrique, soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ qui est sa forme exponentielle.

$z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ car $|2 + 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Si θ est un argument de $2 + 2i$:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

Donc $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$ sous forme trigonométrique et $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ sous forme exponentielle.

voir aussi exercices n° 22 à 24, 53, 54

3. Conjugué, inverse et quotient

A ■ Conjugué

Définition 8 → Soit $z = a + bi$ avec a et b réels.

Le nombre complexe conjugué de z , noté \bar{z} , est le nombre complexe $a - bi$.

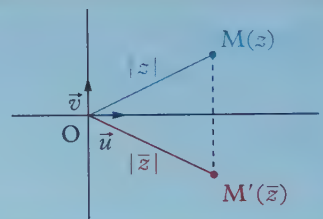
Exemples :

- $\overline{2+3i} = 2-3i$ et $\overline{2-3i} = 2+3i$. Plus généralement, le conjugué ($\bar{\bar{z}}$) de \bar{z} est z lui-même. Pour cette raison, on dit que z et \bar{z} sont conjugués l'un de l'autre.
- $\bar{5} = 5$, et de même le conjugué de tout réel est lui-même.
- $\bar{i} = -i$, et plus généralement, le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé.

Propriété 7 → Un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.
Il est imaginaire pur si et seulement si $z + \bar{z} = 0$.

- Propriété 8** →
- Pour tout nombre complexe z , les points d'affixes z et \bar{z} sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Par suite,

$$|\bar{z}| = |z|$$
 et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$ si $z \neq 0$.
 - Pour tout réel θ , $e^{i\theta} = \overline{e^{-i\theta}}$.



- Propriété 9** → Pour tous complexes z et z' :
- $z\bar{z} = |z|^2$; $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$; $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$.
 - $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$.

B ■ Inverse

Théorème 2 définition 9 → Si z est un nombre complexe non nul, il existe un unique complexe z' tel que $zz' = 1$. Ce nombre complexe z' est appelé inverse de z et noté $\frac{1}{z}$.

En pratique, pour écrire $\frac{1}{z}$ sous forme algébrique, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple :

$$\frac{1}{2-3i} = \frac{1 \times (2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{4-9i^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

- Propriété 10** →
- Si z est non nul, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$.
 - Pour tout réel θ , $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 7

Soit $z = a + ib$ avec a et b réels, alors $\bar{z} = a - ib$.

- $z = \bar{z}$ équivaut à $2ib = 0$ soit encore à $b = 0$. On en déduit que $z = \bar{z}$ si et seulement si z est réel.
- De même, $z = -\bar{z}$ équivaut à $a = 0$ ce qui revient à dire que z est imaginaire pur.

■ Propriété 8

Si z a pour image $M(a; b)$, \bar{z} a pour image $M'(a; -b)$. Les propriétés annoncées sont les conséquences des propriétés de la symétrie axiale.

■ Propriété 9

Soit $z = a + ib$. Alors $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Les autres propriétés s'obtiennent de la même façon en considérant z et z' sous forme algébrique.

■ Théorème 2

Si $z \neq 0$, $\bar{z} \neq 0$. Alors $z\bar{z}' = 1$ équivaut à $\bar{z}zz' = \bar{z}$ qui s'écrit encore $|z|^2 z' = \bar{z}$.

Comme $z \neq 0$, $|z|^2 \neq 0$ et finalement $z\bar{z}' = 1$ équivaut à $z' = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$. Ainsi, z' existe et est unique.

■ Propriété 10

- Soit $z \neq 0$. Calculons de deux façons $\left|z \times \frac{1}{z}\right|$ et $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right)$:

– d'une part $z \times \frac{1}{z} = 1$ donc $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = 1$ et $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = 0 \pmod{2\pi}$;

– d'autre part, par le corollaire 1, $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right|$ et $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) \pmod{2\pi}$.

Par suite, $|z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = 1$ et $\arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \pmod{2\pi}$ d'où $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$.

- $\left(\frac{1}{z}\right) \times \bar{z} = \frac{1}{z} \times \bar{z}$ par la propriété 9. Par suite $\left(\frac{1}{z}\right) \times \bar{z} = \frac{1}{z} \times \bar{z} = \bar{1} = 1$ d'où l'on déduit $\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\bar{z}}$.
- On en déduit que l'inverse de $e^{i\theta}$ a pour module 1 et argument $-\theta$; il s'agit donc de $e^{-i\theta}$.

→ APPLICATION

Exercice 7 Découvrir j ; utiliser les propriétés du conjugué

On note j le nombre complexe $-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminer $|j|$ et $\arg(j)$.
2. Comparer j^2 et \bar{j} puis en déduire le calcul de $1 + j + j^2$ et j^3 .

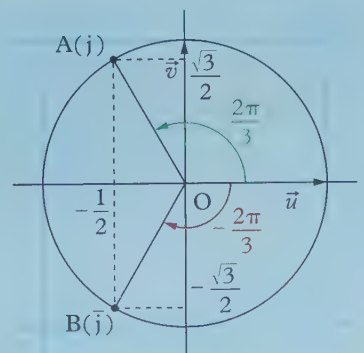
Solution

1. $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, donc $|j| = 1$ et $\arg(j) = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

2. • $j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$.

• $1 + j + j^2 = 1 + j + \bar{j} = 1 + 2 \operatorname{Re}(j) = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

• $j^3 = jj^2$ avec $j^2 = \bar{j}$, donc $j^3 = j\bar{j} = |j|^2 = 1$.



voir aussi exercice n° 37

C ■ Quotient

Définition 10 →

Si z est non nul, on définit le quotient $\frac{z'}{z}$ par $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$.

Pour rendre réel le dénominateur d'un quotient, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple :

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i) \times (1+i)}{(1-i) \times (1+i)} = \frac{1+3i+2i^2}{1-i^2} = \frac{-1+3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Propriété 11 →

- Si $z \neq 0$, $\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$; $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$.
- Si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$, $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) \pmod{2\pi}$.
- Pour tous réels θ et θ' , $\frac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i(\theta' - \theta)}$.

Exemple :

$$\frac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3}{2} \times \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3}{2} \times e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

4. Équation du second degré

Propriété 12 →

Pour tous complexes z et z' , $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.

Exemples :

- $z^2 = 4 \Leftrightarrow (z-2)(z+2) = 0$. L'équation possède deux solutions réelles 2 et -2.
- $z^2 = -4$ équivaut successivement à $z^2 = (2i)^2$ puis à $(z-2i)(z+2i) = 0$. Cette équation, sans solution dans \mathbb{R} , a deux solutions complexes 2i et -2i.

Propriété 13 →

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$, admet toujours des solutions dans \mathbb{C} . Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant.

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution réelle $z = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple :

L'équation $z^2 + z + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$. Elle a donc deux solutions complexes conjuguées : $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. On reconnaît j et \bar{j} (voir exercice 7 des applications du cours, p. 261).

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 11

En appliquant les propriétés déjà établies pour le produit et pour l'inverse, on obtient les résultats annoncés pour le quotient :

$$\text{Si } z \neq 0, \left(\frac{z'}{z}\right) = \overline{z' \times \frac{1}{z}} = \bar{z}' \times \left(\frac{1}{z}\right) = \bar{z}' \times \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}} \text{ et } \left|\frac{z'}{z}\right| = \left|z' \times \frac{1}{z}\right| = |z'| \times \left|\frac{1}{z}\right| = |z'| \times \frac{1}{|z|} = \frac{|z'|}{|z|}.$$

$$\text{Si } z \neq 0 \text{ et } z' \neq 0, \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg\left(z' \times \frac{1}{z}\right) = \arg(z') + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

$$\text{De même, } \frac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i\theta'} \times \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta'} \times e^{-i\theta} = e^{i(\theta' - \theta)}.$$

■ Propriété 12

$zz' = 0$ si et seulement si $|zz'| = 0$ ou encore $|z||z'| = 0$. Ce produit de deux réels est nul si et seulement si l'un des deux est nul, c'est-à-dire $|z| = 0$ ou $|z'| = 0$, ce qui équivaut à $z = 0$ ou $z' = 0$.

■ Propriété 13

La forme canonique du trinôme $az^2 + bz + c$ (a, b et c réels, $a \neq 0$) est $a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

- Si $\Delta \geq 0$, on retrouve les résultats vus en classe de première.
- Si $\Delta < 0$ alors $-\Delta > 0$. On peut écrire $-\Delta = (\sqrt{-\Delta})^2$.

$$\text{On a alors } az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - i^2\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right).$$

$$\text{Les solutions de l'équation sont donc } -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

→ APPLICATIONS

Exercice 8 Résoudre une équation du premier degré dans \mathbb{C}

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z : $(1 - i)z - 3 + 2i = 2z$.

Solution

$(1 - i)z - 3 + 2i = 2z$ équivaut à $(-1 - i)z = 3 - 2i$ soit :

$$z = \frac{3 - 2i}{-1 - i} = \frac{(3 - 2i)(-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)} = \frac{-1 + 5i}{2}.$$

voir aussi exercices n° 39 à 41

Exercice 9 Résoudre une équation du second degré dans \mathbb{C}

Résoudre l'équation $z^2 + 3z + 5 = 0$ à l'inconnue complexe z .

Solution

Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = -11$. L'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-3 - i\sqrt{11}}{2} = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

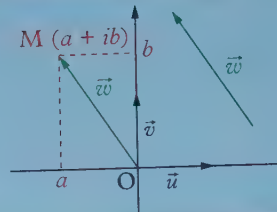
voir aussi exercices n° 45 à 47

5. Opérations et géométrie

A ■ Affixe d'un vecteur

Définition 14 →

- À tout vecteur $\vec{w}(a; b)$, on associe le nombre complexe $a + ib$ appelé affixe du vecteur \vec{w} .
- Réciproquement, à tout $z = a + ib$ avec a et b réels, on associe le vecteur $\vec{w}(a; b)$ appelé vecteur image de z .



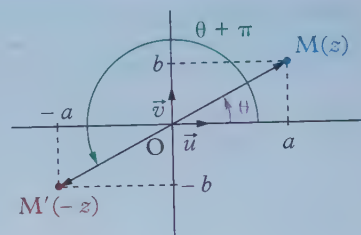
Propriété 14 →

- Si z est l'affixe de \vec{w} , pour tout λ réel, λz est l'affixe du vecteur $\lambda \vec{w}$.
- Si z et z' sont les affixes de \vec{w} et \vec{w}' , $z + z'$ est l'affixe de $\vec{w} + \vec{w}'$.

Exemple :

Si z est l'affixe du vecteur \vec{OM} , $-z$ est l'affixe de $-\vec{OM}$. C'est donc aussi l'affixe du point M' symétrique de M par rapport à O . On retrouve géométriquement que, pour $z \neq 0$:

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad (2\pi)$$



Corollaire 2 →

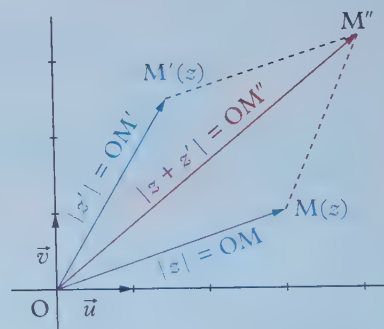
Inégalité triangulaire

Pour tous nombres complexes z et z' ,

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Remarque

Il n'y a pas de formule générale simple donnant le module et un argument de $z + z'$ en fonction de ceux de z et z' .



B ■ Applications : calculs de longueurs et d'angles

Propriété 15 →

Soit a et b les affixes des points A et B .

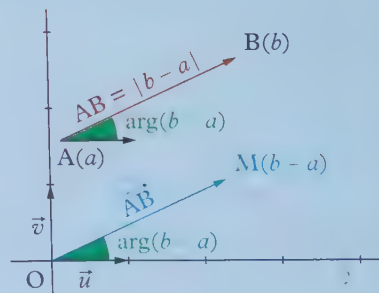
- $b - a$ est l'affixe du vecteur \vec{AB} .
- $|b - a| = AB$.
- Pour $A \neq B$,

$$\arg(b - a) = (\vec{u}, \vec{AB}) \quad (2\pi).$$

Exemple :

Si $A(2 - i)$ et $B(1 - 3i)$, alors :

$$AB = |1 - 3i - 2 + i| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}.$$



Propriété 16 →

Si a, b, c, d sont les affixes des points A, B, C et D ($A \neq B$ et $C \neq D$) :

$$(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) \quad (2\pi).$$

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 14

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a', b' réels.

Alors $\lambda \bar{w}$ a pour coordonnées $(\lambda a; \lambda b)$ et donc pour affixe $\lambda a + \lambda bi$ c'est-à-dire $\lambda(a + bi)$ qui n'est autre que λz . De même, de $\bar{w}(a; b)$ et $\bar{w}'(a'; b')$, on déduit que $\bar{w} + \bar{w}'$ a pour coordonnées $(a + a'; b + b')$ et donc pour affixe $a + a' + (b + b')i$, c'est-à-dire $z + z'$.

■ Corollaire 2

Soit M, M', M'' les points images respectifs de $z, z', z + z'$.

Alors $z, z', z + z'$ sont aussi les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}$.

Comme $z + z'$ est aussi l'affixe de $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$, on a $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.

On en déduit que $OMM''M'$ est un parallélogramme.

Par l'inégalité triangulaire dans le triangle OMM'' , $OM'' \leq OM + MM''$.

Comme $OM'' = |z + z'|$, $OM = |z|$ et $MM'' = OM' = |z'|$, cette inégalité se traduit par $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

■ Propriété 15

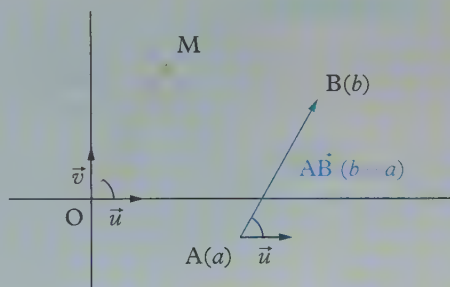
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

• $b - a = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$. Il s'agit de l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} de coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

• Si M est le point d'affixe $b - a$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Par conséquent,

$$|b - a| = OM = AB \quad \text{et} \quad \arg(b - a) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \quad (2\pi).$$



■ Propriété 16

En appliquant les propriétés 11 et 15, on obtient :

$$\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \arg(d-c) - \arg(b-a) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \quad (2\pi).$$

Par conséquent, $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \quad (2\pi)$ par relation d'addition des angles orientés.

→ APPLICATION

Exercice 10 Démontrer un alignement

Prouver que les points A, B, C d'affixes respectives $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, $b = \frac{1}{2} + i$ et $c = \frac{5}{2}$ sont alignés.

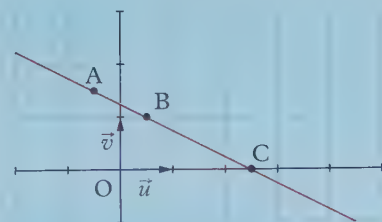
Solution

\overrightarrow{AB} a pour affixe $b - a = 1 - \frac{1}{2}i$.

\overrightarrow{AC} a pour affixe $c - a = 3 - \frac{3}{2}i$.

On constate que $c - a = 3(b - a)$, ce que l'on peut interpréter de deux façons :

- $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ (propriété 14) donc les points A, B et C sont alignés ;
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(3) = 0 \quad (2\pi)$ en utilisant la propriété 16, ce qui prouve aussi que A, B, C sont alignés.



voir aussi exercice n° 72

C ■ Transformations

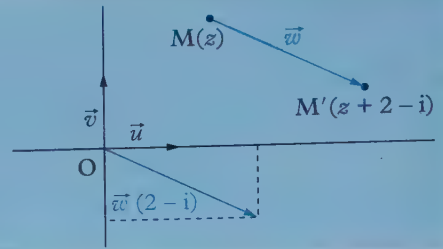
Propriété 17 →

Translation

Soit \vec{w} un vecteur d'affixe α .
Soit M et M' deux points d'affixes z et z' .

M' est l'image de M par la translation de vecteur \vec{w} si et seulement si :

$$z' = z + \alpha.$$



Exemple :

Si $z' = z + 2 - i$, le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par la translation de vecteur \vec{w} d'affixe $2 - i$, c'est-à-dire $\vec{w}(2 ; -1)$.

On dit que $z' = z + 2 - i$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur \vec{w} .

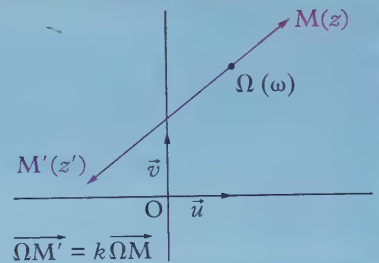
Propriété 18 →

Homothétie

Soit Ω un point d'affixe ω et k un réel non nul. Soit M et M' deux points d'affixes z et z' .

M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k si et seulement si :

$$z' - \omega = k(z - \omega).$$



Exemples :

- $z' = -3z$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport -3 .
- Si M' est l'image de M par l'homothétie de rapport -2 et de centre Ω d'affixe i , $\vec{OM}' = -2\vec{OM}$ ce qui se traduit par l'égalité des affixes : $z' - i = -2(z - i)$.

Remarque

D'une relation du type $z' - \omega = k(z - \omega)$ avec k réel, on peut déduire que les points Ω , M et M' sont alignés.

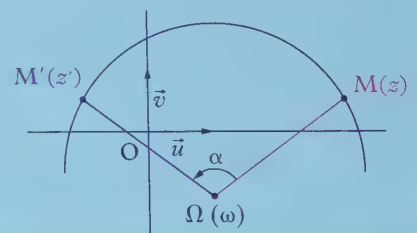
Propriété 19 →

Rotation

Soit Ω un point d'affixe ω et α un réel. Soit M et M' deux points d'affixes z et z' .

M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle α si et seulement si :

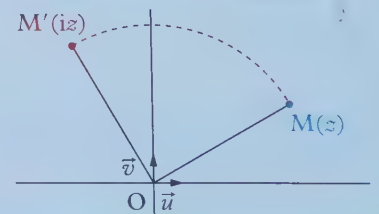
$$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega).$$



Exemple :

$z' = iz$ peut s'écrire $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$.

Il s'agit donc de l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 17

M' est l'image de M par la translation de vecteur \vec{w} si et seulement si $\overline{MM'}$ et \vec{w} sont égaux ou encore ont même affixe. Ceci équivaut donc à $z' - z = \alpha$ ou encore à $z' = z + \alpha$.

■ Propriété 18

M' est l'image de M par cette homothétie si et seulement si $\overline{\Omega M'} = k\overline{\Omega M}$ ce qui équivaut à dire que $\overline{\Omega M'}$ et $k\overline{\Omega M}$ ont la même affixe, c'est-à-dire $z' - \omega = k(z - \omega)$.

■ Propriété 19

• Si $M \neq \Omega$, M' est l'image de M par cette rotation si et seulement si $\begin{cases} \overline{\Omega M'} = \overline{\Omega M} \\ (\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) = \alpha \quad (2\pi) \end{cases}$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha \quad (2\pi) \end{cases} \text{ Ceci équivaut à } \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha \quad (2\pi) \end{cases} \text{ ou encore à } \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}.$$

Ainsi M' est l'image de M par cette rotation d'angle α si et seulement si $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

• Si $M = \Omega$ l'équivalence est encore vérifiée puisque dans ce cas, $z - \omega = 0$ et M' est l'image de M si et seulement si $M' = \Omega$, c'est-à-dire $z' - \omega = 0$.

→ APPLICATIONS

Exercice 11 Utiliser l'expression complexe d'une rotation

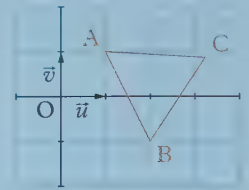
On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 1 + i$ et $b = 2 - i$. Déterminer l'affixe du point C tel que ABC soit équilatéral direct.

Solution

C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Son affixe c vérifie la relation $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$. On en déduit que :

$$c = 1 + i + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - 2i) \quad \text{soit} \quad c = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



voir aussi exercices n° 84, 88

Exercice 12 Montrer qu'un triangle est rectangle isocèle

Soit A, B, C les points d'affixes respectives $a = 1 - i$, $b = 2 + i$ et $c = 3 - 2i$.

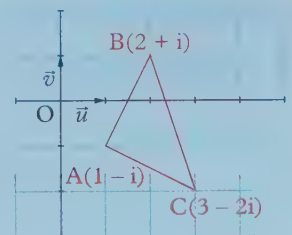
Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Solution

On conjecture que ABC est rectangle isocèle en A . Or :

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{3 - 2i - 1 + i}{2 + i - 1 + i} = \frac{2 - i}{1 + 2i} = \frac{-i(1 + 2i)}{1 + 2i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Ainsi $c - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b - a)$; C est donc l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ ce qui prouve bien que ABC est rectangle isocèle en A .



voir aussi exercices n° 87, 122

1. Équations du troisième degré

OBJECTIF : Mettre en œuvre la méthode de Cardan pour résoudre une équation de degré 3 ; comprendre l'intérêt de l'introduction de i par Bombelli.

A. ➔ Équation $x^3 = a$, a réel

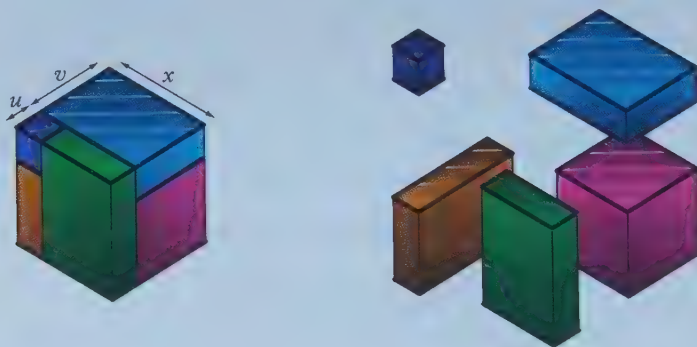
- Justifier que pour tout a réel, l'équation $x^3 = a$ admet une unique solution réelle.
- On note cette solution $\sqrt[3]{a}$. Donner la valeur exacte de $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{-1000}$.

B. ➔ Équation $x^3 = 6x + 6$ (1)

- Conjecturer graphiquement le nombre de solutions de cette équation et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune d'elles.

2. Soit u et v deux réels et $x = u + v$.

- a. Si u et v sont positifs, illustrer à l'aide du puzzle ci-dessous l'égalité $x^3 = 3uvx + u^3 + v^3$.



- b. Démontrer cette même égalité pour tous réels u et v .

3. En déduire que s'il existe deux réels u et v tels que $(u ; v)$ soit solution du système :

$$(S) \begin{cases} u^3 + v^3 = 6 \\ uv = 2 \end{cases}$$

alors $x = u + v$ est solution de l'équation (1).

4. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$.

- a. Montrer que $(u ; v)$ est solution de (S) si et seulement si $(U ; V)$ est solution de :

$$\begin{cases} U + V = 6 \\ UV = 8 \end{cases}$$

- b. Déterminer U , V , u et v puis une solution de (1).

- c. Retrouver cette solution à l'aide de la formule de Tartaglia-Cardan donnée ci-dessous :

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Point Info

En 1545, Jérôme Cardan publie l'*Ars Magna*, ouvrage d'algèbre considéré comme fondamental à l'époque de sa parution. L'auteur résout les équations du troisième degré dans l'ensemble des réels positifs. Il met au point des règles précédemment connues, du moins partiellement, par Scipio del Ferro et Tartaglia. Par exemple, pour l'équation du type $x^3 = px + q$, la règle revient à la formule de Tartaglia-Cardan donnée ci-contre.

C. ➔ L'équation cruciale $x^3 = 15x + 4$ (2) et les nombres imaginaires

1. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $x^3 = 15x + 4$, et préciser le signe de chacune d'elles.
2. a. En utilisant une démarche analogue à celle de la partie **B**, montrer que pour trouver une solution de (2), il suffit de trouver U et V solutions de l'équation $X^2 - 4X + 125 = 0$.
 b. Vérifier que l'équation $X^2 - 4X + 125 = 0$ n'a pas de solution réelle.
 La méthode proposée par Cardan paraît donc inapplicable ici, bien que l'équation semble posséder une solution réelle positive.
 C'est en examinant ce cas que Bombelli (1526–1572) invente « quelque chose » dont le carré est -1 afin de pouvoir poursuivre le calcul, ce que nous allons faire à notre tour.
3. a. Résoudre l'équation $X^2 - 4X + 125 = 0$ dans \mathbb{C} .
 b. Calculer $(2 + i)^3$ et $(2 - i)^3$ et en déduire des expressions simples possibles de u et v puis de $\alpha = u + v$.
 c. Vérifier que α est bien solution de l'équation (2).
4. Montrer que $x^3 - 15x - 4 = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$ où a, b, c sont des réels ; puis déterminer toutes les solutions de l'équation (2).

2. Cercles et complexes

OBJECTIF : Interpréter géométriquement des affixes de la forme $\omega + re^{i\theta}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Placer les points A, B, C, D, E d'affixes $2e^{i\theta}$ respectivement pour $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{3}$.
 Justifier que ces points sont tous situés sur un même cercle de centre O .

2. Soit Ω le point d'affixe $\omega = 4 + 3i$.

À tout point M d'affixe $2e^{i\theta}$, on associe le point M' d'affixe $4 + 3i + 2e^{i\theta}$.

a. Expliquer comment construire le point M' à partir des points O, Ω et M .

b. Placer les points A', B', C', D', E' . À quel cercle appartiennent-ils ?

3. Quel est l'ensemble des points d'affixe $4 + 3i + 2e^{i\theta}$ quand θ décrit :

a. $[-\pi ; \pi]$?

b. $[0 ; \pi]$?

c. $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$?

4. Généralisation

On donne le point Ω d'affixe ω , un réel r strictement positif et θ un réel.

a. Illustrer par un dessin la construction du point N d'affixe $\omega + re^{i\theta}$.

b. Quel est l'ensemble des points N d'affixes $\omega + re^{i\theta}$:

• quand θ décrit $]-\pi ; \pi]$? • quand θ décrit $[0 ; \pi]$?

3. Nombres complexes : un outil pour la trigonométrie

OBJECTIF : Utiliser l'exponentielle complexe pour trouver des formules de trigonométrie dont certaines ont déjà été vues en classe de première.

1. Exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$

a. Démontrer que, pour tout réel θ , $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$.
En exprimant de deux façons différentes la forme algébrique de $(e^{i\theta})^2$, retrouver les formules de duplication donnant $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

b. De même, en considérant $(e^{i\theta})^3$, exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.
En déduire que $\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.

Démontrer que les solutions de l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$ sont $\cos \frac{\pi}{9}$, $\cos \frac{7\pi}{9}$ et $\cos \frac{13\pi}{9}$.

2. Linéariser $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$

L'objectif de cette question est d'apprendre à exprimer $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$ en fonction de $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\cos(2\theta)$, $\sin(2\theta)$, ..., $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$.

a. Soit z un nombre complexe.
Exprimer $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ en fonction de z et de \bar{z} .
En déduire $\cos \theta$ et $\sin \theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

b. À l'aide de la formule établie précédemment pour $\cos \theta$, démontrer que :

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}.$$

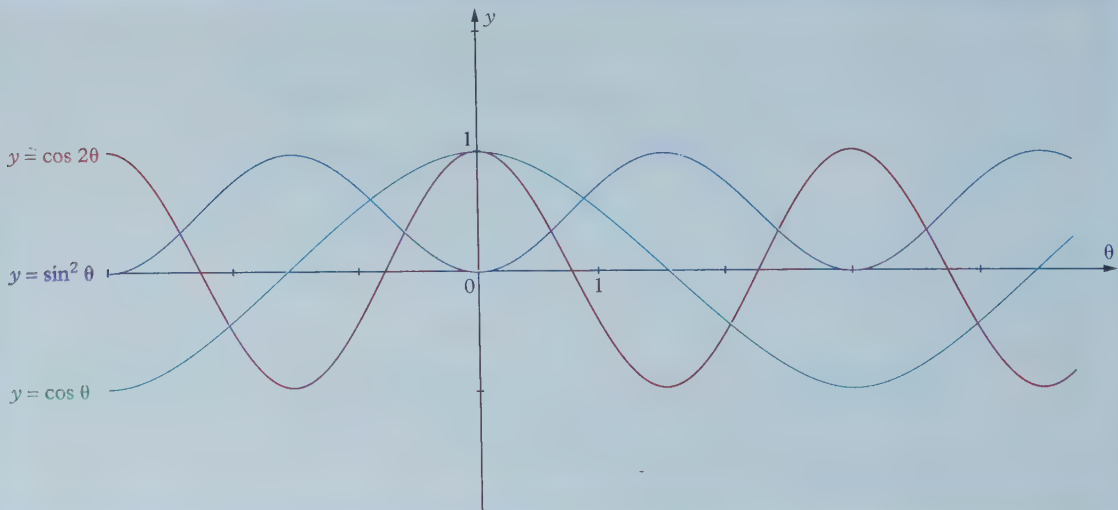
De manière analogue, démontrer que :

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}.$$

c. En procédant de la même façon, démontrer que :

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{4}(3 \sin \theta - \sin(3\theta)).$$

En déduire une fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f'(0) = \sin^3 \theta$ et $f(\pi) = 1$.



4. Nombres complexes : un outil pour la géométrie

OBJECTIF : Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{b-a}{c-a}$.

A, B et C sont trois points du plan dont on note a , b et c les affixes respectives dans le repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

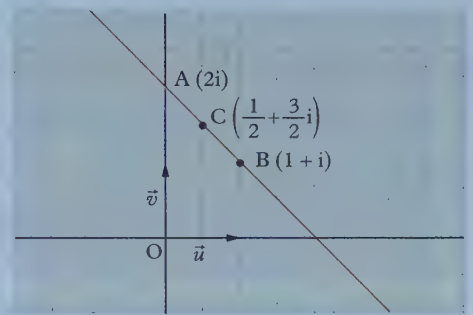
A. ➔ Quand $\frac{b-a}{c-a}$ est un réel non nul

Posons (1) $\frac{b-a}{c-a} = k$ où k est un réel non nul.

1. Quelles sont les affixes de \overline{AB} et de \overline{AC} ?
2. Traduire (1) par une relation entre \overline{AB} et \overline{AC} .
3. Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

4. Application

$$a = 2i, b = 1 + i, c = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

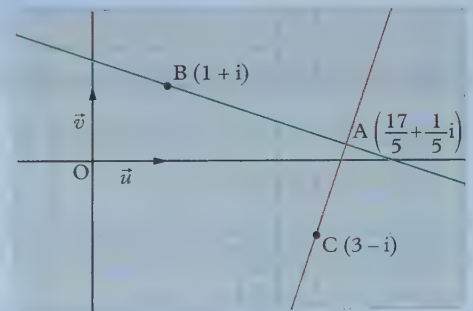


B. ➔ Quand $\frac{b-a}{c-a}$ est un imaginaire pur non nul

1. Quelles sont les valeurs possibles de $\arg \frac{b-a}{c-a}$?
2. Quelle conséquence peut-on en déduire pour (AB) et (AC) ?
3. Dans le cas particulier où $\frac{b-a}{c-a} = i$, déterminer son module. Interpréter géométriquement ce résultat. Quelle est la nature du triangle ABC ?

4. Application

$$a = \frac{17}{5} + \frac{1}{5}i, b = 1 + i, c = 3 - i.$$

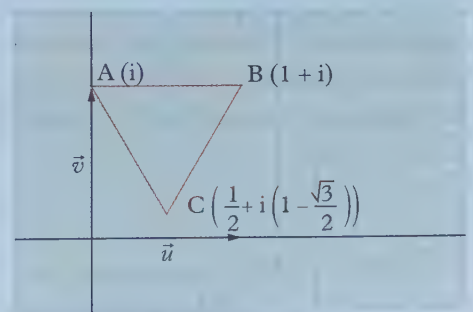


C. ➔ Quand $\frac{b-a}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

1. Calculer le module et un argument de $\frac{b-a}{c-a}$.
2. Interpréter géométriquement ces résultats.
3. Quelle est la nature du triangle ABC ?

4. Application

$$a = i, b = 1 + i, c = \frac{1}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$



5. Découvrir une curieuse transformation


OBJECTIF : Découvrir les surprenantes propriétés d'une nouvelle transformation : l'inversion.

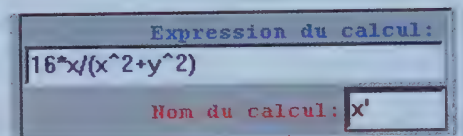
Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{16}{z}$. On définit ainsi une application f sur le plan P privé de O .

A. ➔ Calculs préliminaires

Si $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ où $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, montrer que $x' = \frac{16x}{x^2 + y^2}$ et $y' = \frac{16y}{x^2 + y^2}$.

B. ➔ Construction de la figure avec le logiciel Geoplan

- Ouvrir une figure Geoplan. Faire apparaître le repère en cliquant sur l'icône .
- Créer un point libre M par le menu *Créer, Point, Point libre, Dans le plan*.
- Créer l'abscisse x de M par le menu *Créer, Numérique, Calcul géométrique, Abscisse d'un point dans le plan*. Créer de même l'ordonnée y de M .
- Créer x' par le menu *Créer, Numérique, Calcul algébrique* et renseigner la boîte de dialogue comme sur la copie d'écran ci-contre. Créer de même y' .
- Créer le point $M'(x' ; y')$ par le menu *Créer, Point, Point repéré, Dans le plan*. Si M' n'apparaît pas, déplacer M à la souris en l'éloignant du point O .



C. ➔ Des conjectures aux démonstrations

- Déplacer le point M à la souris. Que peut-on conjecturer sur la position du point M' ?

2. Points invariants

Dans le menu *Afficher, Sélection Trace*, sélectionner la ligne relative à M' et valider par *OK*.

Dans le menu *Piloter, Piloter au clavier*, sélectionner la ligne relative à M et valider par *OK*.

Activer l'icône  de *Trace à la demande*.

En déplaçant M à la souris ou avec les flèches du clavier, chercher un point M tel que $M' = M$ (on dit que M est invariant) puis valider cette position par la touche **ENTRÉE** du clavier.

Recommencer jusqu'à avoir suffisamment de points invariants pour conjecturer la nature de l'ensemble E des points invariants. Cliquer sur l'icône de *Trace à la demande* pour la désactiver.

3. Image d'une droite

Créer dans le plan deux points libres A et B (voir **B2**), puis créer la droite (AB) par le menu *Créer, Ligne, Droite(s), Définies par deux points* en entrant AB comme nom de la droite.

Créer un point libre sur cette droite par *Créer, Point, Point libre, Sur une droite* et le nommer M ; on répondra Oui à la question « voulez-vous redéfinir M ? ». Activer l'icône *Trace* puis, en déplaçant M , conjecturer l'image de la droite (AB) .

Désactiver l'icône *Trace*, déplacer A et B et recommencer la manipulation pour conjecturer l'image de (AB) . Quelle conjecture peut-on faire sur l'image d'une droite par cette application ?

4. Démonstration

Faire l'exercice n° 145 p. 291.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Soit les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = \frac{1}{2}(1 - i)$. On pose $Z = z_1 z_2$.

- Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
- a. Déterminer l'écriture algébrique de Z et son écriture trigonométrique.
b. En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Solution

1. Écriture trigonométrique de z_1 et de z_2

$$|z_1| = 2; \cos(\arg(z_1)) = \frac{1}{2} \text{ et } \sin(\arg(z_1)) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ d'où } \arg(z_1) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ et } z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

$$|z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos(\arg(z_2)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(\arg(z_2)) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ d'où } z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

2. a. • Écriture algébrique de Z : $Z = (1 + i\sqrt{3})\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

• Écriture trigonométrique de Z

$$|Z| = |z_1||z_2| = \sqrt{2} \text{ et } \arg(Z) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12} [2\pi], \text{ donc } Z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

b. Par suite $\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + i\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, d'où $\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ et $\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

On a donc $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$.

voir aussi exercice n° 114

2 Dans le plan complexe de repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $2 + 3i\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}i$; $-4 - 3i\sqrt{3}$; $-2 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$.

- Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
- Démontrer que $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}$ est un imaginaire pur. En déduire la nature du parallélogramme ABCD.

Solution

1. • Affixe de \overrightarrow{AB} : $-\frac{\sqrt{3}}{3}i - (2 + 3i\sqrt{3}) = -2 - \frac{10\sqrt{3}}{3}i$.

• Affixe de \overrightarrow{DC} : $-4 - 3i\sqrt{3} - \left(-2 + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = -2 - \frac{10\sqrt{3}}{3}i$.

\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} ont même affixe, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

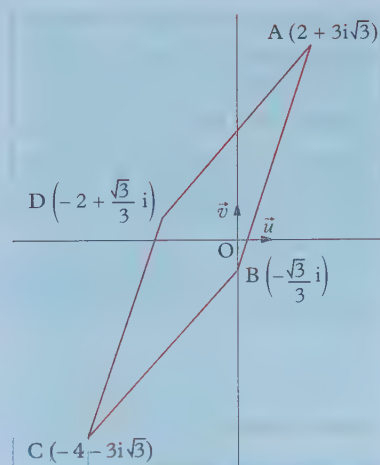
ABCD est donc un parallélogramme.

2. $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = \frac{-2 + \frac{\sqrt{3}}{3}i - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)}{-4 - 3i\sqrt{3} - (2 + 3i\sqrt{3})} = \frac{-2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}i}{-6 - 6i\sqrt{3}} = \frac{1}{9} \times \frac{3 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$.

On en déduit $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = \frac{1}{9} \times \frac{(3 - i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}{4} = \frac{-i\sqrt{3}}{9}$.

Par suite $\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ d'où $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

(AC) et (BD) sont perpendiculaires, donc ABCD est un losange.



voir aussi exercices n° 87, 127

3 vu au BAC Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit les points A, B et C d'affixes respectives i , $1+i$ et $-1+i$. Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z , associe le point M' du plan d'affixe z' tel que $z' = \frac{iz+2}{z-i}$.

1. a. Déterminer les images de B et C par l'application f .

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i , on a la relation $(z'-i)(z-i) = 1$.

c. Soit D le point d'affixe $1+2i$. Placer les points A, B, C et D sur une figure. Dédire de la question précédente une construction du point D' image de D par l'application f .

2. Soit r un réel, $r > 0$. Quelle est l'image par f du cercle Γ de centre A et de rayon r ?

3. a. Montrer que si l'affixe d'un point M est un imaginaire pur différent de i , l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par f de l'axe imaginaire privé de A ?

b. Soit (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur \vec{u} . Déterminer l'image de la droite (Δ) privée du point A par l'application f .

Solution

1. a. L'image de B a pour affixe $\frac{i(1+i)+2}{1+i-i} = 1+i$, donc $f(B) = B$. De même $f(C) = C$.

b. $z'-i = \frac{iz+2}{z-i} - i = \frac{iz+2-iz+i^2}{z-i} = \frac{1}{z-i}$. Par conséquent $(z'-i)(z-i) = 1$.

c. Soit d et d' les affixes respectives de D et de $f(D)$. Sachant que $(d'-i)(d-i) = 1$, on en déduit que :

$$|d'-i| \times |d-i| = |1| = 1$$

et $\arg(d'-i) + \arg(d-i) = \arg(1) = 0 \pmod{2\pi}$.

Or $d-i = 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $\sqrt{2} > 0$.

Par suite $|d-i| = \sqrt{2}$ et $\arg(d-i) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. On en déduit que :

• $|d'-i| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c'est-à-dire $AD' = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} AD$;

• $\arg(d'-i) = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ c'est-à-dire $(\vec{u}, \overrightarrow{AD'}) = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

On remarque que D' est le centre du carré OABI (où $I(1; 0)$), autrement dit le milieu de $[OB]$.

2. $M(z)$ appartient à Γ si et seulement si $AM = r$ c'est-à-dire $|z-i| = r$.

Ceci équivaut à dire que $|z'-i| = \frac{1}{r}$ c'est-à-dire que $AM' = \frac{1}{r}$.

L'image par f du cercle de centre A et de rayon r est donc le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{r}$.

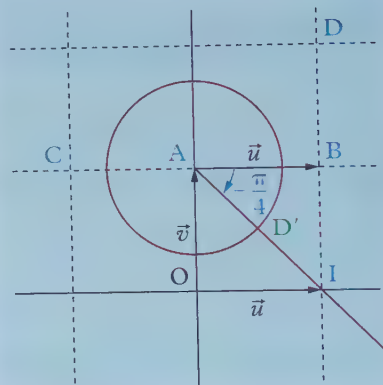
3. a. Soit $z = ib$ avec b réel, $b \neq 1$. Alors $iz+2 = -b+2$ est réel, et $z-i = i(b-1)$ est imaginaire pur, donc z' est imaginaire pur. Si M appartient à l'axe imaginaire pur privé de A, M' appartient donc aussi à cet axe.

On en déduit que l'image par f de l'axe imaginaire privé de A est **inclus** dans l'axe imaginaire.

b. M appartient à $(\Delta) - \{A\}$ si et seulement si $z = x+i$ ou $x \in \mathbb{R}^*$. Alors :

$$z' = \frac{ix+1}{x} = \frac{1}{x} + i = X+i \quad \text{ou} \quad X = \frac{1}{x}.$$

Quand x décrit \mathbb{R}^* , X décrit également \mathbb{R}^* , donc M' décrit (Δ) privée de A. Ainsi l'image par f de (Δ) privée de A est (Δ) privée de A.



→ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Premiers calculs dans \mathbb{C}

Dans les exercices 1 à 3, écrire chacun des nombres complexes sous forme algébrique.

1 a. $4(1-i) + 2 - 3i$; b. $i - i(5-2i)$.

2 a. $(3-i)^2$; b. $(\sqrt{2}-3i)(-\sqrt{2}-3i)$.

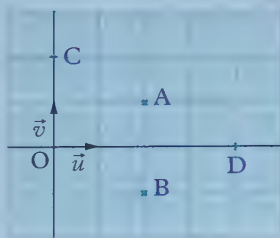
3 a. $(2-i)(3+4i)(5-i)$;
 b. $(1-3i)^2(-8+6i)$;
 c. $(1-i)^3$;
 d. $(2+i)^3$.

- 4 1. Déterminer i^3, i^4, i^5 puis i^n suivant les valeurs de n .
 2. Calculer $1+i+i^2+i^3+\dots+i^7$.
 3. Calculer $1+i+i^2+i^3+\dots+i^n$ suivant les valeurs de n .

Affixe d'un point

Dans tout ce chapitre, le plan est orienté et rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- 5 1. Donner les affixes des points A, B, C, D et O placés sur la figure ci-contre.
 2. Placer dans le plan les points E, F, G, H et K d'affixes respectives :
 $1-i, -2+i, 2+3i, -4i$ et -1 .



- 6 1. Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = \frac{1}{2} - i, z_B = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i, z_C = \frac{3}{4} + 2i$ et $z_D = \frac{11}{4} + \frac{1}{2}i$.

2. Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AC]$ et du milieu J de $[BD]$. Qu'en déduit-on ?

- 7 Les points E, F et G ont comme affixes respectives $2+i, 3-i$ et $5+3i$. Soit H le barycentre des points pondérés $(E; 1), (F; 2)$ et $(G; -1)$.
 1. Faire une figure. Construire le point H.
 2. Déterminer l'affixe de H.

- 8 Soit A et B les points d'affixes respectives $a = 2 - i$ et $b = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i$.
 1. Placer le barycentre G de $(A; 1), (B; 4)$.
 2. Montrer que G appartient à l'axe des ordonnées.

- 9 Déterminer l'affixe du centre de gravité du triangle ABC où les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = 2 + i, b = -1 - 4i$ et $c = 8$.

- 10 À tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $z' = 2z^2 - 3iz$.

1. a. Placer les points A, B, C, D et E d'affixes respectives $2i, 1, 1 + \frac{3}{4}i, -2i, -1$.

- b. Déterminer les affixes des points A', B', C', D', E' et O' associés aux points A, B, C, D, E et O ; placer ces points.

2. En associant à chaque point M(z) du plan le point M'(z'), on définit une fonction f.

- Conserve-t-elle :
 - l'alignement ?
 - l'orthogonalité ?
 - le milieu ?

3. On nomme $(x; y)$ les coordonnées du point M.

- a. Exprimer les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de x et y.

- b. Déterminer et construire l'ensemble L des points M tels que z' soit réel.

- c. Quelles vérifications peut-on faire ?

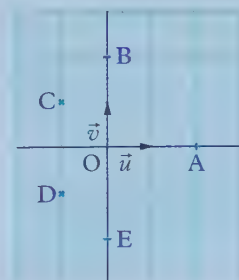
Module et argument Forme trigonométrique

- 11 Placer le point M image de z sachant que :

a. $|z| = 1$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$;

b. $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\frac{5\pi}{6} (2\pi)$.

- 12 Lire graphiquement un argument des affixes des points A, B, C, D et E placés sur la figure ci-dessous.



EXERCICES

13 Déterminer par lecture graphique le module et un argument de z .

- a. $z = i$; $z = -i$; $z = -1$.
 b. $z = 2i$; $z = -\frac{4}{3}$; $z = -\frac{1}{2}i$.

14 Représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

- a. $|z| = 3$; b. $|z| \leq 2$; c. $1 < |z| \leq \sqrt{2}$.

15 Même exercice que l'exercice 14 avec :

- a. $\arg(z) = 0$ (2π) ; b. $\arg(z) = \pi$ (2π) ;
 c. $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ (2π) ; d. $\arg(z) = \frac{3\pi}{2}$ (2π).

16 Même exercice que l'exercice 14 avec :

- a. $\arg(z) = 0$ (π) ; b. $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ (π).

17 Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

- a. $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ (2π) ; b. $\arg(z) = -\frac{3\pi}{2}$ (2π) ;
 c. $\arg(z) = -\frac{2\pi}{3}$ (π).

Dans les exercices 18 à 21, déterminer le module et un argument de z .

18 a. $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. $z = 1 + i$; $z = -1 + i\sqrt{3}$.

19 a. $z = -4 + 4i$; $z = -\sqrt{3} + i$.

b. $z = -\sqrt{3} - 3i$; $z = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$.

20 a. $z = 3 - i$; b. $z = -1 - 2i$.

On donnera dans chaque cas une valeur approchée d'un argument à 10^{-2} près.

21 a. $z = i\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; b. $z = (-1 + i\sqrt{3})^2$;

c. $(1 - i)(\sqrt{3} + i)$.

Dans les exercices 22 à 24, écrire z sous forme trigonométrique.

22 a. $z = -4$; $z = -i\sqrt{3}$; $z = -1 - i$.

b. $z = \frac{\sqrt{3}}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{3}$; $z = -1 - i\sqrt{3}$.

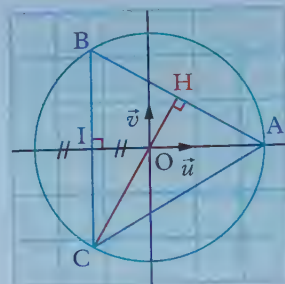
23 a. $z = 4 + 4i$; $z = -2 + 2i\sqrt{3}$.

b. $z = (1 - i)(-3i)$; $z = (1 + i\sqrt{3})^2$.

24 a. $z = -2(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

b. $z = \frac{1}{2}(\sin \alpha - i \cos \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

25 Déterminer par lecture graphique la forme trigonométrique des affixes respectives des points A, B, C et H de la figure ci-dessous.



Inverse, quotient, conjugué

26 Écrire sous forme algébrique :

a. $\frac{1}{2-i}$; b. $\frac{1}{3+2i}$; c. $\frac{1}{1+i}$; d. $\frac{1}{i}$.

27 Même exercice que l'exercice 26.

a. $\frac{2i}{1+3i}$; b. $\frac{i}{2-3i}$; c. $\frac{7+i}{3-2i}$; d. $\frac{-3}{(i+1)(2-i)}$.

28 Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -2i$. Écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants.

a. $z_1 - 2z_2$; b. $\frac{z_1}{z_2}$; c. $z_1^2 z_2$; d. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$.

29 1. Déterminer le module et un argument de $1 + i$ et de $1 - i$.

2. En déduire la forme trigonométrique de $z = \frac{1+i}{1-i}$.

3. Écrire z sous forme algébrique et retrouver le résultat obtenu à la question 2.

30 Soit $z = \frac{-\sqrt{3} + i}{2 + 2i}$.

1. Déterminer la forme trigonométrique de z .

2. Déterminer un argument de z .

31 Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « Pour diviser par i , on peut multiplier par $-i$ » ?

32 Déterminer les conjugués des complexes :

a. $i(1 - i)$; b. $(2i - 3)(4 - 2i)$; c. $(1 + i)^3$.

33 Même exercice que l'exercice 32.

a. $\frac{1+i}{1-2i}$; b. $\frac{i(2-i)^3}{-3+i}$.

34 1. Écrire $z = 6 - 6i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

2. En déduire la forme trigonométrique de :
 $-6 + 6i\sqrt{3}$; $6 + 6i\sqrt{3}$; $-6 - 6i\sqrt{3}$.

35 On considère dans le plan complexe les points M et M' d'affixes respectives z et z' telles que :

$$z' = z\bar{z} + (1+i)z + 3\bar{z} - 2.$$

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x', y' réels.

1. Des exemples

a. Déterminer les points A' et B' correspondant aux points A et B d'affixes respectives $a = 2 + i$ et $b = -i$.

b. Déterminer l'affixe k du milieu K de [AB]. En déduire l'affixe k' du point K' associé à K.

c. En associant à chaque point M(z) du plan le point M'(z'), on définit une application f. Conserve-t-elle le milieu ?

2. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

3. Déterminer l'ensemble E des points M tels que z' soit réel.

4. Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.

36 avec ROC Dans tout l'exercice, z est un complexe non nul.

1. On rappelle que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi).$$

Démontrer que $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad (2\pi)$.

2. Soit P et Q les points d'affixes respectives $\frac{1}{z}$ et \bar{z} .

Pour chacune des questions, on justifiera la réponse.

a. Est-il possible que $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(z) \quad (2\pi)$?

b. A-t-on pour tout $z \neq 0$, $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(\bar{z}) \quad (2\pi)$?

c. Peut-on trouver z de telle sorte que les points O, P et Q ne soient pas alignés ?

d. Peut-on trouver z tel que O appartienne au segment [PQ] ?

e. Quels sont les nombres complexes z pour lesquels P et Q sont confondus ?

37 Soit z un nombre complexe non nul. Dire, pour chacun des nombres complexes A, B et C, s'il est réel ou imaginaire pur :

$$A = z^2 + \bar{z}^2 ; B = \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}} ; C = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z} + 3}.$$

38 À tout nombre complexe $z \neq 1$, on associe le nombre complexe $z' = \frac{iz}{z-1}$.

1. Exprimer \bar{z}' en fonction de \bar{z} .

2. Montrer que pour $z \neq 1$,

$$z' = \bar{z}' \Leftrightarrow 2|z|^2 = z + \bar{z}.$$

3. On nomme M le point d'affixe z et (x ; y) les coordonnées de M.

Déterminer une équation de l'ensemble E des points M tels que z' est réel. Représenter E.

Équations dans \mathbb{C}

Dans les exercices 39 à 48, résoudre dans \mathbb{C} les équations proposées.

39 a. $iz + 2(z - i) = 0$; b. $(4 + i)z = 3 - z$.

40 a. $(z + 2i)(2z - 3 + i) = 0$;
 b. $(iz - 3 + i)((1 - i)z + 4 + 3i) = 0$.

41 a. $\frac{2}{z-i} = 1 - i$; b. $\frac{iz + 1}{z-i} = 2$.

42 a. $i\bar{z} = 1 - i$;
 b. $(iz + 1)(z + 3i)(\bar{z} - 1 + 2i) = 0$.

43 a. $z + 2\bar{z} = 3 - 2i$; b. $z\bar{z} + z + \bar{z} = 4$.

44 a. $2z + i\bar{z} = 1 - i$; b. $z + 2\bar{z} = 3 - 2i$.

45 a. $z^2 = 9$; b. $z^2 = -4$.

46 a. $z^2 - 2z - 4 = 0$; b. $z^2 - 2z + 4 = 0$.

47 a. $z^2 = z - 1$; b. $z^2 - 3z + 4 = 0$.

48 a. $z^4 - 9 = 0$; b. $z^4 + z^2 - 6 = 0$.

49 À tout point M d'affixe z différente de 2, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{-3+z}{z-2}$. Existe-t-il des points invariants ?

50 Soit (E) l'équation $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$.

1. Déterminer un entier naturel α qui soit une solution « évidente » de (E).

2. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) soit équivalente à l'équation :

$$(z - \alpha)(z^2 + az + b) = 0.$$

3. Finir la résolution de (E) dans \mathbb{C} .

EXERCICES

51 1. Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$z^3 - 1 = (z - 1)(az^2 + bz + c).$$

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 = 1$.

3. Résoudre de même l'équation $z^3 = -1$.

Forme exponentielle

52 Sans calcul, placer les points A, B, C et D d'affixes respectives :

a. $e^{i\frac{\pi}{3}}$; b. $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$; c. $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$; d. $3e^{i\pi}$.

53 Lire graphiquement la forme exponentielle de $3i, -2, -5i, 8$.

54 1. Écrire sous forme exponentielle $-\sqrt{3} - 3i$.

2. En déduire la forme exponentielle de $-\sqrt{3} + 3i, \sqrt{3} + 3i$ et $\sqrt{3} - 3i$.

55 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z :

a. $z = e^{i\theta}$ où θ décrit $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$;

b. $z = 2e^{i\theta}$ où θ décrit $[0; \pi]$.

56 Écrire sous forme exponentielle :

a. $z = ie^{i\theta}$; b. $z = -2e^{i\theta}$; c. $z = -3ie^{-i\theta}$.

57 1. En utilisant la notation exponentielle, déterminer le module et un argument de $\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.

2. En déduire les valeurs de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

58 Vrai ou Faux ?

Soit $z_1 = 2 - 2i, z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = (1 + i)^2$.

A. $z_1 z_2 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$; B. $z_1 \bar{z}_2 = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$;

C. $\frac{z_1}{z_3} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$; D. $z_2 z_3^2 = -4z_2$.

59 Vrai ou Faux ?

A. $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$; B. $\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$;

C. $\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$; D. $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

60 Soit θ un réel de l'intervalle $I = [0; 2\pi]$.

On considère l'équation (E) à l'inconnue complexe z : $z^2 - 6z \cos \theta + 9 = 0$.

1. Résoudre (E) dans \mathbb{C} ; on notera z_1 et z_2 les deux solutions.

2. Écrire sous forme exponentielle les solutions de (E).

3. Placer les points images des solutions pour :

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \theta = -\frac{5\pi}{6}.$$

4. Quel ensemble décrivent les points images de z_1 et z_2 quand θ décrit I ?

61 Démontrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout θ réel, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

62 1. Résoudre, dans \mathbb{C} , $z^2 - 2z + 4 = 0$.

2. Soit u la solution de partie imaginaire positive. Calculer u^{2007} .

63 Soit le nombre complexe $u = 1 + i$ et \bar{u} son conjugué.

1. Mettre u et \bar{u} sous forme exponentielle.

2. Soit n un entier naturel.

a. Montrer que $u^n + \bar{u}^n = \lambda_n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ où λ_n est un réel à préciser en fonction de n .

b. Pour quelles valeurs de n a-t-on $u^n + \bar{u}^n = 0$?

c. Prouver que, si n est pair, S_n est un entier relatif.

64 Un peu de trigonométrie

1. Démontrer que pour tout θ réel,

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}).$$

2. a. Calculer $\cos^3 \theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ et de $e^{-i\theta}$.

b. En déduire une expression de $\cos^3 \theta$ en fonction de $\cos(3\theta)$ et $\cos \theta$.

3. En adaptant la démarche précédente, déterminer une expression de $\sin^3 \theta$ en fonction de $\sin \theta$.



Léonhard Euler et sa célèbre formule :
 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

Affixe d'un vecteur Calcul de distance et d'angle

65 La figure est celle de l'exercice 5. Lire les affixes des vecteurs \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{CB} , \overline{OC} .

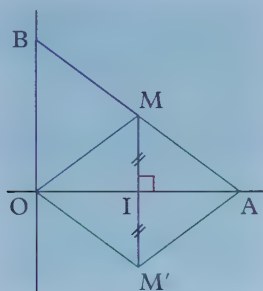
66 Soit A, B et C les points d'affixes respectives 3, i et $2 + 3i$. Soit D le point du plan tel que ABCD soit un parallélogramme. On appelle d son affixe.

- Déterminer l'affixe de \overline{BC} .
- En déduire d .

67 Constructions

1. Les points A et B d'affixes respectives z et z' étant donnés, construire les points C d'affixe $z + z'$, D d'affixe $-z'$, E d'affixe $z - z'$, F d'affixe $2z - 3z'$. (Illustrer par une figure.)

2. Sur la figure ci-dessous, M a pour affixe z , OMAM' et OBMM' sont des parallélogrammes. Quelles sont les affixes des points M', I, A et B ?



68 Soit $M(z)$ et $M'(z')$.

- Construire le point M'' d'affixe $z + z'$.
- Reconnaître le vecteur d'affixe $z' - z$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur les points M et M' pour que $|z + z'| = |z' - z|$.

69 Soit A et B les points d'affixes respectives $a = -2 + i$ et $b = 3i$.

- Donner l'affixe du vecteur \overline{AB} .
- Calculer AB et une mesure de l'angle (\vec{i}, \overline{AB}) .

70 Placer les points A, B et C d'affixes respectives

$$3 + i, \frac{4 - \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ et } 2 - i\sqrt{2}.$$

Démontrer que A, B et C sont situés sur un même cercle de centre I d'affixe 2 dont on précisera le rayon.

71 Les points A, B et C ont pour affixes respectives 2, $4 - 4i$ et $4 + i$.

Démontrer, en utilisant un argument d'un nombre complexe bien choisi, que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

72 Les points E, F et G ont pour affixes :

$$z_E = -3 + i; \quad z_F = 4,5 + 2,5i; \quad z_G = 2 + 2i.$$

1. a. Donner une mesure en radians de l'angle $(\overline{EF}, \overline{EG})$.

b. Que peut-on en conclure pour les points E, F et G ?

2. Comparer les affixes des vecteurs \overline{EF} et \overline{EG} ; quelle information supplémentaire en déduit-on ?

73 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

- $|z - 3| = 4$;
- $|z + 1 - 2i| = 5$;
- $|z - 1 + 2i| = |z - 1|$;
- $|z - 2 - i| = |z|$.

74 Même exercice que l'exercice 73.

a. $|\bar{z} - 1 + 3i| = |1 - z|$;

b. $|iz| = |1 - z|$;

c. $|z + 4 - 2i| = |2 - i - \bar{z}|$.

75 Soit A le point d'affixe $z_A = -1$. Pour tout réel θ , on considère le point B d'affixe $z_B = -1 + e^{i\theta}$ et le point C d'affixe $z_C = -1 + z_B^2$.

- Déterminer la nature du nombre $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
- Interpréter géométriquement.

Construction de points

76 Soit A le point d'affixe $a = -2$ et B le point d'affixe $b = 1$. À tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z}{z + 2}$.

On considère les points D, E et F d'affixes $d = 4$, $e = i$ et $f = -2 + 3i$.

1. Écrire sous forme algébrique les affixes d' , e' et f' des points D', E' et F' associés aux points D, E et F.

2. a. Exprimer $z' - 1$ en fonction de z .

b. Quelle relation y-a-t-il entre les modules et arguments de $z' - 1$ et de $z + 2$?

c. Interpréter géométriquement ces relations à l'aide des points A, B, M et M'.

d. Vérifier les résultats de la question 2c, avec les points D et D', puis avec les points E et E'.

EXERCICES

77 On note A le point d'affixe $1 + 2i$ et B celui d'affixe $-2 + i$.

À tout point M d'affixe z , autre que B, on associe le nombre complexe $Z' = \frac{z-1-2i}{z+2-i}$.

- Donner une signification géométrique de $|Z'|$ et de $\arg(Z')$ à l'aide des points M, A et B.
- En déduire sans calcul les ensembles suivants :
 - E ensemble des points M tels que $|Z'| = 1$;
 - F ensemble des points M tels que Z' est un réel strictement positif ;
 - G ensemble des points M tels que Z' est un imaginaire pur non nul.

78 vu au BAC On considère le point A d'affixe 2 et le point B d'affixe -2 . À tout point M différent de A, et d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' donnée par $z' = \frac{2z-4}{z-2}$.

- Démontrer que $|z'| = 2$.
 - En déduire une indication sur la position de M'.
 - Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z ($z \neq 2$) tels que $M' = B$.
 - Soit M un point n'appartenant pas à E et distinct de A et B.

a. Démontrer que $\frac{z-2}{z'+2}$ est réel.

b. Interpréter géométriquement ce résultat.

c. Donner une construction de M'.

Ytilis

1. a. $|z'|$ est le module d'un quotient, donc aussi le quotient des modules.

Que peut-on dire des modules des deux nombres complexes conjugués $z-2$ et $\bar{z}-2$?

1. b. Quelle est la définition géométrique du module d'un nombre complexe ?

2. Il s'agit de résoudre une équation à l'inconnue z .

3. On n'évitera pas le calcul de $\frac{z-2}{z'+2}$, mais ensuite, la propriété 9 peut éviter des calculs supplémentaires...

3. b. Revoir l'exercice 10 (application du cours, p. 265).

Transformations ; configurations

79 Le point A a pour affixe $z_A = 2 + i$.

1. Construire les points :

- B, image de A par la translation de vecteur \vec{w} d'affixe $1 - 3i$;
- C, image de A par l'homothétie de centre Ω de coordonnées $(3 ; 2)$ et de rapport -2 ;
- D, image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. Déterminer les affixes des points B, C et D.

80 avec ROC On nomme z et z' deux nombres complexes.

1. Compléter le tableau ci-dessous.

Transformation	Écriture complexe
Translation de vecteur d'affixe $-3i$	
Symétrie de centre Ω d'affixe $\omega = 2 + 4i$	
	$z' + 1 - 3i = -4(z + 1 - 3i)$
	$z' - 2i = i(z - 2i)$
Symétrie d'axe (O ; \vec{u})	
	$z' = -\bar{z}$

2. a. Tracer la droite D d'équation $y = -1$ et son image D' par la translation de vecteur $3\vec{v}$.

b. Déterminer l'affixe z_B d'un point B de D et l'affixe z_C d'un point C de D' tel que BOC soit un triangle rectangle isocèle direct en O.

On désignera par x la partie réelle de z_B et par x' la partie réelle de z_C .

c. Construire le triangle BOC.

3. Recommencer la question 2 avec BOC triangle rectangle isocèle en O et indirect.

81 **1.** Construire le point A d'affixe $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$, sans calcul.

2. Calculer $|z|$.

3. Déterminer géométriquement un argument de z .

82 Reprendre l'exercice 81 pour :

a. $z = 1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$;

b. $z = 2 + 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

83 Quel est l'ensemble des points M d'affixe z :

a. $z = 3 + e^{i\theta}$, où θ décrit \mathbb{R} ?

b. $z = -1 + 2e^{i\theta}$, où θ décrit $[0 ; \pi]$?

c. $z = 3 + 4e^{2i\theta}$, où θ décrit $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$?

84 Rotations et triangles particuliers

Les points A et B ont pour affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 1 - 2i$. On considère les points :

- C tel que ABC soit rectangle isocèle en B et direct ;
- D tel que ABD soit rectangle isocèle en D et direct ;
- E et F tels que ABE et ABF soient équilatéraux.

1. Construire les points C, D, E et F.

2. Déterminer leurs affixes.

85 vu au BAC On considère les points A, B, C, P d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ et $z_P = 3 + 2i$, et le vecteur \vec{w} d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

- Placer les points A, B et C puis construire les points suivants :
 - Q, image de B par la translation t de vecteur \vec{w} ;
 - R, image de P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$;
 - S, image de P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

- Déterminer les affixes des points Q, R et S.
- Démontrer que PQRS est un parallélogramme.
 - Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$. En déduire la nature du parallélogramme PQRS.
 - La droite (AP) est-elle tangente au cercle Γ circonscrit au triangle PQR ?

86 Déterminer, dans chacun des cas suivants, la transformation géométrique qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

- $z' + z = 0$;
- $z' - z = 2i$;
- $z' - iz = 0$;
- $z' + \frac{1}{2}z = 0$.

87 On considère les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 tels que :

$$z_1 = (1 - i)(1 + 2i) ; \quad z_2 = \frac{2 + 6i}{3 - i} ; \quad z_3 = \frac{-4i}{1 - i}.$$

On désigne par M_1, M_2 et M_3 les images respectives de z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe.

- Calculer les parties réelles et imaginaires de z_1, z_2 et z_3 . Placer M_1, M_2 et M_3 .
- Calculer $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$; en déduire la nature du triangle $M_1M_2M_3$.
- Déterminer l'affixe du point M_4 tel que le quadrilatère $M_2M_1M_3M_4$ soit un carré.

88 Soit A et B les points d'affixes respectives $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 - i\sqrt{3}$.

- Montrer que A et B sont sur un même cercle de centre O puis construire ces deux points.

- On note O' l'image de O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et B' l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Construire O' et B' et calculer leurs affixes.

- Soit I le milieu du segment [OB].
 - Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO'B' ?
 - Calculer les affixes des vecteurs \vec{AI} et $\vec{O'B'}$.
 - Qu'en déduit-on sur la conjecture faite en 3a ?

89 vu au BAC QCM

On considère les points A et Ω d'affixes respectives $a = -1 + \sqrt{3} + i$ et $\omega = -1 + 2i$.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.

- Placer sur une figure les points A et Ω , l'image B du point A par r , l'image C du point B par r et l'image D du point A par h .
- On note b, c et d les affixes de B, C et D. Dans chaque ligne du tableau, choisir la bonne réponse.

	Réponse I	Réponse II	Réponse III
$ a - \omega =$	2	4	$\sqrt{3} - 1$
$\arg(a - \omega) =$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{47\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
$(\vec{v}, \vec{\Omega C})$	$\arg((\omega - c)i)$	$(-\vec{v}, \vec{C\Omega})$	$\frac{2\pi}{3}$
$\omega =$	$\frac{1}{3}(a + b + c)$	$a + b + c$	$b - 2i$
$\frac{b - d}{a - d} =$	$\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}i$	$\frac{\sqrt{3}}{3}i$
Le point D est l'image de Ω par :	la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{A\Omega}$	l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$	la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{6}$

90 Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ radians et t la translation de vecteur \vec{u} .

- Soit M un point d'affixe z . On appelle M_1 d'affixe z_1 l'image de M par r et M' d'affixe z' l'image de M_1 par t .
 - Exprimer z_1 en fonction de z .
 - Exprimer z' en fonction de z_1 puis de z .
- Soit T la transformation géométrique qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = iz + 1$.
 - Déterminer l'affixe z_I du point I tel que $T(I) = I$.
 - En déduire que $z' - z_I = i(z - z_I)$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de T .

→ Que sais-je ?

Vrai ou faux ?

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

91 L'équation $\frac{z-2i}{1-z} = 1+i$ à l'inconnue complexe z a pour unique solution $1+i$.

92 Si les points A et B ont pour affixes les solutions de l'équation $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$, et le point C a pour affixe $-i$, le triangle ABC est équilatéral.

93 Soit trois points distincts A, B et C d'affixes a , b et c , alors $\arg\left(\frac{-c}{b-a}\right) = -(\overline{AB}, \overline{OC})$ (2π).

94 La rotation de centre A d'affixe 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a pour écriture complexe :

$$z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z + 1 - i\sqrt{3}$$

Dans les exercices 95 à 97, les points A, B et C ont, pour affixes respectives :

$$a = 1+i, \quad b = 1+i-2e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad c = (1+\sqrt{3})i.$$

95 B appartient au cercle de centre A et de rayon 2.

96 $(\vec{u}, \overline{AB}) = \frac{\pi}{6}$ (2π).

97 Le triangle ABC est un triangle rectangle.

Dans les exercices 98 à 102, A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe -1 . On nomme f l'application qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$ associe le point M' d'affixe z' donnée par

$$z' = \frac{z-1}{1-z}$$

98 Le point Q d'affixe $2-i$ est le seul antécédent du point Q' d'affixe i .

99 Le point B a pour seul antécédent 0.

100 Tous les points de la droite d'équation $x=1$ et distincts de A ont la même image par f .

101 M' appartient au cercle de centre O et rayon 1.

102 Si $M \neq A$ et $M' \neq B$, (AM) et (BM') sont orthogonales.

QCM

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Dans les exercices 103 à 109, une seule des propositions est juste.

103 La forme algébrique de $\frac{3-2i}{3+i}$ est :

A. $\frac{7}{8} - \frac{9}{8}i$; B. -2 ; C. $\frac{7}{10} - \frac{9}{10}i$; D. $-1+3i$.

104 La forme exponentielle de $-2-2i\sqrt{3}$ est :

A. $-4e^{i\frac{\pi}{3}}$; B. $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$; C. $4e^{i\frac{\pi}{3}}$; D. $4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

105 Le nombre complexe $-\sin \alpha + i \cos \alpha$, où α est un réel, a pour argument :

A. $-\alpha$; B. $\pi - \alpha$; C. $\alpha - \frac{\pi}{2}$; D. $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

106 Le nombre conjugué de $z^2 + 2iz$ ($z \in \mathbb{C}$) est :

A. $\bar{z}^2 + 2i\bar{z}$; B. $z^2 - 2iz$; C. $\bar{z}^2 - 2i\bar{z}$.

107 Soit A le point d'affixe $1+i$. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1-i| = |z|$ est :

- A. un cercle de centre A ;
- B. la droite d'équation $y = -x + 1$;
- C. le cercle de diamètre [AO] ;
- D. une droite privée d'un point.

108 L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$

(x, y réels), tels que $\arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2}$ (2π) est :

- A. un cercle de centre O ;
- B. une droite passant par O ;
- C. une demi-droite issue de O et privée de O ;
- D. un cercle de centre O privé de deux points ;
- E. un demi-cercle de centre O.

109 Soit f la transformation d'expression complexe $z' = iz - 4$.

- A. f a un unique point invariant ;
- B. f est la translation de vecteur $\vec{w} = -4\vec{u}$;
- C. f est une rotation d'angle $\pi/2$;
- D. f est une homothétie de rapport i .

→ Un sujet vu au BAC (extrait)

110 Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = z^2 - 4z$.

1. Soit A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

a. Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f .

b. On suppose que deux points ont la même image par f . Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit I le point d'affixe -3 .

a. Démontrer que $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b. Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3. a. Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$.

En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

b. Soit les points J et K d'affixes $z_J = 2$ et $z_K = -4$. Démontrer que tous les points M du cercle C de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

c. Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$. Donner la forme exponentielle de $(z_E + 4)$ et, à l'aide du a, démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E .

Nouvelle-Calédonie, novembre 2004.

Solution

1. a. $z_{A'} = (1 - i)^2 - 4(1 - i) = -4 + 2i$ et $z_{B'} = -4 + 2i$.

b. $M(m)$ et $N(n)$ ont la même image si et seulement si $m' = n'$.

Or $m' = n' \Leftrightarrow m^2 - 4m = n^2 - 4n$

$$\Leftrightarrow (m - n)(m + n - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m = n) \text{ ou } (m + n = 4).$$

C'est dire que $M = N$ ou que le milieu de $[MN]$, d'affixe $\frac{m+n}{2}$,

est le point P d'affixe 2 . Ainsi M et N ont la même image si et seulement si ils sont confondus ou symétriques par rapport à P .

2. a. $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si $\vec{MI} = \vec{OM}'$ c'est-à-dire $z_1 - z = z' - 0$, ce qui équivaut à $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b. Le discriminant de $z^2 - 3z + 3$ est $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$; l'équation a deux solutions conjuguées : $z_1 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$.

3. a. $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$.

Par suite, $|z' + 4| = |z - 2|^2$ et $\arg(z' + 4) = 2 \arg(z - 2) \pmod{2\pi}$.

b. Si $M \in C$, $JM = 2$ donc $|z - 2| = 2$ et $|z' + 4| = 2^2 = 4$, c'est-à-dire $KM' = 4$. M' appartient au cercle de centre K et de rayon 4 .

c. $z_E + 4 = -3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ sous forme trigonométrique (car $3 > 0$). Un point $M(z)$ a pour image E si et seulement si $z_E + 4 = (z - 2)^2$. Comme $z_E + 4 \neq 0$, ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} |z - 2|^2 = 3 \\ 2 \arg(z - 2) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases} \text{ puis à } \begin{cases} |z - 2| = \sqrt{3} \\ \arg(z - 2) = -\frac{\pi}{4} \pmod{\pi} \end{cases}$$

Autrement dit, $z - 2 = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ou $\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. On en déduit deux

points solutions d'affixes $z_1 = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$ et $z_2 = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Le jour du BAC

Question 1b :

Pour reconnaître que M et N sont symétriques par rapport à P , il faut savoir exprimer ceci en termes d'affixes, ce que l'on peut faire de deux façons :

• P est le milieu de $[MN]$:

$$z_P = \frac{m+n}{2}$$

• $\vec{PN} = -\vec{PM}$:

$$n - z_P = -(m - z_P).$$

Question 3b :

On peut traduire qu'un point $M(z)$ appartient au cercle C de centre $J(z_J)$ et de rayon $r = 2$:

• en termes de distance donc de module :

$$M \in C \Leftrightarrow JM = r$$

$$\Leftrightarrow |z - z_J| = r;$$

• en termes d'affixe (voir TP2) :

$$M \in C \Leftrightarrow z = z_J + re^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Ici la question 3a faisant intervenir $|z - 2|$, on utilise la première idée.

Question 3c :

Il faut se laisser guider par l'énoncé et utiliser 3a. On obtient alors le module et un argument du nombre $z - 2$; on connaît donc sa forme trigonométrique.

→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Différentes formes

111 Soit $z = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$ avec $\theta \in]-\pi ; +\pi[$.

1. Montrer que z est un imaginaire pur.
2. Exprimer $|z|$ en fonction de $\frac{\theta}{2}$.

112 vu au BAC QCM

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. On pose $z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :
 - a. $2\sqrt{2}$;
 - b. $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$;
 - c. $2 + \sqrt{2} + i(2 - \sqrt{2})$;
 - d. $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.
2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

- a. $4e^{i\frac{\pi}{4}}$;
- b. $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$;
- c. $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$;
- d. $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

- a. $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$;
- b. $2e^{i\frac{\pi}{8}}$;
- c. $2e^{i\frac{5\pi}{8}}$;
- d. $2e^{i\frac{3\pi}{8}}$.

4. $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

- a. $\frac{7\pi}{8}$;
- b. $\frac{5\pi}{8}$;
- c. $\frac{3\pi}{8}$;
- d. $\frac{\pi}{8}$.

113 Vrai ou Faux ?

Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

- (A) Si $|z| = |z'|$ alors $z = z'$ ou $z = -z'$.
- (B) Si $z' \neq 0$ et $\frac{|z|}{|z'|} = 1$, il existe $\theta \in [0 ; 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}z'$.
- (C) Si $|z| = 1$ et $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.
- (D) Si $|z| \geq |z'|$ alors $|z| = \frac{1}{2}|z + z'| + \frac{1}{2}|z - z'|$.

114 Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Écrire, sous forme trigonométrique, $z_1, z_2, Z = \frac{z_1}{z_2}$.
2. En déduire que :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

3. On considère l'équation d'inconnue réelle x :
 $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$.

- a. Résoudre cette équation dans \mathbb{R} .
- b. Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

115 Vrai ou Faux ?

Soit $z = 1 - \cos \theta + i \sin \theta$ où $\theta \in [0 ; \pi]$.

- (A) $|z| = \sqrt{2 - 2 \cos \theta}$;
- (B) $|z| = 2 \sin \frac{\theta}{2}$;
- (C) $\arg(z) = \frac{\theta}{2} (2\pi)$;
- (D) $\arg(z) = \frac{\pi - \theta}{2} (2\pi)$.

Équations

116 1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue Z :
 $Z^2 + (\sqrt{3} - 1)Z - \sqrt{3} = 0$.

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z :

- a. $z + \frac{1}{z} = 1$;
- b. $z + \frac{1}{z} = -\sqrt{3}$.

3. Soit P le polynôme défini, pour tout complexe z , par :

$$P(z) = z^4 + (\sqrt{3} - 1)z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (\sqrt{3} - 1)z + 1.$$

- a. Vérifier que l'équation $P(z)$ équivaut à :

$$\frac{P(z)}{z^2} = 0.$$

- b. En posant $Z = z + \frac{1}{z}$, exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de Z . En déduire les solutions de $P(z) = 0$.

117 1. Pour tout nombre complexe Z on pose :

$$P(Z) = Z^4 - 1.$$

- a. Factoriser $P(Z)$.
- b. En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P(Z) = 0$.
- c. Déduire de la question précédente les solutions

dans \mathbb{C} de l'équation d'inconnue z : $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.

2. a. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 5 cm). Placer les points A, B et C d'affixes :

$$a = -2 ; \quad b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i ; \quad c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$$

- b. Démontrer que les points O, A, B et C sont sur un cercle que l'on définira.

118 Donner sous forme algébrique les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z\bar{z} + z + \bar{z} = 4$.

124 Vers une nouvelle transformation

Soit A, B et C les points d'affixes $z_A = 3 - i$, $z_B = 2$ et $z_C = 3 - i$.

À chaque point M du plan d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z - 2 - i$.

1. Déterminer les points A', B' et C' associés aux points A, B et C.

Placer les points A, B, C, A', B' et C'.

2. a. Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et A'B'C'.

b. Que peut-on dire de ces deux triangles ?

3. Montrer qu'il existe un unique point M tel que $M' = M$. On notera ce point Ω et ω son affixe.

a. Pour $M \neq \Omega$, calculer $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$.

b. En déduire l'expression de $\Omega M'$ en fonction de ΩM et une mesure de l'angle $(\Omega M, \Omega M')$.

4. De la question 3, déduire une construction géométrique de M' à partir de M (on réalisera cette construction et on l'expliquera).

125 Soit α un nombre réel tel que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$(1 + iz)^3(1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3(1 + i \tan \alpha) \quad (E)$$

1. Soit z une solution de (E)

a. Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$.

b. En déduire que z est réel.

2. Soit z un nombre réel

a. Justifier qu'il existe un réel φ et un seul dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ tel que $z = \tan \varphi$.

b. Exprimer $\frac{1 + i \tan \varphi}{1 - i \tan \varphi}$ en fonction de $e^{i\varphi}$.

c. Montrer que z est solution de (E) si et seulement si φ est solution d'une équation (E') que l'on précisera.

d. Résoudre (E').

3. Résolution de (E)

Déduire des questions 1 et 2 que l'équation (E) admet trois solutions z_1, z_2, z_3 (on détaillera bien le raisonnement).

126 **CD vu au BAC** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe 1 et pour tout θ appartenant à $[0; 2\pi[$, le point M d'affixe $z = e^{i\theta}$. On désigne par P le point d'affixe $1 + z$ et par Q le point d'affixe z^2 .

1. À partir du point M, donner une construction géométrique du point P et du point Q. Les points O, A, M, P et Q seront placés sur une même figure.

2. Déterminer l'ensemble des points P pour θ appartenant à $[0; 2\pi[$. Tracer cet ensemble sur la figure.

a. Soit S le point d'affixe $1 + z + z^2$ où z est toujours l'affixe de M. Construire S.

b. Pour quels points M, le point S est-il confondu avec O ?

c. Dans le cas où S est différent de O, tracer la droite (OS). Quelle conjecture apparaît, relativement au point M ?

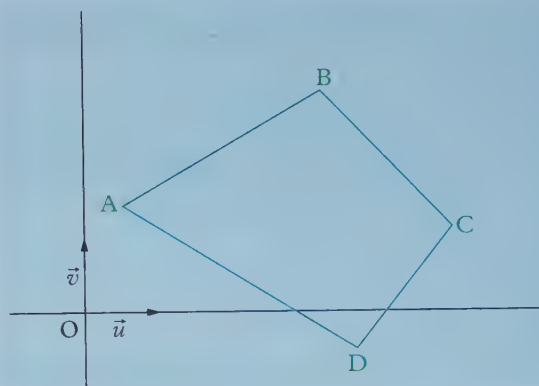
Démontrer que le nombre $\frac{1 + z + z^2}{z}$ est réel, quel que soit θ appartenant à $[0; 2\pi[$.

Conclure sur la conjecture précédente.

Pour chercher

127 Configurations

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.



On considère :

- un quadrilatère convexe ABCD (figure ci-dessus) ;
- extérieurement au quadrilatère ABCD, le point M_1 (respectivement M_2, M_3, M_4) tel que le triangle AM_1B (respectivement BM_2C, CM_3D, DM_4A) soit rectangle et isocèle de sommet M_1 (respectivement M_2, M_3, M_4).

Démontrer que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ sont orthogonaux et ont même longueur.

128 Soit A, B, C trois points du cercle trigonométrique (C), deux à deux distincts. On note a, b, c leurs affixes respectives.

Montrer que les points M, N et P d'affixes $a + b$, $b + c$ et $c + a$ sont sur un même cercle Γ dont on donnera le centre et le rayon.

129 On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Soit trois points A, B et C distincts, d'affixes respectives a, b et c .

1. Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

2. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.

Ensemble de points

130 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe i . À tout point M du plan, distinct de A et d'affixe z , on associe M' d'affixe $z' = \frac{iz}{z-i}$.

1. a. Déterminer les points M du plan tels que l'on ait $M = M'$.

b. Déterminer le point B' associé au point B d'affixe 1 ; déterminer le point C tel que le point associé C' ait pour affixe 2.

2. Étant donné z complexe, distinct de i , on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, x', y et y' réels.

a. Déterminer x' et y' en fonction de x et de y .

b. Déterminer l'ensemble Γ des points M, distincts de A, pour lesquels z' est réel.

c. Placer A, B, B', C, C' et Γ sur une figure (unité graphique : 4 cm).

3. Soit z un nombre complexe différent de i .

a. Montrer que $z' - i = \frac{-1}{z-i}$.

b. On suppose que M, d'affixe z , appartient au cercle Γ' de centre A et de rayon 1. Montrer que M' appartient à Γ' . La réciproque est-elle vraie ?

131 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm). On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$, -1 et i . On considère l'application f qui, à tout point M différent de A et d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z+1}{z-2i}$.

1. a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b. Déterminer l'affixe du point C', image de C par f . Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?

c. Montrer que le point C admet un unique antécédent par f , que l'on appellera C''. Quelle est la nature du triangle BCC'' ?

2. Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z' (lorsque celui-ci existe).

3. Déterminer, en utilisant la question précédente, les ensembles suivants :

a. l'ensemble E_0 des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre réel strictement négatif ;

b. l'ensemble E_1 des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre imaginaire pur non nul ;

c. l'ensemble E_2 des points M dont les images appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

132 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). À tout nombre complexe distinct de 4, on associe le nombre $Z = \frac{iz-4}{z-4}$.

On note A le point d'affixe 4 et on considère l'ensemble C des points M du plan, distincts de A et d'affixe z tels que Z soit réel.

On se propose de déterminer et de construire cet ensemble C par deux méthodes différentes.

1. Méthode algébrique

a. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X et Y réels.

Exprimer X et Y en fonction de x et y .

b. Écrire une équation cartésienne de C ; caractériser et construire C.

2. Méthode géométrique

On considère le point B d'affixe $-4i$.

a. Vérifier que $\frac{iz-4}{z-4}$ est réel si et seulement si le

nombre $\frac{z+4i}{z-4}$ est imaginaire pur (on pourra remarquer que $iz-4 = i(z+4i)$).

b. En interprétant géométriquement le résultat ci-dessus, retrouver l'ensemble C.

133 **CD** Soit C et C' deux cercles de centres respectifs A et A' et de même rayon R tangents extérieurement en O.

À tout point M de C, on associe le point M' de C' tel que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2}$ et le point H milieu de

$[MM']$.

On choisit pour repère le repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ tel que A' ait pour affixe $a' = R$.

1. Quelle est l'affixe a de A ?

2. Soit t une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.

a. Exprimer en fonction de R et de t l'affixe z de M.

b. Exprimer de même l'affixe z' de M'.

3. En déduire l'affixe de H et l'exprimer sous forme trigonométrique.

4. Quel est le lieu géométrique des points H quand M décrit C ?

Remarque : Cet exercice est traité par une autre méthode, dans le manuel de spécialité, dans l'exercice 44, chapitre 4, p. 131.

→ PROBLÈMES

134 vu au BAC Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm). On appelle B le point d'affixe i et M_1 celui d'affixe :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} (1-i).$$

- Déterminer le module et un argument de z_1 .
- Soit M_2 le point d'affixe z_2 , image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer le module et un argument de z_2 .
Montrer que le point M_2 est un point de la droite (D) d'équation $y=x$.

- Soit M_3 le point d'affixe z_3 , image de M_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}+2$.

a. Montrer que $z_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} (1+i)$.

- b. Montrer que les points M_1 et M_3 sont situés sur le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

4. Construire, à la règle et au compas, les points M_1 , M_2 et M_3 , en utilisant les questions précédentes ; on précisera les différentes étapes de la construction.

135 Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $a=-4$, $b=-1+i\sqrt{3}$ et $c=-1-i\sqrt{3}$.

- a. Écrire b et c sous forme exponentielle.
- Placer A, B et C en laissant apparents les traits de construction. On complétera cette figure au fur et à mesure des questions.
- Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
- Construire le point D, point d'affixe $d=\sqrt{3}+i$.
- On nomme E l'image de B par la translation de vecteur \overrightarrow{OD} .
 - Déterminer l'affixe e de E.
 - Démontrer que ODEB est un carré.
- On appelle F l'image de D par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
 - Déterminer l'affixe f de F.
 - Vérifier que F et D sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- Soit G le symétrique de E par rapport à l'axe des abscisses.
 - Quelle est la nature du quadrilatère OCGF ?
 - Quelle est la nature du triangle AGE ?
 - a. Que peut-on dire des trois points A, B et E ? et des points A, C et G ?
 - Justifier qu'il existe une homothétie h transformant le triangle ABC en AEG et déterminer son rapport.
 - Quelles sont les aires des triangles ABC et AEG ? Quelle vérification peut-on faire ?

136 Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

L'unité graphique est 2 cm.

On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $3+2i$.

On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$.

- Calculer les affixes des points O' et B' , images respectives des points O et B par f . Placer les points A, B, O' et B' dans le plan.
- a. Calculer, pour tout complexe z différent de 1, le produit $(z'-1)(z-1)$.
b. En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a les deux relations suivantes :

(i) $AM \cdot AM' = 2$

(ii) $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. Démontrer que, si M appartient au cercle C de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon. Construire C et C' .

- Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.
 - Démontrer que si M est un point autre que A de la demi-droite (d) d'origine A passant par B, alors M' appartient à une demi-droite que l'on précisera.
5. On appelle P le point d'intersection du cercle C et de la demi-droite (d) . Placer, en le justifiant, son image P' sur la figure.

137 Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle A le point d'affixe $-2i$.

À tout point M du plan d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $z' = -2\bar{z} + 2i$.

- On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2i$. Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés aux points A et B. Placer ces points sur un dessin.
- Démontrer que, pour tout point M d'affixe z , $|z'+2i| = 2|z+2i|$; interpréter géométriquement cette égalité.
- Pour tout point M distinct de A, on appelle θ un argument de $z+2i$.
 - Montrer que M' est distinct de A.
 - Justifier que θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.
 - Démontrer que $(z+2i)(z'+2i)$ est un réel négatif ou nul.
 - En déduire un argument de $z'+2i$ en fonction de θ .
 - Qu'en déduit-on pour les demi-droites $[AM]$ et $[AM']$?
- En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé à M. Illustrer par une figure.

138 Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = z^2 - 4z - 2i$.

1. On appelle E_1 l'ensemble des points M tels que $f(M)$ appartienne à l'axe des abscisses. Démontrer que M appartient à E_1 si et seulement si ses coordonnées $(x ; y)$ vérifient $y(x-2) = 1$.
Tracer E_1 .

2. Déterminer une équation de l'ensemble E_2 des points M pour lesquels $f(M)$ appartient à l'axe des ordonnées.

Vérifier que cette équation peut s'écrire :

$$(x-2)^2 - y^2 = 4.$$

3. On se propose de tracer E_2 .

Soit g et h les fonctions définies pour tout réel x n'appartenant pas à l'intervalle $]0 ; 4[$ par :

$$g(x) = \sqrt{x(x-4)} \text{ et } h(x) = -g(x).$$

a. Étudier les variations de g puis tracer sa courbe représentative C_1 dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

b. En déduire la courbe C_2 représentative de h dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

c. Justifier que $E_2 = C_1 \cup C_2$.

139 vu au BAC Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On veut résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) :

$$z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0.$$

a. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive $(z-2)(z^2 + az + b) = 0$.

b. Résoudre (E).

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant $z^2 - 4 = 4 - \bar{z}^2$.

a. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M . Montrer que M appartient à H si et seulement si $x^2 - y^2 = 4$.

b. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $2, -3 - i\sqrt{5}, -3 + i\sqrt{5}$.

Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

a. Déterminer les affixes de A', B' et C' , images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous forme algébrique).

b. On note M' l'image par r du point M d'affixe z . On note z' l'affixe de M' . Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y , celles de z' sont notées x' et y' . On note (H') l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).

• Exprimer x et y en fonction de x' et y' .

• En utilisant la question 2 a, prouver que :

M' appartient à (H') si et seulement si $x'y' = -2$.

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A', B', C' , la courbe (H'), puis la courbe (H').

140 avec ROC Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. a. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (1) : $\frac{z-2}{z-1} = z$.

b. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (2) : $\frac{z-2}{z-1} = i$.

On donnera la solution sous forme algébrique.

2. On prend pour prérequis le résultat suivant : pour tous nombres complexes non nuls z et z' , $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$.

a. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

b. Démontrer que si les points P, Q, R et S d'affixes p, q, r et s sont tels que $P \neq Q$ et $R \neq S$, on a :

$$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}) = \arg\left(\frac{s-r}{q-p}\right) \pmod{2\pi}.$$

3. Soit M, A et B les points d'affixes respectives $z, 1$ et 2 .

a. Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.

b. Retrouver géométriquement la solution de (2).

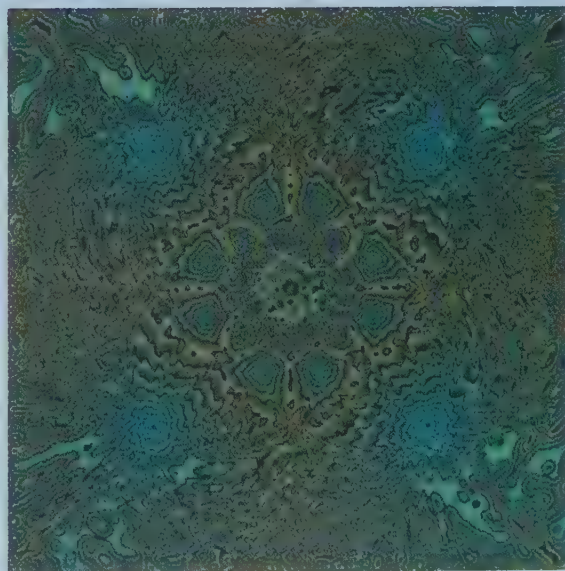
4. a. Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution dans \mathbb{C} de l'équation

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i, \text{ où } n \text{ désigne un entier naturel non nul}$$

donné, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

b. Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation (3) :

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i.$$



J-F. Colonna a créé cette image à partir de la spirale d'Ulam 512×512 (spirale de nombres premiers). Il a utilisé la transformation du plan complexe qui, à tout point d'affixe z , associe le point d'affixe $z' = 1/z$. Il a ensuite appliqué sur le résultat un filtre qui a produit les couleurs.

141 avec ROC Pentagone régulier

Partie A. Un résultat préliminaire

On rappelle que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

- Démontrer en utilisant cette définition que pour tous réels θ et θ' , $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
- En déduire que pour tout n de \mathbb{N}^* , $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Partie B. Construction d'un pentagone régulier

On pose $\omega = e^{i \frac{2\pi}{5}}$.

- Calculer ω^5 .
 - En déduire que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
- Montrer que pour tout nombre complexe non nul z ,

$$\frac{1}{z^2} (1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1.$$

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$.
 - En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
- Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit K , A et B les points d'affixes respectives $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}i$ et ω , et C le cercle de centre K passant par A .

- Déterminer une équation du cercle C .
- C coupe l'axe $(O; \vec{u})$ en deux points H et H' , H désignant le point d'abscisse positive.

Montrer que H a pour abscisse $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

- En déduire une construction simple du point B .
- Achever la construction du pentagone régulier de centre O dont B est un sommet (expliquer et justifier).

142 vu au BAC Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

- Placer ces points sur un dessin.

- Vérifier que $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i \frac{\pi}{3}}$.

- En déduire la nature du triangle ABC .
- Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC . Tracer le cercle Γ_1 .
- Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2 . Préciser son rayon.
 - Construire Γ_2 .
 - Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2 .

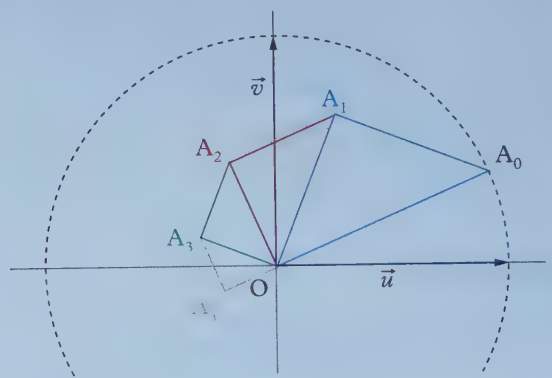
- On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 - Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.
 - Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1 .
- Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z , on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M' .

On posera $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1 .

- Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b .
 - Déterminer en fonction de a l'affixe du point $r(C)$, image de C par la rotation r ; en déduire que le point $r(C)$ appartient à un cercle fixe que l'on définira.
- Vérifier que ce cercle passe par C_1 .

143

On considère le cercle C de centre O et de rayon 1. À partir d'un point A_0 de C , on construit A_1 tel que le triangle OA_0A_1 soit direct, isocèle et rectangle en A_1 . En procédant de même, on construit successivement les points A_2, A_3, A_4, \dots comme sur la figure ci-dessous.



On définit ainsi une suite de points (A_n) où $n \in \mathbb{N}$; pour chaque n , l'affixe du point A_n est notée z_n .

Partie A. Étude de A_1

- Montrer que l'affixe de A_1 est $z_1 = \frac{1+i}{2} z_0$.
- On rappelle que le point A_0 appartient au cercle C et on désigne par θ une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OA_0})$.
En déduire l'écriture sous forme exponentielle de z_0 .
- Déterminer l'écriture sous forme exponentielle de $\frac{1+i}{2}$. En déduire celle de z_1 .

Partie B. Une spirale

Plus généralement, on peut montrer de même que, pour tout n dans \mathbb{N} :

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n.$$

- En déduire $|z_{n+1}|$ en fonction de $|z_n|$.
- Préciser la nature de la suite $(|z_n|)$ et en déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$: $|z_n| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.
- À partir de quel entier n_0 , tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,001?
 - On s'intéresse désormais à la longueur L_n de la ligne brisée $A_0A_1 \dots A_n$.

- a. Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n A_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}$.
- b. Calculer, en fonction de n , la longueur $L_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{k+1}$.
- c. En déduire la limite de L_n quand n tend vers l'infini et interpréter géométriquement le résultat.

144 CD vu au BAC Suites et complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note C le cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et A le point de C d'affixe R .

Étant donné un entier $n \geq 2$, on note r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

On considère la suite des points $(M_k)_{k \geq 0}$ de C définie par la relation de récurrence $M_{k+1} = r(M_k)$ et la condition initiale $M_0 = A$.

On note z_k l'affixe de M_k .

1. a. Pour tout $k \geq 0$, exprimer z_{k+1} en fonction de z_k .

b. Démontrer que $z_k = R e^{i \frac{2k\pi}{n}}$, pour tout $k \geq 0$ (on fera un raisonnement par récurrence sur k pour

montrer que $\left(e^{i \frac{2\pi}{n}}\right)^k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$).

c. Comparer M_n et M_0 .

d. Faire la figure lorsque $n = 16$ (on prendra $R = 4$ cm).

2. a. Prouver que, pour tout $k \geq 0$,

$$M_k M_{k+1} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

b. On note $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_{n-1} M_n$ le périmètre du polygone régulier $(M_0 M_1 M_2 \dots M_n)$. Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement le résultat ainsi obtenu.

145 Inversion

Ce problème peut être préparé par le TP 5 page 272. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère l'application T qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M'

d'affixe $z' = \frac{16}{\bar{z}}$ où \bar{z} désigne le conjugué de z .

On fera une figure avec pour unité graphique 1 cm et on la complétera au fur et à mesure de l'exercice.

1. a. Soit P le point d'affixe $1+i$. Déterminer l'image P' de P par T puis l'image P'' de P' par T .
b. Montrer que, pour tout point M autre que O , $T(M') = M$.

2. Pour $M \neq O$, montrer que :

$$(\overline{OM}, \overline{OM'}) = 0 \quad (2\pi).$$

Que peut-on en déduire pour la position des points O , M et M' ?

3. Soit I l'ensemble des points invariants par T , c'est-à-dire des points M tels que $T(M) = M$. Montrer que $M(z)$ est invariant par T si et seulement si $|z| = 4$. En déduire l'ensemble I .

4. Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

a. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

b. De la question 1b, déduire que :

$$x = \frac{16x'}{x'^2 + y'^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{16y'}{x'^2 + y'^2}.$$

5. On note D la droite d'équation $x + y = 2$ et Γ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 8x - 8y = 0$.

a. Déterminer le centre Ω de Γ et son rayon.

b. Montrer que $M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in \Gamma \\ M' \neq O \end{cases}$. Préciser

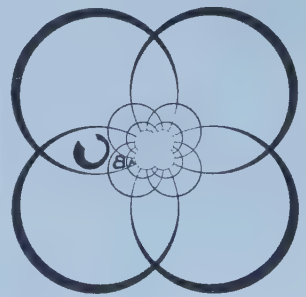
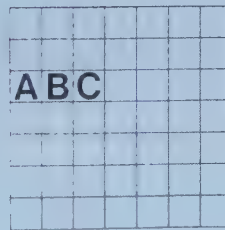
l'image $T(D)$ de la droite D par T .

c. En déduire (sans calcul) que $\Gamma - \{O\}$ a pour image D par T .

6. Soit N le point de Γ diamétralement opposé à O .
a. Justifier par des résultats précédents que $N' \in (ON)$ et que $N' \in D$.

b. Exprimer l'affixe $z_{\Omega'}$ de $\Omega' = T(\Omega)$ en fonction de l'affixe $z_{N'}$ de N' .

c. En déduire une construction géométrique de Ω' .



Un damier transformé par inversion ressemble à une rosace. L'extérieur se retrouve au milieu et la case centrale s'étale sur la périphérie.

Activité 1 → Repérage dans l'espace

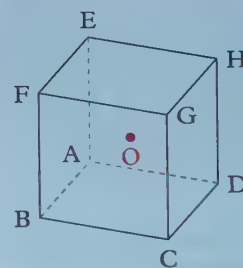
OBJECTIF

Lire et calculer les coordonnées d'un point dans un repère de l'espace.

On considère le cube ABCDEFGH de centre O, représenté ci-contre.

Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H et O dans chacun des repères suivants :

- $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$;
- $(B ; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$;
- $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.

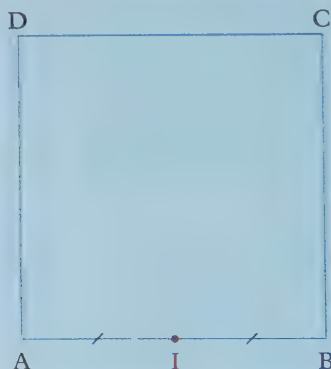


Activité 2 → Somme de vecteurs

OBJECTIF

Mettre en œuvre l'expression vectorielle du barycentre.

Soit ABCD un carré. On appelle G le barycentre du système de points pondérés $(A ; 1)$, $(B ; 1)$, $(C ; 2)$, $(D ; -2)$ et I le milieu de $[AB]$.



- Construire le point G.
- Pour tout point M du plan, on définit les vecteurs :

$$\vec{U} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$$
 et $\vec{V} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.
 - Exprimer \vec{U} en fonction de \overrightarrow{MG} .
 - Montrer que \vec{V} est indépendant de M.
- Déterminer l'ensemble des points M tels que :
 - \vec{U} et \vec{V} soient colinéaires ;
 - $\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\|$.

Activité 3 → Représentation paramétrique

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de l'espace.

Pour tout réel k , on considère le point M_k de coordonnées

$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2k \\ z = 1 + 2k \end{cases}$$

On nomme E l'ensemble des points M_k lorsque k décrit \mathbb{R} .

OBJECTIF

Caractériser analytiquement une droite dans l'espace.

A ■ Une conjecture

- Calculer les coordonnées des points $A = M_0$ et $B = M_1$ obtenus pour $k = 0$ et $k = 1$.
- Calculer les coordonnées des points M_{-1} et M_2 et montrer qu'ils appartiennent à (AB) .
- On considère les points $C(3 ; -4 ; -3)$ et $D(0 ; 1 ; 0)$. Appartiennent-ils à la droite (AB) ? à l'ensemble E ?
- Quelle conjecture peut-on faire sur E ?

B ■ Une caractérisation

- Montrer que pour tout réel k , $\overrightarrow{AM_k} = k\overrightarrow{AB}$.
Qu'en déduit-on pour l'ensemble E ?
- Donner l'abscisse de M_k sur la droite (AB) munie du repère $(A ; \overrightarrow{AB})$.
 - Quel est l'ensemble des points M_k si k décrit $[0 ; 1]$? $[0 ; +\infty[$? $]-\infty ; 0]$? $[-1 ; 1]$?

Remarque : le réel k est appelé « paramètre » du système.

Activité 4 → Barycentre et espace

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires de l'espace. On nomme E le barycentre de $(A ; 1)$ et $(B ; 2)$, G le centre de gravité du triangle ECD , I le milieu de $[CD]$.

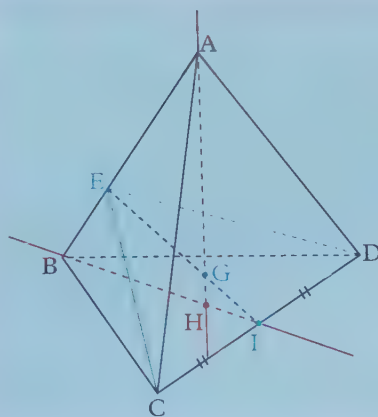
- (BI) est-elle dans le plan (AEG) ?
 - (AC) et (EI) sont-elles sécantes ?
 - (AG) et (BI) sont-elles sécantes ? On nomme H leur point d'intersection.

2. a. Montrer que le barycentre L de $(A ; 1)$, $(B ; 2)$, $(C ; 3)$ et $(D ; 3)$ est confondu avec G .

b. Soit K le barycentre de $(B ; 2)$, $(C ; 3)$ et $(D ; 3)$.
Montrer que $G \in (AK)$.

c. Montrer que $H = K$.

3. En déduire \overrightarrow{AH} en fonction de \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{BH} en fonction de \overrightarrow{BI} .



OBJECTIF

Réinvestir les positions de droites et de plans et l'associativité du barycentre.

1. Barycentre de n points pondérés

A ■ Existence et unicité

Théorème 1 et définition 1 →

Soit $(A_1 ; a_1), (A_2 ; a_2), \dots, (A_n ; a_n)$ n points pondérés (avec $n > 1$).

Si la somme $\sum_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0$ est non nulle, il existe un unique point G de

l'espace tel que $\sum_{i=1}^{i=n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

G est appelé le barycentre de ces n points pondérés.

Remarques

- Le barycentre est indépendant de l'ordre des points.
- Si tous les coefficients a_1, a_2, \dots, a_n sont égaux et non nuls, G est l'**isobarycentre** des points A_1, A_2, \dots, A_n :
- $n = 2$, G est le milieu de $[A_1 A_2]$;
- $n = 3$, G est le centre de gravité du triangle $A_1 A_2 A_3$.
- **Homogénéité** : on ne change pas le barycentre de n points pondérés en multipliant tous les coefficients par un même nombre non nul.

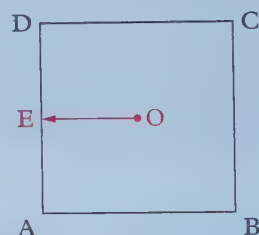
Exemples :

- Soit un carré $ABCD$ de centre O .

Le barycentre E de $(A ; 1), (B ; -1), (O ; 2)$ est défini

par $\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EO} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA}$.

E est le milieu de $[AD]$.



- Soit G le barycentre de $(A ; \frac{1}{2}), (B ; -\frac{1}{3}), (C ; \frac{3}{4})$.

En multipliant tous les coefficients par 12, G est aussi le barycentre de $(A ; 6), (B ; -4)$ et $(C ; 9)$.

B ■ Réduction d'une somme vectorielle

Propriété 1 →

Soit $(A_1 ; a_1), (A_2 ; a_2), \dots, (A_n ; a_n)$ n points pondérés (avec $n > 1$).

1. Si $\sum_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0$ alors pour tout point M de l'espace,

$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i \right) \overrightarrow{MG}$, G est le barycentre des n points pondérés.

2. Si $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = 0$ alors le vecteur $\sum_{i=1}^{i=n} a_i \overrightarrow{MA_i}$ est indépendant de M .

→ DÉMONSTRATIONS

■ Théorème 1

Pour tout point M de l'espace, on peut écrire en utilisant la relation de Chasles :

$$a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{A_1A_n}.$$

$$a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = \vec{0} \text{ équivaut à } a_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{A_1A_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{A_1M}.$$

Comme $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$, nous obtenons :

$$\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} (a_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{A_1A_n}).$$

Le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} (a_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{A_1A_n})$ est déterminé par les réels a_1, a_2, \dots, a_n et les points

A_1, A_2, \dots, A_n .

Il existe donc un seul point M de l'espace tel que $\overrightarrow{A_1M} = \vec{u}$.

Ce point M, en général noté G, est le **barycentre des n points pondérés**.

■ Propriété 1

• Si $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$

$$a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{MG} + a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n}.$$

G étant le barycentre de $(A_1 ; a_1), (A_2 ; a_2), \dots, (A_n ; a_n)$, $a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ d'où :

$$a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{MG}.$$

• Si $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$

Comme $a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{A_1A_n}$, il reste :

$$a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = a_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{A_1A_n}, \text{ pour tout point M, vecteur indépendant de M.}$$

→ APPLICATION

Exercice 1 Réduire une somme vectorielle

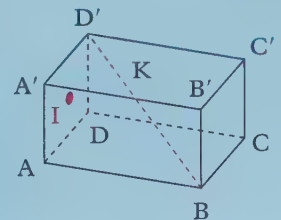
Soit un parallélépipède rectangle ABCDA'B'C'D'.

I est le centre de la face AA'D'D et K le barycentre de $(B ; 1), (D' ; 2)$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{ID'} = \overrightarrow{IC'}$.

b. Calculer $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{ID'}$ en fonction de \overrightarrow{IK} .

2. Que peut-on en conclure ?



Solution

1. a. ABC'D' est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{BC'}$. Il en résulte $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{ID'} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{IC'}$.

b. Par la propriété 1, $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{ID'} = 3\overrightarrow{IK}$.

2. De 1a et 1b on tire $\overrightarrow{IC'} = 3\overrightarrow{IK}$, donc I, K, C' sont alignés.

voir aussi exercices n° 14, 15

C ■ Coordonnées et affixe

1. Coordonnées

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal du plan.

Propriété 2 →

Soit A_1, A_2, \dots, A_n n points du plan, a_1, a_2, \dots, a_n n réels de somme non nulle ($n \geq 2$) et G le barycentre de $(A_1 ; a_1), (A_2 ; a_2), \dots, (A_n ; a_n)$. Soit $(x_1 ; y_1), (x_2 ; y_2), \dots, (x_n ; y_n)$ les coordonnées respectives de A_1, A_2, \dots, A_n et $(x_G ; y_G)$ les coordonnées de G . Alors :

$$x_G = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Remarque

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, la troisième coordonnée est :

$$z_G = \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

2. Affixe

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct du plan.

Propriété 3 →

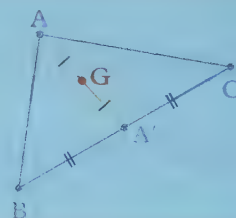
Soit $z_{A_1}, z_{A_2}, \dots, z_{A_n}$ les affixes respectives de A_1, A_2, \dots, A_n et Z l'affixe de G . Alors :

$$Z = \frac{a_1 z_{A_1} + a_2 z_{A_2} + \dots + a_n z_{A_n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

D ■ Associativité du barycentre

Propriété 4 →

Dans la recherche du barycentre de trois points massifs ou plus, on peut remplacer des points dont la somme des masses est non nulle par leur barycentre affecté de la masse totale de ces points.



E ■ Conservation du barycentre

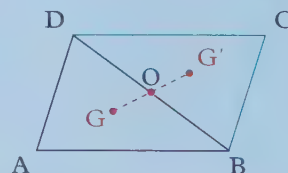
Propriété 5 →

ADMIS

Soit f une transformation du plan, l'image $f(G)$ du barycentre G des points pondérés $(A_1 ; a_1), (A_2 ; a_2), \dots, (A_n ; a_n)$ est le barycentre de $(f(A_1) ; a_1), (f(A_2) ; a_2), \dots, (f(A_n) ; a_n)$. On dit que f conserve le barycentre.

Exemple :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O . L'image du centre de gravité G du triangle ABD par la symétrie de centre O est le centre de gravité G' du triangle CDB.



→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 2

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ repère du plan,

a_1, a_2, \dots, a_n sont n réels ($n \geq 2$) tels que $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$, G étant le barycentre de $(A_1 ; a_1), (A_2 ; a_2), \dots, (A_n ; a_n)$, par la propriété 1 :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\vec{OG} = a_1\vec{OA}_1 + a_2\vec{OA}_2 + \dots + a_n\vec{OA}_n.$$

D'où $x_G = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ et $y_G = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$.

Lorsqu'on a un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on déduit de même z_G .

■ Propriété 3

Par la propriété 2, $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\vec{OG} = a_1\vec{OA}_1 + a_2\vec{OA}_2 + \dots + a_n\vec{OA}_n$.

Soit $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)Z = a_1z_{A_1} + a_2z_{A_2} + \dots + a_nz_{A_n}$, comme $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$

$$Z = \frac{a_1z_{A_1} + a_2z_{A_2} + \dots + a_nz_{A_n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

■ Propriété 4

Soit $(A_1 ; a_1), (A_2 ; a_2), \dots, (A_n ; a_n)$, n points pondérés ($n \geq 3$) tels que $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$. p de ces points, avec $2 \leq p \leq n-1$, sont tels que la somme de leurs coefficients est non nulle, soit H le barycentre de ces p points.

Le barycentre G de $(A_1 ; a_1), (A_2 ; a_2), \dots, (A_n ; a_n)$, étant indépendant de l'ordre des points, on peut revoir la numérotation des n points et de leurs coefficients de telle sorte que les p points deviennent $(A_1 ; a_1), (A_2 ; a_2), \dots, (A_p ; a_p)$, nous obtenons alors par la propriété de réduction vectorielle :

$$a_1\vec{GA}_1 + a_2\vec{GA}_2 + \dots + a_p\vec{GA}_p = (a_1 + a_2 + \dots + a_p)\vec{GH}.$$

D'où $a_1\vec{GA}_1 + a_2\vec{GA}_2 + \dots + a_p\vec{GA}_p + a_{p+1}\vec{GA}_{p+1} + \dots + a_n\vec{GA}_n = \vec{0}$ équivaut à :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)\vec{GH} + a_{p+1}\vec{GA}_{p+1} + \dots + a_n\vec{GA}_n = \vec{0}.$$

Posons $\gamma = a_1 + a_2 + \dots + a_p$, $\gamma + a_{p+1} + \dots + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ donc $\gamma + a_{p+1} + \dots + a_n \neq 0$.

G est donc le barycentre de $(H ; \gamma)$ et des $(n-p)$ points $(A_{p+1} ; a_{p+1}), \dots, (A_n ; a_n)$.

→ APPLICATION

Exercice 2 Étudier des droites concurrentes

On considère un tétraèdre $ABCD$. I est le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$, K le barycentre de $(C ; 1)$ et $(D ; 3)$, L le barycentre de $(A ; 1)$ et $(D ; 3)$. G est le centre de gravité du triangle ABC et P le barycentre de $(A ; 1), (B ; 1), (C ; 1), (D ; 3)$.

1. Montrer que P est le milieu de $[DG]$.
2. Montrer que P est le point de concours des droites (DG) , (IK) et (JL) .

Solution

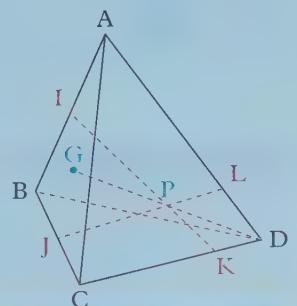
1. En utilisant l'associativité du barycentre, on trouve que P est le barycentre de $(G ; 3)$ et $(D ; 3)$, donc le milieu de $[DG]$.

2. En utilisant l'associativité du barycentre, on trouve que P est le barycentre de $(I ; 2)$ et $(K ; 4)$. Il est aussi le barycentre de $(J ; 2)$ et $(L ; 4)$.

Il est donc situé sur les droites (IK) et (JL) .

Par 1, P est le milieu de $[DG]$, il est donc aussi sur la droite (DG) .

Conclusion : P est situé sur les droites (IK) , (JL) et (DG) , distinctes deux à deux. C'est donc le point de concours de ces trois droites.



voir aussi exercice n° 61

2. Caractérisations barycentriques

A ■ Droite et segment

Propriété 6 →

A et B sont deux points distincts de l'espace.

- L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB).
- L'ensemble des barycentres de (A ; a) et (B ; b), où $a + b \neq 0$ et a et b de même signe, est le segment [AB].

Exemples :

- Soit M le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AM} = -1,5\overrightarrow{AB}$, M est le barycentre de (A ; 5) et (B ; -3) :



- Le barycentre G de (A ; 1), (B ; 2) est un point du segment [AB] :



B ■ Plan et triangle

Propriété 7 →

Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace.

- L'ensemble des barycentres des points pondérés (A ; a), (B ; b), (C ; c) avec a, b, c décrivant \mathbb{R} tels que $a + b + c \neq 0$ est le plan (ABC).
- L'ensemble des barycentres des points pondérés (A ; a), (B ; b), (C ; c), avec a, b, c, réels de même signe et de somme non nulle, est la réunion de l'intérieur du triangle ABC et de ses côtés.

Exemple : Triangle RVB

On considère un triangle équilatéral ABC, de côté égal à 1.

Par un point M intérieur au triangle, on trace les parallèles aux côtés. On obtient ainsi trois triangles équilatéraux de côtés respectifs a, b, c comme sur la figure ci-contre.

Alors M est le barycentre de (A ; a), (B ; b) et (C ; c).

En effet, C_1MB_1A , C_2MA_1B , A_2MB_2C sont des parallélogrammes donc : $a + b + c = 1$ et

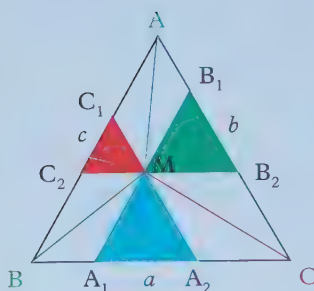
$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = a(\overrightarrow{MC}_1 + \overrightarrow{MB}_1) + b(\overrightarrow{MC}_2 + \overrightarrow{MA}_1) + c(\overrightarrow{MA}_2 + \overrightarrow{MB}_2).$$

$$\overrightarrow{MC}_1 = c\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{MB}_1 = b\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{MC}_2 = c\overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{MA}_1 = a\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{MA}_2 = a\overrightarrow{AC};$$

$$\overrightarrow{MB}_2 = b\overrightarrow{BC}.$$

D'où :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = ac\overrightarrow{CA} + ab\overrightarrow{BA} + bc\overrightarrow{CB} + ba\overrightarrow{AB} + ca\overrightarrow{AC} + cb\overrightarrow{BC} = \vec{0}.$$



Point Info

Ce triangle est le triangle équilatéral de couleurs utilisé par Young puis Forbès et Maxwell pour représenter les couleurs obtenues en mélangeant trois couleurs primaires, ici bleu (B), vert (V) et rouge (R). Chaque point M représente une couleur composée de trois masses placées aux trois sommets et de valeurs égales aux côtés des triangles équilatéraux obtenus par le tracé des parallèles passant par M.

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 6

• Caractérisation barycentrique de la droite (AB)

Soit a, b deux réels tels que $a + b \neq 0$ et M barycentre de $(A ; a), (B ; b)$, alors $\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$, donc $M \in (AB)$.

Réciproquement : soit $M \in (AB)$, alors il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$.

Il en résulte $\overrightarrow{AM} = t(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$, c'est-à-dire $\vec{0} = (1-t)\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB}$ avec $(1-t) + t \neq 0$ donc M est barycentre de $(A ; 1-t), (B ; t)$.

• Caractérisation barycentrique du segment [AB]

Soit a et b deux réels de même signe tels que $a + b \neq 0$ et M barycentre de $(A ; a), (B ; b)$.

Alors $\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$. a et b étant de même signe, a, b et $a + b$ sont de même signe et $0 \leq \frac{b}{a+b} \leq 1$, donc M est un point du segment $[AB]$.

Réciproquement : soit M un point du segment $[AB]$, alors il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$, avec $0 \leq t \leq 1$.

Comme dans le cas de la droite (AB) , M est le barycentre de $(A ; 1-t), (B ; t)$. $0 \leq t \leq 1$, donc $0 \leq 1-t$.

M est donc le barycentre des points A et B affectés de coefficients de même signe.

■ Propriété 7

• Caractérisation barycentrique du plan (ABC)

A, B, C sont trois points non alignés. Soit a, b, c trois réels tels que $a + b + c \neq 0$ et M le barycentre de $(A ; a), (B ; b)$ et $(C ; c)$.

Alors par la propriété 2 $(a + b + c)\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$. Comme $a + b + c \neq 0$, $\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}$, donc M est un point du plan (ABC) .

Réciproquement : soit M un point du plan (ABC) alors il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.

Il en résulte $(1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} + \beta\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

$(1 - \alpha - \beta) + \alpha + \beta = 1$, donc $(1 - \alpha - \beta) + \alpha + \beta \neq 0$ et M est barycentre de $(A ; a), (B ; b)$ et $(C ; c)$, avec $a = 1 - \alpha - \beta, b = \alpha$ et $c = \beta$.

Conclusion : le plan (ABC) contient l'ensemble des barycentres des points A, B et C et tout point du plan (ABC) est barycentre de A, B et C . Le plan (ABC) est donc l'ensemble des barycentres des points A, B et C .

• **Caractérisation d'un triangle.** Voir exercice n° 81, page 318.

→ APPLICATION

Exercice 3 A, B, C sont trois points non alignés. a, b, c sont trois réels tels que $a + b + c \neq 0$ avec $a > 0, b < 0, c > 0$ et $|b| < c$.

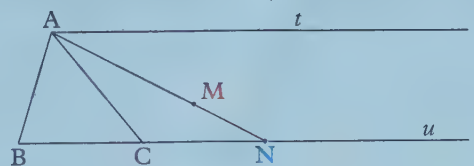
Dans quelle région du plan (ABC) est situé le point M ?

Solution

M , étant le barycentre des trois points non alignés A, B et C , est d'après la propriété 7 un point du plan (ABC) .

$b + c \neq 0$ car $|b| < c$, désignons par N le barycentre de $(B ; b)$ et $(C ; c)$. Comme b et c sont de signes contraires, N est à l'extérieur du segment $[BC]$ sur la demi-droite $[Cu)$, portée par la droite (BC) , car $|b| < c$.

Par l'associativité du barycentre, M est le barycentre de $(A ; a)$ et $(N ; b + c)$. On a $a > 0$ et $b + c > 0$ car $c > 0$ et $|b| < c$. M est donc un point du segment $[AN]$. Il en résulte que M est à l'intérieur de la bande délimitée par les deux demi-droites parallèles $[At)$ et $[Cu)$ à droite du segment $[AC]$.



voir aussi exercice n° 49

3. Représentation paramétrique

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Propriété 3.01
définition 2 →

Soit x_0, y_0, z_0, a, b et c des réels donnés avec a, b, c non tous nuls.

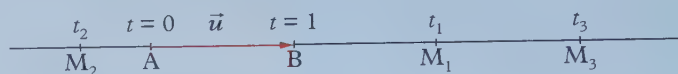
L'ensemble des points M de coordonnées
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$
 est la

droite D passant par $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a ; b ; c)$.

Ce système d'équations est appelé une **représentation paramétrique** de D .

Remarques

- À chaque réel t , appelé paramètre, correspond le point M tel que $\overline{AM} = t\vec{u}$; ainsi t est l'abscisse du point M sur la droite de repère $(A ; \vec{u})$.



- Une droite n'a pas une unique représentation paramétrique. Chaque choix d'un repère $(A ; \vec{u})$ sur la droite correspond à une représentation paramétrique.

Exemples :

1. La droite D passant par $A(0 ; 1 ; -1)$ de vecteur directeur $\vec{u}(-1 ; 2 ; 1,5)$ a pour

$$\text{représentation paramétrique (1) } \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + 1,5t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

2. La droite Δ de représentation paramétrique (2)
$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = -4 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

est la droite passant par $B(2 ; -3 ; -4)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-2 ; 4 ; 3)$.

On remarque que $\vec{v} = 2\vec{u}$ donc D et Δ sont parallèles.

De plus, B correspond au paramètre $t = -2$ dans (1) donc B appartient à D .

On en déduit que D et Δ sont confondues.

Dans la représentation paramétrique (1) associée au repère $(A ; \vec{u})$,

B a pour paramètre $t = -2$ ce qui signifie que $\overline{AB} = -2\vec{u}$;

mais dans (2) associée au repère $(B ; \vec{v})$, B a pour paramètre $t = 0$.

Remarque

De manière analogue, on obtient une **représentation paramétrique d'une droite dans le plan** muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Par exemple,
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$
 est une représentation paramétrique de la droite passant par $A(-2 ; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; -2)$.

→ DÉMONSTRATION

■ Propriété 8

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace, $\vec{u}(a ; b ; c)$ un vecteur non nul et $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ un point de l'espace. Soit (d) la droite passant par $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et de vecteur directeur \vec{u} .

$M(x ; y ; z)$ est un point de la droite (d) si et seulement si il existe un réel t tel que $\overline{AM} = t\vec{u}$ avec :

$$\overline{AM}(x - x_0 ; y - y_0 ; z - z_0) \quad \text{et} \quad t\vec{u}(ta ; tb ; tc).$$

L'égalité $\overline{AM} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$, équivaut à :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, & t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

→ APPLICATION

Exercice 4 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par $A(0 ; 1 ; -1)$ de vecteur directeur $\vec{u}(-1 ; 2 ; 1,5)$.

2. Déterminer la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4t, & t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 \end{cases}$

Est-elle parallèle au plan (xOy) ?

Solution

1. (d) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t, & t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 + 1,5t \end{cases}$

2. La droite Δ est la droite passant par le point de coordonnées $(1 ; 0 ; 2)$ et dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{v}(2 ; 4 ; 0)$; elle est incluse dans le plan d'équation $z = 2$, donc parallèle au plan (xOy) .

Méthode

Traduction vectorielle	Traduction analytique	Traduction barycentrique
M appartient à la droite (AB) si et seulement si		
il existe un réel t tel que $\overline{AM} = t\overline{AB}$.	l'espace étant rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$ avec $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$, $\overline{AB}(a ; b ; c)$ et $M(x ; y ; z)$.	il existe un réel t tel que M soit barycentre des points pondérés $(A ; 1 - t), (B ; t)$.

voir aussi exercices n° 32, 33, 34

1. Alignement et intersection de plans

OBJECTIF : Utiliser l'homogénéité et l'associativité du barycentre.

ABCD est un tétraèdre. Les points E et F sont définis respectivement par $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5} \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$. I est le milieu de [EF].

1. a. Montrer que E et F sont respectivement les barycentres de (B ; 3), (D ; 2) et (A ; 2), (C ; 1).

b. En déduire que, pour tous réels a et b non nuls, E et F sont respectivement barycentres de (B ; 3a), (D ; 2a) et (A ; 2b), (C ; b).

2. a. Montrer que I est barycentre de (E ; 5a) et (F ; 3b) si et seulement si $5a = 3b$.

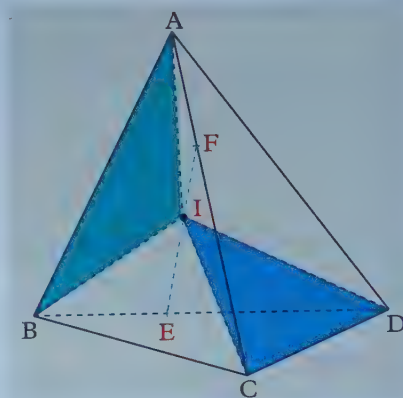
b. En déduire que I est barycentre de (A ; 10), (B ; 9), (C ; 5), (D ; 6).

3. Soit J le barycentre de (A ; 10), (B ; 9) et K le barycentre de (C ; 5), (D ; 6).

a. Montrer que les plans (ABI) et (CDI) sont sécants.

b. Montrer que I, J et K sont alignés.

c. En déduire la droite d'intersection des plans (ABI) et (CDI).



2. Barycentre : constructions et lieux

OBJECTIF : Utiliser l'homogénéité et l'associativité du barycentre, l'appartenance à un plan, à une droite, à un segment.

On considère un cube ABCDA'B'C'D'.

I est le centre de la face A'B'C'D'.

Soit un réel m et G_m le barycentre des points pondérés (B' ; m), (C' ; 4m), (D' ; m), (B ; 6 - 6m).

1. a. Justifier l'existence de G_m pour tout réel m.

b. Reproduire la figure et placer G_0 , G_1 , $G_{\frac{1}{2}}$ et G_2 .

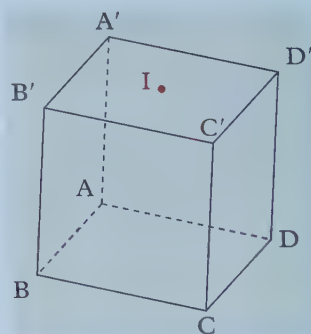
2. Montrer que G_m appartient au plan (BA'C').

3. Soit G_1 le barycentre des points (B' ; 1), (C' ; 4), (D' ; 1).

a. Montrer que pour tout réel m non nul, G_m est barycentre des points B et G_1 .

b. Déterminer l'ensemble des points G_m quand m décrit \mathbb{R} .

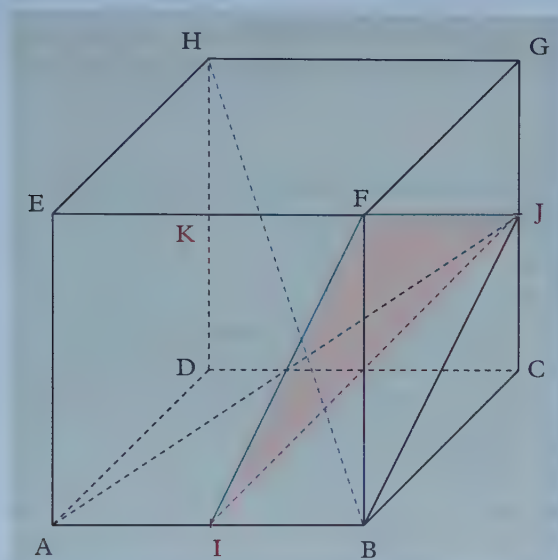
c. Quel ensemble doit décrire m pour que G_m décrive le segment [BG₁] ?



3. Intersection de droites et de plans de l'espace

OBJECTIF : Étudier l'intersection de deux droites, d'une droite et d'un plan par l'utilisation des représentations paramétriques.

ABCDEFGH est un cube d'arête égale à 1. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CG]. On prend pour repère orthonormal de l'espace le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. a. Reproduire la figure et la compléter au fur et à mesure.
- b. Donner les coordonnées des huit sommets du cube et des points I et J.
- c. Écrire une représentation paramétrique des droites (BH) et (IJ).
- d. Étudier l'intersection de ces deux droites.

2. Soit L le point d'intersection du plan (FIJ) et de la droite (BH).

- a. Justifier l'existence de réels λ et μ tels que $\overrightarrow{FL} = \lambda \overrightarrow{FI} + \mu \overrightarrow{FJ}$.

Montrer que les coordonnées $(x ; y ; z)$ du point L sont :

$$x = 1 - \frac{\lambda}{2}, \quad y = \mu, \quad z = 1 - \lambda - \frac{\mu}{2}.$$

- b. En utilisant les questions 1c et 2a, déterminer les coordonnées du point L.

3. a. Écrire une représentation paramétrique de la droite (FL).

- b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (IJ) et (FL), que l'on notera P.

c. Montrer que P est le centre de gravité du triangle ABJ.

4. Utilisation de Geoplan-Geospace

OBJECTIF : Placer le barycentre de trois points non alignés A, B, C en fonction des masses respectives de chacun des trois points.

A. Situation

On dispose de trois récipients A, B, C de contenances respectives 8, 5 et 3 litres. Le premier est plein, les autres vides.

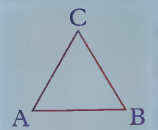
En versant de l'eau d'un récipient dans un autre (sans perdre la moindre goutte), peut-on obtenir 4 litres exactement dans l'un des récipients ?

1. Effectuez quelques versements et donner l'état des récipients à chaque étape.
2. Essayez d'obtenir 4 litres (en pas plus de 2 minutes ...).

Si vous les avez obtenus, cherchez une autre façon d'arriver au résultat.

B. Méthode

On se donne un triangle équilatéral ABC. La situation où A, B et C contiennent a, b et c litres est repérée par le point M barycentre de $(A ; a), (B ; b), (C ; c)$.



1. Soit M le barycentre de $(A ; a), (B ; b), (C ; c)$.

Exprimer \overrightarrow{AM} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

Faire un dessin sur papier (côté du triangle : 16 cm) pour : $a = 5, b = 3, c = 0$; $a = 5, b = 0, c = 3$; $a = 5, b = 2, c = 1$.

2. Soit E le barycentre de $(B ; b), (C ; c)$, soit F le barycentre de $(C ; c), (A ; a)$ et G le barycentre de $(A ; a), (B ; b)$ lorsqu'ils existent.

Dans chacun des cas précédents, placer E, F, G.

3. Avec le logiciel sont affichées les valeurs de a, b, c . On note M_{abc} le point barycentre de $(A ; a), (B ; b), (C ; c)$. Le point de départ est le point M521. Appuyer sur la touche B pour piloter b au clavier. Comment se déplace le point M quand on modifie b ?

- a. Revenir au point M521. Appuyer sur la touche C pour piloter c au clavier.

Comment se déplace le point M quand on modifie c ?

- b. En faisant varier b et c , observer les positions prises par M à l'intérieur du triangle.

4. Justifier les observations précédentes.

5. Les touches suivantes permettent de simuler le versement d'un récipient dans un autre.

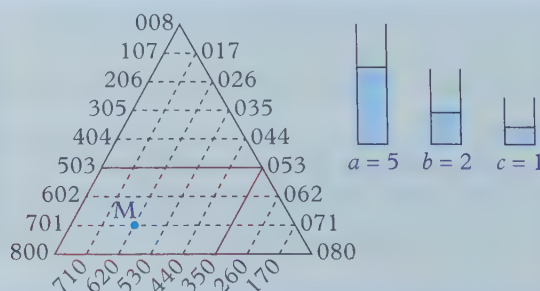
Touche 1 : verser A dans B ; **touche 2 :** verser A dans C ; **touche 3 :** verser B dans A ;

touche 4 : verser B dans C ; **touche 5 :** verser C dans A ; **touche 6 :** verser C dans B.

En simulant différents versements à partir de différents points, déterminer quel trajet peut effectuer le point M lors d'un versement (on pourra matérialiser la zone des points M possibles en appuyant sur la touche P).

6. Justifier ces observations.

7. En déduire une solution. Y en a-t-il d'autres ?



1 Soit A, B et C trois points non alignés.

1. G est le barycentre de (A ; 2), (B ; 1), (C ; 3).

Montrer que la droite (AG) coupe la droite (BC) en L barycentre de (B ; 1), (C ; 3).

2. a. H est le barycentre de (A ; 2), (B ; -3), (C ; 3).

Montrer que la droite (AH) est parallèle à (BC).

b. Montrer que B, G, H sont alignés.

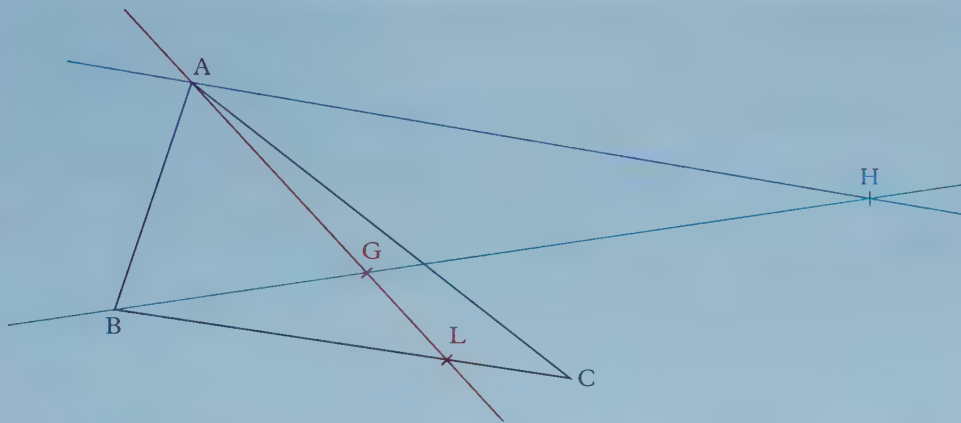
3. Cas général

On suppose maintenant que G est barycentre de (A ; α), (B ; β), (C ; γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

a. Montrer que si $\beta + \gamma \neq 0$, la droite (AG) coupe la droite (BC) en L barycentre de (B ; β), (C ; γ).

b. Montrer que si $\beta + \gamma = 0$, la droite (AG) est parallèle à (BC).

Solution



1. Soit L barycentre de (B ; 1), (C ; 3), L est un point de la droite (BC).

D'après l'associativité du barycentre, G est le barycentre de (A ; 2), (L ; 4).

Donc L est aussi un point de la droite (AG).

L est donc le point d'intersection des droites (AG) et (BC).

2. a. $2\overline{HA} - 3\overline{HB} + 3\overline{HC} = \vec{0}$ équivaut à $2\overline{HA} + 3\overline{BC} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\overline{AH} = \frac{3}{2}\overline{BC}$.

Donc les droites (AH) et (BC) sont parallèles.

b. Comme G est barycentre de (A ; 2), (B ; 1), (C ; 3) et en remarquant que B est barycentre de (B ; -3), (B ; 4), on peut écrire que G est barycentre de (A ; 2), (B ; -3), (C ; 3), (B ; 4) d'après la propriété du barycentre partiel.

Il en résulte que G est barycentre de (H ; 2), (B ; 4).

Donc les points B, G, H sont alignés.

3. a. Soit L barycentre de (B ; β), (C ; γ), L est un point de la droite (BC).

D'après l'associativité du barycentre, G est le barycentre de (A ; α), (L ; $\beta + \gamma$).

Donc L est aussi un point de la droite (AG).

L est donc le point d'intersection des droites (AG) et (BC).

b. Comme $\beta + \gamma = 0$, $\alpha\overline{GA} + \beta\overline{GB} + \gamma\overline{GC} = \vec{0}$ équivaut à $\alpha\overline{GA} + \beta\overline{GB} - \beta\overline{GC} = \vec{0}$, c'est-à-dire

$\overline{AG} = -\frac{\beta}{\alpha}\overline{BC}$ soit $\overline{AG} = \frac{\gamma}{\alpha}\overline{BC}$ car $\alpha \neq 0$ puisque $\alpha + \beta + \gamma = \alpha$ et $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Donc les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

2 L'espace est muni d'un repère orthonormal, on considère quatre points non coplanaires $A(1; 2; 2)$, $B(-1; 0; 0)$, $C(2; 2; 2)$ et $D(2; -3; 0)$.
Soit les points I milieu de $[AB]$; G isobarycentre de A, B, C et D ; J barycentre de $(A; 3)$, $(C; 1)$ et K barycentre de $(B; 1)$, $(D; 2)$.

Les droites (IG) et (JK) sont-elles sécantes ?

Solution

• Cherchons un système d'équations paramétriques de (IG) .

D'après la propriété 2, $I(0; 1; 1)$ et $G\left(1; \frac{1}{4}; 1\right)$.

Par suite $\overrightarrow{IG}\left(1; -\frac{3}{4}; 0\right)$.

$\vec{u}(4; -3; 0)$ ($\vec{u} = 4\overrightarrow{IG}$) est donc un vecteur directeur de (IG) .

Un système d'équations paramétriques de (IG) est :

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - 3t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 \end{cases}$$

• Cherchons de même un système d'équations paramétriques de (JK) .

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$, d'où $J\left(\frac{5}{4}; 2; 2\right)$.

$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BD}$, d'où $K\left(1; -2; 0\right)$ et $\overrightarrow{JK}\left(-\frac{1}{4}; -4; -2\right)$.

Donc $\vec{v}(1; 16; 8)$ ($\vec{v} = -4\overrightarrow{JK}$) est un vecteur directeur de (JK) .

Un système d'équations paramétriques de (JK) est $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 + 16k, k \in \mathbb{R}. \\ z = 8k \end{cases}$

• Si les droites (IG) et (JK) se coupent, les coordonnées $(x; y; z)$ de leur point d'intersection

vérifient le système $\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 \\ x = 1 + k \\ y = -2 + 16k \\ z = 8k \end{cases} \quad (S).$

La troisième et la sixième équation de (S) donnent $k = \frac{1}{8}$.

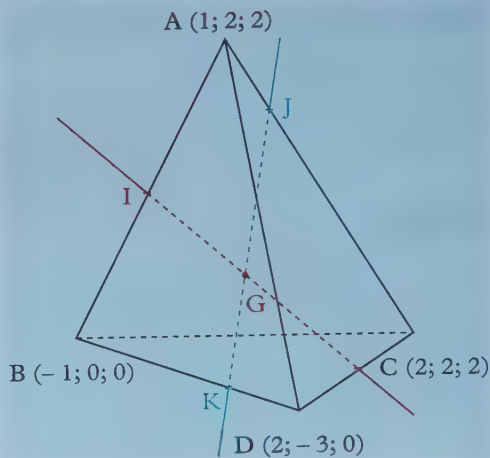
Ce résultat utilisé dans la première et la quatrième équation donne $t = \frac{9}{32}$.

$k = \frac{1}{8}$, utilisé dans la deuxième et la cinquième équation, donne $t = \frac{1}{3}$.

On obtient deux valeurs différentes de t ce qui est impossible.

Donc (S) n'a pas de solution.

Conclusion : les droites (IG) et (JK) **ne sont pas sécantes**, comme elles ne sont pas non plus parallèles (vecteurs directeurs non colinéaires), ces deux droites sont **non coplanaires**.



→ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Barycentres

1 A et B sont deux points distincts du plan.

Construire les points suivants :

- C barycentre de (A ; -5) et (B ; 2) ;
- D barycentre de (A ; 2) et (B ; -3) ;
- E barycentre de $(A ; \frac{1}{2})$ et $(B ; \frac{1}{4})$;
- F barycentre de (A ; m) et (B ; -3m), avec $m \neq 0$.

2 A, B et C sont trois points du plan.

Dans chaque cas, écrire C comme barycentre des points A et B :

- $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

3 Soit A, B et C trois points non alignés du plan. Construire les points suivants :

- D barycentre de (A ; 2), (B ; 3), (C ; 1) ;
- E barycentre de (A ; -2), (B ; 3), (C ; 1) ;
- F barycentre de (A ; -2), (B ; -3), (C ; 1) ;
- G barycentre de $(A ; -\frac{1}{3})$, $(B ; -\frac{1}{2})$, $(C ; -\frac{1}{6})$.

4 Soit A, B et C trois points du plan.

Exprimer C comme barycentre de A et B dans chacun des cas suivants :

- $3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{CB} = \vec{0}$;
- $3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AC}$.

5 Soit D le barycentre de (A ; 3), (B ; -2), (C ; 1).

- Déterminer des coefficients qui permettent de considérer A comme barycentre de B, C et D.
- De même, écrire B comme barycentre de A, C et D, puis C comme barycentre de A, B et D.

6 Soit A, B, C et D trois points de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{BD}.$$

Exprimer successivement chacun de ces quatre points comme barycentre des trois autres.

7 ABC est un triangle rectangle isocèle en A. Déterminer trois réels a, b et c pour que le point D barycentre de (A ; a), (B ; b), (C ; c) soit tel que ABDC soit un carré.

8 ABCDS est une pyramide régulière de base carrée ABCD. On note O le centre du carré et I le milieu de [SO].

Déterminer cinq réels a, b, c, d et s pour que I soit barycentre de (A ; a), (B ; b), (C ; c), (D ; d), (S ; s).

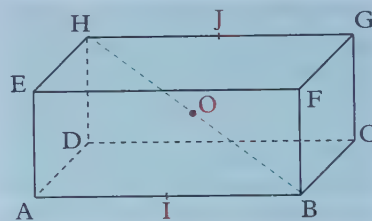
9 Soit ABCD un parallélogramme du plan. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' défini par : M' est le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 2), (C ; 3), (D ; 3), (M ; 5).

- Soit I défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et G l'isobarycentre de I, C et D. Montrer que M' est barycentre des points G et M.
- Reconnaitre f.
Déterminer l'image de la droite (AB) par f.

10 ABCD est un tétraèdre. Soit G l'isobarycentre de A, B, C et D ; et I et J les milieux respectifs de [AD] et [BC].

- Montrer que G est le milieu de [IJ].
- On considère H le centre de gravité du triangle BCD, exprimer G comme barycentre de H et A.

11 Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle de centre O.



Soit K le centre de la face BCGF et L le barycentre de (I ; 1), (J ; 1), (K ; -4).

Montrer que O, K et L sont alignés. Quelle est la position de K sur le segment [OL] ?

12 Soit un triangle ABC. I est le milieu de [BC] et E le symétrique de A par rapport à B. G est le barycentre de (A ; -1), (B ; 2) et (C ; 2).

- Montrer que G appartient à (AI).
- Déterminer des réels a et b tels que E soit barycentre de (A ; a) et (B ; b).
En déduire que C, G et E sont alignés.
- Construire G.

13 ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

- Construire G l'isobarycentre de ABCD.
- Déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace vérifiant $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.
Le point G appartient-il à (E) ?
- Déterminer l'ensemble (F) des points M de l'espace vérifiant $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\|$.

14 avec ROC Soit A_1, A_2, \dots, A_n n points du plan ; a_1, a_2, \dots, a_n n réels de somme non nulle ($n \geq 2$). Le barycentre G de $(A_1 ; a_1), (A_2 ; a_2), \dots, (A_n ; a_n)$ est alors défini par :

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

1. Montrer que pour tout point M de l'espace :

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i \right) \overrightarrow{MG}.$$

2. Soit A, B, C trois points non alignés et I le milieu de $[BC]$.

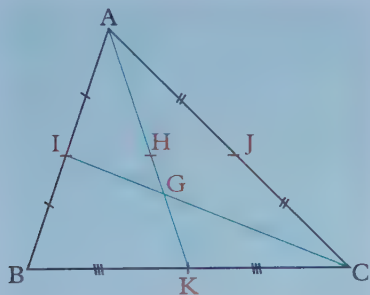
a. À l'aide du résultat du 1 et d'un barycentre bien choisi, réduire la somme :

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}.$$

b. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs :

$\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.

15 Soit ABC un triangle, on note I, J et K les milieux respectifs de $[AB], [AC]$ et $[BC]$; G le centre de gravité de ABC et H le milieu de $[IJ]$. Soit M un point de l'espace.



Réduire les sommes suivantes :

a. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$; b. $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MK}$;
c. $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} + 2\overrightarrow{HK}$; d. $2\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MK} - 3\overrightarrow{MG}$.

16 1. Soit un triangle ABC et A', B', C' les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$.

a. Par la propriété d'associativité, justifier que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.
b. Déterminer $\vec{V} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

2. ABC et PQR sont deux triangles de centres de gravité respectifs G et H .

a. Pour tout point M du plan réduire :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \text{ et } \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}.$$

b. En déduire que $G = H$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \vec{0}.$$

17 vu au BAC On considère un tétraèdre $ABCD$ ainsi que les points I, J, K et L définis par :

I est le milieu du segment $[AB]$, K est le milieu du segment $[CD]$, $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$.

Soit G le barycentre de $(A ; 3), (B ; 3), (C ; 1), (D ; 1)$.

1. Déterminer le barycentre de $(A ; 3), (D ; 1)$ et le barycentre de $(B ; 3), (C ; 1)$.

2. En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que les points G, I, J, K et L sont coplanaires.

Nouvelle-Calédonie, décembre 2001.

18 Vrai ou faux

Soit IJK un triangle rectangle en I . O est le milieu de $[JK]$, G le milieu de $[OI]$. I' est le symétrique de I par rapport à O . À tout point M , on associe les points P et Q définis par :

$$\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MK},$$

$$\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{MK}.$$

A. G est le barycentre de $(I ; 2), (J ; 1), (K ; 1)$.

B. $\overrightarrow{GP} = 3\overrightarrow{MG}$.

C. $\overrightarrow{MQ} = 4\overrightarrow{GI}$.

D. Si M décrit le cercle circonscrit à IJK alors P décrit ce même cercle.

E. Si M décrit le cercle circonscrit à IJK alors Q décrit ce même cercle.

Source : ESIEE 2001.

Coordonnées

L'espace est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour les exercices 19 et 20, calculer les coordonnées du barycentre G .

19 Soit les points $A(1 ; 1 ; 1), B(-1 ; 1 ; 0)$ et $C(2 ; 0 ; 3)$.

a. G barycentre de $(A ; 1), (B ; 2), (C ; 3)$.

b. G barycentre de $(A ; -3), (B ; 1)$ et $(C ; 1)$.

20 Soit les points $A(1 ; 1 ; 1), B(2 ; 1 ; 0), C(2 ; 0 ; 3)$ et $D(-1 ; 2 ; 1)$.

G est le barycentre de $\left(A ; \frac{1}{2}\right), (B ; 1), \left(C ; -\frac{3}{2}\right)$

et $(D ; 1)$.

EXERCICES

21 Le tableau suivant donne les résultats obtenus à partir de 10 essais de laboratoire cherchant à lier la charge de rupture d'un acier à sa teneur en carbone. x_i et y_i ($i=1, 2, \dots, 10$) représentent respectivement la teneur en carbone (en %) et la charge de rupture (en kg) pour un même essai i .

x_i	70	60	68	64	66	64	62	70	74	62
y_i	87	71	79	74	79	80	75	86	95	70

1. Dans un repère, représenter les 10 points $M_i(x_i; y_i)$, on prendra 1 cm pour une unité en abscisse à partir de la valeur 60 et 1 cm pour 2 kg sur l'axe des ordonnées à partir de 70.

2. On veut trouver une droite passant le plus près possible des 10 points pour pouvoir faire des estimations.

a. On note G_1 l'isobarycentre des cinq points de plus petites abscisses et G_2 l'isobarycentre des cinq autres.

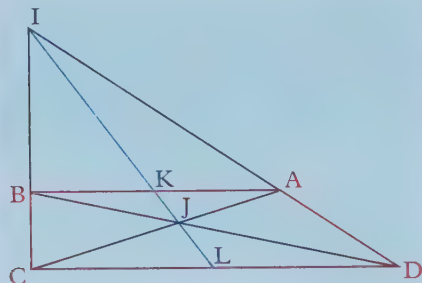
Calculer les coordonnées des points G_1 et G_2 puis déterminer une équation de la droite (G_1G_2) .

b. En utilisant comme relation entre x et y l'équation trouvée à la question 2a, estimer la teneur en carbone d'un acier ayant une charge de rupture de 92 kg.

Remarque : la droite (G_1G_2) est appelée **droite de Mayer** de l'ensemble des points M_i .

22 Trapèze et barycentres

On considère dans le plan un trapèze ABCD. Les droites (AD) et (BC) se coupent en I avec $A \in [DI]$ et $B \in [CI]$ et les droites (AC) et (BD) se coupent en J. K est le milieu de [AB] et L le milieu de [CD]. On va montrer l'alignement des points I, J, K et L.



1. Montrer que A est le barycentre de $(I; 1)$, $(D; a)$ où $a = \frac{AI}{AD}$. Montrer de même que B est le barycentre de $(I; 1)$, $(C; a)$.

2. a. Montrer que J est le barycentre de $(I; 1)$, $(C; a)$ et $(D; a)$.

b. Montrer que la droite (IJ) passe par L.

3. a. Montrer que K est le barycentre de $(I; 2)$, $(C; a)$, $(D; a)$.

b. Montrer que la droite (IL) passe par K.

Indication : on pourra utiliser que $(I; 2)$ est le barycentre de $(I; 1)$, $(I; 1)$.

Equations de droites

Pour les exercices 23 à 34, l'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

23 Donner un système d'équations paramétriques des droites de repères $(O; \vec{i})$, $(O; \vec{j})$ et $(O; \vec{k})$ qui sont les axes du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

24 Écrire un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point $A(1; -2; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 5; -4)$.

25 Écrire un système d'équations paramétriques de la droite passant par les points $A(-2; 5; 4)$ et $B(3; 0; -6)$.

26 Soit les points $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 0; 1)$ et $C(2; 1; -1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG) où G est le centre de gravité du triangle OBC. On désignera par t le paramètre.

2. Quelle est la valeur de t associée :

a. à A ?

b. au milieu I de [AG] ?

c. au symétrique H de I par rapport à A ?

27 Une droite (d) admet pour système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Donner un vecteur directeur de cette droite et deux points distincts lui appartenant.

28 Une droite (d) admet pour système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -2 \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Donner un vecteur directeur de cette droite et deux points distincts lui appartenant.

29 On considère les points $A(0; 1; 2)$, $B(1; 2; 3)$ et les vecteurs $\vec{u}(1; 1; 1)$ et $\vec{v}(-1; 2; 1)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite d de repère $(A; \vec{u})$.

2. Donner une représentation paramétrique de la droite d' de repère $(B; \vec{v})$.

3. $M(6; -8; -2)$ appartient-il à d ? à d' ?

4. Les droites d et d' sont-elles sécantes ?

30 Soit la droite d admettant pour système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - t \end{cases}$$

1. Donner un système d'équations paramétriques de d' passant par $A(1; -2; 0)$ et parallèle à d .
2. Montrer que les points $B(-4; 11; 6)$ et $C(1; 0; 1)$ appartiennent respectivement à d et d' .
3. Donner un système d'équations paramétriques du segment $[AB]$, puis des demi-droites $[AB)$ et $(BA]$.

31 avec ROC L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit x_0, y_0, z_0, a, b, c des réels donnés avec a, b, c non tous nuls.

Montrer que l'ensemble des points M

$$\text{de coordonnées } \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

est la droite D passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a; b; c)$.

2. Application

Δ est la droite de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -1)$ passant par le point $A(6; 1; 1)$ et Δ' est la droite de vecteur directeur $\vec{v}(-1; 1; 2)$ passant par le point $B(3; -3; -6)$.

a. Déterminer un système d'équations paramétriques pour Δ et pour Δ' .

b. Démontrer qu'il existe un point C sur Δ et un point D sur Δ' tel que $I(1; -2; 3)$ soit le milieu de $[CD]$.

32 Soit les droites :

$$d_1 : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 3t, \quad t \in \mathbb{R}; \\ z = 2t \end{cases}$$

$$d_2 : \begin{cases} x = -4 - 3t \\ y = 9 - 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -5 + t \end{cases}$$

et

$$d_3 : \begin{cases} x = -6t \\ y = 6t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -4t \end{cases}$$

Étudier les positions relatives de d_1 et d_2 , puis de d_1 et d_3 et enfin de d_2 et d_3 .

33 Droites concurrentes

On considère les trois droites d_1, d_2, d_3 dont les représentations paramétriques sont les suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t, \quad t \in \mathbb{R}; \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

$$d_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}; \\ z = -1 - 4t \end{cases}$$

et

$$d_3 : \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que ces trois droites sont concurrentes.
2. Sont-elles coplanaires ?

34 Vrai ou faux ?

1. Si I est le milieu du segment $[AB]$ ($A \neq B$) alors A est le barycentre de $(I; 2), (B; 1)$.

2. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de l'espace, soit

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + \frac{t}{3}, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{t}{5} \end{cases}$$

et

$$d' : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = \frac{1}{5} - \frac{3t}{5} \end{cases}$$

Les deux droites d et d' sont confondues.

3. Si A, B, C et D sont quatre points tels que $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD} = \vec{0}$ alors C n'est pas barycentre des points A, B et D .

4. Si $\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ alors M est un point de la demi-droite $[AB)$.

5. Soit A, B et C trois points non alignés, si M vérifie $\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{AB}$ alors M est à l'extérieur du triangle ABC .

6. Si $ABCD$ est un tétraèdre, G le barycentre de $(A; 1), (B; 1), (C; 1), (D; -2)$ et I le milieu de $[BC]$ alors les droites (AG) et (DI) sont parallèles.

→ Que sais-je ?

Vrai ou faux ?

Dans le plan on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m , différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés

$$S_m = \{(A; 1), (B; m), (C; 2m)\}.$$

Pour tout point M du plan, on note :

$$\vec{V}_M = 3\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC}.$$

35 G_1 est le milieu du segment [CI].

36 G_1 est le barycentre de $\left\{ (J; 2), \left(C; \frac{2}{3} \right) \right\}$.

37 Pour tout point M, $\vec{V}_M = \vec{AB} + 2\vec{AC}$.

38 \vec{AG}_{-1} est colinéaire à \vec{V}_M .

39 Pour tout m , distinct de $-\frac{1}{3}$, \vec{AG}_m est colinéaire à \vec{AG}_{-1} .

40 $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.

41 Pour tout point P de (AG_{-1}) , il existe un réel m tel que $P = G_m$.

D'après exercice 1 du Baccalauréat S Amérique du Nord, mai 2004.

Dans le plan, on considère trois points non alignés : R, S, T.

On désigne par G le barycentre de $(R; 1)$, $(S; 1)$, $(T; -4)$ et par I le milieu de [RS].

Pour tout triangle RST :

42 G est situé sur la médiane passant par T.

43 G est sur la médiatrice du segment [ST].

44 Tous les points M du plan vérifient : $2\vec{GM} + 4\vec{MT} = \vec{MR} + \vec{MS}$.

45 Les points G, R, S sont alignés.

46 T est le milieu de [IG].

D'après ESIEE 1990.

QCM

Une ou plusieurs réponses peuvent être justes.

47 Représentations paramétriques

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(3; 1; 3)$ et $B(2; -1; 4)$ ainsi que la droite (D) de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -1)$ et la droite (D') d'équations

$$\text{paramétriques } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

- A. Le point B est sur la droite (D).
- B. Le point B est sur la droite (D').
- C. Les droites (D) et (D') sont parallèles.
- D. Les droites (D) et (D') sont sécantes.
- E. Les droites (D) et (D') sont non coplanaires.

48 Réduction de sommes vectorielles

Soit A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points fixes de l'espace et M un point variable.

A. $\vec{MA}_1 + \vec{MA}_2 + \vec{MA}_3 + \vec{MA}_4$ est un vecteur constant.

B. $\vec{MA}_1 - \vec{MA}_2 - \vec{MA}_3 + \vec{MA}_4$ est un vecteur constant.

C. $\vec{MA}_1 + \vec{MA}_2 + \vec{MA}_3 + \vec{MA}_4 = 4\vec{MG}$ où G est l'isobarycentre des points A_1, A_2, A_3, A_4 .

D. $\sum_{i=1}^4 (2i-1)\vec{MA}_i = 16\vec{MG}$ où G est le barycentre de $(A_1; 1), (A_2; 3), (A_3; 5), (A_4; 7)$.

49 Caractérisation

Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que M est le barycentre de $(A; 1-t), (B; t)$, t décrivant l'intervalle $[0; 1]$, est :

- A. la droite (AB) ;
- B. la demi-droite [AB) ;
- C. le segment [AB].

L'ensemble des points M de l'espace tels que M est le barycentre de $(A; 1-t-t'), (B; t), (C; t')$, t et t' décrivant \mathbb{R} , est :

- D. le triangle ABC ;
- E. la droite (AI) où I est le milieu de [BC] ;
- F. le plan (ABC).

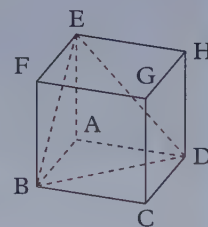
→ Un sujet vu au BAC (extrait)

50 On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

O_1 et O_2 sont les centres des carrés ABCD et EFGH, et I est le centre de gravité du triangle EBD. Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(E; 1), (B; 1-m), (G; 2m-1), (D; 1-m)\}.$$

1. Justifier l'existence du point G_m .
2. Préciser la position du point G_1 .
3. Vérifier que $G_0 = A$. En déduire que les points A, I et G sont alignés.
4. Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
5. a. Vérifier que les points A, G_m , E et O_1 sont coplanaires.
b. Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (EI).



Partie A de l'exercice 2 du Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie, mars 2004.

Solution

1. $1 + 1 - m + 2m - 1 + 1 - m = 2$, la somme des coefficients est non nulle, G_m est donc bien barycentre du système.

2. G_1 est le barycentre de $\{(E; 1), (B; 0), (G; 1), (D; 0)\}$, c'est-à-dire le barycentre de $\{(E; 1), (G; 1)\}$, donc le milieu de [EG]. D'où $G_1 = O_2$.

3. G_0 est le barycentre de $\{(E; 1), (B; 1), (G; -1), (D; 1)\}$, donc d'après la propriété de **réduction d'une somme vectorielle** :

$$2\overrightarrow{AG_0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{AG} = \vec{0}, \text{ d'où } G_0 = A.$$

En utilisant l'**associativité** du barycentre, G_0 est le barycentre de (I; 3), barycentre de $\{(E; 1), (B; 1), (D; 1)\}$ et de (G; -1). Comme $G_0 = A$ on en déduit que A, I et G sont alignés.

4. En procédant comme dans 3 :

$$2\overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AE} + (1-m)\overrightarrow{AB} + (2m-1)\overrightarrow{AG} + (1-m)\overrightarrow{AD}.$$

$$\text{Soit } 2\overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AG} + 2m\overrightarrow{AG} - m(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}),$$

$$\text{c'est-à-dire } 2\overrightarrow{AG_m} = 2m\overrightarrow{AG} - m\overrightarrow{EG} = m\overrightarrow{AG} + m\overrightarrow{AE} = 2m\overrightarrow{AO_2}.$$

Il en résulte $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$.

Comme m décrit \mathbb{R} , l'ensemble des points G_m est donc la droite (AO_2) .

5. a. AO_1O_2E est un rectangle, la droite (AO_2) est donc une droite du plan (AEO_1) . L'ensemble des points G_m étant la droite (AO_2) , A, G_m , E et O_1 sont donc dans le plan (AEO_1) .

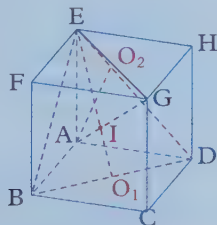
b. $2\overrightarrow{EG_m} = (1-m)\overrightarrow{EB} + (2m-1)\overrightarrow{EG} + (1-m)\overrightarrow{ED}$ soit

$$2\overrightarrow{EG_m} = (1-m)(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED}) + (2m-1)\overrightarrow{EG}.$$

I est le centre de gravité du triangle EBD donc $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} = 3\overrightarrow{EI}$,

$$\text{d'où } 2\overrightarrow{EG_m} = 3(1-m)\overrightarrow{EI} + (2m-1)\overrightarrow{EG}.$$

Il suffit donc que $m = \frac{1}{2}$ pour que G_m soit sur la droite (EI).



le jour du BAC

Question 2 : Penser que l'isobarycentre de E et G est le milieu du segment [EG].

Question 3 : Penser à utiliser le barycentre G_0 de

$$\{(E; 1), (B; 1), (G; -1), (D; 1)\}$$

et la somme des coefficients égale à 2 pour réduire la somme :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AG}.$$

Ne pas oublier que le barycentre de deux points est toujours aligné avec ces deux points.

Question 4 : Encore le cours : O_2 est le milieu de [EG], donc

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AO_2}.$$

Question 5b : Voir ici aussi la réduction d'une somme vectorielle avec I isobarycentre de $\{(E; 1), (B; 1), (D; 1)\}$ et :

$$\overrightarrow{EE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED}.$$

On peut remarquer que $G_{\frac{1}{2}}$ est

le point d'intersection de (EI) et (AO_2) .

→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

51 ABC est un triangle équilatéral. On note A' le milieu de [BC], le point A' se projette orthogonalement en I sur [AB] et en J sur [AC].

- Déterminer trois réels a, b et c tels que :
 - I soit barycentre de $(A; a), (B; b), (C; c)$.
 - J soit barycentre de $(A; a), (C; c)$.
- Soit G le milieu de [IJ].
 - Écrire G comme barycentre de A, B et C.
 - En déduire G comme barycentre des points A et A'.
- Soit O le milieu de [AA'].
Montrer que le quadrilatère OJA'I est un losange de centre G.

52 A, B, C sont trois points non alignés. Soit G_m le barycentre de $(A; 3), (B; 1+m), (C; 1-m)$.

- Montrer que G_m existe pour tout réel m .
- Existe-t-il un réel m tel que :
 - G_m soit sur la droite (AB) ?
 - G_m soit sur la droite (BC) ?
 - G_m soit le milieu de [AB] ?
 - G_m soit à l'intérieur du triangle ABC ?
- Déterminer les points M du plan tels que :
 - $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2$;
 - $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

53 Soit ABCD un tétraèdre. On note G_a le barycentre de $(A; a), (B; 2a), (C; -a), (D; 2)$ et I_a celui de $(B; a), (D; 1)$, a étant un réel différent de -1 .

- Déterminer I_1 et G_1 .
Montrer que $\overrightarrow{I_1G_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA}$.
- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{I_aG_a}$ et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.
Quel est l'ensemble des points I_a et G_a quand a décrit \mathbb{R} privé de -1 ?
- Déterminer, suivant les valeurs de a , l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que :
 $\|a\overrightarrow{MA} + 2a\overrightarrow{MB} - a\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}\| = a$.

54 Soit ABCDEFGH un cube.

- Placer le point I milieu de [BC] et le point J barycentre de $(A; 1), (B; -1), (C; -1)$.
- Déterminer l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

55 Montrer que deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D' ont le même centre de gravité si et seulement si $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$, relation qui s'écrit aussi :

$$\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD'} + \overrightarrow{DA'} = \vec{0}$$

56 L'espace étant muni d'un repère, on considère les points A(1; 0; 2), B(1; 1; 1) et C(0; 1; 2).

- Vérifier que ces trois points ne sont pas alignés.
- Soit M le barycentre de $(A; a), (B; b), (C; c)$ avec $a+b+c=1$.
Donner une condition sur a, b et c pour que M soit à l'intérieur du triangle ABC.
- En déduire la forme générale des coordonnées des points situés à l'intérieur du triangle ABC.

57 vu au BAC On considère un triangle ABC. Soit G le barycentre de $(A; 3), (B; 1), (C; 1)$; Q le barycentre de $(A; 3), (C; 1)$ et R le barycentre de $(A; 3), (B; 1)$.

- Démontrer que les droites (BQ) et (CR) passent par G.
- Soit P le milieu de [BC], démontrer que les points A, P et G sont alignés.
Exprimer \overrightarrow{PG} en fonction de \overrightarrow{PA} .
- On suppose que B et C sont fixes et que le point A décrit un demi-cercle E de diamètre [BC].
Déterminer alors l'ensemble F décrit par le point G.

58 vu au BAC L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1; 0; 2), (1; 1; 4)$ et $(-1; 1; 1)$ et un réel positif t . Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t .

- Justifier l'existence de G pour tout réel positif t .
- Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2.
 - Déterminer les coordonnées du point I.
 - Exprimer le vecteur \overrightarrow{IG} en fonction du vecteur \overrightarrow{IC} .
- Montrer que l'ensemble des points G, lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, est le segment [IC] privé du point C.
 - Pour quelle valeur de t , le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

Pondichéry, juin 2005.

59 Dans le plan, on considère un carré ABCD. Soit O le centre du carré et I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

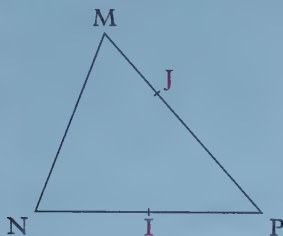
- On considère G_1 le barycentre du système $\{(A; 1), (B; -3), (C; 1), (D; -3)\}$.
Déterminer et construire G_1 .
- On considère G_2 le barycentre du système $\{(A; 1), (B; 1), (C; -3), (D; -3)\}$.
Déterminer et construire G_2 .
 - Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
 $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.
Construire (E).

b. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}.$$

Reconnaitre f et en donner les éléments caractéristiques.

60 Soit MNP un triangle, on note I le milieu de $[NP]$ et J le point défini par $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MP}$.



Pour tout réel a différent de -1 , on note G_a le barycentre des points $(M; 2)$, $(N; a)$, $(P; a)$. G_1 est le barycentre des points $(M; 2)$, $(N; 1)$, $(P; 1)$ en particulier.

Alors :

- A. Pour tout réel a différent de -1 , $G_a \in (MI)$.
- B. Il existe un réel a différent de -1 tel que $G_a = I$.
- C. G_1 est le centre de gravité du triangle MNP .
- D. N , J et G_1 sont trois points alignés.
- E. G_{-2} est le point tel que :

$$\overrightarrow{G_1 G_{-2}} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}).$$

Source : ESIEE 1999.

61 Soit A , B et C trois points non alignés. Soit les points I , J et K définis par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CA}.$$

1. Soit G le point d'intersection des droites (AI) et (BJ) . Exprimer G comme barycentre des points A , B et C .
2. En déduire que (AI) , (BJ) et (CK) sont concurrentes.

62 Soit un tétraèdre $ABCD$.

1. Placer les barycentres :
 - a. E de $(A; -2)$ et $(B; 5)$;
 - b. F de $(B; 5)$ et $(C; -2)$;
 - c. G de $(C; -2)$ et $(D; 5)$;
 - d. H de $(D; 5)$ et $(A; -2)$;
 - e. O de $(A; -2)$, $(B; 5)$, $(C; -2)$, $(D; 5)$.
2. En associant de deux façons différentes les points pondérés A , B , C et D , montrer que $EFGH$ est un parallélogramme de centre O .
3. a. Soit I le barycentre de $(B; 5)$, $(C; -2)$, $(D; 5)$.
Montrer que la droite (AO) coupe le plan (BCD) en I .
- b. Exprimer \overrightarrow{AI} en fonction de \overrightarrow{AO} .

Complexes et barycentres

Pour les exercices 63 à 66, le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

63 vu au BAC 1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes :

$$a = 4\sqrt{3} - 4i \text{ et } b = 4\sqrt{3} + 4i.$$

Calculer les distances OA , OB , AB .

En déduire la nature du triangle OAB .

3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D .

4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(O; -1)$, $(D; 1)$, $(B; 1)$.

a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6i$.

b. Placer les points A , B , C , D , G sur une figure.

c. Montrer que C est le barycentre de $(D; 5)$, $(G; -1)$, en déduire l'alignement des points C , D , G .

d. Montrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

Septembre 2004.

64 On considère les points A , B , C d'affixes respectives $-1 - i$, $-1 + 3i$, $3 - i$.

On désigne par I , J , K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1. Calculer les affixes des points I , J , K et placer ces points.

2. Soit E l'ensemble des réels a pour lesquels les points pondérés $(A; a+2)$, $(B; 1)$ et $(C; a+1)$ admettent un barycentre G .

a. Déterminer E .

b. Soit a un élément de E .

Montrer que $\overrightarrow{OG_a}$ est colinéaire à \overrightarrow{OJ} .

c. Déterminer l'ensemble des points G_a lorsque a décrit E .

65 On pose $a = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et on note A_k (k entier variant de 0 à 7) le point d'affixe a^k .

1. Placer les points A_k dans le plan complexe.

2. a. Montrer que :

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 = \frac{a^8 - 1}{a - 1}.$$

b. Déterminer l'isobarycentre des points A_k .

3. Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan complexe tels que :

$$\left\| \sum_{k=0}^7 \overrightarrow{MA_k} \right\| = 8.$$

EXERCICES

66 ABC est un triangle direct. À l'extérieur de ce triangle, on construit les triangles équilatéraux AC'B, BA'C et CB'A.

1. Soit a, b, c les affixes respectives des points A, B, C et g et g' les affixes respectives des centres de gravité G et G' des triangles ABC et A'B'C'. Montrer que $g = g'$.

2. a. Montrer que si ABC est équilatéral alors A'B'C' est lui aussi équilatéral.

b. Étudier la réciproque.

Utilisation de transformations

67 Soit ABC un triangle équilatéral direct.

On désigne par (C) le cercle de centre O circonscrit à ABC, par I le milieu de [AB] et par J le milieu de [OI].

(OA) et (OC) recoupent (C) en D et E.

1. Placer les points sur une figure (unité graphique : OA = 4 cm).

2. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C, D, E.

a. Exprimer \overrightarrow{OG} en fonction de \overrightarrow{OB} .

b. Exprimer \overrightarrow{OG} en fonction de \overrightarrow{OJ} et \overrightarrow{OD} .

c. En déduire que (OB) et (DJ) se coupent en G. Placer G sur la figure.

3. À tout point M du plan, on fait correspondre le point $M' = f(M)$ défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}.$$

a. Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

b. Quelles sont les images par f de B et D ?

68 ABCD est un carré de côté a .

1. Construire le barycentre G de (A ; 2), (B ; -1) et (C ; 1).

2. Construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = a.$$

3. Soit f l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Montrer que f est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.

4. Construire l'image de (C) par f .

Représentations paramétriques de droites

Pour les exercices 69 et 70, l'espace est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

69 On donne :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires.

2. Déterminer par un point et un vecteur directeur une droite d_3 parallèle à d_1 et sécante à d_2 .

3. Donner une représentation paramétrique de d_3 .

70 1. Donner une représentation paramétrique :

a. de la droite d_1 passant par A(1 ; -1 ; -2) et de vecteur directeur $\vec{u}(0 ; 1 ; -1)$;

b. de la droite d_2 passant par B(3 ; 0 ; 0) et de vecteur directeur $\vec{v}(2 ; 0 ; 1)$;

c. de la droite d_3 passant par C(0 ; -1 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{w}(1 ; 1 ; 0)$;

2. Les droites d_1, d_2, d_3 sont-elles concourantes ?

Pour les exercices 71 à 73, étudier suivant les valeurs des réels a et b les positions relatives des droites d et d' de repères respectives (A ; \vec{u}) et (A' ; \vec{u}').

71 A(-1 ; 0 ; 1) et $\vec{u}(1 ; a ; a + 2)$, A'(1 ; 2 ; b) et $\vec{u}'(1 ; -3 ; -1)$.

72 A(1 ; -1 ; 5) et $\vec{u}(2 ; a ; -3)$, A'(-1 ; 1 ; 8) et $\vec{u}'(b ; -1 ; 2)$.

73 A(-1 ; 2 ; 1) et $\vec{u}(a + b ; 2a + 2b ; -a - 2b)$, A'(2 ; 1 ; b) et $\vec{u}'(1 ; 2 ; -1)$.

74 On considère les droites (d) et (d') suivantes :

$$(d) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - 4t, t \in \mathbb{R}, \\ z = 1 \end{cases}$$

$$(d') : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t' \\ z = 3t' + 4 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que (d) et (d') sont sécantes en un point A dont on donnera les coordonnées.

2. Soit B(-1 ; 2 ; 3).

a. Montrer que B n'est pas dans le plan déterminé par les droites (d) et (d').

b. À tout point de (d) de paramètre t , on associe $f(t) = BM^2$. Calculer $f(t)$ et déterminer pour quelle valeur t_0 de t , $f(t)$ est minimal.

Que peut-on dire du point H de (d) de paramètre t_0 ?

c. En procédant de même, déterminer le point K de (d') dont la distance à B est minimale.

3. Montrer que le tétraèdre ABHK est inscrit dans une sphère que l'on déterminera.

→ PROBLÈMES

75 Partie A

Soit, dans le plan P, quatre points A, B, C et D distincts deux à deux.

1. Montrer que ABCD est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre du système :

$$\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}.$$

2. On suppose que ABCD est un parallélogramme. Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace E tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = BD.$$

3. a. En utilisant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}$ et le produit scalaire dans le plan, montrer que pour tout point M du plan :

$$MA^2 = MD^2 + DA^2 + 2\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DA}.$$

b. En procédant comme en a avec MB^2 et MC^2 , montrer que pour tout point M du plan :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2.$$

c. En déduire la construction de l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2.$$

Partie B

On considère dans l'espace E deux parallélogrammes ABCD et A'B'C'D' ainsi que les milieux I, J, K et L de [AA'], [BB'], [CC'] et [DD'] respectivement.

1. Montrer que L est barycentre des points I, J et K affectés de coefficients que l'on précisera.

En déduire que IJKL est un parallélogramme.

2. Soit O, Q et P les centres respectifs des parallélogrammes IJKL, ABCD et A'B'C'D'.

Montrer que O est le milieu de [PQ].

76 vu au BAC On considère le tétraèdre ABCD ; on note I le milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. a. Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(A; 1), (B; 1), (C; -1), (D; 1)\}$.

Exprimer $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de \overrightarrow{CD} .

Placer I, J, G_1 sur une figure.

b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A; 1), (B; 1), (D; 2)\}$.

Démontrer que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placer G_2 .

c. Démontrer que IG_1DJ est un parallélogramme. En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A; 1), (B; 1), (C; m-2), (D; m)\}.$$

a. Préciser l'ensemble \mathcal{E} des valeurs de m pour lesquelles G_m existe.

Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble \mathcal{E} .

b. Démontrer que G_m appartient au plan (ICD).

c. Démontrer que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.
d. En déduire l'ensemble \mathcal{F} des points G_m lorsque m décrit l'ensemble \mathcal{E} .

Antilles-Guyane, juin 2004.

77 vu au BAC Le plan P est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Lorsqu'un point de P est désigné par une lettre majuscule (A, B, G, M_1, \dots, M', \dots), on convient de désigner son affixe complexe par la lettre minuscule correspondante ($a, b, g, m_1, \dots, m', \dots$).

Soit A, B, C trois points du plan P. On note G leur isobarycentre.

À tout point M du plan P, on associe les points M_1, M_2 et M_3 isobarycentres respectifs de $\{M; B; C\}$, $\{M; A; C\}$ et $\{M; A; B\}$.

On note enfin M' l'isobarycentre de $\{M_1; M_2; M_3\}$.

1. a. Tracer le triangle ABC et son isobarycentre G sur une figure.

Exprimer \overrightarrow{OG} en fonction de \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} et \overrightarrow{OC} .

En déduire l'expression de g en fonction de a, b et c .

b. Exprimer de même m_1, m_2, m_3 puis m' en fonction de a, b, c et m .

2. Soit f la transformation qui, à tout point M de P, associe le point M' .

a. Démontrer que $m' - g = \frac{1}{3}(m - g)$.

b. En déduire la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques.

c. Placer sur la figure l'image A'B'C' du triangle ABC par la transformation f .

d. Déterminer le rapport des aires de ces deux triangles.

78 vu au BAC Soit trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1; 1]$. On note G_k le barycentre du système :

$$\{(A; k^2 + 1), (B; k), (C; -k)\}.$$

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire G_1 et G_{-1} .

2. a. Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle $[-1; 1]$, on a l'égalité $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}$.

b. Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$.

c. En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1; 1]$.

3. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

EXERCICES

79 Soit un tétraèdre ABCD et a, b deux réels. On note $G_{a,b}$ le barycentre du système :

$$\{(A ; a), (B ; b), (C ; a + b - 2), (D ; 6 - 2a - 2b)\}.$$

1. Pourquoi $G_{a,b}$ existe-t-il quels que soient les réels a et b ?

2. a. Montrer que pour tous réels a et b :

$$\overrightarrow{AG}_{a,b} = \frac{b}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{a+b-2}{4} \overrightarrow{AC} + \frac{6-2a-2b}{4} \overrightarrow{AD}.$$

b. Pourquoi, pour tous les réels a et b , $G_{a,b}$ n'appartient-il pas à l'arête (AB) ?

3. Déterminer, s'ils existent, les barycentres $G_{a,b}$ qui appartiennent à :

- l'arête (AC) ;
- l'arête (AD) ;
- l'arête (BC) ;
- l'arête (BD) ;
- l'arête (CD) .

Dans toute la suite de l'exercice, on notera

$$H = G_{0,0}, K = G_{0,2}, L = G_{2,0}.$$

4. a. Placer les points H, K et L sur le tétraèdre ABCD.

b. À quelle condition $G_{a,b}$ appartient-il à la face (BCD) ?

c. Montrer que pour tout réel b , $\overrightarrow{HG}_{0,b} = \frac{b}{2} \overrightarrow{HK}$, et en déduire l'ensemble des barycentres $G_{0,b}$ quand b décrit \mathbb{R} .

5. a. Montrer que, pour tous réels a et b :

$$\overrightarrow{HG}_{a,b} = \frac{b}{2} \overrightarrow{HK} + \frac{a}{2} \overrightarrow{HL}.$$

b. En déduire l'ensemble des barycentres $G_{a,b}$ lorsque a et b décrivent \mathbb{R} .

80 On considère un triangle ABC.

1. a. Construire les points suivants :

- I barycentre de (A ; 3) et (C ; 1),
- J barycentre de (A ; 1) et (B ; 3),
- K barycentre de (C ; 1) et (B ; -9).

b. Montrer que B est le barycentre de (C ; 1) et (K ; 8).

2. a. Montrer que J est barycentre de (A ; 3), (C ; 1) et (K ; 8).

b. Montrer que J est barycentre de (I ; 1), (K ; 2). Que peut-on en déduire concernant les points I, J, K ?

3. Soit E le milieu de [AC] et D le barycentre de (C ; 1) et (K ; 2).

a. Montrer que IJDE est un parallélogramme.

b. Soit O le centre du parallélogramme IJDE, montrer que (CO) coupe [AB] en son milieu.

81 Caractérisation barycentrique d'un triangle

Soit ABC un triangle.

On dira qu'un point M est un point du triangle ABC si et seulement si M est situé sur un côté du triangle ou à l'intérieur du triangle.

Le but de cet exercice est de démontrer la propriété 7 du cours relative au triangle.

1. M est le barycentre de (A ; a), (B ; b), (C ; c) où a, b, c sont trois réels de même signe tels que $a + b + c \neq 0$, un ou deux d'entre eux pouvant être nuls.

a. Si $b + c = 0$, montrer que $M = A$.

b. Si $b + c \neq 0$, en se reportant aux démonstrations des caractérisations barycentriques d'un plan et d'un segment dans le cours, montrer que M est un point du triangle ABC.

2. Réciproque :

M est un point du triangle ABC.

a. Dans les cas où M est un sommet du triangle, déterminer des coefficients a, b, c tels que M soit le barycentre de (A ; a), (B ; b), (C ; c).

b. M n'est pas un sommet du triangle.

Montrer que la droite (AM) coupe le segment [BC] en un point N.

En déduire qu'il existe des réels a, b, c de même signe tels que M soit le barycentre de (A ; a), (B ; b), (C ; c), l'un des deux réels b, c pouvant être nul.

3. Conclure.

82 Bissectrices dans un triangle

Soit un triangle ABC. On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

1. On définit les points D et P par :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{c}{b} \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

a. Déterminer la nature du quadrilatère ADPB et en déduire que la droite (AP) est la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{A} , c'est-à-dire la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} .

b. Soit I le barycentre de (A ; a), (B ; b), (C ; c). Montrer que I est un point du triangle ABC et qu'il appartient à la droite (AP).

c. En déduire que les bissectrices intérieures du triangle ABC sont concourantes en I.

2. Soit E le point défini par $\overrightarrow{CE} = \frac{a}{b} \overrightarrow{AC}$ et Q le point défini par $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE}$.

a. Déterminer la nature du quadrilatère BQEC.

En déduire que la droite (CQ) est la bissectrice extérieure de l'angle \widehat{C} , c'est-à-dire la bissectrice de l'angle \widehat{BCE} .

b. Soit J le barycentre de (A ; -a), (B ; b), (C ; c). Déterminer dans quelle partie du plan est situé le point J.

Montrer que J appartient aux droites (AP), (CQ) et à la bissectrice extérieure de l'angle \widehat{B} .

83 Barycentres et représentations paramétriques de droites

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points $A(0; 0; 2)$; $B(3; 0; 0)$; $C(0; 5; 0)$ et $L(0; 0; \frac{2}{3})$.

H est l'isobarycentre des points O, A, B, C. I et J sont les milieux respectifs des segments [OA] et [BC].

G est le centre de gravité du triangle BOC.

1. Faire une figure.
2. Montrer que H est le milieu du segment [IJ] et que $\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HG} = \vec{0}$.
3. Montrer que la droite (LH) est incluse dans le plan AOJ et que les droites (LH) et (OJ) sont sécantes.

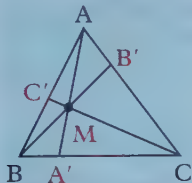
4. On désigne par P le point d'intersection des droites (LH) et (OJ).

Déterminer une représentation paramétrique pour chacune des droites (LH) et (OJ) et en déduire les coordonnées de P.

Quelle est la nature du quadrilatère OBPC ?

5. Montrer que la droite (LH) coupe le plan (ABC) en un point Q dont on déterminera les coordonnées.

84 M est un point intérieur à un triangle ABC. La droite (AM) coupe la droite (BC) en A', la droite (BM) coupe la droite (AC) en B' et la droite (CM) coupe la droite (AB) en C'.



On cherche à savoir s'il existe un point M intérieur au triangle ABC tel que la somme :

$$S = \frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'}$$

soit minimale.

1. Montrer qu'il existe des réels a, b, c strictement positifs tels que M soit le barycentre de $(A; a)$, $(B; b)$, $(C; c)$.

2. Montrer que $a\overrightarrow{MA} + (b+c)\overrightarrow{MA'} = \vec{0}$, en déduire que $\frac{MA}{MA'} = \frac{b+c}{a}$.

3. En déduire que $S = \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$.

4. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

5. En déduire que la somme S est minimale si et seulement si $a = b = c$.

6. En déduire la position de M pour que S soit minimale et déterminer alors la valeur minimale de S.

D'après Exercices de géométrie, IREM de Nantes.

85 Barycentre et aires

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct du plan orienté.

Soit $\vec{U}(x; y)$ et $\vec{V}(x'; y')$, on appelle déterminant du couple de vecteurs (\vec{U}, \vec{V}) dans la base (\vec{i}, \vec{j}) le réel $xy' - x'y$ que l'on notera $\Delta(\vec{U}, \vec{V})$.

1. Montrer que $\Delta(\vec{V}, \vec{U}) = -\Delta(\vec{U}, \vec{V})$.
2. Si $(x; y) \neq (0; 0)$, soit $\vec{U}'(-y; x)$, montrer que $\|\vec{U}'\| = \|\vec{U}\|$ et $(\vec{U}, \vec{U}') = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

3. Montrer que $\vec{U}' \cdot \vec{V} = \Delta(\vec{U}, \vec{V})$.

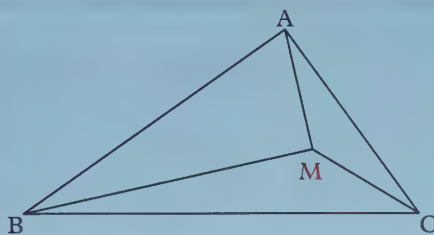
Sachant que $\vec{U}' \cdot \vec{V} = \|\vec{U}'\| \|\vec{V}\| \cos(\vec{U}', \vec{V})$, en déduire que $\Delta(\vec{U}, \vec{V}) = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \sin(\vec{U}, \vec{V})$.

4. Soit ABCD un parallélogramme, montrer que l'aire de ABCD est égale à $|\Delta(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.

5. Soit trois points $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$ non alignés et $M(x; y)$.

a. Montrer que :

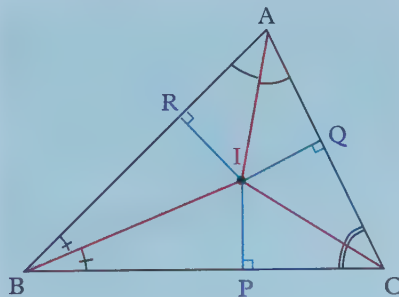
$$\Delta(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})\overrightarrow{MA} + \Delta(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})\overrightarrow{MB} + \Delta(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$



b. En déduire que si M est à l'intérieur du triangle ABC, M est le barycentre des points A, B, C affectés respectivement de l'aire du triangle MBC, de l'aire du triangle MAC, de l'aire du triangle MAB.

6. Application

Soit ABC un triangle et I le point de concours de ses bissectrices intérieures. On désigne par P, Q, R les pieds des hauteurs issues de I dans les triangles BIC, CIA, AIB.



a. Montrer que $IP = IQ = IR$.

b. On note $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$.

En utilisant la question 5, montrer que I est le barycentre des points pondérés $(A; a)$, $(B; b)$, $(C; c)$.

Produit scalaire dans l'espace

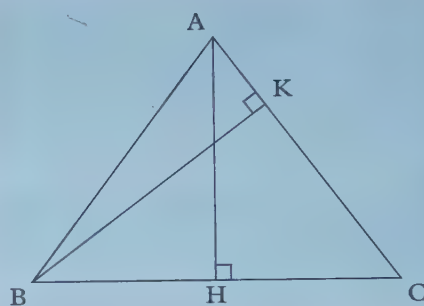
Activité 1

➔ Produit scalaire dans le plan

OBJECTIF

Revoir le calcul de produit scalaire dans le plan.

Le triangle ABC est isocèle en A avec $AB = 5$ et $BC = 6$. Les points H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de A sur (BC) et B sur (AC).



A ■ Dans un repère

1. Justifier que $\left(H ; \frac{1}{3} \overrightarrow{HC}, \frac{1}{4} \overrightarrow{HA} \right)$ est un repère orthonormé du plan.

2. Des coordonnées de A, B et C dans ce repère, déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

B ■ Sans repère

1. Déterminer \widehat{BAH} , puis en déduire \widehat{BAC} et AK.

2. Sans utiliser de repère, comment peut-on retrouver $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

Activité 2 ➔ Une utilisation du produit scalaire dans le plan

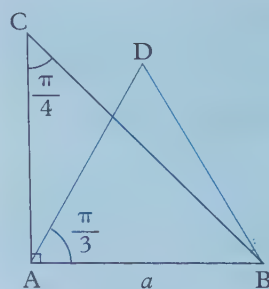
Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A et ABD un triangle équilatéral tels que C et D soient du même côté de (AB). On note a la longueur AB.

1. a. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de a.

b. En déduire $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$.

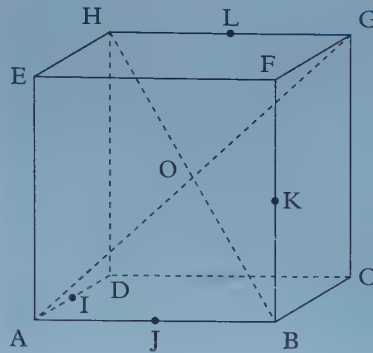
2. a. Donner une mesure en radians de l'angle \widehat{CBD} .

b. En déduire que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.



Activité 3 ➔ Vers l'espace

ABCDEFGH est un cube de côté 4.
On nomme O le centre du cube, I, J, K, L les milieux respectifs de [AD], [AB], [BF] et [GH].



OBJECTIF

Vérifier des prérequis et introduire le produit scalaire dans l'espace.

A ■ Pour faire le point

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1. Repères

- Le repère $R = (A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est orthonormé.
- Le repère $R' = (D ; \frac{1}{4} \overrightarrow{DA}, \frac{1}{4} \overrightarrow{DC}, \frac{1}{4} \overrightarrow{DH})$ est orthonormé.

2. Vecteurs coplanaires

- Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DH} sont coplanaires.
- Les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{DL} et \overrightarrow{DH} sont coplanaires.
- Les vecteurs \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{BG} et \overrightarrow{BK} sont coplanaires.

3. Plans et droites

On nomme $(x ; y ; z)$ les coordonnées de M dans le repère R' .

- Les points M tels que $z = 4$ sont les points du plan (HEF).
- L'ensemble des points M tels que $x = 2$ est une droite.
- Le plan (BFG) est l'ensemble des points M tels que $x = 4$.
- L'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $\begin{cases} y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ est une droite.
- L'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $y = x$ est une droite.

4. Orthogonalité

- Les droites (AF) et (FG) sont orthogonales.
- Le plan (AFG) est orthogonal à la droite (EB).
- La droite (AG) est orthogonale au plan (EBH).

B ■ Produit scalaire dans l'espace

On rappelle que les résultats de géométrie plane sont valables dans tout plan de l'espace.

1. En vous plaçant à chaque fois dans un plan que vous préciserez, calculer les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$;
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}$;
- $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CG}$;
- $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{FC}$;
- $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

2. De la même façon, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AL}$.

Quelle relation peut-on conjecturer entre ces trois produits scalaires ?

1. Produit scalaire : du plan à l'espace

A ■ Rappels dans le plan

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Pour les autres cas, on dispose de plusieurs expressions du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- Avec le cosinus

Pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad (1).$$

Remarques

- Pour bien visualiser un angle de vecteurs, on doit tracer ces vecteurs à partir d'une même origine.

- Pour tout x réel, $\cos(-x) = \cos(x)$, donc l'orientation de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) n'a pas d'incidence sur le résultat ; on a ainsi la formule particulière ci-dessous.

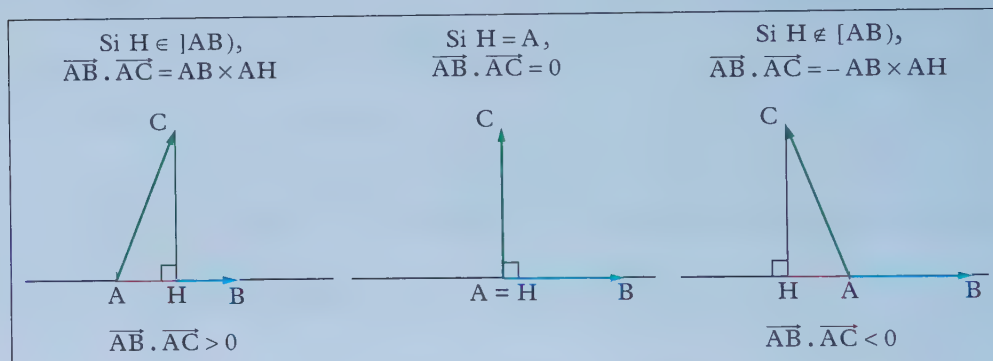
Si $A \neq B$ et $A \neq C$ alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \quad (1').$$

- Avec une projection orthogonale

Si $A \neq B$, et si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \quad (2).$$



- Avec des coordonnées en repère orthonormé

Si $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ dans un repère orthonormé du plan, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \quad (3).$$

Remarque : ce résultat est indépendant du repère choisi.

- Avec des normes

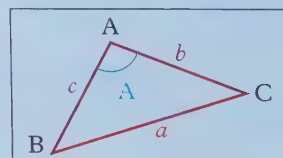
• Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \quad (4).$$

• Pour tous points A, B et C : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) \quad (4')$.

Remarque : Avec les notations usuelles dans un triangle ABC, on peut déduire la **formule d'Al-Kashi** :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$



→ APPLICATIONS

Exercice 1 Déterminer un ensemble de points

Soit A et B deux points tels que $AB = 4$.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $-8 \leq \overline{AM} \cdot \overline{AB} \leq 8$.

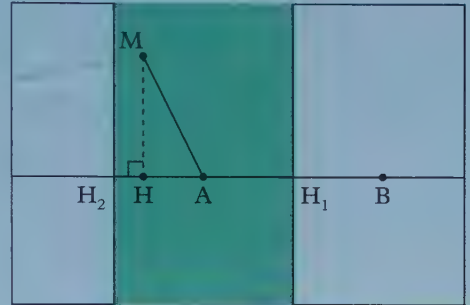
Solution

Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

On distingue alors deux cas :

- si $H \in [AB)$, $\overline{AM} \cdot \overline{AB} = 4 \times AH$ et dans ce cas,
 $-8 \leq \overline{AM} \cdot \overline{AB} \leq 8 \Leftrightarrow -2 \leq AH \leq 2$
 $\Leftrightarrow 0 \leq AH \leq 2$ car AH est positive ;
- si $H \notin [AB)$, $\overline{AM} \cdot \overline{AB} = -4 \times AH$ et dans ce cas,
 $-8 \leq \overline{AM} \cdot \overline{AB} \leq 8 \Leftrightarrow -2 \leq -AH \leq 2$
 $\Leftrightarrow 0 \leq AH \leq 2$.

L'ensemble des points M cherchés est la bande du plan colorée en vert sur la figure, frontières comprises.



voir aussi exercices n°25 à 27

Exercice 2 Déterminer un projeté orthogonal

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de C(1 ; 2) sur la droite (AB) où A(-1 ; -1) et B(1 ; 3).

Solution

• Déterminons une équation de la perpendiculaire Δ à (AB) passant par C : un point $M(x ; y)$ appartient à Δ si et seulement si $\overline{CM} \cdot \overline{AB} = 0$.

Comme $\overline{CM}(x - 1 ; y - 2)$ et $\overline{AB}(2 ; 4)$, M(x ; y) appartient à Δ si, et seulement si, $2(x - 1) + 4(y - 2) = 0$ c'est-à-dire $x + 2y - 5 = 0$.

• Déterminons une équation de (AB) :

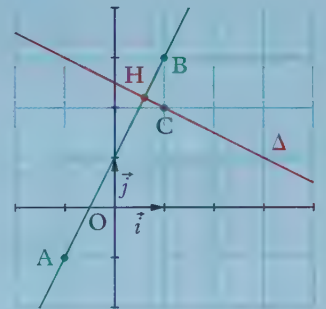
(AB) a pour coefficient directeur $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 2$, donc (AB) a une équation

de la forme $y = 2x + b$.

Comme $y_A = 2x_A + b$, on obtient $b = -1 - 2 \times (-1) = 1$. La droite (AB) a pour équation $y = 2x + 1$.

• Les coordonnées de H sont solutions du système $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$ qui équivaut successivement à

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 2(2x + 1) - 5 = 0 \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x = \frac{3}{5} \end{cases} . \text{ Par suite, H a pour coordonnées } \left(\frac{3}{5} ; \frac{11}{5} \right) .$$



voir aussi exercice n° 16

Exercice 3 Calculer un angle géométrique

Donner une valeur approchée à $0,1^\circ$ près de l'angle \widehat{B} du triangle ABC, où $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 8$.

Solution

Par la formule d'Al-Kashi, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos \widehat{B}$ d'où $64 = 25 + 49 - 70 \cos \widehat{B}$.

On en déduit que $\cos \widehat{B} = \frac{1}{7}$ puis que $\widehat{B} \approx 81,8$ à $0,1^\circ$ près.

voir aussi exercices n° 9, 10, 19

B ■ Extension à l'espace : définition et propriétés

1. Définition

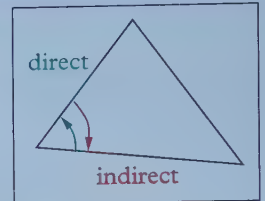
Définition 1 et propriété 1 →

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace et des points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe au moins un plan (P) contenant A, B et C. On définit le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} comme étant le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans le plan (P).
Le résultat est indépendant des représentants \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , et du plan (P) choisis.

2. Extension des expressions planes à l'espace

- Avec le cosinus

Les expressions (1) et (1') peuvent s'étendre à l'espace, en sachant bien que l'angle (\vec{u}, \vec{v}) ne peut être défini qu'au signe près, mais ceci n'affecte pas $\cos(\vec{u}, \vec{v})$.

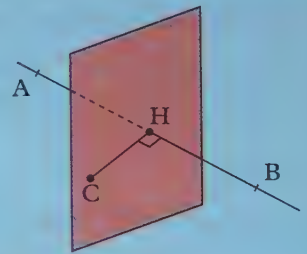


- Avec une projection orthogonale

L'expression (2) s'étend à l'espace en prenant pour H le **projeté orthogonal** de C sur (AB) ainsi défini :

Définition 2 →

Le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est le point d'intersection de (AB) et du plan perpendiculaire à (AB) passant par C.



- Avec des coordonnées

Propriété 2 →

L'espace est rapporté à un repère orthonormé.

- Si $\vec{u}(x; y; z)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$,

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

- Si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Remarque : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé le carré scalaire de \vec{u} et $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

- Avec les normes

Les expressions (4) et (4') sont encore valables dans l'espace.

3. Propriétés algébriques

Propriété 3 →

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de l'espace et tout réel λ , on retrouve les propriétés suivantes :

- symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- bilinéarité : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$,
d'où par symétrie, $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$ et $(\lambda \vec{v}) \cdot \vec{u} = \lambda \times (\vec{v} \cdot \vec{u})$;
- identités remarquables : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$;

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 ;$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2.$$

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 1

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le produit scalaire calculé dans un plan (P) contenant A, B et C, par l'expression utilisant les normes du produit scalaire dans le plan, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Ce résultat ne dépend que de \vec{u} et \vec{v} , donc ne dépend ni des représentants ni du plan (P) choisi.

■ Propriété 2

Les formules de calcul de la norme et de la distance AB sont des conséquences du théorème de Pythagore, vues en classe de première S.

De $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$, on déduit que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [(x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2 - (x^2 + y^2 + z^2) - (x'^2 + y'^2 + z'^2)] = xx' + yy' + zz'$$

■ Propriété 3

Deux vecteurs de l'espace étant toujours coplanaires, toutes les formules se déduisent de celles connues dans le plan sauf l'égalité $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ qui fait intervenir trois vecteurs, non nécessairement coplanaires. On peut la démontrer en se plaçant dans un repère orthonormé et en exprimant les deux membres en fonction des coordonnées de \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .

→ APPLICATION

Exercice 4 Calculer un produit scalaire et un angle dans l'espace (1)

ABCDEFGH est un cube de centre O et d'arête a .

1. Calculer $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$ en fonction de a .

2. En déduire une valeur approchée de l'angle \widehat{AOC} à $0,01^\circ$ près.

Solution

1. Les longueurs OA, OC et AC étant facilement calculables dans le rectangle

ACGE, on peut utiliser $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \frac{1}{2}(\text{OA}^2 + \text{OC}^2 - \text{AC}^2)$.

On a $\text{AC} = a\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré) et $\text{AG} = a\sqrt{3}$ (théorème de Pythagore dans le triangle ACG), d'où $\text{OA} = \frac{1}{2}\text{AG} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

De même $\text{OC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. On en déduit $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2a^2\right) = -\frac{1}{4}a^2$.

2. On sait que $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \text{OA} \times \text{OC} \times \cos \widehat{AOC}$ (1).

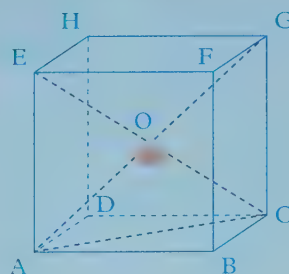
Or $\text{OA} = \frac{1}{2}\text{AG}$ avec $\text{AG}^2 = \text{AC}^2 + \text{CG}^2 = 2a^2 + a^2$, c'est-à-dire $\text{AG} = a\sqrt{3}$. Par suite

$\text{OA} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. On aurait de même $\text{OC} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

De (1), on déduit que $\frac{3}{4}a^2 \cos \widehat{AOC} = -\frac{1}{4}a^2$ d'où $\cos \widehat{AOC} = -\frac{1}{3}$ et $\widehat{AOC} \approx 109,47^\circ$.

Remarque : le théorème d'Al-Kashi dans le triangle OAC permet aussi de déterminer $\cos \widehat{AOC}$.

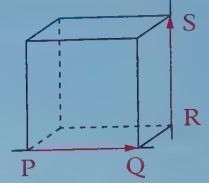
voir aussi exercice n° 23



2. Applications

A ■ Orthogonalité dans l'espace

Définition 3 → Deux vecteurs \overrightarrow{PQ} et \overrightarrow{RS} sont orthogonaux si et seulement si l'un des vecteurs est nul ou si les droites (PQ) et (RS) sont orthogonales.



Remarque : $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

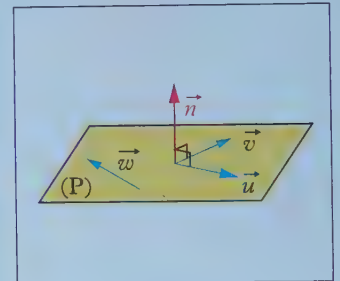
Théorème 1 → Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

B ■ Vecteur normal à un plan

Dans toute la suite, on dira, par abus de langage, qu'un vecteur \vec{u} est un vecteur du plan (P) pour signifier qu'il existe deux points A et B de (P) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Définition 4 → Un vecteur \vec{n} est dit normal au plan (P) si et seulement si il est non nul et orthogonal à tout vecteur de (P) .

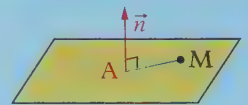
Propriété 4 → Pour qu'un vecteur non nul \vec{n} soit normal à un plan (P) , il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (P) .



Remarques

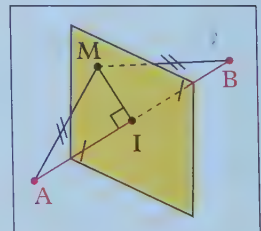
- Si A est un point de (P) , \vec{n} est normal à (P) si et seulement si la droite passant par A et dirigée par \vec{n} est orthogonale au plan (P) .
- Il existe une infinité de vecteurs normaux à un plan, tous colinéaires entre eux.
- Deux plans sont parallèles si et seulement si ils admettent des vecteurs normaux colinéaires.

Propriété 3 → Soit A un point de l'espace et $\vec{n} \neq \vec{0}$. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et orthogonal à la droite (A, \vec{n}) .



Exemple :

Soit $A \neq B$ et I le milieu de $[AB]$. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ est le plan orthogonal à (AB) en I, appelé **plan médiateur** de $[AB]$. C'est aussi l'ensemble des points équidistants de A et B.



→ DÉMONSTRATIONS

■ Théorème 1

Deux vecteurs étant toujours coplanaires, c'est une conséquence directe de la propriété vue dans le plan en première S.

■ Propriété 4

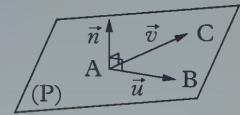
Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non colinéaires de (P).

Supposons \vec{n} non nul et orthogonal à \vec{u} et \vec{v} .

Comme \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, (A ; \vec{u} , \vec{v}) est un repère de (P) donc pour tout vecteur \vec{w} de (P), il existe α et β réels tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Alors $\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\vec{n} \cdot \vec{u} + \beta\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

On en déduit que \vec{n} est orthogonal à tout vecteur de (P).



■ Propriété 5

$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{n} sont orthogonaux. Comme $\vec{n} \neq \vec{0}$, ceci revient à dire que soit $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{AM} \neq \vec{0}$ et les droites (AM) et (A ; \vec{n}) sont orthogonales.

Ceci équivaut donc au fait que M appartient au plan perpendiculaire en A à (A ; \vec{n}).

→ APPLICATION

Exercice 5 Calculer un produit scalaire et un angle dans l'espace (2)

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête a , G le centre de gravité de BCD, I le milieu de [CD].

1. Montrer que (AG) est orthogonale à (BCD).

2. En exprimant de deux façons différentes $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$, calculer une valeur approchée par défaut à $0,1^\circ$ près de l'angle \widehat{AIB} .

Solution

1. Dans le plan (BCD), G est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral BCD donc $GB = GC = GD$. De plus $AB = AC = AD$.

Les points A et G appartiennent donc aux **plans médiateurs** des segments [BC], [CD] et [BD]. Or (BC) est orthogonale à son plan médiateur donc à toute droite de ce plan, en particulier à (AG). De même (CD) est orthogonale à (AG).

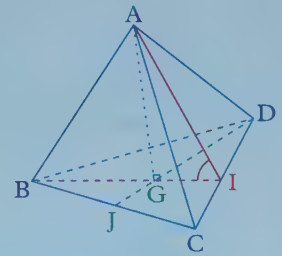
La droite (AG), étant orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCD), est orthogonale à ce plan.

2. On sait que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = IA \times IB \times \cos \widehat{AIB}$. IA et IB sont les hauteurs de deux triangles équilatéraux de côté a , donc $IA = IB = a \frac{\sqrt{3}}{2}$. De ce fait $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \frac{3a^2}{4} \cos \widehat{AIB}$.

D'autre part, G appartient à la médiane (BI) du triangle BCD, et (AG) étant orthogonale à (BCD), (AG) est orthogonale à (BI). Le point G est donc le projeté orthogonal de A sur (BI).

Par suite $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IB}$. Ayant $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IB}$, on obtient $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IB}^2 = \frac{1}{3} a^2 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} a^2$.

De ces deux calculs, on déduit que $\frac{3a^2}{4} \cos \widehat{AIB} = \frac{1}{4} a^2$, puis $\cos \widehat{AIB} = \frac{1}{3}$ et $\widehat{AIB} \approx 70,5^\circ$ à $0,1^\circ$ près par défaut.



voir aussi exercice n° 23

C ■ Équations de plans en repère orthonormé

Propriété 6 → Soit un repère orthonormé de l'espace.

• Si a, b, c, d sont des réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

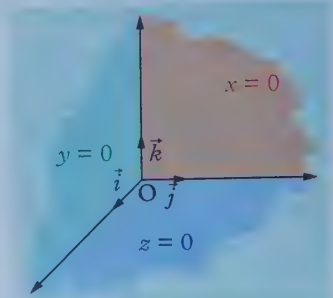
On dit que $ax + by + cz + d = 0$ est une équation de ce plan.

• Réciproquement, tout plan admet une équation de cette forme.

Exemples :

Équations de plans de coordonnées :

$$\begin{cases} x=0 & \text{est une équation du plan } yOz \\ y=0 & \text{est une équation du plan } zOx \\ z=0 & \text{est une équation du plan } xOy \end{cases}$$



Propriété 7 →

Si $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d > 0$ (ou $ax + by + cz + d < 0$) est un demi-espace ouvert de frontière le plan (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

D ■ Calculs de distances

Rappelons que dans le plan muni d'un repère orthonormé, toute droite (D) admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

De plus, $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (D) et $\vec{n}(a; b)$ est normal à (D).

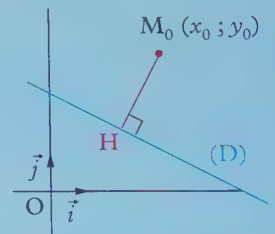
Propriété 8 et définition 5 →

Soit M_0 un point et (D) une droite du plan.

• La distance de M_0 à la droite (D) est la distance M_0H , avec H projeté orthogonal de M_0 sur (D).

• En repère orthonormé, si $M(x_0; y_0)$ et si (D) a pour équation $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$, la

distance de M_0 à (D) est égale à $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.



Propriété 9 et définition 6 →

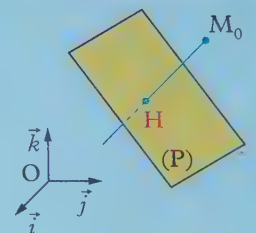
Soit M_0 un point et (P) un plan de l'espace.

• La droite perpendiculaire à (P) passant par M_0 coupe (P) en un unique point H, appelé projeté orthogonal de M_0 sur (P).

• La distance de M_0 au plan (P) est la distance M_0H .

• En repère orthonormé, si $M_0(x_0; y_0; z_0)$ et si (P) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, la distance

de M_0 à (P) est égale à $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.



→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 6

• Comme $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$, il existe des réels x_0, y_0 et z_0 tels que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

Alors pour un point $M(x ; y ; z)$:

$$ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \text{ puisque } d = -ax_0 - by_0 - cz_0.$$

$$ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0, \text{ en posant } A(x_0 ; y_0 ; z_0) \text{ et } \vec{n}(a ; b ; c).$$

L'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est le plan (P) passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

• Soit (P) un plan, $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ un point de (P) et $\vec{n}(a ; b ; c)$ un vecteur normal à (P).

$M(x ; y ; z)$ appartient à (P) si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ soit $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, ce qui s'écrit bien sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ en posant $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

■ Propriété 7

Voir exercice n° 90 p. 348.

■ Propriété 8

Soit $M(x ; y)$ un point quelconque de (D), $\vec{n}(a ; b)$ un vecteur normal à (D).

Par projection orthogonale, $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}$ est égal à $M_0H \times \|\vec{n}\|$ ou $-M_0H \times \|\vec{n}\|$.

$$\text{Par conséquent } |\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}| = M_0H \times \|\vec{n}\| \text{ et } M_0H = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Or $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) = ax + by - ax_0 - by_0 = -ax_0 - by_0 - c$, les coordonnées de M vérifiant l'équation de (D), $ax + by = -c$.

$$\text{Par conséquent } |\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}| = -ax_0 - by_0 - c \text{ et } M_0H = \frac{|-ax_0 - by_0 - c|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

■ Propriété 9

Comme pour la propriété 8, pour tout point $M(x ; y ; z)$ de (P), $M_0H = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ où $\vec{n}(a ; b ; c)$ est normal à (P).

De $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$, on déduit la formule annoncée.

→ APPLICATION

Exercice 6 Écrire une équation du plan (ABC)

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On admet que les points $A(3 ; -1 ; 4)$, $B(2 ; 1 ; 4)$ et $C(3 ; -2 ; 0)$ ne sont pas alignés.

Donner une équation du plan (ABC).

Solution

• Cherchons un vecteur $\vec{n}(a ; b ; c)$ non nul, normal au plan (ABC).

Il faut et il suffit que \vec{n} soit non nul et que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Comme $\overrightarrow{AB}(-1 ; 2 ; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(0 ; -1 ; -4)$, on obtient :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -a + 2b = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -b - 4c = 0.$$

Si on choisit $c = 1$, on obtient $b = -4$, puis $a = -8$ soit $\vec{n}(-8 ; -4 ; 1)$.

• Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ c'est-à-dire $-8(x - 3) - 4(y + 1) + (z - 4) = 0$.

Le plan (ABC) admet donc pour équation $-8x - 4y + z + 16 = 0$.

Remarque

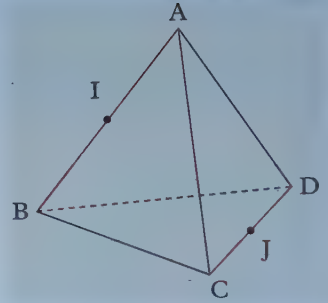
Un plan admet une infinité de vecteurs normaux tous colinéaires entre eux. Le choix arbitraire de c revient à choisir l'un des ces vecteurs. Un autre choix conduirait à une autre équation de (ABC), équivalente à celle-ci.

1. Tétraèdre régulier

OBJECTIF : Démontrer des orthogonalités dans l'espace et calculer des angles.

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a .

On nomme I le milieu de [AB] et J celui de [CD].



A. ➔ Des orthogonalités

1. a. Exprimer, en fonction de a , les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

c. Exprimer \overrightarrow{IJ} en fonction des vecteurs \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{CD} , puis en déduire que (IJ) et (CD) sont orthogonales.

2. En considérant le plan (ABJ), retrouver sans calcul les résultats des questions 1b et 1c.

B. ➔ Centre du tétraèdre

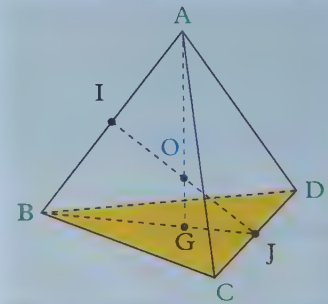
Soit G le centre de gravité du triangle BCD et O le centre du tétraèdre, c'est-à-dire l'isobarycentre des points A, B, C et D.

1. a. Justifier que G est équidistant de B, C et D.

b. En déduire que (AG) est orthogonale au plan (BCD).

2. Démontrer que O appartient à [AG] et à [IJ] ; préciser sa position sur [AG] et [IJ].

3. Prouver (sans calcul) que O est équidistant de A, B, C et D.



C. ➔ Calcul d'angles

1. a. Que peut-on dire des triangles OAB, OAC et OAD ?

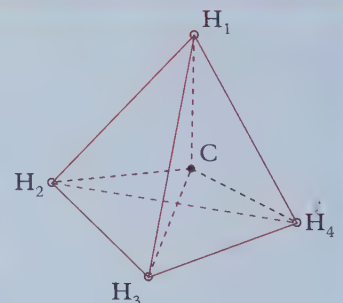
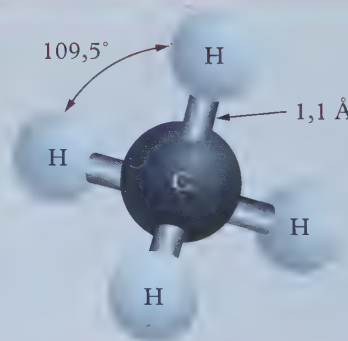
b. Justifier que les produits scalaires $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA}$ sont égaux.

2. En calculant de deux façons différentes $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \cdot \overrightarrow{OA}$, déterminer $\cos \widehat{AOB}$, puis donner une valeur approchée de l'angle \widehat{AOB} à 1° près par défaut.

Point Info

La molécule de méthane CH_4 est composée de quatre atomes d'hydrogène, situés aux sommets d'un tétraèdre régulier, et d'un atome de carbone situé au centre du tétraèdre.

L'angle entre deux liaisons C — H est donc d'environ $109,5^\circ$.



2. Équations de droites et de plans

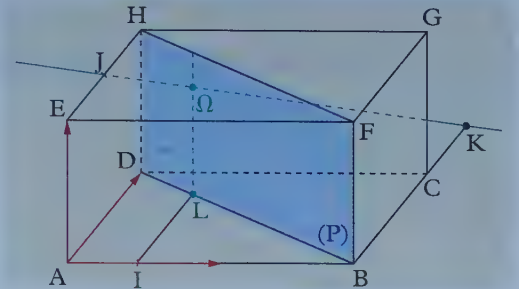
OBJECTIF : Déterminer et utiliser des équations cartésiennes et paramétriques pour des intersections.

On considère ABCDEFGH, un parallélépipède rectangle, tel que $BF = BC = 1$ et $AB = 2$.

Soit K tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC}$ et J le milieu de [EH], on note (P) le plan (BDH).

On munit l'espace du repère $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec :

$$\vec{i} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \quad \vec{j} = \overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \vec{k} = \overrightarrow{AE}.$$



1. a. Déterminer un vecteur \vec{n} non nul orthogonal à la fois à \overrightarrow{DB} et à \overrightarrow{DH} , en déduire une équation cartésienne de (P).

b. Donner un système d'équations paramétriques de (JK).

c. Déterminer les coordonnées de Ω , point d'intersection de (P) et (JK).

2. Soit L le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC) et I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$.

a. Montrer que I, Ω et L sont dans le plan (Π) d'équation $x = \frac{1}{2}$ et vérifier que $L \in (P)$.

b. Pourquoi les plans (P) et (Π) sont-ils sécants ? Quelle est leur droite d'intersection ?

c. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

d. Le système (S)
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$
 est-il un système d'équations paramétriques de la droite d'inter-

section de (P) et (Π) ?

Remarque

Le système (S) caractérise cependant la droite (L Ω), c'est un **système d'équations cartésiennes de (L Ω)**. En effet, une droite est aussi caractérisée par un système de deux équations cartésiennes de plans qui se coupent suivant cette droite.

3. Soit M un point de [DC] ; on pose $\overrightarrow{DM} = \alpha \overrightarrow{DC}$, avec $\alpha \in [0 ; 1]$.

a. Déterminer un système d'équations paramétriques de (EM).

b. Pour quelle valeur de α les droites (EM) et (L Ω) sont-elles sécantes ? Préciser dans ce cas leur point d'intersection Ω' .

3. Intersection de deux plans

OBJECTIF : Savoir déterminer ou reconnaître l'intersection de deux plans.

L'espace est muni d'un repère orthonormal.

1. Soit (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives :

$$(P_1) : x - y + 2z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad (P_2) : -3x + 3y - 6z + 12 = 0.$$

a. Déterminer des vecteurs normaux à (P_1) et (P_2).

b. Quelle est la position relative de (P_1) et (P_2) ?

2. Soit $(P_3) : 2x + y - 3z - 1 = 0$.

a. Déterminer la position relative de (P_1) et (P_3) .

Que peut-on en déduire pour le système $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$?

b. Parmi les systèmes suivants, quels sont ceux qui caractérisent la droite Δ d'intersection (P_1) et (P_3) ?

$$\bullet \begin{cases} x = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} \\ y = \frac{-5}{3} + \frac{7}{3}t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \bullet \begin{cases} x = t \\ y = 7t + 11 \\ z = 3t - 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \bullet \begin{cases} x = \frac{t + 11}{7} \\ y = t \\ z = \frac{3t + 5}{7} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

4. Intersection de trois plans

OBJECTIF : Étudier et imaginer les positions relatives de trois plans.

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. Les figures ci-dessous illustrent des positions possibles de trois plans deux à deux distincts. Préciser dans chaque cas l'intersection de ces trois plans.

Figure 1

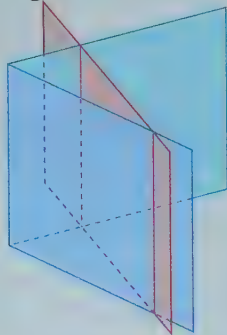


Figure 2

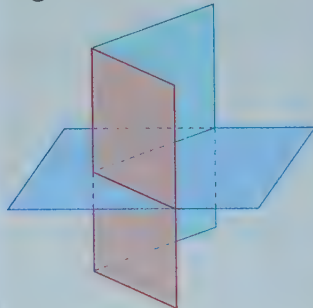
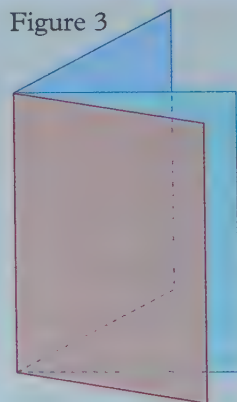


Figure 3



2. Déterminer l'intersection des trois plans donnés par leurs équations dans chacun des cas suivants :

a. $(Q_1) : x - y + 2z = 3$, $(Q_2) : 2x + y - 3z = 1$ et $(Q_3) : 3x - z = 5$.

b. $(R_1) : x + y - z = 1$, $(R_2) : 2x - y + z = 2$ et $(R_3) : -2x + 3y - 4z = -3$.

c. $(S_1) : x - y + 2z = 1$, $(S_2) : 2x + y - z = 2$ et $(S_3) : 4x - y + 3z = 4$.

Si l'intersection est réduite à un point, donner ses coordonnées ; s'il s'agit d'une droite, en donner une représentation paramétrique.

3. Y-a-t-il d'autres cas possibles pour la position de trois plans deux à deux distincts ?

Si oui, les illustrer par une figure et donner des équations de trois plans correspondants à chacun des cas trouvés.

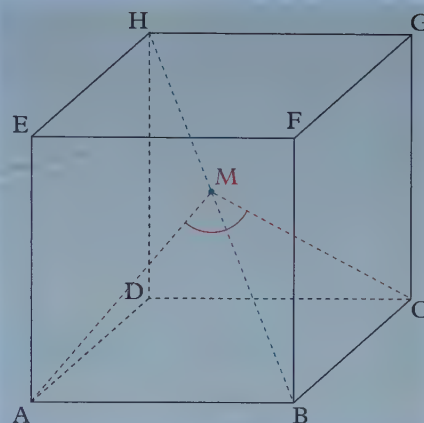
5. Produit scalaire et maximum

OBJECTIF : Optimiser un angle en jouant sur une distance.

ABCDEFGH est un cube d'arête a .

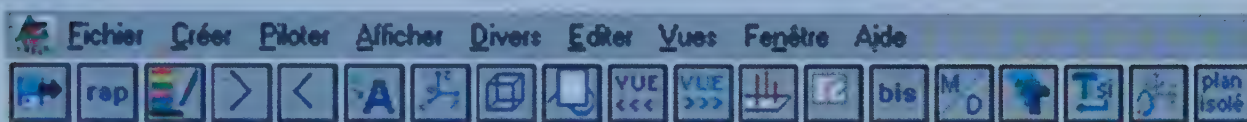
M est un point de la grande diagonale [HB].

Comment déterminer la position du point M sur [HB], pour que l'angle \widehat{AMC} soit maximum ?

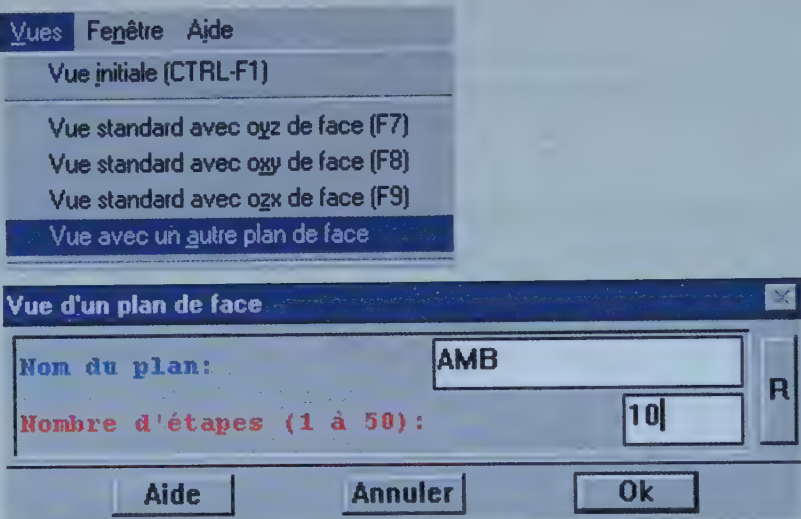



A. ➔ Conjecture à l'aide du logiciel Geoplan-Geospace

Ouvrir le logiciel Geoplan-Geospace pour obtenir une feuille de dessin en haut de laquelle se trouvent une ligne de menus déroulants et une barre d'icônes.



Constructions	Mode d'emploi	Commentaires
Créer le cube ABCDEFGH.	Aller dans le menu <i>Fichier</i> , choisir <i>Charger une figure</i> et ouvrir le fichier <i>cube1</i> dans le répertoire <i>Classics</i> de Geospace.	Pour avoir une vue comme sur la figure ci-dessus : <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p><u>V</u>ues <u>F</u>enêtre <u>A</u>ide</p> <p>Vue initiale (CTRL-F1)</p> <hr/> <p>Vue standard avec <u>o</u>yz de face (F7)</p> <p>Vue standard avec <u>o</u>xy de face (F8)</p> <p>Vue standard avec <u>o</u>zx de face (F9)</p> <p>Vue avec un <u>a</u>utre plan de face</p> <hr/> <p>Vue <u>p</u>récedente (F11)</p> <p>Vue <u>s</u>uivante (F12)</p> <hr/> <p>Plan de face <u>m</u>aintenu de face</p> <hr/> <p><input checked="" type="checkbox"/> Projection <u>g</u>blique</p> <p>Paramètres de projection</p> </div>
Créer le segment [HB].	Menu <i>Créer</i> , <i>Ligne</i> , <i>Segments</i> .	On n'utilise pas de crochets pour nommer le segment.
Créer le point M sur le segment [HB].	Menu <i>Créer</i> , <i>Point</i> , <i>Point libre</i> , <i>sur un segment</i> .	
Calculer la mesure en radians de \widehat{AMC} .	Menu <i>Créer</i> , <i>Numérique</i> , <i>Calcul géométrique</i> , <i>Angle géométrique</i> .	On choisira le radian comme unité et on pourra nommer AMC cette mesure.

Faire afficher cette mesure.	Menu <i>Créer, Affichage, Variable numérique déjà définie.</i>	On choisira par exemple trois décimales.
Déplacer M sur le segment [HB]. Déterminer la position pour laquelle la mesure de \widehat{AMC} semble maximale. Relever la valeur du maximum observé.	Utiliser la souris et observer la modification de l'affichage.	Dès lors, ne plus modifier la position du point M.
Créer le triangle AMB.	Menu <i>Créer, Ligne, Polygone convexe, défini par ses sommets.</i>	On pourra nommer t ce triangle.
Observer AMB en vraie grandeur en plaçant le plan AMB de face.		
Comment semble être l'angle \widehat{AMB} lorsque \widehat{AMC} est maximal ? Que représente donc le point M sur la droite (HB), pour le point A ?	En cas de doute, faire calculer, puis afficher la mesure de \widehat{AMB} comme vu plus haut.	Cliquer sur  permet de revenir à la vue précédente.

B. ➔ Démonstration

1. a. Montrer que $MA = MC$.
- b. On pose $x = \widehat{AMC}$, montrer que $\frac{a^2}{MA^2} = 1 - \cos(x)$.
2. a. Déterminer les variations de la fonction $x \mapsto 1 - \cos x$ sur $[0 ; \pi]$.
- b. En déduire que x est maximal lorsque MA est minimale.
Que représente alors le point M sur la droite (HB), pour le point A ?
- c. Montrer que x est maximal pour $MA^2 = \frac{2a^2}{3}$.
- d. En déduire l'angle maximal \widehat{AMC} .

D'après un exercice de l'IREM de Toulouse.

1 Utiliser le produit scalaire (sans repère)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1. Le nombre a désigne un réel strictement positif.

On considère le point M de la demi-droite [AE) défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AE}$.

1. Déterminer le volume du tétraèdre ABDM en fonction de a .

2. Soit K le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(M ; a^2), (B ; 1), (D ; 1)\}.$$

a. Exprimer \overrightarrow{BK} en fonction de \overrightarrow{BM} et \overrightarrow{BD} .

b. Calculer $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD}$, puis en déduire l'égalité $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.

c. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

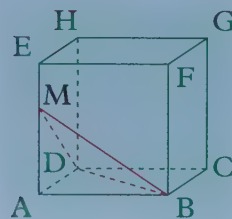
d. Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BMD.

3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?

4. a. Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.

b. Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BDM soit égale à une unité d'aire.

Déterminer la distance AK dans ce cas.



D'après Bac, La Réunion, 2003.

Solution

1. Comme (AE) est orthogonale à (ABD), [AM] est la hauteur du tétraèdre ABDM issue de M.

Le volume V de ABDM est donc donné par $V = \frac{1}{3} \text{aire}(ABD) \times AM$.

Sachant que ABD est rectangle en A, on en déduit que :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times AD \times AM = \frac{1}{6} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{6a} \text{ unité de volume.}$$

2. a. Par la propriété de réduction du barycentre, $a^2 \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BD} = (a^2 + 2) \overrightarrow{BK}$.

On en déduit que $\overrightarrow{BK} = \frac{a^2}{a^2+2} \overrightarrow{BM} + \frac{1}{a^2+2} \overrightarrow{BD}$.

b. Ainsi $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} = \left(\frac{a^2}{a^2+2} \overrightarrow{BM} + \frac{1}{a^2+2} \overrightarrow{BD} \right) \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2+2} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{1}{a^2+2} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM}$.

Comme B a pour projeté orthogonal A sur (AM), $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} = AM^2 = \frac{1}{a^2} AE^2 = \frac{1}{a^2}$.

De plus (AM) étant orthogonale au plan (ABD), elle est orthogonale à (BD) et $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Par conséquent $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2+2} \times \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2+2}$.

De même $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{a^2+2} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{a^2+2} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 + \frac{1}{a^2+2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$ car (BM) et (AD) sont orthogonales et le point B a pour projeté orthogonal A sur (AD).

On en déduit que $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{a^2+2} AD^2 = \frac{1}{a^2+2}$.

Par suite $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BK} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{a^2+2} = 0$.

c. De même $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{DK} = \frac{a^2}{a^2+2} \overrightarrow{DM} + \frac{1}{a^2+2} \overrightarrow{DB}$ par la propriété de réduction. Comme précédemment, on calcule :

$$\bullet \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{a^2}{a^2+2} \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{1}{a^2+2} \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{a^2}{a^2+2} AM^2 + 0 = -\frac{1}{a^2+2} ;$$

$$\begin{aligned} \vec{DK} \cdot \vec{AB} &= \frac{a^2}{a^2+2} \vec{DM} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{a^2+2} \vec{DB} \cdot \vec{AB} \\ &= 0 + \frac{1}{a^2+2} AB^2 = \frac{1}{a^2+2}. \end{aligned}$$

Par conséquent $\vec{DK} \cdot \vec{MB} = 0$.

d. Dans le plan (BMD), \vec{DK} est orthogonal à \vec{MB} et \vec{BK} est orthogonal à \vec{MD} . On en déduit que (DK) et (BK) sont les hauteurs issues de D et B dans le triangle MBD. Le point K commun à ces deux hauteurs est donc l'orthocentre du triangle.

3. Calculons $\vec{AK} \cdot \vec{MB}$ et $\vec{AK} \cdot \vec{MD}$.

• $\vec{AK} \cdot \vec{MB} = \vec{AD} \cdot \vec{MB} + \vec{DK} \cdot \vec{MB} = 0$ car (AD) est orthogonale à (ABE) donc à (MB) et $\vec{DK} \cdot \vec{MB} = 0$.

• De même, $\vec{AK} \cdot \vec{MD} = \vec{AB} \cdot \vec{MD} + \vec{BK} \cdot \vec{MD} = 0$.

La droite (AK) est donc orthogonale à (MD) et (MB) qui sont deux droites sécantes du plan (BMD), elle est donc orthogonale à ce plan.

4. a. M appartient au plan (EAC) qui est le plan médiateur de [BD] donc $MB = MD$. Nommons O le milieu de [BD].

Dans le triangle isocèle MBD, la médiane (MO) est aussi hauteur, donc l'aire de MBD est $\mathcal{A} = \frac{1}{2} BD \times MO$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AOM rectangle en A, on obtient :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} BD \times \sqrt{MA^2 + AO^2}.$$

Comme $BD = AB\sqrt{2} = \sqrt{2}$ et $AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{2}$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{1}{a^2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2+a^2}{2a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{a^2+2}}{\sqrt{2}a} \text{ car } a > 0.$$

Par conséquent $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.

b. $\mathcal{A} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2+2}}{2a} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+2} = 2a \Leftrightarrow a^2+2 = 4a^2$ car les

deux membres sont positifs. Ainsi $\mathcal{A} = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Sachant que (AK) est orthogonale au plan (BCD), le volume du tétraèdre ABDM est aussi égal à $\frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times AK$.

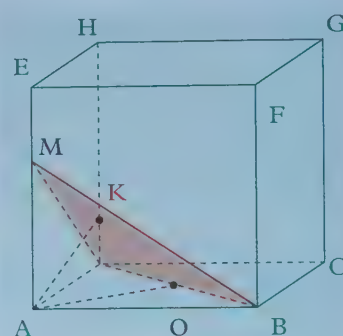
De la question 1, on déduit que $\frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times AK = \frac{1}{6a}$. Ayant $\mathcal{A} = 1$,

$$\text{on a dans ce cas, } AK = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Commentaires

Question 2 : En prouvant dès le début, par la propriété d'associativité, que le barycentre K appartient à la médiane (MO) ; puis en justifiant que (MO) est une hauteur du triangle isocèle BDM, on pouvait se contenter de la question 2b et ne pas traiter la question 2c.

Cette démarche est plus habile mais cet exercice est un sujet de baccalauréat et l'ordre des questions a été respecté.



Question 4b :

Pour calculer la distance d'un point à un plan :

– si on possède une équation du plan dans un repère de l'espace, on peut utiliser la formule de la propriété 9 ;
– sinon, on rencontre souvent la méthode employée ici : évaluer de deux façons différentes le volume d'un tétraèdre.

2 Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les points $A(1; 0; 0)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ et $C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

1. Montrer que OABC est un tétraèdre régulier et donner les coordonnées de son centre de gravité G.
2. Déterminer l'ensemble Σ des points M de l'espace tels que $MO^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5}{3}$.
3. Montrer que Σ est tangent aux quatre faces du tétraèdre OABC.

Solution

1. $OA^2 = 1$, $OB^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$, $OC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 1$.

$AB^2 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$, $AC^2 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 1$, $BC^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$.

$BC^2 = 3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}$, soit $BC^2 = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = 1$. Il en résulte $OA = OB = OC = AB = AC = BC = 1$.

Les quatre faces du tétraèdre sont donc des triangles équilatéraux. Le tétraèdre OABC est donc régulier. Comme G est l'isobarycentre de O, A, B et C, on a :

$$x_G = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad y_G = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad z_G = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{12}, \quad \text{soit } G\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{12}\right).$$

2. Un point $M(x; y; z)$ appartient à Σ si, et seulement si :

$$x^2 + y^2 + z^2 + (x-1)^2 + y^2 + z^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + z^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{5}{3}.$$

Ceci équivaut à $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x - \frac{4\sqrt{3}}{3}y - \frac{2\sqrt{6}}{3}z = -\frac{4}{3}$. En mettant les trinômes sous forme canonique, on obtient l'équation de Σ suivante :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2 = \frac{1}{24}.$$

Par conséquent, $MO^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5}{3}$ équivaut à

$$MG^2 = \frac{1}{24} \quad \text{soit} \quad MG = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

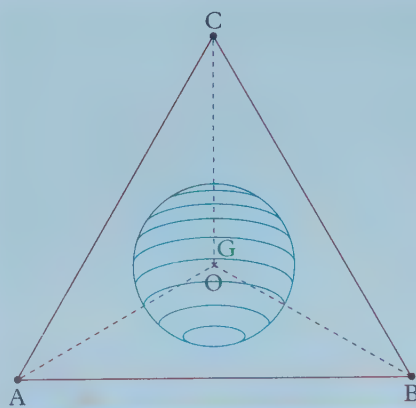
L'ensemble Σ est donc la sphère de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

3. Le plan (AOB) est le plan d'équation $z = 0$.

La distance de G au plan (AOB) est donc égale à $\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{12}\right|}{\sqrt{1}}$, soit $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

La distance du centre G de la sphère Σ à la face (AOB) étant égale au rayon de la sphère Σ , celle-ci est tangente à la face (AOB). La sphère Σ de centre G étant, par définition (voir question 2), l'ensemble des points M tels que

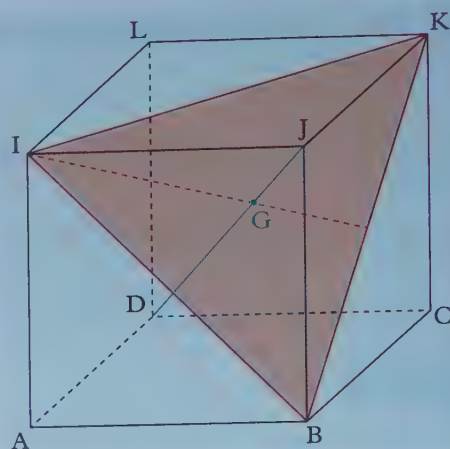
$MO^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5}{3}$, on obtient alors, par permutations, que Σ est aussi tangente aux faces (OAC), (OBC) et (ABC).



voir aussi exercices n° 4, 8, 51

3 On considère le cube ABCDIJKL de côté 1 dessiné ci-contre et on munit l'espace du repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI})$.

1. Soit G le centre de gravité du triangle IBK, calculer les coordonnées de G.
2. Donner un système d'équations paramétriques de la droite (JD) et vérifier que G est sur cette droite.
3. Montrer que \overrightarrow{JD} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{BK} et \overrightarrow{BI} , en déduire une équation cartésienne du plan (BIK).
4. Calculer la distance du point J au plan (BIK). Comparer les distances JG et JD.



Solution

1. Les coordonnées des points I, B et K sont : $I(0 ; 0 ; 1)$; $B(1 ; 0 ; 0)$; $K(1 ; 1 ; 1)$.

Les coordonnées de G sont : $x_G = \frac{x_I + x_B + x_K}{3} = \frac{2}{3}$; $y_G = \frac{y_I + y_B + y_K}{3} = \frac{1}{3}$; et $z_G = \frac{z_I + z_B + z_K}{3} = \frac{2}{3}$.

2. Les coordonnées des points J et D sont : $J(1 ; 0 ; 1)$; $D(0 ; 1 ; 0)$.

Comme (JD) passe par J et a comme vecteur directeur $\overrightarrow{JD}(-1 ; 1 ; -1)$, un système d'équations

$$\text{paramétriques de la droite (JD) est } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Si on prend $t = \frac{1}{3}$, on obtient que le point de coordonnées $(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{2}{3})$ est sur la droite, donc G est sur (JD).

3. Les vecteurs \overrightarrow{BK} et \overrightarrow{BI} ont pour coordonnées : $\overrightarrow{BK}(0 ; 1 ; 1)$; $\overrightarrow{BI}(-1 ; 0 ; 1)$.

D'où $\overrightarrow{JD} \cdot \overrightarrow{BK} = 1 - 1 = 0$ et $\overrightarrow{JD} \cdot \overrightarrow{BI} = 1 - 1 = 0$. On en déduit que \overrightarrow{JD} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BIK) donc \overrightarrow{JD} est orthogonal au plan (BIK).

Soit $M(x ; y ; z)$ un point quelconque de l'espace :

$$M \in (\text{BIK}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{JD} = 0$$

$$M \in (\text{BIK}) \Leftrightarrow -1(x-1) + y - z = 0$$

donc une équation cartésienne du plan (BIK) est $x - y + z - 1 = 0$.

4. En utilisant la formule du cours, la distance du point J au plan (BIK) vaut :

$$\frac{|1 + 1 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

D'après ce qui précède, G est le projeté orthogonal de J sur (BIK) donc $JG = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D'autre part, on sait que $JD = \sqrt{3}$ (grande diagonale du cube) donc $JG = \frac{1}{3} JD$.

voir aussi exercices n° 42 à 44

→ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Produit scalaire dans le plan

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

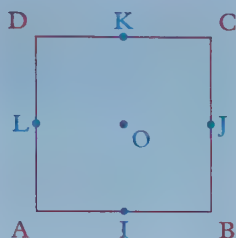
1 ABCD est un carré de côté a et de centre O . Les points I, J, K, L sont les milieux des côtés comme sur la figure.

Exprimer en fonction de a :

1. $\overline{AI} \cdot \overline{AB}$; $\overline{DA} \cdot \overline{BJ}$;
 $\overline{DI} \cdot \overline{AJ}$.

2. $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$; $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$;
 $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$.

3. $\overline{OJ} \cdot \overline{OA}$; $\overline{AB} \cdot \overline{BI}$;
 $\overline{KB} \cdot \overline{KD}$.



2 ABCD est un carré de côté a . On place les points E et F tels que $\overline{BE} = t\overline{BC}$ et $\overline{CF} = t\overline{CD}$, où t est un réel donné.

1. Faire une figure et émettre une conjecture sur les droites (AE) et (BF) .

2. Démontrer cette conjecture :

- en se plaçant dans un repère orthonormal ;
- sans repère, à l'aide d'une rotation.

3 Soit $A(1; -2)$, $B(2; 1)$ et $C(5; -2)$.

1. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

2. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC .

4 On donne les points $A(0; 4)$, $B(-3; 0)$ et $C(2; 0)$, et les droites d et d' , respectivement perpendiculaires à (BC) en B et C . La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe d en P , la perpendiculaire à (AC) passant par O coupe d' en Q .

1. Faire une figure.

2. Prouver que le point $H\left(0; \frac{3}{2}\right)$ est l'orthocentre du triangle ABC .

3. Déterminer les coordonnées des points P et Q .

4. Étudier l'alignement des points P, Q et H .

5 Soit deux points A et B et I le milieu de $[AB]$.

1. a. Démontrer que :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2.$$

b. En déduire l'ensemble Γ des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = AB^2$.

2. Dans cette question on prend $A(1; 2)$ et $B(3; 5)$. Retrouver analytiquement le résultat obtenu à la question 1b.

Produit scalaire dans l'espace

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

6 Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

a. $\vec{u}(-1; 2; -3)$, $\vec{v}(-2; 2; 2)$;

b. $\vec{u}(5; 1; -5)$, $\vec{v}(1; -3; 3)$;

c. $\vec{u}(\sqrt{2}; \sqrt{3}; 1)$, $\vec{v}(-\sqrt{3}; \sqrt{2}; 1)$.

7 Dans chacun des cas suivants, déterminer des réels x et y pour que \vec{u} et \vec{v} soient orthogonaux.

a. $\vec{u}(x; 1; -5)$, $\vec{v}(2; 0; 2)$;

b. $\vec{u}(2; x; -3)$, $\vec{v}(y; -2; 4)$;

c. $\vec{u}(-3; 1; x)$, $\vec{v}(2; -5; y)$.

8 Soit les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(4; -2; 0)$.

1. a. Vérifier que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

b. Déterminer un vecteur \vec{e}_1 de norme 1 colinéaire à \vec{u} .

c. Déterminer un vecteur \vec{e}_2 de norme 1 colinéaire à \vec{v} .

2. a. Soit le vecteur $\vec{w}(x; y; z)$, donner le système de deux équations à trois inconnues vérifié par x, y et z pour que \vec{w} soit orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} . Résoudre ce système.

b. Soit O un point quelconque de l'espace, déterminer \vec{e}_3 tel que $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ soit un repère orthonormal de l'espace (deux solutions).

9 Soit les points $A(1; 1; 1)$, $B(2; 0; -2)$ et $C(1; -2; 2)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

2. Donner une mesure en radians à 10^{-2} près des angles autres que l'angle droit de ce triangle.

10 Soit les points $A(2; -1; 0)$; $B(3; 2; -1)$ et $C(6; 3; 0)$.

1. Montrer que ABC est isocèle.

2. Donner une mesure en degrés à 0,1 près des angles de ce triangle.

11 Soit les points $A(0; 3; 4)$; $B(1; -1; -1)$ et $C(2; 0; 2)$.

1. Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ et en déduire $\cos(\widehat{BAC})$.

2. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC , calculer AH et en déduire l'aire du triangle ABC en unités d'aire.

12 Soit les points $A(5; -5; 3)$; $B(-1; -2; -1)$; $C(8; 5; 6)$ et $D(2; 8; 2)$.

1. Montrer que $\overline{AC} = \overline{BD}$ et $\overline{AB} \perp \overline{AC}$.

2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

EXERCICES

13 Soit les points $O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$ et $B(1; \sqrt{3}; 0)$.

- Vérifier que OAB est équilatéral.
- Déterminer les coordonnées d'un point C tel que OABC soit un tétraèdre régulier.

14 Soit $B(0; 1; 1)$, $C(2; 0; -4)$ et $D(1; 3; 1)$.

- Vérifier que B, C et D ne sont pas alignés.
- Soit $A(2; -1; 1)$. La droite (OA) est-elle orthogonale au plan (BCD) ?
- Montrer que O est le barycentre de B, C et D affectés de coefficients que l'on déterminera.
- Quel est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) ?

15 Soit $A(2; -1; 5)$ et $B(-1; 3; 1)$.

- Montrer que AOB est un triangle rectangle.
- a. Déterminer un vecteur directeur de la droite D passant par O et orthogonale au plan (OAB).
b. En déduire un système d'équations paramétriques de D.
- Montrer qu'il existe deux points de D tels que le tétraèdre ait pour volume 6 ; donner les coordonnées de ces deux points.

16 Projeté orthogonal sur une droite

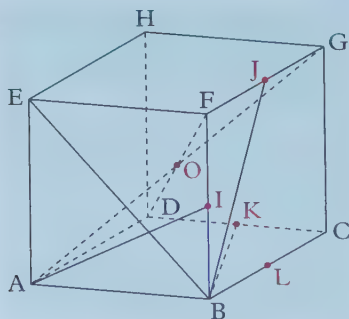
Soit (d) la droite passant par $A(2; 0; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 1)$ et soit le point $B(3; 2; 4)$.

- Déterminer une représentation paramétrique de (d).
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de B sur (d), c'est-à-dire du point de (d) tel que $\vec{BH} \perp \vec{u}$.

Sans repère

Dans les exercices 17 à 21, on considère un cube ABCDEFGH de côté a.

Les points I, J, K, L et O sont les milieux respectifs de [BF], [FG], [CD], [BC] et [AG].



17 Déterminer, en fonction de a, les produits scalaires :

- $\vec{AI} \cdot \vec{AB}$; $\vec{AI} \cdot \vec{AE}$; $\vec{AI} \cdot \vec{AF}$;
b. $\vec{KC} \cdot \vec{KB}$; $\vec{DK} \cdot \vec{BL}$; $\vec{EB} \cdot \vec{DG}$.

18 1. Déterminer le projeté orthogonal de J sur (AB). En déduire $\vec{AJ} \cdot \vec{AB}$.

- Déterminer de même :
a. $\vec{DJ} \cdot \vec{DC}$; $\vec{HA} \cdot \vec{HB}$; $\vec{BI} \cdot \vec{BH}$.
b. $\vec{BJ} \cdot \vec{BL}$; $\vec{FG} \cdot \vec{EG}$; $\vec{DK} \cdot \vec{DI}$.

19 1. En écrivant \vec{BJ} sous la forme $\vec{BF} + \vec{FJ}$, déterminer $\vec{BK} \cdot \vec{BJ}$.

- Exprimer en fonction de a les longueurs BK et BJ.
- En déduire une mesure approchée de l'angle \widehat{KBJ} à $0,1^\circ$ près. Cette mesure dépend-elle de a ?

20 1. Justifier que $\vec{FD} \cdot \vec{EB} = 0$.

- Démontrer que (FD) est orthogonale au plan (EBG).
- Le plan (EBG) est-il le plan médiateur du segment [FD] ?

21 1. Exprimer en fonction de a les longueurs OF et OG.

2. Dans le triangle OFG, en déduire $\vec{OF} \cdot \vec{OG}$.

3. a. Justifier que le repère $\left(A ; \frac{1}{a} \vec{AB}, \frac{1}{a} \vec{AD}, \frac{1}{a} \vec{AE} \right)$ est un repère orthonormé du plan.

b. En se plaçant dans ce repère, retrouver les résultats de la question 2.

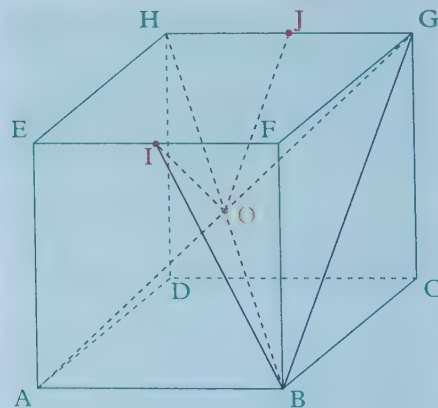
22 ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a.

1. Exprimer en fonction de a les produits scalaires :
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{AB} \cdot \vec{DA}$; $\vec{BC} \cdot \vec{AD}$.

2. Soit I, J, K, L les milieux respectifs de [AB], [AD], [DC] et [CB].

Justifier que IJKL est un parallélogramme. Que peut-on en dire de plus ?

23 Soit ABCDEFGH un cube d'arête a, O le centre du cube, I le milieu de [EF] et J le milieu de [GH].



Donner une mesure en degrés approchée à $0,1$ près des angles \widehat{AOB} , \widehat{BOG} , \widehat{IOJ} , \widehat{IBJ} .

24 Soit OAB un triangle rectangle en O, soit (Δ) la perpendiculaire en O au plan (OAB) et soit C un point de (Δ) distinct de O.

1. Calculer les produits scalaires :

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} \text{ et } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA}.$$

2. Soit H le projeté orthogonal de O sur [AB], montrer que (CH) est orthogonale à (AB).

Ensemble de points

25 On considère deux points distincts A et B tels que $AB = 4$.

Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

- a. $MA = MB$? b. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$?
c. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$? d. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$?

26 On considère un triangle ABC de centre de gravité G. Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

- a. $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$?
b. $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$?
c. $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \leq 6$?

27 Soit A, B et C trois points distincts de l'espace, déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

- a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM}$;
b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM}$.

28 Soit A et B deux points distincts de l'espace et I leur milieu. Soit M un point quelconque de l'espace.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$.
2. En déduire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

29 Soit A et B deux points de l'espace tels que $AB = 2$ et I le milieu de [AB].

1. Démontrer que pour tout point M de l'espace, $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 - MB^2 = 12$.

30 **avec ROC** Soit A et B deux points de l'espace et I le milieu de [AB].

1. Établir que pour tout point M de l'espace,

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2.$$

2. Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

- a. $MA^2 + MB^2 = AB^2$?
b. $MA^2 + MB^2 = \frac{1}{2} AB^2$?

3. Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On considère $A(1 ; -2 ; 0)$ et $B(3 ; 1 ; 1)$.

Retrouver par le calcul les résultats de la question 2.

Équation de plan Vecteur normal

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

31 Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur normal aux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

- a. $\vec{u}(-2 ; 3 ; 6)$, $\vec{v}(1 ; 0 ; 5)$;
b. $\vec{u}(0 ; -1 ; 3)$, $\vec{v}(2 ; 1 ; 5)$;
c. $\vec{u}\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4}\right)$, $\vec{v}(2 ; 3 ; 4)$.

32 Pour chacun des plans suivants définis par une équation cartésienne, donner un vecteur normal.

- a. (P) : $2x - 6y + 2z - 7 = 0$;
b. (Q) : $z - x = 0$;
c. (R) : $x + 2y = 5 - 3z$.

33 Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par le point A et de vecteur normal \vec{n} dans chacun des cas suivants.

- a. $A(2 ; -3 ; 1)$, $\vec{n}(1 ; 3 ; -4)$;
b. $A(1 ; 1 ; 1)$, $\vec{n}\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{3}\right)$;
c. $A(\sqrt{2} ; 0 ; \sqrt{2})$, $\vec{n}(0 ; 1 ; \sqrt{3})$.

34 Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(-2 ; 0 ; 5)$ et parallèle au plan d'équation $2x - 7y + 5z = 1$.

35 Déterminer une équation du plan médiateur de [AB] avec $A(2 ; -1 ; 1)$ et $B(0 ; 4 ; 1)$.

36 Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur normal au plan ABC puis une équation cartésienne de ce plan.

- a. $A(2 ; 0 ; -1)$, $B(0 ; 3 ; 4)$, $C(1 ; 5 ; 0)$;
b. $A(1 ; 1 ; \sqrt{2})$, $B(1 ; 0 ; 0)$, $C(\sqrt{2} ; 1 ; 1)$.

37 Soit le plan (P) d'équation $5x - 2y = 7$.

Dans chacun des cas suivants, donner un système d'équations paramétriques de (d) passant par A et de vecteur directeur \vec{u} et déterminer l'intersection de (d) et (P).

- a. $A(1 ; -3 ; 5)$ et $\vec{u}(1 ; 1 ; 1)$;
b. $A(2 ; 1 ; -3)$ et $\vec{u}(2 ; 5 ; 1)$;
c. $A(3 ; 4 ; 2)$ et $\vec{u}(0 ; 0 ; 5)$.

38 Soit $A(-1 ; 4 ; 7)$, déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = -2$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (E) et (OA).

EXERCICES

39 Soit (P) le plan d'équation $2x - y + 3z - 12 = 0$.

1. a. Déterminer les points d'intersection de (P) avec les axes du repère.

b. Montrer que (P) admet aussi pour équation :

$$\frac{x}{6} - \frac{y}{12} + \frac{z}{4} - 1 = 0.$$

2. On considère les points :

$$A(a; 0; 0), B(0; b; 0) \text{ et } C(0; 0; c)$$

où a, b et c sont trois réels non nuls.

Montrer que le plan (ABC) a pour équation :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Distance d'un point à un plan

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

40 Soit le point $A(1; 2; 0)$ et (P) le plan d'équation $x - y + z - 2 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur (P).

2. Calculer la distance de A au plan (P) de deux façons différentes.

41 Soit $A(1; 1; 1)$.

De quel plan (P), (Q), (R) A est-il le plus proche, avec :

$$(P) : 3x - 2y + 7 = 0,$$

$$(Q) : x + 2y - 3z - 10 = 0,$$

$$(R) : 4y + 3z - 5 = 0 ?$$

42 Soit les points $A(4; -2; 4)$, $B(4; 1; 1)$ et $C(-1; 2; 2)$. On considère le tétraèdre OABC et on cherche à calculer la distance d du point O au plan (ABC).

1. a. Prouver que le triangle BCO est rectangle.

b. Calculer son aire.

2. a. Prouver que (AB) est perpendiculaire au plan (BCO).

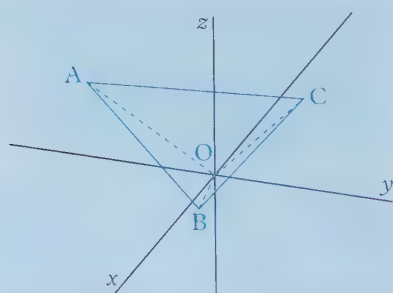
b. Calculer le volume V du tétraèdre OABC.

3. a. Calculer l'aire du triangle ABC.

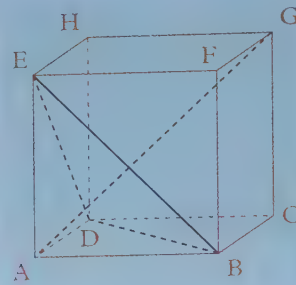
b. En déduire la distance d cherchée.

4. a. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation $2x + 5y + 5z - 18 = 0$.

b. Retrouver la distance d .



43 Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.



1. a. Démontrer que $\overline{AG} \cdot \overline{BD} = 0$.

b. Calculer $\overline{AG} \cdot \overline{BE}$.

c. En déduire que (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE. Démontrer que (AG) perce le plan (BDE) en I et préciser la position de I sur le segment [AG].

3. On considère le repère $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$.

a. Écrire une équation du plan (BDE).

b. Déterminer le projeté orthogonal J de H sur le plan (BDE).

c. En déduire la distance de H au plan (BDE). Quelle vérification peut-on faire ?

1. a. Il n'y a ni projeté orthogonal ni angle facile à déterminer ; il faut donc penser à décomposer l'un des vecteurs de façon à faire intervenir des vecteurs orthogonaux à l'autre. Ici \overline{AG} peut être décomposé en deux vecteurs dont les directions sont orthogonales à celle de \overline{BD} .

b. Une autre décomposition de \overline{AG} ...

2. On sait que I appartient à (BDE) ; il reste à prouver qu'il appartient à (AG) ce qui se fait vectoriellement en prouvant que \overline{AG} et \overline{AI} sont colinéaires. Pour exprimer \overline{AI} où I est un barycentre, on doit penser à la propriété de réduction du barycentre. Remarque : on peut aussi utiliser une représentation paramétrique de (AG) et les coordonnées de I.

3. a. \overline{AG} est un vecteur normal au plan (BDE).

b. J est le point d'intersection du plan (BDE) et de la droite Δ passant par H et orthogonale à (BDE). Ayant une équation de (BDE), il suffit d'écrire une représentation paramétrique de Δ pour pouvoir trouver le point J.

c. On a deux façons de calculer cette distance, l'une servant de vérification à l'autre : soit calculer JH à partir des coordonnées de J et H, soit appliquer la formule de la propriété 9 page 328.

44 Soit $A(1; -2; 3)$ un point de l'espace et (P) le plan d'équation $x + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3}z = 0$.

Montrer que la sphère (S) de centre A et de rayon 1 coupe le plan (P) suivant un cercle dont on donnera le rayon.

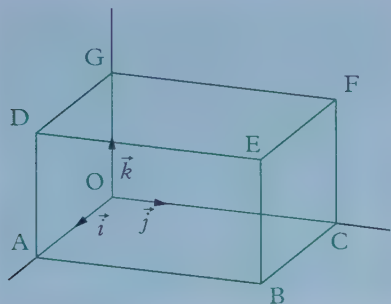
Régionnement de l'espace

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

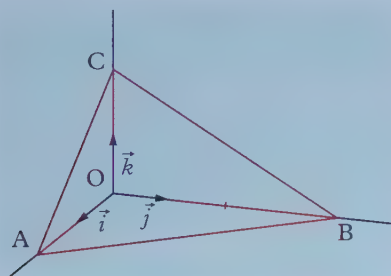
45 Déterminer l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant la condition donnée.

- a. $x \geq 0$; b. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$; c. $\begin{cases} x > 0 \\ z > 0 \end{cases}$;
 d. $x - y + z \leq 0$; e. $x - y \geq 0$.

46 Caractériser par un système d'inéquations les points $M(x; y; z)$ situés à l'intérieur du parallélépipède rectangle OABCDEFG où $A(2; 0; 0)$, $B(2; 4; 0)$ et $D(2; 0; 2)$.



47 Caractériser par un système d'inéquations les points $M(x; y; z)$ situés à l'intérieur du tétraèdre OABC où $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ et $C(0; 0; 2)$.



48 On considère les points :

$I(1; 0; 0)$, $J(0; 1; 0)$ et $K(0; 0; 1)$.

Caractériser à l'aide d'un système d'inéquations l'intérieur de la pyramide OIJK.

49 On considère le système
$$\begin{cases} y - x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

Dessiner dans le repère la partie de l'espace ainsi définie.

Intersection de plans Systèmes

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

50 Soit les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x - 3y + 2z = 5$ et $2x + y + 7z = 1$, donner un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection.

51 Déterminer la position relative des trois plans suivants.

(P) : $x - 2y + z - 1 = 0$; (Q) : $2x - 4y + 2z - 1 = 0$;
 (R) : $3x + 4y - 5z + 6 = 0$.

Quelle est l'intersection de ces trois plans ?

52 Déterminer la position relative des trois plans suivants.

(P) : $x - 2y + z - 1 = 0$; (Q) : $2x + y - 3z + 4 = 0$;
 (R) : $x - 3y + z + 2 = 0$.

Quelle est l'intersection de ces trois plans ?

53 L'espace est muni d'un repère orthonormal.

Soit les points $A(1; 2; 1)$; $B(-1; 3; 2)$ et $C(0; 2; 4)$. Déterminer l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que :

$$\overline{AM} \cdot \overline{AB} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{BM} \cdot \overline{AC} = 0.$$

54 On considère les points $A(1; 0; 0)$; $B(1; 1; 1)$; $C(0; 1; 1)$ et $D(2; 0; 1)$.

1. Donner une équation cartésienne des plans médiateurs de [AB], [AC], [BC] et [AD].

2. Montrer, en résolvant le système :

$$(\Sigma) \begin{cases} y + z - 1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ 2x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

que ces quatre plans ont un seul point commun Ω .

3. Que peut-on dire des distances ΩA , ΩB , ΩC , ΩD ? Pourquoi Ω appartient-il aux plans médiateurs de [BD] et [CD] ?

4. Soit (S) la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD, quels sont son centre et son rayon ?

55 Soit les plans :

(P) : $x + y + z = 0$;

(Q) : $x - y + z = 1$;

(R_m) : $mx + y - z = -1$ ($m \in \mathbb{R}$).

1. Déterminer une valeur m_0 du réel m pour laquelle (R_m) est confondu avec l'un des deux autres plans.

2. Déterminer l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R_m) :

a. pour $m = m_0$;

b. pour $m \neq m_0$.

→ Que sais-je ?

Vrai ou faux ?

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour les exercices 56 à 60, on considère $A(1; 2; 1)$, $B(0; 2; 3)$, $C(0; 0; 1)$ et $D\left(\frac{9}{5}; \frac{12}{5}; 1\right)$.

56 (ABC) a pour équation $2x - y + z - 1 = 0$.

57 La droite (AD) est orthogonale au plan (ABC).

58 La distance de D au plan (ABC) est $\frac{\sqrt{6}}{5}$.

59 L'intersection des plans (P) et (P') d'équations respectives $y = 2$ et $2x + z - 3 = 0$ est la droite (AB).

60 L'angle géométrique \widehat{BAD} mesure $\frac{\pi}{3}$ radians.

61 La droite $\Delta : \begin{cases} x = -4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et le plan

(P) : $x - 2y + 5z - 1 = 0$ ne sont ni orthogonaux ni parallèles.

62 L'ensemble des points M équidistants des points $A(2; -3; 0)$ et $B(-4; 1; 2)$ est le plan d'équation $3x + 2y - z + 4 = 0$.

63 Soit $A(1; 0; -2)$ et $B(2; -1; 1)$. Il existe un plan contenant (AB) et orthogonal à (Oz).

64 a. Si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

b. Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors :
 $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.

Dans les exercices 65 à 68, on considère trois plans (P_1) , (P_2) et (P_3) , deux à deux distincts.

65 Si $(P_1) \cap (P_2) \neq \emptyset$ et $(P_2) \cap (P_3) \neq \emptyset$ alors $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) \neq \emptyset$.

66 Si $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) \neq \emptyset$ alors $(P_1) \cap (P_2) = (P_2) \cap (P_3)$.

67 Si $(P_1) \cap (P_2) = (P_2) \cap (P_3)$ alors $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3)$ est une droite.

68 Si $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3)$ est réduit à un point alors $(P_1) \cap (P_2)$ est une droite.

Source : ESIEE.

QCM

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

69 Plusieurs réponses peuvent être vraies.

Soit ABCD un tétraèdre régulier et I, J, K, L, M, N les milieux des arêtes [AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD]. On pose $a = AB$.

A. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{a^2}{2}$; B. $\overline{BD} \cdot \overline{DA} = \frac{a^2}{2}$;

C. $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$; D. $\overline{AB} \cdot \overline{IN} = 0$;

E. $\overline{IN} \cdot \overline{KL} = 0$.

Pour chaque exercice suivant, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

On donne le point $S(1; -2; 0)$ et le plan (P) d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

70 Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan (P) est :

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$; B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$;

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$; D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

71 Les coordonnées du point H d'intersection de la droite D avec le plan (P) sont :

A. $(-4; 0; 0)$; B. $\left(\frac{6}{5}; -\frac{9}{5}; \frac{-3}{5}\right)$;

C. $\left(\frac{7}{9}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$; D. $\left(\frac{8}{11}; -\frac{25}{11}; \frac{9}{11}\right)$.

72 La distance du point S au plan (P) est égale à :

A. $\frac{\sqrt{11}}{3}$; B. $\frac{3}{\sqrt{11}}$; C. $\frac{9}{\sqrt{11}}$; D. $\frac{9}{11}$.

73 On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère et du plan (P) est égale :

A. au point $I(1; -5; 0)$;

B. au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$;

C. au cercle de centre S et de rayon $r = 2$;

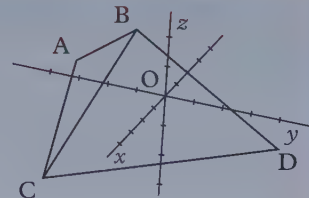
D. au cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$.

→ Un sujet vu au BAC (extrait)

74 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points $A(3; -2; 2)$; $B(6; 1; 5)$ et $C(6; -2; -1)$.

→ Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit (P) le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$. Montrer que (P) est orthogonal à (AB) et passe par A.
3. Soit (P') le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A.
 - a. Déterminer une équation cartésienne de (P').
 - b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ , droite d'intersection des plans (P) et (P').



→ Partie B

1. Soit D $(0; 4; -1)$. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Calculer le volume V du tétraèdre ABCD.
3. Montrer que l'angle géométrique \widehat{BDC} a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radians.
4. Calculer l'aire du triangle BDC. En déduire la distance du point A au plan (BDC).

Asie, juin 2003.

Solution

→ Partie A

1. De $\overrightarrow{AB}(3; 3; 3)$ et $\overrightarrow{AC}(3; 0; -3)$ on déduit que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Le triangle ABC est rectangle en A.

2. (P) admet pour vecteur normal $\vec{n}(1; 1; 1)$, colinéaire à \overrightarrow{AB} , donc (AB) est orthogonale à (P).

De plus $x_A + y_A + z_A - 3 = 0$ donc A appartient à (P).

3. $\overrightarrow{AC}(3; 0; -3)$ est normal à (P'), donc $\vec{n}(1; 0; -1)$ l'est aussi. Une équation de (P') est alors de la forme $1 \cdot x + 0 \cdot y - 1 \cdot z + d = 0$. Les coordonnées de A vérifient cette équation d'où $d = -1$. Ainsi (P') a pour équation $x - z - 1 = 0$.

Un point $M(x; y; z)$ appartient à Δ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système (S) $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$. En posant

$$z = t, \text{ on obtient cette représentation de } \Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = t \end{cases}$$

→ Partie B

1. $\overrightarrow{AD}(-3; 6; -3)$ d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. Alors (AD) est orthogonale à deux droites sécantes de (ABC) donc à (ABC).

2. D'après B1, (AD) est une hauteur du tétraèdre et donc

$V = \frac{1}{3} \text{ aire}(ABC) \times AD$ avec $\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2} AB \times AC$ car ABC est rectangle en A. Or $AB = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$, de même $AC = 3\sqrt{2}$, $AD = 3\sqrt{6}$ d'où $V = 27$ (unités de volume).

3. $\overrightarrow{DB}(6; -3; 6)$ et $\overrightarrow{DC}(6; -6; 0)$ donc $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 54$, $DB = 9$ et $DC = 6\sqrt{2}$. De $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = DB \times DC \times \cos \widehat{BDC}$, on déduit que $\cos \widehat{BDC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc que \widehat{BDC} a pour mesure $\frac{\pi}{4}$.

4. Dans BDC, la hauteur issue de C mesure $DC \times \sin \widehat{BDC}$ donc :

$$\text{aire}(BDC) = \frac{1}{2} DB \times DC \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27.$$

Si h est la distance du point A au plan (BDC), $V = \frac{1}{3} \text{aire}(BDC) \times h$.

Connaissant V et aire(BDC), on déduit que $h = 3$.

le jour du BAC

Question A1 : On ne sait pas a priori quel est l'angle droit. Observer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BC} et constater que c'est $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ qui est nul.

Question A3 : Pour trouver une représentation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans, prendre l'une des inconnues pour paramètre. (Ce procédé ne doit plus être une astuce le jour du bac...)

Question B2 : Le volume d'un tétraèdre est :

$$V = \frac{1}{3} \text{ base} \times \text{ hauteur}.$$

Mais il y a quatre bases et quatre hauteurs correspondantes. Ce sont les propriétés d'orthogonalité déjà connues qui permettent de choisir le bon couple.

Question B3 : Penser que le produit scalaire permet de déterminer des angles géométriques en calculant leur cosinus.

Question B4 : Se laisser guider par l'énoncé ... ne pas chercher une équation du plan (BCD) pour appliquer ensuite la formule de la distance d'un point à un plan.

(Voir exercices n° 42 à 44.)

→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

Équations de plans Systèmes

75 Résoudre les systèmes :

$$\text{a. } \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 3y + 2z = 2 \\ x + 2y - 2t = 3 \\ x + 2z + 3t = -4 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 2x + 6y - z + t = -3 \\ x - y + z - t = 2 \\ -x - 3y + 3z + 2t = 5 \end{cases}$$

76 L'espace est muni d'un repère orthonormal.

Soit les plans :

$$(P) : x + y - z = 1 ;$$

$$(Q_m) : mx + 2y - 2z = 2 ;$$

$$(R_m) : (3 - m)x + y + (m + 2)z = -5 \quad (m \in \mathbb{R}).$$

- Déterminer la position relative de ces trois plans quand $m = 2$.
- Déterminer la position relative de ces trois plans quand $m \neq 2$.

77 Le but de l'exercice est de déterminer une équation cartésienne d'un plan sans utiliser un vecteur normal.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1; 2; 3)$; $B(-4; 5; -6)$; $C(0; 1; 1)$.

- Sachant que $ax + by + cz + d = 0$ est la forme générale d'une équation cartésienne du plan (ABC) , écrire un système de trois équations à quatre inconnues vérifié par a, b, c et d .
- Résoudre le système obtenu.
- En déduire une équation cartésienne de (ABC) aux coefficients entiers.

78 Déterminer en utilisant la méthode du 77 une équation du plan (ABC) avec $A(-2; 1; 3)$, $B(0; 5; -2)$ et $C(1; 3; 4)$.

79 Soit les points $A(3; 0; 3)$ et $B(1; -1; 4)$.

- Donner une équation cartésienne de (P) , plan médiateur de $[AB]$.
- Soit (Π) le plan d'équation $x - y + 2z + 3 = 0$, déterminer le point C tel que (Π) soit le plan médiateur de $[AC]$.
- Déterminer l'ensemble des points équidistants de A, B et C .

80 Soit le plan (P) déterminé par les points $A(3; 2; -5)$; $B(1; 0; 1)$ et $C(1; 2; -1)$, et soit $S(3; 3; 3)$.

- Déterminer une équation cartésienne du plan (P) et vérifier que S n'est pas dans (P) .
- Calculer la distance h de S au plan (P) .
- a.** Calculer $\cos \widehat{BAC}$, en déduire $\sin \widehat{BAC}$ (\widehat{BAC} étant un angle géométrique, son sinus est positif).
- b.** Calculer l'aire du triangle BAC en unités d'aire.
- En déduire le volume du tétraèdre $SABC$ en unités de volume.

81 Soit les plans (P) et (Q) d'équations respectives :
 $x + 2y - z - 1 = 0$ et $2x - 3z + 2 = 0$.

- a.** Vérifier que ces plans ne sont pas parallèles.
- b.** Donner un système d'équations paramétriques de (Δ) , droite d'intersection de (P) et (Q) .
- Vérifier que (Δ) passe par $A(-1; 1; 0)$ et A pour vecteur directeur $\vec{u}(6; -1; 4)$.
- a.** Soit B un point de (P) différent de A tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$, déterminer le point B répondant à ces conditions et ayant comme abscisse 0.
- b.** Soit C un point de (Q) différent de A tel que $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = 0$, déterminer un point C répondant à ces conditions et ayant comme abscisse 0.
- Déterminer une mesure en degrés à $0,1$ près de l'angle \widehat{BAC} .

82 Soit les droites (d) passant par $A(5; 0; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 0)$; (δ) passant par $B(4; 4; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(0; 1; 2)$.

- Vérifier que (d) et (δ) ne sont pas coplanaires. On cherche une équation cartésienne du plan (P) contenant (d) et parallèle à (δ) .
- a.** Soit C le point tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$. Montrer que C est dans (P) .
- b.** Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. Montrer que D est dans (P) .
- Déduire de ce qui précède une équation cartésienne de (P) .

Distance dans le plan et l'espace

83 Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

- Placer le point $S(1; 1)$ et tracer la droite D d'équation $y = -x + 1$.
- À la règle et au compas, placer plusieurs points situés à la même distance de S et de D (expliquer la méthode de construction utilisée).
Peut-on conjecturer l'ensemble de ces points ?

3. Déterminer une équation de l'ensemble des points équidistants de S et de D. Reconnaître la nature de cet ensemble et le tracer sur la figure déjà construite.

84 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit a et b des réels strictement positifs ; on considère les points $A(a; 0)$ et $B(0; b)$.
Calculer la distance du point O à la droite (AB) .

2. Soit a, b, c des réels strictement positifs. Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ et $C(0; 0; c)$.

a. Calculer la distance du point C à la droite (AB) .
b. Démontrer la relation :

$$[\text{Aire}(ABC)]^2 = [\text{Aire}(OAB)]^2 + [\text{Aire}(OBC)]^2 + [\text{Aire}(OCA)]^2$$

85 **vu au BAC** 1. Déterminer une équation du plan (P) passant par $A(1; 0; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-1; 1; 1)$.

2. Soit (P') le plan d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$ et M le point de coordonnées $(0; 1; 1)$.

a. Démontrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires (voir ci-dessous).

b. Calculer les distances d et d' du point M aux plans (P) et (P') respectivement.

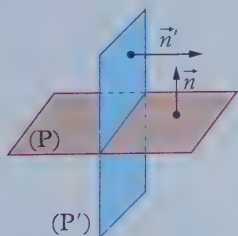
3. a. Donner une représentation paramétrique de la droite d intersection des plans (P) et (P') .

b. Déterminer les coordonnées du point H de d tel que la droite (MH) soit perpendiculaire à la droite d .

c. Vérifier que $MH^2 = d^2 + d'^2$.

Point Info

Deux plans (P) et (P') sont dits **perpendiculaires** si et seulement si l'un contient une droite orthogonale à l'autre. Si (P) et (P') admettent respectivement \vec{n} et \vec{n}' pour vecteurs normaux, (P) et (P') sont perpendiculaires si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux.



86 À égale distance

1. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

a. Tracer les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y = 2x - 1$ et $y = -x + 2$.

b. Exprimer la distance d_1 d'un point $M(x_0; y_0)$ à la droite D_1 et la distance d_2 de M à D_2 .

c. Déterminer une équation de l'ensemble (E) des points M du plan situés à égale distance des droites D_1 et D_2 .

d. Montrer que (E) est la réunion de deux droites que l'on tracera. Que représentent ces deux droites ?

2. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives $x - y = 0$ et $x + y = 0$.

a. Représenter dans l'espace ces deux plans.

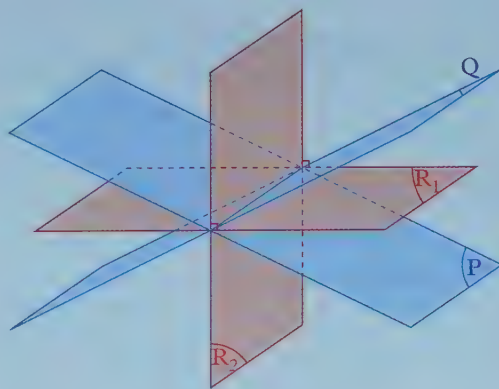
b. Donner une équation de l'ensemble (F) des points M de l'espace situés à égale distance des deux plans.

c. Montrer que (F) est la réunion de deux plans que l'on précisera.

87 Points équidistants de deux plans

Soit le plan $(P) : x + 2y - 2z + 3 = 0$ et le plan $(Q) : 4x - 3y + 5 = 0$ ainsi que $M(x; y; z)$ un point quelconque de l'espace.

1. Montrer que M est équidistant de (P) et (Q) si et seulement si M appartient à la réunion de deux plans (R_1) et (R_2) dont on donnera pour chacun une équation cartésienne.



2. a. Déterminer deux vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 normaux respectivement à (R_1) et (R_2) .

b. Vérifier que \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont orthogonaux et donc que (R_1) et (R_2) sont perpendiculaires.

(R_1) et (R_2) sont appelés les **plans bissecteurs** de (P) et (Q) .

88 **avec ROC** Distance d'un point à un plan

Soit (P) un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de (P) et $\vec{n}(a; b; c)$.

On considère un point $M_0(x_0; y_0; z_0)$ de l'espace et son projeté orthogonal H sur (P) .

1. Le but de cette question est d'établir la formule donnant la distance de M_0 au plan (P) .

a. Montrer que $\overline{AM_0} \cdot \vec{n} = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$.

EXERCICES

b. Montrer que $\overline{AM}_0 \cdot \vec{n} = \overline{HM}_0 \cdot \vec{n}$, puis que $|\overline{AM}_0 \cdot \vec{n}| = \overline{HM}_0 \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

c. En déduire la distance de M_0 au plan (P).

2. Application

On considère la sphère S de centre $\Omega(2; -1; 3)$ et de rayon 2, et le plan (P) d'équation $2x - 2y + z - 3 = 0$.

Étudier la position du plan (P) par rapport à la sphère.

89 Perpendiculaire commune à deux droites

Soit (d) et (δ) deux droites non coplanaires de l'espace. On veut déterminer la perpendiculaire commune (Δ) à ces deux droites (c'est-à-dire la droite (Δ) coupant (d) et (δ) orthogonalement).

1. Soit (P) le plan contenant (δ) et parallèle à (d) et soit (d') la projetée orthogonale de (d) sur (P). Montrer que (d') et (δ) sont sécantes.

2. Soit A le point d'intersection de (d') et (δ) et soit (Δ) la perpendiculaire à (P) passant par A. Montrer que (Δ) est orthogonale à (d) et à (δ).

3. Soit B le point de (d) se projetant orthogonalement en A, démontrer que (AB) = (Δ) et conclure. AB est la **distance** entre les deux droites (d) et (δ).

4. Application

Soit P(1; 0; 0), Q(0; 2; 0) et R(-1; 0; 3).

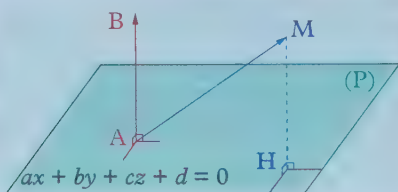
a. Montrer que les droites (d) = (PQ) et (δ) = (OR) sont non coplanaires.

b. Déterminer la distance entre ces deux droites.

Régionnement de l'espace

90 Caractérisation d'un demi-espace

Soit (P) le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ dans l'espace muni d'un repère orthonormal. On note A($x_0; y_0; z_0$) un point de (P) et B le point tel que $\overline{AB}(a; b; c)$ soit normal au plan.



1. a. Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace n'appartenant pas à (P), calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AM}$ à l'aide du projeté orthogonal H de M sur (P).

b. Montrer que $\overline{AB} \cdot \overline{AM} = ax + by + cz + d$.

2. Montrer que M est dans le demi-espace contenant B si et seulement si $ax + by + cz + d > 0$.

3. Montrer que M est dans le demi-espace ne contenant pas B si et seulement si $ax + by + cz + d < 0$.

4. Application

Caractériser le demi-espace de frontière (ABC) contenant D, en prenant A(1; 2; -3), B(0; 1; 2), C(2; -1; 1), et D(1; -1; 1).

Tétraèdre orthocentrique

91 Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

1. Montrer que :

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{CB} \quad \text{et} \quad \overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{BD}.$$

2. En déduire que :

$$\bullet AB^2 + CD^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{CD} = AD^2 + BC^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{BC};$$

$$\bullet AC^2 + BD^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{BD} = AD^2 + BC^2 + 2\overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

3. En déduire qu'un tétraèdre ABCD a ses arêtes opposées (AD) et (BC), (AC) et (BD), (AB) et (CD) deux à deux orthogonales si et seulement si

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2.$$

On dit dans ce cas que le tétraèdre est orthocentrique.

92 Soit ABCD un tétraèdre.

1. Montrer que :

$$\overline{DA} \cdot \overline{BC} + \overline{DB} \cdot \overline{CA} + \overline{DC} \cdot \overline{AB} = 0.$$

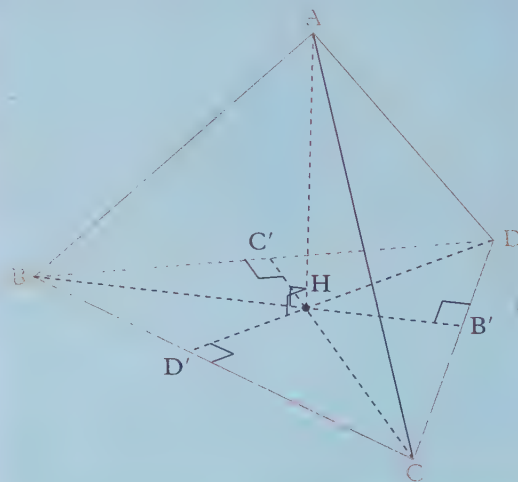
2. Démontrer que si deux couples d'arêtes opposées sont constitués d'arêtes orthogonales, alors le troisième couple est formé d'arêtes orthogonales.

Le tétraèdre est alors orthocentrique.

3. a. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BCD).

Montrer que si ABCD est orthocentrique alors H est l'orthocentre de BCD.

b. Que peut-on en déduire pour les projetés orthogonaux de B, C et D sur leurs faces opposées respectives ?



Problèmes

93 vu au BAC On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 km. Le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ représente le sol.

Les deux routes aériennes à contrôler sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2) , dont on connaît des représentations paramétriques :

$$(D_1) : \begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3a, a \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}$$

$$(D_2) : \begin{cases} x = 0,5 + 2b \\ y = 4 + b \\ z = 4 - b \end{cases}, b \in \mathbb{R}.$$

1. a. Indiquer les coordonnées d'un vecteur \vec{u}_1 directeur de la droite (D_1) et d'un vecteur \vec{u}_2 directeur de la droite (D_2) .

b. Prouver que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.

2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées $S(3; 4; 0,1)$, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R) . Soit (P_1) le plan contenant S et (D_1) , et (P_2) le plan contenant S et (D_2) .

a. Montrer que (D_2) est sécante à (P_1) .

b. Montrer que (D_1) est sécante à (P_2) .

c. Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites (D_1) et (D_2) .

Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

94 Coin de cube

On considère un tétraèdre OABC tel que OAB, OBC et OCA soient des triangles rectangles en O, avec $OA = 2$, $OB = 2\sqrt{3}$ et $OC = 3$.

Partie A. Orthogonalité dans l'espace

1. Faire une figure.

2. Soit K le projeté orthogonal de O sur (AB) . Justifier que (AB) est orthogonale au plan (OCK) .

3. Soit H le projeté orthogonal de O sur (ABC) .

a. Justifier que H appartient à (CK) .

b. Calculer $\overline{AH} \cdot \overline{BC}$.

c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

Partie B. Dans un repère

On considère le repère :

$$\left(O; \frac{1}{2} \overrightarrow{OA}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \overrightarrow{OB}, \frac{1}{3} \overrightarrow{OC}\right).$$

1. Justifier que ce repère est orthonormé.

2. a. Déterminer une équation cartésienne du plan (OCK) dans ce repère.

b. Déterminer les coordonnées de K.

c. Calculer l'angle \widehat{OKC} .

3. a. Déterminer l'aire du triangle ABC.

b. En calculant de deux façons différentes l'aire du tétraèdre OABC, déterminer la distance OH.

4. a. Montrer que les plans médiateurs des arêtes $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ ont un point commun Ω dont on précisera les coordonnées.

b. Justifier qu'il existe une sphère circonscrite au tétraèdre et calculer son rayon.

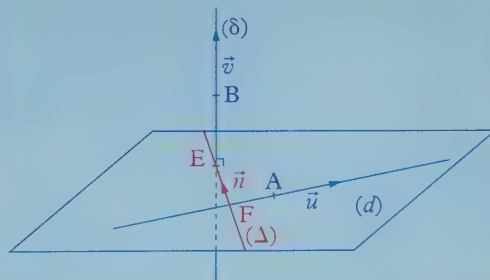
5. a. Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre G des points O, A, B et C.

b. Que peut-on dire de la position des points G, O et Ω ?

95 Distance entre deux droites non coplanaires

Le plan est muni d'un repère orthonormal. Soit les deux droites : (d) passant par $A(1; 2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; 0)$, et (δ) passant par $B(0; 1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(0; 1; 1)$.

1. Vérifier que (d) et (δ) ne sont pas coplanaires.



2. a. Déterminer un vecteur \vec{n} tel que :

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0.$$

b. Soit (P) le plan contenant le point A et les points C et D définis par $\overline{AC} = \vec{u}$ et $\overline{AD} = \vec{n}$, déterminer une équation cartésienne de (P) .

3. Soit E le point d'intersection de (P) et (δ) , calculer les coordonnées de E.

4. a. Soit (Δ) la droite passant par E et de vecteur directeur \vec{n} , donner un système d'équations paramétriques de (Δ) .

b. Vérifier que (Δ) est orthogonale à (d) et à (δ) .

c. Montrer que (Δ) et (d) se coupent en un point F dont on déterminera les coordonnées.

5. (Δ) est orthogonale à (d) et à (δ) , elle coupe (d) en F et (δ) en E.

Calculer la distance entre (d) et (δ) , c'est-à-dire la distance EF.

Activité 1 → Pour se rappeler

Soit \mathcal{E} l'expérience aléatoire consistant à lancer deux pièces de monnaie bien équilibrées.

A ■ Choix d'un modèle



1. Après expérimentation ou simulation. On considère l'événement « obtenir 2 Pile », que l'on code : 2P. La simulation, sur calculatrice ou tableur, de dix séries de n lancers de deux pièces a permis d'obtenir, pour différentes valeurs de n , les fréquences de 2P suivantes.

$n = 100$	0,26	0,30	0,31	0,24	0,21	0,29	0,29	0,25	0,19	0,26
$n = 1\ 000$	0,27	0,28	0,27	0,25	0,25	0,24	0,23	0,26	0,26	0,28
$n = 10\ 000$	0,25	0,25	0,26	0,24	0,25	0,25	0,25	0,24	0,25	0,25

Pour n fixé, observer la fluctuation des fréquences. Pour n devenant grand, observer la stabilisation des fréquences.

ω_i	2P	2F	PF
p_i	?	?	?

Si on choisit $\Omega = \{2P ; 2F ; PF\}$ comme ensemble des résultats possibles (univers des possibles), quelle loi de probabilité sur Ω peut-on proposer au vu des données expérimentales ?

2. En recherchant une situation d'équiprobabilité

Si l'on choisit $\Omega' = \{(P, P) ; (P, F) ; (F, P) ; (F, F)\}$ comme univers (il suffit de différencier mentalement les deux pièces), expliquer, à l'aide d'un tableau ou d'un arbre, en quoi le choix d'une loi équirépartie sur Ω' paraît pertinent. Ce modèle permet-il de retrouver le précédent ?

Modéliser une expérience aléatoire, c'est préciser :

- l'univers des possibles Ω ,
- la loi de probabilité sur Ω .

La loi est dite équirépartie lorsqu'elle associe à chaque issue la même probabilité.

B ■ Opérations sur les événements et probabilités

Soit D l'événement « obtenir un double » (obtenir 2 Pile ou 2 Face) et E l'événement « obtenir au moins un Pile ».

Calculer les probabilités des événements : D, E, $D \cap E$ et $D \cup E$.

C ■ Utilisation d'une variable aléatoire

Pour une mise de 1 €, un joueur est invité à lancer deux pièces de monnaie. Il gagne 1 € pour chaque Pile obtenu et perd 1 € s'il n'obtient aucun Pile. On désigne par X la variable aléatoire associant à chaque lancer le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Combien le joueur peut-il espérer gagner ?

Activité 2 ➔ Des probabilités sous condition

Dans un lycée, la répartition des élèves de terminale S en fonction du sexe et de la spécialité choisie est donnée par le tableau ci-dessous.

	MATHS	PHYSIQUE	S.V.T.
Filles	12 %	13 %	27 %
Garçons	16 %	12 %	20 %

On tire au hasard la fiche d'un élève de terminale S.

A ■ Probabilités simples et conditionnelles

Toutes les probabilités demandées seront données sous forme de fraction irréductible.

1. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?

F : « l'élève est une fille », M : « l'élève est en spécialité maths », $F \cap M$.

2. On rencontre un élève au hasard, et c'est une fille.

Quelle est alors la probabilité qu'elle soit en « spé maths » ?

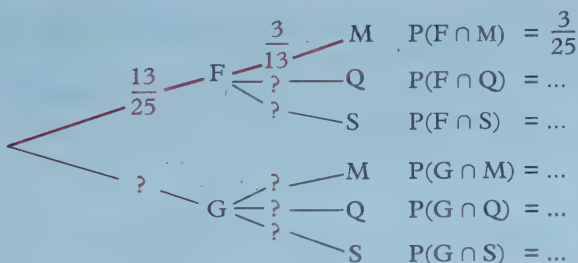
On appelle **probabilité de M sachant F** cette probabilité (conditionnelle) et on la note $P_F(M)$. Quelle égalité faisant intervenir $P(F \cap M)$, $P(F)$ et $P_F(M)$ peut-on écrire ?

3. Donner la signification de $P_M(F)$ et calculer cette probabilité.

Quelle nouvelle égalité peut-on écrire ?

B ■ Construction et utilisation d'un arbre pondéré

1. Rappeler la signification des deux probabilités (ou poids) apparaissant sur cet arbre et achever de le compléter après l'avoir recopié.



OBJECTIF

Introduire les probabilités conditionnelles à partir d'un tableau de répartition.
Construire et exploiter un arbre pondéré.
Aborder la notion d'indépendance de deux événements.

« Emprunter le chemin rouge », c'est réaliser l'événement $F \cap M$ et la probabilité de cet événement s'obtient en multipliant les poids rencontrés.

2. Quels chemins conduisent à la réalisation de l'événement M ?
Comment peut-on alors retrouver $P(M)$ par le calcul ? Vérifier.

C ■ Indépendance de deux événements

1. Comparer $P_F(M)$ et $P(M)$ d'une part, puis $P_M(F)$ et $P(F)$ d'autre part.
La réalisation de F influence-t-elle la probabilité de M ? Et inversement ?

2. Comparer de même $P_G(Q)$ et $P(Q)$, puis $P_Q(G)$ et $P(G)$.
Que peut-on dire des événements G et Q ? Quelle égalité faisant intervenir $P(G \cap Q)$, $P(G)$ et $P(Q)$ peut-on écrire dans ce cas ?

Activité 3 → Des arbres pour illustrer, pour calculer...

OBJECTIF

Préciser les règles de fonctionnement d'un arbre pondéré. Amener la formule des probabilités totales.

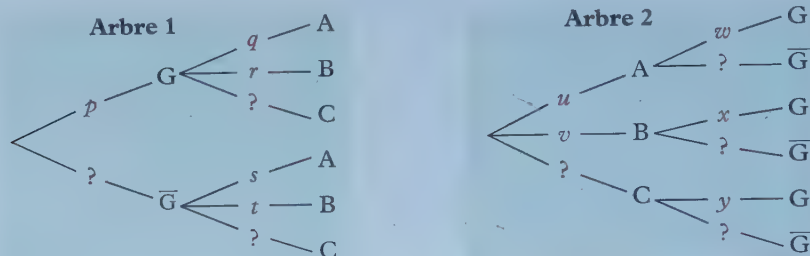
Sur sa console de jeux, Xavier engage une partie où il doit affronter en duel l'un des trois monstres nommés Alk, Buk et Cok.

Ces trois monstres sont de forces inégales et les probabilités que Xavier l'emporte lorsqu'il joue contre Alk, Buk et Cok sont respectivement $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

De plus, le choix du monstre n'appartient pas à Xavier et celui-ci observe que dans 50 % des cas, il lui faut affronter Alk et qu'il rencontre Buk aussi souvent que Cok.

On désigne par G l'événement « Xavier remporte le duel » et par A, B et C les événements « Xavier combat Alk », « Xavier combat Buk », « Xavier combat Cok ».

1. Deux arbres pondérés peuvent être associés à la situation décrite.



a. Proposer une signification et une notation pour chaque « poids » inscrit sur les branches de ces arbres : p, q, \dots, y .

b. Préciser par quels poids on peut remplacer les points d'interrogation. Justifier.

Recopier et compléter la **règle 1** ci-dessous.

Règle 1 : La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est ...

c. Quels sont les poids dont la valeur numérique est donnée dans l'énoncé ?

d. Quel arbre paraît le plus pertinent pour résumer une partie jouée par Xavier ? Reproduire et compléter cet arbre.

2. a. Sur cet arbre, repérer (à l'aide de couleurs) les chemins qui correspondent aux événements ci-dessous et calculer leurs probabilités :

« Xavier affronte Alk et l'élimine » ; « Xavier affronte Buk et est vaincu ».

Recopier et compléter la **règle 2** ci-dessous.

Règle 2 : La probabilité d'un événement représenté par un chemin est égale ...

b. Repérer de même les chemins qui conduisent à l'événement « Xavier sort vainqueur du duel ». Calculer la probabilité de cet événement.

Recopier et compléter la **règle 3** ci-dessous.

Règle 3 : La probabilité d'un événement représenté par la réunion de plusieurs chemins est égale ...

En reprenant la démarche de calcul adoptée ci-dessus, recopier et compléter l'égalité :

$$P(G) = P(\dots) + P(\dots) + P(\dots)$$

puis :

$$P(G) = P_{\dots}(\dots)P(\dots) + P_{\dots}(\dots)P(\dots) + P_{\dots}(\dots)P(\dots)$$

3. Comparer $P(G)$ avec $P_A(G)$, $P_B(G)$ et $P_C(G)$ successivement.

Interpréter.

Activité 4 ➔ Enchaînement d'expériences « indépendantes »

A ■ Trois expériences aléatoires

\mathcal{E}_1 : On tire au hasard une boule de l'urne U_1 , et on note son numéro a .

\mathcal{E}_2 : On tire au hasard une boule de l'urne U_2 , et on note son numéro b .

\mathcal{E}_3 : On tire au hasard une boule de l'urne U_3 , et on note son numéro c .

Recopier et compléter les tableaux des lois de probabilité modélisant ces trois expériences.

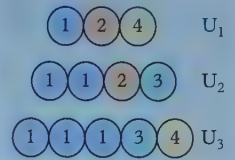
a	1	2	4
$P_1(\{a\})$			

b	1	2	3
$P_2(\{b\})$			

c	1	3	4
$P_3(\{c\})$			

OBJECTIF

Modéliser une suite d'épreuves dites « indépendantes ».



B ■ Réalisation enchaînée

On considère l'expérience consistant à réaliser successivement \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}_3 . On cherche dans cette partie à définir une loi de probabilité P sur l'ensemble des résultats (a, b, c) de \mathcal{E} , à partir des lois P_1 , P_2 et P_3 ci-dessus.

1. Recherche d'une probabilité associée à l'issue (1, 1, 1)

• **Approche par une simulation.** À l'aide d'un tableur, on a simulé 10 fois la répétition de 10 000 réalisations de l'expérience \mathcal{E} et on a obtenu les fréquences de l'événement $\{(1, 1, 1)\}$ suivantes.

Série 1	Série 2	Série 3	Série 4	Série 5	Série 6	Série 7	Série 8	Série 9	Série 10	Moyenne
0,1023	0,0989	0,1001	0,0966	0,1014	0,1012	0,1008	0,0995	0,0990	0,0981	0,0998

Quelle probabilité peut-on retenir pour cet événement ? Quel lien pourrait-il y avoir avec les probabilités $P_1(\{1\})$, $P_2(\{1\})$ et $P_3(\{1\})$?

• **Approche par un arbre.** Si on note A_k l'événement « la boule tirée de U_k porte le n° 1 », pour $1 \leq k \leq 3$, on peut écrire :

$$\{(1, 1, 1)\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

Cet événement peut se représenter par la branche pondérée ci-dessous, avec

les règles habituelles : $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P_{A_1}(A_2)$, $p_3 = P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$ et $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p_1 p_2 p_3$.

En tenant compte de l'**indépendance** (au sens intuitif) des expériences \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}_3 , donner les valeurs des nombres p_1 , p_2 et p_3 et en déduire $P(\{(1, 1, 1)\})$.

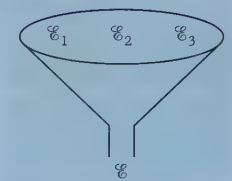
2. Quelle règle simple donnant $P(\{(a, b, c)\})$ en fonction de $P_1(\{a\})$, $P_2(\{b\})$ et $P_3(\{c\})$ peut-on énoncer ?

3. En utilisant cette règle, calculer la probabilité des événements suivants :

- E : « on obtient 4, 2, 1 dans cet ordre » ;
- F : « on obtient 4, 2, 1 dans un ordre quelconque ».

4. a. Si A, B et C sont des événements quelconques (pas nécessairement élémentaires) liés respectivement aux épreuves indépendantes \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}_3 , quelle égalité obtiendrait-on en reprenant la démarche de la question 1 ?

b. Calculer la probabilité d'obtenir trois nombres impairs.



On dit, en langage courant, que **plusieurs expériences \mathcal{E}_k sont indépendantes** pour exprimer que le déroulement d'une expérience s'effectue dans des conditions qui ne dépendent pas des résultats des expériences précédentes.

\mathcal{E}_1	\mathcal{E}_2	\mathcal{E}_3
A	B	C
$P(A \cap B \cap C) = ?$		

1. Probabilités conditionnelles

A ■ Probabilité de A sachant B

Définition 1 → Soit A et B deux événements, B étant de probabilité non nulle. La probabilité de A sachant que B est réalisé (ou de A sachant B) est le nombre noté $P_B(A)$, défini par : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (1).

Remarque : La probabilité conditionnelle $P_B(A)$ se note encore parfois $P(A/B)$.

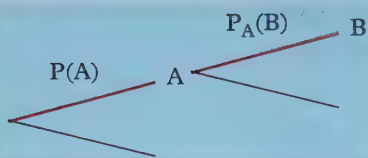
B ■ Probabilité d'une intersection

Propriété 1 → Soit A et B deux événements de probabilités non nulles :

$$P(A \cap B) = P_B(A)P(B) \quad (2a)$$

$$P(A \cap B) = P_A(B)P(A) \quad (2b).$$

Illustration par un arbre pondéré

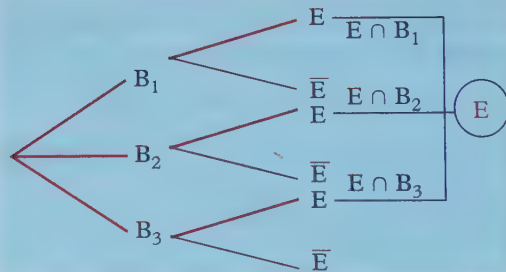


Le chemin rouge représente l'événement $A \cap B$.

La probabilité de ce chemin (ou de l'événement $A \cap B$) est le produit des probabilités de ses branches.

C ■ Formule des probabilités totales

• Étude du cas particulier $n = 3$



L'événement E est ici représenté par la réunion des trois chemins rouges.

$P(E)$ est la somme des probabilités de ces trois chemins :

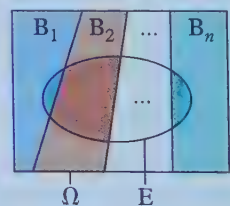
$$P(E) = P(E \cap B_1) + P(E \cap B_2) + P(E \cap B_3)$$

$$P(E) = P_{B_1}(E)P(B_1) + P_{B_2}(E)P(B_2) + P_{B_3}(E)P(B_3).$$

• Énoncé du cas général

Soit B_1, B_2, \dots, B_n n événements tels que :

- chaque B_k a une probabilité non nulle,
- deux quelconques d'entre eux sont incompatibles,
- leur réunion est l'univers des possibles Ω .



Quel que soit l'événement E, on a :

$$P(E) = P_{B_1}(E)P(B_1) + P_{B_2}(E)P(B_2) + \dots + P_{B_n}(E)P(B_n).$$

Vocabulaire

On dit dans ce cas que les événements B_1, B_2, \dots, B_n forment une **partition** de l'univers Ω .

→ APPLICATIONS

Exercice 1 Déterminer une probabilité conditionnelle

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes : c'est un trèfle. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un roi ?

Solution

Prenons pour univers des possibles l'ensemble Ω des 32 cartes. En désignant respectivement par R et T les événements « obtenir un roi » et « obtenir un trèfle », la probabilité cherchée est $P_T(R)$.

• Un calcul direct est ici envisageable : comme T est supposé réalisé, l'univers des possibles n'est plus Ω , l'ensemble des 32 cartes, mais T l'ensemble des 8 trèfles. La probabilité d'obtenir un roi est alors celle d'obtenir le roi de trèfle

lorsqu'on tire une carte au hasard dans l'ensemble T, soit $P_T(R) = \frac{1}{8}$.

• L'utilisation de la définition 1 page ci-contre est également possible.

$P_T(R) = \frac{P(R \cap T)}{P(T)}$ où $R \cap T$ est l'événement « obtenir le roi de trèfle » de

probabilité $\frac{1}{32}$ et où T a pour probabilité $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. D'où :

$$P_T(R) = \frac{1}{32} \times 4 = \frac{1}{8}.$$

Conseils

Quand on cherche à déterminer une probabilité conditionnelle $P_B(A)$, on doit se poser quelques questions.

• Cette probabilité n'est-elle pas donnée dans l'énoncé ?

• Un calcul direct par simple restriction de l'univers des possibles est-il approprié ?

• Se ramener au calcul de $P(A \cap B)$ est-il avantageux ?

L'utilisation de cette formule est pertinente quand les réponses à ces questions sont non/non/oui !

voir aussi exercices n° 10, 43

Exercice 2 Utiliser un arbre pondéré

On dispose de trois urnes contenant chacune cinq boules, rouges ou noires (voir dessin ci-contre). Julien lance un dé bien équilibré.

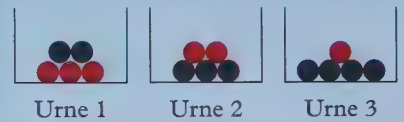
S'il obtient « 1 », il extrait au hasard une boule de l'urne 1.

S'il obtient « 3 ou 5 », il extrait au hasard une boule de l'urne 2.

S'il obtient « 2, 4 ou 6 », il extrait au hasard une boule de l'urne 3.

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge et provienne de l'urne 1 ?

2. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?



Solution

1. Illustrons cette situation par l'arbre pondéré ci-contre, où U_k , avec $k \in \{1, 2, 3\}$, et R désignent respectivement les événements :

« la boule est extraite de l'urne k » et « la boule obtenue est rouge ».

La probabilité cherchée est $P(R \cap U_1)$, et surtout pas $P_{U_1}(R)$!

$R \cap U_1$ est représenté par la branche supérieure de l'arbre.

D'après la propriété 1, on a :

$$P(R \cap U_1) = P_{U_1}(R) \times P(U_1) \text{ et donc } P(R \cap U_1) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}.$$

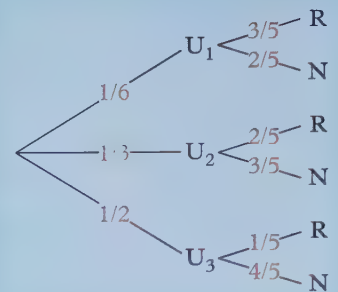
2. La réalisation de l'événement R est dans ce jeu conditionnée par celle des événements U_1, U_2 et U_3 . Dans l'arbre, l'événement R est représenté par la réunion des trois chemins qui y conduisent.

On a alors : $P(R) = P(R \cap U_1) + P(R \cap U_2) + P(R \cap U_3)$

puis : $P(R) = P_{U_1}(R)P(U_1) + P_{U_2}(R)P(U_2) + P_{U_3}(R)P(U_3)$

(qui est la formule des probabilités totales associée à la partition $\{U_1, U_2, U_3\}$ et appliquée à R) d'où

$$\text{enfin } P(R) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$



voir aussi exercices n° 9, 11, 12

2. Indépendance

A ■ Indépendance de deux événements

Intuitivement, deux événements sont indépendants (en probabilités) si la réalisation de l'un des deux événements n'influence pas les chances que l'autre se réalise.

Propriété 2 →

Soit Ω un univers et P une loi de probabilité sur Ω .

Étant donné deux événements A et B de probabilités non nulles, il est équivalent d'écrire :

$$P_A(B) = P(B) ; \quad P_B(A) = P(A) ; \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Définition 2 →

Lorsque l'une de ces égalités est vraie, on dit que les événements A et B sont indépendants (relativement à la probabilité P).

B ■ Indépendance de deux variables aléatoires

1. Rappels sur les variables aléatoires réelles (v.a.r.)

Soit Ω un univers et P une loi de probabilité sur Ω .

- Une **variable aléatoire réelle** X définie sur Ω est une fonction de Ω dans \mathbb{R} .
- Déterminer la **loi de probabilité de X** , c'est préciser l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs x_i prises par X , puis calculer pour chacune d'elles $P(X = x_i)$ souvent noté p_i .

x_i	x_1	x_2	...	x_q
p_i	p_1	p_2	...	p_q

(Penser à vérifier que $\sum_{i=1}^q p_i = 1$.)

- On peut alors (selon les besoins !) calculer :

– l'**espérance** de X : $E(X) = \sum_{i=1}^q x_i p_i$, encore notée \bar{X} ou m ;

– la **variance** de X :

$$V(X) = \sum_{i=1}^q (x_i - \bar{X})^2 p_i \text{ qui s'écrit encore } V(X) = \sum_{i=1}^q x_i^2 p_i - \bar{X}^2 ;$$

– l'**écart type** de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

2. Indépendance de deux variables aléatoires

Intuitivement, deux variables aléatoires sont indépendantes :

- si la loi de probabilité de l'une est sans influence sur celle de l'autre ;
- ou encore si, pour toutes valeurs x et y respectivement prises par X et Y , les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants.

Définition 3 →

Soit Ω un univers et P une loi de probabilité sur Ω .

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour toute valeur x prise par X et pour toute valeur y prise par Y :

$$P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Vocabulaire

L'**espérance** de X est la moyenne m des valeurs possibles x_i de X , pondérées par les probabilités p_i . C'est la valeur théorique que l'on peut espérer obtenir en moyenne si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

La **variance** de X est la moyenne des carrés des écarts $(x_i - m)^2$ pondérée par les p_i .

L'**écart type** de X renseigne donc sur la fluctuation moyenne des x_i autour de m .

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 2

• $P_{A(B)} = P(B)$ s'écrit $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$ soit encore $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

• $P_{B(A)} = P(A)$ s'écrit $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$ soit encore $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Les trois propositions sont donc équivalentes.

→ APPLICATIONS

Exercice 3 Étudier l'indépendance de couleurs et de numéros

On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant les six jetons représentés ci-contre. On désigne respectivement par R, U et D les événements :

« le jeton est rouge », « le numéro est 1 » et « le numéro est 2 ».

Les événements R et U sont-ils indépendants ? Et les événements R et D ?



Solution

• L'univers des possibles Ω est l'ensemble des six jetons. Le tirage s'effectuant au hasard, la loi de probabilité P sur Ω est la loi équirépartie.

• Pour savoir si les événements R et U sont indépendants, il suffit de comparer les réels $P_R(U)$ et $P(U)$, ou bien $P_U(R)$ et $P(R)$, ou encore $P(U \cap R)$ et $P(U) \times P(R)$. Si l'on choisit de calculer $P(U) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P_R(U) = \frac{1}{3}$, on observe que la réalisation de R influence la probabilité que U se réalise.

R et U ne sont pas indépendants relativement à la probabilité P.

• De même, pour étudier l'indépendance des événements R et D, on peut calculer $P(R \cap D) = P(\text{« obtenir un 2 rouge »}) = \frac{1}{6}$ et $P(R)P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.

R et D sont donc indépendants (relativement à la probabilité P).

Était-ce prévisible ?

Oui, car :

- la proportion des « 1 » est différente dans l'ensemble des six boules et dans l'ensemble des boules rouges ;
- la proportion des « 2 » est la même dans ces deux ensembles.

voir aussi exercices n° 15, 17, 18

Exercice 4 Étudier l'indépendance de deux variables aléatoires

On lance un dé parfaitement équilibré. On considère les variables aléatoires X et Y définies sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ par :

- X prend la valeur 1 si le résultat est pair, et la valeur -1 sinon ;
- Y prend la valeur 2 si le résultat est 2 ou 5, et la valeur 1 sinon.

Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution

Les lois de probabilité de X et de Y sont données par les tableaux suivants.

x_i	-1	1
$P(X = x_i)$	1/2	1/2

y_i	1	2
$P(Y = y_i)$	2/3	1/3

Calculons :

$$P(X = -1 \text{ et } Y = 1) = P(\{1, 3\}) = \frac{1}{3}; \quad P(X = -1 \text{ et } Y = 2) = P(\{5\}) = \frac{1}{6};$$

$$P(X = 1 \text{ et } Y = 1) = P(\{4, 6\}) = \frac{1}{3}; \quad P(X = 1 \text{ et } Y = 2) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}.$$

Il est facile de vérifier que pour tout $x \in \{-1 ; 1\}$ et pour tout $y \in \{1 ; 2\}$, on a bien : $P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$.

D'où l'indépendance des variables X et Y.

Les probabilités calculées peuvent être présentées dans un tableau à double entrée.

	y	1	2
x	-1	1/3	1/6
	1	1/3	1/6

Il s'agit de la loi de probabilité du couple (X ; Y).

voir aussi exercices n° 19, 20, 21

3. Modélisation d'expériences « indépendantes »

A ■ Expériences enchaînées

Il est fréquent qu'une expérience aléatoire \mathcal{E} consiste à enchaîner plusieurs expériences (ou épreuves) $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$.

Si chacune d'elles se déroule dans des conditions qui ne dépendent pas des résultats des épreuves précédentes, on dit en langage courant que ces épreuves \mathcal{E}_k sont **indépendantes**.

Exemples :

- On lance un dé équilibré puis on tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Un résultat est un couple (n° dé, carte) ; par exemple : (3, roi cœur).
- Trois archers tirent sur une cible, de façon indépendante. Un exemple d'issue est le triplet (a, a, \bar{a}) signifiant : « les deux premiers tireurs atteignent la cible mais pas le troisième ».

Modélisation : Soit \mathcal{E} une expérience aléatoire consistant à réaliser successivement n épreuves indépendantes \mathcal{E}_i .

Un résultat de \mathcal{E} est la donnée dans l'ordre des résultats a_1, a_2, \dots, a_n obtenus aux épreuves $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$; c'est donc une liste (a_1, a_2, \dots, a_n) . Il reste à définir sur l'ensemble de ces listes une loi de probabilité P .

En accord avec la simulation d'une part et avec les règles de fonctionnement des arbres pondérés d'autre part (voir l'activité 3), on adopte la **convention** suivante.

Soit \mathcal{E} une expérience aléatoire consistant à réaliser n épreuves $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ ayant pour modèles $(\Omega_1, P_1), (\Omega_2, P_2), \dots, (\Omega_n, P_n)$.

Dire que les n épreuves \mathcal{E}_i sont indépendantes, c'est modéliser \mathcal{E} par la loi de probabilité P qui à chaque résultat (a_1, a_2, \dots, a_n) associe le produit $P_1(\{a_1\})P_2(\{a_2\}) \dots P_n(\{a_n\})$.

Exemples :

- Le contexte du premier exemple ci-dessus laisse penser qu'il s'agit de deux expériences indépendantes. On modélise donc la situation par la « loi produit » et la probabilité d'obtenir un 2 et un as est :

$$P(\{(2, \text{as})\}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{48}.$$

- Dans le deuxième exemple, si les probabilités que les tireurs atteignent la cible sont respectivement 0,6 ; 0,75 et 0,9, la probabilité que la cible ne soit pas atteinte est :

$$P(\{(\bar{a}, \bar{a}, \bar{a})\}) = 0,4 \times 0,25 \times 0,1 = 0,01.$$

B ■ Expériences répétées

Il s'agit du cas particulier où les expériences $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ sont les répétitions d'une même épreuve e .

Exemple :

La probabilité d'obtenir dix Pile en lançant dix fois une pièce de monnaie équilibrée

$$\text{est } \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1\,024}.$$

Vocabulaire

On admet que la loi P ainsi construite est bien une loi de probabilité sur l'ensemble des résultats (a_1, a_2, \dots, a_n) de \mathcal{E} .

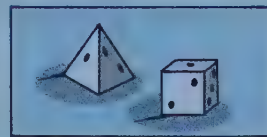
Cette loi de probabilité P est appelée « loi produit ».

→ APPLICATIONS

Exercice 5 Définir et utiliser une loi « produit »

On dispose d'un dé tétraédrique dont les probabilités de sortie des faces sont proportionnelles aux numéros 1, 2, 3, 4 qu'elles portent et d'un dé cubique équilibré dont trois faces portent le numéro 1, deux faces le numéro 2 et une face le numéro 3.

Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 5 lorsqu'on lance les deux dés ?



Solution

Modélisation de l'expérience :

On précise tout d'abord les lois de probabilité P' et P'' associées isolément à chaque lancer.

• Pour le dé tétraédrique, on a : $P'(\{1\}) = k \times 1$, $P'(\{2\}) = k \times 2$, $P'(\{3\}) = k \times 3$, $P'(\{4\}) = k \times 4$, où k est le coefficient de proportionnalité ; mais la somme de ces quatre probabilités est 1 (probabilité de l'univers Ω), on en déduit :

$$10 \times k = 1 \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{10}.$$

D'où la loi de probabilité P' sur $\{1, 2, 3, 4\}$ (tableau).

• Pour le dé cubique, la loi de probabilité P'' est donnée par le tableau ci-contre.

Le contexte laisse penser que les deux lancers sont indépendants ; on choisit donc, pour modéliser cette expérience, la loi de probabilité P qui associe à chaque couple (t, c) le réel $P(\{t, c\}) = P'(\{t\})P''(\{c\})$.

On résume cette loi par le tableau ci-contre.

Remarque : En sommant en lignes et en colonnes les probabilités obtenues, on retrouve les lois de P' et de P'' . La somme des probabilités du tableau est bien égale à 1.

Calculs dans ce modèle :

L'événement « obtenir une somme S égale à 5 » s'écrit encore $\{(2, 3); (3, 2); (4, 1)\}$.

$$\text{D'où} \quad P(S = 5) = \frac{2}{60} + \frac{6}{60} + \frac{12}{60} = \frac{1}{3}.$$

t	1	2	3	4
$P'(\{t\})$	1/10	2/10	3/10	4/10

c	1	2	3
$P''(\{c\})$	3/6	2/6	1/6

$t \backslash c$	1	2	3	Loi P'
1	3/60	2/60	1/60	1/10
2	6/60	4/60	2/60	2/10
3	9/60	6/60	3/60	3/10
4	12/60	8/60	4/60	4/10
Loi P''	3/6	2/6	1/6	1

voir aussi exercice n° 23

Exercice 6 Calculer dans un contexte d'épreuve répétée

Arthur, féru de foot, a placé dans un sac six cartons portant les lettres de son joueur fétiche : T, H, U, R, A, M. Il tire au hasard un carton de ce sac, note la lettre obtenue et remet le carton dans le sac. Il répète six fois ce tirage.

Arthur a-t-il plus de chances d'écrire son prénom ou le nom de son idole ?



Solution

L'expérience décrite consiste à répéter 6 fois l'épreuve « tirer au hasard un carton du sac », en se replaçant à chaque fois dans les mêmes conditions (tirages avec remise). Le tirage d'un jeton s'effectuant au hasard, la loi de probabilité P sur l'ensemble des six lettres est équirépartie (voir tableau).

ℓ	T	H	U	R	A	M
$P(\{\ell\})$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Les six épreuves étant voulues indépendantes, la situation se modélise en adoptant la « loi produit » P sur l'ensemble des listes possibles de la forme $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6)$.

$$P(\{(T, H, U, R, A, M)\}) = P(\{T\})P(\{H\})P(\{U\})P(\{R\})P(\{A\})P(\{M\}) = \left(\frac{1}{6}\right)^6 \approx 2 \cdot 10^{-5}$$

$$P(\{(A, R, T, H, U, R)\}) = P(\{A\})P(\{R\})P(\{T\})P(\{H\})P(\{U\})P(\{R\}) = \left(\frac{1}{6}\right)^6 \approx 2 \cdot 10^{-5}$$

Arthur a donc autant (et aussi peu) de chances d'écrire son prénom que le nom de son idole !

voir aussi exercices n° 22, 24

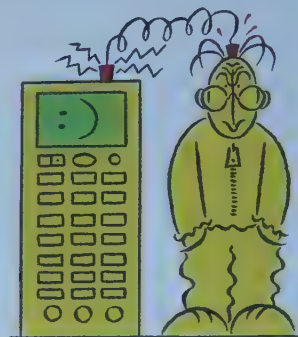
1. Du langage courant au langage probabiliste, du tableau à l'arbre

OBJECTIF : Traduire une situation en langage formalisé, distinguer probabilité simple et conditionnelle, utiliser les propriétés des probabilités et les règles de fonctionnement des tableaux et arbres.

Monsieur Texio, responsable commercial d'une marque de calculatrices bien connue, souhaite savoir dans quelle proportion les élèves de terminale savent utiliser leur calculatrice pour programmer et comment ils se répartissent selon les séries.

De passage dans un lycée comportant des terminales L, ES et S, où chaque élève possède une calculatrice programmable, il a recueilli différentes informations auprès des professeurs de mathématiques :

- un élève de terminale sur deux est en série ES ;
- 40 % des élèves de terminale sont en série S ;
- un élève de terminale L sur cinq sait programmer sa calculatrice ;
- en terminale S, on ne trouve qu'un élève sur deux sachant programmer ;
- 14 % des élèves de terminale sont en série ES et savent programmer.



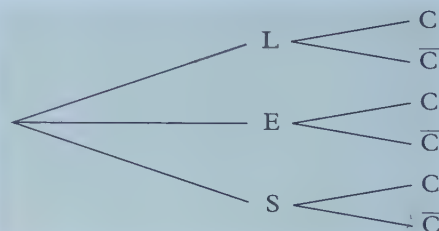
On prend pour expérience aléatoire le tirage au sort d'un élève de terminale, et on désigne respectivement par L, E, S et C les événements : « l'élève est en L », « l'élève est en ES », « l'élève est en S » et « l'élève sait programmer sa calculatrice ».

1. Traduire en termes de probabilités chacune des affirmations précédentes.
2. Recopier et compléter le tableau à double entrée ci-dessous à partir des résultats de la question 1.

Aptitude \ Série	L	E	S	Total
C				
\bar{C}				
Total				

On sera amené à calculer – en justifiant – les probabilités : $P(L)$, $P(C \cap L)$, $P(\bar{C} \cap L)$, $P(C \cap S)$, $P(\bar{C} \cap S)$, $P(\bar{C} \cap E)$.

3. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre à partir des résultats de la question 1 (et sans utiliser ceux de la question 2). En déduire $P(C)$.



On sera amené à calculer – en justifiant – les probabilités : $P(L)$, $P_L(\bar{C})$, $P_S(\bar{C})$, $P_E(C)$, $P_E(\bar{C})$.

4. **Vérification :** Comment peut-on retrouver le tableau à partir de l'arbre ? Et l'arbre à partir du tableau ?

5. À quel type de questions le tableau (respectivement l'arbre pondéré) paraît-il le mieux adapté ?

2. Une indépendance toute relative

OBJECTIF : Se familiariser avec l'indépendance en probabilités de deux événements et comprendre que tout ne se résume pas à « être » ou « ne pas être ».

On dispose de deux dés cubiques A et B.

• A est un dé « honnête » et son lancer est donc modélisé par la loi équirépartie sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

• B est un dé pipé et son lancer est modélisé par la loi sur Ω décrite dans le tableau ci-contre.

Dans chaque modèle, on s'intéresse aux événements :

E : « a est pair » ; F : « a est strictement supérieur à 4 » ;

G : « a est multiple de 3 ».

ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$

1. Dans le modèle associé au dé A

Étudier si les événements E et F d'une part, F et G d'autre part, G et E enfin, sont indépendants.

2. Dans le modèle associé au dé B

Reprendre la question précédente.

3. Pour tenter un bilan

Peut-on compléter le tableau ci-contre à l'aide de « oui » ou « non » ? Que peut-on dire de l'indépendance de deux événements ?

Événements	E et F	F et G	G et E
indépendants			

3. Parfois « deux sans trois » !

OBJECTIF : Se familiariser avec l'indépendance de deux événements, de deux variables aléatoires et apprendre à se méfier de certaines généralisations hâtives.

Deux couples d'amis, Arthur et Zoé, et Barnabé et Yvette, attendent chacun la naissance d'un enfant dont ils ignorent le sexe... Ce peut être un garçon ou une fille, avec d'égales chances.

1. On considère les événements :

F : « Zoé met au monde une fille », G : « Yvette met au monde un garçon » et O : « les deux enfants sont de sexes opposés ».

Étudier l'indépendance des événements F et G, puis celle des événements G et O, et enfin celle des événements O et F.

Peut-on en déduire que $P(F \cap G \cap O) = P(F) \times P(G) \times P(O)$?

2. On considère les variables aléatoires X, Y et Z :

- Z prend la valeur +1 si Zoé a un garçon et -1 sinon ;
- Y prend la valeur +1 si Yvette a un garçon et -1 sinon ;
- X prend la valeur +1 si les enfants sont de même sexe et -1 sinon.

a. Déterminer la loi de probabilité de chacune de ces variables aléatoires.

b. Étudier l'indépendance des variables X, Y et Z prises deux à deux.

c. A-t-on pour tous réels x, y et z pris dans $\{-1; 1\}$:

$$P(X = x \text{ et } Y = y \text{ et } Z = z) = P(X = x) \times P(Y = y) \times P(Z = z) ?$$

On dit encore que l'on étudie l'indépendance deux à deux des événements F, G et O.

On pourra vérifier que X, ainsi définie, n'est autre que le produit $Y \times Z$.

4. Le dépistage de la « probacytose »

OBJECTIF : Utiliser les probabilités conditionnelles en exerçant son esprit critique.

Le virus de la probacytose atteint chaque année une partie de la population des élèves de première et de terminale scolarisés en France.

Un test spécifique de dépistage, qui peut être soit positif, soit négatif, donne les résultats suivants :

- chez les individus atteints, 99 % des tests sont positifs ;
- chez les individus non atteints, 99 % des tests sont négatifs.

Pour un élève pris au hasard dans cette population, on désigne respectivement par V et T les événements : « l'élève est porteur du virus de la probacytose » et « le test est positif ».

A. Étude d'un cas particulier

Supposons que cette maladie touche 3 % de la population ciblée.

1. Illustrer la situation par un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité qu'un élève ait un test positif ?
3. Quelle est la probabilité qu'un élève dont le test est positif soit atteint par la probacytose ?

La **valeur diagnostique** n'est pas une notion intrinsèque au test lui-même : elle varie fortement selon la population cible.

Cette probabilité est appelée **valeur diagnostique du test** dans la population.

4. Quelle est la probabilité qu'un élève non malade ait un test positif ? (On parle dans ce cas de « faux positif ».)

À l'inverse, quelle est la probabilité qu'un élève malade ait un test négatif ? (On parle alors de « faux négatif ».)

En déduire la probabilité que le résultat du test subi par un élève ne soit pas conforme à son état de santé.

Point Info

Pour une maladie rare, un test de dépistage systématique de toute une population a l'inconvénient majeur de fournir beaucoup de faux positifs. Pour ces derniers, l'inquiétude liée à la découverte d'un test positif peut être grande : c'est là un des problèmes éthiques liés à la mise en place des tests de dépistage systématique d'une maladie rare.

B. Cas général

On désigne par p la valeur décimale du pourcentage d'élèves malades dans la population ciblée par le test.

1. Calculer les probabilités suivantes, en fonction de p :
 - a. $v(p) = P_T(V)$;
 - b. $w(p) = P_{\bar{T}}(\bar{V})$.

2. Recopier et compléter le tableau suivant par des valeurs approchées à 10^{-4} près.

p	0,000	0,001	0,010	0,100	0,300	0,500	0,700	0,900	0,990	0,999	1,000
$v(p)$											
$w(p)$											

Comparer $v(1 - p)$ et $w(p)$ pour $p \in [0 ; 1]$. Interpréter graphiquement. Construire dans un même repère orthonormal les courbes de v et w .

5. Appariement aléatoire en génétique...

OBJECTIF : Modéliser et établir la loi d'équilibre de Hardy-Weinberg.

Pour ce TP, on se place dans les cas simples où un gène peut prendre, dans une population, deux formes (ou allèles) A et a, de fréquences identiques dans les deux sexes. On admet que la formation des couples de parents se fait au hasard et que chaque enfant d'une génération hérite, à sa naissance, d'un allèle de chaque parent, chaque allèle étant choisi au hasard. Un individu présente donc l'un des trois génotypes suivants AA, Aa, aa.

A. ➔ Les lois de Mendel

Montrer que :

• si les génotypes des parents sont AA et Aa, la loi de probabilité pour le génotype de l'enfant est donnée par le premier tableau ;

Génotype	AA	Aa
Probabilité	1/2	1/2

• si les génotypes des parents sont Aa et Aa, la loi de probabilité pour le génotype de l'enfant est donnée par le deuxième tableau.

Génotype	AA	Aa	aa
Probabilité	1/4	1/2	1/4

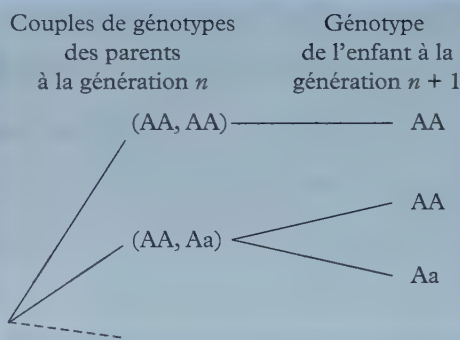
Remarque : Les lois de Mendel ont été énoncées en 1866.

B. ➔ D'une génération à la suivante

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note r_n (respectivement s_n, t_n) la probabilité qu'une personne ait, à la génération n , le génotype AA (respectivement Aa, aa), avec $r_n + s_n + t_n = 1$.

1. On note, par exemple, (AA, Aa) le couple de génotypes des parents, avec AA celui du mâle et Aa celui de la femelle.

Justifier qu'à la génération n , la probabilité qu'en prenant un couple de parents au hasard, son couple de génotype soit (AA, Aa) est $r_n \times s_n$.



2. En complétant l'arbre ébauché ci-contre, montrer que $r_{n+1} = \left(r_n + \frac{s_n}{2}\right)^2$.

3. Exprimer de même t_{n+1} et s_{n+1} en fonction de r_n, s_n, t_n et montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , $r_{n+1} - t_{n+1} = r_n - t_n$.

Point Info

Cette loi d'équilibre, formulée en 1908 par un mathématicien anglais, Hardy, et un médecin allemand, Weinberg, est le modèle théorique central de la génétique des populations. Dans une population – idéale – de grande taille où les individus s'unissent aléatoirement (hypothèse d'appariement au hasard), les fréquences des génotypes restent stables de génération en génération, et ne dépendent que des fréquences de la génération initiale.

C. ➔ Loi de Hardy-Weinberg

On donne dans une population (génération 0) les fréquences r_0, s_0, t_0 des trois génotypes AA, Aa et aa, avec $r_0 + s_0 + t_0 = 1$.

1. On pose $\alpha = r_0 - t_0$. Montrer que :

$$r_1 = \left(\frac{1 + \alpha}{2}\right)^2, t_1 = \left(\frac{1 - \alpha}{2}\right)^2 \text{ et } s_1 = \frac{1 - \alpha^2}{2}.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n - t_n = \alpha$.

3. En déduire que les suites $(r_n), (s_n), (t_n)$ sont constantes à partir de $n = 1$.

1 Un groupe de 22 personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.

Le premier samedi : 8 personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.

Le deuxième samedi : 4 personnes décident de revoir le film A, 2 vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne du groupe.

On considère, pour $k \in \{1; 2\}$, les événements A_k : « la personne a vu le film A le k^{e} samedi » et B_k : « La personne a vu le film B le k^{e} samedi ».

1. Illustrer la situation par un arbre pondéré en justifiant chacune des probabilités inscrites. En déduire le calcul de $P(A_2)$. Retrouver cette probabilité par un calcul direct.

2. Le prix du billet est de 5 € pour le film A, et de 4 € pour le film B. On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Solution

1. La situation peut être illustrée par l'arbre pondéré ci-contre.

• A_1 est l'événement « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi ». On choisit au hasard une personne parmi 22 ; il y a équiprobabilité des choix, 8 personnes ont vu le film, donc :

$$P(A_1) = \frac{8}{22} = \frac{4}{11} \quad \text{et} \quad P(B_1) = 1 - P(\bar{B}_1) = \frac{7}{11}.$$

• Calcul de $P_{A_1}(A_2)$. Parmi les 8 personnes qui ont vu le film A la

première semaine, 4 personnes l'ont revu la seconde semaine. On a donc $P_{A_1}(A_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

• Calcul de $P_{B_1}(A_2)$. Parmi les 14 personnes qui ont vu le film B la première semaine, 2 l'ont revu la deuxième semaine. On a donc $P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$.

• Les deux dernières probabilités s'obtiennent en écrivant : $P_{A_1}(B_2) = 1 - P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{2}$ et $P_{B_1}(A_2) = \frac{6}{7}$.

• A_1 et B_1 formant une partition du groupe, la formule des probabilités totales donne alors :

$$P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap B_1) = P_{A_1}(A_2)P(A_1) + P_{B_1}(A_2)P(B_1)$$

soit $P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} + \frac{6}{7} \times \frac{7}{11} = \frac{8}{11}$.

• **Par un raisonnement direct.** Le deuxième samedi, 4 personnes ont revu le film A et 12 personnes l'ont vu pour la première fois. 16 personnes ont donc vu le film A le deuxième samedi.

D'où $P(A_2) = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$.

2. **Loi de probabilité de X :** les différentes valeurs prises par X sont 8, 9 et 10 ; $X(\Omega) = \{8; 9; 10\}$.

• $(X = 8)$ est l'événement « la personne a vu deux fois le film B ». $P(X = 8) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{7}{11} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{11}$.

• $(X = 9)$ est l'événement « la personne a vu une fois le film A et une fois le film B ».

$$P(X = 9) = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) = \frac{4}{11} \times \frac{1}{2} + \frac{7}{11} \times \frac{6}{7} = \frac{8}{11}.$$

• $(X = 10)$ est l'événement « la personne a vu deux fois le film A », d'où $P(X = 10) = \frac{2}{11}$.

La loi de probabilité de X est donc décrite par le tableau ci-contre.

x_i	8	9	10
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{2}{11}$

voir aussi exercices n° 41, 62

2 Une urne U_1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2. Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.

1. On choisit au hasard une urne, puis on extrait un jeton de cette urne, toujours au hasard.
 - a. Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir un jeton numéroté 1 ».
 - b. On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?
2. On tire désormais au hasard un jeton de chaque urne. On désigne par X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire prenant pour valeur le numéro du jeton extrait de l'urne U_1 (respectivement U_2).
 - a. Justifier l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 .
 - b. Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.
 - c. Soit S la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de S.
 - d. Deux joueurs, Grégoire et Zora, décident que si la somme des numéros tirés est supérieure à 4, Grégoire donne 10 euros à Zora et que, dans le cas contraire, Grégoire reçoit α euros de Zora. On note Z la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Zora. Calculer l'espérance mathématique de Z en fonction de α puis déterminer α pour que le jeu soit équitable.

Solution

1. On peut illustrer cette première expérience aléatoire par un arbre pondéré.

L'équiprobabilité des choix opérés (choix de l'urne et choix du jeton dans cette urne) conduit aux probabilités portées sur l'arbre.

a. L'événement A n'est autre que la réunion des événements $U_1 \cap A$ et $U_2 \cap A$ (U_1 et U_2 réalisant une partition de l'univers). On a donc (formule des probabilités totales) :

$$P(A) = P(U_1 \cap A) + P(U_2 \cap A) = P_{U_1}(A)P(U_1) + P_{U_2}(A)P(U_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

b. On suppose ici A réalisé, et on cherche $P_A(U_1)$.

Le conditionnement de U_1 par A n'étant pas dans la « logique » de notre arbre, utilisons la formule :

$$P_A(U_1) = \frac{P(U_1 \cap A)}{P(A)} \text{ qui nous ramène à des probabilités déjà calculées : } P(U_1 \cap A) = \frac{1}{4} \text{ et } P(A) = \frac{3}{8}.$$

Ainsi, $P_A(U_1) = \frac{2}{3}$.

2. a. Le contexte permet d'affirmer que le tirage d'un jeton dans l'urne U_1 n'a pas d'influence sur celui effectué dans l'urne U_2 .

Il s'ensuit que, pour chaque valeur $x_1 \in \{1; 2\}$ prise par X_1 et chaque valeur $x_2 \in \{1; 2; 3; 4\}$ prise par X_2 , la réalisation de l'événement « $X_1 = x_1$ » n'influe pas sur la probabilité que « $X_2 = x_2$ » se réalise (autrement dit, les événements « $X_1 = x_1$ » et « $X_2 = x_2$ » sont indépendants).

Par définition, les variables aléatoires X_1 et X_2 sont donc indépendantes.

b. Notons D l'événement « tirer deux jetons identiques ».

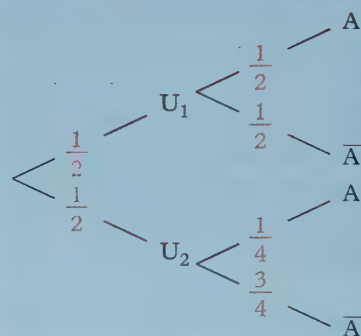
On a $D = (X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1) \text{ ou } (X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 2)$.

Ces deux événements étant incompatibles, on a :

$$P(D) = P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1) + P(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 2),$$

ce qui donne, compte tenu de l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 :

$$P(D) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2) \times P(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$



EXERCICES RÉSOLUS

c. S peut prendre les valeurs 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.

Calculons $P(S = k)$ pour chaque $k \in \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$:

• $P(S = 2) = P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$;

• $P(S = 3) = P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 2) + P(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

En procédant de même pour les autres valeurs, on obtient le tableau ci-contre.

k	2	3	4	5	6
P(S = k)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

d. Z prend la valeur 10 si $S > 4$ et la valeur $-\alpha$ sinon.

On a donc $P(Z = 10) = P(S = 5 \text{ ou } S = 6) = \frac{3}{8}$

et $P(Z = -\alpha) = P(S = 2 \text{ ou } S = 3 \text{ ou } S = 4) = \frac{5}{8}$.

Le jeu est équitable si l'espérance de gain de Zora est nulle.

Or $E(Z) = \frac{5}{8}(-\alpha) + \frac{3}{8}(10) = \frac{30 - 5\alpha}{8}$.

Le jeu est donc équitable lorsque $\alpha = 6$.

Remarque : Si $E(Z) > 0$ c'est-à-dire si $\alpha < 6$, alors Zora est favorisée par ce jeu. Si $\alpha > 6$, elle est au contraire défavorisée.

z	$-\alpha$	10
P(Z = z)	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

voir aussi exercices n° 6, 58

3 L'axe central d'une ville traverse quatre carrefours munis des feux tricolores F_1, F_2, F_3 et F_4 .

Lorsqu'un véhicule se présente à un feu, celui-ci peut être soit vert, soit orange, soit rouge, avec les probabilités ci-contre.

Notations : Pour $1 \leq k \leq 4$, on désigne par \mathcal{E}_k l'épreuve aléatoire « se présenter devant le feu F_k » dont les résultats sont les trois états v_k, o_k et r_k (vert, orange et rouge).

Ces issues seront différenciées des événements V_k, O_k et R_k : « F_k est vert », « F_k est orange », « F_k est rouge ».

	F_1	F_2	F_3	F_4
Vert	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
Orange	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{35}$
Rouge	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{7}$

1. On suppose dans cette question qu'un automobiliste a une chance sur deux de pouvoir traverser les deux premiers carrefours au vert et qu'il a une chance sur dix de devoir s'y arrêter deux fois de suite au rouge.

a. Les événements V_1 et V_2 sont-ils indépendants ? Et R_1 et R_2 ?

b. Les expériences \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont-elles indépendantes ?

2. On suppose désormais que les 4 feux se comportent indépendamment les uns des autres (il n'y a aucune synchronisation) et qu'un automobiliste se présente successivement devant les 4 feux.

a. Proposer une modélisation de cette expérience (préciser Ω et la loi de probabilité P).

b. Calculer les probabilités des événements suivants :

• A : « les deux premiers feux sont verts, le troisième est orange et le dernier rouge » ;

• B : « seul le troisième feu n'est pas vert » ;

• C : « l'automobiliste rencontre un seul feu l'obligeant à s'arrêter (orange ou rouge) ».

c. Sachant que l'automobiliste s'est arrêté une seule fois lors de la traversée des quatre carrefours (à l'orange ou au rouge), quelle est la probabilité que cet arrêt ait eu lieu au troisième carrefour ?

Solution

1. a. • Par définition, les événements V_1 et V_2 sont indépendants (relativement à la probabilité P) si l'on a :

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P(V_2).$$

Or $P(V_1) \times P(V_2) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = P(V_1 \cap V_2)$, d'où l'indépendance de V_1 et V_2 .

• De même, on a $P(R_1 \cap R_2) = 0,1$ et $P(R_1) \times P(R_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$.

R_1 et R_2 ne sont donc pas indépendants.

b. Les deux épreuves \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 ont pour univers des possibles respectifs :

$$\Omega_1 = \{v_1, o_1, r_1\} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \{v_2, o_2, r_2\}.$$

Elles sont indépendantes si, pour tout couple (x_1, x_2) de résultats de \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 :

$$P(\{(x_1, x_2)\}) = P(\{x_1\})P(\{x_2\}).$$

Or cette égalité est vérifiée pour le couple $(x_1, x_2) = (v_1, v_2)$ d'après **1a**.

Mais elle ne l'est pas pour le couple $(x_1, x_2) = (r_1, r_2)$, toujours d'après **1a**.

Les deux expériences aléatoires \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 ne sont donc pas indépendantes (ce qui signifie que les feux F_1 et F_2 ne fonctionnent pas de manière indépendante).

2. a. Considérons l'expérience aléatoire \mathcal{E} consistant à enchaîner les quatre épreuves $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ et \mathcal{E}_4 . Ces épreuves étant, par hypothèse, indépendantes, on en déduit que la loi de probabilité P sur l'ensemble des résultats possibles (x_1, x_2, x_3, x_4) de \mathcal{E} est définie par :

$$P(\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\}) = P(\{x_1\})P(\{x_2\})P(\{x_3\})P(\{x_4\}).$$

b. En particulier :

• $P(A) = P(\{(v_1, v_2, o_3, r_4)\})$

$$= P(\{v_1\})P(\{v_2\})P(\{o_3\})P(\{r_4\})$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{40} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{140};$$

• $P(B) = P(\{(v_1, v_2, \bar{v}_3, v_4)\})$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25};$$

• $P(C) = P(\{(\bar{v}_1, v_2, v_3, v_4)\}) + P(\{(v_1, \bar{v}_2, v_3, v_4)\}) + P(\{(v_1, v_2, \bar{v}_3, v_4)\}) + P(\{(v_1, v_2, v_3, \bar{v}_4)\})$

$$= \frac{3}{50} + \frac{1}{25} + \frac{2}{25} + \frac{9}{50} = \frac{9}{25}.$$

c. La probabilité cherchée est :

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)} = \frac{2}{9}.$$

Remarque

Dans cet exercice, on a désigné par P plusieurs probabilités pourtant définies sur des univers différents. Cet abus d'écriture est courant, dans un but de simplification.

voir aussi exercices n° 56, 59

→ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Modélisation et calculs élémentaires

1 Astragale : de l'expérimentation au modèle

Les Grecs et les Romains utilisaient à la place des dés des osselets d'agneaux appelés « astragales ». Ces astragales pouvaient retomber sur l'une de leurs 4 faces, numérotées ici de 1 à 4.

p_i désignant la probabilité qu'un astragale retombe sur la face n° i , des expériences statistiques ont permis d'établir que :

$$p_1 = p_2 ; p_3 = p_4 \quad \text{et} \quad p_1 = 4p_3.$$

On lance un astragale.

1. Déterminer la loi de probabilité sur :

$$\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}.$$

2. Calculer les probabilités des événements :

A : « obtenir un n° pair » ; B : « obtenir le 1 ou le 4 » ;
C = $\bar{A} \cup \bar{B}$.

2 Dé pipé : de la convention au modèle

Un dé pipé est tel que la probabilité d'obtenir chacun des numéros de 1 à 6 est proportionnelle à ce numéro. On lance ce dé.

1. Par quelle loi de probabilité sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ peut-on modéliser cette expérience ?

2. Calculer les probabilités des événements :

E : « obtenir un numéro strictement supérieur à 3 » ;
F : « obtenir un multiple de 3 » ;

$$I = \bar{E} \cup F.$$

3 Carte au hasard : loi équirépartie

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

A : « la carte tirée est un pique » ;

B : « la carte tirée est rouge (carreau ou cœur) » ;

C : « la carte tirée est une figure (roi, dame ou valet) ».

1. En proposer une modélisation (univers et loi).

2. Calculer les probabilités des événements : A ; B ; C ; $A \cap B$; $B \cap C$; $A \cup B$; $A \cup C$.

3. Calculer la probabilité de l'événement :

E : « la carte tirée n'est ni un pique ni une figure ».

4 Répartition et rencontre au hasard

Dans un centre aéré, différentes activités sont proposées, dont le tir à l'arc et l'escalade.

Parmi les 60 jeunes présents ce jour, 45 se sont inscrits au tir à l'arc et 24 à l'escalade.

Sachant que 6 d'entre eux ne se sont inscrits à aucune de ces activités, déterminer la probabilité qu'un jeune rencontré au hasard dans le centre pratique aujourd'hui :

a. le tir à l'arc ;

b. l'escalade ;

c. aucun de ces deux sports ;

d. le tir à l'arc ou l'escalade ;

e. le tir à l'arc et l'escalade.

Utilisation d'une variable aléatoire

5 Nombre moyen de lettres

Chacun des dix mots de la phrase « Rien ne sert de courir, il faut partir à point » est inscrit sur un carton. Les dix cartons, indiscernables au toucher, sont placés dans un sac. On tire un carton au hasard.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de lettres obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Quel est, en moyenne, le nombre de lettres que l'on peut obtenir à ce jeu ?

6 CD Deux stratégies à la roulette

Au jeu de la roulette, la bille s'immobilise au hasard sur l'un des 37 numéros :

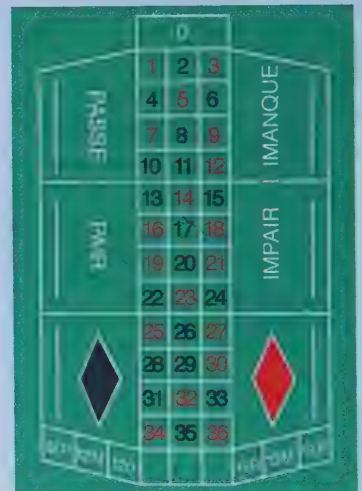
0, 1, ..., 36.

• Xavier mise 1 € sur « rouge » : si un numéro rouge sort, il gagne 1 € et récupère sa mise ; sinon il perd sa mise.

• Yoann mise 1 € sur le numéro 7 : si le numéro 7 sort, il gagne 35 € et récupère sa mise ; sinon il perd sa mise.

Les gains (qui peuvent être négatifs) réalisés respectivement par Xavier et Yoann définissent deux variables aléatoires X et Y.

Comparer les espérances de gain de Xavier et de Yoann. Calculer les écarts types et interpréter.



7 CD Écart de deux dés cubiques

On lance deux dés cubiques bien équilibrés.

Soit D la variable aléatoire qui associe à chaque couple (a, b) de numéros obtenus la distance $|a - b|$.

1. Déterminer la loi de probabilité de D.

2. Calculer son espérance et son écart type.

3. Quelle est la probabilité que, lors d'un lancer, la distance des deux numéros obtenus soit strictement supérieure à trois ?

Probabilités conditionnelles

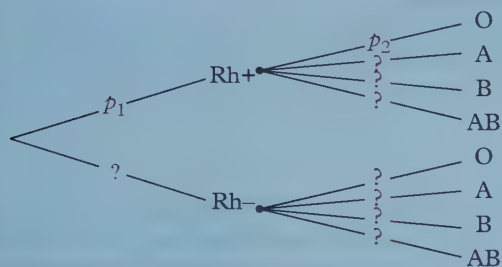
8 vu au BAC Groupes sanguins et facteur rhésus (du tableau à l'arbre)

Voici le tableau de répartition en pourcentages des principaux groupes sanguins des habitants de la France :

Groupe	O	A	B	AB
Rhésus +	35,0	38,1	6,2	2,8
Rhésus -	9,0	7,2	1,2	0,5

Les résultats numériques demandés seront, s'il y a lieu, arrondis à trois décimales.

1. L'objectif de cette question est de compléter à l'aide des données de ce tableau l'arbre suivant que l'on recopiera.



L'expérience consiste à choisir une personne au hasard dans la population donnée.

On note Rh+ l'événement « la personne a le facteur Rh+ » et O l'événement « la personne appartient au groupe O ».

a. Déterminer p_1 et p_2 et reporter ces résultats sur l'arbre (on détaillera les calculs).

b. Compléter le reste de l'arbre en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante (on ne détaillera pas les calculs).

2. a. Comment peut-on, à partir de l'arbre complété, déterminer la probabilité de O ? Vérifier ce calcul avec le tableau.

b. Quelle est la probabilité pour qu'une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ ?

9 Étude de marché selon deux critères (du tableau aux arbres)

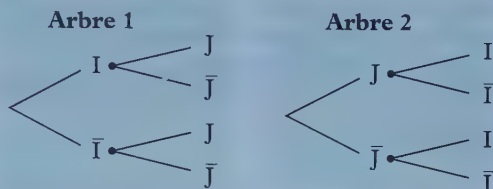
Un organisme de sondage a effectué pour une société une étude de marché sur un nouveau produit. Les résultats de l'enquête sur un échantillon de 400 personnes sont donnés par le tableau suivant.

	Moins de 30 ans	Plus de 30 ans
Intéressé par le produit	75	25
Non intéressé par le produit	175	125

On choisit au hasard une personne de l'échantillon. On désigne respectivement par I et J les événements :

- « la personne interrogée est intéressée par le produit » ;
- « la personne interrogée a moins de 30 ans ».

1. Nommer et calculer les probabilités devant figurer sur les douze branches des arbres pondérés suivants.



2. Calculer les probabilités $P(I \cap J)$, $P(I \cap \bar{J})$, $P(\bar{I} \cap J)$, et $P(\bar{I} \cap \bar{J})$:

- à partir de l'arbre 1 ;
- à partir de l'arbre 2 ;
- à partir du tableau initial.

Vérifier la concordance des résultats.

10 Des cases grises (vérification de formules)

Un damier comporte 16 cases dont six sont grisées.



On choisit au hasard une case du damier (par exemple en lançant deux fois un dé tétraédrique bien équilibré et en associant au couple (i, j) obtenu la case située à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne).

On désigne par G l'événement « la case désignée est grisée » et par L_k , pour $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, l'événement « la case désignée est située sur la ligne n° k ».

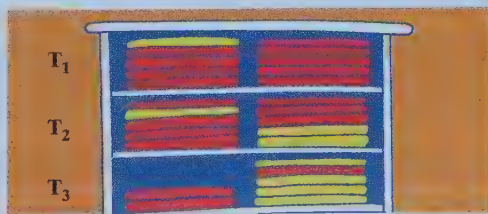
1. Par un calcul direct, déterminer les probabilités : $P(G)$; $P(L_k)$; $P_{L_1}(G)$; $P_{L_2}(G)$; $P_{L_3}(G)$; $P_{L_4}(G)$; $P(G \cap L_1)$; $P(G \cap L_2)$; $P(G \cap L_3)$;

$P(G \cap L_4)$; $P_G(L_1)$; $P_G(L_2)$; $P_G(L_3)$; $P_G(L_4)$.

2. Quelles formules du cours peut-on vérifier avec ces différents résultats ?

11 Des serviettes et des tiroirs

Une commode possède 3 tiroirs contenant chacun des serviettes rouges et jaunes.



Un enfant ouvre un tiroir au hasard et y prend deux serviettes, toujours au hasard.

Pour $k \in \{1; 2; 3\}$, on note T_k l'événement : « l'enfant ouvre le tiroir n° k » et D l'événement : « les serviettes obtenues sont de couleurs différentes ».

EXERCICES

- Illustrer la situation par un arbre pondéré.
- On considère les probabilités suivantes :

$$P(D) ; P(T_1) ; P(T_2) ; P(T_3) ;$$

$$P(D \cap T_1) ; P(D \cap T_2) ; P(D \cap T_3) ;$$

$$P_{T_1}(D) ; P_{T_2}(D) ; P_{T_3}(D) ;$$

$$P_D(T_1) ; P_D(T_2) ; P_D(T_3).$$

- Parmi ces probabilités, indiquer celles que l'énoncé (ou l'arbre) permet de donner sans calcul.
- Calculer les autres probabilités.

12 vu au BAC Fiabilité

Trois machines fabriquent des ampoules électriques dans les proportions suivantes : 20 % sont fabriquées par la machine A ; 50 % par la machine B ; 30 % par la machine C.

Les probabilités que les ampoules fabriquées par les machines A, B et C soient bonnes sont respectivement : 0,9 ; 0,95 ; 0,8.

- Calculer la probabilité pour qu'une ampoule soit bonne.
- On achète une ampoule : elle est bonne. Quelle est la probabilité pour qu'elle ait été fabriquée par la machine A ?

13 Du tricheur à l'as, de l'as au tricheur

On admet qu'un joueur sur trois est un tricheur, et que pour un tricheur, la probabilité d'obtenir un as en tirant une carte d'un jeu de 52 cartes est égale à 1. Pour un non-tricheur, le tirage se fait, honnêtement, au hasard.

- Un joueur tire une carte. Quelle est la probabilité que ce soit un as ?
- Un joueur tire une carte et c'est un as. Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

Indépendance de deux événements

14 Le parapluie de Xavier

Une étude météorologique a permis de dégager une loi régnant le temps qu'il fait en début de matinée dans la ville de Xavier :

Temps	pluvieux	nuageux	ensoleillé
Probabilité	0,2	0,3	0,5

En partant le matin, Xavier prend son parapluie :

- à coup sûr s'il pleut,
- une fois sur deux si le temps est nuageux,
- une fois sur dix s'il fait beau.

- Quelle est la probabilité que Xavier emporte son parapluie demain matin ?
- Les événements « le temps est nuageux » et « Xavier prend son parapluie » sont-ils indépendants ?

15 Tennis ou golf ?

Dans un club de loisirs, différentes activités de découverte sont proposées dont le tennis et le golf. Sur les 48 adhérents, on compte 12 inscriptions pour le tennis et 16 pour le golf, 4 adhérents étant inscrits à la fois en tennis et en golf.

On sort au hasard la fiche d'un adhérent.

On désigne par T l'événement « l'adhérent est inscrit en découverte tennis » et par G l'événement « l'adhérent est inscrit en découverte golf ».

- Les événements T et G sont-ils indépendants ?
 - Les événements T et \bar{G} sont-ils indépendants ?
- Pour une généralisation, voir exercice n° 16.

16 Indépendance et passage au contraire

- Justifier l'égalité (1) :

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

- On suppose que A et B sont deux événements indépendants.

- Prouver, à l'aide de (1), qu'il en est de même des événements A et \bar{B} .
- Que peut-on en déduire pour les événements \bar{A} et B, \bar{A} et \bar{B} ?

17 Confection et indépendance

Les deux ateliers A et B d'une entreprise de confection produisent respectivement 40 % et 60 % de la production de l'entreprise.

Dans l'atelier A, on produit 25 % de chemisiers, 40 % de jupes et 35 % de vestes. Dans l'atelier B, on produit 30 % de chemisiers, 40 % de jupes et 30 % de vestes. Un vêtement est prélevé au hasard dans la production.

- Calculer les probabilités P(J) et P(V) que le vêtement soit respectivement : une jupe, une veste.
- On note A (respectivement B) l'événement « le vêtement provient de l'atelier A (respectivement B) ». Étudier l'indépendance des événements A et J, et des événements B et V. Était-ce prévisible ?
- On prélève au hasard une jupe dans la production ; quelle est la probabilité qu'elle provienne :
 - de l'atelier A ?
 - de l'atelier B ?

18 Indépendance 2 à 2 mais pas plus !

La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent chacune l'héritier de leur duché.

- Calculer la probabilité de pouvoir faire une alliance en mariant les deux enfants attendus.
- Étudier l'indépendance 2 à 2 des événements suivants :

A : « l'héritier d'Aquitaine est un garçon » ;

B : « l'héritier de Bourgogne est un garçon » ;

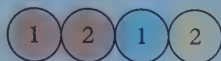
C : « les deux héritiers sont de même sexe ».

- A-t-on : $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$?

D'après *Exercices ordinaires de probabilités*, Ellipses.

Indépendance de deux variables aléatoires

19 Couleurs et numéros



Une urne contient quatre boules : deux rouges portant les numéros 1 et 2, une verte numérotée 1 et une jaune numérotée 2.

On extrait au hasard une boule de l'urne.

On considère les variables aléatoires X , Y , et Z associant respectivement à chaque tirage :

- le numéro porté par la boule ;
- le nombre de boules rouges obtenues (0 ou 1) ;
- le nombre de boules jaunes obtenues (0 ou 1).

1. Déterminer la loi de probabilité de chaque variable aléatoire.

2. a. Étudier l'indépendance des variables aléatoires X et Y .

b. Étudier l'indépendance des variables aléatoires X et Z .

20 Distance et parité

On lance un dé cubique bien équilibré et on lit le nombre k porté par la face supérieure.

On définit les variables aléatoires suivantes :

- X associe au lancer le nombre 2 si k est pair et le nombre 1 sinon ;
- Y associe au lancer la distance du nombre k au nombre 2,5, c'est-à-dire $|k - 2,5|$.

1. Déterminer les lois de probabilité de X et Y .

2. Étudier si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

21 Longueur contre largeur

Une boîte contient des jetons rectangulaires de quatre types dont les dimensions en cm sont : 1 et 3 (type 1), 1 et 4 (type 2), 2 et 3 (type 3), 2 et 4 (type 4).

Ces quatre types de jetons sont respectivement présents dans la boîte dans les proportions suivantes : 10 %, 20 %, 30 % et 40 %.

On extrait un jeton au hasard et on mesure ses dimensions. Sa largeur définit une variable aléatoire X et sa longueur une variable aléatoire Y .

1. a. Déterminer les lois de probabilité de X et de Y .
b. Justifier que X et Y ne sont pas indépendantes.

2. Quelle aurait dû être la répartition des différents jetons dans la boîte pour que les variables aléatoires X et Y suivent ces mêmes lois (voir question 1a) mais soient indépendantes ?

Expériences indépendantes

22 Le problème du duc de Toscane

Lorsqu'on lance 3 dés, il est possible d'obtenir une somme S égale à 9 (les décompositions y conduisant étant : $1+2+6$; $1+3+5$; $1+4+4$; $2+2+5$; $2+3+4$; $3+3+3$). Il est aussi possible d'obtenir $S = 10$.

Est-il plus probable d'obtenir $S = 9$ ou $S = 10$?

Point Info

Au xvi^e siècle, ce type de questions préoccupait beaucoup les joueurs de dés. Le duc de Toscane, constatant le même nombre de décompositions en sommes amenant $S = 9$ et $S = 10$, s'étonnait d'obtenir plus souvent un résultat que l'autre... C'est Galilée qui donna une explication à ce problème.

23 Un jeu bien indécis

Xavier dispose d'un dé cubique, bien équilibré.

Yoann dispose d'un dé tétraédrique pipé dont le lancer est modélisé par la loi suivante :

k	1	2	3	4
$P(\{k\})$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{10}{20}$

Les deux dés sont lancés de façon indépendante. On désigne par X et Y les numéros respectivement amenés par le dé cubique et le dé tétraédrique. Yoann est déclaré gagnant s'il obtient un numéro strictement supérieur à celui de Xavier.

1. Calculer la probabilité d'avoir :

a. $X = 2$ et $Y = 3$; b. $X = Y$; c. $X < Y$.

2. Qui, de Xavier ou de Yoann, a le plus de chances de gagner à ce jeu ?

24 Le singe dactylographe

1. Un singe frappe 24 fois sur les 40 touches d'un clavier de machine à écrire.

Quelle est la probabilité P qu'il écrive la phrase :

« LE HASARD GUIDE LE MONDE »
(avec les espaces) ?

2. Le singe répète cette épreuve n fois.

Calculer la probabilité P_n que l'événement précédent se produise au moins une fois, et calculer la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$.

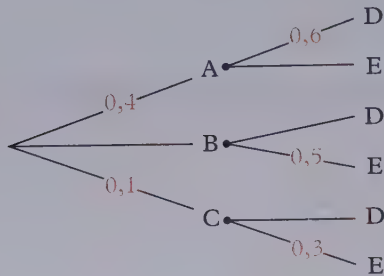
Point Info

Ce résultat vient accréditer l'idée d'Émile Borel, (1871-1956), selon laquelle un événement, aussi rare soit-il, a toutes les chances de se produire à condition de répéter l'expérience un assez grand nombre de fois !

→ Que sais-je ?

Vrai ou faux ?

Pour les exercices 25 à 30, se référer à la situation décrite par l'arbre suivant.



25 $P_A(D) = 0,24$.

26 $P(C \cap E) = 0,03$.

27 $P(D) = 0,56$.

28 B et E sont indépendants.

29 A et B sont incompatibles.

30 $P_D(C) = 0,125$.

31 On admet l'équiprobabilité des sexes à la naissance. Une famille de deux enfants a au moins une fille. La probabilité que l'aîné des enfants soit un garçon est égale à $\frac{1}{3}$.

32 On extrait au hasard une boule d'un sac qui contient deux boules, chaque boule pouvant être rouge ou noire avec d'égales chances. La probabilité d'obtenir une boule rouge est 0,5.

33 On lance trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Les événements A : « obtenir au plus une fois pile » et B : « obtenir au moins une fois pile et au moins une fois face » sont indépendants.

34 Chloé écrit aussi souvent PAPA que MAMAN ; pourtant, c'est PAPAN et non PAPA qu'elle écrit deux fois sur trois, et MAMA au lieu de MAMAN, quatre fois sur cinq. La probabilité qu'elle écrive correctement PAPA ou MAMAN est égale à $\frac{8}{15}$.

QCM

Pour les exercices 35 à 38, choisir la ou les réponses justes.

35 On lance un dé cubique bien équilibré. Soit les événements :

I : « le numéro sorti est inférieur ou égal à 3 » ;
M : « le numéro sorti est un multiple de 3 ».

A. $P(I \cup M) = \frac{5}{6}$; B. $P_M(I) + P_I(M) = \frac{5}{6}$;

C. I et M sont incompatibles ;

D. I et M sont indépendants.

36 Un enfant choisit au hasard un chiffre parmi 1, 2, 3 et 4. Les variables aléatoires X et Y associent au chiffre choisi le nombre de lettres figurant dans son écriture littérale en anglais et en français, respectivement.

A. $P(X=4) = P(Y=4)$; B. $E(X) < E(Y)$;

C. $P(X=3 \text{ et } Y=4) = 0,125$;

D. X et Y sont indépendantes.

37 Quand Max appelle Zoé sur son portable le soir, à 18 heures, elle répond une fois sur deux quand ce n'est pas le samedi et seulement une fois sur cinq quand c'est le samedi !

Max appelle un certain soir, à 18 heures. Soit les événements S : « c'est un samedi » et T : « Zoé répond au téléphone ».

A. $P(S \cap T) = \frac{1}{35}$; B. $P(T) = 0,7$;

C. $P_T(S) = \frac{1}{16}$; D. $P_{\bar{T}}(S) = \frac{15}{16}$.

38 Une urne contient trois dés cubiques bien équilibrés, mais l'un d'eux est truqué : il possède deux numéros 1 et quatre numéros 6 !

On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue, avec ce dé, n lancers indépendants ($n \geq 1$).

A. $P(\text{« obtenir 1 au premier lancer »}) = \frac{2}{9}$;

B. $P(\text{« obtenir } n \text{ fois 6 »}) p_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

C. Avec le dé truqué, la probabilité d'obtenir, au moins une fois 6 est $q_n = \frac{3^n - 1}{3^n}$.

D. La probabilité d'avoir tiré le dé truqué sachant que l'on a obtenu n fois 6 est $r_n = \frac{4^n}{4^n + 2}$.

→ Un sujet vu au BAC (extrait)

39 Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise ; s'il est en retard, il prend le bus de ville qui lui coûte 0,50 €.

- Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $1/5$.
 - S'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit encore en retard le lendemain est $1/20$.
- Pour tout entier non nul n , on désigne par R_n l'événement « l'employé est en retard le jour n » et on note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de \bar{R}_n . On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence

- Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes : $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\bar{R}_n}(R_{n+1})$.
- En déduire $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p(R_{n+1} \cap \bar{R}_n)$ en fonction de q_n .
- Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et q_n , et en déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$.

2. Étude de la suite (p_n)

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$ (1).

- Démontrer que (v_n) est une suite géométrique ; exprimer v_n , puis p_n en fonction de n .
- Étudier et interpréter la limite de la suite (p_n) .

Afrique, juin 2004.

Solution

1. a. L'énoncé donne $p_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{20}$ et $p_{\bar{R}_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{5}$.

b. Par propriété :

$$\bullet p(R_{n+1} \cap R_n) = p_{R_n}(R_{n+1}) \times p(R_n) = \frac{1}{20} p_n.$$

$$\bullet p(R_{n+1} \cap \bar{R}_n) = p_{\bar{R}_n}(R_{n+1}) \times p(\bar{R}_n) = \frac{1}{5} q_n.$$

c. La formule des probabilités totales donne alors :

$$p(R_{n+1}) = p(R_{n+1} \cap R_n) + p(R_{n+1} \cap \bar{R}_n)$$

$$p(R_{n+1}) = p_{R_n}(R_{n+1}) \times p(R_n) + p_{\bar{R}_n}(R_{n+1}) \times p(\bar{R}_n) = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{5} q_n.$$

Comme $q_n = p(\bar{R}_n) = 1 - p(R_n) = 1 - p_n$, il en résulte :

$$p_{n+1} = p(R_{n+1}) = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{5} (1 - p_n) \text{ soit } p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n \quad (2).$$

2. a. Les relations (1) et (2) donnent, pour n dans \mathbb{N}^* :

$$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{23} = \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n \right) - \frac{4}{23} = -\frac{3}{20} v_n.$$

(v_n) est donc géométrique de raison $-\frac{3}{20}$ et de premier terme

$$v_1 = p_1 - \frac{4}{23} = -\frac{4}{23}.$$

$$\text{On a alors } v_n = -\frac{4}{23} \left(-\frac{3}{20} \right)^{n-1} \text{ puis } p_n = \frac{4}{23} - \frac{4}{23} \left(-\frac{3}{20} \right)^{n-1}.$$

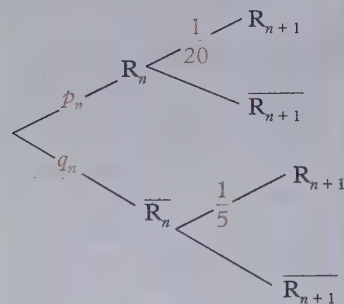
b. Comme $-1 < -\frac{3}{20} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{20} \right)^{n-1} = 0$

$$\text{et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{4}{23}.$$

Au bout d'un grand nombre de jours, la probabilité d'être en retard le jour n se stabilise autour de $\frac{4}{23}$.

le jour du BAC

Question 1a : La première bonne idée à avoir est d'illustrer cette situation par un arbre pondéré, le reste en découle...



Question 1b : Il faut bien lire l'énoncé : ici (comme souvent), on connaît $p_A(B)$ et on cherche $p(A \cap B)$!

Question 1c : Cette formule peut s'appliquer car R_n et \bar{R}_n forment une partition de Ω .

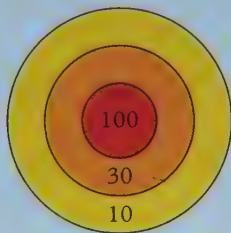
Question 2 : C'est désormais un exercice classique sur les suites ! (Voir par exemple exercices n° 63, 65 pp. 378-379.)

→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Variables aléatoires

40 La cible

Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible constituée de trois cercles concentriques de rayons respectifs 10 cm, 20 cm et 30 cm (voir dessin ci-dessous). On suppose que ce tireur atteint la cible dans 90 % des cas et que lorsqu'il l'atteint, la probabilité qu'il plante sa flèche dans l'une des trois zones est proportionnelle à l'aire de cette zone.



On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de points obtenus lors d'un tir (lu sur la cible).

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Combien de points peut-on espérer marquer lors d'un tir ?

41 D'une tombola à l'autre

1. Dans une tombola, on dispose de cent enveloppes : une enveloppe contient 20 €, cinq enveloppes contiennent 10 €, dix enveloppes contiennent 5 € et les autres sont vides.

Une personne donne 2 € et prend une enveloppe au hasard. Le gain algébrique du joueur est une variable aléatoire X .

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance de gain du joueur.

Qui ce jeu favorise-t-il : l'organisateur ou le joueur ? Quel devrait être le coût d'une enveloppe pour que le jeu soit équitable ?

2. Dans une autre tombola, on procède de même, mais avec cent enveloppes dont deux contiennent 10 €, cinquante contiennent 2 €, les autres étant vides.

- Montrer que l'espérance de gain du joueur est inchangée d'une tombola à l'autre.
- Calculer l'écart type du gain dans chaque cas et interpréter les résultats.

42 La stratégie familiale de Sam et Julie

Sam souhaite avoir un garçon, un seul... et il est prêt à y mettre le temps qu'il faudra. Mais Julie, elle, ne veut pas avoir plus de trois enfants.

Aussi s'accordent-ils en adoptant la règle suivante : si le premier enfant est un garçon, il sera fils unique. Sinon, ils auront un second enfant, puis un troisième si le second est une fille.

Ils écartent l'hypothèse de naissances multiples et supposent que les deux sexes sont équiprobables à la naissance.

On désigne par X , Y et Z , respectivement, les variables aléatoires indiquant le nombre d'enfants, le nombre de garçons et le nombre de filles que l'on pourra compter chez Sam et Julie.

- Illustrer la situation par un arbre pondéré.
- Déterminer la loi de probabilité de chaque variable aléatoire.
- Combien Sam et Julie peuvent-ils espérer avoir d'enfants ? de garçons ? de filles ?
- Si cette règle était adoptée par toutes les familles d'une même population, conduirait-elle à un déséquilibre dans la répartition filles/garçons ?

Probabilités conditionnelles

43 Prise d'information

Un sac contient trois jetons : un rouge, un noir et un bicolore (une face rouge et une face noire).

On tire au hasard un jeton et on ne regarde qu'une face ; cette face est noire.

Quelle est la probabilité d'avoir en main le jeton bicolore ? le jeton noir ? le jeton rouge ?

44 Des oranges et des clémentines

Lors d'une promotion, un hypermarché vend par paquets d'un kilogramme des clémentines et des oranges en provenance de l'Union européenne (Italie, Espagne) et du Maroc. Le nombre de kilos mis en vente est donné par le tableau suivant.

Origine \ Fruits	Italie	Espagne	Maroc
Clémentines	100	250	200
Oranges	350	450	650

Un client prend au hasard un paquet de fruits.

1. Illustrer cette expérience aléatoire par deux arbres pondérés :

- l'un comportant 2×3 branches ;
- l'autre comportant 3×2 branches .

On utilisera la première lettre des mots clés (I, E, M, C, O) pour désigner les événements.

2. En « oubliant » le tableau initial et en partant de l'un des deux arbres, montrer qu'il est possible de retrouver le second (on dit que l'on **inverse** un arbre lorsque l'on réalise cette démarche).

45 vu au BAC Germera, germera pas...

Un mélange de graines de fleurs contient :

- 50 graines de type A,
- 90 graines de type B,
- 60 graines de type C.

Toutes les graines n'ont pas le même pouvoir de germination. On conviendra qu'une graine germe correctement si celle-ci donne naissance à une plante qui fleurit.

On considère que la probabilité qu'une graine germe correctement est égale à :

- 0,5 pour une graine de type A,
- 0,8 pour une graine de type B,
- 0,6 pour une graine de type C.

On sème une graine prise au hasard dans le mélange.

Donner ou calculer :

- a. la probabilité que ce soit une graine de type A ;
- b. la probabilité que ce soit une graine de type A et que celle-ci germe correctement ;
- c. la probabilité que la graine germe correctement ;
- d. la probabilité que la graine soit une graine de type C qui ne germe pas correctement ;
- e. la probabilité que la graine ne germe pas correctement s'il s'agit d'une graine de type C ;
- f. la probabilité que la graine soit une graine de type C sachant qu'elle n'a pas germé correctement.

46 vu au BAC Le dépistage

Une maladie atteint 3 % d'une population donnée.

Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- chez les individus malades, 95 % des tests sont positifs (les autres sont négatifs) ;
- chez les individus non malades, 99 % des tests sont négatifs (les autres sont positifs).

1. Quelle est la probabilité d'avoir un test positif ? d'avoir un test négatif ?
 2. Quelle est la probabilité d'être malade alors que le test est négatif ?
- Quelle est la probabilité d'être non malade lorsque le test s'est révélé positif ?

47 Au diable les répondeurs !

Quand on téléphone chez Camille, on a 9 chances sur 10 de tomber sur son répondeur.

Elle l'utilise systématiquement lorsqu'elle s'absente, et une fois sur trois lorsqu'elle est chez elle.

1. Quelle est la probabilité de pouvoir parler avec Camille lorsqu'on l'appelle ?
2. Luc appelle Camille et il tombe sur le répondeur.

Quelle est la probabilité qu'elle soit pourtant chez elle ?

48 Où est donc le pépin du prof ?

Il y a 2 chances sur 3 pour qu'il ait laissé son parapluie dans l'une des trois salles du lycée où il s'est trouvé aujourd'hui : salle des professeurs, salle 01 ou salle 10, avec d'égales chances qu'il soit dans l'une ou l'autre.

1. Quelle est la probabilité que le parapluie ait été oublié en salle des professeurs ? en salle 01 ? en salle 10 ?

2. Ayant cherché, en vain, son parapluie en salle 01 et en salle 10, quelle est la probabilité que le professeur retrouve son pépin en salle des professeurs ?

49 Mentir pour réussir ?

Avant le baccalauréat, on estime que les trois quarts des candidats révisent, et qu'un candidat a neuf chances sur dix d'être admis s'il a révisé, et seulement deux chances sur dix s'il n'a pas révisé.

Après le baccalauréat, tous les reçus font les fiers en prétendant qu'ils n'avaient même pas révisé et tous les refusés crient à l'injustice et affirment avoir travaillé jour et nuit...

On rencontre au hasard un candidat après l'examen.

On note respectivement A, R et M les événements : « le candidat est admis », « le candidat a révisé » et « le candidat est un menteur ».

1. Quelle est la probabilité que le candidat rencontré soit admis et ait révisé ?
2. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un candidat refusé n'ayant pas révisé ?
3. Quelle est la probabilité que ce candidat soit admis ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir affaire à un menteur ?
5. Le candidat est admis. Quelle est la probabilité que ce soit un menteur ?
6. Quelle est la probabilité que ce soit un menteur sachant qu'il est refusé ?
7. Y a-t-il plus de chances d'avoir affaire à un menteur si le candidat est admis ou si le candidat est refusé ?
8. Peut-on dire que le fait d'être menteur augmente les chances d'être reçu ?

Indépendance de deux événements

50 Indépendance et incompatibilité

On lance un dé « honnête » (c'est-à-dire non pipé).

1. On considère les événements :
A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 3 » et
B : « obtenir un multiple de 3 ».

Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Proposer un événement C tel que A et C ne soient ni incompatibles, ni indépendants.

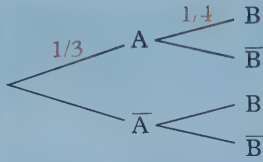
3. Prouver qu'il est inutile de chercher un événement D (non impossible), tel que A et D soient indépendants et incompatibles.

51 L'indépendance est dans l'arbre

Soit A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire.

EXERCICES

1. Peut-on compléter entièrement l'arbre pondéré ci-dessous ?



2. On pose $P_{\bar{A}}(B) = \alpha$. Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si α prend une valeur α_0 que l'on précisera. Compléter dans ce cas l'arbre pondéré après l'avoir recopié.
3. Imaginer une expérience aléatoire qui puisse être illustrée par cet arbre pondéré.

52 Des multiples en somme

On lance deux dés bien équilibrés et on considère, pour k entier fixé, l'événement M_k : « la somme des numéros obtenus est un multiple de k ».

- Étudier l'indépendance de M_2 et M_3 .
- Étudier l'indépendance de M_3 et M_4 .

53 Indépendance et nombre d'enfants

On suppose dans cet exercice qu'un enfant naît garçon ou fille avec des chances égales.

A. On choisit au hasard une famille ayant 2 enfants :

- Quelle est la probabilité que les 2 enfants soient des garçons sachant que :
 - l'aîné est un garçon ?
 - l'un au moins est un garçon ?
- On considère les événements :
 - M : « la famille a des enfants des deux sexes » et
 - F : « la famille a au plus une fille ».
 - Calculer la probabilité des événements : M , F et $M \cap F$.
 - M et F sont-ils indépendants ?

B. On choisit au hasard une famille ayant 3 enfants : Reprendre les questions de la partie **A**.

C. Expliquer pourquoi il est dangereux de dire de deux événements qu'ils sont ou ne sont pas indépendants.

Indépendance de deux v.a.r.

54 Tirages avec ou sans remise

Un sac contient six jetons indiscernables au toucher. Trois d'entre eux portent le numéro 1, les trois autres portent le numéro 2.

- On extrait successivement et sans remise deux jetons du sac. Soit X_1 et X_2 les v.a.r. indiquant respectivement les numéros portés par le premier et le second jeton.
 - Illustrer la situation par un arbre pondéré et en déduire les lois de X_1 et X_2 .

b. Étudier l'indépendance des v.a.r. X_1 et X_2 .

2. On extrait successivement et avec remise deux jetons du sac (le premier jeton est réintroduit dans le sac avant de tirer le second).

Soit Y_1 et Y_2 les v.a.r. indiquant respectivement les numéros portés par le premier et le second jeton.

- Illustrer la situation par un arbre pondéré et en déduire les lois de Y_1 et Y_2 .
- Étudier l'indépendance des v.a.r. Y_1 et Y_2 .

55 La loi de Max

On place au hasard un jeton sur l'une des cases de ce damier et on désigne par X et Y les variables aléatoires indiquant respectivement les numéros de la ligne et de la colonne où se situe le jeton.

	1	2	3
1			
2			●
3			

- Déterminer les lois de probabilité des v.a.r. X et Y .
- On définit la variable aléatoire M associant à chaque case la plus grande des valeurs prises par X et Y (on peut noter : $M = \text{Max}(X ; Y)$; lorsque $X = Y$, on prend pour M la valeur commune).
 - Déterminer la loi de probabilité de M .
 - Étudier si les v.a.r. X et M sont indépendantes.

Expériences indépendantes

56 vu au BAC Fléchettes sur cible

Une épreuve consiste à jeter une fléchette sur une cible partagée en trois cases notées 1 ; 2 ; 3. Deux concurrents A et B sont en présence. On admet qu'à chaque lancer, chacun atteint une case et une seule et que les lancers sont indépendants.

Pour le concurrent A , les probabilités d'atteindre les cases 1, 2, 3 sont respectivement : $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{12}$.

Pour le concurrent B , les trois éventualités sont équiprobables.

Les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

- Le concurrent A lance la fléchette trois fois. Les résultats des trois lancers sont indépendants.
 - Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne à chaque fois la case 3 ?
 - Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1, 2, 3 dans cet ordre ?
 - Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1, 2, 3 dans n'importe quel ordre ?
- On choisit un des deux concurrents. La probabilité de choisir A est égale à deux fois celle de choisir B .
 - Un seul lancer est effectué. Quelle est la probabilité que la case 3 soit atteinte ?
 - Un seul lancer a été effectué et la case 3 a été atteinte.

Quelle est la probabilité pour que ce soit le concurrent A qui ait lancé la fléchette ?

57 Triple contrôle de qualité

Un produit industriel est soumis à trois tests de qualité T_1 , T_2 et T_3 , totalement indépendants, destinés à contrôler si trois caractéristiques indépendantes du produit satisfont les normes de qualité N_1 , N_2 et N_3 , respectivement.

Mais le test T_1 n'est efficace qu'à 95 % (ce qui signifie que 5 % des produits ayant subi positivement T_1 ne sont pas conformes à N_1).

De la même façon, T_2 et T_3 sont efficaces à 97 % et 98 % respectivement.

Un produit est accepté s'il a subi positivement les trois tests T_1 , T_2 et T_3 .

1. On choisit au hasard un produit parmi les produits acceptés.

a. Calculer la probabilité que ce produit soit :

- conforme à N_1 mais pas N_2 ni N_3 ;
- conforme à N_2 et N_3 seulement ;
- conforme à une seule norme ;
- non conforme (c'est-à-dire non conforme à l'une au moins des trois normes).

b. Sachant qu'un produit est non conforme, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas conforme à N_1 ?

2. On considère un échantillon de 10 produits acceptés choisis au hasard (on admet que la population des produits acceptés est suffisamment vaste pour assimiler le choix de cet échantillon au tirage de dix produits avec remise).

Prouver qu'il y a plus de deux chances sur trois que cet échantillon contienne au moins un produit non conforme.

58 Qui veut gagner des euros ?

Dans une fête foraine, pour une mise de 10 €, un joueur est invité à lancer 10 fois de suite une pièce de monnaie.

Si le joueur obtient 10 faces, il reprend sa mise et empoche 10 000 €. Dans le cas contraire, il ne gagne rien et abandonne sa mise.

1. Quelle est l'espérance de gain du joueur ?

Ce jeu vous semble-t-il équitable ? Joueriez-vous ?

2. Devant la trop faible participation à ce jeu, l'organisateur décide de diviser par 5 la mise et la somme à gagner. Joueriez-vous ?

59 Pan !

Une perdrix se pose sur un fil téléphonique.

Un chasseur, en visant la perdrix, peut l'atteindre avec une probabilité de 0,5 et peut couper le fil avec une probabilité de 0,2 ; les deux peuvent se produire avec une probabilité de 0,1.

1. Un chasseur tire sur la perdrix.

Soit les événements A : « la perdrix est atteinte » et C : « le fil est coupé ».

Calculer la probabilité :

a. de voir la perdrix atteinte ou le fil coupé ;

b. de voir la perdrix indemne et le fil intact.

2. Trois chasseurs tirent ensemble sur la perdrix.

a. Calculer la probabilité :

- de pouvoir encore téléphoner ;
- de voir la perdrix s'envoler ;
- d'avoir le fil indemne et la perdrix en bonne santé.

b. Prouver l'indépendance des événements :

« le fil est coupé » et « la perdrix est touchée ».

D'après *Exercices ordinaires de probabilités*, Ellipses.

60

1. a. $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$.

b. $\overline{A \cap C} = \overline{A} \cup \overline{C}$.

2. a. Penser au schéma de Bernoulli : un chasseur coupe le fil ou ne le coupe pas. L'épreuve est ensuite répétée trois fois.

Utiliser $P(\overline{A})$ et $P(\overline{C})$.

b. « Le fil est coupé » est l'événement contraire de « pouvoir encore téléphoner ». De même avec « la perdrix est touchée ».

L'événement « le fil est coupé et la perdrix est touchée » est l'événement contraire de « pouvoir encore téléphoner » ou « voir la perdrix s'envoler ».

Penser à utiliser 1b.

60 CD Obtenir 4 2 1

1. On lance trois dés bien équilibrés.

Quelle est la probabilité d'obtenir 421 ?

2. On répète n fois ce lancer (n entier, $n \geq 2$).

a. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois 421 ?

b. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geq 0,99$?

61 CD Le problème du chevalier de Méré

Monsieur de Méré (homme de lettres, ami de Pascal) est très étonné : s'il parie qu'avec un dé cubique, il est capable d'obtenir au moins un six en quatre lancers, il lui semble qu'il gagne plus souvent qu'il ne perd. Mais s'il parie qu'avec deux dés cubiques, il est capable d'obtenir au moins un double six en vingt-quatre lancers, il lui semble au contraire qu'il perd plus souvent qu'il ne gagne.

Or la probabilité d'obtenir un six avec un dé est $\frac{1}{6}$,

celle d'obtenir un double six avec deux dés est $\frac{1}{36}$

et 4 fois $\frac{1}{6}$ est bien égal à 24 fois $\frac{1}{36}$!

Donner les résultats sous forme de fractions.

1. En quatre lancers d'un dé

Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun six ? En déduire la probabilité p d'obtenir au moins un six.

2. En vingt-quatre lancers de deux dés

Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun double-six ? En déduire la probabilité p' d'obtenir au moins un double-six.

3. Comparer p , p' et $\frac{1}{2}$

Cela conforte-t-il les impressions de M. de Méré ?

→ PROBLÈMES

62 vu au BAC Théâtre et photo

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle F l'événement « l'élève fait partie du club photo » et T l'événement « l'élève fait partie du club théâtre ».

Montrer que les événements F et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents.

Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a. On appelle T_1 l'événement « le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $p(T_1)$.

b. On appelle T_2 l'événement « l'élève pris en photo appartient au club théâtre ». Calculer $P_{T_1}(T_2)$ puis $P_{\bar{T}_1}(T_2)$. En déduire $p(T_2 \cap T_1)$ et $p(T_2 \cap \bar{T}_1)$. (On pourra utiliser un arbre.)

c. Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est 0,2.

3. Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et de la personne photographiée. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait pris en photo.

63 Prévisions météo

Dans un pays imaginaire, on admet qu'un jour donné soit il fait beau, soit il pleut !

S'il fait beau un jour, alors il fera beau le jour suivant avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.

S'il pleut un jour, alors il pleuvra encore le lendemain avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.

Aujourd'hui il pleut.

On s'intéresse à la probabilité qu'il fasse beau demain, dans 2 jours, dans 3 jours, ..., dans n jours.

1. Pour $n \geq 1$, on désigne par B_n l'événement « il fera beau dans n jours ».

a. Illustrer par un arbre pondéré l'évolution possible de la météo pour demain et après-demain. Donner $P(B_1)$ et calculer $P(B_2)$.

b. Donner, pour $n \geq 1$, les valeurs de $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{\bar{B}_n}(B_{n+1})$.

Exprimer $P(B_{n+1} \cap B_n)$ et $P(B_{n+1} \cap \bar{B}_n)$ en fonction de $P(B_n)$.

Prouver que, pour $n \geq 1$, $P(B_{n+1}) = \frac{1}{6} P(B_n) + \frac{1}{3}$.

2. On pose désormais, pour $n \geq 1$, $p_n = P(B_n)$ et $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. Prouver que (u_n) est une suite géométrique.

b. En déduire l'expression de u_n , puis de p_n en fonction de n , pour $n \geq 1$.

c. Étudier le sens de variation de la suite (p_n) et montrer que cette suite admet une limite que l'on calculera. Comment peut-on interpréter ces résultats ?

64 vu au BAC Comment tu dis ?

Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale (portant sur une seule oreille) ou bilatérale (portant sur deux oreilles).

On admet que, dans une population donnée, les deux événements :

D : « être atteint de surdité à l'oreille droite » et

G : « être atteint de surdité à l'oreille gauche »

sont indépendants et tous deux de probabilité 0,05, ce que l'on note $p(G) = p(D) = 0,05$.

On considère les événements suivants :

B : « être atteint de surdité bilatérale » ;

U : « être atteint de surdité unilatérale » ;

S : « être atteint de surdité (sur une oreille au moins) ».

On donnera les valeurs numériques des probabilités demandées sous forme décimale approchée à 10^{-4} près.

1. a. Calculer $p(D \cap G)$ et en déduire $p(D \cap \bar{G})$, $p(\bar{D} \cap G)$ et $p(\bar{D} \cap \bar{G})$.

b. Vérifier l'indépendance des événements D et \bar{G} , \bar{D} et G, et \bar{D} et \bar{G} .

c. Calculer $p(B)$, $p(S)$ et $p(U)$.

2. On suppose qu'un sujet pris au hasard dans la population considérée est atteint de surdité.

Quelle est la probabilité :

a. qu'il soit atteint de surdité à droite ?

b. qu'il soit atteint de surdité bilatérale ?

3. Calculer $p(D \cap U)$, puis $p(D \cap \bar{U})$.

En déduire $P_{\bar{U}}(D)$, ainsi que $P_{\bar{U}}(\bar{D})$.

4. Calculer la probabilité que, sur 10 personnes de cette population prises au hasard, au moins l'une d'entre elles soit atteinte de surdité bilatérale.

65 vu au BAC CD D'un sac à l'autre

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On imagine n sacs de jetons S_1, S_2, \dots, S_n . Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc. On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

• **1^{re} étape** : on tire au hasard un jeton de S_1 ;

• **2^e étape** : on place ce jeton dans S_2 , et on tire, au hasard, un jeton de S_2 ;

• **3^e étape** : après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2 , on tire, au hasard, un jeton de S_3 ; et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k l'événement « le jeton tiré de S_k est blanc ».

1. a. Déterminer $P(B_1)$, et les probabilités conditionnelles : $P_{B_1}(B_2)$ et $P_{\bar{B}_1}(B_2)$. En déduire $P(B_2)$.

b. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, la probabilité de B_k est notée p_k .

Justifier la relation de récurrence suivante :

$$p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}.$$

2. Étude d'une suite (u_k) .

On note (u_k) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{k+1} = \frac{1}{3} u_k + \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{pour } k \geq 1.$$

a. On considère la suite (v_k) définie par, pour tout élément k de \mathbb{N}^* , $v_k = u_k - 0,5$.

Démontrer que la suite (v_k) est géométrique.

b. En déduire l'expression de u_k en fonction de k . Montrer que la suite (u_k) est convergente et préciser sa limite.

c. Dans cette question, on suppose que $n = 10$.

3. Déterminer pour quelles valeurs de k on a :

$$0,499 \leq p_k \leq 0,5.$$

66 Le jeu de quinquenove

Le jeu de quinquenove est un jeu de dés du XVIII^e siècle, dont le principe est étudié par Pierre Rémond de Montmort dans son *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* de 1708.

Ce jeu nécessite la participation d'au moins deux joueurs, dont l'un est appelé le banquier.

On suppose ici qu'il n'y a que deux joueurs : Franck, le banquier, et Karine.

Le banquier lance deux dés :

- s'il obtient un doublet (2 chiffres identiques) ou un total de 3 ou de 11, il gagne et la partie s'arrête ;
- s'il obtient un total de 5 ou de 9, c'est l'autre joueur qui gagne et la partie s'arrête.

Dans les autres cas, il n'y a pas de gagnant et le banquier lance à nouveau les dés.

1. Calculer la probabilité qu'à l'issue du premier lancer :

- a. Franck soit gagnant ;
- b. Karine soit gagnante ;
- c. il n'y ait aucun gagnant.

2. On suppose qu'à l'issue du premier lancer, le banquier n'a pas gagné : quelle est la probabilité que Karine ait gagné ?

3. Franck décide que la partie se joue en 10 lancers au plus. Calculer la probabilité :

- a. que Karine gagne à l'issue du second lancer ;
- b. que Karine gagne en deux lancers au plus ;
- c. que 10 lancers soient effectués ;
- d. que Karine gagne en 10 lancers ;
- e. que Karine gagne cette partie ;
- f. que personne ne gagne cette partie.

67 La chaussure de Marc

Partie A.

Dans une soirée où l'on s'amuse, n personnes ($n \geq 2$) ont déposé leur chaussure droite dans une grande boîte. Marc, dont c'est la fête aujourd'hui, est invité à tirer au hasard, n fois de suite, une chaussure de la boîte, chaque chaussure prélevée étant remplacée dans la boîte avant le tirage suivant. On s'intéresse à la probabilité p_n que Marc n'ait jamais obtenu sa chaussure (de marque) lors des n tirages effectués.

1. On suppose dans cette question que $n = 6$.

Comment pourrait-on simuler l'expérience aléatoire décrite à l'aide d'un dé cubique équilibré ?

Calculer p_6 et en donner une valeur approchée à 10^{-4} près.

2. Désormais, n est un entier quelconque ($n \geq 2$) et la soirée peut accueillir autant de personnes que l'on veut !

Exprimer p_n en fonction de n puis recopier et compléter le tableau suivant (valeurs approchées à 10^{-4} près).

n	6	10	100	500	1 000	5 000	10 000	50 000	100 000
p_n									

Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (p_n) ?

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[2 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln \frac{x-1}{x}.$$

1. Calculer f' puis f'' . Étudier les variations de f' , calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'$ et en déduire le signe de f' .

2. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $\frac{\ln(1-u)}{u}$ avec $u = \frac{1}{x}$ et calculer $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1-u)}{u}$.

En déduire la limite de f en $+\infty$ et dresser le tableau de variation de f .

3. Établir un lien simple entre p_n et $f(n)$ pour $n \geq 2$. En déduire comment varie la suite (p_n) et quelle est sa limite en $+\infty$.

CD Activité 1 → Qui a raison ?

OBJECTIF

Comprendre que la modélisation est une phase essentielle !

ω_i	0	1	2	3	4	5
p_i						

Un jeu consiste à lancer deux dés bien équilibrés et à calculer l'écart (positif) δ entre les numéros obtenus. On gagne si l'on obtient « $\delta \geq 3$ ». Aziz, Brice et Chloé cherchent à évaluer leurs chances de gagner.

1. Modèle A

Les dés sont bien équilibrés. Aziz écrit que les six écarts possibles – 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5 – ont les mêmes chances d'être obtenus et les tient pour équiprobables ; il décide donc de choisir pour modèle la loi équirépartie sur cet univers Ω_A .

- Recopier et compléter le tableau ci-contre donnant sa loi de probabilité.
- Calculer dans ce modèle la probabilité d'obtenir « $\delta \geq 3$ ».

2. Modèle B

Brice conteste l'hypothèse d'équiprobabilité prise par Aziz sur les six écarts et se dit persuadé que l'on obtient plus facilement 0 que 5. D'ailleurs il inscrit dans un tableau tous les résultats du lancer qui conduisent à chaque valeur possible de δ . Ces 21 cas composent l'univers Ω_B et sont pour lui équiprobables.

- Quelle loi de probabilité sur Ω_B obtiendra-t-il alors ?
- Quelle est dans ce modèle la probabilité d'avoir « $\delta \geq 3$ » ?

3. Modèle C

Chloé n'est toujours pas convaincue et elle affirme que 1 apparaît plus souvent que 0... Certes, les deux dés utilisés sont parfaitement identiques (indiscernables), mais elle préfère respecter l'identité de chaque dé en imaginant qu'il y en a un rouge et un bleu, et que chaque lancer conduit à un résultat $(r; b)$. Aussi adopte-t-elle la loi équirépartie sur l'ensemble des 36 couples du tableau ci-contre qui composent l'univers Ω_C .

- Préciser le modèle de Chloé.
- Quelle est ici la probabilité de l'événement « $\delta \geq 3$ » ?

δ	Résultats amenant δ
0	1,1 ; 2,2 ; 3,3 ; 4,4 ; 5,5 ; 6,6
1	2,1 ; 3,2 ; 4,3 ; 5,4 ; 6,5
2	3,1 ; 4,2 ; 5,3 ; 6,4
3	4,1 ; 5,2 ; 6,3
4	5,1 ; 6,2
5	6,1

$r \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

4. Simuler pour savoir ?

On simule avec un tableur un échantillon des écarts associés à 2 500 lancers de deux dés bien équilibrés. On fait afficher la distribution des fréquences de ces six écarts. Ces données statistiques permettent-elles de pencher en faveur d'un modèle ?

Activité 2 ➔ Codes d'accès

L'entrée d'un immeuble est protégée par un code d'accès se composant de quatre symboles choisis parmi les deux lettres A, B et les dix chiffres de 0 à 9 (par exemple : 1A2B, 122A, 7707, AA66, ABBA).

A	3	7
B	4	8
1	5	9
2	6	0

1. Xavier se présente à l'entrée de l'immeuble et il ignore le code.

Quelle est la probabilité qu'en composant un code au hasard :

- il ait tapé le bon code ?
- il ait tapé un code se composant des chiffres 1, 7, 8 et 9 ?
- il ait tapé un code comportant au moins un chiffre ?

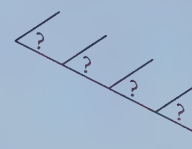
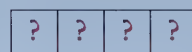
2. Yoan se présente à l'entrée et se souvient que le code commence par une lettre et contient trois chiffres distincts. Il compose au hasard un tel code. Calculer la probabilité :

- qu'il ait tapé le bon code ;
- qu'il ait tapé un code commençant par A et se terminant par 9 ;
- qu'il ait tapé les quatre bons symboles mais dans un ordre erroné.

OBJECTIF

Mesurer l'importance du dénombrement dans un modèle équiréparti. Calculer des probabilités par « cas possibles » et « cas favorables ».

Des supports visuels bien utiles



Activité 3 ➔ Des trios et des podiums

Lors de la fête du lycée, dix élèves volontaires participent à une course de 2 000 mètres. À l'issue de cette épreuve, les trois premiers formeront un podium (en respectant l'ordre d'arrivée) et constitueront le groupe des sélectionnés (trio) pouvant participer à une rencontre inter-académique.

On se propose de déterminer à la fois le nombre p de **podiums** possibles et le nombre t de **trios** pouvant être sélectionnés.

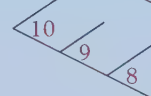
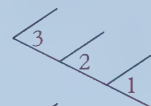
- A priori*, existe-t-il plus de podiums ou plus de trios ?
 - Déterminer le nombre p .
 - Déterminer le nombre de podiums pouvant être constitués à partir d'un trio quelconque $\{x ; y ; z\}$ fixé.
 - En déduire une relation entre les entiers p et t , puis calculer t .
- Avec quinze participants au lieu de dix, quel aurait été le nombre de trios possibles ?
 - Toujours avec quinze participants, mais avec quatre sélectionnés au lieu de trois, combien de groupes différents auraient pu être retenus ?

OBJECTIF

Voir les limites des outils graphiques de dénombrement. Apprendre à dénombrer « sans ordre ».

Deux peignes pour dénombrer

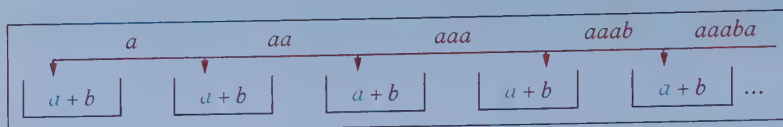
Quels nombres les arbres simplifiés (ou peignes) suivants permettent-ils d'obtenir ?



CD Activité 4 ➔ La formule du binôme

OBJECTIF

Organiser le calcul de $(a + b)^n$.



$$\begin{aligned}
 a + b &= a + b \\
 (a + b)^2 &= aa + ab + ba + bb \\
 (a + b)^3 &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\
 (a + b)^4 &= \dots + \dots
 \end{aligned}$$

A ■ Observation

On a écrit les développements de $(a + b)$, de $(a + b)^2$ et de $(a + b)^3$ en respectant l'ordre des lettres a et b et en ne cherchant pas à simplifier les écritures.

Recopier et compléter le schéma ci-contre en développant $(a + b)^4$. Simplifier les développements et les porter dans le tableau suivant.

$(a + b)^1$	1	a^1	+	1	b^1														
$(a + b)^2$	1	a^2	+	2	a^1b^1	+	1	b^2											
$(a + b)^3$																			
$(a + b)^4$																			

B ■ Bilan

On a pu observer, pour $1 \leq n \leq 4$, que le développement de $(a + b)^n$ s'écrivait :

- comme somme de tous les produits possibles de n facteurs égaux soit à a , soit à b ;
- puis après simplification, comme somme de termes du type $N_k a^k b^{n-k}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ et N_k coefficient entier de $a^k b^{n-k}$.

C ■ Généralisation

On admet que les observations faites dans la partie B s'appliquent encore lorsque $n \geq 5$.

1. $(a + b)^5$ est la somme de tous les produits de la forme $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ avec $x_i \in \{a, b\}$.

Combien de produits différents de cette forme existe-t-il ? (*)

Parmi eux, combien s'écriront après simplification :

$$a^5 ? \quad b^5 ? \quad a^4 b ? \quad a b^4 ? \quad a^3 b^2 ? \quad a^2 b^3 ?$$

Tenter de dégager une démarche de dénombrement utilisant les « p parmi n ». En déduire le développement de $(a + b)^5$.

2. $(a + b)^n$ est la somme de tous les produits de la forme $x_1 x_2 \dots x_n$ avec $x_i \in \{a, b\}$.

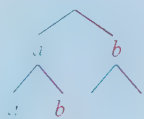
Combien de produits différents de cette forme existe-t-il ? (*)

Parmi eux, combien s'écriront après simplification $a^k b^{n-k}$?

Que peut-on dire du coefficient N_k ?

En déduire la formule donnant le développement de $(a + b)^n$: (c'est la formule du **binôme de Newton**).

(*) On se gardera bien de tous les écrire ! Par contre, un arbre peut aider à les dénombrer.



Activité 5 ➔ Augmente-t-on ses chances en répétant ?

A ■ Une question

Avec un dé bien équilibré, obtient-on plus facilement un multiple de 3 en un lancer ou deux multiples de 3 (exactement deux) en quatre lancers ?

1. Conjecture

Peut-on, *a priori*, apporter une réponse à cette question ?

2. En un lancer

On désigne par e l'épreuve aléatoire consistant à lancer une fois le dé.

On s'intéresse à la sortie d'un multiple de 3 et c'est pourquoi on décide d'appeler « succès » et de noter S l'issue de e suivante : « le dé amène un multiple de 3 ».

S'intéresser à S, c'est aussi s'intéresser à l'issue contraire, appelée « échec » et notée E : « le dé n'amène pas un multiple de 3 ».

On retient pour univers des possibles l'ensemble $\Omega = \{S ; E\}$, bien adapté à la situation. Donner la loi de probabilité sur Ω qui modélise le lancer du dé.

3. En quatre lancers

L'autre situation à étudier est celle consistant à répéter quatre fois l'épreuve e précédente, dans les mêmes conditions. Les quatre épreuves répétées sont donc indépendantes (voir le cours, chapitre 12, p. 353) et constituent une expérience aléatoire \mathcal{E} .

a. Comment peut s'écrire un résultat de \mathcal{E} ?

En proposer un et calculer la probabilité de l'obtenir.

b. On désigne par M_2 l'événement « obtenir deux multiples de 3 » lors de \mathcal{E} .

Proposer un résultat qui réalise M_2 et calculer la probabilité de l'obtenir.

En proposer deux autres et calculer de même la probabilité associée à chacun.

Que remarque-t-on ? Quelle explication peut-on donner ?

c. Combien de résultats différents réalisant M_2 existe-t-il ? Justifier.

d. En déduire la probabilité de l'événement M_2 .

4. Conclusion

Quelle réponse peut-on maintenant apporter à la question posée ?

B ■ Prolongement

Dans la situation des quatre lancers, on désigne plus généralement par M_k l'événement « obtenir k multiples de 3 ».

1. Quelles valeurs peut-on donner au nombre k , si l'on ne veut pas que M_k soit l'événement impossible ?

2. Reprendre et adapter les questions **b**, **c** et **d** ci-dessus, et calculer la probabilité des événements M_k pour les différentes valeurs de k . Quelle vérification peut-on faire ?

3. On considère la variable aléatoire X associant à chaque résultat de \mathcal{E} le nombre de multiples de 3 apparus. Déterminer la loi de probabilité de X.

4. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$. Vérifier que ces caractéristiques de X peuvent s'écrire simplement comme produits à partir des nombres n , p et $1 - p$ (avec $n = 4$ et $p = P(S)$).

OBJECTIF

Se familiariser avec la répétition d'une épreuve comportant deux issues.

ω_i	S	E
$p(\{\omega_i\})$?	?

- L'épreuve e a exactement deux issues : le succès S, de probabilité p et l'échec E, de probabilité $1 - p$. On dit que cette épreuve est une **épreuve de Bernoulli de paramètre p** .
- L'expérience \mathcal{E} consiste à répéter quatre fois, dans les mêmes conditions, l'épreuve de Bernoulli précédente. On dit que cette expérience est un **schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et p** .

1. Loi équirépartie

Vocabulaire

Des expressions telles que « tirages au hasard », « tirages de boules indiscernables au toucher », « lancers de pièces équilibrées, de dés parfaits », etc. sont autant d'indices conduisant à une telle loi sur un univers des possibles bien choisi.

A ■ Le contexte

Lorsqu'une expérience aléatoire se prête au choix d'un univers Ω dont les issues (en nombre fini) ont les mêmes chances de se produire (indications de l'énoncé, conviction, étude statistique, ...), on peut décider de modéliser la situation par une **loi équirépartie**.

B ■ Le modèle

• Modéliser une expérience par une loi équirépartie sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \dots ; \omega_n\}$, c'est choisir la loi de probabilité P associant à chaque résultat

ω_i	ω_1	ω_2	...	ω_n
$P(\{\omega_i\}) = p_i$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$...	$\frac{1}{n}$

ω_i la même probabilité $\frac{1}{n}$ (voir tableau).

• Si A est un événement réalisé pour k issues de cet univers, alors :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

Remarque

Dans ce modèle, le calcul de la probabilité d'un événement repose sur deux dénombrements. Il est donc important de bien savoir manipuler outils et méthodes de dénombrement (voir la suite des cours, p. 386).

Exemples :

1. La naissance d'un enfant est en général modélisée par la loi équirépartie sur $\Omega = \{F ; G\}$.
Cependant, un démographe peut souhaiter disposer pour ses prévisions d'un modèle plus fin et décider de prendre sur $\Omega = \{F ; G\}$ la loi $P = (0,48 ; 0,52)$.
2. Le lancer de deux dés **équilibrés** se modélise par une loi équirépartie sur $\Omega = \{(1, 1) ; (1, 2) ; (1, 3) ; \dots ; (2, 1) ; \dots\}$.
3. L'écriture **au hasard** d'un mot de trois lettres distinctes (ayant un sens ou non) peut se modéliser par une loi équirépartie sur l'ensemble $\Omega = \{(A, B, C) ; (A, B, D) ; \dots\}$ de tous les triplets de lettres distinctes prises parmi les 26 lettres de notre alphabet.
4. Le rangement **aléatoire** des quatre tomes d'une encyclopédie sur une étagère peut se modéliser par une loi équirépartie sur l'ensemble Ω des dispositions possibles que l'on peut coder $(T_1, T_2, T_3, T_4) ; \dots ; (T_2, T_4, T_1, T_3) ; \dots$.
5. Le tirage simultané de cinq cartes d'un jeu de 32 cartes **bien battu** peut se modéliser par une loi équirépartie sur l'ensemble Ω des « mains » de cinq cartes ; par exemple : {9-cœur, V-carreau, As-cœur, R-trèfle, V-pique}.

CD C ■ La validité du modèle

Pour savoir si la modélisation d'une expérience ε par une loi équirépartie est pertinente, on peut répéter n fois l'expérience et chercher à comparer la distribution (f_1, f_2, \dots, f_k) des fréquences des issues de ε avec la distribution théorique $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$ du modèle.

En mesurant leur écart par le nombre d tel que $d^2 = \sum_{i=1}^k \left(f_i - \frac{1}{k}\right)^2$, il reste à apprécier cette distance sur une échelle de référence, et décider si l'on adopte ou non le modèle (voir TP 4).

→ ILLUSTRATIONS

■ Le lancer de deux dés équilibrés

• **Modélisation** : On peut supposer les dés discernables (par exemple, un rouge et un bleu) et illustrer la situation par le tableau ci-contre. Chaque case du tableau représente une issue ($r ; b$) de l'expérience. Les dés étant bien équilibrés, on peut supposer que les 36 couples du tableau ont les mêmes chances d'apparaître.

Cela se traduit par le choix d'une loi équirépartie sur l'univers Ω des 36 couples (ce modèle associant à chaque issue la probabilité $\frac{1}{36}$).

$r \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

• **Un calcul** : Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 10 ?

Si on note A cet événement, il suffit de dénombrer les issues favorables à la réalisation de A.

Ce sont (4 ; 6), (5 ; 5) et (6 ; 4) et dans ce modèle d'équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

■ BAC et les autres

• **Modélisation** : Par convention, l'expression « écrire au hasard un mot de trois lettres distinctes » conduit à considérer que les issues de l'expérience (les mots de trois lettres distinctes) sont équiprobables et qu'une loi équirépartie sur leur ensemble Ω est un bon modèle.

Pour connaître le nombre d'éléments de Ω , on peut utiliser un arbre de dénombrement simplifié (voir ci-contre).

Cet arbre évoque le principe multiplicatif et donne un nombre total d'issues égal à : $26 \times 25 \times 24 = 15\,600$. C'est le nombre de « cas possibles ».

• **Un calcul** : Quelle est la probabilité d'obtenir un mot contenant la lettre Z ? Parmi les 15 600 mots possibles, combien sont favorables à la réalisation de cet événement B (trois lettres distinctes dont un Z) ?

• 1^{re} méthode : $3 \times 25 \times 24 = 1\,800$ (voir ci-contre) d'où :

$$P(B) = \frac{1\,800}{15\,600} = \frac{3}{26}.$$

• 2^e méthode : \bar{B} est l'événement « le mot ne contient pas Z » et :

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{25 \times 24 \times 23}{15\,600} = 1 - \frac{23}{26} = \frac{3}{26}.$$

■ La place des tomes

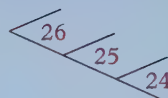
• **Modélisation** : Cette fois encore, l'énoncé conduit à modéliser la situation par une loi équirépartie sur l'ensemble de tous les « rangements » possibles des tomes (à l'endroit !) sur une étagère. Chaque rangement peut se coder par un quadruplet (par exemple : (T_2, T_3, T_4, T_1)). Et il en existe : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

• **Un calcul** : Quelle est la probabilité que le tome 3 soit à sa place ? Notons C cet événement ; plaçons T_3 et oublions-le (1 possibilité), plaçons les trois autres ($3 \times 2 \times 1$ possibilités) d'où :

$$P(C) = \frac{1 \times 3 \times 2 \times 1}{24} = \frac{1}{4}.$$

Méthode

Combien de mots de trois lettres distinctes ?



Méthode

?	?	?
---	---	---

Combien de mots avec un Z ?

a. Plaçons le Z :

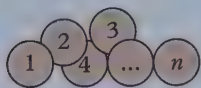
3 possibilités.

b. Complétons les deux cases restantes avec deux lettres distinctes autres que Z :

25×24 possibilités.

2. Dénombrement

U contient n boules numérotées de 1 à n .



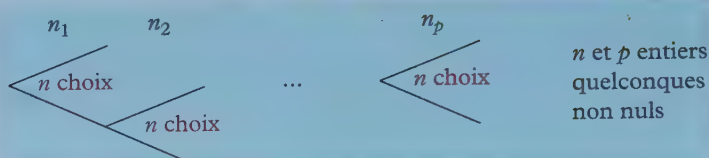
A ■ Reconnaître une situation de référence

De nombreuses expériences aléatoires peuvent s'assimiler à des tirages de boules dans une urne et se modélisent par une loi équirépartie.

Ce sont des situations de référence.

• Tirages successifs avec remise

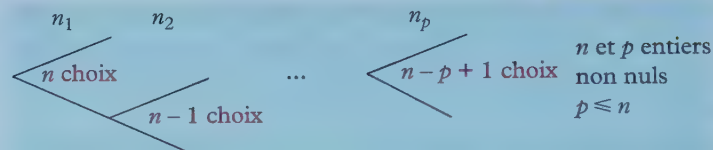
On tire une boule de l'urne U, on note son numéro, puis on la remet dans U. On effectue de la sorte p tirages (dits **successifs avec remise**).



Le nombre de listes de longueur p formées de numéros de U est n^p (1).

• Tirages successifs sans remise

On tire une boule de l'urne U, on note son numéro et on ne la remet pas dans l'urne. On effectue de la sorte p tirages avec $p \leq n$, (dits **successifs sans remise**).



Le nombre de listes formées de p numéros distincts pris dans U est égal à $n(n-1) \dots (n-p+1)$ (2).

Cas particulier : Lorsque $p = n$, **toutes** les boules sont tirées une à une.

Le nombre de listes formées des n numéros de U est égal à $n(n-1) \dots 2 \times 1$ (3).

Notation factorielle →

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, le nombre $n(n-1) \dots 2 \times 1$ est noté $n!$ (il se lit « factorielle n »).

Par convention : $1! = 1$ et $0! = 1$.

• Tirages simultanés

On tire simultanément p boules de l'urne U ($p \leq n$). On obtient ainsi un ensemble de p numéros pris parmi n , que l'on appelle **combinaison**.

Théorème 1 →

Le nombre de combinaisons de p objets parmi n ($p \leq n$) est noté $\binom{n}{p}$ et est égal à $\frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

On le lit « p parmi n ».

→ DÉMONSTRATIONS

■ Théorème 1

Reprenons l'urne U et ses n boules numérotées. Le nombre de parties de U comprenant p boules est noté $\binom{n}{p}$; c'est ce nombre que nous cherchons !

Les dénombrements de listes ne posant pas de problème, revenons-y !

Pour fabriquer une liste de p boules de U , toutes distinctes, on peut imaginer deux dispositifs :

- soit on choisit p boules, une à une, dans un certain ordre (voir la formule (2)). Par simple lecture sur un arbre, on dénombre alors $n(n-1) \dots (n-p+1)$ listes ;
- soit on choisit simultanément p boules de U que l'on ordonne ensuite :
 - il existe $\binom{n}{p}$ parties comprenant p boules de U ;
 - chacune de ces $\binom{n}{p}$ parties conduit à $p!$ listes d'après la formule (3).

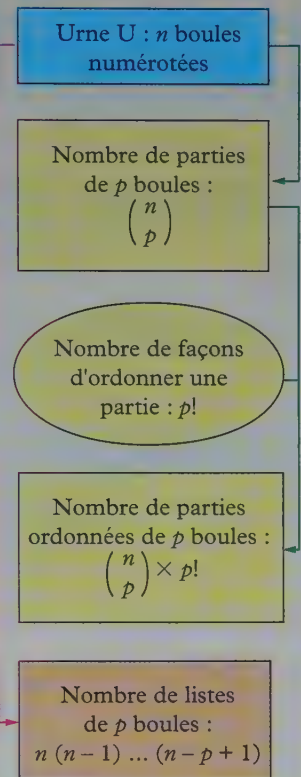
Il existe donc $\binom{n}{p} \times p!$ parties que l'on a ordonnées.

Comme les deux dispositifs conduisent à fabriquer le même nombre de listes (toute liste est une partie ordonnée et toute partie ordonnée est une liste), on en déduit :

$$\binom{n}{p} \times p! = n(n-1) \dots (n-p+1).$$

D'où :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!} \frac{(n-p) \dots 2 \times 1}{(n-p) \dots 2 \times 1} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$



→ APPLICATIONS

Exercice 1 On tire au hasard simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité que la main de 5 cartes obtenue contienne exactement 2 cœurs ?

Solution

- Une issue est une main de 5 cartes. Le tirage s'effectuant au hasard, toutes ces issues sont équiprobables et il en existe $\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!27!} = 201\,376$.
- L'événement A : « la main contient 2 cœurs » se réalise en choisissant 2 cœurs parmi 8 d'une part et 3 cartes parmi les 24 « non cœur » d'autre part. Il existe $\binom{8}{2} \times \binom{24}{3} = 28 \times 2\,024 = 56\,672$ mains favorables à A .
- Dans notre modèle d'équiprobabilité, on a donc $p(A) = \frac{56\,672}{201\,376} = \frac{253}{899} \approx 0,28$.

voir aussi exercices n° 4 et 7

Exercice 2 Dans une course de chevaux réunissant 17 partants, combien de tiercés faut-il jouer pour être sûr de gagner (dans le désordre au moins) ?

Solution

Le nombre de combinaisons de 3 chevaux est « 3 parmi 17 », soit : $\binom{17}{3} = \frac{17 \times 16 \times 15}{3 \times 2} = 680$.

Il suffit de les jouer toutes !

voir aussi exercices n° 4 et 7

B ■ Propriétés des $\binom{n}{p}$



- pour $p \leq n$, est un nombre porteur de sens :
- c'est le nombre de combinaisons de p éléments parmi n ;
- c'est le nombre de choix possibles de p objets parmi n ;
- se lit « p parmi n » ; il se note encore parfois C_n^p .

Propriété 1 →

Pour tout entier naturel n non nul : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$.

Propriété 2 →

Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Propriété 3 →

Pour tous entiers naturels n et p tels que $1 \leq p \leq n$:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

Exemples : • $\binom{100}{99} = \binom{100}{1} = 100$; • $\binom{53}{25} - \binom{53}{28} = 0$.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

• Le triangle de Pascal **CD**

Construction du triangle :

$\binom{n}{p}$ se trouve à l'intersection de la ligne n et de la colonne p .

La propriété 1 permet de placer tous les « 1 ».

La propriété 3 permet de compléter les autres cases.

La propriété 2 permet de vérifier la symétrie des coefficients obtenus.

• La formule du binôme de Newton (voir l'activité 4)

Si a et b sont des nombres réels ou complexes, on a les développements ci-contre.

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

On remarque sur ces exemples que les coefficients intervenant dans le développement de $(a+b)^n$ sont les nombres $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ..., $\binom{n}{n}$ figurant sur la ligne n du triangle de Pascal.

Théorème 2 →

Pour a et b réels ou complexes et n entier naturel non nul :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

→ DÉMONSTRATIONS

■ Propriété 1

Soit n un entier naturel non nul.

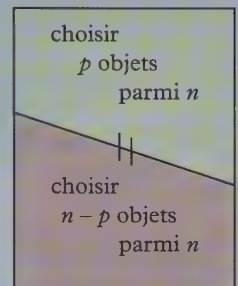
- $\binom{n}{0}$ se lit « 0 parmi n » ; or il n'y a qu'une possibilité de choisir « 0 objet parmi n » (c'est celle qui consiste à ne prendre aucun de ces objets !) ; ce nombre est donc égal à 1.
- $\binom{n}{1}$ se lit « 1 parmi n » ; or il y a n possibilités de choisir « 1 objet parmi n » (autant que d'objets !) ; ce nombre est donc égal à n .
- $\binom{n}{n}$ se lit « n parmi n » ; or il n'y a qu'une possibilité de choisir « n objets parmi n » (c'est celle qui consiste à prendre tous ces objets !), ce nombre est donc égal à 1.

■ Propriété 2

Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

- $\binom{n}{p}$ est le nombre de choix possibles de p objets parmi n .
- $\binom{n}{n-p}$ est le nombre de choix possibles de $n-p$ objets parmi n .

Choisir de prendre p objets parmi n , c'est choisir de délaisser $n-p$ objets parmi n , d'où l'égalité de ces deux nombres.



■ Propriété 3

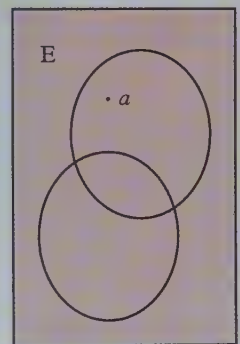
Soit E un ensemble à n éléments dont l'un d'eux se nomme a .

Si p est un entier non nul tel que $p \leq n-1$, les parties de E à p éléments sont de deux types :

- il y a celles qui contiennent l'élément a (et donc aussi $p-1$ éléments autres que a , pris parmi $n-1$) : il en existe $\binom{n-1}{p-1}$;
- il y a celles qui ne contiennent pas l'élément a (et qui contiennent donc p éléments pris parmi $n-1$) : il en existe $\binom{n-1}{p}$.

Le nombre total de ces parties étant $\binom{n}{p}$ on en déduit l'égalité :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$



■ Théorème 2

Elle peut s'établir par récurrence.

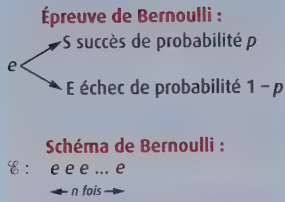
Application : Calculer $(2+i)^5$.

$$(2+i)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 2^k i^{5-k} = \binom{5}{0} 2^0 i^5 + \binom{5}{1} 2^1 i^4 + \binom{5}{2} 2^2 i^3 + \binom{5}{3} 2^3 i^2 + \binom{5}{4} 2^4 i + \binom{5}{5} 2^5 i^0$$

$$(2+i)^5 = i + 5 \times 2 \times 1 + 10 \times 4 \times (-i) + 10 \times 8 \times (-1) + 5 \times 16 \times i + 32 = -38 + 41i.$$

voir aussi exercice n° 11

3. Loi de Bernoulli et loi binomiale



A ■ Contexte et modélisation

On appelle **épreuve de Bernoulli de paramètre p** , toute épreuve aléatoire e admettant exactement deux issues :

- l'une appelée « succès », notée S, dont la probabilité d'apparition est p ;
- l'autre appelée « échec », notée E, dont la probabilité est $1-p$.

On appelle **schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p** (ou encore **schéma de Bernoulli de paramètres n et p**), toute expérience aléatoire \mathcal{E} consistant à répéter n fois, dans les mêmes conditions, une même épreuve de Bernoulli e de paramètre p .

Théorème 3 et définition 1 →

Épreuve et loi de Bernoulli

- Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p :
 - la variable aléatoire X , prenant la valeur 1 si S se produit et la valeur 0 sinon, a la loi de probabilité ci-contre ;

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

- son espérance est $E(X) = p$ et sa variance est $V(X) = p(1-p)$.

- On dit que X est une variable de Bernoulli de paramètre p (ou encore que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p). On note : X suit $\mathcal{B}(p)$.

Théorème 4 et définition 2 →

Schéma de Bernoulli ; loi binomiale

- Dans un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p :
 - un résultat est une liste de n issues, exemple : (S, S, E, ..., S) ;
 - la variable aléatoire Y associant à chaque issue le nombre de succès a pour loi de probabilité :

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \dots, n\} ;$$

- son espérance est $E(Y) = np$ et sa variance est $V(Y) = np(1-p)$.

- On dit que Y suit une loi binomiale de paramètres n et p . On note : Y suit $\mathcal{B}(n, p)$.

B ■ Reconnaissance d'une loi

- L'épreuve aléatoire : « on lance un dé cubique équilibré et on s'intéresse à la sortie d'un multiple de 3 » est une épreuve de Bernoulli, de paramètre la probabilité du succès S : « obtenir un multiple de 3 » soit $P(\{S\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

La variable aléatoire X , qui prend la valeur 1 si le résultat est S et la valeur 0 sinon, suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

- L'expérience aléatoire : « on répète quatre fois l'épreuve de Bernoulli précédente » est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{3}$.

La variable aléatoire Y : « nombre de succès (multiples de 3) obtenus lors des quatre lancers » suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{3}$.

Pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, on a $P(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$.

→ DÉMONSTRATIONS

■ Théorème 3

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p admet deux issues : S et E, avec $P(\{S\}) = p$ et donc $P(\{E\}) = 1 - p$. La loi de probabilité de la variable X est définie par :

$$P(X = 1) = P(\{S\}) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = P(\{E\}) = 1 - p.$$

Cette loi peut être résumée par le tableau ci-contre. On peut alors calculer :

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p \quad \text{et}$$

$$V(X) = (0 - p)^2(1 - p) + (1 - p)^2 p = p(1 - p)[p + (1 - p)] = p(1 - p).$$

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

■ Théorème 4

Lorsqu'on répète n fois l'épreuve de Bernoulli ci-dessus, les résultats possibles sont les listes de longueur n formées des issues des épreuves (par exemple : (S, S, E, S, ..., E), (E, S, E, E, ..., S)).

Les n épreuves répétées étant indépendantes (l'issue d'une épreuve n'a aucune influence sur les issues des épreuves qui suivent), la loi de probabilité P sur l'ensemble de ces listes est la « loi produit » telle que l'on ait, par exemple :

$$P(\{(S, S, E, S, \dots, E)\}) = p \times p \times (1 - p) \times p \times \dots \times (1 - p) = p^{\text{nombre de S}} \times (1 - p)^{\text{nombre de E}}.$$

Si Y est la variable aléatoire qui « compte » les succès obtenus lors des n épreuves, l'événement $Y = k$, avec k fixé entre 0 et n , est l'ensemble des listes de longueur n où S apparaît k fois exactement.

Or il existe autant de listes comportant k fois S que de choix possibles des k places destinées aux S parmi les n places de la liste ; le nombre de

listes comportant k fois S est donc $\binom{n}{k}$. Mais la probabilité d'obtenir une

telle liste est $p^k(1 - p)^{n-k}$ (c'est ici le nombre de S qui importe et non leurs places !).

On en déduit : $P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k}$, pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

On dit que Y suit une loi binomiale de paramètres n et p .

De plus, on admet : $E(Y) = np$ et $V(Y) = np(1 - p)$.

$(Y = k)$ est l'ensemble des résultats de la forme :

(S, E, ..., S, E, E, ..., S)

← k fois S et $n - k$ fois E →

→ APPLICATION

Exercice 3 Pile ou Face

On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. Les variables aléatoires X , « nombre de Pile obtenus » et Y , « rang du premier Pile obtenu » suivent-elles une loi binomiale ?

Solution

- Il s'agit d'un schéma de Bernoulli (avec $n = 5$ et $p = \frac{1}{2}$, le succès S d'un lancer étant « obtenir Pile »).
- La variable aléatoire X (nombre de succès obtenus) suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{2}$.

D'où $P(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = \binom{5}{k} \times \frac{1}{32}$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Ce n'est pas le cas de Y qui ne compte pas les succès et dont la loi de probabilité est :

$$P(Y = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq 5 \quad \text{et} \quad P(Y = 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

(en convenant que $Y = 6$ si on n'obtient que des Face).

Il suffit pour cela de recourir à un arbre.

voir aussi exercices n° 21 et 22

1. Loi équirépartie et dénombrement

OBJECTIF : Se familiariser avec différentes situations de dénombrement.

Dans un centre de vacances, le groupe des ados se compose de six garçons et de six filles. Max et Léa, les moniteurs responsables du groupe, commencent à organiser les activités et à répartir les tâches pour la semaine.

Les résultats numériques seront donnés sous forme de nombre entier ou de fraction irréductible.

1. Max propose pour le lendemain une séance d'initiation au tir à l'arc pour six jeunes, dont il choisit les noms au hasard.

Les autres iront au mur d'escalade avec Léa.

- a. Combien de groupes « tir à l'arc » différents Max peut-il obtenir ?
- b. Calculer la probabilité qu'il ait dans son groupe autant de garçons que de filles.
- c. Soit k un entier compris entre 0 et 6.

On note p_k la probabilité que Max compte dans son groupe exactement k filles.

Prouver que
$$p_k = \frac{\binom{6}{k}^2}{\binom{12}{6}}.$$

En déduire une simplification de la somme
$$\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k}^2.$$

2. Léa affiche une liste comportant six noms d'ados – tous distincts – que son ordinateur a délivrée aléatoirement. Il s'agit de ceux qui, l'un après l'autre, tiendront le stand d'échange *Livres et jeux* pendant les six jours à venir.

- a. Combien de listes différentes Léa peut-elle obtenir avec son ordinateur ?
- b. Quelle est la probabilité que trois garçons exactement précèdent la première fille ?
- c. Quelle est la probabilité que filles et garçons alternent sur la liste ?

3. Quant à Max, il lance six fois son dé à douze faces (dé dodécaédrique) bien équilibré pour désigner les jeunes qui animeront tour à tour les six soirées (un même ado peut être sollicité plusieurs fois si « dé » le veut !).

Chaque ado est repéré par un numéro de 1 à 12 attribué dans l'ordre alphabétique des noms.

- a. De combien de façons Max peut-il répartir les six animations ?
- b. Quelle est la probabilité que six filles différentes aient été désignées ?
- c. Quelle est la probabilité qu'aucun garçon ne soit impliqué ?
- d. Quelle est la probabilité que les trois premières soirées soient animées par des filles et les trois dernières par des garçons ?
- e. Quelle est la probabilité que les six soirées soient animées par trois filles et trois garçons ?
- f. Si la loi binomiale a été déjà étudiée en classe.

Justifier que « l'attribution au hasard d'un rôle d'animation à un ado » peut être considéré comme une épreuve de Bernoulli dont le succès est « l'ado est une fille ».

En déduire que la variable aléatoire indiquant le nombre de soirées animées par une fille suit une loi binomiale que l'on précisera.

Quels résultats des questions précédentes peut-on retrouver en utilisant cette loi ?

CD 2. Avec ou sans remise ?

OBJECTIF : Comprendre que les tirages sans remise ne sont pas les plus simples.

A. ➔ Une urne U contient deux boules rouges et trois boules noires

1. On tire au hasard trois boules simultanément

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de boules rouges obtenues.

- a. Montrer que cette expérience peut être modélisée par la loi équirépartie.
- b. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. On tire au hasard trois boules successivement et avec remise

Soit Y la variable aléatoire indiquant le nombre de boules rouges obtenues.

- a. Justifier que cette expérience est un schéma de Bernoulli.
- b. Quelle est la loi de probabilité de Y ?

3. Comparaison des caractéristiques de X et de Y

- a. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart type de chaque variable.
- b. Comparer et interpréter les résultats obtenus.

B. ➔ Une urne V contient $2n$ boules rouges et $3n$ boules noires ($n \geq 2$)

1. On tire au hasard trois boules simultanément

Soit X_n la variable aléatoire indiquant le nombre de boules rouges obtenues.

- a. Montrer que l'on a
$$P(X_n = 2) = \frac{18n(2n-1)}{5(5n-1)(5n-2)}.$$
- b. Calculer de même les autres probabilités intervenant dans la loi de X_n .

2. On tire au hasard trois boules successivement et avec remise

Soit Y_n la variable aléatoire indiquant le nombre de boules rouges obtenues. Justifier que Y_n suit la même loi que la variable Y définie dans la question **A2**.

3. Comparaison des deux modèles

- a. Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$				
$P(X_{10} = k)$				
$P(X_{100} = k)$				
$P(X_{200} = k)$				
$P(X_{300} = k)$				
$P(Y = k)$				

- b. Comparer, pour chaque valeur de k , $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k)$ et $P(Y = k)$.
- c. Quel intérêt y a-t-il à adopter le modèle avec remise lorsque n est grand ?

Application aux sondages

Pour estimer la proportion p des individus présentant un certain caractère Q sur une population donnée, on calcule la fréquence f de Q sur un échantillon de taille n dont les éléments sont choisis au hasard.

Lorsque le prélèvement s'effectue avec remise (une même personne peut être choisie plusieurs fois), un théorème de probabilité affirme que p a de grandes chances de se trouver dans

la fourchette de centre f et de rayon $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Lorsque le prélèvement s'effectue sans remise (échantillon exhaustif), on ne remet pas ce principe en question si l'effectif de la population est suffisamment grand par rapport à celui de l'échantillon prélevé.

CD 3. Hasard et QCM

OBJECTIF : Comprendre qu'un schéma de Bernoulli n'appelle pas toujours une loi binomiale.

Un questionnaire à choix multiples est composé de dix questions numérotées de 1 à 10. Pour chacune d'elles, il est proposé quatre réponses possibles dont une seule est correcte. Un candidat répond entièrement au hasard à ce QCM en cochant pour chaque question l'une des quatre réponses données.

1. Justifier que répondre au hasard à une question de ce QCM est une épreuve de Bernoulli ; en préciser le succès et la probabilité que celui-ci se produise. Que peut-on alors dire de l'expérience consistant à répondre au hasard aux dix questions du QCM ?

Donner trois exemples de résultats possibles (éléments de l'univers Ω) et calculer les probabilités associées.

Combien cette expérience admet-elle de résultats ?

Peut-on la modéliser par une loi équirépartie ?

2. On désigne par X la variable aléatoire indiquant le numéro de la première question où le candidat a répondu de façon exacte (on convient que X prend la valeur 11 si toutes les réponses sont fausses).

a. Préciser quelles valeurs peut prendre X ($X(\Omega)$ est l'ensemble de ces valeurs).

b. Calculer $P(X = k)$ pour chaque valeur k de $X(\Omega)$.

Quelle expression générale de $P(X = k)$ peut-on proposer ?

c. X suit-elle une loi binomiale ?

Doit-on s'en étonner ?

3. On décide d'attribuer au candidat un point par réponse exacte.

Soit Y la variable aléatoire associant aux réponses la note sur dix qui en résulte.

a. Justifier que Y suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.

b. Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne la note maximale ?

c. Quelle est la probabilité que le candidat obtienne la moyenne (au moins) ?

d. Quelle note le candidat a-t-il le plus de chances d'obtenir ?

e. Quelle note le candidat peut-il espérer obtenir (c'est-à-dire, quelle serait sa note moyenne s'il remplissait au hasard un grand nombre de QCM) ?

4. On suppose que n candidats sont invités à répondre à ce QCM et que tous le font uniquement guidés par le hasard.

a. Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un élève obtienne la note 10 ?

b. Combien doit-il y avoir de candidats pour que cela se produise avec une probabilité supérieure à 0,99 ?

5. Pour pénaliser davantage les candidats qui répondent au hasard, on décide de modifier le système de notation : on accorde toujours un point par réponse juste mais on soustrait un demi-point dans le cas contraire.

Prouver que la variable aléatoire Z qui indique la note (éventuellement négative) obtenue par un candidat ayant répondu au hasard s'exprime par $Z = 1,5Y - 5$.

En déduire la probabilité qu'avec ces nouvelles règles, un candidat obtienne au moins la moyenne en répondant entièrement au hasard.

CD 4. Adéquation à une loi équirépartie

OBJECTIF : Étudier la pertinence du choix d'un modèle équiréparti.

Le problème étudié

Un dé a été lancé 200 fois avec les résultats suivants (les nombres 28, 33, 34... indiquent les nombres de sorties de chaque face).



On se demande si, d'après ces résultats, il est possible de dire que ce dé est « honnête » ou « pipé ».

L'idée

On nomme (H) l'hypothèse : le dé est « honnête ».

Sous cette hypothèse, on peut modéliser le lancer du dé par la loi équirépartie sur l'univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Pour savoir si le dé est honnête ou non, on compare alors les résultats observés aux résultats théoriques sous l'hypothèse (H) d'équirépartition.

Si l'écart est trop important, on aura envie de rejeter l'hypothèse que le dé est « honnête » et de le considérer comme « pipé ».

A. Étude du cas d'un dé « honnête »

1. Les résultats théoriques

Quelles sont les probabilités $p_1, p_2, p_3, \dots, p_6$ d'apparition de chaque face sous l'hypothèse d'équirépartition (H) ?

2. Les résultats observés

On a simulé sur un tableur dix expériences de 200 lancers d'un dé cubique bien équilibré et obtenu les distributions de fréquences suivantes.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Face	1	2	3	4	5	6
2	expérience 1	0,250	0,145	0,125	0,165	0,155	0,160
3	expérience 2	0,155	0,170	0,165	0,190	0,195	0,125
4	expérience 3	0,190	0,180	0,170	0,135	0,170	0,155
5	expérience 4	0,245	0,125	0,225	0,145	0,105	0,155
6	expérience 5	0,200	0,185	0,155	0,135	0,180	0,145
7	expérience 6	0,195	0,200	0,150	0,150	0,135	0,170
8	expérience 7	0,130	0,175	0,170	0,155	0,210	0,160
9	expérience 8	0,150	0,170	0,160	0,140	0,245	0,135
10	expérience 9	0,160	0,125	0,230	0,155	0,140	0,190
11	expérience 10	0,135	0,145	0,210	0,185	0,175	0,150

Les résultats observés diffèrent des résultats théoriques. À quoi cela est-il dû ?

3. Un calcul de distance

Pour mesurer cette différence entre les résultats observés et théoriques, on a besoin d'introduire

une notion de distance. Considérons la distance d donnée par
$$d^2 = 1\,000 \sum_{i=1}^6 (f_i - p_i)^2.$$

Remarque : On a choisi de multiplier par 1 000 uniquement pour faciliter la lecture des résultats. Pour les dix expériences précédentes, on obtient les résultats du tableau ci-dessous (les valeurs de d^2 sont arrondies au centième).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Face	1	2	3	4	5	6	d^2
2	expérience 1	0,250	0,145	0,125	0,165	0,155	0,160	9,33
3	expérience 2	0,155	0,170	0,165	0,190	0,195	0,125	3,23
4	expérience 3	0,190	0,180	0,170	0,135	0,170	0,155	1,88
5	expérience 4	0,245	0,125	0,225	0,145	0,105	0,155	15,88
6	expérience 5	0,200	0,185	0,155	0,135	0,180	0,145	3,23
7	expérience 6	0,195	0,200	0,150	0,150	0,135	0,170	3,48
8	expérience 7	0,130	0,175	0,170	0,155	0,210	0,160	3,48
9	expérience 8	0,150	0,170	0,160	0,140	0,245	0,135	8,18
10	expérience 9	0,160	0,125	0,230	0,155	0,140	0,190	7,18
11	expérience 10	0,135	0,145	0,210	0,185	0,175	0,150	4,03

Les différences dans les valeurs de d^2 sont dues à la fluctuation d'échantillonnage. Quelle est la plus grande valeur de d^2 observée ici ? la plus petite ? Recommencer éventuellement pour d'autres expériences à l'aide du CD-Rom.

B. ➔ Test : le dé est-il pipé ?

- Calculer pour le dé que l'on veut tester la valeur de d^2 mesurant l'écart entre la distribution des fréquences observées et la distribution de la loi équirépartie.
- Il faut maintenant se prononcer sur cette valeur : est-elle suffisamment grande pour penser qu'elle n'est pas due à la seule fluctuation d'échantillonnage mais qu'elle est plutôt significative d'un dé pipé ?

On a besoin pour cela d'avoir une « échelle de distances ». En renouvelant 1 000 fois la simulation effectuée précédemment pour un dé non pipé, on obtient 1 000 valeurs de d^2 pour un dé non pipé, ces distances étant dues uniquement à la fluctuation d'échantillonnage.

On a représenté par une boîte à moustaches cette série de 1 000 valeurs de d^2 .

a. Le 95^e centile, marqué en rouge sur le graphique, est de 8,88.

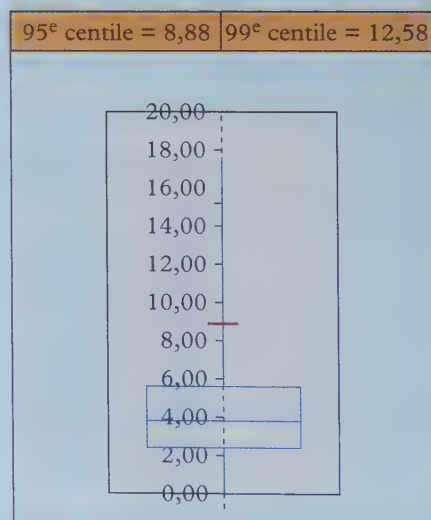
Que signifie cette valeur ?

b. D'après les résultats obtenus en 1, peut-on penser que le dé est pipé ou non ?

Est-ce une certitude ?

On dit qu'au risque d'erreur 5 %, on rejette l'hypothèse que le dé est « honnête ».

c. Au risque d'erreur 1 %, peut-on rejeter l'hypothèse que le dé est « honnête » ?



1 Dans une salle de jeu, un appareil comporte quatre roues, chacune portant à sa périphérie huit images de fruits différents : ananas, bananes, cerises, dattes, fraises, groseilles, poires, raisins.

Une mise de 1 € déclenche le fonctionnement de l'appareil pour une partie.

Chacune des quatre roues affiche au hasard dans une fenêtre un de ces huit fruits.

Exemple d'affichage :



On admettra l'équiprobabilité de tous les affichages.

1. Calculer la probabilité des événements E : « on obtient quatre fruits identiques » ; F : « on obtient trois fruits identiques et trois seulement » ; G : « on obtient quatre fruits distincts ».

2. Certains résultats permettent de gagner de l'argent : 50 € pour quatre fruits identiques, 5 € pour trois fruits identiques, 1 € pour quatre fruits distincts et 0 € pour les autres résultats.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque résultat associe le gain du joueur (mise non comprise).

a. Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir un gain nul » ?

b. Déterminer et interpréter l'espérance mathématique de X, notée E[X].

3. Soit Y la variable aléatoire associant à chaque résultat le nombre d'images de poires obtenues. Justifier que Y suit une loi binomiale et préciser le nombre moyen de poires apparaissant dans une partie.

Solution

1. Un résultat est une liste de quatre fruits (distincts ou non), chacun étant choisi parmi huit. Il en existe : $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4 = 4\,096$. Tous ces résultats étant supposés équiprobables, on adopte la loi équirépartie sur leur ensemble Ω .

• Il existe huit résultats réalisant l'événement E (autant que de fruits) et donc :

$$P(E) = \frac{8}{4\,096} = \frac{1}{512} \approx 0,002.$$

• Il existe 8×4 façons de choisir un fruit et de le placer dans une fenêtre, et 7 façons de choisir un second fruit pour occuper les trois fenêtres restantes.

$$\text{D'où } P(F) = \frac{8 \times 4 \times 7}{4\,096} = \frac{224}{4\,096} = \frac{7}{128} \approx 0,055.$$

• Il existe $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1\,680$ listes de quatre fruits distincts.

$$\text{D'où } P(G) = \frac{1\,680}{4\,096} = \frac{105}{256} \approx 0,410.$$

2. a. La probabilité d'obtenir un gain nul est donné par :

$$P(X=0) = 1 - P(X=1) - P(X=5) - P(X=50)$$

$$= 1 - \frac{(210 + 28 + 1)}{512}$$

$$\text{et donc } P(X=0) = \frac{273}{512} \approx 0,533.$$

La loi de probabilité de X est présentée dans le tableau ci-contre.

x_i	0	1	5	50
$512p_i$	273	210	28	1

b. On a alors :

$$E(X) = 0 \times \frac{273}{512} + 1 \times \frac{210}{512} + 5 \times \frac{28}{512} + 50 \times \frac{1}{512} = \frac{25}{32} \approx 0,781.$$

Commentaires

Dire que l'espérance de X est d'environ 0,78 € signifie qu'un joueur effectuant un grand nombre de parties gagnerait en moyenne 0,78 € par partie (ce nombre théorique est appelé espérance de gain du joueur).

Le gain moyen étant inférieur à la mise de 1 €, le jeu est défavorable au joueur (perte moyenne de 0,22 € par partie).

3. On peut considérer que l'apparition d'une image dans une fenêtre est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « poire » avec une probabilité de $\frac{1}{8}$, et l'échec « pas poire » avec une probabilité de $\frac{7}{8}$.

L'affichage des images se faisant exactement dans les mêmes conditions et de façon indépendante sur les quatre roues, on peut assimiler cette expérience à la répétition, quatre fois, de l'épreuve de Bernoulli définie ci-dessus.

Y étant le compteur du nombre de succès au cours de ces quatre épreuves, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{8}$, et sa loi de probabilité est donnée pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ par la formule :

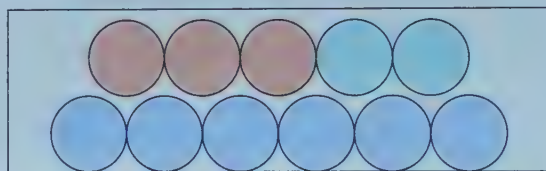
$$P(Y = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{8}\right)^k \left(\frac{7}{8}\right)^{4-k}.$$

Le nombre moyen de poires apparaissant lors d'une partie est l'espérance de Y, soit :

$$E(Y) = n \times p = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

voir aussi exercices n° 21 et 24

2 Une urne contient six boules bleues, trois boules rouges et deux boules vertes, indiscernables au toucher.



1. On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

a. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- E_1 : « les boules sont toutes de couleurs différentes » ;
- E_2 : « les boules sont toutes de la même couleur ».

b. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules, associe le nombre de boules bleues tirées. Établir la loi de probabilité de X.

2. On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de tirer la boule suivante.

On effectue ainsi n tirages successifs.

Quelle est la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité de ne tirer que des boules bleues est au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Solution

1. Le prélèvement des trois boules s'effectuant au hasard, cette situation se modélise par une loi équirépartie sur l'univers Ω de tous les tirages possibles. Un tel tirage n'est autre qu'une combinaison de trois éléments de l'urne pris parmi 11.

Il en existe donc $\binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} = 165$.

a. • Les tirages qui réalisent l'événement E_1 sont les combinaisons de trois boules comportant une bleue, une rouge et une verte. Le prélèvement d'une boule de chaque couleur peut s'effectuer de $6 \times 3 \times 2 = 36$ façons différentes. On en déduit :

$$P(E_1) = \frac{36}{165} = \frac{12}{55} \approx 0,22.$$

- Obtenir trois boules de la même couleur, c'est obtenir soit trois bleues, soit trois rouges (mais pas trois vertes !).

Les événements B : « obtenir trois bleues » et R : « obtenir trois rouges » étant incompatibles, on a :

$$P(E_2) = P(B) + P(R).$$

$$\text{Or } P(B) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{20}{165} \quad \text{et} \quad P(R) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{1}{165}.$$

$$\text{D'où } P(E_2) = \frac{21}{165} = \frac{7}{55} \approx 0,13.$$

- b.** • Les valeurs que peut prendre X sur l'ensemble Ω de tous les tirages possibles sont : 0, 1, 2 et 3.
- Les combinaisons de trois boules qui réalisent l'événement $X=0$ sont celles qui ne comportent aucune bleue. Il s'agit donc de prélever trois boules parmi les cinq « pas bleues », ce qui peut se faire de $\binom{5}{3} = 10$ façons.

On en déduit, dans notre modèle de loi équirépartie :

$$P(X=0) = \frac{10}{165} = \frac{2}{33} \approx 0,06.$$

- L'événement $X=1$ est réalisé par le tirage d'une boule bleue parmi six et de deux boules « pas bleues » parmi cinq. Le nombre de résultats favorables réalisant cet événement est donc :

$$\binom{6}{1} \times \binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60.$$

$$\text{D'où } P(X=1) = \frac{60}{165} = \frac{4}{11} \approx 0,36.$$

- En procédant de même, on obtient :

$$P(X=2) = \frac{\binom{6}{2}\binom{5}{1}}{165} = \frac{5}{11} \approx 0,45 \quad \text{et} \quad P(X=3) = \frac{\binom{6}{3}}{165} = \frac{4}{33} \approx 0,12.$$

- On peut résumer la loi de X par le tableau ci-contre.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{2}{33}$	$\frac{12}{33}$	$\frac{15}{33}$	$\frac{4}{33}$

2. L'expérience consiste maintenant à répéter n fois, dans les mêmes conditions, le tirage d'une boule de l'urne.

Les n tirages étant indépendants, la probabilité de n'obtenir que des boules bleues (respectivement que des boules rouges) est $\left(\frac{6}{11}\right)^n$ (respectivement $\left(\frac{3}{11}\right)^n$).

Il reste donc à rechercher le plus petit entier n tel que l'on ait :

$$\left(\frac{6}{11}\right)^n \geq 1000 \left(\frac{3}{11}\right)^n \quad \text{soit} \quad \left(\frac{6}{11}\right)^n \times \left(\frac{11}{3}\right)^n \geq 1000$$

soit encore $2^n \geq 1000$.

On peut alors utiliser la fonction \ln :

$$2^n \geq 1000 \quad \text{équivalent à} \quad n \ln 2 \geq 1000$$

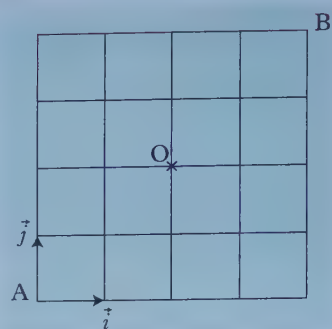
c'est-à-dire $n \geq \frac{\ln 1000}{\ln 2}$ car $\ln 2 > 0$.

Il en résulte $n \geq 10$.

voir aussi exercice n° 23

EXERCICES RÉSOLUS

3 On dispose d'un quadrillage « 4×4 » rapporté au repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ comme l'indique le schéma ci-contre. B est le point de coordonnées $(4; 4)$. On désigne par O le centre du carré.



1. On appelle chemin minimal de longueur 4, tout trajet AM associé à une suite de quatre vecteurs \vec{i} ou \vec{j} .

a. Reproduire le schéma et représenter les chemins associés aux suites : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{j}, \vec{j}, \vec{j}, \vec{i})$.

b. Combien existe-t-il de tels chemins ? Quels sont les points M possibles ?

c. On choisit au hasard un chemin minimal de longueur 4. Quelle est la probabilité $P(O)$ que ce chemin conduise en O ?

2. On appelle chemin minimal de A à B, tout trajet associé à une suite de huit vecteurs \vec{i} ou \vec{j} dont la somme est \vec{AB} .

a. Représenter sur le schéma le chemin associé à la suite $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{j}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{i}, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer le nombre de chemins minimaux de A à B possibles.

b. On choisit au hasard un chemin minimal de A à B. Quelle est la probabilité $P'(O)$ que ce chemin passe par O ?

Solution

1. a. Les chemins associés aux deux suites sont tracés sur le schéma.

b. Il existe autant de chemins minimaux de longueur 4 que de suites formées de 4 symboles \vec{i} ou \vec{j} . Le nombre de ces suites étant $2^4 = 16$, il existe donc 16 chemins minimaux AM de longueur 4. Ces chemins conduisent aux points de coordonnées $(0; 4)$, $(1; 3)$, $(2; 2)$, $(3; 1)$, et $(4; 0)$.

c. Le choix au hasard d'un de ces chemins se modélise par la loi équirépartie sur l'univers des 16 chemins. Un tel chemin passe par O si et seulement si la suite qui le code comprend exactement deux \vec{i} et deux \vec{j} . Or il en existe

$\binom{4}{2} = 6$ (choix de 2 emplacements parmi 4 pour y placer les \vec{i} par exemple).

D'où la probabilité cherchée : $P(O) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

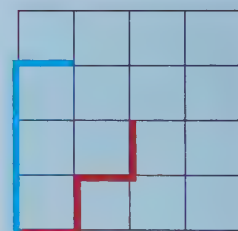
2. a. Le chemin associé à la suite $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{j}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{i}, \vec{i}, \vec{j})$ est celui représenté ci-contre. Comme $\vec{AB} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$, un chemin minimal de A à B correspond à une suite (unique) de huit vecteurs \vec{i} et \vec{j} comportant quatre \vec{i} et quatre \vec{j} . Il en existe donc $\binom{8}{4} = 70$ (nombre de façons de réserver 4 places parmi 8 pour y placer les \vec{i} , par exemple).

b. Le choix au hasard d'un de ces chemins se modélise par la loi équirépartie sur l'univers des 70 chemins.

Un tel chemin passe par O si et seulement si il correspond à une suite dont les 4 premiers symboles d'une part et les 4 derniers symboles d'autre part comprennent exactement deux \vec{i} (les autres symboles étant des \vec{j}).

Leur nombre est donc $\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = 36$. D'où la probabilité cherchée :

$$P'(O) = \frac{36}{70} = \frac{18}{35}$$



— $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{j}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{i}, \vec{i}, \vec{j})$
— $(\vec{j}, \vec{j}, \vec{j}, \vec{i})$



— $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{j}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{i}, \vec{i}, \vec{j})$

voir aussi exercice n° 48

→ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Modèles de dénombrement

1 Répartition

Dans une classe de neige réunissant 32 élèves, 13 ont déjà pratiqué le ski de descente, 9 le ski de fond et 14 n'ont aucune expérience du ski.

- Combien d'élèves ont déjà pratiqué le ski ?
- Combien d'élèves ont la double expérience du ski de descente et du ski de fond ?

2 À table

La cantine d'un lycée imaginaire propose au choix : 3 entrées, 4 plats chauds, 2 fromages et 3 desserts.

- Combien de menus différents comportant un plat de chaque type sont ainsi proposés aux élèves ?
- Même question si un élève peut ne pas prendre un ou plusieurs types de plat, mais doit obligatoirement manger quelque chose.

3 Anagrammes

- Combien existe-t-il de mots de 6 lettres, ayant un sens ou non, formés avec les 6 lettres du prénom hélène (par exemple : heélnè) ?
- Même question avec les 6 lettres du prénom HELENE (attention, les trois E ne sont plus accentués !).

4 À vos marques

12 élèves de terminale sont au départ d'une course de 200 m ; les 3 premiers seront sélectionnés pour une finale académique.

On suppose qu'il n'y a pas d'ex aequo.

- Combien peut-on imaginer d'arrivées différentes possibles des 3 premiers ?
- Combien de groupes différents peuvent-être retenus pour participer à la finale ?

5 Grilles

Pour construire une grille de mots croisés de 8 lignes et 6 colonnes, on noircit 6 cases.

- Combien de grilles différentes peut-on obtenir ?
- Même question si les cases noircies ne peuvent appartenir à une même ligne ou une même colonne.

6 Codes

Combien existe-t-il de codes comprenant 3 lettres distinctes suivies de 4 chiffres distincts ou non ?

7 Délégués

- Une classe de 32 élèves choisit un délégué, un suppléant et un responsable du cahier de textes. Combien y a-t-il de choix possibles ?
- Une classe de 32 élèves choisit 3 délégués. Combien y a-t-il de choix possibles ?

Techniques de calcul

8 Avec ou sans calculatrice

Calculer à la main puis vérifier avec une calculatrice :

- $\frac{10! \times 5!}{8! \times 4!}$;
 - $\frac{(9!)^2 \times 10!}{12! \times (7!)^2}$.
- $\binom{100}{99} + \binom{100}{100}$;
 - $\binom{16}{13} - \binom{15}{13} - \binom{15}{12}$.

9 Simplifier ...

... pour n entier naturel non nul :

- $(n+1)! - (n+1)n!$;
- $\frac{(2n)!}{(2n-2)!}$;
- $\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$;
- $\frac{(n+1)! \times (n-1)!}{(n!)^2}$.

10 Résoudre dans \mathbb{N}

- $n! = 120$;
- $(n-2)! = 5\,040$;
- $(n+1)! = 132(n-1)!$;
- $\binom{n}{2} = 28$.

11 Avec la formule du binôme

1. Développer :

- $(x+1)^6$;
- $(2a-3)^4$;
- $(1+2i)^5$.

2. Donner le coefficient de :

- x^9 dans $(x+1)^{11}$;
- x^9 dans $(x+1)^{13}$;
- x^3y^7 dans $(x+y)^{10}$;
- x^3y^7 dans $(x+y)^9$.

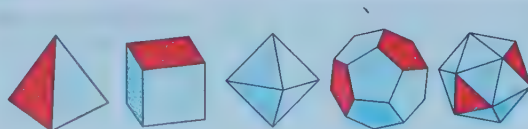
3. Calculer (habilement) :

- $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$;
- $\binom{6}{0} - \binom{6}{1} + \binom{6}{2} - \binom{6}{3} + \binom{6}{4} - \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$.

4. Calculer $A_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Que peut-on conjecturer pour A_n ?

Loi équirépartie

12 Une face au hasard



On lance un dé ayant la forme d'un polyèdre convexe régulier. Ce dé, parfaitement équilibré, possède au moins une face rouge.

EXERCICES

Combien de faces et combien de faces rouges possède ce dé sachant que la probabilité qu'il se stabilise sur une face rouge est 0,15 ?

On rappelle qu'il existe seulement cinq polyèdres convexes réguliers (solides de Platon) comportant respectivement 4 faces, 6 faces, 8 faces, 12 faces et 20 faces.

13 Deux délégués au hasard

Dans la classe de Quentin et de Claire, on a placé dans une casquette les 30 papiers portant les noms des 30 élèves de la classe.

Le professeur tire au hasard deux de ces papiers pour désigner les délégués provisoires, sous le regard attentif de Claire et Quentin qui ne souhaitent ni l'un ni l'autre avoir cette responsabilité.

1. Préciser le modèle de probabilité retenu (univers et loi) et calculer la probabilité des événements :

A : « Quentin a été choisi » ; B : « Claire a été choisie ».

2. Écrire les événements suivants à l'aide de A, B et de leurs contraires \bar{A} et \bar{B} , puis calculer leurs probabilités :

- a. « Quentin et Claire ont été choisis » ;
- b. « ni Quentin, ni Claire ne sont délégués » ;
- c. « Quentin a été choisi, mais pas Claire » ;
- d. « Claire sera déléguée mais pas Quentin ».

Quelle vérification peut-on faire ?

3. Calculer de deux façons différentes la probabilité de l'événement $A \cup B$.

14 Trois lettres au hasard

Un sac contient 26 jetons portant les lettres de l'alphabet.

1. Zoé extrait successivement 3 jetons du sac, qu'elle dispose côte à côte dans l'ordre des tirages pour former un mot.

a. Combien de mots différents peut-elle obtenir ?

b. Quelle est la probabilité qu'elle obtienne :

- son prénom ZOE ?
- les 3 lettres de son prénom ?
- un mot commençant par une consonne ?
- un mot comprenant exactement une consonne ?

2. On extrait successivement 3 jetons du sac, mais en remplaçant à chaque fois le jeton obtenu avant de tirer le suivant.

Reprendre les questions du 1.

15 Quatre boules au hasard

Une urne contient 5 boules noires, 4 boules blanches et 1 boule verte. On tire simultanément et au hasard 4 boules de cette urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir :

- a. aucune boule noire ?
- b. autant de boules vertes que de boules blanches ?
- c. au moins une boule noire ?
- d. exactement 2 boules noires et 1 boule verte ?
- e. 4 boules d'une même couleur ?

16 Cinq cartes au hasard

On tire au hasard, simultanément, 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. On obtient ainsi une *main* de 5 cartes.

- 1. Combien de mains différentes peut-on obtenir ?
- 2. Calculer la probabilité que la main comporte :
 - a. exactement 1 as ;
 - b. au moins 1 as ;
 - c. exactement 3 as ;
 - d. exactement 3 cœurs et 1 pique ;
 - e. exactement 3 cœurs et 1 as ;
 - f. un carré (4 cartes de même hauteur).

17 Six places au hasard

Les 6 élèves du club de théâtre d'un lycée (3 filles et 3 garçons) sont invités à se placer côte à côte sur une seule rangée pour faire une photo.

1. De combien de façons les 6 acteurs peuvent-ils se placer ?

2. On suppose que les élèves se positionnent totalement au hasard. Calculer la probabilité :

- a. que Kévin et Laure se retrouvent côte à côte ;
- b. que garçons et filles alternent ;
- c. que les 3 filles se retrouvent ensemble à gauche des 3 garçons.

18 Allô docteur !

Dans une ville, il y a trois médecins.

Un même après-midi, trois touristes malades relèvent au hasard dans l'annuaire le numéro de téléphone de l'un des médecins et l'appellent.

1. Proposer un univers permettant de modéliser cette expérience aléatoire par une loi équirépartie.

2. a. Calculer la probabilité que les trois touristes aient appelé le même médecin.

b. Calculer la probabilité que les trois touristes aient appelé trois médecins différents.

c. En déduire la probabilité que deux (exactement) des trois touristes aient appelé le même médecin.

19 À la loterie

Dans une loterie de 100 billets, deux d'entre eux sont gagnants.

1. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si l'on achète 12 billets ?

2. Combien faut-il acheter de billets pour que la probabilité de gagner au moins un lot ne soit pas inférieure à 0,8 ?

20 vu au BAC Adéquation à une loi équirépartie

Les guichets d'une agence bancaire d'une petite ville sont ouverts au public 5 jours par semaine, du mardi au samedi. Le tableau ci-dessous donne la répartition journalière des 250 retraits d'argent liquide effectués au guichet une certaine semaine.

Jour	Ma	Me	J	V	S
Rang i	1	2	3	4	5
Nombre de retraits	37	55	45	53	60

On veut tester l'hypothèse « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine ». On suppose donc que le nombre de retraits journaliers est égal à $\frac{1}{5}$ du nombre de retraits hebdomadaires. On

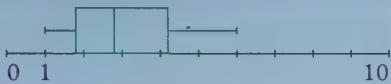
pose $d_{\text{obs}}^2 = \sum_{i=1}^{i=5} \left(f_i - \frac{1}{5}\right)^2$ où f_i est la fréquence des retraits du i -ème jour.

- Calculer les fréquences des retraits pour chacun des 5 jours de la semaine.
- Calculer alors la valeur de $1\,000 d_{\text{obs}}^2$.

Remarque : La multiplication par 1 000 permet d'obtenir un résultat plus lisible.

- En supposant qu'il y a équiprobabilité des retraits journaliers, on a simulé 2 000 séries de 250 retraits hebdomadaires.

Pour chaque série, on a calculé la valeur du $1\,000 d_{\text{obs}}^2$ correspondant. On a obtenu ainsi 2 000 valeurs de $1\,000 d_{\text{obs}}^2$. Ces valeurs ont permis de construire le diagramme en boîte ci-dessous, où les extrémités des « pattes » correspondent respectivement au 1^{er} et au 9^e déciles.



Lire sur le diagramme une valeur approchée du 9^e décile.

- En argumentant soigneusement la réponse, dire si pour la série observée au début, on peut affirmer, avec un risque d'erreur de 10 %, que « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine ».

D'après Bac ES, juin 2003.

Loi binomiale

21 Forages gagnants

Dans une région pétrolière, la probabilité pour qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est de 0,1.

- Justifier que la réalisation d'un forage peut être assimilée à une épreuve de Bernoulli.
- On effectue 9 forages.
 - Quelle hypothèse doit-on faire pour que l'on puisse assimiler cet enchaînement de 9 épreuves à un schéma de Bernoulli ?
 - Sous cette hypothèse, calculer la probabilité :
 - qu'au moins un forage conduise à une nappe de pétrole ;
 - qu'un tiers exactement des forages conduisent à une nappe de pétrole.
 - On désigne par X la variable aléatoire définie par le nombre de forages conduisant à une nappe de pétrole.
 - Donner la loi de probabilité de X .
 - Combien de forages « gagnants » peut-on espérer en moyenne sur les 9 tentés ?

22 Composants défectueux

Un constructeur de composants produit des résistances. La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est de 5×10^{-3} . Dans un lot de 1 000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir :

- au moins une résistance défectueuse ?
- exactement deux résistances défectueuses ?
- au plus deux résistances défectueuses ?
- au moins deux résistances défectueuses ?

23 vu au BAC Au tableau !

Une classe de terminale compte 30 élèves dont 20 filles. À chaque cours de mathématiques, le professeur de cette classe interroge au hasard un élève. D'un cours à l'autre, le professeur ne se rappelle pas de l'élève interrogé au cours précédent, ce qui fait qu'à chaque cours le choix de l'élève par le professeur est indépendant des choix précédents.

- Quelle est la probabilité, à un cours donné, que l'élève interrogé soit une fille ?
- Soit n un entier positif non nul. On appelle X la v.a.r. correspondant au nombre de filles interrogées durant n cours de mathématiques consécutifs.
 - Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - Quelle est la probabilité que 4 filles soient interrogées durant 10 cours consécutifs ?
 - Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

24 vu au BAC À vos montres !

Une usine d'horlogerie fabrique des montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b . 2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b . Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

- A : « la montre tirée présente le défaut a » ;
- B : « la montre tirée présente le défaut b » ;
- C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;
- D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que A et B sont indépendants.

- Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0,882.
- Calculer la probabilité de l'événement D.
- Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b . On définit l'événement E « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ». Calculer la probabilité de l'événement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

→ Que sais-je ?

Vrai ou faux ?

25 Les Bastroyens (habitants de Bastroyie) écrivent en base 3 (ils n'utilisent pour écrire les entiers naturels que les chiffres 0, 1 et 2). Ils peuvent former 18 nombres différents de 3 chiffres (ne commençant bien sûr pas par 0).

26 Dans une course comportant 12 partants, le nombre de tiercés dans le désordre est le triple du nombre de tiercés dans l'ordre.

27 Avec un jeu de 32 cartes, le nombre de mains de 5 cartes comprenant au moins un as est égal à :

$$\binom{4}{1} \binom{31}{1} = 125\ 860.$$

28 Lors d'un tirage simultané de 5 cartes d'un jeu de 32, la probabilité d'obtenir 1 as et 2 piques

est égale à :
$$\frac{\binom{4}{1} \binom{8}{2} \binom{21}{3}}{\binom{32}{5}}.$$

29 Dans une famille de 2 enfants, la probabilité qu'il y ait 2 enfants de même sexe est égale à celle qu'il y ait 2 enfants de sexes différents.

30 Dans une famille de 3 enfants, la probabilité qu'il y ait 3 enfants de même sexe est égale à celle qu'il y ait des enfants de sexes différents.

31 Lorsqu'on lance 4 fois une pièce, on a moins de chances d'obtenir « 2 fois Pile » que « 3 fois Pile ».

32 Dans une classe de 35 élèves, il y a plus d'une chance sur dix qu'au moins 1 élève ait la même date d'anniversaire que le prof de maths (on ne tient pas compte des années bissextiles).

33 Dans une classe de 35 élèves, il y a moins de 3 chances sur 4 qu'au moins 2 élèves aient la même date d'anniversaire (on ne tient pas compte des années bissextiles).

34 Lorsqu'on lance 72 fois 3 dés cubiques bien équilibrés, on peut espérer obtenir 2 fois les numéros 4, 2 et 1 (peu importe dans quel ordre).

QCM

35 Un caractère de l'écriture Braille est formé de points en relief obtenus en trouant au moins un des six points de la grille ci-contre.



Alors il y a exactement :

- A. 6 caractères Braille formés avec 5 trous ;
- B. 15 caractères Braille formés avec 4 trous ;
- C. 6 caractères Braille formés avec 3 trous ;
- D. 63 caractères Braille.

36 Un enfant dispose de 3 têtes de poupées X, Y, Z et de 3 perruques : une blonde notée B, une brune notée N et une rousse notée R.

Il couvre au hasard chaque tête d'une perruque.

- A. Il y a 6 cas possibles, tous équiprobables.
- B. La probabilité que X porte R est égale à $\frac{1}{6}$.
- C. La probabilité que X porte R et Y porte B est égale à $\frac{1}{36}$.
- D. La probabilité que X ne porte pas R sachant que Y porte B est égale à $\frac{1}{2}$.

37 Un QCM comporte 10 questions offrant chacune trois réponses possibles, dont une seule est juste. Une bonne réponse rapporte un point et une mauvaise réponse n'en rapporte aucun. Marc répond au hasard aux 10 questions.

- A. Il a moins d'une chance sur 10 000 d'avoir tout bon.
- B. Il a plus de chances d'avoir 4 que 2.
- C. Il a plus d'une chance sur quatre d'obtenir la moyenne (au moins 5 points).
- D. La probabilité qu'il obtienne une note strictement supérieure à 2 est 0,7 à 10^{-3} près.

38 On extrait au hasard 3 boules d'une urne qui contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

- A. Si les 3 boules sont tirées simultanément, la probabilité de n'obtenir aucune boule noire est supérieure à 0,5.
- B. Si les 3 boules sont tirées successivement et avec remise, la probabilité de n'obtenir aucune boule noire est supérieure à 0,5.
- C. Pour chacun des modes de tirages précédents, l'espérance du nombre de boules noires est 0,6.
- D. Pour chacun des modes de tirages précédents, la variance du nombre de boules noires est 0,48.

→ Un sujet vu au BAC (extrait)

39 Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique. Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p .

Le prix de chaque trajet est de 10 euros ; en cas de fraude l'amende est de 100 euros.

Claude fraude systématiquement lors des 40 trajets soumis à cette étude.

Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i -ième trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Pour cette partie, on suppose que $p = \frac{1}{20}$.

a. Calculer les probabilités $P(X=0)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$.

b. Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Claude soit contrôlé au plus 2 fois.

3. Soit Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.

Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$, puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \frac{1}{5}$.

Nouvelle Calédonie, mars 2005.

Solution

1. L'expérience aléatoire consiste à répéter 40 fois l'épreuve « trajet de Claude » de façon indépendante. Chaque épreuve a exactement deux issues : « le contrôle de Claude », succès de probabilité p , et « le non-contrôle de Claude », échec de probabilité $1-p$.

La variable aléatoire $X = X_1 + \dots + X_{40}$ est le compteur du nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli ; X suit une loi binomiale de paramètres 40 et p :

$$\text{pour } 0 \leq k \leq 40, P(X=k) = \binom{40}{k} p^k (1-p)^{40-k}.$$

2. a. La loi binomiale de X , précisée à la question 1 donne, avec $p = \frac{1}{20}$:

$$\bullet P(X=0) = \binom{40}{0} \left(\frac{1}{20}\right)^0 \left(\frac{19}{20}\right)^{40} = \left(\frac{19}{20}\right)^{40} \approx 0,128\ 5 ;$$

$$\bullet P(X=1) = \binom{40}{1} \left(\frac{1}{20}\right)^1 \left(\frac{19}{20}\right)^{39} = 2 \left(\frac{19}{20}\right)^{39} \approx 0,270\ 6 ;$$

$$\bullet P(X=2) = \binom{40}{2} \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(\frac{19}{20}\right)^{38} = \frac{39}{20} \left(\frac{19}{20}\right)^{38} \approx 0,277\ 7.$$

b. La probabilité que Claude soit contrôlé au plus 2 fois est alors :

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

d'où, à 10^{-4} près, $P(X \leq 2) \approx 0,676\ 7$.

3. Z prend pour valeur le gain algébrique de Claude lors des 40 trajets ; Claude, qui ne paye aucun de ses trajets, économise 400 euros, diminués d'autant d'amendes de 100 euros qu'il s'est fait contrôlé. X indiquant le nombre de contrôles, il en résulte bien $Z = 400 - 100X$. Par linéarité de l'espérance mathématique, on a $E(Z) = 400 - 100E(X)$. Comme X suit une loi binomiale de paramètre $n = 40$ et $p = \frac{1}{5}$, on a $E(X) = np = 8$ et donc $E(Z) = -400$.

Le jour du BAC

Question 1 : Bien étudier et comprendre le contexte, pour reconnaître les lois de probabilités des variables aléatoires X_i et X , remarquer que :

- chaque variable aléatoire X_i prend la valeur 1 avec la probabilité p si Claude est contrôlé lors du i -ième trajet et la valeur 0 avec la probabilité $1-p$ sinon ; X_i suit une loi de Bernoulli ;

- $X = X_1 + \dots + X_{40}$ indique combien de fois Claude est contrôlé au cours des 40 trajets indépendants ; X suit donc une loi binomiale de paramètres 40 et p .

Question 2 : L'interprétation de l'espérance mathématique est souvent demandée au baccalauréat...

Ici, on pourrait dire que « en imaginant ces 40 trajets répétés un grand nombre de fois, Claude serait contrôlé en moyenne 2 fois ».

Claude peut donc « s'attendre » à être contrôlé 2 fois lors de ses 40 trajets.

Question 3 : Bien lire l'énoncé ! Il serait maladroite d'étudier la variable aléatoire Z , d'en déterminer la loi puis de calculer $E(Z)$... sans voir la relation affine existant entre X et Z !

→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Dénombrement Sens des formules

40 Nombre de parties

Soit E un ensemble comptant n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Combien E admet-il de parties à 0 élément ? à 1 élément ? à k éléments (k fixé, $0 \leq k \leq n$) ?

En déduire que le nombre total de parties de E est

$$\text{égal à } S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

2. Calculer cette somme à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. Vérifier le résultat obtenu pour $n=3$, en écrivant toutes les parties de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

41 Calcul de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

1. Une urne contient 20 boules : 10 blanches et 10 noires portant des numéros tous différents. On extrait simultanément 10 boules de cette urne.
a. Combien de tirages différents peut-on réaliser ?
b. k étant un entier de $[0 ; 10]$, combien de tirages comportant exactement k boules noires existe-t-il ?

c. En déduire l'égalité :
$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}^2 = \binom{20}{10}.$$

2. Une urne contient $2n$ boules : n blanches et n noires numérotées de 1 à $2n$ (n entier fixé non nul). En reprenant la démarche de la question 1, donner

une expression simple de
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

42 avec ROC

1. Démonstration de cours

Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

2. En déduire que pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \leq k \leq n-2$:

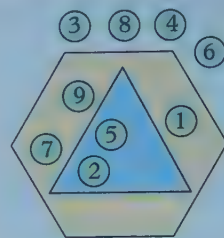
$$\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}.$$

3. On considère deux entiers naturels n et k tels que $2 \leq k \leq n-3$. On dispose d'une urne contenant n boules indiscernables au toucher. Deux des boules sont rouges, les autres sont blanches. On tire au hasard et simultanément k boules de l'urne. On appelle A l'événement « au moins une boule rouge a été tirée ».

- a. Exprimer en fonction de n et k la probabilité de l'événement \bar{A} , contraire de A . En déduire $p(A)$.
b. Exprimer d'une autre manière la probabilité de l'événement A et montrer, à l'aide de la formule obtenue à la question 2, que l'on obtient le même résultat.

43 Stratégies de placements

Un enfant dispose de 9 jetons numérotés de 1 à 9 et d'une feuille reproduisant la figure ci-contre (sans les jetons !). Il doit placer 5 jetons dans l'hexagone dont 2 dans le triangle.



1. Calculer le nombre de répartitions possibles suivant qu'il adopte l'une ou l'autre des stratégies suivantes.

Stratégie 1 : choix des 2 jetons à placer dans le triangle puis choix des 3 jetons à placer en dehors du triangle.

Stratégie 2 : choix des 5 jetons à placer dans l'hexagone et choix parmi ceux-ci des 2 à placer dans le triangle.

Que peut-on observer ?

2. a. Reprendre la démarche précédente avec n jetons, dont p sont à placer dans l'hexagone, k d'entre eux prenant place dans le triangle.

- b. En déduire, pour $0 \leq k \leq p \leq n$,

$$\binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$

Vérifier cette égalité par le calcul.

- c. Utiliser cette égalité et la formule du binôme de Newton pour établir, pour $0 \leq p \leq n$,

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \times \binom{n}{p}.$$

Lois discrètes usuelles

44 Le cube en bois

1. On considère un cube en bois, peint en blanc, de 4 cm d'arête ; on le découpe régulièrement suivant des plans perpendiculaires aux arêtes, distants les uns des autres de 1 cm. On obtient ainsi des petits cubes de 1 cm d'arête dont certains ont une ou plusieurs faces peintes en blanc.

Ces petits cubes sont placés dans une urne et on en tire un au hasard.

On désigne par X la variable aléatoire associant au cube tiré le nombre de ses faces peintes.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Combien de faces peintes un cube pris au hasard a-t-il en moyenne ?

2. On reprend l'expérience précédente, mais avec un cube de n cm d'arête (n entier ; $n \geq 3$).

- Déterminer la loi de probabilité de la variable X_n : « nombre de faces peintes du cube tiré au hasard ».
- Écrire $[(n-2)+2]^3$ comme somme de puissances de $(n-2)$ à l'aide de la formule du binôme.

En déduire l'égalité :
$$\sum_{k=0}^3 p(X_n = k) = 1.$$

Source : APMEP.

45 Super Mastermind



1. On dispose d'un grand nombre de fiches, de 8 couleurs différentes, et de 5 trous numérotés.

- On place une fiche dans chaque trou et on s'intéresse à la disposition des couleurs.

Quel est le nombre de dispositions possibles ?

- Même question s'il est possible de laisser des trous vides.

c. Sur l'emballage, on lit : « 5 fiches, 8 couleurs, 59 049 combinaisons ».

Êtes-vous d'accord avec le résultat ? Êtes-vous d'accord avec le vocabulaire utilisé ?

2. Un enfant a placé une fiche dans chaque trou, au hasard, sans se préoccuper des couleurs. On suppose que le nombre de fiches disponibles est le même dans chaque couleur et qu'il est suffisamment grand pour que toutes les dispositions soient équiprobables. Calculer la probabilité que l'enfant ait placé :

- 5 fiches de la même couleur ;
- 2 fiches rouges exactement ;
- 2 fiches rouges, 1 blanche, 1 verte et 1 bleue.

46 D'un modèle à l'autre

Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires.

1. On tire simultanément et au hasard 3 boules. X est la variable aléatoire définie par le nombre de boules rouges obtenues.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Combien de boules rouges peut-on espérer obtenir à ce jeu en moyenne ?

2. On tire 3 fois une boule, au hasard et avec remise. Y est la variable aléatoire définie par le nombre de boules rouges obtenues.

- Déterminer la loi de probabilité de Y .
- Combien de boules rouges peut-on espérer obtenir à ce jeu en moyenne ?

3. Calculer les écarts types σ et σ' de X et de Y . Quels commentaires peut-on faire ?

47 Dominos

Un jeu de dominos est fabriqué avec 7 couleurs : violet, indigo, bleu, vert, jaune, orange, rouge.

Un domino se compose de 2 cases portant chacune l'une des 7 couleurs.

Chaque couleur peut figurer deux fois sur le même domino : c'est un double.

1. Montrer que le jeu comporte 28 dominos différents.

Les 28 dominos, indiscernables au toucher, sont mis dans un sac.

2. On tire un seul domino de ce sac.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- J_2 : « le jaune figure deux fois » ;
- J_1 : « le jaune figure une seule fois » ;
- J : « le jaune figure au moins une fois ».

3. On tire deux dominos du sac.

a. Calculer la probabilité qu'ils puissent s'associer par la couleur jaune (cela signifie que le jaune figure sur chaque domino).

b. On considère l'événement A « les 2 dominos tirés peuvent s'associer » (cela signifie qu'ils ont une couleur en commun). Montrer que $P(A) = \frac{7}{18}$.

4. On effectue 5 tirages successifs et indépendants de 2 dominos, en remplaçant dans le sac à chaque tirage les 2 dominos tirés avant de procéder au tirage suivant.

a. Calculer la probabilité que l'événement A soit réalisé au moins une fois.

b. Calculer la probabilité que l'événement A soit réalisé exactement 3 fois.

48 Pile pareil !

1. On lance 8 fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

Calculer la probabilité $P(4)$ d'obtenir autant de Pile que de Face.

2. A-t-on plus de chances d'obtenir 4 Pile en lançant 8 fois une pièce ou d'obtenir 6 Pile en lançant 12 fois une pièce ?

- Quelle conjecture peut-on faire ?
- Calculer $P(6)$ et comparer.

3. On lance $2n$ fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée (n entier naturel non nul).

a. Calculer la probabilité $P(n)$ d'obtenir autant de Pile que de Face.

EXERCICES

b. Prouver que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{2n+1}{2(n+1)}$.

En déduire comment varie $P(n)$ lorsque n grandit.

c. Reproduire le tableau suivant. À l'aide d'une calculatrice ou, mieux, d'un tableur, le compléter par les approximations décimales à 10^{-3} près par défaut

des nombres $P(n)$ et $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

n	5	10	20	30	40	50
$P(n)$						
$\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$						

On démontre que $P(n) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et que cette approximation est d'autant meilleure que n est grand.

51

1, 2 et 3. a. Observer que les expériences consistent à répéter, de façon indépendante, une même épreuve de Bernoulli ; en préciser le succès.

3. b. Attention !

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2) \times (2n+1) \times \dots \times (n+2)}{(n+1)!}$$

Au numérateur il y a $n+1$ entiers consécutifs.

Utiliser $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

3. c. Sur une calculatrice, on pourra tabuler la fonction $Y = nCr(2x, x) \cdot 2 \wedge (2x)$.

Lois discrètes et conditionnement

49 Dans quelle urne ?

Une urne U_1 contient 7 boules blanches et 3 boules noires. Une urne U_2 contient 3 boules blanches et 7 boules noires. On choisit une urne au hasard et on en extrait 4 boules, encore au hasard. On considère les événements suivants :

- U : « l'urne U_1 a été choisie » ;
- V : « l'urne U_2 a été choisie » ;
- N : « on obtient exactement 1 boule noire ».

1. a. Calculer $P(U)$, $P(V)$, $P_U(N)$ et $P_V(N)$.

b. En déduire $P(N)$.

2. On réalise cette expérience et on obtient exactement 1 boule noire. Quelle est la probabilité que le tirage ait été effectué dans U_1 ?

50 vu au BAC Tir à l'arc

Les participants à une compétition de tir à l'arc sont constitués pour moitié de tireurs entraînés et pour moitié de tireurs amateurs.

Un tireur entraîné a 80 % de chances d'atteindre la cible, à chaque tir.

Un tireur amateur a 50 % de chances d'atteindre la cible, à chaque tir.

Au cours de la compétition, chaque participant lance 10 flèches et obtient un point pour chaque flèche atteignant la cible.

On donnera les valeurs approchées par défaut à 10^{-3} près pour les probabilités demandées aux questions 2, 3 et 4.

On considère les événements suivants :

A : « le participant est un tireur entraîné » ;

B : « le participant est un tireur amateur » ;

C : « le participant obtient 7 points ».

1. Déterminer la probabilité de A, puis celle de B.

2. Déterminer la probabilité qu'un tireur entraîné obtienne 7 points et la probabilité qu'un tireur amateur obtienne 7 points.

3. Calculer la probabilité de l'événement C.

4. Sachant qu'un participant à la compétition a obtenu sept points, quelle est la probabilité que ce soit un tireur entraîné ?

51 La clé du succès

1. Un singe cherche à ouvrir une porte avec un trousseau comportant 10 clés, dont une seule est adaptée à la serrure.

Il teste les clés une à une, sans remise, jusqu'à l'ouverture de la porte.

On note X le nombre de clés essayées.

a. Illustrer la situation par un arbre pondéré.

b. Déterminer la loi de probabilité de X .

X suit-elle une loi équirépartie ?

c. Combien d'essais faut-il au singe en moyenne pour ouvrir la porte ?

2. Un autre jour, le singe, muni du même trousseau, essaie à nouveau ses clés une à une pour ouvrir la porte ; mais ayant trop bu de lait de noix de coco, il procède à 10 essais sans mettre de côté les clés qu'il teste. Il effectue ainsi ses 10 tests d'une clé de façon totalement indépendante.

a. Justifier que cette expérience aléatoire est un schéma de Bernoulli (préciser n et p).

b. On désigne par Y la variable aléatoire qui associe aux dix essais le rang de celui qui permet l'ouverture de la porte si cela se produit et la valeur 11 dans le cas contraire.

• Y suit-elle une loi binomiale ?

• Déterminer la loi de Y .

• Quelle est la probabilité que la porte ne s'ouvre qu'au 9^e essai ?

3. On suppose qu'en fait, le singe est ivre de noix de coco 1 jour sur 3, et que lorsque c'est le cas, il ne teste plus ses clés une à une sans remise (comme dans la question 1), mais avec remise (comme dans la question 2).

Ce jour, le singe ne parvient à ouvrir la porte qu'au 9^e essai. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre de noix de coco ?

Adéquation à une loi équirépartie

52 vu au BAC π et ses décimales

Les 1 000 premières décimales de π se répartissent de la façon suivante selon leurs nombres d'apparitions :

Valeurs	0	1	2	3	4
Occurrences	93	116	102	102	94
Valeurs	5	6	7	8	9
Occurrences	97	94	95	101	106

Avec un tableur on a simulé 1 000 expériences de 1 000 tirages aléatoires d'un chiffre compris entre 0 et 9. Pour chaque expérience, on a calculé :

$$d^2 = \sum_{k=0}^9 (f_k - 0,1)^2$$

où f_k représente, pour l'expérience, la fréquence observée du chiffre k .

On a alors obtenu une série statistique, pour laquelle on a calculé le 1^{er} et 9^e décile (d_1 et d_9), le premier et troisième quartile (Q_1 et Q_3) et la médiane (Me) :

$$d_1 = 0,000\ 422 ; Q_1 = 0,000\ 582 ;$$

$$Me = 0,000\ 822 ; Q_3 = 0,001\ 136 ; d_9 = 0,001\ 45.$$

1. En effectuant le calcul de d^2 sur la série des 1 000 premières décimales de π , obtient-on :

- 0,000 456 ?
- 0,004 56 ?
- 0,000 314 ?

2. Un statisticien, découvrant le tableau et ignorant qu'il s'agit des décimales de π , fait l'hypothèse que la série est issue de tirages aléatoires indépendants suivant une loi équirépartie. Il prend un risque de 10 % de rejeter cette hypothèse quand elle est vraie. Accepte-t-il cette hypothèse ?

- oui ;
- non ;
- il ne peut pas conclure.

D'après Antilles-Guyane, septembre 2004.

53 Un meunier a besoin, pour sa farine, d'un mélange de 4 variétés différentes de grains de blé, d'égales quantités chacune et notées 1, 2, 3, 4.

1. Il veut savoir si, dans son silo, les différentes variétés sont bien mélangées. Pour cela, il prélève, à la sortie du silo, un échantillon de 100 grains de blé rendus radioactifs par des marqueurs différents selon les variétés. Il obtient les résultats suivants.

Variété	1	2	3	4
Nombre de grains radioactifs	18	27	35	20

Le meunier veut savoir si ces données sont vraisemblables lorsqu'on fait l'hypothèse d'un mélange homogène des quatre variétés, ce qui correspond à un quart des marqueurs pour chaque variété.

On appelle f_i la fréquence dans l'échantillon de la

variété i et on pose $d^2 = 400 \sum_{i=1}^4 \left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$.

Calculer la valeur de d^2 .

2. On suppose l'équiprobabilité de la présence d'un grain de blé de chaque variété et on simule 10 000 séries de 100 tirages de grains de blé.

Pour chaque série de 100 tirages, on calcule d^2 .

Le tableau suivant donne le nombre de séries pour lesquelles la valeur de d^2 est strictement supérieure à l'entier j .

j	3	4	5	6
Nombre de séries pour lesquelles $d^2 > j$	3 915	2 618	1 715	1 114
j	7	8	9	10
Nombre de séries pour lesquelles $d^2 > j$	728	467	306	180

Lire la valeur du 9^e décile, arrondie à l'entier le plus proche, puis celle du 95^e centile.

3. Si l'hypothèse d'équiprobabilité est vraie :

- peut-on affirmer au risque d'erreur de 10 % que le mélange étudié à la question 1 est homogène ?
- même question avec un risque d'erreur de 5 % ;
- que peut-on dire si quelqu'un demande un risque d'erreur de 0 % ?

Extrait de la banque d'exercices de l'Inspection générale.

→ PROBLÈMES

CD 54 Techniques d'oral

Partie A

Lors de la préparation d'un examen, un élève n'a étudié que 5 des 10 leçons.

Un interrogateur a placé dans une corbeille 10 papiers contenant chacun une question, ces questions portant sur des leçons indépendantes.

Le candidat doit tirer au hasard 2 papiers et il peut le faire soit en une seule fois (stratégie 1), soit en deux fois, avec remise du premier papier tiré dans la corbeille après lecture (stratégie 2).

Les probabilités demandées seront données sous forme décimale arrondie à 10^{-2} près.

1. Y a-t-il une stratégie paraissant *a priori* plus favorable au candidat ?

2. On suppose que le candidat tire les deux papiers simultanément.

Calculer la probabilité :

- a. qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ;
- b. qu'il connaisse les deux sujets ;
- c. qu'il connaisse un et un seul de ces sujets ;
- d. qu'il connaisse au moins un de ces sujets.

3. On suppose que le candidat tire un papier, note la question, le remet et tire un second papier. Reprendre les questions du 2. Comparer.

Partie B

On considère maintenant que le candidat a étudié n leçons parmi les 10 au programme (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 10). On note P_n et Q_n les probabilités que le candidat connaisse au moins l'un des sujets tirés respectivement avec la stratégie 1 et avec la stratégie 2.

1. Calculer P_n et Q_n .

2. Déterminer, dans chacune des stratégies, pour quels entiers n le candidat a au moins 85 % de chances de ne pas être complètement « sec » le jour de son oral.

55 vu au BAC Tirs au but

Un entraîneur d'une équipe de football a étudié les statistiques de tir au but (pénalty) de ses joueurs. Il a remarqué que, sur une série de 5 tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque :

- 5 buts avec une probabilité de 0,2 ;
- 4 buts avec une probabilité de 0,5 ;
- 3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur, à l'entraînement, tire 2 séries de 5 ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs au but réussis par un joueur au cours d'un entraînement.

1. a. Calculer la probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs au but lors d'un entraînement.

b. Préciser les valeurs possibles pour X et établir sa loi de probabilité (on pourra s'aider d'un arbre).

c. Calculer l'espérance de X .

2. L'entraîneur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs au but lorsque $X \geq 8$.

Montrer que la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entraînement est égale à 0,61.

3. Chaque joueur participe à 10 séances d'entraînement. On admet que les épreuves de tirs au but sont indépendantes les unes des autres.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs au but au cours de ces 10 entraînements, c'est-à-dire le nombre de fois où il a marqué au moins 8 buts. Si au cours d'une séance d'entraînement, il ne marque pas au moins 8 buts, on dit qu'il a eu un échec.

Les résultats seront donnés par défaut, avec 3 chiffres après la virgule.

Calculer pour un joueur :

a. la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances ;

b. la probabilité d'avoir exactement 6 succès ;

c. la probabilité d'avoir au moins 1 succès.

4. Calculer le nombre minimal d'entraînements auxquels doit participer un joueur pour que la probabilité d'avoir au moins 1 succès soit supérieure à 0,99.

56 vu au BAC QCM

Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (QCM) est utilisé. On s'intéresse à cinq questions de ce QCM, supposées indépendantes.

À chaque question sont associées quatre affirmations, numérotées 1, 2, 3 et 4, dont une seule est exacte. Un candidat doit répondre à chaque question en donnant seulement le numéro de l'affirmation qu'il juge exacte. Sa réponse est correcte si l'affirmation qu'il a retenue est vraie, sinon sa réponse est incorrecte.

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme de fraction irréductible.

1. Un candidat répond à chaque question au hasard, c'est-à-dire qu'il considère que les quatre affirmations correspondantes sont équiprobables.

a. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « le candidat répond correctement à la première des cinq questions » ;

B : « le candidat répond correctement à deux questions au moins sur les cinq questions ».

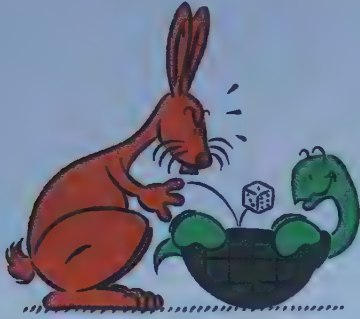
b. On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note (-1) à toute réponse incorrecte.

Calculer la probabilité de l'événement C : « le candidat obtient une note au moins égale à 10 pour l'ensemble des cinq questions. »

2. On suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse correcte à deux questions et qu'il répond au hasard aux trois autres questions. Quelle est alors la probabilité de l'événement C décrit en 1b ?

57 CD Le lièvre et la tortue

Rapid le lièvre et Dosman la tortue lancent un dé.



Si celui-ci tombe sur 6, le lièvre gagne. S'il tombe sur un autre nombre, la tortue avance d'une case. Pour que la tortue gagne, elle doit avancer de n cases (n entier naturel non nul).

Les lancers se poursuivent jusqu'à ce que l'un des deux joueurs soit gagnant.

On note $P_n(L)$ (respectivement $P_n(T)$) la probabilité que le lièvre (respectivement la tortue) gagne.

Partie A. Dosman propose de prendre $n = 4$

1. a. Conjecture : qui du lièvre ou de la tortue paraît favorisé ?

b. Calculer $P_4(T)$ et en déduire $P_4(L)$.

À qui la règle du jeu profite-t-elle ?

2. On désigne par X la variable aléatoire associant à une partie le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un vainqueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de X .

b. Combien de lancers en moyenne nécessitera une partie ?

3. Dix parties sont jouées, indépendamment et dans ces mêmes conditions :

a. Quelle est la probabilité que la tortue gagne 5 fois exactement ?

b. Combien de parties la tortue peut-elle espérer gagner à ce jeu ?

Partie B. La valeur de n n'est plus fixée

1. Calculer $P_n(T)$ et déterminer pour quelles valeurs de n le jeu est favorable à la tortue.

2. Calculer l'espérance du nombre de parties remportées par la tortue dans une série de 10 parties jouées. Pour quelles valeurs de n le lièvre peut-il espérer gagner 9 parties sur 10 au moins ?

58 Bi, tri ou quadri ?

Un avion biréacteur B et un avion quadri-réacteur Q sont équipés de réacteurs d'un même type.

Les réacteurs se comportent de façon indépendante et ils peuvent chacun tomber en panne avec une probabilité p . Or, un avion ne peut achever son vol que si la moitié au moins de ses réacteurs fonctionne normalement.

On désigne par X_B (respectivement X_Q) la variable aléatoire qui donne le nombre de pannes d'un biréacteur (respectivement d'un quadri-réacteur) au cours d'un vol donné.

1. Donner les lois de probabilité de X_B et de X_Q .

2. Calculer la probabilité P_B que le biréacteur achève son vol et la probabilité P_Q que le quadri-réacteur fasse de même.

3. Vérifier que $P_B - P_Q = p^2(1-p)(3p-1)$ et comparer, selon les valeurs de p , la fiabilité des deux appareils.

4. Actuellement, p est de l'ordre de 10^{-4} .

Pour cette valeur de p , calculer P_B , P_Q et la probabilité P_T qu'un triréacteur équipé de réacteurs de ce type achève son vol. Quel classement peut-on établir ?

59 Des amis à l'appel

Manon cherche à joindre trois de ses amis au téléphone. On suppose que les appels sont indépendants et que lors d'un appel, la probabilité de joindre un correspondant est égale à $\frac{1}{2}$.

1. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre d'amis que Manon a pu joindre lors d'un premier essai.

a. Quelle loi suit X ?

b. Calculer et interpréter $E(X)$.

2. Après ce premier essai, Manon essaie de rappeler les amis qu'elle n'a pas pu joindre, dans les mêmes conditions que lors du premier appel.

Soit Y le nombre d'amis joints lors de ce second essai.

a. Calculer les probabilités :

$P_{X=0}(Y=0)$, $P_{X=0}(Y=1)$, $P_{X=0}(Y=2)$ et $P_{X=0}(Y=3)$, puis $P_{X=1}(Y=0)$, $P_{X=1}(Y=1)$, $P_{X=1}(Y=2)$, $P_{X=2}(Y=0)$, $P_{X=2}(Y=1)$ et enfin $P_{X=3}(Y=0)$.

b. Présenter tous les résultats obtenus dans un arbre pondéré et en déduire la loi de Y .

c. Calculer et interpréter $E(Y)$.

3. Soit Z le nombre total des amis joints par Manon à l'issue de ces deux séries d'appels ($Z = X + Y$).

a. Déterminer la loi de probabilité de Z .

b. Vérifier que Z suit une loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{4}$.

c. Quelle relation peut-on établir entre $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$?

4. a. On considère l'épreuve aléatoire e : Manon appelle un ami et renouvelle son appel en cas d'échec. Justifier que cette épreuve est une épreuve de Bernoulli et préciser son paramètre p .

b. Manon répète cette épreuve e trois fois, de façon indépendante.

Retrouver directement la loi de probabilité du nombre Z d'amis joints par Manon.

14

Exemples de lois continues

OBJECTIF

Traduire une situation d'équiprobabilité lorsque l'univers est un intervalle.

CD Activité 1 → Loi uniforme sur $[0 ; 1]$

On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[0 ; 1]$. Par quelle loi de probabilité sur $[0 ; 1]$ peut-on modéliser ce choix ?

A ■ Un univers particulier

Préciser quel univers Ω se trouve associé à cette expérience. En quoi se distingue-t-il des univers déjà rencontrés ?

B ■ Probabilité d'un réel

Lorsque Ω est un ensemble fini $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, définir une loi de probabilité P sur Ω , c'est se donner les réels $P(\{a_1\}), P(\{a_2\}), \dots, P(\{a_n\})$, tous positifs ou nuls et de somme 1.

Voyons si cette approche « point par point » est généralisable ici.

1. Conjectures

Lequel des événements paraît le plus probable :

« obtenir 0 », « obtenir $\frac{1}{2}$ », « obtenir $\frac{\sqrt{3}}{2}$ » ou « obtenir π » ?

Quelles probabilités pourrait-on leur associer ?

2. Raisonnement par l'absurde

Les issues devant être équiprobables, on pose, pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $P(\{x\}) = k$ avec k réel fixé. À l'évidence, k est soit nul, soit non nul ! Supposons que l'on ait $k \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement $E_n = \{1/n, 2/n, \dots, n/n\}$. Exprimer $P(E_n)$ en fonction de k et de n , et montrer que pour n suffisamment grand, on a $P(E_n) > 1$. Que peut-on en déduire pour k ?

3. Bilan

P étant une loi de probabilité modélisant le choix au hasard d'un réel dans $[0 ; 1]$, donner $P(\{x\})$ lorsque $x \notin [0 ; 1]$ et lorsque $x \in [0 ; 1]$.

Peut-on envisager de définir P en se donnant $P(\{x\})$ pour tout réel x de $[0 ; 1]$?

C ■ Probabilité d'un intervalle

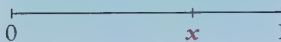
1. Conjectures

On admet que les réels sont uniformément répartis dans l'intervalle $[0 ; 1]$ (comme dans tout intervalle, d'ailleurs !)

Quelle probabilité serait-il naturel d'associer à l'événement « obtenir un réel inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$ » ? On notera $P\left(\left[0 ; \frac{1}{2}\right]\right)$ cette probabilité.



$P(\{x\}) = ?$



Que pourraient valoir de même :

$$P\left(\left[0; \frac{1}{4}\right]\right), P\left(\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]\right), P([0,45; 0,55]) \text{ et } P([3; 4]) ?$$

2. Construction de P

On généralise les résultats intuitifs précédents en convenant que la probabilité d'un intervalle $[\alpha; \beta]$ inclus dans $[0; 1]$ est proportionnelle à sa longueur $\beta - \alpha$.

En déduire les probabilités :

$$P([\alpha; \beta]), P([\alpha; \beta[), P(]-\infty; \alpha]), P([\beta; +\infty[).$$

$$P([\alpha; \beta]) = ?$$



D ■ Notion de densité

D'après les parties **B** et **C**, la probabilité d'obtenir $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir π sont

nulles. Pourtant, la probabilité d'obtenir un nombre voisin de $\frac{1}{2}$ (par exemple compris entre 0,45 et 0,55) ne l'est pas, alors que celle d'obtenir un nombre voisin de π (par exemple compris entre 3 et 4) l'est !

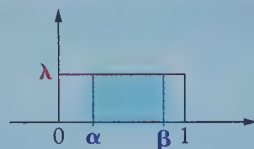
On dira qu'il existe des réels affectés d'une **densité de probabilité nulle** – ceux qui sont en dehors de l'intervalle $[0; 1]$ – et des réels affectés d'une **densité de probabilité non nulle** – ceux de l'intervalle $[0; 1]$.

De plus, la loi devant être équirépartie sur $[0; 1]$, il est nécessaire d'associer la même densité à tout réel de $[0; 1]$.

1. Soit $f: x \mapsto \lambda$; quelle valeur faut-il donner au réel λ pour que l'aire sous la courbe de f soit égale à 1 (en unités d'aire) ?

2. Pour cette valeur de λ , comparer la probabilité $P([\alpha; \beta])$ d'un intervalle $[\alpha; \beta]$ inclus dans $[0; 1]$ et l'aire sous la courbe de la fonction f , limitée par les droites $x = \alpha$ et $x = \beta$.

3. Faire de même avec les intervalles $]-\infty; \alpha]$, $[\beta; +\infty[$.



$$P([\alpha; \beta]) = ?$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = ?$$

Bilan Le choix au hasard d'un réel dans $[0; 1]$ se modélise par la loi de probabilité P qui associe à tout intervalle $[\alpha; \beta]$ de $[0; 1]$ le réel $P([\alpha; \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ où f est la fonction constante égale à 1 sur $[0; 1]$.

CD Activité 2 ➔ Vers la densité d'une loi de probabilité

On choisit au hasard, indépendamment, deux nombres réels x et y dans l'intervalle $[0; 1]$.

Soit S la variable aléatoire associant au couple (x, y) la somme $x + y$. Quelle est la loi de S ?

1. Que dire de S ?

Préciser l'univers Ω associé à cette expérience, ainsi que l'univers image $S(\Omega)$.

Une variable aléatoire X est soit **discrète** (finie ou non) soit **continue**.

Proposer trois exemples et préciser le sens de chaque qualificatif.

À quelle catégorie appartient S ?

Rappeler comment on détermine la loi de probabilité d'une variable aléatoire X discrète finie. Cette démarche peut-elle être reconduite ici pour S ?

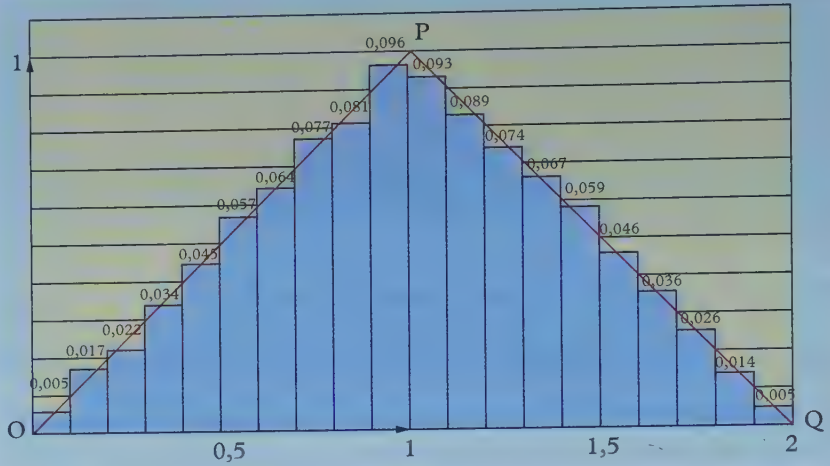
OBJECTIF

Définir la probabilité d'un intervalle à l'aide d'une fonction densité.

Classes	Fréquences
[0 ; 0,1[0,005
[0,1 ; 0,2[0,017
[0,2 ; 0,3[0,022
[0,3 ; 0,4[0,034
[0,4 ; 0,5[0,045
[0,5 ; 0,6[0,057
[0,6 ; 0,7[0,064
[0,7 ; 0,8[0,077
[0,8 ; 0,9[0,081
[0,9 ; 1,0[0,096
[1,0 ; 1,1[0,093
[1,1 ; 1,2[0,089
[1,2 ; 1,3[0,074
[1,3 ; 1,4[0,067
[1,4 ; 1,5[0,059
[1,5 ; 1,6[0,046
[1,6 ; 1,7[0,036
[1,7 ; 1,8[0,026
[1,8 ; 1,9[0,014
[1,9 ; 2]	0,005

2. Simulation

À l'aide d'un tableur, on a simulé un échantillon de 10 000 valeurs de S , que l'on a regroupées en classes d'amplitude 0,1. L'histogramme des fréquences est présenté ci-dessous :



L'unité graphique de l'axe des ordonnées a été choisie de telle façon que l'aire de chaque rectangle ait pour mesure la fréquence de la classe correspondante.

- Que vaut alors la somme des aires des rectangles de l'histogramme ?
- Recopier et compléter le tableau ci-dessous en calculant les fréquences.

Événements	$S \leq 1$	$S > 1,5$	$0,2 \leq S \leq 0,6$	$0,8 \leq S \leq 1,2$	$0,5 < S < 2$	$0,75 \leq S \leq 1,75$	$-0,2 \leq S \leq 0,2$
Fréquences							

3. Modélisation

L'histogramme précédent peut être ajusté par la courbe C , tracée en rouge, réunion des deux segments $[OP]$ et $[PQ]$ où $P(1 ; 1)$ et $Q(2 ; 0)$.

Déterminer la fonction f dont la représentation graphique sur $[0 ; 2]$ est la courbe C .

Que vaut l'aire située sous cette courbe C ?

En s'inspirant du calcul des fréquences par les aires de la question 2, exprimer la probabilité de chaque événement du tableau ci-dessous à l'aide d'une intégrale de la forme $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

Calculer ces intégrales, puis recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Événements	$S \leq 1$	$S > 1,5$	$0,2 \leq S \leq 0,6$	$0,8 \leq S \leq 1,2$	$0,5 < S < 2$	$0,75 \leq S \leq 1,75$	$-0,2 \leq S \leq 0,2$
Probabilités							

Bilan et vocabulaire On a obtenu une loi de probabilité pour la variable continue S dont l'univers image est l'intervalle $[0 ; 2]$ en se dotant d'une fonction f continue et positive sur $[0 ; 2]$ telle que l'aire sous sa courbe soit égale à 1.

Cette fonction f , qui donne la probabilité de tout intervalle $[\alpha ; \beta]$ de $[0 ; 2]$ par $P([\alpha ; \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, est appelée *densité de probabilité* de la loi de S .

Remarque : On peut considérer que cette fonction *densité* est définie sur \mathbb{R} en posant $f(x) = 0$ pour tout x pris hors de l'intervalle $[0 ; 2]$.

Activité 3 ➔ Tomber pile

On lance une pièce de 1 euro bien équilibrée plusieurs fois de suite et on s'arrête dès que Pile est obtenu.

On désigne par N le nombre de lancers nécessaires à l'obtention de Pile.

OBJECTIF

Rencontrer une loi exponentielle.

A ■ Expérimentation

- Effectuer successivement dix parties et noter les valeurs de N correspondantes.
- Calculer les fréquences des valeurs de N obtenues et représenter cette série statistique par un diagramme en bâtons.
Comparer avec ceux obtenus par les autres élèves.

B ■ Étude théorique de N

1. a. Préciser les valeurs susceptibles d'être prises par N .
Calculer $P(N=1)$, $P(N=2)$, puis $p_k = P(N=k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

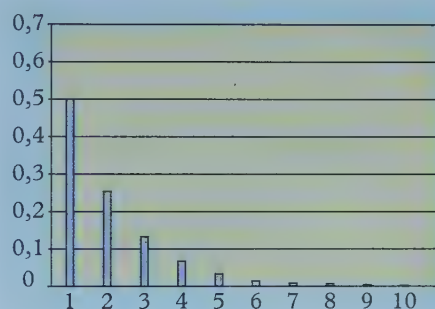
b. Vérifier que le diagramme en bâtons ci-contre illustre la distribution de probabilité (k, p_k) .

2. Calculer $P(N \leq n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer et interpréter $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(N \leq n)$.

3. Calculer la probabilité de chacun des événements :

$$N \leq 3, \quad 3 < N \leq 7 \quad \text{et} \quad N \geq 3.$$



C ■ Utilisation d'aires

1. À partir du diagramme en bâtons, on a construit l'histogramme dont les rectangles, notés R_k , ont pour base $[k-1; k]$ et pour hauteur celle des bâtons, c'est-à-dire p_k .

a. Que vaut l'aire A_k d'un rectangle R_k ?

b. Écrire les probabilités des événements $N \leq 3$, $3 < N \leq 7$ et $N \geq 3$ comme somme d'aires de rectangles R_k .

2. Sur cet histogramme, on a tracé la courbe représentant la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln 2}{2^x}$.

a. Justifier que $f(x)$ est de la forme $\lambda e^{-\lambda x}$, avec $\lambda > 0$.

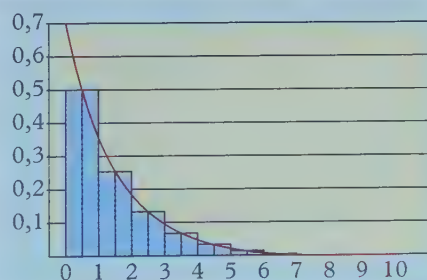
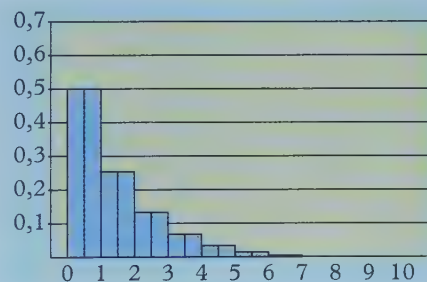
b. Calculer, pour $x \geq 0$, l'intégrale $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Calculer la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

En donner une interprétation en termes d'aire.

c. Calculer $\int_0^3 f(t) dt$, $\int_3^7 f(t) dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f(t) dt$.

d. Comparer ces résultats avec ceux de B3 et commenter.



1. Loi de probabilité continue (ou à densité)

A ■ Quand l'univers est un intervalle

• Jusqu'à présent, chaque expérience aléatoire conduisait à un univers fini et chaque variable aléatoire prenait un **nombre fini de valeurs**.

Il s'agissait donc toujours de définir une loi de probabilité P sur un ensemble fini $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, et il suffisait pour cela de se donner ou de déterminer les n réels $P(\{x_1\}), P(\{x_2\}), \dots, P(\{x_n\})$.

• Cependant, il arrive aussi que les issues d'une expérience ou les valeurs prises par une variable aléatoire puissent être **n'importe quel nombre d'un intervalle I de \mathbb{R}** , par exemple : la durée d'une communication.

Dans ce cas, il n'est plus question de définir une loi P sur I en se donnant la probabilité de chaque élément de I (elle serait d'ailleurs nulle !) et de plus, les événements intéressants ne sont plus « obtenir tel ou tel réel », mais plutôt « obtenir un nombre compris entre a et b ».

La définition d'une loi P sur un intervalle I repose donc sur la notion de probabilité d'un intervalle quelconque de I .

B ■ Densité et loi de probabilité sur un intervalle I

Définition 1 →

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

• On appelle **densité de probabilité sur I** toute fonction f définie sur I vérifiant les trois conditions suivantes :

- f est continue sur I ;
- f est positive sur I (pour tout réel x de I , $f(x) \geq 0$) ;
- l'aire située sous sa courbe C est égale à une unité d'aire ($\int_I f(x) dx = 1$).

• On définit la **loi de probabilité P de densité f sur l'intervalle I** en associant à tout intervalle $[\alpha ; \beta]$ inclus dans I le réel :

$$P([\alpha ; \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

On dit que P est une **loi de probabilité à densité sur I** ou une **loi continue sur I** ; $P([\alpha ; \beta])$ se lit « probabilité de l'intervalle $[\alpha ; \beta]$ ».

Exemple : La fonction \cos définie sur $I = [0 ; \frac{\pi}{2}]$ est une

densité de probabilité sur I car :

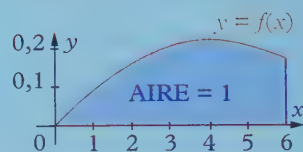
1. f est continue sur I ; 2. f est positive sur I ;

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

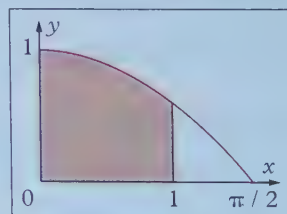
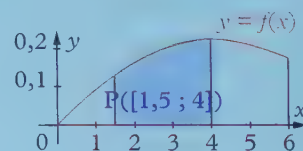
Si P est la loi continue de densité \cos sur I , on a alors, par exemple :

• $P([0 ; 1]) = \int_0^1 \cos x dx = [\sin x]_0^1 = \sin 1 - \sin 0 \approx 0,84$;

• $P([\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}]) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0,21$.



$I = [0 ; 6]$



→ ILLUSTRATIONS

■ Avec I intervalle borné

Montrer qu'il est possible de définir une loi de probabilité P sur l'intervalle $I = [-1 ; 1]$ ayant pour densité la fonction f définie par $f(x) = 1 - |x|$ et calculer $P\left(\left[-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right]\right)$.

1. Représentons graphiquement la fonction f :

- lorsque $x \in [-1 ; 0]$, $f(x) = 1 + x$;
- lorsque $x \in [0 ; 1]$, $f(x) = 1 - x$.

Soit C la courbe obtenue.

2. Vérifions que f est une densité de probabilité :

- f est continue sur $[-1 ; 1]$ (C a un tracé sans rupture) ;
- f est positive sur $[-1 ; 1]$ (C est au-dessus de $\Delta : y = 0$) ;
- l'aire située sous C est égale à 1 (aire d'un triangle).

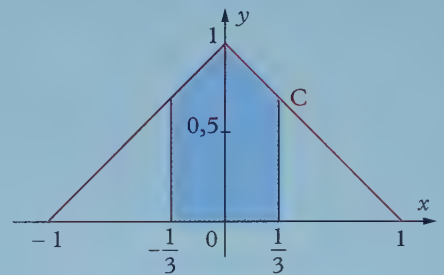
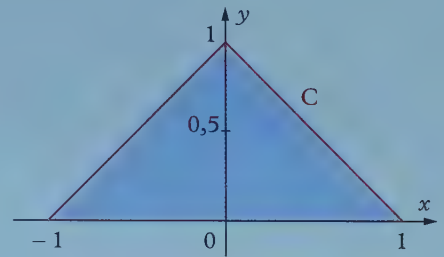
On peut donc définir une loi P sur I en posant pour tout intervalle $[\alpha ; \beta]$ de I :

$$P([\alpha ; \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

En particulier, on a : $P\left(\left[-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right]\right) = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x) dx$.

f étant une fonction paire, C est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et :

$$\begin{aligned} P\left(\left[-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right]\right) &= 2 \int_0^{\frac{1}{3}} f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{3}} (1 - x) dx \\ &= 2 \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$



■ Avec I intervalle non borné

Soit X la variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'intervalle $I = [1 ; +\infty[$ dont la loi de probabilité P sur I admet pour densité la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

Justifier l'existence de la loi continue P , puis calculer de deux façons la probabilité $P(X \geq 2)$.

1. • g est continue et positive sur l'intervalle I .

- Il reste à voir si l'aire sous sa courbe Γ est égale à 1.

Pour cela, on admet qu'il suffit de calculer l'aire du domaine E_k limité par Γ , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = k$, où k est un réel, $k > 1$, puis de faire tendre k vers $+\infty$.

$$\text{On a : } A(E_k) = \int_1^k \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^k = 1 - \frac{1}{k},$$

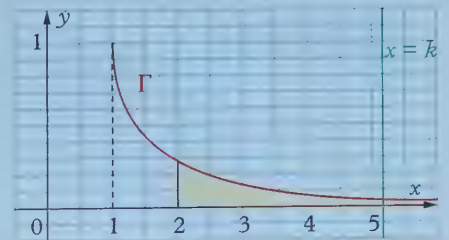
d'où l'aire du domaine E sous la courbe :

$$A(E) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{k} \right) = 1.$$

2. En procédant de même :

$$P(X \geq 2) = P([2 ; +\infty]) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_2^k \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_2^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Mais on peut aussi écrire : } P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = 1 - \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$



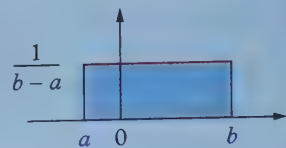
2. Deux exemples de lois continues

A ■ La loi uniforme

Contexte et modèle

Le choix au hasard (le tirage au sort) d'un élément x de l'intervalle $I = [a ; b]$ de \mathbb{R} se modélise par la loi continue sur I dont la densité est constante.

L'aire sous la courbe devant être égale à 1, cette constante est égale à $\frac{1}{b-a}$.



Définition 2 →

• On appelle **loi uniforme sur l'intervalle $I = [a ; b]$** , la loi de probabilité continue sur I dont la densité f est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$.

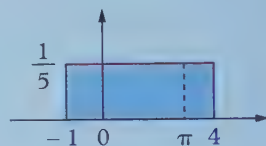
• Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle $[\alpha ; \beta]$ inclus dans $I = [a ; b]$ est égale au quotient de la longueur de $[\alpha ; \beta]$ par celle de $[a ; b]$:

$$P([\alpha ; \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Exemple : Le choix au hasard d'un nombre réel dans l'intervalle $[-1 ; 4]$ se modélise par la loi uniforme P sur $[-1 ; 4]$ de densité constante $\frac{1}{5}$.

Les probabilités d'obtenir un réel égal à π , un réel positif, un réel inférieur à π sont respectivement :

$$P(\pi) = 0, \quad P([0 ; 4]) = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad P([-1 ; \pi]) = \frac{\pi + 1}{5} \approx 0,83.$$



B ■ La loi exponentielle

Contexte et modèle

La durée de vie d'un appareil est une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Si l'on suppose que cette durée de vie ne dépend pas du temps pendant lequel l'appareil a déjà fonctionné (on dit que la durée de vie est sans vieillissement), on démontre que la loi de probabilité de X admet une densité f de la forme $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$, pour tout réel positif x .

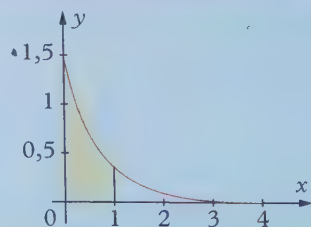
Définition 3 →

• On appelle **loi exponentielle de paramètre λ** la loi continue admettant pour densité la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ où λ est un réel positif fixé.

• Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle $[\alpha ; \beta]$ inclus dans \mathbb{R}^+ est égale à $P([\alpha ; \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_{\alpha}^{\beta}$.

Exemple : Pour $\lambda = 1,5$,

$$\begin{aligned} P([0 ; 1]) &= \int_0^1 1,5 e^{-1,5x} dx \\ &= [-e^{-1,5x}]_0^1 = 1 - e^{-1,5} \approx 0,78. \end{aligned}$$



→ APPLICATION

Exercice 1 Trouver la probabilité d'un ensemble de solutions

- On choisit au hasard un nombre réel x dans l'intervalle $I = [0 ; 10]$.
Quelle est la probabilité que x soit solution de l'inéquation $x^2 - 4x + 3 > 0$?
- On suppose que le tirage d'un nombre réel t dans \mathbb{R}^+ suit la loi exponentielle de paramètre 1.
Quelle est la probabilité que t soit solution de l'inéquation $x^2 - 4x + 3 > 0$?

Solution

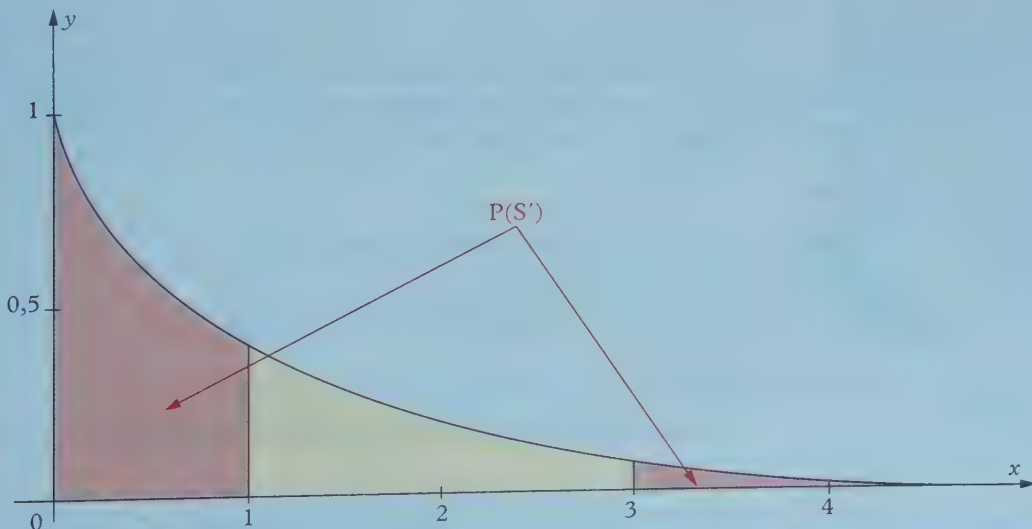
- Le choix au hasard d'un réel dans l'intervalle $I = [0 ; 10]$ se modélise par la loi uniforme P sur cet intervalle : pour tout intervalle J inclus dans I , on a donc $P(J) = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I} = \frac{\text{longueur de } J}{10}$.
 - Les racines du trinôme $x^2 - 4x + 3$ étant 1 et 3, l'ensemble des solutions dans I de cette inéquation est :
 $S = [0 ; 1[\cup]3 ; 10]$.
 - La probabilité cherchée est $P(S) = P([0 ; 1[\cup]3 ; 10])$, et comme $[0 ; 1[$ et $]3 ; 10]$ sont des événements disjoints, $P(S) = P([0 ; 1[) + P(]3 ; 10]) = \frac{1}{10} + \frac{7}{10} = 0,8$.
- Comme dans la question précédente, il s'agit de calculer $P(S')$, où S' est l'ensemble des solutions dans \mathbb{R}^+ de l'inéquation $x^2 - 4x + 3 > 0$.
 - On a cette fois $S' = [0 ; 1[\cup]3 ; +\infty[$ et P est par hypothèse la loi exponentielle de paramètre 1.
On a donc :

$$\begin{aligned} P(S') &= P([0 ; 1[\cup]3 ; +\infty[) = P([0 ; 1[) + P(]3 ; +\infty[) = \int_0^1 e^{-x} dx + \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_3^k e^{-x} dx \\ &= \left[-e^{-x}\right]_0^1 + \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[-e^{-x}\right]_3^k = (-e^{-1} + 1) + \lim_{k \rightarrow +\infty} (-e^{-k} + e^{-3}) = (-e^{-1} + 1) + (0 + e^{-3}) \\ &= 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^3} \approx 0,68. \end{aligned}$$

Néanmoins, il est plus habile d'utiliser l'événement contraire de S' , $\bar{S}' = [1 ; 3]$, dont la probabilité est :

$$\int_1^3 e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_1^3 = (-e^{-3} + e^{-1}).$$

On en déduit alors $P(S') = 1 - P(\bar{S}') = 1 + e^{-3} - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^3} \approx 0,68$.



voir aussi exercices n° 6, 7, 8, 9

1. Des modèles continus

OBJECTIF : Mettre en œuvre des lois continues dans un cadre de conditionnement.

Une entreprise achète des puces électroniques par lots à trois fournisseurs différents A, B et C. Le taux de puces défectueuses dans un lot ne devrait pas dépasser 5 %, mais ce taux est en fait une variable aléatoire continue, prenant ses valeurs dans l'intervalle $[4 ; 6]$, que l'on note T_A , T_B ou T_C selon le fournisseur.

Une étude statistique a conduit à modéliser la loi de T_A par la loi uniforme sur l'intervalle $[4 ; 6]$ et celles de T_B et de T_C par les lois de densités f_B et f_C définies sur $[4 ; 6]$ par

$$f_B(x) = \frac{b}{(x-2)^2} \text{ et } f_C(x) = c(x-4)(x-6), \text{ où } b \text{ et } c \text{ sont des réels fixés.}$$

1. a. Déterminer de façon précise les densités des trois lois.
- b. Représenter graphiquement ces trois densités dans un même repère.
- c. Calculer, dans chaque modèle, la probabilité qu'un lot présente moins de 5 % de pièces défectueuses.
2. Un technicien prélève de son stock un lot de puces électroniques. Ce lot provient de l'un des trois fournisseurs, avec d'égales chances.
 - a. Quelle est la probabilité qu'il contienne moins de 5 % de pièces défectueuses ?
 - b. On suppose que ce lot contient effectivement moins de 5 % de pièces défectueuses. Quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur B ?

2. Durée de vie sans vieillissement

OBJECTIF : Définir et caractériser le *non-vieillessement* ou *absence de mémoire* de la durée de vie d'un appareil.

La durée de vie d'un certain appareil depuis sa fabrication est une variable aléatoire X dont les valeurs sont dans \mathbb{R} .

A. ➔ Explicitation de la notion

On dit que la durée de vie d'un appareil est **sans vieillissement** ou **sans mémoire** lorsque la probabilité qu'il fonctionne encore au moins t_1 heures ne dépend que de t_1 et aucunement du temps t_0 durant lequel il a déjà fonctionné.

C'est en général le cas des composants électroniques.

1. Étude sur un exemple

Pour un matériel dont la durée de vie X est supposée sans vieillissement :

- a. justifier que $P(X \geq 150 / X \geq 90) = P(X \geq 60)$;
- b. en déduire une relation entre $P(X \geq 150)$, $P(X \geq 90)$ et $P(X \geq 60)$.

2. Traduction dans le cas général

Montrer que la durée de vie X d'un appareil est **sans vieillissement** si et seulement si sa loi de probabilité P vérifie la propriété (H) suivante :

$$\text{Pour tous réels positifs } t_0 \text{ et } t_1, \quad P(X \geq t_0 + t_1) = P(X \geq t_0) \times P(X \geq t_1).$$

B. ➔ Cas d'une durée de vie de loi exponentielle

On suppose que la durée de vie X d'un appareil suit une loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$. Prouver que cette durée de vie est sans vieillissement.

C. ➔ Loi d'une durée de vie sans vieillissement

On suppose maintenant que la durée de vie X d'un appareil est sans vieillissement et on se propose de voir quelle peut être la densité f de la loi de probabilité de X .

Pour cela, on considère la fonction R définie sur \mathbb{R}^+ par $R(x) = P(X \geq x)$.

1. Interpréter et calculer : $R(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x)$.

2. Justifier que, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $R(x) = 1 - \int_0^x f(t) dt$.

En déduire que la fonction R est dérivable sur \mathbb{R}^+ . Que vaut $R'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$?

3. Justifier que, pour tous réels a et b de \mathbb{R}^+ on a : $R(a + b) = R(a) \times R(b)$.

En déduire qu'il existe un réel α tel que, pour tout x dans \mathbb{R}^+ : $R(x) = e^{\alpha x}$.

4. Utiliser un résultat de la question 1 pour prouver que α est strictement négatif.

On pose alors $\alpha = -\lambda$, avec $\lambda > 0$. Comment s'écrit alors $R(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$?

5. Déduire des questions précédentes l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

6. Que peut-on en conclure pour la loi d'une durée de vie sans vieillissement ? Quel bilan peut-on faire des parties **B** et **C** ?

Vocabulaire

R est appelée fonction de fiabilité ou de survie de l'appareil.

Rappel

Les fonctions g dérivables sur \mathbb{R} telles que $g(x) \neq 0$ et pour tous réels x et y :

$$g(x + y) = g(x) \times g(y)$$

sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}$ où α est un réel.

3. Désintégration

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, le nombre N d'atomes en activité d'une substance radioactive est lié au temps t par la relation

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \text{ où } \lambda \text{ est une constante dépendant de la substance.}$$

➔ Partie A

1. a. Calculer N en fonction de t , de λ et du nombre initial d'atomes N_0 .

b. Vérifier qu'à un instant t , la proportion d'atomes désintégrés est égale à $1 - e^{-\lambda t}$.

2. On admet que la proportion d'atomes désintégrés par rapport à la quantité initiale, calculée ci-dessus, représente, pour un atome donné de la substance, la probabilité d'avoir été désintégré avant l'instant t .

Soit X la variable aléatoire égale à l'instant où un atome donné se désintègre.

Justifier que la loi de probabilité de X est une loi exponentielle.

Quel est son paramètre ?



Partie B

Période d'un élément radioactif (ou demi-vie) :

temps nécessaire pour que la moitié des atomes d'un échantillon donné se soit désintégrée.

1. Soit T la demi-vie d'un élément. On admet que pour un atome donné de la substance étudiée, cela signifie que $p(X < T) = 0,5$. Que représente T pour la variable X ?
2. Le phosphore 32 a une demi-vie T égale à 14,2 jours.

t est exprimé en jours.

 - a. Calculer le paramètre de la loi X pour le phosphore 32.
 - b. Calculer la probabilité qu'un atome de phosphore 32 se désintègre :
 - durant la première semaine ;
 - après 30 jours.
 - c. À partir de quelle durée de vie peut-on considérer que la probabilité qu'un atome de phosphore 32 se désintègre est supérieure à 0,95 ?

Point Info

Le phosphore 32 est un indicateur isotopique. En remplaçant dans une molécule un ou plusieurs atomes stables par un de leurs isotopes radioactifs (dans l'exploration fonctionnelle d'un organe par exemple), on marque la molécule et on peut la suivre dans les processus physiques et chimiques auxquels elle participe. Le phosphore 32 peut être détecté à moins de 10^{-15} g.

3. a. Dans le cas de l'uranium 238, le paramètre de la loi exponentielle est estimé à $1,54 \times 10^{-10}$.

t est exprimé en années.

Calculer la demi-vie de cet élément.

- b. L'âge de la Terre a pu être évalué à quelques 4,5 milliards d'années. Quelle est aujourd'hui la probabilité qu'un atome d'uranium 238 soit encore actif ?

c. On peut penser qu'au moment de la formation des roches, l'uranium 238 et l'uranium 235 étaient présents dans la même proportion ; pourtant, aujourd'hui, la probabilité qu'un atome d'uranium 235 soit encore en activité n'est plus que 0,7 % de celle d'un atome d'uranium 238.

Quel est le paramètre de la loi exponentielle correspondante ?
Calculer la période de l'uranium 235.



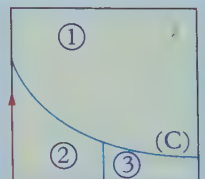
Henri Becquerel a découvert la radioactivité naturelle de l'uranium

4. Hasard et calcul d'aire

Une cible de fléchettes de base carrée est découpée en trois zones par la courbe (C) et un segment vertical.

Dans le repère ayant pour origine le coin O du carré et pour unité graphique

la moitié du côté, l'équation de (C) est $y = f(x) = \frac{1,5}{(x + 1)^2}$.



A. ➔ Simulation

1. Avec une calculatrice

On simule le lancer d'une fléchette à l'aide de la fonction **rand** d'une calculatrice. Les coordonnées x et y du point d'impact de la fléchette sont Y_1 et Y_2 . L'expression de $f(x)$ est donnée par Y_3 .

• Indiquer dans les quatre cas suivants la partie de la cible atteinte par la fléchette :

a. $Y_3 > 0$; b. $Y_3 < 0$ et $Y_1 < 1$; c. $Y_3 < 0$ et $Y_1 > 1$; d. $Y_3 = 0$ ou $Y_1 = 1$.

• Déterminer avec la fonction **TABLE** vingt valeurs de Y_1 , Y_2 et Y_3 .

Sur Casio Graph 35/65/80	Sur TI-82/83
Aller dans le menu TABLE et entrer les fonctions suivantes : $Y_1 = 2 * \text{rand}\#$ (pour trouver rand#, voir page 443) $Y_2 = 2 * \text{rand}\#$ $Y_3 = Y_2 - 1,5 / (Y_1 + 1)^2$ (pour obtenir Y, aller dans VARS , choisir GRAPH).	Aller dans le Menu Y-VARS , sous-menu FONCTION et entrer les fonctions suivantes : $Y_1 = 2 * \text{rand}()$ (pour trouver rand(), voir page 443) $Y_2 = 2 * \text{rand}()$ $Y_3 = Y_2 - 1,5 / (Y_1 + 1)^2$. Aller ensuite dans la table de valeurs.

Calculer les fréquences des impacts situés respectivement dans les zones 1, 2 et 3 et de ceux ayant atteint exactement la courbe (C) ou le segment. Puis grouper les résultats obtenus dans la classe pour obtenir un échantillon de grande taille. Quelles sont les fréquences correspondant aux quatre parties du plan considérées ?

On suppose bien sûr qu'aucune fléchette ne rate la cible...

2. Avec un tableur

On a simulé à l'aide d'un tableur les résultats de 10 joueurs ayant lancé chacun 1 000 fléchettes. Calculer les fréquences moyennes des trois zones.

Zone 1	744	728	755	719	737	768	757	711	761	753
Zone 2	201	190	186	184	179	168	201	204	209	194
Zone 3	55	82	59	97	84	64	42	85	30	53
Courbe	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

B. ➔ Calcul intégral

- Calculer l'aire des zones 1, 2 et 3. Quelles sont leurs proportions par rapport à l'aire du carré ?
- En comparant les résultats trouvés ci-dessus, quelle conclusion peut-on tirer sur les probabilités d'atteindre les trois zones de la cible ?

Dans le lancer de la fléchette, la détermination du point d'impact ne dépend que du hasard. Le tirage au sort du point de coordonnées $(x ; y)$ se modélise par le couple $(Y_1 ; Y_2)$, chacune de ces variables étant uniforme sur le segment $[0 ; 2]$. Comme la loi uniforme sur un segment se traduit par des rapports de longueurs de segments, la loi uniforme dans le plan se traduit par des rapports d'aires.

1 Un exemple de loi exponentielle

Une étude sur la durée du service à la caisse d'un marché d'alimentation a donné les résultats ci-contre.

t	120	240	360	480
p	0,30	0,50	0,66	0,75

p est la proportion de clients servis en une durée inférieure à t (en secondes).

1. a. Représenter dans un repère les points de coordonnées $(t; -\ln(1-p))$. Vérifier que les quatre points sont sensiblement alignés avec l'origine du repère.
- b. En déduire que la variable aléatoire X égale à la durée du service est distribuée selon une loi exponentielle. Quelle valeur peut-on attribuer au paramètre de la loi exponentielle ?
2. On admet qu'on peut prendre comme valeur du paramètre 0,003.
 - a. Quelle est la probabilité que la durée du service soit comprise entre une et trois minutes ?
 - b. Un client n'a pas été servi au cours des trois premières minutes. Quelle est la probabilité qu'il le soit pendant la minute suivante ?

Solution

1. a. Le calcul de $-\ln(1-p)$ donne pour les 4 valeurs de p :

t	120	240	360	480
p	0,3	0,5	0,7	0,75
$-\ln(1-p)$	0,357	0,693	1,204	1,386

Sur le graphique, on constate bien l'alignement prévu.

- b. Soit $y = at$ l'équation affine de la droite D passant par O et le point moyen du nuage de points.

$$\text{Il a pour abscisse } t = \frac{120 + 240 + 360 + 480}{4} = 300$$

$$\text{et pour ordonnée } y = \frac{0,357 + 0,693 + 1,204 + 1,386}{4} = 0,91.$$

$$\text{Le coefficient directeur de la droite } D \text{ est } a = \frac{0,91}{300} \approx 0,003.$$

Admettons que pour d'autres valeurs de t , la proportion p de clients servis dans l'intervalle $[0; t]$ vérifie de même $-\ln(1-p) = 0,003t$.

On en déduit successivement $\ln(1-p) = -0,003t$, puis $1-p = e^{-0,003t}$ et enfin $p([0; t]) = 1 - e^{-0,003t}$.

La densité de cette loi de probabilité est la dérivée de la fonction $t \mapsto 1 - e^{-0,003t}$ soit $0,003e^{-0,003t}$.

Il s'agit donc bien d'une **loi exponentielle de paramètre 0,003**.

2. a. Par définition, $p([60; 180]) = \int_{60}^{180} 0,003e^{-0,003t} dt = [-e^{-0,003t}]_{60}^{180} = e^{-0,180} - e^{-0,540} \approx 0,253$.

- b. Notons respectivement A et B les événements « le client n'a pas été servi pendant les trois premières minutes » et « le client est servi pendant la minute suivante ».

On doit calculer la probabilité conditionnelle $P_A(B) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$.

- Calculons $p(A) = p([180; +\infty[)$. Utilisons l'événement contraire :

$$p([180; +\infty[) = 1 - p([0; 180]) = 1 - \int_0^{180} 0,003e^{-0,003t} dt = 1 - [-e^{-0,003t}]_0^{180}.$$

$$\text{D'où } p(A) = 1 - (1 - e^{-0,540}) = e^{-0,540} \approx 0,583.$$

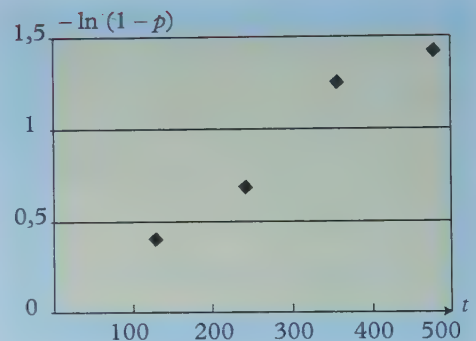
Remarque : $p([0; 180]) = p([0; 180])$

- De même, $p(B \cap A) = p(B)$ car $B \subset A$.

$$\text{D'où } p(B \cap A) = p([180; 240]) = \int_{180}^{240} 0,003e^{-0,003t} dt = [-e^{-0,003t}]_{180}^{240}.$$

$$\text{Donc } p(B \cap A) = e^{-0,540} - e^{-0,720} \approx 0,096.$$

$$\text{Finalement, } P_A(B) = \frac{0,096}{0,583} \approx 0,165.$$



ATTENTION !
 t est exprimé en secondes.

2. Quelques propriétés d'une loi exponentielle

Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ , $\lambda > 0$.

1. Déterminer le mode et la médiane de X .
2. Calculer l'espérance de X .
3. Soit (C) la courbe représentant la densité de X dans un repère d'origine O . La tangente (T) à la courbe au point A d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses en B . Vérifier que le segment $[AB]$ partage la surface limitée par la courbe, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées en deux parties d'aires égales.

Solution

1. • On appelle **mode** toute valeur de X pour laquelle la densité f admet son maximum.

La fonction f étant décroissante sur $[0 ; +\infty[$, le mode est 0 .

• La **médiane** est la valeur t de X telle que $P(X \leq t) = \frac{1}{2}$.

$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ et en prenant le logarithme des deux membres, t vérifie $e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$, soit $t = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

2. On admet que dans le cas d'une loi exponentielle de paramètre λ , l'**espérance** est donnée par $E(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$.

Cette intégrale se calcule en deux temps.

• Pour t réel positif,

on calcule d'abord $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^t x e^{-\lambda x} dx$.

• On fait ensuite tendre t vers l'infini. On procède par intégration

par parties :
$$\begin{cases} U(x) = x & ; & U'(x) = 1 \\ V'(x) = e^{-\lambda x} & ; & V(x) = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \end{cases} \text{ D'où :}$$

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^t x e^{-\lambda x} dx &= \lambda \left[-x \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^t - \lambda \int_0^t -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx = -te^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda x} dx \\ &= -te^{-\lambda t} + \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^t = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}). \end{aligned}$$

D'après les propriétés de la fonction exponentielle, on a, puisque, $\lambda > 0$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda t e^{-\lambda t} = \lim_{T \rightarrow +\infty} T e^{-T} = 0$. On a

donc $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

3. Soit f la densité de X . Par définition de la loi exponentielle, on a $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. La dérivée de f est $f'(x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x}$ et le nombre dérivé de f en 0 est égal à $-\lambda^2$. Le point A a pour coordonnées $(0 ; \lambda)$. Une équation de (T) est donc $y = -\lambda^2 x + \lambda$. On en déduit l'abscisse du point B qui vérifie $-\lambda^2 x + \lambda = 0$ soit $x = \frac{1}{\lambda}$.

L'aire du triangle OAB est $\frac{1}{2} \left(\lambda \times \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{2}$ unités d'aire.

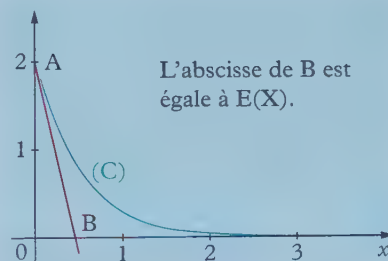
Or l'aire de la surface limitée par la courbe, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées est égale à 1 car f est une densité de probabilité. Le segment $[AB]$ partage donc bien la surface en deux.

Commentaire

Questions 1 et 2 : Les définitions concernant les lois continues de densité f découlent directement de celles énoncées pour les lois dont l'univers est fini.

En particulier, pour l'espérance, la formule $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ devient

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx.$$



→ EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Densité d'une loi de probabilité

1 Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{1}{4}$ est la densité d'une loi de probabilité sur $[-2 ; 2]$.

2 La fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x^4}$ est-elle la densité d'une loi de probabilité sur $[0,5 ; 1]$? Existe-t-il un réel k tel que $k \times f$ soit une densité de probabilité sur ce même intervalle?

3 La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ est-elle la densité d'une loi de probabilité sur $[0,25 ; +\infty[$?

4 Soit t un réel positif. X est une variable aléatoire définie sur $[t ; +\infty[$, dont la loi de probabilité a pour densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

- Quelle est la valeur de t ?
- Calculer alors la probabilité $p(t < X < 2t)$.

5 Soit λ un réel. On définit la fonction f sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \lambda \sin x & \text{si } x \in [0 ; \pi] \\ f(x) \neq 0 & \text{si } x \notin [0 ; \pi] \end{cases}$$

- Calculer λ pour que f soit la densité d'une loi de probabilité.
- Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité a pour densité f . Calculer la probabilité des événements :
 - $(X < 0)$;
 - $(X > \frac{1}{2})$;
 - $(X = \frac{\pi}{2})$.

Loi uniforme

6 1. Le choix d'un réel x dans l'intervalle $[-1 ; 5]$ se fait suivant la loi uniforme.

- Quelle est la probabilité que l'on ait $|x| \leq 2$?
- Quelle est la probabilité que l'on ait $2x^2 - 1 > 0$?

2. Soit $t > 0$. Le choix d'un réel x dans $[-t ; t]$ se fait suivant la loi uniforme.

- Calculer t sachant que $p([-0,25 ; 0,5]) = \frac{1}{8}$.
- Calculer alors $p([2,2 ; 3])$.

7 Christophe vient chez Karine tous les matins entre 7 heures et 7 heures 45 pour prendre un petit café.

1. Sachant que Christophe ne vient jamais en dehors de la plage horaire indiquée et qu'il peut arriver à tout instant avec les mêmes chances, quelle densité peut-on attribuer à la variable aléatoire X : « heure d'arrivée de Christophe »?

2. Calculer la probabilité que Christophe sonne chez Karine :

- après 7 h 30 ;
- avant 7 h 10 ;
- entre 7 h 20 et 7 h 22 ;
- à 7 h pile.

8 Deux personnes A et B se donnent rendez-vous entre midi et treize heures. A arrive à 12 h 20.

- Quelle est la probabilité que B arrive exactement à la même heure?
- Calculer la probabilité que la première personne arrivée attende l'autre plus de 10 minutes.

9 On choisit au hasard un nombre réel x dans l'intervalle $I = [-2 ; 7]$.

Quelle est la probabilité que x soit solution de :

- l'inéquation $2x^2 - 4x - 6 < 0$?
- l'inéquation $2x^2 - 4x - 6 \leq 0$?

10 Dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm, on tire au hasard entre -1 et 1 l'abscisse d'un point M de la parabole d'équation $y = x^2$. Soit A et B les points de coordonnées $(-1 ; 0)$ et $(1 ; 0)$.

1. On appelle S l'aire du triangle AMB.

Calculer la probabilité que S soit :

- inférieure à $0,5 \text{ cm}^2$;
- supérieure à 2 cm^2 .

2. On sait que la probabilité $p(S < t) = \frac{1}{2}$. Calculer t .

11 On tire au hasard un réel x dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

Soit D la variable aléatoire égale au premier chiffre non nul de l'écriture décimale de x .

- Calculer la probabilité d'avoir $D = 5$.
- Calculer la probabilité d'avoir $D \geq 1$.

12 Soit une variable X, à valeurs réelles, de loi uniforme sur $[a ; b]$.

On appelle médiane de X le réel x tel que

$$P(X \leq x) = \frac{1}{2}.$$

Quelle est la médiane de X?

Loi exponentielle

13 Une variable X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$.

1. Construire la courbe de la densité f de la loi de X et hachurer les domaines représentant les événements :

a. $X \leq 0,8$; b. $1,5 \leq X \leq 3$.

2. Calculer à 0,01 près leurs probabilités.

14 Soit une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ positif.

1. a. Le mode de X est le réel x pour lequel la densité est maximale. Quel est le mode de X ?

b. La médiane de X est le réel x pour lequel $p(X < x) = p(X > x)$. Quelle est la médiane de X ?

2. Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, calculer la probabilité des événements :

a. $(2 \leq X < 3)$; b. $(X \geq 5)$; c. $(X < 7)$.

15 Une variable Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

1. Calculer t tel que $p(X > t) = 0,95$.

2. Calculer t' tel que $p(X < t') = 0,05$.

3. Calculer t'' tel que $p(X \leq t'') = 0,5$.

Comment appelle-t-on ce nombre t'' ?

16 Une variable X suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. Calculer λ sachant que $p(1 \leq X \leq 2) = \frac{2}{9}$.

2. Calculer alors $p(2 \leq X \leq 4)$.

17 La durée de fonctionnement, en heures et sans panne, d'un appareil de grande diffusion est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle

de paramètre $\frac{1}{1600}$. Calculer la probabilité que la

durée de fonctionnement de l'appareil soit :

a. supérieure à 1 000 heures ; b. égale à 1 200 heures ;

c. inférieure à 1 500 heures.

18 On admet que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre

λ est égale à $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. On estime qu'un chêne

pédonculé vit en moyenne 240 ans.

1. La durée de vie, en années, d'un chêne est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité peut être approchée par une loi exponentielle. Quel est son paramètre ?

2. Un chêne produit ses premiers glands à 50 ans. Calculer la probabilité qu'un chêne produise des glands.

3. Un chêne grandit jusqu'à 200 ans. Calculer la probabilité qu'un chêne termine sa croissance.

4. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un chêne soit comprise entre 200 et 500 ans.

19 L'ordinateur

Un ordinateur fonctionne tant bien que mal avant... de tomber en panne.

1. La variable aléatoire X , qui désigne le nombre de jours pendant lesquels cette machine fonctionne avant de tomber en panne, suit une loi exponentielle. Sachant que la probabilité qu'il n'y ait aucune

panne durant les dix premiers jours est égale à $\frac{1}{e}$, calculer le paramètre de la loi.

2. Déterminer alors la probabilité que :

a. il n'y ait aucune panne durant les 30 premiers jours ;

b. la première panne survienne durant le quatrième jour.

3. Sachant qu'il n'y a pas eu de panne pendant sept jours consécutifs, calculer la probabilité qu'il n'y en ait pas pendant les sept jours suivants.

20 vu au BAC Durée de vie moyenne

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. La probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est :

$$p([0 ; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % des composants d'un lot important sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0 ; 200]) = 0,5$.

1. Montrer que $\lambda = \frac{\ln 2}{200}$.

2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée au centième près.

3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite, quand A tend vers $+\infty$,

de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$.

a. Montrer que :

$$\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}.$$

b. En déduire d_m . On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

juin 2004.

1. $x \mapsto e^{-\lambda x}$ a pour dérivée $x \mapsto -\lambda e^{-\lambda x}$.

$p([0 ; 200]) = 0,5$ équivaut à :

$$\int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,5.$$

2. Penser à l'événement contraire.

3. Intégrer par parties.

→ Que sais-je ?

Vrai ou faux ?

21 La fonction f définie par $f(x) = 6x(1-x)$ lorsque $x \in [0; 1]$ et $f(x) = 0$ lorsque $x \notin [0; 1]$ est une densité de probabilité sur \mathbb{R} .

22 La fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x^3}$ est une densité de probabilité sur $[1; +\infty[$.

23 La demi-vie d'un élément radioactif est la moitié du temps nécessaire pour que tous les atomes d'une quantité donnée soient désintégrés.

Dans les exercices 24 à 26, on choisit au hasard un nombre réel x dans l'intervalle $[1; 10[$.

24 La probabilité que x soit compris entre 2 et 5 est égale à $\frac{1}{3}$.

25 La probabilité que la partie entière de x soit égale à 3 est égale à 0,1.

26 Les événements « $x = \pi$ » et « x est un entier » ont même probabilité.

Dans les exercices 27 à 29, la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

27 Pour $t \in \mathbb{R}^+$, $P(X \leq t) = \int_0^t e^x dx$.

28 $P(X \geq 1) = \frac{1}{e}$.

29 $P(X \geq 2) \times P(X \geq 5) = P(X \geq 10)$.

Dans les exercices 30 à 32, la variable aléatoire Y modélise le temps d'attente, en minutes, à la caisse d'un supermarché ; elle suit la loi exponentielle de paramètre 0,1.

30 La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = e^{-0,1t}$.

31 La probabilité d'attendre moins de trois minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16.

32 Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à 7 minutes.

QCM

Dans les exercices 33 à 40, choisir la ou les réponses justes.

Le contexte suivant concerne les exercices 33 à 36.

À un feu tricolore, le signal destiné aux piétons est vert pendant 45 secondes et rouge pendant 105 secondes, en alternance. À 12 h, le feu se met au rouge et un piéton se présente entre 12 h et 12 h 05 pour traverser.

La variable aléatoire T qui donne en secondes le temps écoulé entre 12 heures et l'heure d'arrivée du piéton suit une loi uniforme sur $I = [0; 300]$.

33 La densité de T est la fonction f définie sur I par $f(t) = \dots$:

A. t ; B. $\frac{1}{5}$; C. $\frac{1}{150}$; D. $\frac{1}{300}$.

34 La probabilité que le piéton trouve le feu vert et traverse sans attendre est égale à :

A. 0,2 ; B. 0,3 ; C. 0,4 ; D. 0,5.

35 La probabilité que le piéton n'attende pas le feu vert plus de 15 secondes est égale à :

A. 0,2 ; B. 0,3 ; C. 0,4 ; D. 0,5.

36 La probabilité que le piéton attende le feu vert plus de 30 secondes est égale à :

A. 0,2 ; B. 0,3 ; C. 0,4 ; D. 0,5.

Le contexte suivant concerne les exercices 37 à 40.

La durée de vie, en années, d'un appareil ménager avant sa première panne est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle P de paramètre λ .

37 Pour $t \geq 0$, $P(X \geq t)$ est égale à :

A. $1 - e^{-\lambda t}$; B. $1 + e^{-\lambda t}$; C. $e^{\lambda t}$; D. $e^{-\lambda t}$.

38 Le réel t tel que $P(X \leq t) = P(X \geq t)$ est :

A. la demi-vie de l'appareil ;
B. $\frac{\ln 2}{\lambda}$; C. $\frac{\lambda}{\ln 2}$; D. $\frac{\lambda}{2}$.

39 Si la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est $p = 0,18$, alors la valeur exacte de λ est :

A. $\ln \frac{50}{41}$; B. $\ln \frac{41}{50}$;
C. $\frac{\ln(82)}{\ln(100)}$; D. $\frac{\ln(100)}{\ln(82)}$.

40 Sachant que l'appareil n'a connu aucune panne au cours des deux années suivant sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

A. $P(X \geq 3)$; B. $P(X = 1)$;
C. $P(X \geq 1)$; D. $P(2 \leq X \leq 3)$.

D'après Bac, Amérique du Nord, juin 2003.

→ Un sujet vu au BAC (extrait)

41 Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie, en années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi de « durée de vie sans vieillissement » ou encore « loi exponentielle de paramètre λ », avec $\lambda > 0$. Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125. On prendra 0,125 comme valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à six mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 appareils.

Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'eux fonctionne plus de dix ans soit supérieure à 0,999 ?

Polynésie française, juin 2004.

Solution

$$1. P(X > 10) = 1 - P(0 \leq X \leq 10) = 1 - \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= 1 - [-e^{-\lambda t}]_0^{10} = 1 - (-e^{-10\lambda} + 1) = e^{-10\lambda}.$$

L'égalité $P(X > 10) = 0,286$ équivaut donc à $e^{-10\lambda} = 0,286$, ce qui donne $-10\lambda = \ln(0,286)$ ou $\lambda = -0,1 \ln(0,286)$.

D'où $\lambda \approx 0,125$, à 10^{-3} près.

2. La probabilité demandée est $P(X < 0,5) = 1 - e^{-0,625} \approx 0,465$.

3. Deux démarches sont possibles.

- Par le calcul : $P_{X \geq 8}(X \geq 10) = \frac{P(X \geq 8 \text{ et } X \geq 10)}{P(X \geq 8)}$

$$= \frac{P(X \geq 10)}{P(X \geq 8)} = \frac{e^{-10 \times 0,125}}{e^{-8 \times 0,125}} = e^{-0,25} \approx 0,779.$$

- Par la propriété d'une loi de durée de vie sans vieillissement :

$$P_{X \geq 8}(X \geq 10) = P(X \geq 2) = 1 - \int_0^2 0,125 e^{-0,125t} dt = e^{-0,25}.$$

4. Pour un oscilloscope donné, on sait par hypothèse que $P(X > 10) = 0,286$ et donc que $P(X \leq 10) = 0,714$.

Pour 15 oscilloscopes, la probabilité que l'un au moins d'entre eux vérifie « $X > 10$ » est égale à :

$1 - P(\text{« aucun des 15 oscilloscopes ne vérifie } X > 10 \text{ »})$ soit encore $1 - P(\text{« les 15 oscilloscopes vérifient } X \leq 10 \text{ »})$.

Comme ces 15 oscilloscopes se comportent de façon indépendante, la probabilité cherchée est alors $p = 1 - 0,714^{15} \approx 0,994$.

5. Pour n oscilloscopes, on obtient de même :

$$P(\text{« au moins un oscilloscope vérifie } X > 10 \text{ »}) = 1 - P(\text{« les } n \text{ oscilloscopes vérifient } X \leq 10 \text{ »}) = 1 - 0,714^n.$$

Il reste à chercher n tel que $1 - 0,714^n \geq 0,999$ soit encore $0,714^n \leq 0,001$ qui équivaut à $n \ln(0,714) \leq \ln(0,001)$ soit

$$\text{encore à } n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,714)} \text{ qui donne } n \geq 21.$$

Il faudrait donc acheter au moins 21 oscilloscopes.

Le jour du BAC

Question 1 : On sait que X suit une loi exponentielle de paramètre λ . Il en résulte que, pour $0 \leq a \leq b$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

En calculant cette intégrale, on peut établir une bonne fois pour toutes :

$$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

d'où, en particulier :

$$P(0 \leq X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ et}$$

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}.$$

Question 2 : Les résultats généraux obtenus en 1 dispensent maintenant de nouveaux calculs.

Il faut aussi avoir présent à l'esprit que, pour une loi continue, $P(X = k) = 0$; car peu importe ensuite que les bornes des intervalles soient comprises ou non !

Question 3 : Il va de soi que la seconde démarche est préférable (bonne compréhension d'une loi sans vieillissement) et efficace !

Questions 4 et 5 : Il s'agit ici de se souvenir que l'indépendance de plusieurs épreuves se modélise par la loi de probabilité « produit ». Le recours à une loi binomiale serait possible ici, mais plutôt lourd et inutile !

→ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Densité d'une loi de probabilité

42 Soit une variable aléatoire T , à valeurs réelles, de densité de probabilité :

$$f: \begin{cases} t \mapsto \lambda(1-t^2), & \text{si } t \in [-1; 1] \\ t \mapsto 0, & \text{si } t \notin [-1; 1] \end{cases}$$

1. Calculer λ . Construire la représentation graphique de f .

2. Déterminer graphiquement la médiane de T .

3. Calculer la probabilité de l'événement $\left(T \geq \frac{1}{2}\right)$. Représenter cette probabilité sur le graphique précédent.

4. On admet que l'espérance de T est donnée par $E(T) = \int_{-1}^1 tf(t) dt$. Calculer $E(T)$.

43 1. Déterminer un polynôme f du second degré, s'annulant en -1 et 2 , positif sur $[-1; 2]$, tel que $\int_1^2 f(x) dx = 1$. Représenter graphiquement f .

2. On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité sur $[-1; 2]$ admet pour densité de probabilité la fonction f .

Calculer la probabilité des événements :

a. $(-0,5 < X < 0,5)$; **b.** $(X < 1)$ **c.** $(0 < X)$.

3. **a.** On appelle **mode de X** tout réel x pour lequel la densité est maximale.

Préciser le ou les mode(s) de X .

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer la probabilité de l'événement $(X < t)$. Pour quelle valeur de t a-t-on $p(X < t) = 0,5$? Vérifier graphiquement ce résultat.

44 1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f: \begin{cases} y \mapsto 0, & \text{si } y \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ y \mapsto \frac{2}{\pi} \cos^2 y, & \text{si } y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Étudier les variations de la fonction f .

2. Vérifier que f est une densité de probabilité sur \mathbb{R} .

3. Soit une variable aléatoire Y , à valeurs réelles, de densité de probabilité f . Le mode de Y est la valeur de y pour laquelle la densité est maximale.

Quel est le mode de Y ?

La médiane de Y est la valeur de y pour laquelle $p(Y < y) = p(Y > y)$.

Quelle est la médiane de Y ?

4. Calculer la probabilité de l'événement $\left(Y > \frac{\pi}{4}\right)$.

45 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$x \mapsto x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

1. **a.** Étudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormal.

b. Justifier que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire, à valeurs réelles, de densité de probabilité f . Préciser le mode de X .

3. Calculer les probabilités des événements :

a. $(0 \leq X < 2)$; **b.** $(1 < X)$.

4. Calculer la médiane de X .

Loi uniforme

46 La dureté d'une pièce mécanique est distribuée uniformément entre 80 et 90 sur l'échelle de Rockwell.

1. Quelle est l'expression de la densité de probabilité de la variable aléatoire continue « dureté » ?

2. Quelle est la probabilité que la dureté d'une pièce soit inférieure ou égale à 80 ?

3. Quelle est la probabilité qu'une pièce mécanique présente une dureté supérieure à 83, mais inférieure à 88 ?

4. Quelle est la probabilité qu'une pièce présente une dureté supérieure à 86 sachant que la dureté de la pièce est supérieure à 82 ?

47 Sur un axe réel d'origine O , on considère les points A et B d'abscisses respectives -1 et 1 . Soit M un point du segment $[AB]$, d'abscisse x .

1. Calculer en fonction de x les longueurs des segments $[AM]$, $[MB]$ et $[OB]$.

2. Calculer la probabilité que les segments $[AM]$, $[MB]$ et $[OB]$ soient les trois côtés d'un triangle.

Rappel : Dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

48 Dans un repère orthonormal d'origine O , on tire au hasard entre -1 et 1 l'abscisse d'un point M du demi-cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ avec $y \geq 0$.

Soit $A(-1; 0)$. Calculer à $0,01$ près la probabilité que l'aire du triangle AOM soit supérieure à $0,4$.

49 Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est uniforme sur $]0; 1]$. On appelle Y la variable aléatoire définie par $Y = X^2$.

1. Calculer en fonction du réel t la probabilité de l'événement $(Y < t)$.

2. En déduire la fonction densité de Y .

Remarque : si une variable X a pour densité f , X^2 n'a généralement pas pour densité f^2 .

Loi exponentielle

50 X et Y sont deux variables aléatoires de lois exponentielles. Leurs paramètres sont λ et λ' respectivement.

- Exprimer les densités f et g de X et Y en fonction de t .
- Pour quelle valeur t , f et g sont-elles égales ?

51 Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. La variable aléatoire Y suit la loi exponentielle de paramètre λ .

- Calculer $p(1 \leq Y < 2)$ en fonction de λ .
- Pour quelle valeur de λ cette probabilité est-elle maximale ?

52 Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ . Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique dont le premier terme et la raison sont tous deux positifs. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = p(X > t_n)$. Démontrer que la suite (p_n) est une suite géométrique.

53 Les composants

On a mélangé dix composants de fabrication caractérisée par une durée de vie suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = a$ et cinq composants d'une fabrication caractérisée par une durée de vie suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda' = b$. On choisit au hasard un élément de ce mélange ; soit X la variable aléatoire égale à sa durée de vie.

1. Soit t un réel positif. Calculer la probabilité de l'événement $(X < t)$. En déduire la densité de X.

2. On prend $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$.

Calculer le réel x tel que $p(X < x) = \frac{7}{12}$.

54 Durée de vie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un composant électronique, choisi au hasard dans une fabrication donnée, est une variable aléatoire T de densité exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-4}$.

1. Calculer les probabilités P_1 de l'événement $(T < 2\,500)$ et P_2 de l'événement $(T \geq 7\,000)$.

2. En posant, pour simplifier, $P_1 = 0,39$ et $P_2 = 0,25$, calculer la probabilité de trouver, dans un lot de dix composants choisis indépendamment :

- cinq composants de durée de vie inférieure à 2 500 h ;
- au moins un composant de durée de vie supérieure à 7 000 h.

55 vu au BAC Une vie de robot

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0005$).

Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$p([0 ; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Déterminer, pour chaque question, la bonne réponse.

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

- A. $e^{-\frac{2\,500}{\lambda}}$; B. $e^{\frac{5}{\lambda}}$; C. $1 - e^{-\frac{2\,500}{\lambda}}$; D. $e^{-\frac{2\,000}{\lambda}}$.

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule :

$$E = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

a. L'intégrale $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$ est égale à :

- A. $\lambda \frac{t^2}{2} e^{-\lambda t}$; B. $-te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$;
C. $\lambda te^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} - \lambda$; D. $te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$.

b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

- A. 3 500 ; B. 2 000 ; C. 2531,24 ; D. 3000.

La Réunion, juin 2004.

Les exercices 56 et 57 sont tirés des *Exercices ordinaires de probabilité*, Gérard Frugier, Ellipses.

56 La Belle au bois dormant

La Belle au bois dormant est assise devant la cheminée, sa quenouille à la main. L'intervalle de temps T (en minutes) qui sépare l'instant où elle a pris place pour filer la laine de celui où elle va se piquer avec le fuseau suit une loi exponentielle de

paramètre $\lambda = \frac{1}{10}$.

- Exprimer la densité de probabilité de T.
- Sachant qu'il ne lui est rien arrivé pendant les huit premières minutes, calculer la probabilité pour qu'elle ne se pique pas dans les cinq minutes qui suivent.

57 Duke live

Duke Ellington a composé son *Diminuendo in blue and crescendo in blue* pour enregistrer sur un disque 78 tours. La durée est donc limitée à 3 min 30 s.



Lorsqu'il l'interprète en public avec son orchestre, cette durée de 3,5 minutes est prolongée de X minutes par les chœurs des solistes. La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de moyenne 3 minutes.

Au festival de New Port, il interprète *Diminuendo in blue and crescendo in blue* en public.

- Calculer la probabilité pour que le morceau dépasse sept minutes.
- Sachant qu'il dépasse 7 minutes, calculer la probabilité pour que le morceau dépasse 10 minutes.

EXERCICES

58 Roméo et Juliette

Juliette et Roméo se sont donné rendez-vous au buffet de la gare de Vérone entre 17 heures et 19 heures. Chacun d'eux peut arriver à n'importe quelle heure de façon équiprobable durant cette plage horaire. On appelle X et Y les temps écoulés, en minutes, à partir de 17 h avant l'arrivée de Juliette et Roméo respectivement. On leur associe le point M de coordonnées $(X; Y)$ dans un repère orthonormal d'unité graphique 0,1 cm.

- Dessiner l'ensemble auquel appartient M . Quelle est son aire α ?
- Quelle est la partie du plan correspondant à l'événement E : « Roméo et Juliette arrivent tous deux durant la première heure » ? Quelle est son aire β ?
- Calculer la probabilité de E et vérifier que :

$$p(E) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

- Juliette a décidé qu'elle n'attendrait pas plus de 10 minutes, Roméo, lui, attendra jusqu'à 20 minutes...
 - Sachant que Roméo arrive à 18 h 50, quelle est la probabilité qu'il ne rencontre pas Juliette ?
 - Sachant que Roméo arrive à 19 h 20, quelle est la probabilité qu'il rencontre Juliette ?
- On suppose $X < Y$. Écrire les conditions sur X et Y traduisant l'événement : « Roméo et Juliette se rencontrent ». Hachurer la partie du plan décrite par les points M correspondants. Quelle est son aire ?
 - On suppose $Y < X$. Reprendre la question précédente dans ce cas.
 - Calculer la probabilité que Roméo et Juliette se rencontrent.

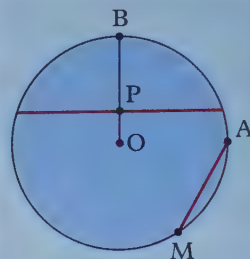
59 La diva

- À 23 h, heure à laquelle finit la représentation de *Tosca*, la diva qui chante le rôle-titre prend son temps pour quitter l'Opéra-Bastille. La variable aléatoire T égale au temps (exprimé en heures) qu'elle met pour quitter l'Opéra est approchée par une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{3}$.
 - Calculer la probabilité qu'elle sorte avant minuit.
 - Calculer la probabilité qu'elle sorte après 1 h du matin.
- Après chaque représentation, un admirateur attend la diva à l'extérieur pour lui offrir des fleurs. Si elle sort avant 1 h du matin, il peut prendre le métro pour rentrer chez lui. Sinon, il doit prendre un taxi.
 - Calculer la probabilité qu'il rentre en métro après une représentation.
 - Cette année, *Tosca* est à l'affiche pour une série de 15 représentations. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de jours où l'admirateur rentre chez lui en métro. Quelle est la loi de X ? Son espérance ? Sa variance ?
 - Le retour en métro revient à 1 €. En revanche, le taxi lui coûte 10 €. Soit Y la variable aléatoire

égale au coût de son retour chez lui durant la série de représentations.

- Déterminer la loi de Y .
- Calculer son espérance.

60 Bertrand



Dans un plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 5 cm, on considère le cercle (C) de centre O et de rayon 1. On appelle A et B les points de coordonnées respectives $(1; 0)$ et $(0; 1)$.

- On inscrit dans le cercle un triangle équilatéral. Calculer la longueur du côté de ce triangle.
- À tout réel $t \in [0; 2\pi]$, on associe le point M du cercle tel que l'arc \widehat{AM} ait pour mesure algébrique t . On appelle X la variable aléatoire égale à la longueur de la corde $[AM]$.
 - Calculer X en fonction de t .
 - Calculer la probabilité $p(X > \sqrt{3})$.
- À tout réel $y \in [0; 1]$, on associe le point $P(0; y)$ du segment $[OB]$. On appelle Y la variable aléatoire égale à la longueur de la corde passant par P et perpendiculaire à $[OB]$.
 - Calculer Y en fonction de y .
 - Calculer la probabilité $p(Y > \sqrt{3})$.

Dans les questions 2 et 3, on calcule la probabilité d'inscrire dans un cercle une corde de longueur supérieure à celle du triangle équilatéral.

Chaque méthode est très générale :

• Pour la question 2, le calcul à partir de n'importe quel point du cercle donnerait le même résultat. Le choix de A ne nuit pas à la généralité.

• Pour la question 3, le calcul à partir de n'importe quel rayon du cercle donnerait le même résultat. Le choix de $[OB]$ ne nuit pas à la généralité.

Et pourtant la probabilité n'est pas la même...

c. Ce paradoxe dû à Joseph Bertrand illustre la nécessité de définir de façon très précise la façon dont le hasard intervient dans le choix de la corde.

Point Info

Joseph Bertrand (1822-1900) fut un mathématicien brillant et précoce (il obtint un doctorat à 17 ans). Son activité s'exerça en analyse, en arithmétique et en probabilités, domaine dans lequel son traité *Calcul des probabilités* (1899) fit longtemps autorité.

→ PROBLÈMES

61 En série ou en parallèle

La transmission d'un signal se fait par l'intermédiaire de deux composants électroniques. On désigne par X_1 et X_2 les durées de vie, exprimées en heures, des composants 1 et 2, et on suppose que chacune suit une loi exponentielle de même paramètre λ .

Partie A. Montage en dérivation



Dans ce montage, le signal continue donc à se transmettre tant que l'un au moins des deux composants reste en état de marche. Soit X la durée de vie de ce système.

1. On se propose de démontrer que la probabilité que la transmission du signal s'arrête avant l'heure t est donnée par : $P(X \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^2$.

a. Méthode 1

• Donner, pour $t \geq 0$, les probabilités :

$$P(X_1 \leq t) \text{ et } P(X_2 \leq t).$$

• En déduire $P(X \leq t)$.

On justifiera avec soin chaque étape.

b. Méthode 2

• Donner, pour $t \geq 0$, les probabilités :

$$P(X_1 > t) \text{ et } P(X_2 > t).$$

• En déduire $P(X > t)$, puis $P(X \leq t)$.

On justifiera avec soin chaque étape.

2. En déduire la densité f de la loi de probabilité de X .

Partie B. Montage en série



Dans ce montage, le signal cesse donc de se transmettre dès que l'un au moins des deux composants tombe en panne.

Soit Y la durée de vie de ce système.

1. Établir, comme dans la partie A, par deux méthodes différentes que, pour $t \geq 0$, on a $P(Y \leq t) = 1 - e^{-2\lambda t}$.

2. En déduire la densité g de la loi de probabilité de Y .

Partie C. Comparaison des deux systèmes

1. Quelle conjecture peut-on faire sur le signe de $\varphi(t) = P(X \leq t) - P(Y \leq t)$, pour $t \geq 0$?

Vérifier par le calcul.

2. On admet que l'espérance de X et l'espérance de Y sont respectivement données par :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x tf(t) dt$$

et

$$E(Y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x tg(t) dt.$$

Comparer les durées de vie moyennes des deux systèmes.

62 vu au BAC Composants défectueux

Les parties A et B sont indépendantes.

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ?

Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ?

Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$.

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :

a. si ce composant est défectueux ;

b. si ce composant n'est pas défectueux.

Donner une valeur approchée de ces probabilités à 10^{-2} près.

2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.

Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :

$$P(T \geq t) = 0,02e^{-5 \times 10^{-4}t} + 0,98e^{-10^{-4}t}$$

(on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?

Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Amérique du Sud, novembre 2005.

Chapitre 2

6 1. Pour tout intervalle I contenant ℓ , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in I$, alors pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \in I$.
Donc $(u_{n+1}) \rightarrow \ell$.

2. Oui.

21 a. $+\infty$; b. 1 ; c. $-\infty$ car $u_n \leq 1 - n$.

24 1 car $n \left(\frac{n}{n^2 + n} \right) \leq u_n \leq n \left(\frac{n}{n^2} \right)$.

25 Oui ; en effet $u_n = \frac{3^n \left(2 + \frac{1}{3^n} \right)}{3^n \left(1 + \frac{4}{3^n} \right)}$.

31 a. $+\infty$; b. 0 ; c. 0.

66 a. $\frac{1}{2}$;

b. $-\frac{1}{2}$ car $x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}-1}{x-0}$ a pour limite en 0 le nombre dérivé de $x \mapsto \sqrt{x+1}$ en 0 et $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ a pour limite -1 en 0.

Chapitre 3

20 $f(-1) = g(-1) = h(-1) = 2$ et $f'(-1) = g'(-1) = h'(-1) = 1$.

56 1. $\lim_0 f = \sin(0) = 0$; 2. $f'(0) = \frac{1}{2}$; 3. Oui.

58 1. a. Continue sur \mathbb{R} ; b. continue sur \mathbb{R} .
2. a. non ; b. non.

70 1. et 2.

x	0	1
$f'(x)$	0	0
$f(x)$	0	-1

3. On résout $x^4 - 2x^2 - y = 0$ dans $[0; 1]$ en posant $X = x^2$, $x = \sqrt{1 - \sqrt{1 + y}}$.

Chapitre 4

7 $f(x) = 4$.

14 a. $-\frac{4}{3}$; b. 4, -2.

17 En posant $X = e^x$: $\Delta = (e-1)^2$, $X=1$ ou $X=e \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$.

19 a. $]-\infty; \frac{5}{2}[$;

b. $\{0; 2\}$.

27 a. $-\infty$.

b. $(x+1)e^{-x+1} = \frac{(x+1)e}{e^x}$; pour $x \rightarrow +\infty$; $\frac{e^x}{e^x} + \frac{e}{e^x} \rightarrow 0$.

45 1. $x \mapsto Ce^x$, C constante réelle ;

2. $x \mapsto 2e^x$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto 0$, $x \mapsto -\frac{1}{2}e^x$, $x \mapsto -e^x$.

75 a. $x - y = 1$ et $-x + 2y = -3 \Leftrightarrow x = -1$ et $y = -2$.

b. $x = 0$ et $y = -1$.

Chapitre 5

3 a. $\left] \frac{1}{2}; +\infty[\right]$;

b. $]0; +\infty[$;

c. $]0; e[\cup]e; +\infty[$;

d. $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

19 $x > 0$, $y > 0$.

Solutions : $(x; y) = \left(\frac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2}; \frac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2} \right)$ ou

$\left(\frac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2}; \frac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2} \right)$.

21 a. $p = 13$; b. $p = 26$; c. $p = 7$.

25 a. $\ln x + 1$ sur \mathbb{R}^* ; b. $\frac{2}{2x-1}$ sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty[\right]$;

c. $\frac{e^x - 1}{e^x - x}$ sur \mathbb{R} ; d. $\frac{x \ln x - x + 1}{x(\ln x)^2}$ sur $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

Chapitre 6

4 1. $y = Ce^{kx} + 1$, $C \in \mathbb{R}$. 2. $f(x) = e^{x \ln 3} + 1$.

15 a. $+\infty$; b. 0 ; c. $+\infty$; d. 0.

26 1. a. $x^{\frac{14}{3}}$; b. $x^{\frac{17}{20}}$; c. $x^{-\frac{31}{15}}$; d. $x^{\frac{7}{8}}$.

Chapitre 7

10 a. $x \mapsto \frac{5}{7} \sqrt[5]{x^7}$; b. $x \mapsto 6x^{\frac{2}{3}}$.

c. Écrire $f(x) = x^2 + x^{\frac{3}{2}}$, primitive : $x \mapsto 2\sqrt{x} \left(\frac{x^3}{7} + \frac{x^2}{5} \right)$.

d. Écrire $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$, primitive : $x \mapsto 2\sqrt{x}(x+1)$.

12 a. $x \mapsto e^{3x} + 1$; b. $x \mapsto \frac{1}{3} e^{3x-5}$;

c. $x \mapsto \ln(e^x + 1)$; d. $x \mapsto \frac{3}{4} (e^x + 2)^{\frac{4}{3}}$.

19 a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3\theta \, d\theta = \left[\frac{1}{3} \sin 3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}$;

b. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}$.

23 a. $\int_0^4 (|x-1| + |x-3|) \, dx$

$$= \int_0^1 (4-2x) \, dx + \int_1^3 2 \, dx + \int_3^4 (2x-4) \, dx = 10 ;$$

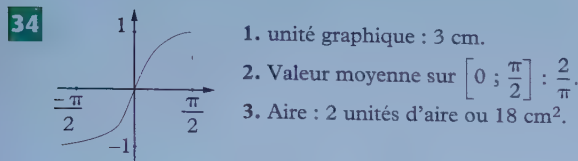
b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$;

c. $\int_{-2}^2 |t^2 + 3t + 2| \, dt = \int_{-2}^2 |t+1| |t+2| \, dt = \frac{41}{3}$.

Exercices corrigés

27 a. $\int_1^e \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^e = 1$;

b. $\int_1^e t^n \ln t \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t - \frac{1}{(n+1)^2} t^{n+1} \right]_1^e$
 $= \frac{ne^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$.



Chapitre 9

13 a. $|i| = 1$; $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$; $|-i| = 1$; $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$;
 $|-1| = 1$; $\arg(-1) = \pi$.

b. $|2i| = 2$; $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$; $\left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$; $\arg\left(-\frac{4}{3}\right) = \pi$;
 $\left|-\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$; $\arg\left(-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}$.

18 a. $\left|\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{2}}\right| = 1$; $\arg\left(\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{\pi}{3}$; $\left|-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = 1$;
 $\arg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

b. $|1+i| = \sqrt{2}$; $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$; $|-1+i\sqrt{3}| = 2$;
 $\arg(-1+i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$.

28 a. $z_1 - 2z_2 = 1 + 5i$; **b.** $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; **c.** $z_1^2 z_2 = 4$;
d. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

41 a. $z = 1 + 2i$;
b. Pas de solution.

72 1. a. $(\overline{EF}, \overline{EG}) = 0$ (2π).
b. E, F et G sont alignés.
 2. $z(\overline{EF}) = 7,5 - 1,5i$ et $z(\overline{EG}) = 5 - i$.
 On a donc F image de G par l'homothétie de centre E et de rapport 1,5.

Chapitre 10

2 a. (A, 1), (B, 2) ;
b. (A, 1), (B, -3) ;
c. (A, -3), (B, 2).

9 1. I barycentre de {(A, 1), (B, 2)} donc nous avons :
 • G barycentre de {(A, 1), (B, 2), (C, 3), (D, 3)} ;
 • M' barycentre de {(G, 9), (M, 5)}.
 2. $\overline{GM'} = \frac{5}{14} \overline{GM}$ donc f est l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{5}{14}$; la droite parallèle à (AB) passant par I' = f(I).

10 Théorème du barycentre partiel
 1. G est barycentre de {(I, 2), (J, 2)} .
 2. G est barycentre de {(H, 3), (A, 1)} .

15 a. $3\overline{MG}$; **b.** $3\overline{MG}$; **c.** $2\overline{MK}$; **d.** $\vec{0}$.

24 $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

27 $\vec{u}(3; 1; -2)$, $A(2; -1; 1)$, $B(5; 0; -1)$.

Chapitre 11

6 a. 0 ; **b.** -13 ; **c.** 1.

12 1. $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$ et $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$;
 2. ABDC est un rectangle.

31 a. (15 ; 16 ; -3) ; **b.** (-4 ; 3 ; 1) ; **c.** (7 ; -18 ; 10).

34 $2x - 7y + 5z - 21 = 0$.

75 a. (-1 ; 5 ; 6 ; 3).

b. $S = \left\{ \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}t ; -\frac{7}{20} - \frac{3}{4}t ; \frac{7}{5} - t ; t \right) ; t \in \mathbb{R} \right\}$.

90 1. a. $\overline{AB} \cdot \overline{AM} = \overline{AB} \cdot \overline{HM}$;
b. $\overline{AB} \cdot \overline{AM} = ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0)$
 $= ax + by + cz + d$.
 2. $\overline{AB} \cdot \overline{HM} > 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + d > 0$.
 3. $\overline{AB} \cdot \overline{HM} < 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + d < 0$.

Chapitre 12

6 • $P(X=1) = \frac{18}{37}$; $P(X=-1) = \frac{19}{37}$; $E(X) = -\frac{1}{37}$;
 $\sigma(X) \approx 1$.

• $P(Y=35) = \frac{1}{37}$; $P(Y=-1) = \frac{36}{37}$; $E(Y) = -\frac{1}{37}$;
 $\sigma(Y) \approx 5,8$.

Même espérance de gain pour Xavier et Yoann, mais prise de risque plus importante pour Yoann, qui peut gagner « gros » !

8 1. a. 0,821 ; 0,426.
b. 0,179 ; 0,464 ; 0,076 ; 0,034
 0,503 ; 0,402 ; 0,067 ; 0,028
 2. **a.** $P(O) = 0,440$; **b.** $P_O(\text{Rh}^+) = 0,795$.

23 1. a. $\frac{7}{120}$; **b.** $\frac{1}{6}$; **c.** $\frac{23}{60} \approx 0,38$.
 2. C'est Yoann qui a le plus de chances de gagner à ce jeu (0,45 contre 0,38).

48 1. $\frac{2}{9}$; **2.** $\frac{2}{5}$.

56 1. a. $\frac{343}{1728}$; **b.** $\frac{7}{432}$; **c.** $\frac{7}{72}$.
 2. **a.** $\frac{1}{2}$; **b.** $\frac{7}{9}$.

Exercices corrigés

Chapitre 13

5 1. $\binom{48}{6} = 12\,271\,512$; 2. 12 271 336.

11 1. a. $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$.

2. a. $\binom{11}{9} = 55$

3. a. $2^6 = 64$ 4. $A_0 = 2$; $A_1 = 2$; $A_2 = 6$; ...
 A_n paraît entier pour tout $n \in \mathbb{N}$.

21 1. L'épreuve « forage » a deux issues :

- le succès « Pétrole » de probabilité 0,1 ;
- l'échec « Non pétrole » de probabilité 0,9.

2. a. L'indépendance des 9 forages !

b. $1 - (0,9)^9$; $\left(\frac{9}{3}\right)(0,1)^3(0,9)^6$.

c. • Il s'agit de la loi binomiale définie par :

$$P(K = k) = \binom{9}{k}(0,1)^k(0,9)^{9-k} \text{ pour } k \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

• $E(X) = n \times p = 9 \times 0,1 = 0,9$ (à peine 1 sur 10).

50 1. 0,5 ; 0,5.

2. $\binom{10}{7}(0,8)^7(0,2)^3 \approx 0,201$; $\binom{10}{7}(0,5)^7(0,5)^3 \approx 0,117$.

3. $P(C) \approx 0,159$.

4. $P_C(A) \approx 0,632$.

Chapitre 14

3 • $\forall x \in [0,25 ; +\infty[, f(x) > 0$.

• $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{0,25}^X f(x) dx = 4 \neq 1$; donc la fonction f n'est pas une densité de probabilité.

11 1. $P(D = 5) = \frac{1}{9}$.

2. $P(D \geq 1) = 1$.

16 1. $\int_1^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{9}$, $\lambda = \ln \frac{3}{2}$ ou $\lambda = \ln 3$.

2. Si $\lambda = \ln \frac{3}{2}$: $P(2 \leq X \leq 4) = \frac{20}{81}$;

si $\lambda = \ln 3$: $P(2 \leq X \leq 4) = \frac{8}{81}$.

46 1. $X \sim f(x) = \frac{1}{10}$ pour $x \in [80 ; 90]$.

2. Si X est la v.a.r. « dureté » : $P(X \leq 80) = 0$.

3. $P(83 \leq X \leq 88) = \int_{83}^{88} \frac{1}{10} dx = \frac{1}{2}$.

4. $P(X \geq 86 / X \geq 82) = \frac{P(X \geq 86 \text{ et } X \geq 82)}{P(X \geq 82)}$
 $= \frac{P(X \geq 86)}{P(X \geq 82)}$
 $= \frac{1}{2}$

avec $P(X \geq 86) = \int_{86}^{90} \frac{1}{10} dx = 4$

et $P(X \geq 82) = \int_{82}^{90} \frac{1}{10} dx = 8$.

51 1. $P(1 \leq Y < 2) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = \frac{e^\lambda - 1}{e^{2\lambda}}$.

2. $\lambda = \ln 2$.

56 1. $T \sim \frac{1}{10} e^{-\frac{t}{10}}$. 2. $P(T \geq 13 / T \geq 8) = e^{-0,5} \approx 0,6$.

Utilisation des calculatrices

Étude de fonctions et calculatrices TI 82/82 STATS/83/84

1. Graphe et table de valeurs

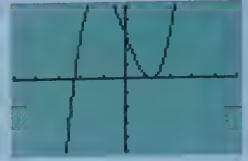
Dans **MODE**, régler les paramètres.

```
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connecter Dot
```

Aller dans l'éditeur **Y=** et entrer la fonction en Y_1 . Régler la fenêtre de tracé dans **WINDOW**. **GRAPH** permet d'obtenir le tracé. Pour avoir la table de valeurs, régler les paramètres dans **2nd** **TBLSET** puis faire afficher la table par **2nd** **TABLE**.
Nombre de solutions de $f(x) = 0$: une solution négative ; on effectue un zoom pour savoir s'il y a des solutions positives.

Exemple : $f: x \mapsto x^3 - 4x + 3$.
Graphe :

```
MATHIO FORMAT
Xmin=-5
Xmax=5
Xscl=1
Ymin=-5
Ymax=5
Yscl=1
```

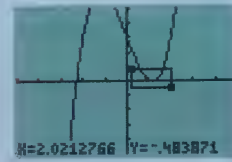


2. Utiliser les zooms

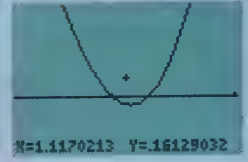
Faire un zoom sur une partie du tracé :

- **Zoom Box** : dans **ZOOM**, choisir ZBox pour choisir la fenêtre de tracé (positionner le curseur au coin supérieur gauche de la fenêtre de tracé souhaitée à l'aide des flèches du clavier et valider par **ENTER**), puis positionner le curseur au coin inférieur droit et valider).

Choix de la fenêtre puis



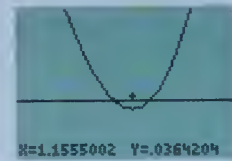
ENTER



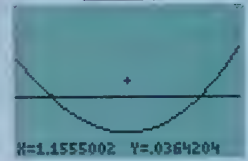
Il y a deux solutions positives.

- **Zoom In** : dans **ZOOM**, choisir Zoom In, déplacer à l'aide des flèches le curseur pour le mettre au centre de la fenêtre de tracé souhaitée puis valider. (Les facteurs d'agrandissement peuvent être réglés dans **ZOOM** **MEMORY** **SetFactors**.)

Choix du centre puis



ENTER



- D'autres options du menu Zoom suivant les modèles :

ZSquare (obtenir un repère orthonormé), **ZDecimal** (le curseur se déplace avec un pas de 0.1 sur les abscisses), **Zoom Out** (faire un zoom arrière, même procédure que Zoom In), **MEMORY** **ZPrevious** (revenir à la fenêtre précédente).

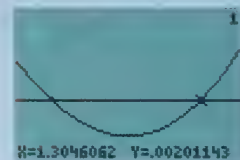
3. Analyser la courbe

Si plusieurs courbes sont tracées, sélectionner la courbe à étudier à l'aide des flèches **▲** et **▼** du clavier.

– la fonction **Trace** : pour afficher les coordonnées d'un point de la courbe, aller dans **TRACE**, choisir la courbe et déplacer le curseur par les flèches du clavier **◀** et **▶**.

– le menu **2nd** **CALC** permet également de trouver racines, extrema, intersection de deux courbes.

Lecture des solutions de $f(x) = 0$ avec la fonction Trace :



La plus grande est à peu près égale à 1,3.

4. Calculer un nombre dérivé : $f'(\alpha)$

Dans **MATH** sous-menu MATH, choisir **nDeriv** pour taper l'expression $nDeriv(Y_1, X, 2)$ (pour avoir $f'(2)$).

Pour obtenir Y_1

– sur TI82/83, dans **2nd** **Y-VAR**, choisir Function puis Y_1 .
– sur TI82 STATS/84, dans **VAR**, choisir Y-VARS puis 1 : Function et Y_1 .

Le menu dans **2nd** **CALC** permet également de calculer un nombre dérivé.

Calcul de $f'(2)$:

```
nDeriv(Y1,X,2)
8.000001
```

5. Calculer une intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

Dans **2nd** **CALC** choisir $\int f(x) dx$. Aux questions « Lower Limit ? » et « Upper Limit ? », donner les valeurs de α et β en positionnant le curseur. L'aire est automatiquement hachurée et la valeur de l'intégrale affichée. Remarque : on peut se placer en zoom décimal.

Autre méthode : dans **MATH** choisir **fnInt** et taper l'expression $fnInt(Y_1, X, \text{valeur de } \alpha, \text{valeur de } \beta)$.

Calcul de $\int_0^1 f(x) dx$:



Étude de fonctions et calculatrices Casio Graph 35/65/80

1. Graphe et table de valeurs

Dans **MENU** choisir **GRAPH**.

Dans **SET UP** régler les paramètres :

Draw Type = Connected, Graph Func = On, Derivative = Off, Angle = Rad.

Retourner dans **GRAPH** et entrer la fonction en **Y1**.

Régler la fenêtre de tracé dans **Vwindow**. Tracer la courbe par **F6** (Draw).

Pour avoir la table de valeurs, aller dans **Menu** choisir **TABLE**, régler les paramètres par **F5** (RANG), valider puis faire afficher la table par **F6** (TABL).

Exemple : $f: x \mapsto x^3 - 6x + 3$

Avec dans **V-window** les réglages :

Xmin = -5

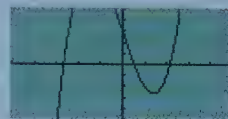
max = 5

scale = 1

Ymin = -5

max = 5

scale = 1



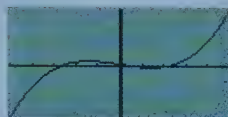
2. Utiliser les zooms

• Ajuster le tracé à l'écran :

Zoom Auto : dans **Zoom** (par **SHIFT** **F2**) choisir **F5** **AUTO**.

Le tracé est ajusté à l'écran (ymin, ymax sont ajustés aux valeurs de x).

Après un **Zoom Auto**

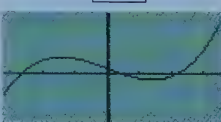
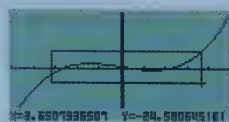


• Faire un zoom sur une partie du tracé :

Zoom BOX : dans **Zoom** (par **SHIFT** **F2**) choisir **F1** **BOX**.

Pour choisir la fenêtre de tracé, positionner le curseur au coin supérieur gauche de la fenêtre de tracé souhaitée à l'aide des flèches du clavier et valider par **EXE**, puis positionner le curseur au coin inférieur droit et valider par **EXE**.

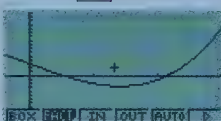
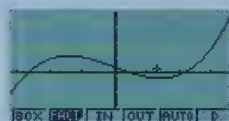
Choix de la fenêtre de tracé puis **EXE**.



Zoom IN : dans **Zoom** (par **SHIFT** **F2**), déplacer à l'aide des flèches le curseur pour le mettre au centre de la fenêtre de tracé souhaitée puis choisir **F3** (**IN**).

(Dans l'exemple, les coefficients d'agrandissements sont réglés dans **FACT** (par **F2**) sur **Xfact = 2** et **Yfact = 2**.)

Choix du point central puis **F3** (**IN**).



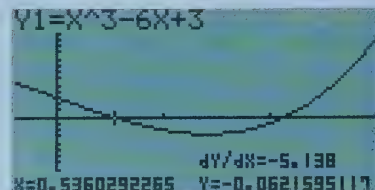
• D'autres options du menu **Zoom** à connaître (dans **Zoom**, faire dérouler les sous-menus supplémentaires par **F6**):

PRE (revenir à la fenêtre précédente), **ORIG** (revenir à la fenêtre d'origine), **SQR** (obtenir un repère orthonormé), **OUT** (faire un zoom arrière, même procédure que **IN**).

3. Analyser la courbe

Si plusieurs courbes sont tracées, sélectionner la courbe à étudier à l'aide des flèches **▲** et **▼** du clavier.

• la fonction **Trace** : pour afficher les coordonnées d'un point de la courbe, aller dans **Trace** (par **SHIFT** **F1**), choisir la courbe et déplacer le curseur par les flèches du clavier (quand dans **SET UP** on a activé la dérivation (Derivative = ON), le nombre dérivé $dy/dx = f'(x)$ est aussi affiché).



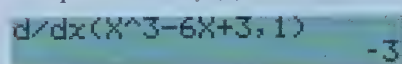
• le menu **G-Solv** permet également de trouver racines, minimum, maximum, intersection de deux courbes.

Exemple : dans **G-solv** (par **SHIFT** **F5**), choisir **ROOT** (= racine) par **F1**. Après un temps de calcul, le curseur parcourt la courbe et s'arrête à la première racine. Le relancer par la flèche **▶** pour trouver d'autres racines.

4. Calculer un nombre dérivé $f'(a)$

Dans le menu **RUN** par la touche **OPTN**, choisir **CALC**, puis d/dx par **F2**. Finir d'entrer $d/dx (f(x), a)$. *Remarque :* la variable est toujours x .

Exemple : calcul de $f'(1)$.

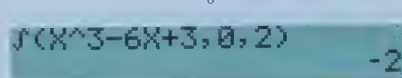


5. Calculer une intégrale $\int_a^b f(x) dx$

Dans le menu **RUN**, taper **OPTN**, choisir **CALC**, puis $\int dx$ par **F4**.

Finir d'entrer $\int (f(x), a, b)$. *Remarque :* la variable est toujours x .

Exemple : calcul de $\int_0^2 f(x) dx$.



Autre méthode : si $a < b$, ayant tracé la courbe de f , choisir le menu **G-Solv** puis **F6** puis **F3**. Positionner le curseur de telle sorte que $x = a$ (**LOWER**), valider, positionner le curseur de telle sorte que $x = b$ (**UPPER**) puis valider.



Étude de fonctions et calculatrices TI 89/voyage 200

1. Choix du Mode : Dans le menu MODE, sous-menu Graph, choisir FUNCTION.

2. Entrée d'une fonction, Table de valeurs, Graphe, Trace, Zoom : comme sur les autres calculatrices TI, p. 438.

3. Zooms supplémentaires disponibles dans l'écran graphique.

Par **[F2]** choisir :

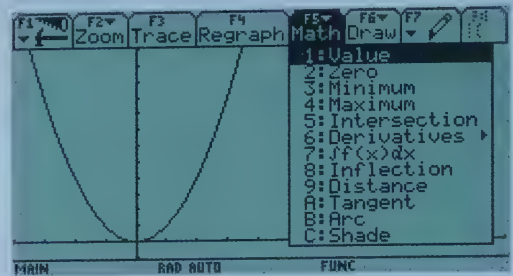
ZoomTrig (par 7:ZoomTrig) : la fenêtre de tracé est adaptée aux fonctions trigonométriques.

ZoomFit (par A:ZoomFit) : les bornes de la fenêtre y_{min} et y_{max} sont ajustées automatiquement aux valeurs de x pour que la courbe soit tracée en plein écran.

4. Outils mathématiques dans l'écran Graphe

Dans l'écran graphique, on obtient par **[F5]** le menu ci-contre.

Choisir l'outil à utiliser. Valider par **[ENTER]**. S'il y a plusieurs courbes, sélectionner la ou les courbes concernées avec les flèches **▲** et **▼** du clavier. Quand le curseur désigne la courbe choisie, valider. Préciser si nécessaire les bornes de l'intervalle d'étude (choisir chaque borne (lower bound, upper bound) en déplaçant le curseur et valider la position de chacune).



Exemple : choisir 6 : Derivatives ; un seul choix est proposé (1:dy/dx), valider. Placer le curseur sur un point (x ; f(x)) de la courbe ; valider. Le nombre dérivé dy/dx = f'(x) est affiché.

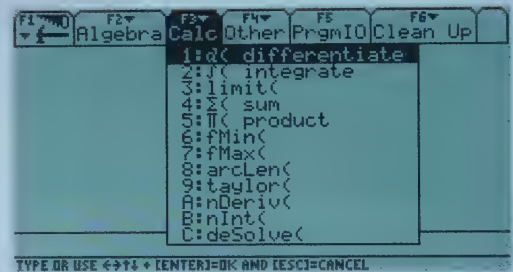
5. Outils de calcul sur les fonctions

Dans l'écran **[Home]**, par **[F3]** Calc on obtient le menu ci-contre.

• **Calculer une limite :** Choisir 3:limit(.

Pour obtenir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, entrer : limit(expression f(x), variable x, a),

où a peut être un nombre réel ou ∞ (pour $+\infty$) ou $-\infty$ (le symbole ∞ est disponible au clavier).



Exemple : limite de $\sqrt{x^2-1} - x$ quand x tend vers $+\infty$.

• **Calculer une dérivée :** Choisir 1 : d(differentiate .

Entrer : d(f(x), variable x par rapport à laquelle on dérive)

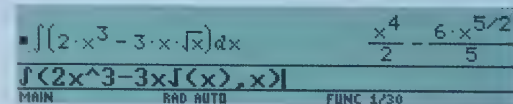
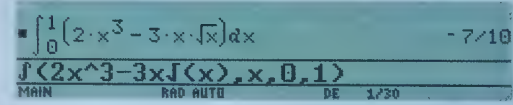
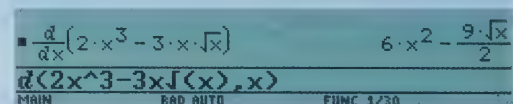
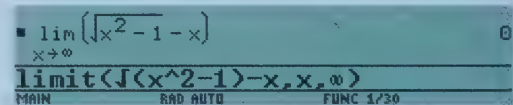
Exemple : f'(x) avec f(x) = 2x³ - 3x√x.

• **Calculer une intégrale, une primitive :** Choisir 2 : ∫(integrate

Entrer : ∫(f(x), variable d'intégration x, borne inférieure, borne supérieure)

Pour obtenir une primitive de f, ne pas préciser les bornes d'intégration.

Exemple : $\int_0^1 (2x^3 - 3x\sqrt{x}) dx$ et primitive.



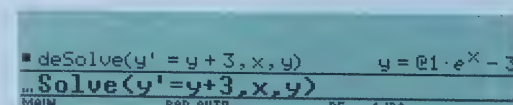
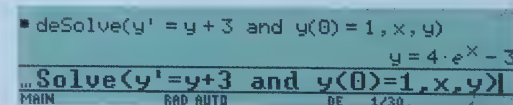
• **Résoudre une équation différentielle (ordre 1 ou 2) :** Choisir C : deSolve(.
Entrer : deSolve(équation and condition initiale, nom de la variable, nom de la fonction).

Le symbole ' pour y' est disponible au clavier, and est disponible dans le menu **[MATH]** (au clavier) sous-menu Test.

Exemple : Résolution de y' = y + 3 avec y(0) = 1.

Si on ne précise pas de condition, on obtient la solution générale.

Exemple : Résolution de y' = y + 3 (@1 désigne une constante).



Suites et calculatrices TI 82 et Casio Graph 35/65/80

Table de valeurs et représentation graphique

TI 82

Dans **MODE** choisir Seq et Dot puis quitter par **QUIT**.

• Suite récurrente simple

1. Entrer l'expression de u_n en fonction de u_{n-1}

Aller dans l'éditeur **Y=**.

Exemple : $u_1 = -2$ et $u_n = 0,5u_{n-1} + 3$ pour $n \geq 2$.

On obtient U_{n-1} au clavier par **2nd** **7**.

$U_n = 0,5$ **2nd** **7** **+** **3**.

Pour entrer une deuxième suite, utiliser V_n .

```
Un = 0.5Un-1+3
Vn =
```

2. Table de valeurs

a. Entrer dans **WINDOW** :

$UnStart =$ premier terme de la suite

$nStart =$ son indice

b. Régler dans **Tblset** :

$Tblmin =$ indice du premier terme à afficher dans la table

$\Delta Tbl =$ pas entre les indices des termes affichés.

```
TABLE SETUP
TblMin=1
ΔTbl=1
Indpt: Auto Ask
Depend: Auto Ask
```

```
WINDOW FORMAT
UnStart=-2
UnStart=0
nStart=1
```

c. Quitter puis aller dans **TABLE**.

n	U _n
1	-2
2	-1,25
3	-0,875

n=1

3. Représentation graphique dans le plan

Dans **WINDOW** finir de régler les paramètres

$nmin$ ($nmax$) = indice du premier (dernier) terme représenté.

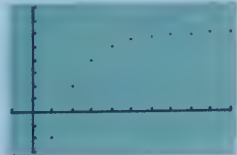
$Xmin$, $Xmax$, ... pour régler la fenêtre de tracé.

```
WINDOW FORMAT
UnStart=-2
UnStart=0
nStart=1
nMin=1
nMax=10
Xmin=-1
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-3
Ymax=8
Yscl=1
```

Dans **WINDOW** sous-menu **Format**.

Choisir **Time** puis aller dans **GRAPH**.

```
WINDOW FORMAT
Time: Web
RectGC: PolarGC
CoordOn: CoordOff
GridOff: GridOn
AxesOn: AxesOff
LabelOff: LabelOn
```



• Si u_n est connu en fonction de n

1. Entrer l'expression de u_n dans l'éditeur **Y=**

Exemple : $u_n = n^2 - n$. On obtient n au clavier par **2nd** **9**.

$U_n =$ **2nd** **9** **^** **2** **-** **2nd** **9**

```
Un = n^2 - n
Vn =
```

2. 3. Table de valeurs et graphe

Suivre les mêmes procédures 2b, 2c, 3 que pour une suite récurrente.

Par **Trace**, on peut se déplacer sur le graphe obtenu, comme sur une courbe représentative de fonction.

Casio Graph 35/65/80

Dans **MENU** choisir l'icône RECUR puis valider par **EXE**.

• Suite récurrente simple

1. Entrer l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n

Choisir ce type de suite (a_{n+1}) par **F3** puis **F2**.

Exemple : $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$ pour $n \geq 1$

On obtient a_n par **F4** puis **F2**.

$a_{n+1} = 0,5$ **F4** **F2** **+** **3**
valider par **EXE**.

```
Recursion
an+1=0.5an+3
bn+1:
```

2. Table de valeurs

Taper **F5** (RANG) pour régler les paramètres,

$Start$ et End : indices des premier et dernier termes à afficher dans la table ; choisir si le premier terme est a_0 ou a_1 par **F1** ou **F2** ; ($anStr$ sert pour un autre type de graphique).

```
Table Range n+1
Start:1
End:10
a1:-2
b1:0
anStr:0
bnStr:0
ao/a1
```

Valider par **EXE**.

Par **F6** (TABL), afficher la table.

n+1	a _{n+1}
1	-2
2	2
3	4
4	5

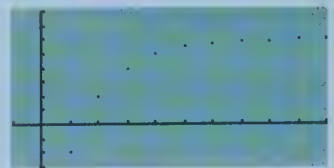
FORM DEL WEB G-CON G-PLT 1

3. Représentation graphique

Dans **V-Window**, régler les paramètres de la fenêtre de tracé, puis valider par **EXE**.

```
View Window
Xmin:-1
max:10
scale:1
Ymin:-3
max:8
scale:1
INIT TRIG STD STD RCL
```

Retourner par **F6** dans l'écran Table puis choisir **F6** (G-PLT).



• Si u_n est connu en fonction de n

1. Entrer l'expression de u_n

Choisir ce type de suite (a_n) par **F3** puis **F1**.

Exemple : $u_n = n^2 - n$

On obtient n par **F4**.

$a_n =$ **F4** **^** **2** **-** **F4**.

Valider par **EXE**.

```
Recursion
an=n^2-n
bn:
```

2. 3. Table de valeurs et graphe

Comme pour une suite récurrente (seules les valeurs de $Start$ et de End sont à entrer dans RANG).

Suites et calculatrices TI 82 STATS/83/84 et TI 89/Voyage 200

Table de valeurs et représentation graphique

TI 82 STATS/83/84

Dans **MODE** choisir Seq et Dot. Quitter par **QUIT**. Après avoir entré u_n , on se reportera aux explications de la page 441 sur la TI 82 pour obtenir la table de valeurs (**2b**, **2c**).

• Suite récurrente simple

1. Entrer u_n en fonction de u_{n-1}

Aller dans l'éditeur **Y=**.

Exemple : $u_1 = -2$ et $u_n = 0,5u_{n-1} + 3$ pour $n \geq 2$ on obtient

u_{n-1} par **2nd** **7** **(** **X,T,θ,n** **-** **1** **)**
 $u(n) = 0$ **.** **5** **u** **1** **(** **n** **-** **1** **)** **+** **3** **ENTER**

Entrer de plus le premier terme dans **u(nMin)** et le premier indice dans **nMin**.

```
nMin=1
u(n)0.5*u(n-1)
+3
u(nMin)0(-2)
u(n)=
v(nMin)=
```

2. Représentation graphique dans le plan

Démarche similaire à la TI82, mais dans **WINDOW** **PlotStart** est le rang du premier terme représenté, **PlotStep** est le pas entre deux indices.

Le menu **FORMAT** est accessible par **2nd** **ZOOM**.

• Si u_n est connu en fonction de n

Entrer l'expression de u_n : aller dans l'éditeur **Y=**.

Entrer l'indice du premier terme dans **nMin** et l'expression de u_n en fonction de n , on obtient n par la touche **X,T,θ,n**.

Exemple : $u_n = n^2 - n$ pour tout $n \geq 0$

$u(n) =$ **X,T,θ,n** **^** **2** **-** **X,T,θ,n**
 $nMin=0$
 $u(n)0n^2-n$
 $u(nMin)0$

Calculatrices sans menu « suite »

Pour obtenir les termes d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, il faut alors entrer un programme.

TI	Casio
Input "PREMIER INDICE", D	"PREMIER INDICE" : ?→D
Input "PREMIER TERME", X	"PREMIER TERME" : ?→X
Input "INDICE N", N	"INDICE N" : ?→N
Lbl 1	Lbl 1
Y1→X	Y1→X
D+1→D	D+1→D
If D<N	If D<N
Then	Then Goto 1
Goto 1	Else "U=" : X▲
Else	IfEnd
Disp "U=",X	
End	

Attention : le Y de Y1, n'est pas la lettre Y du clavier mais s'obtient dans **Y-VARS** ou **VARS** et x par **X,T**.

Utilisation du programme : entrer la fonction f en Y1. Lancer le programme. Entrer les trois valeurs demandées par la calculatrice suivies chacune de **ENTER** ou **EXE**. La calculatrice affiche le terme u_N .

Par **Trace**, on peut se déplacer sur le graphe obtenu, comme sur une courbe représentative de fonction.

TI 89/Voyage 200

Dans **MODE** choisir dans le menu Graph ... l'option 4:Sequence ; valider.

• Suite récurrente simple

3. Définition de la suite

Aller dans l'éditeur **Y=**. Entrer dans **u1** l'expression de u_n en fonction de u_{n-1} et le premier terme de la suite dans **u1**.

Exemple : $u_1 = -2$ et pour $n \geq 2$, $u_n = 0,5u_{n-1} + 3$

$u_1 = 0$ **.** **5** **u** **1** **(** **n** **-** **1** **)** **+** **3** **ENTER**

```
u1=.5*u1(n-1)+3
u1=-2
u2=
u12=
```

4. Table de valeurs

a. Entrer l'indice du premier terme (**nmin**) dans **WINDOW**.

b. Régler dans **Tblset** :

TblStart = indice du premier terme à afficher ;

ΔTbl = pas entre les indices des termes à afficher

```
TABLE SETUP
tblStart..... 1.
Δtbl..... 1.
Graph <-> Table OFF→
Independent.... AUTO→
```

nmin=1.

c. Aller dans **TABLE**.

n	u1
1.	-2.
2.	2.
3.	4.
4.	5.
5.	5.5
6.	5.75
7.	5.875

5. Représentation graphique

Dans l'éditeur **Y=** par la touche **F7**, dans le menu Axes... choisir TIME.

Régler les paramètres dans **WINDOW**.

nmin = indice du premier terme de la suite

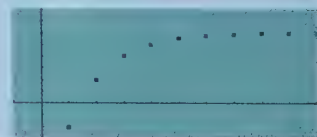
nmax = indice du dernier terme représenté

plotStrt = rang du premier terme représenté (premier, deuxième, troisième, ...terme)

plotStep = pas entre les indices des termes construits

```
nmin=1.
nmax=10.
plotStrt=1.
plotStep=1.
xmin=-1.
xmax=10.
xsc1=1.
ymin=-3.
ymax=8.
yscl=1.
```

Aller dans **GRAPH**.



• Si u_n est connu en fonction de n

1. Entrer l'expression de u_n dans l'éditeur **Y=**.

Exemple : $u_n = n^2 - n$

$u_1 =$ **n** **^** **2** **-** **n** **ENTER**

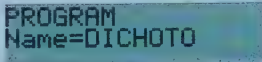
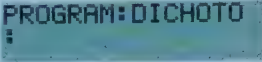

2. Table de valeurs et graphe

Suivre les mêmes procédures **2b**, **2c** et **3** que pour une suite récurrente.

Programmation et calculatrices TI 82/82 STATS/83/84, Casio Graph 35/65/80

Exemple : le programme de dichotomie (TP 5 p. 32)

Étape 1. Créer un nouveau programme

TI 82/82 STATS/83/84	Casio Graph 35/65/80
<ul style="list-style-type: none"> • Aller dans le mode PRGM par PRGM (au clavier). • Choisir NEW puis valider par ENTER. En face de NAME = , taper le nom du programme DICHOTO puis valider par ENTER .  	<ul style="list-style-type: none"> • Choisir dans MENU l'icône PRGM ; valider par EXE. • Choisir NEW. Le curseur clignote entre deux crochets. Taper le nom du programme DICHOTO puis EXE . 

Étape 2. Taper la liste des commandes

Pour taper les lignes du programme correspondant à votre calculatrice (voir tableau ci-dessous) :

- les commandes (ou relations) écrites en gras sont chacune sur un fond de couleur ; pour savoir où les trouver sur votre calculatrice, consulter la ligne de même couleur dans le tableau de la page ci-contre.
- après avoir tapé une ligne de programme, taper sur **EXE** ou **ENTER** pour passer à la ligne suivante.

Lignes	Programme	Programme TI	Programme Casio
L1 et L2	Demander « valeur de A_0 » et ranger la valeur entrée par l'utilisateur dans la variable A	:Input "valeur de A0",A	"valeur de A0" ? → A
L3 et L4	Demander « valeur de B_0 » et ranger la valeur entrée par l'utilisateur dans la variable B	:Input "valeur de B0",B	"valeur de B0" ? → B
L5 et L6	Demander « indice de début » et ranger la valeur entrée par l'utilisateur dans la variable N	:Input "indice de début",N	"indice de début" ? → N
L7 et L8	Demander « indice de fin » et ranger la valeur entrée par l'utilisateur dans la variable P	:Input "indice de fin",P	"indice de fin" ? → P
	TANT QUE N < P	:While N < P	While N < P
L9	SI $\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 > 19$,	:If $((A+B)/2)^2 > 19$	If $((A+B)/2)^2 > 19$
L11	ALORS ranger la valeur de $(A+B)/2$ dans B	:Then :(A+B)/2 → B	Then (A+B)/2 → B
L10	SINON ranger la valeur de $(A+B)/2$ dans A	:Else :(A+B)/2 → A	Else (A+B)/2 → A
L12	FIN du SI	:End	IfEnd
	Ranger la valeur N + 1 dans N.	:N+1 → N	N+1 → N
	FIN du TANT QUE	:End	WhileEnd
	Afficher le message « A » puis la valeur contenue dans la variable A.	:Disp "A",A	"A" A▲
	Afficher le message « B » puis la valeur contenue dans la variable B.	:Disp "B",B	"B" B▲

Étape 3. Utiliser le programme

TI 82/82 STATS/83/84	Casio Graph 35/65/80
Aller dans le menu PRGM par PRGM . Choisir EXEC puis sélectionner le programme DICHOTO et valider par ENTER . Entrer chacune des valeurs demandées par la calculatrice suivies de ENTER .	Par EXIT (2 fois) revenir à la liste des programmes, sélectionner le programme DICHOTO puis le lancer par EXE . Entrer chacune des valeurs demandées par la calculatrice suivies de EXE . Lorsque la calculatrice affiche Disp après le premier résultat, taper EXE pour continuer.

Programmation et calculatrices

TI 82/82 STATS/83/84, Casio Graph 35/65/80

Le menu programmation

TI 82/82 STATS/83/84	Casio Graph 35/65/80
<p>Choisir ce menu par PRGM au clavier. Choisir :</p> <p>NEW pour écrire un nouveau programme</p> <p>EXEC pour exécuter (c'est-à-dire pour l'utiliser) et</p> <p>EDIT pour éditer un programme (lire les commandes qui le composent pour le modifier par exemple).</p> <p>Sélectionner son nom puis valider.</p> <p>Pour effacer un programme, aller dans MEM (par 2nd +), choisir Delete (sur TI84, choisir 2: MemMgmt/Del) puis PRGM, sélectionner le nom du programme et valider par ENTER (sur TI84 par 2: YES).</p>	<p>Dans MENU, choisir l'icône PRGM. Si la calculatrice ne contient aucun programme, le seul choix possible à l'écran est NEW.</p> <p>Sinon, sélectionner le nom d'un programme, choisir :</p> <p>EXE pour l'exécuter (c'est-à-dire pour l'utiliser)</p> <p>EDIT pour l'éditer (lire les commandes qui le composent pour le modifier par exemple)</p> <p>DEL pour l'effacer</p> <p>NEW pour écrire un nouveau programme.</p>

Instructions de programmation : où les trouver ?

TI 82/82 STATS/83/84		Commandes de programmation	Casio Graph 35/65/80	
Où les trouver ?	syntaxe		syntaxe	Où les trouver ?
<p>" " au clavier par ALPHA +</p> <p>, touche □ du clavier</p> <p style="text-align: center;">dans PRGM</p> <p>Input choisir I/O</p> <p>Disp </p> <p>Pause choisir CTL</p>	<p>Input "valeur", A</p> <p>Disp "message"</p> <p>Disp A</p> <p>Pause</p>	<p>Des instructions d'entrée et de sortie pour :</p> <ul style="list-style-type: none"> - demander une valeur à l'utilisateur et la ranger dans une variable A - afficher des messages - afficher la valeur contenue dans la variable A et arrêter le déroulement du programme après affichage. 	<p>"valeur" ? → A</p> <p>"message" A▲</p> <p style="text-align: center;">?</p> <p style="text-align: center;">▲ dans PRGM (disponible au clavier par SHIFT VARS)</p>	
<p>→ : touche STO disponible au clavier</p>	<p>valeur → A</p>	<p>Une instruction d'affectation pour ranger une valeur dans une variable A.</p>	<p>valeur → A</p>	<p>→ : touche → disponible au clavier</p>
<p>If dans PRGM</p> <p>Then choisir CTL</p> <p>Else </p> <p>End </p> <p>Les relations</p> <p>=, ≠ par Test (au clavier par 2nd MATH)</p> <p><, > </p> <p>≤, ≥ </p>	<p>If condition</p> <p>Then faire ...</p> <p>Else faire ...</p> <p>End</p>	<p>Des tests conditionnels dont la structure est :</p> <p>SI une certaine condition est remplie (exprimée par des relations : =, ≠, <, >, ≤ ou ≥),</p> <p>ALORS faire telle chose</p> <p>SINON faire telle chose</p> <p>FIN du SI</p>	<p>If condition</p> <p>Then faire ...</p> <p>Else faire ...</p> <p>IfEnd</p>	<p>If dans PRGM</p> <p>Then choisir COM</p> <p>Else (IfEnd)</p> <p>Ifend = I.End)</p> <p>Les relations</p> <p>=, ≠ dans PRGM</p> <p><, > puis F6</p> <p>≤, ≥ choisir REL</p>
<p>While, For, End, Lbl, Goto :</p> <p>dans PRGM choisir CTL</p>	<p>While condition</p> <p>... End</p> <p>For (I, n₁, n₂, k)</p> <p>... End</p> <p>Lbl k</p> <p>... Goto k</p>	<p>Des boucles. Il existe plusieurs instructions dont :</p> <ul style="list-style-type: none"> - TANT QUE condition faire telle chose FIN. - POUR I ALLANT DE n₁ À n₂ AVEC UN PAS DE k faire telle chose FIN - ÉTIQUETTE k faire telle chose ALLER à l'ÉTIQUETTE k 	<p>While condition</p> <p>... WhileEnd</p> <p>For n₁ → I To n₂ Step k</p> <p>... Next</p> <p>Lbl k</p> <p>... Goto k</p>	<p>While, WhileEnd, For, To, Step, Next :</p> <p>dans PRGM, choisir COM.</p> <p>Faire défiler les choix en appuyant sur F6 (1 ou 2 fois) (While = While, et WhileEnd = Wend)</p> <p>Lbl, Goto : dans PRGM choisir JUMP</p>

Programmation et calculatrices TI 89/Voyage 200

Exemple : le programme de dichotomie (TP 5 p. 28)

• Créer un nouveau programme

Ouvrir l'éditeur de programme par [APPS], choix : Program Editor.

Choisir 3 : New. Valider par [ENTER]. Renseigner la boîte de dialogue qui apparaît en choisissant dans **Type** : Program ; dans **Folder** : main (choix du répertoire principal ; on peut créer d'autres répertoires pour ranger ses programmes) ; taper dans **Variable** : dichoto (nom du programme). Valider deux fois.

• Entrer le programme

La liste des commandes est donnée ci-dessous dans la colonne programme. Entrer ces lignes entre les lignes **Prgm** et **EndPrgm** qui indiquent le début et la fin du programme en vous aidant du tableau de droite qui vous indique où trouver sur votre calculatrice les instructions ou relations écrites en gras (vous repérez à l'aide des correspondances de couleurs).

Programme	Instructions	Où les trouver ?
:Input "valeur de a0",a :Input "valeur de b0",b :Input "indice de debut",n :Input "indice de fin",p	Les instructions d'entrée et sortie	Disp, Input : par [F3] (I/O = in/out) " " : les guillemets " sont disponibles au clavier (sur TI Voyage 200 par [2nd] [L] et sur TI 89 par [2nd] [I]) , : la virgule est disponible par la touche [,]
:While n < p	L'instruction d'affectation	→ est disponible au clavier : touche [STO▶]
:If ((a+b)/2)^2>19 Then :(a + b)/2 → b :Else :(a + b)/2 → a :EndIf	Tests conditionnels	If...Then...Else...EndIf est accessible par [F2] (Control), choix 2:If...Then...Else...Endif. Ces quatre commandes sont inscrites simultanément dans le programme séparées par des blancs qu'il vous suffit de remplir. Les relations > , < , = sont disponibles au clavier (pour entrer une relation ≥ , taper > = ; pour entrer une relation ≠ , taper < >)
:n+1 → n :EndWhile	Les instructions de boucles	While...EndWhile est accessible par [F2] (Control). Les deux instructions sont écrites simultanément dans le programme séparées par des blancs à compléter. For...EndFor est accessible par [F2] (Control).
:Disp "a",a :Disp "b",b		

Remarque : on peut aussi retrouver toutes les instructions dans le menu [Catalog] (disponible au clavier).

• Lancer le programme

Aller dans l'écran [Home]. Vérifier que le nom du répertoire en bas à gauche de l'écran est celui dans lequel le programme est enregistré (main ici). Taper le nom du programme suivi de parenthèses : dichoto(), puis [ENTER]. Entrer chacune des valeurs demandées par la calculatrice suivie de [ENTER].

• Éditeur de programme (par [APPS], choix 7:Program Editor)

Choisir 1 : Current pour revenir au dernier programme édité (pour le modifier par exemple)
2 : Open pour éditer un programme déjà enregistré (pour le modifier par exemple) ;
3 : New pour créer un nouveau programme

• **Effacer un programme** : dans le menu [Var-Link] (disponible au clavier) sélectionner le nom du programme puis dans [F1] (Manage), choisir 1 : Delete. Valider par [ENTER].

• Transmission des arguments lors de l'appel d'un programme.

Il est possible d'indiquer les valeurs utilisées pour a, b, n et p lors de l'appel du programme, ce qui évite de taper les quatre premières lignes du programme. Le début du programme est alors modifié de la façon suivante :

```

F1 [←] F2 [Control] F3 [I/O] F4 [Var] F5 [Find...] F6 [Mode]
: dichoto(a,b,n,p)
: Prgm
: While n<p
: If ((a+b)/2)^2>19 Then
: (a+b)/2→b
    
```

Lors de l'appel du programme, on tapera alors dans l'écran Home :
DICHOTO(valeur de a, valeur de b, valeur de n, valeur de p)

```

dichoto<4,5,0,20>
MAIN          RAD AUTO          FUNC 0/30
    
```

Index

A

Adjacentes (*suites*) 48
Affixe d'un point, d'un vecteur 254
Aire (*calcul d'*) 186
Aléatoire (*variable*) 350
Algébrique (*forme ... d'un complexe*) 254
Approximation affine 82
Arbre 351, 352
Argument d'un nombre complexe 256
Arithmétique (*suite*) 12
Associativité du barycentre 296
Asymptote 48, 52, 61
Axe de symétrie 83
Axiome 14

B

Barycentre 294
Bernoulli (*loi de*) 390
Bernoulli (*schéma de*) 390
Bijection 140
Bijection réciproque 140
Binôme (*formule du*) 382, 388
Binomiale (*loi*) 390
Bissecteur (*plan*) 347
Bornée (*suite, fonction*) 16

C

Calculatrice 28, 29, 437
Caractérisation barycentrique 298
Centre de symétrie 83
Chasles (*relation de*) 190
Codes 381
Combinaison 386
Combinaisons (*nombre de*) 386
Comparaison de fonctions 16
Comparaison de limites 46
Comparaison de nombres 16
Complexe (*nombre*) 254
Composée (*dérivée d'une*) 88
Composée (*limite d'une*) 58

Composée (*monotonie d'une*) 18
Composition (*schéma de*) 18
Conditionnelle (*probabilité*) 354
Conjugué d'un nombre complexe 260
Continue 90
Continue (*loi*) 416, 418
Continuité 90
Convergence monotone (*théorème de*) 46
Convergente (*suite*) 44
Coordonnées polaires 253
Courbe représentative 10
Croissances comparées (*fonction, suite*) 164
Croissante (*fonction*) 18, 94
Croissante (*suite*) 20

D

Densité (*loi de probabilité à*) 413, 414
Décroissante (*fonction*) 18, 94
Décroissante (*suite*) 20, 46
Dénombrement 386
Dérivabilité 84
Dérivé (*nombre*) 84
Dérivée d'une composée 88
Dérivée (*fonction*) 86
Dérivée *n*-ième 86
Dérivée seconde (*fonction*) 86
Développement limité 82
Dichotomie (*méthode de*) 28, 444, 445
Différentielle 88
Divergente (*suite*) 50

E

e (*nombre*) 118
Entière (*fonction partie*) 80
Espérance (*variable aléatoire*) 356
Euler (*méthode d'*) 115
Exponentielle (*fonction*) 116
Exponentielle (*forme ... d'un nombre complexe*) 258

Exponentielle (*loi*) 418
Exponentielles (*fonctions*) 168
Écart type 356
Écriture décimale d'un réel 224
Égalité de deux fonctions 10
Équation cartésienne 331
Équation différentielle
 $y' = ay + b$ 164
Équation différentielle $y' = ky$ 122
Équation logistique 234
Événement 350

F

Fonction (*notion de*) 10
Forme algébrique d'un complexe 254
Forme exponentielle d'un complexe 258
Forme trigonométrique d'un complexe 258
Formule du binôme 382, 388

G

« Gendarmes » (*théorème des*) 46, 58
Géométrie (*suite*) 12
Geoplan-Geospace 98, 304, 333

H

Hérédité 14, 15
Homogénéité du barycentre 294
Homothétie (*écriture complexe d'une*) 266

I

Imaginaire (*partie*) 254
Indépendants (*événements*) 353, 356
Indépendantes (*variables aléatoires*) 356
Inégalité de la moyenne 192

Initialisation 14, 15
Intégrale 192
Intégration par parties 196
Inversion 291

L
Limite finie en l'infini 44
Limite finie en un point 54
Limite à gauche, à droite 55
Limite infinie en l'infini 50, 52
Limite infinie en un point 54
Linéarité (de l'intégration) 190
Logarithme décimal 148
Logarithme népérien 142
Loi de Bernoulli 390
Loi binomiale 390
Loi continue 416, 418
Loi de probabilité 356
Loi exponentielle 418
Lois d'équilibre de Hardy-Weinberg 363
Loi équirépartie 384
Loi uniforme 412, 413

M
Majorant d'une suite, d'une fonction 16
Majorée (suite) 16, 46
Majorée (fonction) 16
Majorer un quotient, une somme 17
Maximum d'une fonction 16
Médiateur (plan) 336
Minimum d'une fonction 16, 94
Minorant d'une suite, d'une fonction 16
Minorée (fonction) 16
Minorée (suite) 16, 46
Modéliser 350, 358, 380
Module (d'un nombre complexe) 256
Monotonie d'une fonction 94
Monotonie d'une suite 20
Moyenne (valeur ... d'une fonction) 192

N
 n -ième (racine) 166
Négligeable 82
Nombre complexe 254
Nombre complexe conjugué 260
Normal (vecteur) 326

O
Opérations et limites 56
Ordre et limites 46

P
Partie entière (fonction) 80
Partiel (barycentre) 305, 307
Perpendiculaire commune 348
Plan médiateur 326
Polaires (coordonnées) 253
Primitive 192, 194, 196
Produit scalaire 320, 322
Programmation (calculatrice) 28, 29, 444, 445, 446
Projection orthogonale 324
Puissance réelle a^b 166

R
Racine n -ième 166
Raison d'une suite arithmétique, géométrique 12
Relation de Chasles 190
Réciproque (bijection) 140
Récurrence (démonstration par) 14, 15, 20
Récurrence (relation de) 14
Réduction d'une somme de vecteurs 292
Réelle (partie) 254
Représentation paramétrique 300
Rotation (écriture complexe d'une) 266

S
Scalaire (produit) 320, 322
Schéma de Bernoulli 390
Sigma (Σ) 7
Suite affine 226
Suite arithmétique 12
Suite géométrique 12
Suite (notion de) 10
Suite (représentations graphiques d'une) 11, 441, 442
Suites adjacentes 48
Symétrie (axe d'une, centre d'une) 83

T
Tableur 24, 25, 26, 27
Tangente 82, 84
Tangente (fonction) 97
Tirages simultanés 387
Tirages successifs avec remise, sans remise 386
Totales (formule des probabilités) 354
Translation (écriture complexe d'une) 266
Trigonométrie 250

U
Unicité de la limite 44, 45

V
Valeur moyenne d'une fonction 192
Valeurs intermédiaires (théorème des) 92
Variable aléatoire 350
Variance 356
Variation d'une fonction 18, 19, 94
Variation d'une suite 18, 20, 21
Volume (calcul de) 200, 201

Math'x



REVENDEZ
VOS LIVRES TOUTE L'ANNÉE

GIBERT JEUNE

PLACE SAINT-MICHEL
& STRASBOURG-ST-DENIS

Prix Net

OCCASION
22,80€

DIDIER MATH X TERM S
110609 08.07.10

RT

2

750779

022809

