Classes préparatoires - Préparation à l'agrégation - Cycles universitaires

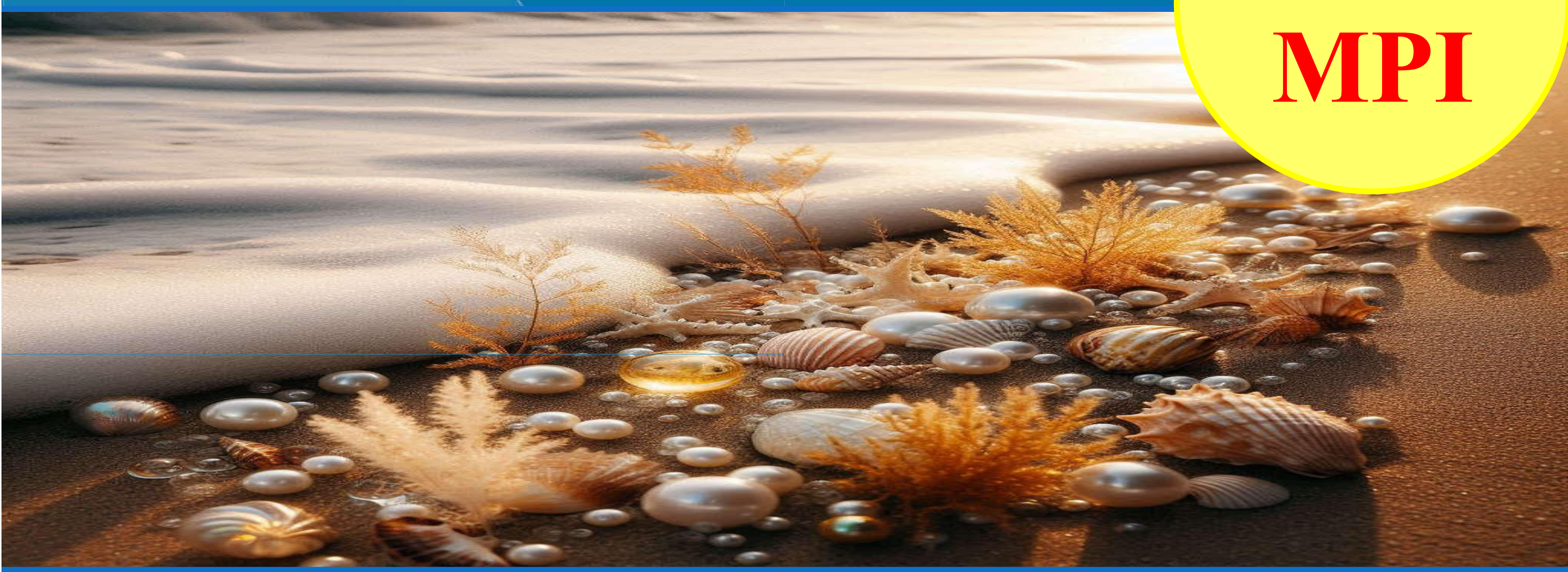
Annales corrigées

Concours 2024

Mathématiques

M P
MPI

M . LAAMOUM



Annales des concours :

- CENTRALE / SUPÉLEC
- CINP
- CNC
- E3A
- MINES / PONTS
- X-ENS

Des corrigés complets et détaillés

Avant-propos

Cet ouvrage [1] est un recueil d'épreuves et de corrigés des concours d'entrée aux Grandes Écoles d'Ingénieurs, de l'année 2024, destinés aux filières MP et MPI, avec également quelques sujets des filières PC et PSI. Il couvre des concours majeurs tels que : CENTRALE-SUPELEC , X-ENS , MINES et PONTS , CCINP , CNC et E3A .

Chaque sujet est accompagné d'un corrigé détaillé comprenant :

- Les rappels des théorèmes et des résultats du cours.
- La vérification des hypothèses de chaque théorème utilisé.
- Des explications pas à pas du raisonnement et des calculs effectués.
- Dans certains cas, des représentations graphiques ou des schémas explicatifs pour mieux visualiser les concepts abordés.
- Des conseils pour identifier les erreurs fréquentes et éviter les pièges.

Cet ouvrage est adressé principalement aux étudiants des filières MP et MPI, qui préparent les concours d'entrée aux Grandes Écoles d'Ingénieurs.
Il est également adapté aux étudiants des cycles universitaires ainsi qu'aux candidats au concours de l'agrégation.

L'auteur de ce recueil est un professeur agrégé avec une grande expérience d'enseignement dans les classes de MP et de MP*.
Vous pouvez envoyer vos remarques, vos questions ou un message à l'adresse mail suivante : m.laamoum2@gmail.com .

Il est conseillé aux candidats de bien travailler le cours et les TD avant d'aborder ce recueil.
Chaque sujet peut être traité indépendamment, en fonction des chapitres et des thèmes abordés en cours.
Les corrigés fournissent une aide précieuse pour évaluer les erreurs et affiner la méthodologie.
Les étudiants sont invités à traiter les sujets de manière progressive, en commençant parles problèmes les plus accessibles, avant de s'attaquer aux questions plus complexes.

Table des matières

CentraleSupélec

Centrale Méditerranée

ÉCOLE CENTRALE LYON

CENTRALE-SUP ELEC

ENSEA

epf
ENGINEERING SCHOOL
Creating the future together

INSTITUT d'OPTIQUE
GRADUATE SCHOOL

CONCOURS CENTRALE-SUP ÉLEC

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 1

SESSION 2024 - FILIÈRE MP - MPI

Durée: 4 heures

Inégalité de Carleman

On s'intéresse dans ce problème à une inégalité établie par Torsten Carleman : si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge, alors la série de terme général $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Le problème est constitué de trois parties largement indépendantes. La première partie commence en démontrant un analogue intégral de cette inégalité : l'inégalité de Knopp. La deuxième partie s'intéresse à la démonstration originale de l'inégalité de Carleman, utilisant du calcul différentiel. Enfin, la troisième partie étudie l'inégalité de Carleman-Yang, qui est un raffinement de l'inégalité de Carleman.

I Inégalité de Knopp

Dans cette partie, on démontre l'inégalité de Knopp, souvent présentée comme analogue continu de l'inégalité de Carleman (on justifie cette appellation en fin de partie).

I.A - Deux inégalités intégrales

I.A.1) Inégalité intégrale de Jensen

Q1 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux à valeurs dans un intervalle J. Soit φ une fonction continue et convexe sur J. Démontrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)dt$$

On pourra utiliser des sommes de Riemann.

I.A.2) Une autre inégalité intégrale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux, strictement positive et intégrable.

Pour tout $x > 0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\ dt \ \text{ et } h(x) = \frac{1}{x}g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$$

Q2 Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0 .

Q3 Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Notant $\mathbb{1}_{[0,x]}$ la fonction indicatrice de $[0, x]$, on pourra remarquer que $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}tf(t)\ \mathbb{1}_{[0,x]}(t)dt$.

Q4 En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} h(x)dx$$

On pourra utiliser une intégration par parties.

I.B - Démonstration de l'inégalité de Knopp

Soit f une fonction continue par morceaux, strictement positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Q5 Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$$

On pourra remarquer que $\ln(f(t)) = \ln(tf(t)) - \ln(t)$.

Q6 En déduire que $x \mapsto \exp\left(\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right) dx \leqslant \mathrm{e}\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

I.C- Application à l'inégalité de Carleman

On suppose dans cette sous-partie que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs. On note f la fonction en escalier qui, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, est égale à a_k sur l'intervalle $[k-1, k[$.

Q7 Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction v_k définie sur $[k-1, k]$ par

$$\begin{cases} v_k(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \dfrac{1}{x}(x-k+1)\ln(a_k) & \text{si } k \geqslant 2 \\ v_1(x) = \ln(a_1) \end{cases}$$

est minimale pour $x = k$.

Q8 Démontrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,

$$\int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right)dx \geqslant \exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right)$$

On pourra utiliser la question précédente.

Q9 En déduire l'inégalité de Carleman dans le cas où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

Q10 Expliquer comment on peut retirer l'hypothèse de décroissance.

II Inégalité de Carleman

On démontre dans cette partie l'inégalité de Carleman d'une manière indépendante de la partie I.

La sous-partie II.A établit l'inégalité arithmético-géométrique avec des méthodes de calcul différentiel qui permettent de se familiariser avec celles qui seront utilisées dans la sous-partie II.B pour démontrer l'inégalité de Carleman.

La sous-partie II.B est indépendante de II.A. L'inégalité arithmético-géométrique sera utilisée dans la partie III.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note U_n l'ouvert $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$. Son adhérence, notée $\overline{U_n}$, est $(\mathbb{R}_+)^n$.

II. A - Inégalité arithmético-géométrique

Soit $s > 0$. On définit les fonctions f et g_s sur $\overline{U_n}$ en posant, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{U_n}$,

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k \quad \text{et} \quad g_s(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - s$$

On note X_s le sous-ensemble de $\overline{U_n}$ constitué des zéros de g_s : $X_s = \left\{x \in \overline{U_n} \mid g_s(x) = 0\right\}$.

Q11 On admet que f et g_s sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U_n. Donner l'expression de leur gradient en un point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de U_n.

Q12 Démontrer que la restriction de f à X_s admet un maximum sur X_s et que ce maximum est en fait atteint sur $X_s \cap U_n$.

On pourra vérifier que f est strictement positive en certains points de $X_s \cap U_n$.

On note $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un élément de $X_s \cap U_n$ en lequel la restriction de f à X_s atteint son maximum.

Q13 Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $a_k = \dfrac{f(a)}{\lambda}$.

Q14 Démontrer alors que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in U_n \cap X_s$, $\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ et en déduire l'inégalité arithmético-géométrique

$$\forall\,(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \qquad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

II. B - Démonstration de l'inégalité de Carleman

On considère l'application F_n de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall\,(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{U_n}, \quad F_n\,(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + (x_1 x_2)^{1/2} + (x_1 x_2 x_3)^{1/3} + \cdots + (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$$

On note h_n l'application de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall\,(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{U_n}, \quad h_n\,(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n - 1$$

On admet que F_n et h_n sont toutes les deux de classe $\mathscr{C}^1$ sur U_n.

On note H_n l'ensemble $H_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.

Q15 Déterminer le gradient de F_n et le gradient de h_n en tout point de U_n.

Q16 Démontrer que la restriction de F_n à $\overline{U_n} \cap H_n$ admet un maximum.

On admet que le maximum de F_n est en fait atteint sur $U_n \cap H_n$.

On note M_n le maximum de F_n sur $\overline{U_n} \cap H_n$ et on note $(a_1, \ldots, a_n)$ un point de $U_n \cap H_n$ en lequel il est atteint.

Pour k entre 1 et n, on note $\gamma_k = (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k}$.

Q17 Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$\left\{\begin{array}{r} \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_1 \\ \frac{\gamma_2}{2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_2 \\ \vdots \\ \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 \end{array}\right.$$

Q18 En déduire que :

a) $\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = M_n$

b) pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\gamma_k = \lambda \omega_k a_k$, où

$$\begin{cases} \omega_k = k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) \text{ si } k \in [\![1, n-1]\!] \\ \omega_n = n \end{cases}$$

L'objectif des trois questions suivantes est de démontrer que $\lambda \leqslant \mathrm{e}$. On suppose par l'absurde que $\lambda > \mathrm{e}$.

Q19 Vérifier que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$.

Q20 Démontrer que $\omega_1 \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et que, pour tout k dans $[\![1, n]\!], \omega_k \leqslant \dfrac{k}{k+1}$.
On pourra démontrer, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, que $\omega_{k+1}^{k+1} = \frac{1}{\lambda}\omega_k^k\left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k}$.

Q21 Aboutir à une contradiction sur ω_n. En déduire que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_1 x_2 \cdots x_k)^{1/k} \leqslant \mathrm{e}$$

Q22 En déduire l'inégalité de Carleman.

III Inégalité de Carleman-Yang

Le but de cette dernière partie est d'établir l'inégalité de Carleman-Yang, qui est un raffinement de l'inégalité de Carleman.

III. A - Un développement en série entière

Soit φ la fonction définie par

$$\forall t \in]-1, 1[\setminus \{0\}, \quad \varphi(t) = (1-t)^{1-1/t} \qquad \text{(III.1)}$$

On définit aussi la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} b_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} b_{n-k} \end{cases}$$

Q23 Justifier que φ est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de son prolongement en 0 . On notera toujours φ ce prolongement.

Q24 Démontrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $|b_n| \leqslant 1$. En déduire une inégalité sur le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} b_k t^k$.

Q25 Démontrer que, pour tout t dans $]-1,1[\,, \varphi'(t)=\varphi(t)\psi(t)$, où

$$\forall t\in\,]-1,1[\,,\quad \psi(t)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+2}t^n \qquad \text{(III.2)}$$

puis que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\varphi^{(n)}(0)=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!}{k+2}\binom{n-1}{k}\varphi^{(n-k-1)}(0)$$

Q26 Conclure alors que

$$\forall t\in\,]-1,1[\,,\quad \varphi(t)=\mathrm{e}\left(1-\sum_{k=1}^{+\infty}b_kt^k\right) \qquad \text{(III.3)}$$

III. B - Démonstration de l'inégalité de Carleman-Yang

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

Q27 Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}c_ka_k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n}c_i\right)^{-1/n}$$

Q28 En considérant $c_n=\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, en déduire l'inégalité de Carleman-Yang :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}\leqslant\mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k}{(n+1)^k}\right)a_n$$

Q29 Démontrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*, b_n\geqslant 0$. En quoi l'inégalité précédente est-elle un raffinement de l'inégalité de Carleman?

FIN

Concours Centrale-Sup Élec

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 1

Session 2024 - Filière MP - MPI

Inégalité de Carleman

I Inégalité de Knopp

I.A - Deux inégalités intégrales

I.A.1) Inégalité intégrale de Jensen

Q1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux à valeurs dans un intervalle J. La somme de Riemann uniforme est donnée par

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

on sait que $R_n(f) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b f(t)dt$.
φ est continue et convexe sur J, donc

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{1}{b-a}R_n(f)\right) &= \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})\right) \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(f(a+k\frac{b-a}{n})\right) \quad \text{(\textit{inégalité de convexité généralisée})} \\
&\leq \frac{1}{b-a}R_n(\varphi o f)
\end{aligned}$$

$\varphi o f$ est continue par morceaux donc $R_n(\varphi o f) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b \varphi o f(t)dt$, par passage à la limite on obtient :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi o f(t)dt$$

I.A.2) Une autre inégalité intégrale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux, strictement positive et intégrable.

Pour tout $x > 0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\ dt \quad \text{et } h(x) = \frac{1}{x}g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$$

Q2. f est bornée sur $[0,1]$, soit $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} f(x)$, donc pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$0 \leq g(x) \leq M\ \frac{1}{x}\int_0^x t\ dt\ = M\frac{x}{2}$$

donc $\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{\to} 0}$.

Q3. Écrivons $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\ dt$ avec $\varphi_x : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{*+} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{x}tf(t)\ \mathbb{1}_{[0,x]}(t) \end{array}\right.$.

- f est strictement positive donc $|\varphi_x(t)| \leq f(t)$, par suite φ_x est intégrable sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > t$ on a $\varphi_n(t) = \dfrac{t\ f(t)}{n}$ donc la suite de fonction $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers

0 sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Le théorème de la convergence dominée donne $g(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

- Soit $x > 0$ et $N = E(x)$, on a $0 \leq g(x) \leq \dfrac{1}{N}\displaystyle\int_0^{N+1} tf(t)\ dt = \dfrac{N+1}{N}g(N) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

D'où $\boxed{g(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0}$.

Q4. Remarquons que l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$ est continue mais pas dérivable sur $\mathbb{R}^+$,elle est dérivable en tout point de continuité de f .

Notons $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des points de discontinuités de f dans $\mathbb{R}^{*+}$, l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}\backslash A$.

Soit $[y,x] \subset \mathbb{R}^{*+}\backslash A$, on a

$$\int_y^x h(u)du = \left[-\frac{1}{u}\int_0^u tf(t)dt\right]_y^x + \int_y^x f(u)du = g(y) - g(x) + \int_y^x f(u)du$$

la continuité de g et $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ donne :

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} h(u)du = g(a_n) - g(a_{n+1}) + \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(u)du \quad \text{et} \quad \int_0^{a_0} h(u)du = -g(a_0) + \int_0^{a_0} f(u)du$$

Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}\backslash A$, la relation de Chasles donne

$$\int_0^x h(u)du = -g(x) + \int_0^{a_0} f(u)du$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge et $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} h(x)dx}$

I.B - Démonstration de l'inégalité de Knopp

Soit f une fonction continue par morceaux, strictement positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Q5. La fonction exponentielle est convexe, d'après Q1 on a pour tout $x>0$,

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))dt\right) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt$$

écrivons

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))dt\right) &= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt + \frac{1}{x}\int_0^x \ln(t)dt\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt + \ln(x) - 1\right)\\ &= \frac{x}{\mathrm{e}}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right)\end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right) \leq \frac{\mathrm{e}}{x^2}\int_0^x tf(t)dt}$

Q6. Pour tout $x>0$ on a $\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right) \leq \mathrm{e}h(x)$, h est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right)dx \leqslant \mathrm{e}\int_0^{+\infty} h(x)dx = \mathrm{e}\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

d'où le résultat .

I.C- Application à l'inégalité de Carleman

On suppose dans cette sous-partie que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs. On note f la fonction en escalier qui, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, est égale à a_k sur l'intervalle $[k-1, k[$.

Q7. Soit $k \geqslant 2$, on a pour $x \in [k-1, k]$

$$v_k(x) = \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k-1}(\ln(a_i) - \ln(a_k)) + 1$$

or $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante donc $\sum\limits_{i=1}^{k-1}(\ln(a_i) - \ln(a_k)) > 0$ par suite v_k est décroissante sur $[k-1, k]$ et elle est minimale pour $x = k$.

Q8. Soit k dans $\mathbb{N}^*$et $x \in [k-1,k]$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt &= \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k-1}\int_{i-1}^{i}\ln(f(t))dt + \frac{1}{x}\int_{k-1}^{x}\ln(f(t))dt\\ &= \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k-1}\ln(a_i) + \frac{1}{x}(x-(k-1))\ln(a_i)\\ &= v_k(x)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right)dx &= \int_{k-1}^{k}\exp\left(v_k(x)\right)dx\\ &\geqslant \exp\left(v_k(k)\right) \qquad \text{(d'après Q.7)}\end{aligned}$$

or $v_k(k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)$ d'où $\boxed{\int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right)dx \geqslant \exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right)}$

Q9. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et strictement positive, telle que $\sum a_n$ converge , donc la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

On a

$$\exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right) = \left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{\frac{1}{k}} \leq \int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right)dx = V_k$$

d'après Q.6 la fonction $x\mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la série $\sum V_k$ converge , par suite la série $\sum\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{\frac{1}{k}}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} \leq \int_0^{+\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))dt\right)dx \leqslant \mathrm{e}\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n}$

Q10. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement positive, telle que la série $\sum a_n$ converge , donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et elle est bornée .

- On construit une σ permutation de $\mathbb{N}^*$ telle que la suite $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante .

En effet il n' existe qu' un nombre fni d' indices $n \geq 1$ tels que $a_n \geq a_1$, sinon la série $\sum a_n$ ne serait pas convergente. Il existe donc un indice n_1 tel que $\forall n \geq 1, a_n \leq a_{n_1}$, on pose alors $\sigma(1) = n_1$. On définit ensuite de proche en proche $\sigma(k) = n_k$ tel que $n_k \notin \{n_1,\ldots,n_{k-1}\}$ et $a_{n_k} = \max_{n\notin\{n_1,\ldots,n_{k-1}\}} a_n$.

- La famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable donc $\sum a_n$ est commutativement convergente, ainsi la série $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

D'après la question Q9 appliquée à la suite $\left(a_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on ordonne les termes de la famille $(a_k)_{1\leq k\leq n}$, de façon décroissante, et on les note $a_{1,n} \geq ... \geq a_{n,n}$, pour ordonner de même la famille $(a_k)_{1\leq k\leq n+1}$, soit chaque $a_{i,n}$ garde sa valeur soit il est remplacé par un terme plus grand , donc $a_{i,n} \leq a_{i,n+1}$, ce qui donne aussi $a_{i,n} \leq a_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Par conséquent on a

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_{k,n} \leq \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

II Inégalité de Carleman

II. A - Inégalité arithmético-géométrique

Q11. On a pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de U_n

$$\textbf{grad}f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{n} x_k, ..., \prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{n} x_k\right) = f(x)\left(\frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_n}\right)$$

et

$$\textbf{grad}g_s(x) = (1, ..., 1)$$

Q12. On a $X_s = g_s^{-1}(\{0\})$ et $X_s \subset [0, s]^n$ donc il est fermé et borné , par suite X_s est compact , donc f est bornée sur $X_s$et atteint ses bornes .

On a $(\frac{s}{n}, ..., \frac{s}{n}) \in X_s \cap U_n$ et $f(\frac{s}{n}, ..., \frac{s}{n}) > 0$ et $f(X_s \backslash X_s \cap U_n) = \{0\}$, donc la valeur maximale de f sur X_s est strictement positif et atteinte sur $X_s \cap U_n$.

On note $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un élément de $X_s \cap U_n$ en lequel la restriction de f à X_s atteint son maximum.

Q13. a est un maximum de f dans U_n sous la contrainte $g_s(x) = 0$, le théorème du multiplicateur de Lagrange assure qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que: $\textbf{grad}f(a) = \lambda\textbf{grad}g(a)$ donc

$$\left(\frac{f(a)}{a_1}, ..., \frac{f(a)}{a_n}\right) = \lambda\,(1, ..., 1)$$

ainsi $\lambda > 0$ et pour tout k dans $[\![1,n]\!], a_k = \dfrac{f(a)}{\lambda}$.

Q14.

- On a $a \in X_s \cap U_n$ donc $g(a) = 0$ ce qui donne pour tout k dans $[\![1,n]\!], a_k = \dfrac{s}{n}$.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in U_n \cap X_s$, on a $f(x) \leq f(a)$ donc

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \leq \prod_{k=1}^{n} a_k = \left(\frac{s}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{s}{n}$$

or $x \in X_s$ donc $s = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ d'où $\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

- Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, si l'un des x_i est nul l'inégalité est évidente .

Supposons que $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,posons $A = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ et $y_i = s\dfrac{x_i}{A}$ pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, alors $(y_1, \dots, y_n) \in U_n \cap X_s$ et le cas précédent donne :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

par suite

$$\left(\prod_{i=1}^{n} s\frac{x_i}{A}\right)^{1/n} = \frac{s}{A}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s\frac{x_i}{A}$$

d'où $\boxed{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$

II. B - Démonstration de l'inégalité de Carleman

Q15. On a $\mathbf{grad} h_n(x) = (1, ..., 1)$ et $\mathbf{grad} F_n(x) = \left(\dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}(x), ..., \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}(x)\right)$ avec

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) = 1 + \dfrac{1}{2x_1}(x_1 x_2)^{1/2} + \dfrac{1}{3x_1}(x_1 x_2 x_3)^{1/3} + ... + \dfrac{1}{n x_1}(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_k}(x) = \dfrac{1}{k x_k}(x_1 ... x_k)^{1/k} + ... + \dfrac{1}{n x_k}(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \quad , \ \forall k \in [\![2, n-1]\!] \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) = \dfrac{1}{n x_n}(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \end{cases}$$

Q16. On a F_n est continue et $\overline{U_n} \cap H_n = X_1 \cap U_n$ qui est compact ,d'après Q.12 , donc F_n admet un maximum dans $\overline{U_n} \cap H_n$.

On admet que le maximum de F_n est en fait atteint sur $U_n \cap H_n$.

On note M_n le maximum de F_n sur $\overline{U_n} \cap H_n$ et on note $(a_1, \dots, a_n)$ un point de $U_n \cap H_n$ en lequel il est atteint. Pour k entre 1 et n, on note $\gamma_k = (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k}$.

Q17. D'après le théorème du multiplicateur de Lagrange il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que:

$\mathbf{grad} F_n(a_1, \dots, a_n) = \lambda \mathbf{grad} h_n(a_1, \dots, a_n)$, qui se traduit par

$$\begin{cases} \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_1 \\ \frac{\gamma_2}{2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_2 \\ \vdots \\ \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n \end{cases}$$

les a_i sont strictement positifs donc $\lambda > 0$, or $(a_1, \ldots, a_n) \in H_n$ donc $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, ce qui donne le résultat.

Q18.

a) On écrit

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda a_1 + \lambda a_2 + \cdots + \lambda a_n \\ &= \left(\gamma_1 + \tfrac{\gamma_2}{2} + \cdots + \tfrac{\gamma_n}{n}\right) + \ldots + \tfrac{\gamma_n}{n} \\ &= \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n \end{aligned}$$

or $\gamma_k = (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k}$ pour tout k donc $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = F_n(a_1, \ldots, a_n) = M_n$.

D'où $\boxed{\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = M_n.}$

b) On résout, par récurence, le système suivant:

$$\begin{cases} \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_1 & (1) \\ \frac{\gamma_2}{2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_2 & (2) \\ \vdots \\ \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n & (n) \end{cases}$$

L'équation (n) donne $\gamma_n = \lambda n a_n = \lambda \omega_n a_n$, supposons pour $k \in [\![1, n-2]\!]$ et $i \in [\![k+1, n]\!]$ que $\gamma_i = \lambda \omega_i a_i$ avec $\omega_i = i\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right)$ si $i \neq n$ et $\omega_n = n$.

Alors de l'équation (k) on a

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_k}{k} &= \lambda a_k - \frac{\gamma_{k+1}}{k+1} - \cdots - \frac{\gamma_n}{n} \\ &= \lambda a_k - \lambda \frac{\omega_{k+1}}{k+1} a_{k+1} - \ldots - \lambda \frac{\omega_{n-1}}{n-1} a_{n-1} - \lambda \frac{\omega_n}{n} a_n \\ &= \lambda a_k + \lambda\left(a_{k+2} - a_{k+1}\right) + \ldots + \lambda\left(a_n - a_{n-1}\right) - \lambda a_n \\ &= \lambda\left(a_k - a_{k+1}\right) \end{aligned}$$

ainsi $\gamma_k = \lambda \omega_k a_k$, d'où le résultat .

Q19. soit $\varphi : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \ln(1+x) \end{cases}$, on a $\varphi'(x) = \dfrac{x}{1+x}$, φ est croissante et $\varphi(0) = 0$ donc φ est positive sur $[0,1]$.

Soit k dans $\mathbb{N}$ on a $\varphi(\frac{1}{k+1}) \geq 0$ donc $\ln(\frac{k+2}{k+1}) \leq \frac{1}{k+1}$ qui s'écrit $(k+1)\ln(\frac{k+1}{k+2}) \geq -1$ on en déduit $\boxed{\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}}$

Q20. On suppose que $\lambda > \mathrm{e}$.

- On a $\gamma_1 = a_1 = \lambda \omega_1 a_1$ donc $\omega_1 = \dfrac{1}{\lambda} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

- Puisque $\gamma_k = (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k}$ et $\gamma_k = \lambda\omega_k a_k$ alors

$$\boxed{\gamma_{k+1}^{k+1} = a_1 \cdots a_{k+1} = \gamma_k^k a_{k+1}}$$

par suite

$$\boxed{(\lambda\omega_{k+1}a_{k+1})^{k+1} = (\lambda\omega_k a_k)^k a_{k+1}}$$

qui donne

$$\boxed{\lambda\omega_{k+1}^{k+1}a_{k+1}^k = \omega_k^k a_k^k}$$

or $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\omega_k}{k}$ donc $\boxed{\omega_{k+1}^{k+1} = \frac{1}{\lambda}\omega_k^k\left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k} \quad (1)}$.

- Montrons par récurence que : $\forall k \in [\![1,n]\!], \omega_k \leqslant \dfrac{k}{k+1}$.

On a $\omega_1 \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \leq \frac{1}{2}$, la relation est vraie pour $k=1$. Supposons qu'elle est vraie pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, donc

$$\boxed{\frac{\omega_k}{k} \leq \frac{1}{k+1} \text{ et } \left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k} \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^{-k}}$$

la relation (1) et l'hypothèse de récurence donnent

$$\boxed{\omega_{k+1}^{k+1} = \frac{1}{\lambda}\omega_k^k\left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k} \leq \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}}$$

or $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$ donc $\omega_{k+1} \leqslant \dfrac{k+1}{k+2}$, d'où le résultat .

Q21.

- On a $\omega_n = n$ et $\omega_n \leqslant \dfrac{n}{n+1} < 1$ ce qui est absurde , donc forcement $\lambda \leqslant \mathrm{e}$.
- La question Q.18 donne $\lambda = M_n$ qui est la valeur maximale de F_n sur $\overline{U_n} \cap H_n$, donc pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$ on a

$$\boxed{\sum_{k=1}^n (x_1x_2\cdots x_k)^{1/k} \leqslant M_n \leq \mathrm{e}}$$

Q22. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum\limits_{k=1}^n a_k$ et $x_k = \dfrac{a_k}{S_n}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

On a $(x_1,\ldots,x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ et $x_1 + \cdots + x_n = 1$, le résultat de la question Q.21 s'écrit

$$\boxed{\sum_{k=1}^n (x_1\cdots x_k)^{1/k} = \sum_{k=1}^n \frac{(a_1\cdots a_k)^{1/k}}{S_n} \leq \mathrm{e}}$$

par suite $\displaystyle\sum_{k=1}^n (a_1\cdots a_k)^{1/k} \leq \mathrm{e}\sum_{k=1}^n a_k \leq \mathrm{e}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, la série à terme positifs $\displaystyle\sum_{k\geq 1}(a_1\cdots a_k)^{1/k}$ est donc convergente , d'où par passage à la limite

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} (a_1\cdots a_k)^{1/k} \leq \mathrm{e}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k}$$

Remarque : On motre que la constante e est la meilleure possible, en effet :

Soit $n \geq 1$ et $a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$, on a $(a_1 \cdots a_k)^{1/k} = (k!)^{-1/k}$ la formule de Stirling donne

$(k!)^{1/k} \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{k}{e}$, par suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k!)^{-1/k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, ceci montre que e est la meilleure constante possible.

III Inégalité de Carleman-Yang

III. A - Un développement en série entière

Soit φ la fonction définie par

$$\forall t \in \left]-1, 1\right[\setminus \{0\}, \quad \varphi(t) = (1-t)^{1-1/t}$$

On définit aussi la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} b_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = -\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} b_{n-k} \end{cases}$$

Q23. Pour $t \in \left]-1, 1\right[\setminus \{0\}$ on a

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp\left((1 - \frac{1}{t}) \ln(1-t) \right) \\ &= \exp\left((1 - \frac{1}{t})(-t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)) \right) \\ &= \exp\left(1 - \frac{1}{2} t + o(t) \right) \end{aligned}$$

donc $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\to} \mathrm{e}$ et φ est prolongeable par continuité en 0 , avec $\varphi(0) = \mathrm{e}$.

Q24.

- Par récurrence sur n :

On a $|b_1| \leqslant 1$, supposons $|b_k| \leqslant 1$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, alors

$$|b_{n+1}| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} |b_{n-k}| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq 1$$

d'où le résultat .

- On a $|b_n| \leqslant 1$ pour tout $n \geq 1$ donc $\mathrm{Rcv}(\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} b_k t^k) \geq \mathrm{Rcv}(\sum_{k \geqslant 0} t^k) = 1$.

Q25.

- Soit t dans $]-1,1[$ et $t\neq 0$ on a

$$\varphi'(t)=\left((1-\frac{1}{t})\ln(1-t)\right)'\exp\left((1-\frac{1}{t})\ln(1-t)\right)$$

donc $\varphi'(t)=\varphi(t)\psi(t)$ avec $\psi(t)=\left((1-\frac{1}{t})\ln(1-t)\right)'$, or $\ln(1-t)=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}t^{n+1}$ donc

$$(1-\frac{1}{t})\ln(1-t)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}t^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}t^{n}$$

et

$$\begin{aligned}\psi(t)&=-\sum_{n=0}^{+\infty}t^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}t^{n-1}\\&=-\sum_{n=0}^{+\infty}t^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{n+2}t^{n}\\&=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+2}t^{n}\end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{\forall t\in\,]-1,1[\,,\quad \psi(t)=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+2}t^{n}}$.

- On a φ est continue sur $]-1,1[$ et de classe $\mathscr{C}^1$sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ et $\varphi'(t)\underset{t\to 0}{\to}\frac{-\mathrm{e}}{2}$, le théorème du prolongement de la fonction de classe $\mathscr{C}^1$ assure que φ est $\mathscr{C}^1$sur $]-1,1[$ et $\varphi'(0)=\frac{-\mathrm{e}}{2}$, la relation est donc vraie pour $t=0$.

Finalement φ est de classe $\mathscr{C}^1$sur $]-1,1[$ et $\varphi'(t)=\varphi(t)\psi(t)$ pour tout $t\in\,]-1,1[$.

- On a $\varphi'(t)=\varphi(t)\psi(t)$ pour tout $t\in\,]-1,1[$, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et ψ est développable en séries entières $]-1,1[$ donc elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, ce qui donne φ' est de classe $\mathscr{C}^1$ et φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$, par récurrence on obtient φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

La formule de Leibnitz donne pour tout $t\in\,]-1,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$

$$\varphi^{(n)}(t)=\left(\varphi(t)\psi(t)\right)^{(n-1)}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\psi^{(k)}(t)\varphi^{(n-k-1)}(t)$$

on a $\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}=-\frac{1}{(k+2)}$, ce qui donne pour $t=0$ $\boxed{\varphi^{(n)}(0)=-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{k!}{k+2}\binom{n-1}{k}\varphi^{(n-k-1)}(0)}$

Q26.

- La relation précédente s'écrit

$$\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}=-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+2}\frac{\varphi^{(n-k-1)}(0)}{(n-k-1)!}=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\frac{\varphi^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$$

avec $\varphi(0)=\mathrm{e}$. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=\mathrm{e}^{-1}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}+b_n$, on a alors

$$u_0 = 0 \text{ et } \quad u_n = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}u_{n-k} \ , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Par une récurrence simple on trouve $\forall n \in \mathbb{N} \ \ u_n = 0$, par conséquence on a $\dfrac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = -eb_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

- Ceci prouve que la série de Taylor, $\sum \dfrac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n$, associée à φ converge simplement sur $]-1,1[$, par suite φ est DSE en 0 de rayon de convergence $R \geq 1$, donc pour tout $t \in]-1,1[$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}t^k = \mathrm{e}\left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty}b_k t^k\right)$$

III. B - Démonstration de l'inégalité de Carleman-Yang

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

Q27. Ecrivons

$$\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n}c_k a_k\right)^{1/n}\left(\prod_{k=1}^{n}c_k\right)^{-1/n}$$

l'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k a_k\left(\prod_{k=1}^{n}c_k\right)^{-1/n}$$

soit $N \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k a_k\left(\prod_{k=1}^{n}c_k\right)^{-1/n}\right)$$

remarquons que $(1 \leq n \leq N$ et $1 \leq k \leq n\ ) \Leftrightarrow (1 \leq k \leq N$ et $k \leq n \leq N\ )$ donc

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} \leqslant \sum_{k=1}^{N}\left(c_k a_k\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n}c_i\right)^{-1/n}\right)$$

Si la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n}c_i\right)^{-1/n}$ converge et la série $\displaystyle\sum_{k\geq1}\left(c_k a_k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n}c_i\right)^{-1/n}\right)$ converge alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\left(c_k a_k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n}c_i\right)^{-1/n}\right)$$

Le cas de divergence est trivial .

Q28. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge . Posons $c_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$.

On a

$$\prod_{i=1}^{n} c_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{(i+1)^i}{i^{i-1}} = (n+1)^n$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n} &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\\ &= \frac{1}{k}\end{aligned}$$

ainsi

$$c_k a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n} = \frac{c_k a_k}{k}$$

de plus $c_k = k\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\sim} ek$ donc $\dfrac{c_k a_k}{k} \underset{k\to+\infty}{\sim} ea_k$ et la série $\sum\limits_{n\geq 1}\left(c_k a_k \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n}\right)$ converge, par suite $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\left(c_k a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n}\right)$$

qui s'écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n a_n}{n}$$

remarquons que $c_n = n\varphi(\frac{1}{n+1}) = en\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k}\right)$,ce qui donn l'inégalité de Carleman-Yang :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k}\right) a_n$$

Q29.

- Par récurrence sur $n \geq 1$:

On a $b_0 = -1$ et $b_1 = \dfrac{1}{2}$, supposons que $b_k \geqslant 0$ pour tout k dans $[\![1, n]\!]$.

La relation de définition des b_n s'écrit

$$n(n+1)b_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+1}{k+1} b_{n-k}$$

par suite

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)b_{n+1} &= 1-\sum_{k=2}^{n}\frac{n+2}{k+1}b_{n-k+1}-\frac{n+2}{2}b_n\\ &= 1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n+2}{k+2}b_{n-k}-\frac{n+2}{2}b_n\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)b_{n+1}-n(n+1)b_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n+1}{k+1}-\frac{n+2}{k+2}\right)b_{n-k}-\frac{n+2}{2}b_n\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{(k+1)(k+2)}b_{n-k}-\frac{n+2}{2}b_n\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence on a $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{(k+1)(k+2)}b_{n-k}\geq 0$ donc

$$(n+1)(n+2)b_{n+1}\geq\left(n(n+1)-\frac{n+2}{2}\right)b_n=\left(n^2+\frac{1}{2}n-1\right)b_n$$

ce qui donne $b_{n+1}\geq 0$. D'où pour tout n dans $\mathbb{N}^*, b_n\geqslant 0$.

- D'après ce qui précède on a $1-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k}{(n+1)^k}<1-\frac{1}{2(n+1)}$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}\leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k}{(n+1)^k}\right)a_n<\mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$$

ce qui signifie que l'inégalité Carleman-Yang est plus fine que l'inégalité de Carleman.

Fin

CONCOURS CENTRALE-SUP ÉLEC

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2

SESSION 2024 - FILIÈRE MP - MPI

Durée: 4 heures

NOTATIONS

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_d[X]$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d.
- On note $\mathbb{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Objectifs du problème

Soit h une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation (E_h) sur $\mathbb{K}$ si

$$\forall x \in \mathbb{K},\ f(x+1) - f(x) = h(x) \qquad (E_h)$$

Le but du problème est l'étude de l'équation (E_h).

La partie I de ce problème étudie l'existence de solutions dans le cas où h est polynomiale.

La partie II introduit la définition et établit quelques propriétés des fonctions entières.

La partie III définit les polynômes de Bernoulli et explicite une solution polynomiale à l'équation (E_h), ainsi qu'une application analytique de ces polynômes.

La partie IV étend la résolution de (E_h) au cas où h est une fonction entière.

I Étude de l'opérateur différence finie

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

Q1 Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Q2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

Q3 Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.

On note Δ_d l'endomorphisme de $\mathbb{K}_d[X]$ induit par Δ.

Q4 Déterminer $\operatorname{Ker}(\Delta_d)$ et $\operatorname{Im}(\Delta_d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

Q5 En déduire $\operatorname{Ker}(\Delta)$ et $\operatorname{Im}(\Delta)$. Appliquer les résultats obtenus à l'étude de l'équation (E_h) dans le cas où h est une fonction polynomiale.

Q6 On suppose (pour cette question seulement) que h est la fonction $x \mapsto x$. Déterminer une solution de (E_h) dans $\mathbb{K}_2[X]$, puis toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_h).

Q7 Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un polynôme annulateur de Δ_d. L'endomorphisme Δ_d est-il diagonalisable?

II Fonctions entières

On note ω l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $t \in [0,1]$, par $\omega(t) = \mathrm{e}^{2i\pi t}$.

II.A - Généralités

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ développables en série entière de rayon de convergence infini.

Q8 Justifier que si $(f,g) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}$ et $fg \in \mathcal{E}$.

Q9 Soit $f \in \mathcal{E}$ dont on note $\sum a_n z^n$ le développement en série entière.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-k}\, dt = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

II. B- Une intégrale

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$I_p = \int_0^1 \frac{\omega(t)^{p+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1}\, dt$$

Q10 Vérifier que cette intégrale est bien définie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Q11 Montrer qu'il existe une fonction $\beta \in \mathcal{E}$ et une constante $C \in]0,1[$ telles que, pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$,

$$\mathrm{e}^{\zeta} - 1 = \zeta(1 + \zeta\beta(\zeta)) \quad \text{et} \quad |\beta(\zeta)| \leqslant C$$

Q12 En déduire que pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{\zeta^p}{\mathrm{e}^{\zeta} - 1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \zeta^{j+p-1} \beta(\zeta)^j$$

Q13 Montrer que $I_0 = 1$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*, I_p = 0$.

III Polynômes de Bernoulli

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on définit dans cette partie :

$$B_n(z) = n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\omega(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1\right)\omega(t)^{n-1}}\, dt$$

III. A - Lien avec l'équation (E_h)

Q14 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n}$$

En déduire que B_n est un polynôme unitaire de degré n.

Q15 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, B_n' = nB_{n-1}$.

Q16 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1}$$

Q17 En déduire l'expression d'une fonction polynomiale vérifiant l'équation (E_h) sur $\mathbb{C}$ lorsque h est une fonction polynomiale.

III. B - Unicité

Q18 Montrer que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, B_n' = nB_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^1 B_n(t)dt = 0 \end{cases}$$

Q19 Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, H_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = B_n$.

III. C - Une application analytique

Soit ψ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit de plus u la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(x,t) = \psi(x)e^{tx}$$

Q20 Montrer que u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Q21 Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit A_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A_n(t) = \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t)$.

Q22 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = B_n$.

IV Solution entière de l'équation (E_h)

IV.A - Une inégalité de contrôle

On se propose dans cette partie de montrer par l'absurde la propriété $\mathcal{P}$:

$$\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, (|z| = (2n+1)\pi \Rightarrow |\mathrm{e}^z - 1| \geqslant c)$$

On suppose que $\mathcal{P}$ est fausse.

Q23 Montrer l'existence d'une suite d'entiers naturels $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et d'une suite de nombres complexes $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\mathrm{e}^{z_p} \underset{p\to+\infty}{\to} 1 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, |z_p| = (2n_p + 1)\,\pi$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $a_p = \mathrm{Re}\,(z_p)$ et $b_p = \mathrm{Im}\,(z_p)$.

Q24 Montrer que $a_p \underset{p\to+\infty}{\to} 0$ et $|z_p| - |b_p| \underset{p\to+\infty}{\to} 0$.

Q25 Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note

$$\varepsilon_p = \begin{cases} +1 \text{ si } b_p \geqslant 0 \\ -1 \text{ si } b_p < 0 \end{cases}$$

En étudiant $\exp\,(z_p - \mathrm{i}\varepsilon_p\,|z_p|)$, aboutir à une contradiction et conclure.

IV.B - Une solution à (E_h)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit maintenant

$$\gamma_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (2n+1)\pi\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, soit

$$Q_n(z) = n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right) \gamma_n(t)^{n-1}} \, dt$$

Q26 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, Q_n \in \mathcal{E}$.

Q27 Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, \quad Q_n(z+1) - Q_n(z) = nz^{n-1}$$

Q28 Montrer qu'il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|Q_n(z)| \leqslant a\mathrm{e}^{bn|z|}$$

Q29 En déduire l'existence d'une solution dans $\mathcal{E}$ à l'équation (E_h) lorsque $h \in \mathcal{E}$.

FIN

Concours Centrale-Sup Élec

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 2

Session 2024 - Filière MP - MPI

I Étude de l'opérateur différence finie

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

Q1 Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X)$ et $P(X+1)$ sont des polynômes à coefficients réels, donc $\Delta(P)$ est un polynôme à coefficients réels et Δ est une application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$. De plus, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) \\ &= \lambda\left[P(X+1) - P(X)\right] + \left[Q(X+1) - Q(X)\right] \\ &= \lambda\Delta(P) + \Delta(Q), \end{aligned}$$

donc Δ est linéaire, ce qui permet de conclure que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Q2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n , écrivons $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, donc

$$\Delta(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left((X+1)^k - X^k\right)$$

et on a $\deg\left((X+1)^k - X^k\right) = k-1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ donc

$$\deg\left(\Delta(P)\right) = \deg\left((X+1)^n - X^n\right) = n-1$$

de plus si P est un polynôme constant $(P \in \mathbb{R})$ alors $\Delta(P) = 0$ et $\deg\left(\Delta(P)\right) = -\infty$.

Ainsi $\boxed{\deg\left(\Delta(P)\right) = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty & \text{si } \quad P \in \mathbb{K} \end{cases}}$.

Q3 Soit $d \in \mathbb{N}^*$, pour tout $P \in \mathbb{K}_d[X]$ on a $\Delta(P) \leq \deg(P)$ donc $\Delta(P) \in \mathbb{K}_d[X]$, le sous espace vectoriel $\mathbb{K}_d[X]$ est donc stable par Δ , ainsi Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.

Q4

- Soit $d \in \mathbb{N}^*$et $P \in \mathbb{K}_d[X]$

$$\boxed{P \in \operatorname{Ker}(\Delta_d) \Leftrightarrow P(X+1) - P(X) = 0}$$

Ce qui donne , pour tout k dans $\mathbb{N}$, $P(k) = P(0)$, ainsi le polynôme $P(X) - P(0)$ admet une infinité de racines , donc il est nul et P est un polynôme constant , par suite $\operatorname{Ker}(\Delta_d) \subset \mathbb{K}_0[X]$.

L'inclusion $\mathbb{K}_0[X] \subset \operatorname{Ker}(\Delta_d)$ est évidente . Donc $\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta_d) = \mathbb{K}_0[X]}$.

- On a $\dim \operatorname{Ker}(\Delta_d) = 1$, le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Im}(\Delta_d) = d$.

D'après Q.2 on a $\operatorname{Im}(\Delta_d) \subset \mathbb{K}_{d-1}[X]$ d'où $\boxed{\operatorname{Im}(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X]}$.

Q5

- On a $\mathbb{K}_0[X] \subset \operatorname{Ker}(\Delta)$. Soit $P \in \operatorname{Ker}(\Delta)$, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $P \in \mathbb{K}_d[X]$ donc $P \in \operatorname{Ker}(\Delta_d) = \mathbb{K}_0[X]$ par suite $\operatorname{Ker}(\Delta) \subset \mathbb{K}_0[X]$, d'où $\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}_0[X]}$.
- Soit $d \in \mathbb{N}^*$on a $\operatorname{Im}(\Delta_d) \subset \operatorname{Im}(\Delta)$, donc pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}_{d-1}[X] \subset \operatorname{Im}(\Delta)$ ainsi $\mathbb{K}[X] \subset \operatorname{Im}(\Delta)$ d'où $\boxed{\operatorname{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]}$.
- Soit h une fonction polynomiale , qu'on peut confondre avec le polynôme associé , donc $h \in \operatorname{Im}(\Delta)$ et il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = h(X)$, ainsi l'équation (E_h) admet une solution .

Si Q sont une autre solution de (E_h) ,alors $P-Q \in \operatorname{Ker}(\Delta)$ par suite il existe une constante c telle que $Q = P+c$.

On conclus que (E_h) admet une infinité de solutions polynomiales .

Q6 Si P une solution polynomiale de (E_h) avec $h : x \mapsto x$; donc $P(X+1) - P(X) = X$, forcement on a $\deg P = 2$. Posons $P(X) = aX^2 + bX + c$, donc

$$\boxed{P(X+1) - P(X) = a(2X+1) + b = X}$$

ce qui donne

$$\boxed{a = -b = \frac{1}{2}}$$

Ainsi les solutions polynomiales de l'équation (E_h) sont de la forme $\boxed{P(X) = \frac{1}{2}X(X-1) + c \text{ , } c \in \mathbb{K}}$.

Q7 Soit $d \in \mathbb{N}^*$et $k \in [\![1, d]\!]$, on a

$$\boxed{\deg \Delta_d(X^k) = k-1 \text{ , } \deg \Delta_d^2(X^k) = k-2, ..., \deg \Delta_d^{k-1}(X^k) = 1 \text{ et } \deg \Delta_d^k(X^k) = 0}$$

donc le polynôme $\Delta_d^k(X^k)$ est constant et $\Delta_d^{k+1}(X^k) = 0$.

Ainsi pour tout $k \in [\![1, d]\!]$ $\Delta_d^{d+1}(X^k) = 0$, ce qui signifie que $\boxed{\Delta_d^{d+1} = 0_{\mathbb{K}_d[X]}}$ et X^{d+1} est unpolynôme annulateur de Δ_d .

Si $d \geq 2$ alors l'endomorphisme Δ_d est nilpotent et non nul donc non diagonalisable .

Si $d = 1$, $\Delta_d = 0$ donc il est diagonalisable .

II Fonctions entières

On note ω l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $t \in [0, 1]$, par $\omega(t) = \mathrm{e}^{2i\pi t}$ et$\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ développables en série entière de rayon de convergence infini.

II.A - Généralités

Q8 Soit $(f, g) \in \mathcal{E}^2$, posons pour tout z dans $\mathbb{C}$: $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

- On a pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\mathrm{Rcv}(\sum(\lambda a_n + \mu b_n)z^n) \geq \min(\mathrm{Rcv}(\sum a_n z^n), \mathrm{Rcv}(\sum b_n z^n)$, donc

$\mathrm{Rcv}(\sum(\lambda a_n + \mu b_n)z^n) = +\infty$ et pour tout z dans $\mathbb{C}$ $(\lambda f + \mu g)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)z^n$, d'où $\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}$.

- Posons $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, pour tout z dans $\mathbb{C}$ les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument, le

théorème du produit de Cauchy de deux séries assure que $\sum c_n z^n$ converge absolument et de somme $f(z)g(z)$, donc fg est développable en série entière de rayon de convergence infini ce qui donne $fg \in \mathcal{E}$.

Q9 Soit $f \in \mathcal{E}$ et $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$:

Pour $k \in \mathbb{Z}$ on a : $f(\omega(t))\omega(t)^{-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \omega(t)^{n-k}$. Comme $\left|a_n \omega(t)^{n-k}\right| = |a_n|$ et $\sum |a_n|$ converge alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n \omega(t)^{n-k}$ converge normalement et uniformément sur $[0, 1]$, le théorème d'intégration des séries de fonctions permet l'intervertir les symboles $\sum$ et $\int$, ainsi

$$\boxed{\int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-k}\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \omega(t)^{n-k}\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 \omega(t)^{n-k} dt}$$

et on a $\int_0^1 \omega(t)^{n-k} dt = \begin{cases} a_k & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\boxed{\int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-k}\, dt = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

II. B- Une intégrale

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$I_p=\int_0^1 \frac{\omega(t)^{p+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)}-1}\,dt$$

Q10 Pour tout $t\in[0,1]$ on a $|\omega(t)|=1$ donc $\omega(t)\notin 2i\pi\mathbb{Z}$ et $\mathrm{e}^{\omega(t)}\neq 1$, ainsi la fonction $t\mapsto \frac{\omega(t)^{p+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)}-1}$ est définie et continue sur $[0,1]$, ce qui prouve que I_p est bien définie pour tout $p\in\mathbb{Z}$.

Q11 Soit $\zeta\in\mathbb{U}$, on a

$$\mathrm{e}^{\zeta}-1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta^n}{n!}=\zeta(1+\zeta\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\zeta^{n-2}}{n!})$$

et

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\zeta^{n-2}}{n!}\right| &\leq \sum_{n=2}^{+\infty}\left|\frac{\zeta^{n-2}}{n!}\right|\\ &\leq \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

posons $C=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}-2\in\,]0,1[$ et $\beta:z:\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+2)!}$, on a donc pour tout $\zeta\in\mathbb{U}$:

$\mathrm{e}^{\zeta}-1=\zeta(1+\zeta\beta(\zeta))\quad et\quad |\beta(\zeta)|\leqslant C$

Q12 Soitt $\zeta\in\mathbb{U}$ et $p\in\mathbb{Z}$, d'après la question précédente on a

$$\frac{\zeta^p}{\mathrm{e}^{\zeta}-1}=\frac{\zeta^{p-1}}{1+\zeta\beta(\zeta)}$$

avec $|\zeta\beta(\zeta)|\leqslant C<1$ donc $\displaystyle\frac{\zeta^p}{\mathrm{e}^{\zeta}-1}=\zeta^{p-1}\sum_{j=0}^{+\infty}(-\zeta\beta(\zeta))^j=\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\zeta^{j+p-1}\beta(\zeta)^j$

Q13 Soit $p\in\mathbb{N}$,on a

$$I_p=\int_0^1\omega(t)\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\omega(t)^{j+p-1}\beta(\omega(t))^j dt$$

et pour tout $j\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,1]$, $\left|(-1)^j\omega(t)^{j+p-1}\beta(\omega(t))^j\right|\leq C^j$ donc la série de fonctions $\sum_j(-1)^j\omega(t)^{j+p-1}\beta(\omega(t))^j$ converge normalement et uniformément sur $[0,1]$, le théorème d'intégration des séries de fonctions permet d'écrire

$$I_p=\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\left(\int_0^1\omega(t)^{j+p}\beta(\omega(t))^j dt\right)$$

d'après Q.8 on a pour tout $j \in \mathbb{N}$, la fonction $\beta^j \in \mathcal{E}$, la question Q.9 donne

$$\boxed{\int_0^1 \omega(t)^{j+p}\beta(\omega(t))^j dt = \begin{cases} 1 & \text{si } \ p = j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

d'où $I_0 = 1$ et $I_p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

III Polynômes de Bernoulli

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on définit dans cette partie :

$$B_n(z) = n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{\left(e^{\omega(t)} - 1\right) \omega(t)^{n-1}} \, dt$$

III. A - Lien avec l'équation (E_h)

Q14 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a

$$B_n(z) = n! \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)} - 1} \, dt$$

comme dans la question Q.12 on a pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)} - 1} \right| &= \left| \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \omega(t)^{j+k-n} \beta(\omega(t))^j \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} C^j \end{aligned}$$

donc $\left| \dfrac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)} - 1} \right| \leq \dfrac{1}{1-C} \quad , \forall t \in [0,1] \qquad (Q.14 \quad 1)$

par suite $\left| \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1} \right| \leq \frac{1}{1-C} \frac{|z|^k}{k!}$ ce qui prouve la convergence normale et uniforme de la série $\sum_k \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1}$ sur $[0,1]$, le théorème d'intégration des séries de fonctions permet d'écrire

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \left(\int_0^1 \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)} - 1} \, dt \right) = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} I_{k-n}$$

d'après Q.13 $I_{k-n} = 0$ si $k \geq n+1$, ainsi $B_n(z) = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n} \qquad (Q.14 \quad 2)$

Le polynôme B_n s'écrit alors

$$B_n(z) = n! \left(\frac{z^n}{n!} I_0 + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} I_{-1} \ldots \right) = z^n + \ldots$$

donc B_n est unpolynôme unitaire de degré n.

$\boxed{Q15}$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} B_n' &= n! \sum_{k=1}^{n} k \frac{X^{k-1}}{k!} I_{k-n} \\ &= n! \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} I_{k-1-(n-1)} \\ &= n \left((n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} I_{k-(n-1)} \right) \\ &= n B_{n-1} \end{aligned}$$

- Autre méthode :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{x\omega(t)}}{\left(e^{\omega(t)} - 1\right) \omega(t)^{n-1}} \end{array} \right.$, on a f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \omega(t) f(x,t)$.

Soit $a > 0$, l'inégalité (Q.14.1) donne pour tout $x \in [-a, a]$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \frac{e^{x\cos(2\pi t)}}{1-C} \leq \frac{e^a}{1-C} \qquad (1)$$

Puisqu'on intègre sur le segment $[0,1]$,les fonctions constantes sont intégrable $[0,1]$, donc (1) est une relation de domination, le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre assure que B_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a, a]$, pour tout $a > 0$, donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} B_n'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt \\ &= n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{\left(e^{\omega(t)} - 1\right) \omega(t)^{n-2}} \, dt \\ &= n B_{n-1}(x) \end{aligned}$$

On a $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ donc $\boxed{B_n' = nB_{n-1}}$.

$\boxed{Q16}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} B_n(z+1) - B_n(z) &= n! \int_0^1 \frac{e^{(z+1)\omega(t)} - e^{z\omega(t)}}{\left(e^{\omega(t)} - 1\right) \omega(t)^{n-1}} \, dt \\ &= n! \int_0^1 \omega(t)^{1-n} e^{z\omega(t)} \, dt \end{aligned}$$

la question Q.9 donne

$$\int_0^1 \omega(t)^{1-n} e^{z\omega(t)}\, dt = \int_0^1 \omega(t)^{1-n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\omega(t)^k\right) dt = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

d'où $B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1} \qquad (Q.16 \ \ 1)$

Q17 Soit $h : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $z^k = \frac{1}{k+1}\left(B_{k+1}(z+1) - B_{k+1}(z)\right)$ donc

$$h(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z+1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z)$$

Ce qui donne une solution polynomiale de (E_h) sur $\mathbb{C}$ définie par $f : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z)$, les autres solutions sont de la forme $f + c$ avec $c \in \mathbb{C}$.

III. B - Unicité

Q18

- Montrons que les polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les relations

$$\begin{cases} 1) \quad B_0 = 1 \\ 2) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = nB_{n-1} \\ 3) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^1 B_n(t)dt = 0 \end{cases}$$

De la relation (Q.14.2) on a $B_0 = I_0 = 1$.
La question Q.15 donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B'_n = nB_{n-1}$ donc $\int_0^1 B_n(t)dt = n\left(B_{n-1}(1) - B_{n-1}(0)\right)$ et la relation (Q.16 .1) asure que $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$.
Ainsi $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les relations 1) 2) et 3) .

- Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui vérifient les relations 1) 2) et 3) . Montrons par récurrence que $P_n = B_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

On a $P_0 = B_0 = 1$, supposons que c'est vrai pour $n \geq 1$ et montrons le pour $n+1$.
La relation 2) donne $P'_{n+1} = (n+1)P_n$, par hypothèse récurrence on a $P_n = B_n$ donc $P'_{n+1} = B'_{n+1}$, ce qui signifie que $P_{n+1} = B_{n+1} + c$ avec $c \in \mathbb{C}$.
De la relation 3) on a $\int_0^1 B_{n+1}(t)dt = \int_0^1 P_{n+1}(t)dt = 0$ donc $c = 0$ et $P_{n+1} = B_{n+1}$.
Ainsi $P_n = B_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

D'où $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes qui vérifient les relations 1) 2) et 3).

Q19 Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Montrons que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions 1) 2) et 3) de la question précédente .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

- $H_0(X) = (-1)^0 B_0(1-X) = 1$
- $H_n'(X) = (-1)^{n+1} B_n'(1-X) = n(-1)^{n+1} B_{n-1}(1-X) = nH_{n-1}(X)$.
- $\displaystyle\int_0^1 H_n(t)dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)dt \overset{1-t=u}{=} (-1)^n \int_0^1 B_n(u)du = 0$.

ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N},\ H_n = B_n$.

III. C - Une application analytique

Soit ψ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit de plus u la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $u(x,t) = \psi(x)\mathrm{e}^{tx}$.

Q20 Pour tout $x \neq 0$ on a $\dfrac{1}{\psi(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$,qui est une série entière de rayon de convergence $+\infty$, cette relation est aussi valable pour $x = 0$. Donc $\dfrac{1}{\psi}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de plus elle ne s'annule pas, ce qui prouve que ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que u est infiniment dérivable par rappoet à x et par rapport à t et ses dérivées partielles sont continues , donc u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Q21 Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = xu(x,t)}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par application de la formule de Leibniz on trouve

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right) = x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + \binom{n}{1}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}(x,t) = x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}(x,t) \quad (Q.21\ \ 1)$$

u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de Schwartz permet donc d'écrire : $\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right) = \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x,t)\right)$, ce qui donne $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}(x,t)\right) = x\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\dfrac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}(x,t)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n(t) = \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t)$.

Q22 Montrons que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes qui vérifient les conditions 1) 2) et 3) de la question Q.18 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On a $A_0(t) = u(0,t) = 1$.
- D'après (Q.21 1) on a pour $x = 0$, $A_n'(t) = nA_{n-1}(t)$.

De cette relation, on déduit, par récurrence , que A_n est un polynôme .

- Pour $x \neq 0$ calculons $\int_0^1 \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)dt$.

La fonction u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ donc les dérivées partielles $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ sont bornées sur tout compact $[a,b]\times[0,1]\subset\mathbb{R}\times[0,1]$ donc la fonction $x\mapsto \int_0^1 u(x,t)dt$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\frac{\partial^n}{\partial x^n}(\int_0^1 u(x,t)dt) = \int_0^1 \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)dt}$$

donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)dt = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\psi(x)\int_0^1 \mathrm{e}^{tx}dt\right) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\psi(x)\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right) = 0}$$

par continuité en 0 on a

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t)dt = 0}$$

ainsi $\int_0^1 A_n(t)dt = 0$.

Ce qui prouve donc que pour tout $n\in\mathbb{N},\ A_n = B_n$.

IV Solution entière de l'équation (E_h)

IV.A - Une inégalité de contrôle

Soit $\mathcal{P}$ la proposition : $\exists c>0, \forall n\in\mathbb{N}, \forall z\in\mathbb{C}, (|z| = (2n+1)\pi \Rightarrow |\mathrm{e}^z - 1| \geqslant c)$

On suppose que $\mathcal{P}$ est fausse.

Q23 $\mathcal{P}$ est fausse donc $\forall c>0, \exists n\in\mathbb{N}, \exists z\in\mathbb{C}$ tels que $(|z| = (2n+1)\pi$ et $|\mathrm{e}^z-1| < c)$

Soit $p\in\mathbb{N}^*$, prenons $c=\frac{1}{p}$ alors $\exists n_p\in\mathbb{N}$ et$\exists z_p\in\mathbb{C}$ tels que $(|z_p| = (2n_p+1)\pi$ et $|\mathrm{e}^{z_p}-1| < \frac{1}{p})$, ce qui donne $\boxed{\mathrm{e}^{z_p} \underset{p\to+\infty}{\to} 1 \text{ et } \forall p\in\mathbb{N} \text{ , } |z_p| = (2n_p+1)\pi}$ Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on note $a_p = \mathrm{Re}(z_p)$ et $b_p = \mathrm{Im}(z_p)$.

Q24

- On a $\mathrm{e}^{z_p} \underset{p\to+\infty}{\to} 1$ donc $|\mathrm{e}^{z_p}| \underset{p\to+\infty}{\to} 1$, comme $\mathrm{e}^{z_p} = \mathrm{e}^{a_p}\mathrm{e}^{ib_p}$ alors $\mathrm{e}^{a_p} \underset{p\to+\infty}{\to} 1$ ce qui signifie que $\boxed{a_p \underset{p\to+\infty}{\to} 0}$.
- D'après l'inégalité triangulaire on a $\forall p\in\mathbb{N}, ||z_p|-|b_p|| \leq |z_p - ib_p| = |a_p|$,ce qui donne $\boxed{|z_p|-|b_p| \underset{p\to+\infty}{\to} 0}$.

Q25 Soit $\varepsilon_p = \begin{cases} +1 \text{ si } b_p \geqslant 0 \\ -1 \text{ si } b_p < 0 \end{cases}$.

- D'une part on a $\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_p|z_p|) = \exp(-\mathrm{i}\varepsilon_p(2n_p+1)\pi) = -1$, donc

$$\boxed{\exp(z_p - \mathrm{i}\varepsilon_p|z_p|) = -\exp(z_p) \underset{p\to+\infty}{\to} -1 \quad (1)}$$

- D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\exp\left(z_p - \mathrm{i}\varepsilon_p \left|z_p\right|\right) = \exp\left(a_p + \mathrm{i}\ \left(b_p - \varepsilon_p \left|z_p\right|\right)\right) = \exp\left(a_p + \mathrm{i}\ \varepsilon_p(\varepsilon_p b_p - \left|z_p\right|)\right)$$

comme $\varepsilon_p b_p = |b_p|$ alors

$$\exp\left(z_p - \mathrm{i}\varepsilon_p \left|z_p\right|\right) = \exp\left(a_p + \mathrm{i}\ \varepsilon_p(\left|b_p\right| - \left|z_p\right|)\right)$$

or $a_p \underset{p\to+\infty}{\to} 0$ et $|z_p| - |b_p| \underset{p\to+\infty}{\to} 0$ donc $\exp\left(z_p - \mathrm{i}\varepsilon_p \left|z_p\right|\right) \underset{p\to+\infty}{\to} 1$, ce qui contredit (1) .

- La supposition du départ est fausse donc $\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, (|z| = (2n+1)\pi \Rightarrow |\mathrm{e}^z - 1| \geqslant c) \qquad (Q.25\quad 1)$

IV.B - Une solution à (E_h)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$ et $z \in \mathbb{C}$, posons

$$\gamma_n(t) : (2n+1)\pi\omega(t) \text{ et } \ Q_n(z) = n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)\gamma_n(t)^{n-1}}\, dt$$

Q26 Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, notons $g(t,z) = \dfrac{\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)\gamma_n(t)^{n-1}}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\ |\gamma_n(t)| = (2n+1)\pi$ et $\gamma_n(t) \in \mathbb{C}\backslash\,(2i\pi\mathbb{Z})$, donc la fonction $g : (t,z) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}}{(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)}-1)\gamma_n(t)^{n-1}}$ est définie et continue sur $[0,1]\times\mathbb{C}$. La fonction Q_n est donc bien définie et on a

$$g(t,z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k \gamma_n(t)^{k-n+1}}{k!\,\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(t)$$

Les fonctions φ_k sont, définies et continues, donc intégrables sur $[0,1]$.

D'après (Q.25 1) il existe $c > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\left|\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right| \geqslant c$, ce qui donne

$$\int_0^1 |\varphi_k(t)|\, dt \leq \frac{|z|^k\left((2n+1)\pi\right)^{k-n+1}}{k!\ c} \qquad (Q.26\quad 1)$$

donc la série $\displaystyle\sum_k \int_0^1 |\varphi_k(t)|\, dt$ converge , d'après le théorème d'intégration d'une série de fonctions, sur un intervalle quelconque, on peut intervertir les symboles $\sum$ et $\int$ et on obtient :

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(t)\right) dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 \varphi_k(t) dt\right)$$

donc $\displaystyle Q_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n!}{k!}\int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1}\, dt\right) z^k \qquad (Q.26\quad 2)$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ Q_n \in \mathcal{E}$.

Q27 On a

$$Q_n(z+1)-Q_n(z) = n!\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{(z+1)\gamma_n(t)}-\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)}-1\right)\gamma_n(t)^{n-1}}dt$$
$$= n!\int_0^1 \gamma_n(t)^{1-n}\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}\ dt$$

la question Q.9 donne

$$\int_0^1 \gamma_n(t)^{1-n}\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}\ dt = ((2n+1)\pi)^{1-n}\int_0^1 \omega(t)^{1-n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{((2n+1)\pi z)^k}{k!}\omega(t)^k\right)dt = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall z\in\mathbb{C},\quad Q_n(z+1)-Q_n(z)=nz^{n-1}$

Q28 D'après (Q.25 1) il existe $c>0$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}$ $\left|\mathrm{e}^{\gamma_n(t)}-1\right|\geqslant c$, donc

$$|Q_n(z)|\leq n!\int_0^1\left|\frac{\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)}-1\right)\gamma_n(t)^{n-1}}\right|dt\leq\frac{n!}{c\left((2n+1)\pi\right)^{n-1}}\int_0^1\left|\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}\right|dt$$

on a $\dfrac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}}\leq 1$ et $\left|\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}\right|=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z\gamma_n(t))}$, comme

$$|\mathrm{Re}(z\gamma_n(t))|\leq|z\gamma_n(t)|$$

et

$$|\gamma_n(t)|=(2n+1)\pi$$

alors

$$\left|\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}\right|\leq\mathrm{e}^{3\pi n|z|}.$$

Ainsi il existe $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $z\in\mathbb{C}$, $|Q_n(z)|\leqslant a\mathrm{e}^{b\ n\ |z|}$.

Q29

- Soit $h\in\mathcal{E}$, écrivons pour tout $z\in\mathbb{C}$, $h(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ et on a $(n+1)z^n=Q_{n+1}(z+1)-Q_{n+1}(z)$ donc

$$h(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(Q_{n+1}(z+1)-Q_{n+1}(z)\right)$$

comme $|Q_n(z)|\leqslant a\mathrm{e}^{bn|z|}$ et $\sum a_nz^n$ de rayon de convergence infinie alors $\sum\frac{a_n}{n+1}Q_{n+1}(z)$ converge pout tout $z\in\mathbb{C}$, posons $f:z\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n+1}Q_{n+1}(z)$,elle vérifie $f(z+1)-f(z)=h(z)$, donc f est solution de (E_h) .

- Montrons que $f\in\mathcal{E}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} Q_{n+1}(z) \text{ et } Q_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{n!}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1}\, dt \right) z^k$$

écrivons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} U_{n,k}$, avec $U_{n,k} = \frac{a_n\ n!\ z^k}{(n+1)k!} \int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1}\, dt.$

Pour intervertir les deux symboles $\sum$, dans l'expression de f, on doit montrer que la famille $(U_{n,k})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable .

On a

$$\begin{aligned} |U_{n,k}| &\leq \frac{|a_n|\, n!\, |z|^k\, ((2n+1)\pi)^{k-n+1}}{(n+1)k!\ c} \\ &\leq \frac{|a_n|\, |z|^k\, ((2n+1)\pi)^k}{k!\ c} \quad \left(\text{car } \frac{n!}{(n+1)((2n+1)\pi)^{n+1}} \leq 1\right) \end{aligned}$$

donc pour n fixé dans $\mathbb{N}$ la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} U_{n,k}$ converge et

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{+\infty} |U_{n,k}| \leq \frac{|a_n|}{c} \mathrm{e}^{|z|(2n+1)\pi}$$

et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\, \mathrm{e}^{2|z|n\pi}$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n$ et $(U_{n,k})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$est sommable .

On peut écrire alors

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} U_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n n!}{(n+1)} \int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1}\, dt \right) \frac{z^k}{k!}.$$

ce qui montre que $f \in \mathcal{E}$.

Fin

Grenoble INP
ENSIMAG

Chimie Paris
ParisTech
PSL

INP
TOULOUSE

CONCOURS COMMUN CINP

ENAC

ensmm
École Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques

ENSAI
École nationale de la statistique et de l'analyse de l'information
Become a skilled data scientist

CONCOURS COMMUN CINP

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 1

SESSION 2024 - FILIÈRE MP

Durée: 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE I

X est une variable aléatoire á valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie

Q1 Exprimer, pour k non nul, $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X > k - 1)$ et de $\mathbb{P}(X > k)$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$

Démontrer le résultat de cours : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Une urne contient n boules numérotées de 1 á n. On effectue, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu.

Calculer, pour tout entier naturel k, $\mathbb{P}(X \leq k)$,puis donner la loi de X .

Q3 Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$,puis en utilisant la question **Q 1**, déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $\mathbb{E}(X)$.

EXERCICE II

On considère les équations différentielles:

$$\begin{aligned} (E) &: \quad x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1 \\ (H) &: \quad x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0 \end{aligned}$$

On note $I =]0, +\infty[$, $\mathcal{S}_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur l'et $\mathcal{S}_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I.

Q4 Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$

Q5 Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{\text{ch}\,(x) - 1}{x^2}$.

Q6 On note pour $x \in I$, $g(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{\text{sh}\,(x)}{x^2}$.

On admet dans cette question que $g \in \mathcal{S}_I(E)$ et $h \in \mathcal{S}_I(H)$. Donner, sans calculs, l'ensemble $\mathcal{S}_I(E)$

Q7 Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ (solutions de (H) sur $\mathbb{R}$)

PROBLEME

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme

Q8 Question préliminaire

Si on admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Partie I

Q9 On note, pour tout entier naturel $n, W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n\, dx$. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n.

En déduire, pour tout entier naturel n,que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q10 Déterminer sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \text{Arcsin}\,(x)$.

Q11 En déduire que pour tout $x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}.$$

Q12 Justifier que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}\right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} dx.$$

Q13 En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie II

Q14 Donner sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$,puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$.
On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

Q15 On pose pour $x \in [0,+\infty[$, $\quad f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,dt$.
Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Q16 Établir que cette fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0,1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

Q17 Réduire au même dénominateur l'expression $\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2 t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in]0,1[$,
$f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

Q18 Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

FIN

Concours Commun CINP

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 1

Session 2024 - Filière MP

EXERCICE I

X est une variable aléatoire á valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie

Q1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- On a $[X > k-1] = [X > k] \cup [X = k]$ et $[X > k] \cap [X = k] = \varnothing$, donc

$$\mathbb{P}(X > k-1) = \mathbb{P}(X > k) + \mathbb{P}(X = k)$$

par suite $\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k)\end{aligned}$$

dans la première somme on change k en $k-1$ et dans la deuxième on rajoute le terme $k = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X > k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)\end{aligned}$$

- Montrons que $n\mathbb{P}(X > n) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

On a $\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$ donc

$$0 \leq n\mathbb{P}(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

X admet une espérance donc la série $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge par suite le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Par comparaison on a $n\mathbb{P}(X > n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Ainsi la série $\sum \mathbb{P}(X > n)$ converge et par passage à la limite on a

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).}$$

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

- Posons pour $i \in [\![1, p]\!]$, Y_i la variable aléatoire qui donne le résultat du i eme tirage .

On a alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$[X \leq k] = \bigcap_{i=1}^{p} [Y_i \leq k]$$

le tirage est avec remise donc les Y_i sont mutuellement indépendantes , ce qui donne

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}(Y_i \leq k)$$

les Y_i suivent la loi uniforme $\mathcal{U}([1, n])$ donc $\mathbb{P}(Y_i \leq k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(Y_i = j) = \frac{k}{n}$, d'où

$$\boxed{\mathbb{P}(X \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p}$$

- Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1)$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \frac{k^p - (k-1)^p}{n^p}}$$

Q3

- Remarquons que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p$ est la somme de Riemann d'ordre n de la fonction $x \mapsto x^p$ sur l'intervalle $[0, 1]$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \quad (1)}$$

- La question **Q1** donne $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X>k)$ et on a $\mathbb{P}(X>k)=1-\mathbb{P}(X\leq k)=1-\left(\frac{k}{n}\right)^p$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)&=\sum_{k=1}^{n}1-\left(\frac{k}{n}\right)^p\\&=n-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\end{aligned}$$

de la relation (1) on a $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{p+1}$,d'où $\boxed{\mathbb{E}(X)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{pn}{p+1}}$.

EXERCICE II

On considère, sur $I =]0, +\infty[$, les équations différentielles:

$$\begin{aligned}(E):\quad & x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1\\ (H)\ :\quad & x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 0\end{aligned}$$

Q4 Sur I l'équation (H) s'écrit : $y'' = \frac{-4}{x}y' + \frac{2-x^2}{x^2}y$, c'est une équation homogène linéaire d'ordre 2 à coefficients définis et continus sur I , donc $\mathcal{S}_I(H)$ est $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2.

Q5 Soit f une solution de (E) développable en série entière , écrivons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, donc on a pour $x \in]-R, R[$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$$

par suite

$$x^2f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n \ , \ 4xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n n x^n$$

et

$$(2-x^2)f(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}$$

dans la deuxième somme on change $n+2$ en n , ce qui donne

$$\begin{aligned}(2-x^2)f(x) &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n\\ &= 2a_0 + 2a_1x + \sum_{n=2}^{+\infty}(2a_n - a_{n-2})\, x^n\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}x^2f''(x) + 4xf'(x) + (2-x^2)f(x) &= 2a_0 + 6a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n\left(n(n-1)+4n+2\right) - a_{n-2}\right]x^n\\ &= 2a_0 + 6a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n\,(n+1)(n+2) - a_{n-2}\right]x^n\end{aligned}$$

f une solution de (E) , donc

$$\forall x \in]-R, R[\ , 2a_0 - 1 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n (n+1)(n+2) - a_{n-2}\right] x^n = 0$$

par suite

$$\begin{cases} 2a_0 - 1 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_n (n+1)(n+2) - a_{n-2} = 0 \ , \ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_1 = 0 \\ a_n = \dfrac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)} \ , \ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

- Si $n = 2p+1$ alors $a_{2p+1} = \dfrac{a_{2p-1}}{(2p+2)(2p+2)}$, comme $a_1 = 0$ alors $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geq 1$.
- Si $n = 2p$ alors $a_{2p} = \dfrac{a_{2(p-1)}}{(2p+1)(2p+2)}$ pour tout $p \geq 1$, ce qui donne

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)(2p+1)} \frac{1}{(2p)(2p-1)} \cdots \frac{1}{4.3} \frac{1}{2} = \frac{1}{(2p+2)!}.$$

Ainsi $\boxed{f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)!} x^{2p}}$. Ce qui donne $R = +\infty$ par suite f est solution de (E) sue I .

Pour tout $x \in I$ on a $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+2)!} x^{2p+2} = \dfrac{1}{x^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p)!} x^{2p}$, or $\text{ch}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p)!} x^{2p}$ donc $\boxed{f(x) = \dfrac{\text{ch}(x) - 1}{x^2}}$.

Q6 On note pour $x \in I, \ g(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{x^2}$.On admet que $g \in \mathcal{S}_I(E)$ et $h \in \mathcal{S}_I(H)$.
Une solution de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de (H).
Une autre solution de (H) est donnée par $q = f - g$, donc $q(x) = \dfrac{\text{ch}(x)}{x^2}$.
Le Wronskien de la famille (q, h) est donné par

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} q(x) & h(x) \\ q'(x) & h'(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\cosh(x)}{x^2} \left(-\frac{2\sinh(x)}{x^3} + \frac{\cosh(x)}{x^2} \right) - \frac{\sinh(x)}{x^2} \left(-\frac{2\cosh(x)}{x^3} + \frac{\sinh(x)}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

$W(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ ce qui assure que (q, h) est un système fondamental de solutions de (H) donc $\mathcal{S}_I(H) = \mathrm{Vect}(q, h)$.

Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_I(E) = \left\{y = g + \alpha q + \beta h\ ,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

Q7 Soit $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$.

- La restriction $y_{|I}$,de y sur I , est une solution de (H) sur I , donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_{|I} = \alpha q + \beta h$, ainsi pour tout $x \in I\ \ (=]0, +\infty[)$

$$y_{|I}(x) = y(x) = \alpha \frac{\mathrm{ch}\,(x)}{x^2} + \beta \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{x^2} \text{ (*)}$$

y est dans $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ donc elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en particulier en 0 , au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\mathrm{ch}\,(x)}{x^2} + \beta \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{x^2} &= \frac{\alpha(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)) + \beta(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{x^2} \\ &= \frac{\alpha + \beta x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{6}x^3 + o(x^3)}{x^2} \end{aligned}$$

qui n'admet de limite en 0 que si $\alpha = \beta = 0$ d'où $y = 0$.

- La restriction $y_{|(-I)}$,de y sur $]-\infty, 0[$ donne une solution z de (H) I par $z(x) = y_{|(-I)}(-x) = y(-x)$,pour tout $x \in]0, +\infty[$. Donc $y_{|(-I)}$ admet une expression de la forme (*) , par le même raisonnementon trouve $y_{|(-I)} = 0$. Donc $y = 0$ sur $\mathbb{R}$ par suite $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \{0\}$.

La dimension de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ est zéro et pas 2 car on ne peut pas écrire l'équation (H) sous la forme $y'' = a(x)y' + b(x)y$ avec a et b des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$.

PROBLÈME

Q8 On écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$$

donc

$$\frac{3}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ainsi $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

Partie I

Q9 On a $\left((\sin(x))^{n+1}\right)' = (n+1)\cos(x)\ (\sin(x))^n$, par une intégration par parties on trouve

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x))' \, (\sin(x))^{n+1}\, dx \\ &= \Big[-\cos(x)\ \ (\sin(x))^{n+1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\, (\sin(x))^n\, dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x))\, (\sin(x))^n\, dx \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}$.

Par suite $(2n+1)W_{2n+1} = (2n)W_{2n-1}$ ce qui donne

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} W_1$$

$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2}\, dx = 1$ donc $\boxed{W_{2n+1} = \frac{(2 \times 4 \times \ldots \times 2n)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}$

Q10

- Soit $x \in]-1,1[$,on a $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n$$

avec

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\\ &= (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \ldots (2n-1)}{n!}\\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{(2 \times 4 \times \ldots \times 2n)n!}\\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\end{aligned}$$

ainsi on a $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}}$.

- Par intégration entre 0 et x on obtient $\boxed{\operatorname{Arcsin}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} \ ,\forall x \in]-1,1[}$

Q11 Soit $x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(x) \in [0,\ 1[$ la question précédente donne

$$x = \operatorname{Arcsin}(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}.$$

Q12 Utilisons le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle quelconque qui permet l'interversions des symboles $\sum$et $\int$.

Posons pour tout $x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue intégrable et positive sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.
- Le série $\sum f_n$ converge simplement sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ vers une fonction continue.
- $\displaystyle\int_{[0,\ \frac{\pi}{2}[} |f_n(x)|\, dx = W_{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$,or $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ donc $\displaystyle\int_{[0,\ \frac{\pi}{2}[} |f_n(x)|\, dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$ par

suite la série $\displaystyle\sum \int_{[0,\ \frac{\pi}{2}[} |f_n(x)|\, dx$ converge .

Ainsi par le théorème d'intégration des séries de fonctions on a

$$\int_{[0,\ \frac{\pi}{2}[} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx. = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{[0,\ \frac{\pi}{2}[} f_n(x) dx.\right)$$

d'où l'on a $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2(2n+1)}(\sin(x))^{2n+1}\right]dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2(2n+1)}(\sin(x))^{2n+1}dx.}$

Q13 Les questions **Q11.**et **Q12.**donnent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2(2n+1)}W_{2n+1}.$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ et d'après **Q8.** ona $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Partie II

Q14

- Pour tout $x\in\,]-1,1[$ on a $\dfrac{1}{x^2-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}-x^{2n}$.
- Soit $f:x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ pour tout $x\in\,]0,1[$.

La relation précédente donne pour tout $x\in\,]0,1[$ $\;f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}-\ln(x)x^{2n}$. Posons $f_n(x)=-\ln(x)x^{2n}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue et positive sur $]0,1]$. On a $\sqrt{x}\,f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\to}0$, par la règle de Riemann

f_n est intégrable sur $]0,1]$ et sur $]0,1[$.

- Soit $x\in\,]0,1]$, on a

$$\int_x^1\ln(t)t^{2n}dt=\left[\ln(t)\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_x^1-\int_x^1\frac{t^{2n}}{2n+1}dt=-\ln(x)\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

par suite

$$\int_{]0,1[}|f_n(t)|\,dt=\int_{]0,1]}|f_n(t)|\,dt=\lim_{x\to0+}\int_x^1-\ln(t)t^{2n}dt=\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Donc la série $\sum\int_{]0,1[}|f_n(t)|\,dt$ converge .
Le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle quelconque donne

$$\int_0^1f(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{]0,1[}f_n(t)dt$$

doù $\boxed{\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(x)}{x^2-1}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}}$.

Q15 On pose pour $x\in[0,+\infty[$, $\quad f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,dt$.

Soit pour $(x,t) \in ([0,+\infty[)^2$, $\quad g(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}$.

- Pour tout $(x,t) \in ([0,+\infty[)^2$ on a

$$\left|\frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\right| \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+t^2}$$

la fonction

$$\varphi : t \mapsto \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+t^2}$$

est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.
Donc f est bien définie sur $[0,+\infty[$.

- On a g est continue sur $([0,+\infty[)^2$ et $|g(x,t)| \leq \varphi(t)$ pout tout $(x,t) \in ([0,+\infty[)^2$, avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.

Donc f est continue sur $[0,+\infty[$.

Q16 On a g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $([0,+\infty[)^2$ et

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x,t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

Si $(x,t) \in]0,1] \times [0,+\infty[$ alors

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}g(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \frac{2}{\pi}\varphi(t)$$

et $\dfrac{2}{\pi}\varphi$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Ce qui prouve que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur$]0,1]$ et $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}dt$.

Q17 On vérifie facilement que

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} = \frac{(1-x^2)\,t}{(t^2x^2+1)(t^2+1)}$$

De la question précédente on a pour tout $x \in]0,1[$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right)dt$$

Les deux fonctions sous le signe intégral ne sont pas intégrables sur $[0,+\infty[$, prenons un $A > 0$ alors

$$\int_0^A \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+A^2}{1+A^2x^2}\right)$$

ce qui donne par passage à la limite

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right)dt=-\ln(x)$$

On en déduit que pour tout $x\in]0,1[$, $\boxed{f'(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2-1}}$.

Q18

- On a

$$f(1)=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{1+t^2}dt=\left[\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}^2(t)\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{8}$$

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur$]0,1]$ et pour tout $x\in]0,1[$, $f'(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ donc $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$,

la continuité en 1 donne

$$f(1)=\int_0^1\frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$$

- La question **Q14** donne

$$f(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

d'après la question **Q8** on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Fin

CONCOURS COMMUN CINP
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2
SESSION 2024 - FILIÈRE MP

Durée: 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE I

Q1 Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Q2 Application: On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que:

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n - 3w_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ et n.

A quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément? Expliciter alors ces suites.

EXERCICE 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$. Une permutation de $\mathcal{S}_n$ sera représentée en Python par une liste, dont l'élément d'indice `i` est l'image de `i` par cette permutation.

Par exemple, la liste [3,1,0,2] représente la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_4$ définie par

σ(0)=3,σ(1)=1,σ(2)=0 et σ(3)=2.

Dans tout l'exercice, on pourra utiliser librement les tests Python du type `x in L` (respectivement `x not in L`) permettant de vérifier si `x` est présent dans la liste `L` (respectivement de vérifier si `x` n'est pas présent dans la liste `L`) .

Q3 Si `s` est une liste Python représentant une permutation de $\mathcal{S}_4$, quelle instruction Python permet de trouver l'image de 1 par cette permutation?

Quelle liste Python représente la transposition (2 3)$\in \mathcal{S}_4$?

Q4 Écrire une fonction Python `comp(s1, s2)` prenant en entrée deux listes représentant des permutations σ_1 et σ_2 du même groupe de permutations et renvoyant la liste représentant la permutation $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Q5 Écrire une fonction Python `inv(s)` prenant en entrée une liste représentant une permutation σ et renvoyant la liste représentant σ^{-1}.

Q6 On souhaite tester si un sous-ensemble G de $\mathcal{S}_n$ est ou non un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$. Écrire une fonction Python `groupe(G)` prenant en entrée une liste de listes, où chaque sous-liste représente une permutation de $\mathcal{S}_n$ et renvoyant `True` s'il s'agit bien d'un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, `False` sinon.

Q7 Écrire une fonction Python `eyelique(s)` prenant en entrée une liste `s` représentant une permutation σ de $\mathcal{S}_n$ et renvoyant le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ engendré par σ sous la forme d'une liste de listes.

PROBLÈME

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul n, une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *défine positive si et seulement si :*

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}, \quad X^\top MX > 0$$

Q8 Démontrer, en utilisant directement la définiton précédente, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est défine positive .

Caractérisation spectrale

Q9 Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.

Q10 <u>Application:</u> Démontrer que le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$ admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).

Démontrer alors que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

Q11 Démontrer qu'une matrice définie positive M de taille quelconque vérifie toujours $\mathrm{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Q12 Démontrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.

Q13 Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai pour les matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

Q14 <u>Application:</u> Utiliser le résultat précédent afin de démontrer que $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$ admet un extremum local. Préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.

Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le critère de Sylvester, valable en toute dimension.

Pour une matrice carrée quelconque $M = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier $k \in [\![1, n]\!]$, on définit le k-ième mineur principal comme étant le déterminant de la matrice $M_k = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1,k]\!]} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$. On précise qu'une matrice carrée de taille n possède n mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de la question **Q10**. sont les déterminants des matrices $B_1 = (1)$, $B_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B_3 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

Par exemple, pour la matrice B de la question **Q10**. on constate que :

$$\boxed{\det(B_1) = 1 > 0, \det(B_2) = 2 > 0 \text{ et } \det(B_3) = 3 > 0}$$

La matrice B vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

Q15 On fixe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in [\![1, n]\!]$, ainsi qu'un vecteur colonne $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$. Déterminer un vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$, tel que :

$$\boxed{X_k^\top M_k X_k = X^\top M X}$$

Q16 Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.

Dans les deux questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à -dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille n de la matrice.

Q17 Soit $n \geq 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$. On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$\boxed{M = \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & U \\ \hline U^\top & \alpha \end{array}\right) \text{ avec } M_{n-1} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}}$$

On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.

Justifier l'existence d'un vecteur colonne $V \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V + U = 0$.

En notant $Q = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & V \\ \hline 0_{1,n-1} & 1 \end{array}\right)$, démontrer alors que $Q^\top M Q$ s'écrit par blocs $\left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & \beta \end{array}\right)$ avec $\beta > 0$.

Q18 Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Q19 Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive?

Q20 La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ? Justifier.

Q21 Démontrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0$$

Q22 Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice $S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle définie positive?

Fin

Concours Commun CINP

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 2

Session 2024 - Filière MP

EXERCICE 1

Q1.

- Polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \\
&\overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ X+2 & X-4 & 6 \\ 0 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ 0 & X-2 & 4 \\ 0 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \\
&= (X+2)\begin{vmatrix} X-2 & 4 \\ -1 & X+3 \end{vmatrix} \\
&= (X+2)(X^2+X-2)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X+2)^2(X-1)}$ et $\mathrm{Sp}(A)\,\{1,-2\}$.

- Sous espaces propres de A :

▶ $E_{-2}(A)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+2y-2z=-2x \\ -6x+4y-6z=-2y \\ -x+y-3z=-2z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y-2z=0 \\ -6x+6y-6z=0 \\ -x+y-z=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x-y+z=0$$

ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{E_{-2}(A) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$.

▶ $E_1(A)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+2y-2z=x \\ -6x+4y-6z=y \\ -x+y-3z=z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x+2y-2z=0 \\ -6x+3y-6z=0 \\ -x+y-4z=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y-4z \\ y=6z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=6z \end{cases}$$

donc $\boxed{E_1(A) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$

- Diagonalisation de A :

A est diagonalisable car chaque sous espace propre est de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre

associée , donc $A = PDP^{-1}$avec

▶ $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

► Posons $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{cases} v_1 = 2e_1 + 6e_2 + e_3 \\ v_2 = e_1 + e_2 \\ v_3 = -e_1 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_2 = v_2 - e_1 \\ e_3 = v_3 + e_1 \\ v_1 = 2e_1 + 6(v_2 - e_1) + (v_3 + e_1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{3}(-v_1 + 6v_2 + v_3) \\ e_2 = \frac{1}{3}(v_1 - 3v_2 - v_3) \\ e_3 = \frac{1}{3}(-v_1 + 6v_2 + 4v_3) \end{cases}$$

donc $\boxed{P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}}$

Q2 Application:

► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = AX_n$, comme $Y_n = P^{-1}X_n$ alors $PY_{n+1} = APY_n$ et $Y_{n+1} = P^{-1}APY_n$ or $A = PDP^{-1}$ donc $Y_{n+1} = DY_n$ et

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n \\ \beta_{n+1} = -2\beta_n \\ \gamma_{n+1} = -2\gamma_n \end{cases}$$

ce qui donne $\begin{cases} \alpha_n = \alpha_0 \\ \beta_n = (-2)^n \beta_0 \\ \gamma_{n+1} = (-2)^n \gamma_0 \end{cases}$ et $\boxed{Y_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ (-2)^n \beta_0 \\ (-2)^n \gamma_0 \end{pmatrix}}$

► Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, l'application de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui a une matrice M associée $P^{-1}M$ est linéaire en dimension finie donc elle est continue, ce qui assure la convergence de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(P^{-1}X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a clairement $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\beta_0 = \gamma_0 = 0$.

Si $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = P\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

Q3 En Python, cela se fait avec `s[1]`.

La transposition (2 3) est une permutation qui échange les éléments 2 et 3 et laisse 0 et 1 , donc la liste Python représentant la transposition (2 3) dans $\mathcal{S}_4$ serait `[0, 1, 3, 2]`.

Q4 Fonction `comp` pour la composition de permutations :

```python
def comp(s1, s2):
    n = len(s1)
    result = [0] * n
    for i in range(n):
        result[i] = s1[s2[i]]
    return result
```

Q5 Fonction `inv(s)` pour l'inverse d'une permutation :

```python
def inv(s):
    n = len(s)
    result = [0] * n
    for i in range(n):
        result[s[i]] = i
    return result
```

Q6 Pour vérifier si un sous-ensemble G de $\mathcal{S}_n$ est un sous-groupe, nous devons vérifier trois conditions : l'élément neutre (l'identité) est-il présent, est-il stable par la composition et l'inversion. Voici une fonction Python groupe pour cela :

```python
def groupe(G):
    n = len(G[0])
    # Verifier l'identite
    identity = list(range(n))
    if identity not in G:
        return False

    # Verifier la stabilite par composition
    for s1 in G:
        for s2 in G:
            if comp(s1, s2) not in G:
                return False

    # Verifier la stabilite par l'inversion
    for s in G:
        if inv(s) not in G:
```

```
            return False

    return True
```

Q7 Pour trouver le sous-groupe engendré par une permutation, nous devons composer successivement la permutation jusqu'à ce que nous revenions à la permutation initiale. Voici une fonction Python `eyelique` pour cela :

```
def eyelique(s):
    subgroup = [s]
    current = s
    while True:
        current = comp(s, current)
        if current == s:
            break
        subgroup.append(current)
     return subgroup
```

NB: les fonctions Python sont données seulement à titre indicatif .

PROBLÈME

Q8 Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$ on a

$$\begin{aligned} X^\top M X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + y^2 \\ &= x^2 + (x+y)^2 \end{aligned}$$

donc $X^\top M X \geq 0$ et si $X^\top M X = 0$ alors $x = y = 0$ ce qui est absurde, donc $X^\top M X > 0$ et A est définie positive .

Caractérisation spectrale

Q9 $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel : $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$ et de la norme euclidienne $\|X\| = \sqrt{X^\top X}$.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, montrons que M est définie positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{*+}$.

M est symétrique et réelle, d'après le théorème spectral elle est diagonalisable dans une base orthonormée .
Posons $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et $(V_1, \ldots, V_n)$ une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M , avec $MV_i = \lambda_i V_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

- Si M est définie positive :

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a $V_i \neq 0$ donc $V_i^\top M V_i > 0$ de plus $V_i^\top M V_i = \lambda_i V_i^\top V_i = \lambda_i \|V_i\|^2$, donc $\lambda_i > 0$ ainsi $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{*+}$.

- Si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{*+}$:

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$,il existe des réelles $x_1, ..., x_n$ non tous nuls tels que $X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$, on a donc

$$MX = \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j V_j$$

et

$$\begin{aligned} X^\top M X &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i V_i^\top\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j V_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \lambda_j V_i^\top V_j \end{aligned}$$

or $V_i^\top V_j = \langle V_i, V_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$ donc

$$X^\top M X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

ce qui donne $X^\top M X > 0$ et M est définie positive .

Q10 Application:

- $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3,$, on a $P'(t) = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t-1)(t-3)$. On obtient le tableau des

variations

t	$-\infty$	0	1		3		$+\infty$
$P'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(t)$	$-\infty$	$\nearrow$ -3 $\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

le théorème des valeurs intermédiaires assure que P s'annule sur les intervalles $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$,et $]3, +\infty[$.
De plus $P(0) = -3$ donc P s'annule sur l'intervalle $]0, 1[$, ainsi P admet trois racines positives .
Les racines de P sont approximativement : 0.46791 *;* 1.6527 *et* 3.8794 .

- Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ c'est une matrice symétrique réelle , calculons son polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
\chi_B(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & X-2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)(X^2-5X+5) - X + 2 \\
&= X^3 - 6X^2 + 9X - 3
\end{aligned}$$

B est une matrice symétrique réelle et $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^{*+}$donc elle est définie positive .

Un critère en dimension 2

Q11 Si M de taille n est symétrique définie positive donc $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{*+}$ et on a $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{\lambda \in Sp(M)} \lambda > 0$ et $\det(M) = \prod_{\lambda \in Sp(M)} \lambda > 0$.

Q12 Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$une matrice symétrique vérifiant $\mathrm{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$, on a $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda\ , \mu\} \subset \mathbb{R}$, donc $\lambda + \mu > 0$ et $\lambda\mu > 0$, par suite λ et μ sont non nulles et de même signe de plus λ , μ et $\lambda + \mu$ sont de même signe d'où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, ce qui prouve que M est définie positive.

Q13 Soit $M = diag(3, 1, -1)$, $\det(M) = 3$ et $\mathrm{Tr}(M) = 3$ mais elle n'est pas définie positive.

Q14 Application:

Soit $f : \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$

Les points critiques de f sont solutions du système (S) suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

on a alors

$$\begin{aligned}
(S) &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2y} = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x\ y^2} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{xy} \\
&\Leftrightarrow x = y \text{ et } x^3 = 1
\end{aligned}$$

f admet un seul point critiques dans $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ qui est $(1,1)$.

La nature de ce point est déterminée par la matrice Hessienne de f en (1,1) .

On a

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^3 y} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{y^3 x} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{y^2 x^2}$$

donc

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $\det H_f(1,1) = 3 > 0$ et $\mathrm{Tr} H_f(1,1) = 4 > 0$ alors $H_f(1,1)$ est définie positive donc $(1,1)$ est un minimum local.

Le critère de Sylvester

Q15 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $k \in [\![1,n]\!]$ et $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

- Si $X_k \neq 0$, posons alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$ qu'on va noter par blocs $X = \left[\begin{array}{c} X_k \\ \hline 0_{n-k,1} \end{array}\right]$, et posons

$M = \left(\begin{array}{c|c} M_k & B \\ \hline C & A \end{array}\right)$ avec $A \in \mathscr{M}_{n-k}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{k,n-k}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$, on a alors

$$MX = \left(\begin{array}{c|c} M_k & B \\ \hline C & A \end{array}\right) \left[\begin{array}{c} X_k \\ \hline 0_{n-k,1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} M_k X_k \\ \hline C X_k \end{array}\right]$$

et

$$X^\top M X = \left[\begin{array}{c|c} X_k^\top & 0_{1,n-k} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} M_k X_k \\ \hline C X_k \end{array}\right] = X_k^\top M_k X_k$$

- Si $X_k = 0$, on prend $X = \left[\begin{array}{c} Y \\ \hline 0_{n-k,1} \end{array}\right]$ avec $Y \in \operatorname{Ker}(M_k) \setminus \{0\}$.

Ce qui donne $X^\top M X = Y^\top M_k Y = X_k^\top M_k X_k = 0$.

Ainsi il existe un vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que $X_k^\top M_k X_k = X^\top M X$

Q16 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive et $k \in [\![1, n]\!]$.

On a $M_k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle , soit $X_k \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. D'après la question **Q15.** il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que $X_k^\top M_k X_k = X^\top M X$ or M est définie positive donc $X^\top M X > 0$ d'où $X_k^\top M_k X_k > 0$ et M_k symétrique réelle définie positive, ainsi M vérifie le critère de Sylvester.

Q17 Soit $n \geq 2$, $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $\det(M) > 0$. On pose

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & U \\ \hline U^\top & \alpha \end{array}\right) \text{ avec } M_{n-1} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$$

avec M_{n-1} définie positive.

- On a $\det(M_{n-1}) > 0$ donc M_{n-1} elle est inversible, soit $V = -(M_{n-1})^{-1} U \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, il vérifie alors $M_{n-1} V + U = 0_{n-1,1}$.

- Soit $Q = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & V \\ \hline 0_{1,n-1} & 1 \end{array}\right)$, on a

$$\begin{aligned} MQ &= \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & U \\ \hline U^\top & \alpha \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & V \\ \hline 0_{1,n-1} & 1 \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & M_{n-1} V + U \\ \hline U^\top & U^\top V + \alpha \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline U^\top & U^\top V + \alpha \end{array}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q^\top M Q &= \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline V^\top & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline U^\top & U^\top V + \alpha \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline V^\top M_{n-1} + U^\top & U^\top V + \alpha \end{array}\right) \end{aligned}$$

remarquons que $V^\top M_{n-1} + U^\top = (M_{n-1} V + U)^\top = 0$ et $U^\top V + \alpha \in \mathbb{R}$ qu'on note β , ce qui donne

$$Q^\top M Q = \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & \beta \end{array}\right)$$

On sait que $\det M > 0$ et $\det(M_{n-1}) > 0$, du fait que $\det Q = 1$ on a $\det(Q^\top MQ) = \det M = \beta \det(M_{n-1})$ d'où $\beta > 0$.

Ce qui montre que $\boxed{Q^\top MQ \text{ s'écrit par blocs } \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & \beta \end{array}\right) \text{ avec } \beta > 0}$.

Q18 Posons $\mathcal{P}_n$: "Toute matrice symétrique réelle d'ordre n vérifiant le critère de Sylvester est définie positive". $\mathcal{P}_1$est évident , soit $n \geq 2$ supposons $\mathcal{P}_n$ vrai , soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique vérifiant le critère de Sylvester , donc pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ on a $\det M_k > 0$, en particulier pour $k \in [\![1, n]\!]$ donc M_n qui est symétrique réelle d'ordre n vérifie le critère de Sylvester , par hypothèse de récurrence elle est définie positive. D'après la question **Q17** il existe une matrice Q et un réel $\beta > 0$ tels que $Q^\top MQ = \left(\begin{array}{c|c} M_n & 0_{n,1} \\ \hline 0_{1,n} & \beta \end{array}\right)$ avec $Q = \left(\begin{array}{c|c} I_n & V \\ \hline 0_{1,n} & 1 \end{array}\right)$, Q est donc inversible .

Soit $X \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ posons $Y = Q^{-1}X$ alors $Y \neq 0$ et

$$X^\top MX = (QY)^\top M\ (QY) = Y^\top \left(Q^\top M\ Q\right) Y$$

posons $Y = \left[\begin{array}{c} Z \\ \hline y \end{array}\right]$ avec $Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}$, donc

$$\begin{aligned} X^\top MX &= \left[\begin{array}{c|c} Z^\top & y \end{array}\right] \left(\begin{array}{c|c} M_n & 0_{n,1} \\ \hline 0_{1,n} & \beta \end{array}\right) \left[\begin{array}{c} Z \\ \hline y \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} Z^\top & y \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} M_n Z \\ \hline \beta y \end{array}\right] \\ &= Z^\top M_n Z + \beta y^2 \end{aligned}$$

comme $(Z, y) \neq (0_{n,1}, 0)$ $\beta > 0$ et M_n est symétrique définie positive alors $X^\top MX > 0$, d'où M définie positive ce qui montre $\mathcal{P}_{n+1}$, d'où le résultat pour tout $n \geq 1$.

Q19 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$,

$C(x)$ est symétrique , elle est définie positive si elle vérifie le critère de Sylvester. Les mineurs principaux de $C(x)$ sont :

$$2\ , \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

et

$$\det C(x) = 2\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2x^2$$

On a $\det C(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.
Ainsi $C(x)$ est symétrique , elle est définie positive si et seulement si $x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

Q20 On remarque que le mineur principal d'ordre 3 , $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7$, donc la matrice n'est pas définie positive.

Q21 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, posons $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz$ on a

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x(4x + 2y - 3z) + y^2 + z^2 \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (x, y, z)\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mais la matrice A n'est pas symétrique ! , la relation reste valable si on passe au transposée, donc
$f(x, y, z) = (x, y, z)\ A^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par suite
$f(x, y, z) = (x, y, z)\ \left(\frac{1}{2}(A + A^\top)\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $\frac{1}{2}(A + A^\top) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est symétrique.
Les mineurs principaux de cette matrice symétrique sont : 4 , $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ et $\det(\frac{1}{2}(A + A^\top)) = \frac{3}{4}$, donc elle est définie positive , ainsi $f(x, y, z) > 0$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.

Q22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta_n = \det(S_n)$, le développement suivant la première ligne donne :

$$\Delta_n = \sqrt{3}\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3}\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

$\boxed{\Delta_n = \sqrt{3}\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}}$, l'équation caractéristique est $X^2 - \sqrt{3}X + 1 = 0$, dont les solutions sont

$$r = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}} \quad et \quad \overline{r} = \frac{\sqrt{3}-i}{2} = \mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{6}}.$$

Par suite $\Delta_n = \alpha \mathrm{e}^{\frac{in\pi}{6}} + \beta \mathrm{e}^{\frac{-in\pi}{6}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On a $\Delta_1 = \sqrt{3}$ et $\Delta_2 = 2$ donc

$$\begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}} + \beta \mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{6}} = \sqrt{3} \\ \alpha \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}} + \beta \mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{3}} = 2 \end{cases}$$

par suite $\alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{6}} \\ 2 & \mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{3}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}} & \mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{6}} \\ \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}} & \mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{3}} \end{vmatrix}} = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \dfrac{\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}} & \sqrt{3} \\ \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}} & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}} & \mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{6}} \\ \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}} & \mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{3}} \end{vmatrix}} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, donc $\alpha = -i\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}}$ et $\beta = i\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{6}}$

ainsi on a

$$\Delta_n = i(-\mathrm{e}^{\frac{i(n+1)\pi}{6}} + \mathrm{e}^{\frac{-i(n+1)\pi}{6}}) = 2\sin\left(\frac{n+1}{6}\pi\right)$$

par suite $\Delta_1 = \sqrt{3}$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = \sqrt{3}$, $\Delta_4 = 1$ et $\Delta_5 = 0$

Ainsi S_n est symétrique définie positive si et seulement si $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Fin

CONCOURS COMMUN CINP

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2024 -FILIÈRE PSI

PROBLÈME 1

File d'attente

Le sujet est composé de deux problèmes et d'un exercice indépendants.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0 , la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.

On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n = 1$, etc.

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la fonction notée G_X définie par :

$$G_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j)t^j$$

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

1 On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1 .

Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T_1 = k) = (1 - p)^{k-1}p$.

2 On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».

Exprimer A en fonction des événements $[T_1 = k]\,, k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbb{P}(A)$. Interpréter.

3 Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1, puis calculer sa somme.

4 En déduire l'espérance et la variance de T_1.

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n. On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi.

On note $D_n = T_1 + \ldots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.

Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice G_{D_n} de D_n.

6 Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^a$ au voisinage de $x=0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II - Étude du comportement de la file

II. 1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a(x-1)) \end{cases}$

On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$z_1 \in \left]0,1\right[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = f(z_n)$$

7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in \left]0,1\right[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.

8 En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

9 Soit la fonction $\psi : \begin{cases} \left]0,1\right] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - a(x-1) \end{cases}$.

Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant \psi(x) \Leftrightarrow f(x) \leqslant x$ et $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

10 On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.

Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$. En déduire que $z_n \to 1$.

11 On suppose dans cette question que $a > 1$.

Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in \left]0,1\right[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter. En distinguant les cas $z_1 \in \left]0,\alpha\right]$ et $z_1 \in \left]\alpha,1\right[$, montrer que $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$.

II. 2 - Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0 .

On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0 . Les variables S et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supposées indépendantes.

On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.

Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe ètaient servis.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe.

Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $[V_k = 0]$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.

12 Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [V_n = 0]$?

13 Quelle est la loi du nombre N_n de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1, n]\!]$?

14 Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(V_1 = k \mid S = n)$.

En déduire que V_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre

15 On note $z_n = \mathbb{P}(V_n = 0)$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\mathbb{P}(Z) = \lim_{n\to+\infty} z_n$.

16 Justifier que pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = j) = \mathbb{P}(V_n = 0)^j$. On distinguera le cas $j = 0$.

17 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = \exp(\lambda p (z_n - 1))$.

18 Déterminer, suivant les valeurs de λp, la limite de la suite $(z_n)_{n\in N}$. Interpréter.

EXERCICE
Équivalent de Stirling

19 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-1}\, dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Pour tout $x > 0$, on note

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} dt$$

20 Montrer que pour tout $x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$$

21 On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ converge et qu'elle vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$.

22 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note $\rho_k = \ln k - \displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(t)\, dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\ln\Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln(t)dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k}$$

On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.

23 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t))dt = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt}$$

24 En déduire que $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

25 Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $n \to +\infty$:

$$\boxed{\ln\Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + c + o(1)}$$

En déduire que lorsque $n \to +\infty$:

$$\boxed{\Gamma(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^c n^{n-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}}$$

26 Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note.

$$\boxed{\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt}$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\, du}$$

27 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x > 0, \quad \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

28 On définit la fonction $\mathbb{1}_{]0,n[}$ sur $\mathbb{R}$, en posant $\mathbb{1}_{]0,n[}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]0, n[, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

En remarquant que $\Gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,n[}(t)\ t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$, utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout $x > 0$

$$\Gamma_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)$$

En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

29 Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\ n^x} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$.

En déduire que $\mathrm{e}^c = \sqrt{2\pi}$ où c est défini à la question **Q25.**

On pourra faire appel aux résultats des questions **Q19** et **Q20.**

PROBLÈME 2

Blocs de Jordan

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille p à coefficients réels. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $J_\lambda \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ par :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Les matrices J_λ, dites « matrices de Jordan », sont particulièrement importantes dans la mesure où on peut montrer que si le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé, alors elle est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont formés de matrices de Jordan.

On se propose de montrer dans un premier temps une propriété d'irréductibilité des blocs de Jordan. Dans un second temps, on étudie le caractère borné des solutions du système différentiel linéaire associé à une matrice de Jordan.

Une matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k, tel que $M^k = 0$ est appelé indice de nilpotence de M.

On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^P$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^p$ est stable par un endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$ si pour tout $x \in V$, $f(x) \in V$.

On note $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in E$, on définit :

$$N(A) = \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|X\| = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On admet que $\mathscr{N}$ et $\|\cdot\|$ définissent des normes respectivement sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et E.

Partie I - Irréductibilité de J_λ

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $u_\lambda \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p)$ l'endomorphisme canoniquement associé à J_λ.

30 Calculer $u_0^2(e_j)$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ et en déduire J_0^2.

Calculer de même J_0^{p-1} et J_0^p. En déduire que J_0 est nilpotente d'indice p.

31 Montrer que $\mathrm{Sp}(u_\lambda) = \{\lambda\}$ et déterminer le sous-espace propre associé.

32 Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. Montrer que V est stable par u_λ si, et seulement si, V est stable par u_0.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ stable par u_λ, de dimension $k \in [\![1, p]\!]$. On note v l'endomorphisme induit par u_λ sur V et $\left(\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_k\right)$ une base de V, que l'on complète en une base $\widetilde{B} = \left(\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_p\right)$ de $\mathbb{R}^P$.

33 Quelle est la forme de la matrice de u_λ dans la base $\widetilde{B}$?

34 En déduire que le polynôme caractéristique de v divise le polynôme caractéristique de u_λ et que $e_p \in V$

35 Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas de décomposition $\mathbb{R}^P = V \oplus W$ où V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^p$ stables par u_λ non réduits à $\{0\}$.

Partie II - Stabilité du système linéaire associé

On s'intéresse dans cette partie aux solutions du système différentiel :

$$(S) \quad X' = J_\lambda\, X$$

Une solution de (S) est une fonction :

$$X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & E \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = J_\lambda\, X(t)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice carrée de taille p notée $\exp(tJ_\lambda)$ par :

$$\exp(tJ_\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!}\, J_0^k$$

36 Montrer que si X_0 est un vecteur propre pour J_λ associé à la valeur propre λ, alors $\widetilde{X} : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} X_0$ est une solution particulière de (S).

37 On définit la fonction $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \exp(tJ_\lambda) \end{array} \right.$

Montrer que φ est dérivable et que pour tout $t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = J_\lambda \exp(tJ_A) = \exp(tJ_\lambda)\, J_\lambda$.

38 Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}, \exp(tJ_\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\, J_0^k$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tJ_\lambda)$ est inversible, d'inverse $\exp(-tJ_\lambda)$.

39 Montrer que $X : t \mapsto X(t)$ est solution de (S) si, et seulement si, $Y : t \mapsto \exp(-tJ_\lambda)\, X(t)$ est constante.

En déduire que les solutions de (S) sont exactement les fonctions $X : t \mapsto \exp(tJ_\lambda)\, X_0$ où $X_0 \in E$.

40 Montrer que si $\lambda > 0$, $(S\ )$ admet une solution non bornée sur $\mathbb{R}^+$.

41 Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $X \in E$, on a $\|AX\| \leqslant \mathcal{N}(A)\|X\|$.

En déduire que si $\lambda < 0$, toutes les solutions de $(S\ )$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

42 Que dire concernant l'existence de solutions de (S) non bornées sur $\mathbb{R}^+$, si $\lambda = 0$?

FIN

Concours Commun CINP

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Session 2024 - Filière PSI

PROBLÈME 1

File d'attente

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

Q1 On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1 .

On a $T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$[T_1 = k] = \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = 0]\right)}_{\text{«aucun client n'arrive entre les instants 0 et k-1»}} \cap \underbrace{[X_k = 1]}_{\text{«le premier client arrive à l'instant k»}}$$

les variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 = k) &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_i = 0)\right) \mathbb{P}(X_k = 0) \\ &= (1-p)^{k-1}p\end{aligned}$$

Ainsi T_1suit une loi géométrique de paramètre p et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathbb{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}p}$.

Q2 A est l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file » , A se réalise si tous les événements $([T_1 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne se réalisent pas , donc

$$A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{[T_1 = k]} = \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} [T_1 = k]}$$

les événements $([T_1 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux disjoints, on déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}[T_1=k]\right)\\ &= 1-\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}([T_1=k]\ )\\ &= 1-\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p\end{aligned}$$

la somme de la série géométrique $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}$vaut $\frac{1}{p}$ ce qui donne $\mathbb{P}(A)=0$. Donc presque sûrement on aura un client au moins qui arrive dans la file à un certain instant $k\in\mathbb{N}^*$.

Q3 La fonction génératrice de T_1 est donnée par la série entière $\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(T_1=k)\ t^k$, on a $\mathbb{P}(T_1=k)=(1-p)^{k-1}p$ donc $\frac{\mathbb{P}(T_1=k+1)}{\mathbb{P}(T_1=k)}=1-p$ la règle de D'Alembert donne $\boxed{R=\frac{1}{1-p}}$.

Soit $t\in\,]-R,R[$ on a

$$\begin{aligned}G_{T_1}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p\ t^k\\ &= pt\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)t)^{k-1}\\ &= \frac{pt}{1-(1-p)t}\end{aligned}$$

d'où pout tout $t\in\,]-R,R[$, $\boxed{G_{T_1}(t)=\frac{pt}{1-(1-p)t}}$

Q4

- On a $R>1$,donc G_{T_1}est définie et dérivable en 1 , comme $G'_{T_1}(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(T_1=k)\ t^{k-1}$ pout tout $t\in\,]-R,R[$,

alors

$$G'_{T_1}(1)=\sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(T_1=k)=\mathbb{E}(T_1)$$

et on a $G'_{T_1}(t)=\frac{p}{(1-(1-p)t)^2}$ ce qui donne $\boxed{\mathbb{E}(T_1)=\frac{1}{p}}$.

- La formule de Koenig-Huygens donne $\mathbb{V}(T_1)=\mathbb{E}(T_1^2)-\mathbb{E}(T_1)^2$, avec $\mathbb{E}(T_1^2)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\mathbb{P}(T_1=k)$.

On a pout tout $t \in]-R,R[$, $G''_{T_1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(T_1 = k)\ t^{k-1}$, donc

$$G''_{T_1}(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(T_1 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\mathbb{P}(T_1 = k)\ - \mathbb{E}(T_1)$$

donc $\mathbb{E}(T_1^2) = G''_{T_1}(1) + \mathbb{E}(T_1)$.

Puisque $G''_{T_1}(t) = \dfrac{2p(1-p)}{(1-(1-p)t)^3}$ alors $G''_{T_1}(1) = \dfrac{2(1-p)}{p^2}$ et $\mathbb{E}(T_1^2) = \dfrac{2(1-p)}{p^2} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2-p}{p^2}$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{V}(T_1) = \dfrac{1-p}{p^2}}$.

Q5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n.

- Loi de T_n :

On a $T_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$[T_n = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = 0]\right) \cap [X_k = 1]$$

ce qui donne $\boxed{\mathbb{P}\left(T_n = k\right) = (1-p)^{k-1}p}$ et T_n suit une loi géométrique de paramètre p .

- Les variables aléatoires T_k sont indépendantes et de même loi que T_1 , donc

$\boxed{\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_1) + \dots + \mathbb{E}(T_n) = \dfrac{n}{p} \text{ et } \mathbb{V}(D_n) = \mathbb{V}(T_1) + \dots + \mathbb{V}(T_n) = \dfrac{n(1-p)}{p^2}}$

- La fonction génératrice G_{D_n} est donnée par :

$$G_{D_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{T_k}(t) \text{ , pour tout } t \in]-R,R[$$

donc $\boxed{G_{D_n}(t) = \left(\dfrac{pt}{1-(1-p)t}\right)^n}$

Q6 Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1,1[$ on a $(1+x)^a = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ avec $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ et $\binom{\alpha}{0} = 1$.

On a donc pour t tel que $(1-p)t \in]-1,1[$

$$\begin{aligned} G_{D_n}(t) &= (pt)^n\,(1-(1-p)t)^{-n} \\ &= (pt)^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-n}{k} (-(1-p)t)^k\right) \end{aligned}$$

calculons $\binom{-n}{k}$:

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{-n(-n-1)...(-n-k+1)}{k!}\\ &= (-1)^k\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{k!}\\ &= (-1)^k\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}\\ &= (-1)^k\binom{n+k-1}{n-1}\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}G_{D_n}(t) &= p^n\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k\binom{n+k-1}{n-1}\ t^{k+n}\\ &= \sum_{k=n}^{+\infty}p^n(1-p)^{k-n}\binom{k-1}{n-1}\ t^k\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{G_{D_n}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty}p^n(1-p)^{k-n}\binom{k-1}{n-1}\ t^k}$.

Comme $G_{D_n}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T_1 = k)\ t^k$ alors par unicité du développement en séries entières on obtient pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\boxed{\mathbb{P}\left(D_n = k\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \binom{k-1}{k-n}p^n(1-p)^{k-n} & \text{sinon}\end{cases}}$$

Partie II - Étude du comportement de la file

II. 1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a(x-1)) \end{cases}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $z_1 \in \left]0,1\right[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = f\left(z_n\right)$

Q7

- Par récurrence sur n : on a $z_1 \in \left]0,1\right[$ supposons $z_n \in \left]0,1\right[$ donc $z_n - 1 < 0$ et $0 < f\left(z_n\right) < 1$ par suite $z_{n+1} \in \left]0,1\right[$.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*, z_n \in \left]0,1\right[$.

- Soit $n \geq 2$, on a

$$
\begin{aligned}
z_{n+1}-z_n &= f\left(z_n\right)-f\left(z_{n-1}\right) \\
&= \exp(a(z_n-1))-\exp(a(z_{n-1}-1)) \\
&= \exp(a(z_{n-1}-1))\left(\exp(a(z_n-z_{n-1}))-1\right)
\end{aligned}
$$

comme $\exp(x)-1$ est du même signe que x alors $z_{n+1}-z_n$ est du même signe que z_n-z_{n-1}.

Ainsi par récurrence sur n on a $z_{n+1}-z_n$ est du même signe que z_2-z_1.

Q8 On déduit de la question Q7. que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et bornée , donc converge vers une limite $\ell \in [0,1]$.

La fonction f est continue, par passage à la limite dans la relation $z_{n+1}=f\left(z_n\right)$ on obtient : $f(\ell)=\ell$.

Q9 Soit la fonction $\psi : \begin{cases}]0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x)-a(x-1) \end{cases}$.

On pour tout $x>0$, on a $\exp(\psi(x))=\dfrac{x}{f(x)}$ ce qui donne $0 \leqslant \psi(x) \Leftrightarrow f(x) \leqslant x$ et $\psi(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=x$.

Q10 On suppose que $0<a\leqslant 1$.

On a $\psi'(x)=\dfrac{1}{x}-a$, donc ψ est strictement croissante sur $]0,1[$, de plus $\psi(1)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\psi(x)=-\infty$

Donc ψ est négative sur $]0,1]$ et elle ne s'annule qu'en $x=1$. On en déduire que 1 est l'unique solution, dans $[0,1]$, de $f(x)=x$, ainsi $z_n \rightarrow 1$.

Q11 On suppose que $a>1$.

- On a ψ' s'annule en $x=\dfrac{1}{a}$ et ψ est croissante sur $\left]0,\dfrac{1}{a}\right[$,decroissante sur $\left]\dfrac{1}{a},1\right]$, ce qui donne

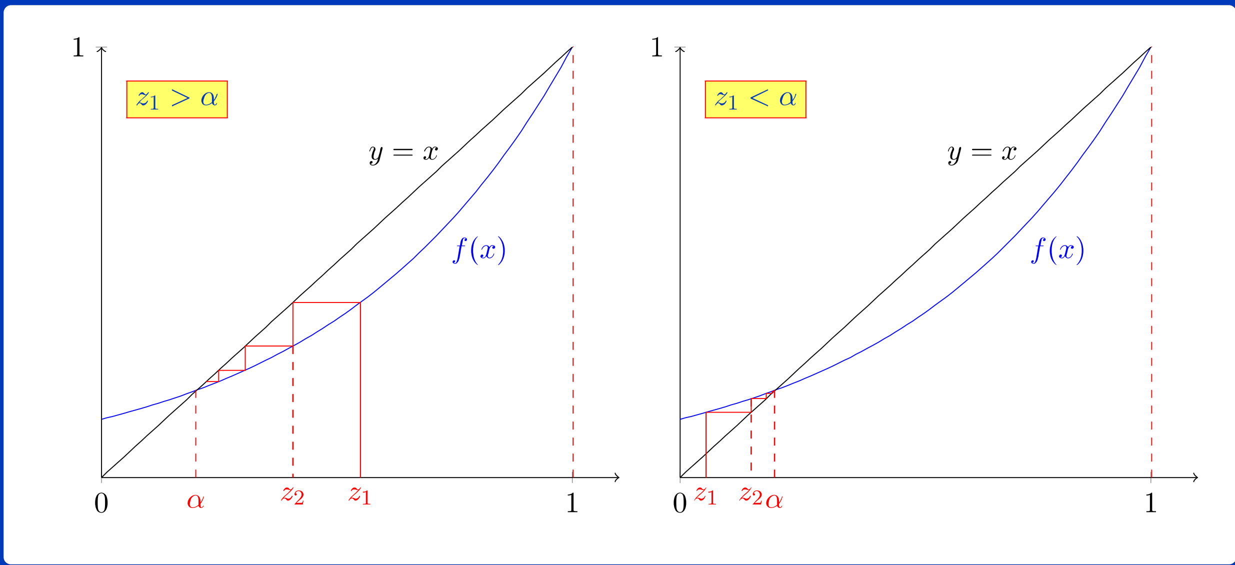
$\psi\left(\dfrac{1}{a}\right)>\psi\left(1\right)=0$. Or $\lim\limits_{x\to 0^+}\psi(x)=-\infty$ donc ψ s'annule en un unique $\alpha \in \left]0,\dfrac{1}{a}\right[$.

Ce qui donne que l'équation $f(x)=x$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0,1[$

t	$-\infty$	α	$\frac{1}{a}$		1
$\psi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\psi(t)$	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$\psi(\frac{1}{a})$	$\searrow$	0

- Si $z_1 \in]0,\alpha]$: ψ est négative sur $]0,\alpha[$ par suite $f(x)>x$ pour tout $x\in]0,\alpha[$, donc $z_2>z_1$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante , de plus f est croissante donc $f(]0,\alpha[)=]\mathrm{e}^{-a},\alpha[\subset]0,\alpha[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*, z_n \in]0,\alpha[$, on en déduit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l'unique point fixe qui est dans $[0,\alpha]$ ainsi $z_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \alpha$.
- Si $z_1 \in]\alpha,1[$, ψ est positive sur $]\alpha,1[$ par suite $f(x)<x$ pour tout $x\in]\alpha,1[$ donc $z_2<z_1$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante , et $f(]\alpha,1[)=]\alpha,1[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*, z_n\in]\alpha,1[$,ainsi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un des points fixes qui sont dans $[\alpha,1]$, puisque $z_n<z_1<1$ donc $z_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \alpha$.

Conclusion : pour tout $z_1 \in]0,1[$ on a $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$.



II. 1 - Groupes de clients

Q12 L'événement $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [V_n = 0]$ se réalise dès que l'un, au moins, des événements $[V_n = 0]$ est réalisé. Ceci signifie qu'au moins un des groupes est vide, c'est-à-dire qu'aucun client n'arrive pendant le service d'un des groupes, par suite tous le événements $[V_k = 0]$ et $k \geq n$ se réalise , et le service est terminé (*par exemple fin de journée de travail ou une longue pause*) .

Q13 Pour chaque instant $k \in [\![1, n]\!]$ il y'a X_k *(0 ou 1)* clients qui arrivent , donc $N_n = X_1 + ... + X_n$.
Par indépendance des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $G_{N_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$ or pour tout k on a $X_k \sim \mathscr{B}(p)$ donc $G_{X_k}(t) = (1-p)+pt$ par suite $\boxed{G_{N_n}(t) = ((1-p)+pt)^n}$ ce qui donne pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$, N_n suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(n, p)$. *(Si $k > n$, $\mathbb{P}(N_n = k) = 0$).*

Q14

- Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Quand $S = n$, il y a n instants pendants lesquels des clients peuvent venir avant que le second client ne soit servi , V_1 est alors le nombre de clients arrivés pendant n instants, avec pour chaque instant une probabilité p d'y arriver et ceci indépendamment, on peut écrire dans ce cas : $V_1 = X_1 + ... + X_n$, *(égalité conditionnée par $S = n$)* , par le même raisonnement que la question Q13. elle suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(n, p)$, donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $\boxed{\mathbb{P}(V_1 = k \mid S = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ et } \mathbb{P}(V_1 = k \mid S = n) = 0 \text{ si } k > n}$.

Remarquons que si $S = 0$ alors la durée de service est nulle, le groupe est vide et $\mathbb{P}(V_1 = 0 \mid S = 0) = 1$.

- Comme $([S=n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, par la formule de probabilité totale on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_1=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(V_1=k|S=n)\,\mathbb{P}(S=n)\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(V_1=k|S=n)\,\mathbb{P}(S=n)+\underbrace{\sum_{n=0}^{k-1}\mathbb{P}(V_1=k|S=n)\,\mathbb{P}(S=n)}_{=0}\end{aligned}$$

S suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$, par suite

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_1=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{p}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda}}{n!}\\ &= p^k(1-p)^{-k}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{k!\,(n-k!)\,n!}(1-p)^n\lambda^n\\ &= \frac{p^k(1-p)^{-k}\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k!)}((1-p)\lambda)^n\\ &\overset{m=n-k}{=} \frac{p^k(1-p)^{-k}\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}((1-p)\lambda)^{m+k}\\ &= \frac{p^k(1-p)^{-k}((1-p)\lambda)^k\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}\mathrm{e}^{(1-p)\lambda}\quad\left(\text{ car }\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^m}{m!}=\mathrm{e}^x\right)\\ &= \frac{(\lambda p)^k\,\mathrm{e}^{-\lambda p}}{k!}\end{aligned}$$

Donc pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, $\boxed{\mathbb{P}(V_1=k)=\dfrac{(\lambda p)^k\,\mathrm{e}^{-\lambda p}}{k!}}$ ainsi V_1 suit une loi de Poisson de paramètre λp .

Q15 On note $z_n=\mathbb{P}(V_n=0)$.

- Par construction, pour $n\in\mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $[V_k=0]$ est réalisé pour tout $k\geqslant n$, donc si $[V_k=0]$ est réalisé alors $[V_{k+1}=0]$ est réalisé , ce qui signifie que $[V_k=0]\subset[V_{k+1}=0]$ par conséquent la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et elle est majorée par 1 donc elle converge .
- On a $Z=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}[V_n=0]$ et la suite des événements $([V_n=0])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante , le théorème de la limite monotone donne

$$\mathbb{P}(Z)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(V_n=0)=\lim_{n\to+\infty}z_n$$

Q16 Notons G_k le k-ième groupe de clients .

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $j\in\mathbb{N}^*$,supposons $V_1=j$, c'est le nombre de clients du premier groupe , posons $G_1=\{c_1,...,c_j\}$.

Soit $i\in[\![1,j]\!]$, pendant que le client c_i est servi un groupe de clients arrivent et vont engendrer un autre groupe de clients et ainsi de suite jusqu'à l'instant $n+1$, posons $G_{n+1,i}$ ce groupe de clients, (*c'est le groupe constitués à partir du clients c_i jusqu'à l'instant $n+1$*),posons $U_i=\mathrm{Card}\,(G_{n+1,i})$.

Ainsi on a :

- $G_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{j} G_{n+1,i}$,réunion disjointe .
- $V_{n+1} = \text{Card}\,(G_{n+1}) = U_1 + ... + U_j$.
- $[V_{n+1} = 0] = \bigcap_{i=1}^{j} [U_i = 0]$ et les U_i sont indépendantes .
- $\mathbb{P}\,(U_i = 0) = \mathbb{P}\,(V_n = 0)$ *(car $G_{n+1,i}$ est construit par le même processus que G_n ,c'est sans considérer le groupe engendré par le client 0,il y a donc n groupes et le dernier est vide)*

Donc $\mathbb{P}\,(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = j) = \prod_{i=1}^{j} \mathbb{P}\,(U_i = 0) = \mathbb{P}\,(V_n = 0)^j$.

On a aussi $\mathbb{P}\,(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = 0) = 1$, donc le résultat est vrai pour $j = 0$.

Ce qui prouve que pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2$, $\boxed{\mathbb{P}\,(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = j) = \mathbb{P}\,(V_n = 0)^j\ .}$

Q17 La famille $([V_1 = n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, la formule de probabilité totale donne

$$\mathbb{P}\,(V_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\,(V_{n+1} = 0 | V_1 = k)\,\mathbb{P}\,(V_1 = k)$$

on a $\mathbb{P}\,(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = k) = \mathbb{P}\,(V_n = 0)^k = z_n^k$ et d'après la question Q14. V_1 suit une loi de Poisson de paramètre λp donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\,(V_{n+1} = 0) &= \mathrm{e}^{-\lambda p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p z_n)^k}{k!} \\ &= \exp\left(\lambda p\,(z_n - 1)\right)\end{aligned}$$

ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{z_{n+1} = \exp\left(\lambda p\,(z_n - 1)\right)\ .}$

Q18 D'après Q10. et Q11. on a

- Si $\lambda p \leq 1$ alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, donc presque surement le service s'arrête quand n devient grand .
- Si $\lambda p > 1$ alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha \in]0, 1[$, définie dans Q11.

La durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et d'ésperance égale à λ .

Ainsi λ est donc le temps de service moyen. Si le temps de service moyen est élevé , avec le temps on a peu de chance que tous les clients soient servis .

EXERCICE

Équivalent de Stirling

Q19 Soit $f\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\(x,t)\mapsto t^{t-1}\mathrm{e}^{-t}\end{array}\right.$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $f_x:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}, t\mapsto f(x,t)$..

- En 0 : $f_x(t)\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc f_x est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x>0$.

- En 0 : $+\infty$: $f_x(t)=o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f_x est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour tout x.

Finalement f_x est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $x\in]0,+\infty[$, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-1}\,dt$ converge si, et seulement si, $x>0$.

Q20

- Soit $x>0$ et $[a,b]\subset]0,+\infty[$. Par une intégration par parties on a

$$\int_a^b t^x\mathrm{e}^{-t}dt=\Big[-t^x\mathrm{e}^{-t}\Big]_a^b+x\int_a^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt=-b^x\mathrm{e}^{-b}+a^x\mathrm{e}^{-a}+x\int_a^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

Quand a tend vers 0 et b tend vers $+\infty$, on obtient la relation fonctionnelle

$\boxed{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).}$

- On a $\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-1}\,dt=1$, par récurrence, on obtient alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\Gamma(n+1)=n!$$

on en déduit que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!}$

Q21 La relation fonctionnelle permet d'écrire pour $n\in\mathbb{N}^*$: $\Gamma\left(n+\frac12\right)=\left(n-\frac12\right)\Gamma\left(n-\frac12\right)$ et donc ,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac12\right)&=\frac{2n-1}{2}\times\frac{2n-3}{2}\times\ldots\times\frac12\times\Gamma\left(\frac12\right)\\&=\frac{(2n)\times(2n-1)\times\ldots\times3\times2}{2^n(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times2}\Gamma\left(\frac12\right)\\&=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac12\right)\end{aligned}$$

On a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$, posons $u=\sqrt{t}$ et donc $t=u^2$ et $dt=2u\,du$ on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}dt\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{u}2udu\\&=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}du=\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\ .}$

La relation reste vrai quand $n=0$.

Q22 Soit $n\in\mathbb{N}^*$,on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k&=\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln t\ dt\\&=\ln((n-1)!)-\int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln t\ dt\end{aligned}$$

donc $\boxed{\ln\Gamma(n)=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln(t)dt+\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k}$

Q23 Soit $k\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\rho_k&=\ln(k)-\Big[t\ln(t)-t\Big]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\\&=\ln(k)-\left((k+\frac{1}{2})\ln(k+\frac{1}{2})-(k-\frac{1}{2})\ln(k-\frac{1}{2})-1\right)\\&=\ln(k)-\Big[(k+t)\ln(k+t)-(k+t)\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\\&=\ln(k)-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln(k+t)dt\\&=\ln(k)-\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(k+t)dt-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(k+t)dt\\&=\ln(k)-\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(k+t)dt-\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(k-t)dt\end{aligned}$$

ce qui donne $\rho_k=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2\ln k-(\ln(k+t)-\ln(k-t))\right)\ dt$, que l'on simplifie par

$$\rho_k=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\ln(k)^2-(\ln(k^2-t^2)\right)\ dt=\int_0^{\frac{1}{2}}-\ln\left(1-\frac{t^2}{k^2}\right)dt$$

Q24 La fonction $t \mapsto -\ln(1-t)$ est croissante sur $[0,1]$ donc , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$0 \leq \rho_k \leq \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) dt = \frac{-1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$$

comme $\frac{-1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8k^2}$ donc la série $\sum_{k\geq 1} \frac{-1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$ converge , par comparaison la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

Q25

- D'après la question Q22. on a $\ln\Gamma(n) = \int_1^{n-\frac{1}{2}} \ln(t)dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$, posons $\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k = S$ donc $\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = S + o(1)$

, par suite

$$\begin{aligned}
\ln\Gamma(n) &= \int_1^{n-\frac{1}{2}} \ln(t)dt + S + o(1) \\
&= \Big[t\ln(t) - t\Big]_1^{n-\frac{1}{2}} + S + o(1) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + \frac{3}{2} + S + o(1)
\end{aligned}$$

posons $c = \frac{3}{2} + S$, alors on a $\boxed{\ln\Gamma(n) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + c + o(1)}$.

- Ce qui donne

$$\Gamma(n) = n^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\ \mathrm{e}^{c}\ \mathrm{e}^{o(1)} \text{ et } \mathrm{e}^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

ainsi $\boxed{\Gamma(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{c} n^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}.}$

Q26 Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0,n]$ et on note.

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u = \frac{t}{n}$ alors pour tout $x > 0$ on a

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\, du$$

Q27 Soit $n \in \mathbb{N}^*$et $x > 0$, une première intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\Gamma_n(x) &= n^x \int_0^1 \left(\frac{u^x}{x}\right)' (1-u)^n \ du \\ &= n^x \left[\frac{u^x}{x}(1-u)^n\right]_0^1 + \frac{n^x}{x} n \int_0^1 u^x (1-u)^{n-1} \ du \\ &= \frac{n^x}{x} n \int_0^1 u^x (1-u)^{n-1} \ du\end{aligned}$$

après k intégration par parties, $k \in [\![2, n-1]\!]$,on obtient

$$\Gamma_n(x) = \frac{n^x(n(n-1)...(n-k+1))}{x(x+1)...(x+k-1)} \int_0^1 u^{x+k-1}(1-u)^{n-k} \ du$$

et à la n -ième étape on a donc

$$\Gamma_n(x) = \frac{n^x(n(n-1)...1)}{x(x+1)...(x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1} \ du \text{ et } \int_0^1 u^{x+n-1} \ du = \frac{1}{x+n}$$

ce qui donne $\boxed{\Gamma_n(x) = \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}$

Q28 Ecrivons $\Gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$, avec $f_n(t) = \mathbb{1}_{]0,n[}(t) \ t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ .On a alors

- Domination et intégrabilité :

Soit $g : \left\{\begin{array}{c}[0,1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto -t-\ln(1-t)\end{array}\right.$ on a $g'(t) = \dfrac{t}{1-t}$, g est donc croissante sur $[0,1[$, $g(0) = 0$ donc g est positive sur $[0,1[$.

Donc pour tout $]0,n[$ on a $g(\frac{t}{n}) \geq 0$ et $n\ln(1-\frac{t}{n}) \leq -t$ d'où $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t}$.

Ainsi pour tout $]0,+\infty[$, $0 \leq f_n(t) \leq \mathrm{e}^{-t}$ et la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Par suite f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- Convergence simple :

Soit $x > 0$ et $t \in]0,+\infty[$, pour tout $n \geq t$ on a

$$\begin{aligned}f_n(t) &= t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \\ &= t^{x-1}\exp\left(n\ln(1-\frac{t}{n})\right) \\ &= t^{x-1}\exp\left(-t+o(1)\right)\end{aligned}$$

donc $f_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, ainsi la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f_x : t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f_x(t)dt,$$

par suite pour tout $x > 0$ $\boxed{\Gamma_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)\ .}$

Et la question Q27. donne pour tout $x > 0$ $\boxed{\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\ .}$

Q29

- Soit $x > 0$,on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc $\Gamma(x+n) = (x+n-1)\Gamma(x+n-1)$ par récurrence on a $\Gamma(x+n) = (x+n-1)...x\Gamma(x)$.

Donc

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\ n^x} = \frac{(x+n-1)...x}{(n-1)!\ n^x}\Gamma(x) = \frac{n}{x+n}\left(\frac{(x+n)...x}{n!\ n^x}\Gamma(x)\right)$$

D'après la question Q28. on a pour tout $x > 0$, $\boxed{\dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\ n^x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1}$.

- D'après la question Q25 on a $\Gamma(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^c n^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}$.

La question Q21. donne $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ donc

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(n)\ n^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\frac{1}{\Gamma(n)n^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)^2 n^{\frac{1}{2}}}$$

par suite

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(n)\ n^{\frac{1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\frac{\mathrm{e}^c(2n)^{2n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-2n}}{(\mathrm{e}^c n^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n})^2 n^{\frac{1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-c}$$

Comme $\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(n)\ n^x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ alors $\mathrm{e}^c = \sqrt{2\pi}$ et $\boxed{\Gamma(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}n^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}.}$

PROBLÈME 2

Blocs de Jordan

Partie I - Irréductibilité de J_λ

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $u_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p \\ X \mapsto J_\lambda X \end{cases}$ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p)$ canoniquement associé à J_λ.

Q30

- On a $u_0(e_j) = \begin{cases} e_{j+1} \text{ si } j \in [\![1, p-1]\!] \\ 0 \text{ si } j = p \end{cases}$ donc $u_0^2(e_j) = \begin{cases} e_{j+1} \text{ si } j \in [\![1, p-2]\!] \\ 0 \text{ si } j \in \{p-1, p\} \end{cases}$, et pour $p = 2$ on a $u_0^2(e_1) = u_0^2(e_2) = 0$.
- On en déduit en déduire :

$$J_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $J_0^2 = 0$ si $p = 2$.

- Par récurrence on a $u_0^{p-1}(e_j) = \begin{cases} e_1 & = e_p \\ 0 & \text{si si } j \in [\![2, p]\!] \end{cases}$ et $u_0^p(e_j) = 0$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

Ainsi

$$J_0^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J_0^p = 0$$

$J_0^p = 0$ et $J_0^{p-1} \neq 0$ donc J_0 est nilpotente d'indice p.

Q31.

- La matrice J_λ de u_λ, dans la base canonique , est triangulaire avec λ sur la diagonale donc $\mathrm{Sp}(u_\lambda) = \{\lambda\}$.
- On a $J_\lambda - \lambda I_p = J_0$ et J_0 est de rang $p-1$, donc $\dim\mathrm{Ker}(u_\lambda - \lambda id) = 1$ et on a $u_0(e_p) = 0$ ce qui donne : $E_\lambda(u_\lambda) = vect\{e_p\}$.

Q32 Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

- Si V est stable par u_λ , V est aussi stable par λid donc il est stables par $u_\lambda - \lambda id = u_0$.
- Si V est stable par u_o , V est aussi stable par λid donc il est stables par $u_0 + \lambda id = u_\lambda$.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ stable par u_λ, de dimension $k \in [\![1, p]\!]$. On note v l'endomorphisme induit par u_λ sur V et $\mathscr{B}_V = \left(\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_k\right)$ une base de V, que l'on complète, par une famille $\mathscr{C}$, en une base $\widetilde{\mathscr{B}} = \left(\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_p\right)$ de $\mathbb{R}^P$.

Q33 On a pour tout $j \in [\![1, j]\!]$ $u_\lambda(\widetilde{e}_j) = v(\widetilde{e}_j) \in V$ c.a.d $u_\lambda(\widetilde{e}_j) \in \mathrm{Vect}\left\{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_k\right\}$, ainsi la matrice de u_λ dans la base $\widetilde{\mathscr{B}}$ est triangulaire par blocs :

$$Mat_{\widetilde{\mathscr{B}}}(u_\lambda) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathscr{B}_V & \mathscr{C} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} Mat_{\mathscr{B}_V}(v) & B \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \mathscr{B}_V \\ \mathscr{C} \end{array}$$

Q34

- Le polynôme caractéristique u_λ s'écrit

$$\chi_{u_\lambda}(X) = \det\left(Xid - Mat_{\widetilde{\mathscr{B}}}(u_\lambda)\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} XI_k - Mat_{\mathscr{B}_V}(v) & -B \\ \hline 0 & XI_{p-k} - A \end{array}\right)$$

ce qui donne $\chi_{u_\lambda}(X) = \det\left(XI_k - Mat_{\mathscr{B}_V}(v)\right)\det\left(XI_{p-k} - A\right)$, par suite de χ_v diviseχ_{u_λ} .

- On a $\chi_{u_\lambda}(X) = \chi_{J_\lambda}(X) = (X - \lambda)^p$, le polynôme χ_v divise χ_{u_λ} et $\deg \chi_v = \dim V = k$ donc $\chi_v(X) = (X - \lambda)^k$. Ainsi $\mathrm{Sp}\,(v) = \{\lambda\}$ donc $E_\lambda(v) \neq \{0\}$ or $E_\lambda(v) \subset E_\lambda(u_\lambda) = \mathrm{Vect}\,\{e_p\}$, par suite $E_\lambda(v) = \mathrm{Vect}\,\{e_p\} \subset V$ d'où $e_p \in V$.

Q35 Si on suppose que $\mathbb{R}^P = V \oplus W$ où V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^p$ stables par u_λ non réduits à $\{0\}$, d'après la question précédente $e_p \in V \cap W$ ce qui est absurde. Une telle décompositions est donc impossible.

Partie II -Stabilité du système linéaire associéUne suite récurrente

On rappelle la propriété suivante : *Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to E$, $g : I \to F$ et $B : E \times F \to G$ bilinéaire , si f et g sont dérivables sur I alors l'application $\varphi : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I et $\varphi'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f'(t), g(t))$*

Q36 Soit X_0 est un vecteur propre pour J_λ associé à la valeur propre λ, et $\widetilde{X} : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} X_0$.
On a $\widetilde{X}'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} X_0$ (*on a dérivé les coordonnée de* $\widetilde{X}$) et $J_\lambda X_0 = \lambda X_0$ donc $\widetilde{X}'(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} J_\lambda X_0 = J_\lambda X_0$, ainsi $\widetilde{X}$ est une solution particulière de (S).

Q37. Pour une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ notons $[M]_{i,j} = m_{i,j}$. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \exp\left(tJ_\lambda\right) \end{cases}$

On a φ est dérivable si et seulement si, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ et $t \in \mathbb{R}$, $[\varphi(t)]_{i,j}$ est dérivable.

De l'expression de φ on déduit que

$$[\varphi(t)]_{i,j} = \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} \left[J_0^k\right]_{i,j}$$

pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, donc φ est dérivable .

Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\left[\varphi'(t)\right]_{i,j} = \left([\varphi(t)]_{i,j}\right)' = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} t^k + k\mathrm{e}^{\lambda t} t^{k-1}}{k!} \left[J_0^k\right]_{i,j}$$

donc

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} t^k + k\mathrm{e}^{\lambda t} t^{k-1}}{k!} J_0^k \\
&= \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k + \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k \\
&= \lambda \varphi(t) + \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-2} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^{k+1} \\
&= \lambda \varphi(t) + \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^{k+1} \ (\text{ car } J_0^p = 0 \ ) \\
&= \lambda \varphi(t) + J_0 \varphi(t) \ \ (= \lambda \varphi(t) + \varphi(t) J_0 \ ) \\
&= (\lambda I_p + J_0)\, \varphi(t) \ \ (= \lambda \varphi(t) + \varphi(t) J_0 \ )
\end{aligned}$$

ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{\varphi'(t) = J_\lambda \exp(tJ_A) = \exp(tJ_\lambda)\, J_\lambda}$.

Q38

- On a $J_0^p = 0$ donc $J_0^k = 0$ pour tout $k \geq p$ ains pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tJ_\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k = \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} J_0^k.$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$, remarquons que

$$\exp(tJ_\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda t} I_p + \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k$$

et les J_0^k sont des matrices triangulaires de diagonales nulles donc $\exp(tJ_\lambda)$ est triangulaire de diagonale $(\mathrm{e}^{\lambda t}, ..., \mathrm{e}^{\lambda t})$ ce qui donne $\det(\exp(tJ_\lambda)) = \mathrm{e}^{n\lambda} \neq 0$ donc $\exp(tJ_\lambda)$ inversible .

- Soit $g : t \mapsto \varphi(t)\varphi(-t)$, le produit de matrices est bilinéaire donc g est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \varphi'(t)\varphi(-t) - \varphi(t)\varphi'(-t) \\ &= J_\lambda \exp(tJ_\lambda)\exp(-tJ_\lambda) - \exp(tJ_\lambda) J_\lambda \exp(-tJ_\lambda) \end{aligned}$$

or J_λ et $\exp(tJ_\lambda)$ commutent donc $g'(t) = 0$ et g est constante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $g(t) = g(0) = I_p$. Ainsi $\exp(tJ_\lambda)$ est inversible et son inverse est $\exp(-tJ_\lambda)$.

Q39

- L'application qui a une matrice et un vecteur associe leur produit est bilinéaire, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$Y'(t) = (\exp(-tJ_\lambda))' X(t) + \exp(-tJ_\lambda) X'(t) = -J_\lambda (\exp(-tJ_\lambda)) X(t) + \exp(-tJ_\lambda) X'(t)$$

J_λ et $\exp(-tJ_\lambda)$ commutent ce qui donne

$$Y'(t) = \exp(-tJ_\lambda)\left(X'(t) - J_\lambda X(t)\right)$$

On a donc X est solution de (S) si et seulement si $Y'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ainsi X est solution de (S) si et seulement si Y est constante sur $\mathbb{R}$.

- De ce qui précèdent on a : X est solution de (S) si et seulement si $Y(t) = Y(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui est équivalent à $X(t) = \exp(tJ_\lambda) X_0$ avec $X_0 = Y(0)$.

Q40 Supposons $\lambda > 0$, soit $X : t \mapsto \exp(tJ_\lambda) e_p$, rappelons que $J_0 e_p = 0$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$X(t) = \left(\mathrm{e}^{\lambda t} I_p + \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k\right) e_p = \mathrm{e}^{\lambda t}\, e_p + \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^k}{k!} \left(J_0^k e_p\right)$$

d'où $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\, e_p$, par suite $\|X(t)\| = \mathrm{e}^{\lambda t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc X non bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Q41 Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $X \in E$.

- On a , pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ on a $[AX]_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$ donc

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right)^2$$

L'inégalité de Cauchy Schwartz donne $\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{p} (a_{i,j})^2 \sum_{j=1}^{p} (x_j)^2$,par conséquent

$$\|AX\|^2 \leq \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} (a_{i,j})^2 \sum_{j=1}^{p} (x_j)^2 = \mathcal{N}(A)^2 \|X\|^2$$

d'où l'on a $\boxed{\|AX\| \leqslant \mathcal{N}(A)\|X\|}$.

- Soit $\lambda < 0$, et X solutions de (S) , donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \exp(tJ_\lambda)\, X_0$ avec $X_0 \in E$.

Soit $t \geq 0$, l'inégalité précédente s'écrit

$$\|X(t)\| \leqslant \mathcal{N}(\exp(tJ_\lambda))\|X_0\|$$

et on a

$$\mathcal{N}(\exp(tJ_\lambda)) = \mathcal{N}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{t^k}{k!}\, J_0^k\right) \leq \mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{|t|^k}{k!}\mathcal{N}\left(\, J_0^k\right)$$

donc

$$\|X(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{\lambda t}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{|t|^k}{k!}\mathcal{N}\left(\, J_0^k\right)\|X_0\|\right)}_{\text{polynomiale}}$$

par suite $X(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, ainsi X est bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Q42. Si $\lambda = 0$ alors il existe $X_0 \in E$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \exp(tJ_0)\, X_0 = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{t^k}{k!}\, J_0^k X_0$,qui est une fonction polynomiale, elle n'est bornée sur $\mathbb{R}^+$ que si $X_0 \ = 0$. La solution nulle est l'unique solution bornée sur $\mathbb{R}^+$.

ECOLE HASSANIA DES TRAVAUX PUBLICS

ECOLE MOHAMMADIA D'INGÉNIEURS

INPT

المعهد الوطني للبريد والمواصلات

Institut National des Postes et Télécommunications

CONCOURS NATIONAL COMMUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE RABAT

ENSM RABAT

1972

MINES-RABAT

INSEA

ENSIAS

CONCOURS NATIONAL COMMUN
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 1
SESSION 2024 - FILIÈRE MP

Durée: 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

EXERCICE
Noté 4 points sur 20

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}dx$ et pour tout entier naturel non nul $n, I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-3x}dx$.

1 **1.a** Montrer que I_0 est une intégrale convergente et que $I_0 = \frac{1}{3}$.

1.b Vérifier que, pour tout entier naturel n , $x^n\mathrm{e}^{-3x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

1.c En déduire que, pour tout entier naturel n, I_n est une intégrale convergente.

2 Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel n et pour tout réel positif A,

$$\int_0^A x^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}dx = \frac{-A^{n+1}}{3}\mathrm{e}^{-3A} + \frac{(n+1)}{3}\int_0^A x^n\mathrm{e}^{-3x}dx$$

3 Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = \frac{(n+1)}{3}I_n$.

4 En déduire que, pour tout entier naturel n , $I_n = \dfrac{n!}{3^{n+1}}$.

5 Soit X la variable aléatoire de densité la fonction f définie par,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{9}{4}(1+x)\mathrm{e}^{-3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

5.a Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

5.b Déterminer la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

Problème.

Pour tout réel strictement positif t , on considère les deux fonctions f_t et g_t qui sont définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$f_t(x) = \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ txf_t(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
Dans toute la suite du problème, on prend t un réel strictement positif

Partie 1: Etude d'une variable aléatoire

On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continue par morceaux est une densité de probabilité si f est positive sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des points de discontinuité de f est une partie finie de $\mathbb{R}$, f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

1 **1.a** Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f_t(x)dx$ est convergente.

1.b Déterminer I_0 en fonction de t, (on pourra faire le changement de variable $(u = x\sqrt{t}$).

1.c Déterminer I_1 sous forme d'une expression simple de t.

2 **2.a** Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 2$ et pour tout réel $u \in [0, +\infty[$,

$$\int_0^u x^n f_t(x)dx = \frac{-u^{n-1}}{t} f_t(u) + \frac{n-1}{t} \int_0^u x^{n-2} f_t(x)dx$$

2.b En déduire que, pour tout entier n tel que $n \geq 2, I_n = \frac{n-1}{t} I_{n-2}$.

3 **3.a** Montrer que g_t est une densité de probabilité. Dans la suite, on note X_t une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ admettant g_t , pour densité.

3.b Déterminer F_t la fonction de répartition de la variable aléatoire X_t .

3.c Montrer que la variable aléatoire X_t admet une espérance $\mathbb{E}(X_t)$ et déterminer sa valeur.

3.d Montrer que la variable aléatoire X_t admet une variance $\mathbb{V}(X_t)$ et déterminer sa valeur.

3.e Déterminer la valeur de t pour que l'écart type $\sigma(X_t)$ de X_t soit egal à 1.

4 Pour tout entier naturel k, on note les deux événements A_k et B_k de la façon suivante:

$$A_k = \left(\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1}\right) \text{ et } B_k = \left(\sqrt{2k+1} < X_t \leq \sqrt{2k+2}\right)$$

4.a Déterminer $\mathbb{P}(A_k)$ et $\mathbb{P}(B_k)$.

4.b *i)* Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est une série convergente et déterminer sa somme.

ii) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ est une série convergente et déterminer sa somme.

iii) Est ce qu'on peut avoir $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$? Justifier votre réponse.

Partie 2: Calcul d'une intégrale impropre

Pour tout entier n tel que $n \geq 0$ et pour tout réel x, on pose $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-tx)^k}{k!} f_t(x)$. Pour tout entier n tel que $n \geq 0$, on définit le moment d'ordre n de la fonction f_t par, $m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_t(x)dx$, (on rappelle que m_n dépend de t).

1 Déterminer pour tout entier k tel que $k \geq 0, m_{2k}$ et m_{2k+1}.

2 Montrer que, pour tous réels a, b et c tel que $a > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}dx$ est une intégrale convergente et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\Delta}{4a}}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$

3 Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

4 Déterminer, pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$.

5 Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!}$.

6 En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} m_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$.

7 Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} dt$ est convergente.

8 Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} dt = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(2k+1)2^{k-1}}$.

Partie 3: Produit de convolution et une transformé

Dans la suite du problème, on note **E** l'ensemble des fonctions h continues sur, $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telles qu'il existe un réel positif M et un réel strictement positif λ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $|h(x)| \leq M f_t(\lambda x)$.

On admet le résultat suivant : *si ϕ une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux applications ϕ_1 et ϕ_2 continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |\phi(x,y)| \leq \phi_1(x)\phi_2(y)$, alors les deux expressions $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,y)dx\right) dy$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,y)dy\right) dx$ sont bien définies et elles sont égales.*

On rappelle que l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, noté $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, muni des deux lois" +" et "." usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Montrer que $(\mathrm{E},+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que la fonction f_t est un élément de E.

2 Soient φ et ψ deux éléments de E. On note $\varphi * \psi$ l'application définie, pour tout réel x, pour lequel l'intégrale existe, par $(\varphi * \psi)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u)du.$

2.a Montrer que $\varphi * \psi$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2.b Montrer que $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.

2.c Déterminer $f_t * f_t$.

2.d Montrer que $\varphi * \psi$ est un élément de E.

3 Soit φ un élément de E. On définit la fonction $\widehat{\varphi}$ par $\widehat{\varphi}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)du.$

3.a Montrer que $\widehat{\varphi}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

3.b Montrer que $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout x de $\mathbb{R}$, les expressions de $\widehat{\varphi}'(x)$ et $\widehat{\varphi}''(x)$, chacune à l'aide d'une intégrale.

4 Soient φ et ψ deux éléments de E.

4.a Montrer qu'il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout couple (x,u) de $\mathbb{R}^2$,

$$\boxed{u^2 + (x-u)^2 \geq \alpha\left(u^2 + x^2\right)}$$

4.b Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi * \psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx. \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx.$

4.c Montrer que, pour tout réel ω, $\widehat{(\varphi * \psi)}(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega).\widehat{\psi}(\omega).$

Partie 4: Une suite de fonctions construite à partir du produit de convolution

On note E_1 l'ensemble des fonctions ψ de E telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 1$. Pour toute fonction ϕ de E_1, on considère la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ définie par $\phi_1 = \phi$ et pour tout entier $n \geq 2$, $\phi_n = \phi_{n-1} * \phi_1$

1 Montrer que, pour tout entier $n \geq 1, \phi_n$ est un élément de E_1.

2 Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel $x, \widehat{\phi_n}(x)$ en fonction de $\widehat{\phi}(x)$ et de n.

3 Dans cette question, on prend $\phi = \left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right) f_t$, ou f_t est la fonction définie au début du problème.

3.a Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un réel $C_n(t)$, à déterminer, tel que $\forall x \in \mathbb{R};\ \phi_n(x) = C_n(t)\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}$.

3.b Montrer qu'il existe une constante réelle ν strictement positive, tel que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel u, $\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \mathrm{e}^{\nu u^2}$.

4 Soit ϕ un élément quelconque de E_1. On pose pour tout entier naturel non nul n

$$M_{n,1} = \int_{-\infty}^{+\infty} u\phi_n(u)du, \quad M_{n,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\phi_n(u)du \ \text{ et } V_n = M_{n,2} - M_{n,1}^2$$

4.a Montrer que la fonction $\widehat{\phi_n}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 dont on précisera les coefficients à l'aide de $M_{n,1}$ et de $M_{n,2}$.

4.b En déduire que $M_{n,1} = nM_{1,1}$ et $V_n = nV_1$.

5 On suppose de plus dans cette question que la fonction ϕ vérifie $M_{1,1} = 0$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right)$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Concours National Commun

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 1

Session 2024 - Filière MP

Quelques rappels sur les variables aléatoires à densité :

- Une variable aléatoire X est dite à densité si il existe une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux et admet un nombre fini de points de discontinuité , intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ telle que pour tous réels $a \leq b$ on a $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.
- La fonction de répartition de f, notée F_X, est définie par $F_X : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
  Pour tous réels $a \leq b$ on a $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$. En tout point x où f est continue on a $F'_X(x) = f(x)$.
- Si la fonction $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors l'espérance de X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.
- Si la fonction $t \mapsto t^2 f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors la variance de X est donnée par
  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

  et l'écart-type est égale à $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Exercice

1

a On a pour $A \geq 0$ $\displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{-3x}dx = \frac{1-\mathrm{e}^{-3A}}{3}$, donc l'intégrale I_0 converge et $I_0 = \frac{1}{3}$.

b On sait que, pour tout entier naturel n , $x^{n+2}\mathrm{e}^{-3x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ donc $x^n\mathrm{e}^{-3x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

c Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de l'infinie , donc la fonction $x \mapsto x^n\mathrm{e}^{-3x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, d'où la convergence de l'intégrale I_n.

$$\begin{aligned}\int_0^A x^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}dx &= \int_0^A x^{n+1}\left(\frac{-\mathrm{e}^{-3x}}{3}\right)' dx\\ &= \frac{-1}{3}\left[x^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^A + \frac{(n+1)}{3}\int_0^A x^n\mathrm{e}^{-3x}dx\end{aligned}$$

2 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \geq 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^A x^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}dx &= \int_0^A x^{n+1}\left(\frac{-\mathrm{e}^{-3x}}{3}\right)' dx \\ &= \frac{-1}{3}\left[x^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^A + \frac{(n+1)}{3}\int_0^A x^n\mathrm{e}^{-3x}dx\end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\int_0^A x^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}dx = \frac{-A^{n+1}}{3}\mathrm{e}^{-3A} + \frac{(n+1)}{3}\int_0^A x^n\mathrm{e}^{-3x}dx}$

3 Dans la relation précédente on fait tendre un A vers $+\infty$, on obtient pour tout entier naturel n,

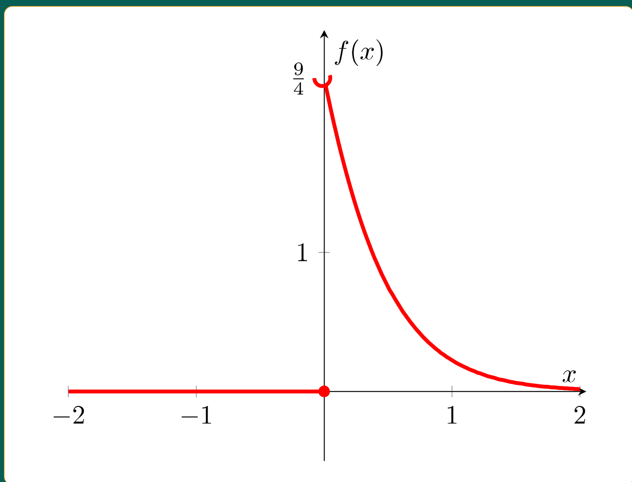
$\boxed{I_{n+1} = \frac{(n+1)}{3}I_n}$.

4 Soit $n \in \mathbb{N}$. De la question précédente on a

$$I_n = \frac{n}{3}\frac{n-1}{3}\dots\frac{1}{3}I_0 = \frac{n!}{3^n}\ I_0$$

puisque $I_0 = \frac{1}{3}$ alors $\boxed{I_n = \frac{n!}{3^{n+1}}}$.

5 Soit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{9}{4}(1+x)\mathrm{e}^{-3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, dont une représentation graphique :



f est une fonction de densité car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{9}{4}(I_0 + I_1) = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = 1.$$

a D'après 1.b) on a $xf(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc la fonction $x \mapsto xf(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc intégrable sur $\mathbb{R}$ par suite X admet une espérance .

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \frac{9}{4}\int_{0}^{+\infty} x(1+x)\mathrm{e}^{-3x}dx \\ &= \frac{9}{4}(I_1+I_2) \\ &= \frac{9}{4}\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\right)\end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{5}{12}}$.

b De même la fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc X admet une variance .

On a

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{9}{4}(I_2+I_3) = \frac{1}{3}$$

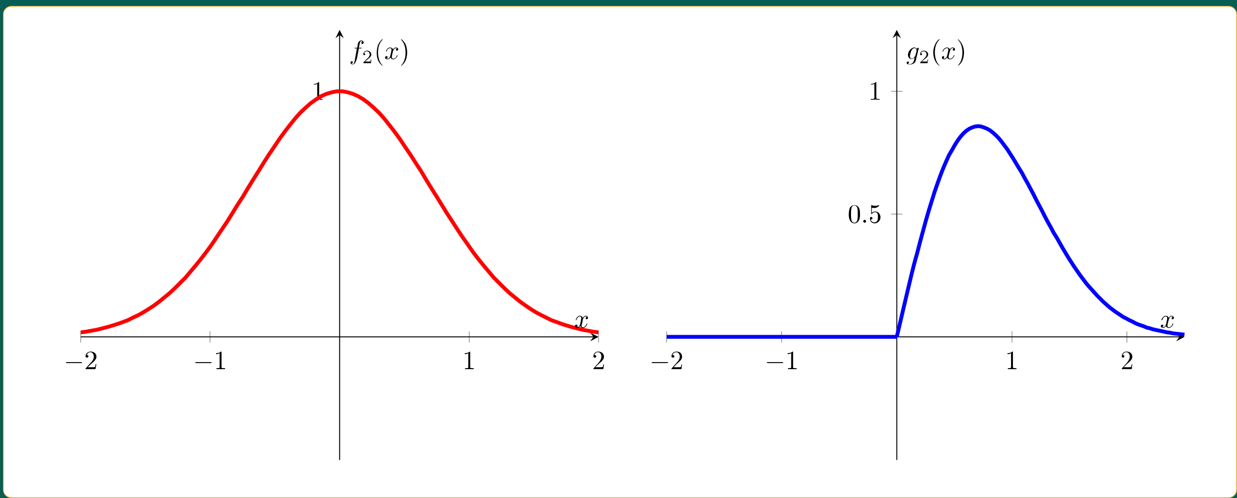
et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{23}{144}}$.

Problème.

Pour tout réel strictement positif t , on considère les deux fonctions f_t et g_t qui sont définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$f_t(x) = \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ txf_t(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Une représentation graphique dans le cas $t = 2$:



Dans toute la suite du problème, on prend t un réel strictement positif

Partie 1: Etude d'une variable aléatoire

1

a Soit $t > 0$. La fonction $x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $x^n \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc elle est intégrable sur $[0, +\infty[$, ainsi l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f_t(x)dx$ est convergente , pour tout entier n .

b On a

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx \overset{u=x\sqrt{t}}{=} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du$$

donc $\boxed{I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2t}}}$.

c On a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{-1}{t} \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\right)' dx \\ &= \frac{-1}{t} \left(\lim_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-t\frac{A^2}{2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_1 = \frac{1}{t}}$.

2

a Soit $n \geq 2$ et $u \in [0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^u x^n f_t(x)dx &= \int_0^u x^n \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{-1}{t} \int_0^u x^{n-1} \left(\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\right)' dx\end{aligned}$$

une intégration par parties donne

$$\int_0^u x^n f_t(x)dx = \frac{-1}{t} \left[x^{n-1}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\right]_0^u + \frac{n-1}{t} \int_0^u x^{n-2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

ainsi $\boxed{\int_0^u x^n f_t(x)dx = \frac{-u^{n-1}}{t} f_t(u) + \frac{n-1}{t} \int_0^u x^{n-2} f_t(x)dx}$.

b Puisque $\frac{-u^{n-1}}{t} f_t(u) \underset{u \to +\infty}{\to} 0$ et les intégrales sont convergentes, alors par passage à la limite on trouve

$$\int_0^{+\infty} x^n f_t(x)dx = \frac{n-1}{t} \int_0^{+\infty} x^{n-2} f_t(x)dx$$

Ainsi pour tout entier $n \geq 2$, $\boxed{I_n = \frac{n-1}{t} I_{n-2}}$.

3

a La fonction g_t est continue positive sur $\mathbb{R}$. Soit $A > 0$ on a

$$\int_{-A}^{A} g_t(x)dx = \int_0^A tx f_t(x)dx$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} tx f_t(x)dx$ est convergente donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x)dx$ est convergente , par passage à la limite on a

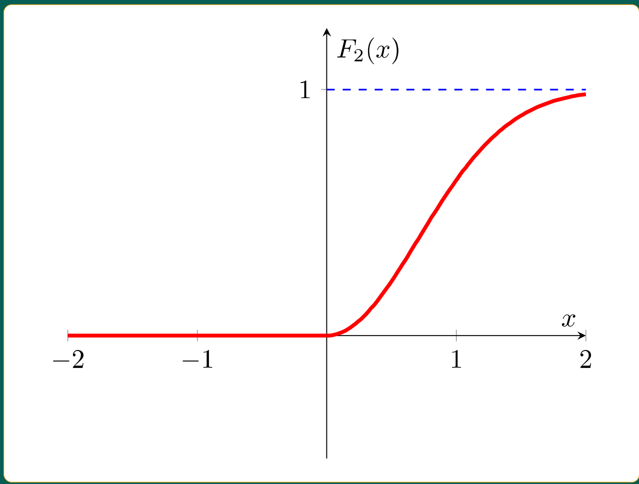
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x)dx = \int_0^{+\infty} tx f_t(x)dx = tI_1 = 1$$

Ainsi g_t est une densité de probabilité.

b Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}F_t(x) &= \int_{-\infty}^{x} g_t(u)du \\ &= \int_0^x tu\mathrm{e}^{-t\frac{u^2}{2}} du \\ &= \int_0^x -\left(\mathrm{e}^{-t\frac{u^2}{2}}\right)' du\end{aligned}$$

ainsi $\boxed{F_t(x) = 1 - \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}}$.



c Pour tout $x \geq 0$, on a $xg_t(x) = tx^2 f_t(x)$ donc la fonction $x \mapsto xg_t(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par suite X_t admet une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xg_t(x)dx \\ &= t\int_0^{+\infty} x^2 f_t(x)dx \\ &= tI_2\end{aligned}$$

les questions 2)b) et 1)b) donnent : $I_2 = \frac{1}{t}I_0 = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{\pi}{2t}}$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X_t) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}}$.

d Comme précédemment la fonction $x \mapsto x^2 g_t(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc X_t admet une variance $\mathbb{V}(X_t)$.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((X_t)^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_t(x)dx \\ &= t\int_0^{+\infty} x^3 f_t(x)dx \\ &= tI_3\end{aligned}$$

avec $I_3 = \frac{2}{t}I_1$ et $I_1 = \frac{1}{t}$ donc $\boxed{\mathbb{E}\left((X_t)^2\right) = \frac{2}{t}}$.

Et on a $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{E}((X_t)^2) - \mathbb{E}(X_t)^2$ donc $\boxed{\mathbb{V}(X_t) = \frac{4-\pi}{2t}}$.

e On a $\sigma(X_t) = \sqrt{\frac{4-\pi}{2t}}$, donc $\sigma(X_t) = 1$ si et seulement si $\boxed{t = \frac{4-\pi}{2}}$.

4 Pour tout entier naturel k, on note les deux événements A_k et B_k de la façon suivante:

$$A_k = \left(\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1}\right) \text{ et } B_k = \left(\sqrt{2k+1} < X_t \leq \sqrt{2k+2}\right)$$

a On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}\left(\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1}\right)\\ &= \int_{\sqrt{2k}}^{\sqrt{2k+1}} g_t(x)dx\\ &= F_t(\sqrt{2k+1}) - F_t(\sqrt{2k})\end{aligned}$$

on sait que $F_t(x) = 1 - \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$, donc $\boxed{\mathbb{P}(A_k) = \mathrm{e}^{-tk}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})}$.

De même $\mathbb{P}(B_k) = F_t(\sqrt{2k+2}) - F_t(\sqrt{2k+1})$ et $\boxed{\mathbb{P}(B_k) = \mathrm{e}^{-t(k+\frac{1}{2})}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}))}$.

b

i) La série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-tn}$ est géométrique est convergente donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente et $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}}$.

ii) De même on a la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ est convergente et $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}}$.

iii) Les événements $(A_k)_{k\geq 0}$ sont deux à deux disjoints donc $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}$.

De même on a $(B_k)_{k\geq 0}$ sont deux à deux disjoints et $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}$.

Donc on a $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$ si et seulement si $t = 0$, ce qui contredit le fait que $t > 0$.

Remarquons que $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) > \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) < \frac{1}{2}$ ce qui justifie le résultat .

Les deux réunions ne sont pas complémentaires car $\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$ et $\mathbb{P}(\mathbb{R}^-) = 0$.

Partie 2: Calcul d'une intégrale impropre

Pour tout entier n tel que $n \geq 0$ et pour tout réel x, on pose $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-tx)^k}{k!} f_t(x)$. Pour tout entier n tel que $n \geq 0$, on définit le moment d'ordre n de la fonction f_t par, $m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_t(x)dx$.

1 Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question 1)a) de la partie 1 l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k f_t(x)dx$ est convergente , par parité de f_t on a la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} x^k f_t(x)dx$, ce qui justifie l'existence de m_k .

- On a

$$m_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} f_t(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}dx$$

la fonction $x \mapsto x^{2k}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}dx$ est paire donc

$$m_{2k} = 2\int_0^{+\infty} x^{2k}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}dx \quad = 2I_{2k}$$

d'après la question 2)b) de la partie 1 on a

$$\boxed{\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{2k-1}{t} I_{2k-2} \\ &= \frac{2k-1}{t}\frac{2k-3}{t}\dots\frac{1}{t} I_0 \\ &= \frac{(2k)!}{t^k\ (2k.(2k-2)\dots 2)} I_0 \\ &= \frac{(2k)!}{t^k\ 2^k\ k!} I_0 \end{aligned}}$$

comme $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$ alors $I_{2k} = \frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{(\sqrt{2t})^{2k+1}\ k!}$, ainsi $\boxed{m_{2k} = 2\frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{(\sqrt{2t})^{2k+1}\ k!}}$.

- De même $m_{2k+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+1} \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx$ et la fonction $x \mapsto x^{2k+1}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$ est impaire donc $\boxed{m_{2k+1} = 0}$.

2 Soit a, b et c des réels tels que $a > 0$. Pour tout réel x écrivons

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}$$

avec $\Delta = b^2 - 4ac$, ce qui donne pour $A > 0$

$$\boxed{\int_{-A}^{+A} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)} dx = \mathrm{e}^{\frac{\Delta}{4a}} \int_{-A}^{+A} \mathrm{e}^{-a(x+\frac{b}{2a})^2} dx}$$

on fait le changement de variable $u = \sqrt{2a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$:

$$\boxed{\int_{-A}^{+A} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \mathrm{e}^{\frac{\Delta}{4a}} \int_{\sqrt{2a}(-A+\frac{b}{2a})}^{\sqrt{2a}(A+\frac{b}{2a})} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du}$$

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du$ converge donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)} dx$ est convergente , par passage à la limite on obtient

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \mathrm{e}^{\frac{\Delta}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du}$$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$, d'où $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{\frac{\Delta}{4a}}}$

3

- On a $|\mathrm{e}^{-tx} f_t(x)| \leq |f_t(x)|$, la fonction f_t est intégrable sur $[0, +\infty[$ et elle est paire donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$, par suite la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x) dx$ est convergente .

- Remarquons que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\frac{t}{2}x^2 + tx)} dx}$$

En suite appliquons le résultat de la question précédente avec $a=\frac{t}{2}$, $b=t$ et $c=0$, ce qui donne $\Delta=t^2$ et

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{t}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}$$

4 Soit $x\in\mathbb{R}$, la série $\sum_k \frac{(-tx)^k}{k!}$ converge et de somme e^{-tx} donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)}$

5 D'après la question précédente, la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{-tx}f_t(x)$.
Et on la majoration

$$|S_n(x)| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{|tx|^k}{k!} f_t(x) \le \mathrm{e}^{|tx|}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$$

la fonction $\varphi : x\mapsto \mathrm{e}^{|tx|}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ vérifie $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\varphi(x) \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Le théorème de la convergence dominée permet d'écrire : $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} S_n(x)\right)dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(x)dx\right)$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-tx)^k}{k!}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}dx\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-t)^k}{k!}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}dx\right)$$

Ainsi on a $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k m_k\frac{t^k}{k!}}$.

6 D'après la question 1) on a $m_{2k+1}=0$ donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} m_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k m_k\frac{t^k}{k!} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f_t(x)dx$$

ce qui donne $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} m_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2\pi}{t}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}$.

7 Soit $a\in\,]0,1]$, dans $\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}dt$ on pose $u=\sqrt{t}$, ce qui donne

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}dt = 2\int_{\sqrt{a}}^1 \mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}}du$$

on en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}dt$ est convergente et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}dt = 2\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}}du$.

8 On a pour tout $u\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{u^{2k}}{2^k k!}$ donc $\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}}du = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{u^{2k}}{2^k k!}du$, puisqu'il s'agit d'une série entière ,

ce qui donne $\boxed{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!(2k+1)2^{k-1}}}$

Partie 3: Produit de convolution et une transformé

1

- On a $\mathbf{E} \subset \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et il contient la fonction nulle, donc $\mathbf{E} \neq \varnothing$.
  Soit φ, ψ dans $\mathbf{E}$ et α, β dans $\mathbb{R}$, donc il existe $M_\varphi, M_\psi, \lambda_\varphi, \lambda_\psi$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$M_\varphi \geq 0, M_\psi \geq 0, \lambda_\varphi > 0, \lambda_\psi > 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq M_\varphi f_t(\lambda_\varphi x) \text{ , } |\psi(x)| \leq M_\psi f_t(\lambda_\psi x) \quad (1)$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)| \leq |\alpha| \, M_\varphi f_t(\lambda_\varphi x) + |\beta| \, M_\psi f_t(\lambda_\psi x)$$

soit $\delta = \min(\lambda_\varphi, \lambda_\psi)$ alors $f_t(\lambda_\varphi x) \leq f_t(\delta x)$ et $f_t(\lambda_\psi x) \leq f_t(\delta x)$, par suite

$$|\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)| \leq (|\alpha| \, M_\varphi + |\beta| \, M_\psi) \, f_t(\delta x)$$

donc $\alpha\varphi + \beta\psi \in \mathbf{E}$. Ce qui prouve que est $\mathbf{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- Si on prend $M = \lambda = 1$ on obtient $f_t \in \mathbf{E}$.

2 Soient φ et ψ deux éléments de $\mathbf{E}$, on garde les notations (1).

a Soit $x, u \in \mathbb{R}$ on a $|\varphi(u)\psi(x-u)| \leq M_\varphi M_\psi f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi (x-u))$ et

$$f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi (x-u)) \underset{u \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right) \text{ et } f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi (x-u)) \underset{u \to -\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

donc la fonction $u \mapsto f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi (x-u))$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par suite $u \mapsto \varphi(u)\psi(x-u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $\varphi * \psi$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b Écrivons

$$(\varphi * \psi)(x) = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} \varphi(u)\psi(x-u)du$$

et posons $v = x - u$ alors pour tout $A > 0$

$$\int_{-A}^{+A} \varphi(u)\psi(x-u)du = \int_{x-A}^{x+A} \varphi(x-v)\psi(v)dv$$

par passage à la limite on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v)\varphi(x-v)dv$$

Ainsi $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.

c Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}(f_t * f_t)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(u) f_t(x-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}(u^2+(u-x)^2)} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(tu^2 - txu + \frac{1}{2}tx^2)} du\end{aligned}$$

d'après la question 2) de la partie 2 on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{\frac{\Delta}{4t}} \text{ avec } \Delta = -(tx)^2$$

donc $(f_t * f_t)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{t}{4}x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} f_{\frac{t}{2}}(x)$ ainsi $\boxed{f_t * f_t = \sqrt{\frac{\pi}{t}} f_{\frac{t}{2}}}$

d On garde les notations de la question 1) . Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}|\varphi * \psi(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u)| \, |\psi(x-u)| \, du \\ &\leq M_\varphi M_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(\lambda_\varphi u) \; f_t(\lambda_\psi(x-u)) \; du\end{aligned}$$

Soit $\delta = \min(\lambda_\varphi, \lambda_\psi)$, on a $f_t(\lambda_\varphi u) \; f_t(\lambda_\psi(x-u)) = f_t(\delta u) \; f_t(\delta(x-u))$ donc

$$|\varphi * \psi(x)| \leq M_\varphi M_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(\delta u) \; f_t(\delta(x-u)) \; du$$

le changement de variable $v = \delta u$ donne

$$\begin{aligned}|\varphi * \psi(x)| &\leq \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(v) \; f_t(\delta x - v) \; dv \\ &\leq \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta} (f_t * f_t)(\delta x)\end{aligned}$$

la question précédente donne $|\varphi * \psi(x)| \leq \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{t}} f_{\frac{t}{2}}(\delta x)$ et remarquons que $f_{\frac{t}{2}}(\delta x) = e^{-\frac{t}{2}\left(\frac{\delta x}{\sqrt{2}}\right)^2} = f_t(\frac{\delta x}{\sqrt{2}})$.
Il suffit donc de prendre $M_{\varphi * \psi} = \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{t}}$ et $\lambda_{\varphi * \psi} = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, ce qui justifie que $\varphi * \psi$ est un élément de E.

3 Soit φ un élément de E. On définit la fonction $\widehat{\varphi}$ par $\widehat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu} \varphi(u) du.$

a Soit $x, u \in \mathbb{R}$ on a

$$\left| e^{-xu} \varphi(u) \right| \leq M_\varphi e^{-xu} f_t(\lambda_\varphi u)$$

comme $e^{-xu} f_t(\lambda_\varphi u) \underset{u \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ et $e^{-xu} f_t(\lambda_\varphi) \underset{u \to -\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ alors la fonction $u \mapsto e^{-xu} f_t(\lambda_\varphi u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par suite la fonction $u \mapsto e^{-xu} \varphi(u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ainsi $\widehat{\varphi}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b Soit $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,u) & \mapsto & \mathrm{e}^{-xu}\varphi(u) \end{array} \right.$, les dérivées partielles de h par rapport à x existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

On a $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,u) = u^2\mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)$ et pour tout $(x,u) \in \mathbb{R}^2$

Soit $A > 0$, on a pour tout $(x,u) \in [-A,A] \times \mathbb{R}$

$$\boxed{\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,u)\right| \leq u^2\mathrm{e}^{|xu|}\,|\varphi(u)| \leq M_\varphi u^2\mathrm{e}^{A|u|}f_t(\lambda_\varphi u)}$$

la fonction $u \mapsto M_\varphi u^2\mathrm{e}^{|xu|}f_t(\lambda_\varphi u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (comme dans a)), c'est donc une fonction de domination.

Par le théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale , $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-A,A]$, ceci est valable pour tout $A > 0$ donc $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\widehat{\varphi}'(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)du \quad , \ \widehat{\varphi}''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)du \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

4 Soient φ et ψ deux éléments de E.

a Pour tout (x,u) de $\mathbb{R}^2$, $\|(x,u)\| = \sqrt{u^2+x^2}$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, posons

$$\boxed{N(x,u) = \|(x-u,u)\| = \sqrt{u^2+(x-u)^2}}$$

On vérifie facilement que N est une norme de $\mathbb{R}^2$, comme on est en dimension finie ces deux normes sont équivalentes, d'où l'existence de $\beta \geq \alpha > 0$ tel que $\|(x,u)\|\,\alpha \leq N(x,u) \leq \beta\,\|(x,u)\|$.

Ainsi il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout couple (x,u) de $\mathbb{R}^2$, $\boxed{u^2+(x-u)^2 \geq \alpha\left(u^2+x^2\right)}$.

b Soit (x,u) de $\mathbb{R}^2$ on a

$$\boxed{|\varphi(u)\psi(x-u)| \leq M_\varphi M_\psi f_t(\lambda_\varphi u)\ f_t(\lambda_\psi(x-u))}$$

soit $\delta = \min(\lambda_\varphi, \lambda_\psi)$ donc

$$\boxed{|\varphi(u)\psi(x-u)| \leq M_\varphi M_\psi f_t(\delta u)\ f_t(\delta(x-u))}$$

remarquons que

$$\boxed{f_t(\delta u)\ f_t(\delta(x-u)) = \mathrm{e}^{-\frac{t\delta^2}{2}\left(u^2+(x-u)^2\right)}}$$

d'après a) il existe $\alpha > 0$ tel que $u^2+(x-u)^2 \geq \alpha\left(u^2+x^2\right)$ donc

$$\boxed{f_t(\delta u)\ f_t(\delta(x-u)) \leq \mathrm{e}^{-\frac{t\delta^2}{2}\left(\alpha\left(u^2+x^2\right)\right)}}$$

Si on pose $\Phi : (x,u) \mapsto \varphi(u)\psi(x-u)$. Soit $\phi_1 : x \mapsto M_\varphi\mathrm{e}^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2}$ et $\phi_2 : x \mapsto M_\psi\mathrm{e}^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2}$ deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, on a alors

$$\boxed{|\Phi(x,u)| \leq \phi_1(x)\phi_2(u)}$$

Le résultat admis au début de la partie permet d'écrire

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi*\psi)(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\psi(x-u)du\right)dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\psi(x-u)dx\right)du\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-u)dx\right)du\end{aligned}$$

le changement de variable $x-u=v$ donne $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-u)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx$, par suite

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi*\psi)(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx.\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx}$$

c Soit $\omega\in\mathbb{R}$, posons $\varphi_0:x\mapsto \mathrm{e}^{-\omega x}\varphi(x)$ et $\psi_0:x\mapsto \mathrm{e}^{-\omega x}\psi(x)$. Avec les notations de la question b) on définies les fonctions suivantes :

$\phi_1:x\mapsto M_\varphi \mathrm{e}^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2-\omega x}$ et $\phi_2:x\mapsto M_\psi \mathrm{e}^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2-\omega x}$, qui sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Le résultat de la question b) appliqué à φ_0 et ψ_0 donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi_0*\psi_0)(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(x)dx.\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_0(x)dx$$

qui se traduit par

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\omega u}\varphi(u)\mathrm{e}^{-\omega(x-u)}\psi(x-u)du\right)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\omega x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\psi(x-u)du\right)dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\omega x}\varphi(x)dx.\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\omega x}\psi(x)dx\end{aligned}$$

Ainsi pour tout réel ω on a $\boxed{\widehat{(\varphi*\psi)}(\omega)=\widehat{\varphi}(\omega).\widehat{\psi}(\omega)}$.

Partie 4: Une suite de fonctions construite à partir du produit de convolution

On note E_1 l'ensemble des fonctions ψ de E telles que $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx=1$. Pour toute fonction ϕ de E_1, on considère la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ définie par $\phi_1=\phi$ et pour tout entier $n\geq 2$, $\phi_n=\phi_{n-1}*\phi_1$

1 Montrons le par récurrence sur n.

On a $\phi_1\in\mathsf{E}_1$, supposons que $\phi_n\in\mathsf{E}_1$, d'après la question 2) de la partie 3 on a $\phi_{n+1}=\phi_n*\phi_1\in\mathsf{E}$.

La question 4)b. donne

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{n+1}(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}(\phi_n*\phi_1)(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_n(x)dx.\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1(x)dx\\ &= 1\end{aligned}$$

donc $\phi_{n+1}\in\mathsf{E}$. D'où pour tout entier $n\geq 1$, $\phi_n\in\mathsf{E}_1$.

2 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question 2) de la partie 3 on a

$$\widehat{\phi_n}(x) = \widehat{\phi_{n-1} * \phi_1}(x) = \widehat{\phi_{n-1}}(x).\widehat{\phi_1}(x) = \widehat{\phi_n}(x).\widehat{\phi}(x)$$

par suite $\boxed{\widehat{\phi_n}(x) = \left(\widehat{\phi}(x)\right)^n}$.

3 On prend $\phi = \left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right) f_t$.

a Par récurrence sur $n \geq 1$.

- On a $\phi_1(x) = C_1(t)\ \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$ avec $C_1(t) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$.
- Supposons que $\phi_n(x) = C_n(t)\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}$, alors

$$\begin{aligned}
\phi_{n+1}(x) &= (\phi_n * \phi)(x) \\
&= \sqrt{\frac{t}{2\pi}} C_n(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\frac{u^2}{2n} - t\frac{(x-u)^2}{2}} du \\
&= \sqrt{\frac{t}{2\pi}} C_n(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2n}((n+1)u^2 - 2nux + nx^2} du
\end{aligned}$$

simplifions l'exposant

$$t\frac{u^2}{2n} + t\frac{(x-u)^2}{2} = \frac{t(n+1)}{2n}u^2 - tux + \frac{t}{2}x^2$$

la question 2) de la partie 2 nous donne, avec $a = \frac{t(n+1)}{2n}$ et $\Delta = -\frac{t^2x^2}{n}$

$$\phi_{n+1}(x) = C_n(t)\sqrt{\frac{n}{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{-tx^2}{2(n+1)}}$$

Nous obtenons le résultat pour $n+1$ avec $C_{n+1}(t) = C_n(t)\sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

- Cette relation permet d'avoir $C_n(t) = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}\dots\sqrt{\frac{1}{2}}C_1(t)$ par suite $C_n(t) = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}}$
- Finalement on a pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\phi_n(x) = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}}$.

b Soit $n \geq 1$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u\sqrt{\frac{t}{n}}x}\phi_n(x)dx = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u\sqrt{\frac{t}{n}}x}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}dx$$

le changement de variable $s = \sqrt{\frac{t}{n}}x$ donne

$$\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-us}\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}ds = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(s+u)^2}{2}}ds$$

et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(s+u)^2}{2}} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

ainsi $\boxed{\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}u^2}}$

4 Soit ϕ un élément quelconque de E_1. On pose pour tout entier naturel non nul n

$$M_{n,1} = \int_{-\infty}^{+\infty} u\phi_n(u)du, \quad M_{n,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\phi_n(u)du \ \text{ et } V_n = M_{n,2} - M_{n,1}^2$$

a La question 3) de la partie 3 permet d'établir par récurrence que $\widehat{\phi_n}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ de plus $M_{n,1} = -\left(\widehat{\phi_n}\right)'(0)$ et $M_{n,2} = \left(\widehat{\phi_n}\right)''(0)$.

Donc $\widehat{\phi_n}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$\widehat{\phi_n}(t) = 1 + \left(\widehat{\phi_n}\right)'(0)t + \frac{1}{2}\left(\widehat{\phi_n}\right)''(0)t^2 + o(t^2) = 1 - M_{1,n}t + \frac{1}{2}M_{2,n}t^2 + o(t^2).$$

b On a la relation $\widehat{\phi_n}(t) = \left(\widehat{\phi}(t)\right)^n$ et

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\phi}(t)\right)^n &= \left(1 - M_{1,1}t + \frac{1}{2}M_{2,1}t^2 + o(t^2)\right)^n \\ &= 1 - nM_{1,1}t + \left(\frac{n}{2}M_{2,1} + \frac{n(n-1)}{2}M_{1,1}^2\right)t^2 + o(t^2).\end{aligned}$$

Par unicité du D.L, on en déduit : $M_{1,n} = nM_{1,1}$ et $M_{2,n} = nM_{2,1} + n(n-1)M_{1,1}^2$,

donc $V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2 = nM_{2,1} - nM_{1,1}^2 = nV_1$, ainsi $\boxed{M_{1,n} = nM_{1,1} \ \text{ et } \ V_n = nV_1}$.

5 Si $M_{1,1} = 0$ alors $\widehat{\phi_n}(t) = \left(1 + \frac{1}{2}M_{2,1}t^2 + o(t^2)\right)^n$.
Soit $t \in \mathbb{R}$, pour n assez grand on a

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \left(1 + \frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\lim_{n\to\infty} \widehat{\phi_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(\frac{M_{2,1}t^2}{2}\right)}$.

FIN

CONCOURS NATIONAL COMMUN
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2
SESSION 2024 - FILIÈRE MP

Durée: 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

EXERCICE
Noté 4 points sur 20

1 On désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ a base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par I_3 la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On considère dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 **2.a** Vérifier que $PQ = 4\mathrm{I}_3$.

2.b En déduire que P est une matrice inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

3 On considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.a Montrer que u est un vecteur propre de la matrice A dont on précisera la valeur propre α correspondante.

3.b Montrer que v et w sont deux vecteurs propres de la matrice A associés à la même valeur propre β dont on précisera sa valeur.

3.c Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à préciser telle que $A = PDP^{-1}$.

4 **4.a** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, A^n = PD^nP^{-1}$.

4.b Déterminer, pour tout entier naturel n, D^n en fonction de n.

4.c En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n sous forme d'un tableau.

PROBLÈME.

Dans tout le problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n, $n \geq 1$ et par $\mathscr{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}, GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$ où id_E désigne l'application identité de E. On note $\chi_f(X) = \det(X\ \mathrm{id}_E - f)$ le polynôme caractéristique de f et on rappelle que $\chi_f(f) = 0$ où 0 désigne l'application nulle de E. Pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra introduire le polynôme caractéristique de M défini par $\chi_M(X) = \det(X\mathrm{I}_n - M)$.
On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0$, le plus petit entier naturel non nul p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f.

Partie 1: Noyaux itérés

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, on note pour tout entier naturel $k, \mathcal{N}_k = \mathrm{Ker}\left(f^k\right)$ et $\mathcal{I}_k = \mathrm{Im}\left(f^k\right)$.

1 Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

2 En déduire que $(\dim\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

3 Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.

4 Montrer que $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.

5 Montrer que $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E$,

6 On considère pour tout entier naturel k, φ_k la restriction de f a $\mathcal{I}_k$.

6.a Montrer que $\dim\mathcal{I}_k - \dim\mathcal{I}_{k+1} = \dim\left(\mathrm{Ker}(f\ ) \cap \mathcal{I}_k\right)$.

6.b En déduire que la suite $(\dim\mathcal{N}_{k+1} - \dim\mathcal{N}_k\ )_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

Soit U une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n-1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé a U.

1 Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\operatorname{Im}(u^r)$.

1.a Vérifier que $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(u^{s+r})$.

1.b Montrer que $\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}(u^s)$.

1.c Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\operatorname{Ker}(u^r)) + \dim(\operatorname{Ker}(u^s))$.

1.d En déduire que pour tout entier naturel $i, \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^i\right)\right) \leq i$.

2 On suppose de plus que $U^n = 0$.

2.a Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n, \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^i\right)\right) = i$.

2.b Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n.

2.c En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathscr{B}_e = \left(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e)\right)$ soit une base de E.

2.d Ecrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}_e$.

3 Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$ sont semblables.

Partie 3 : Réduction d'un endomorphisme particulier

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathscr{L}(E)$ vérifiant $\left(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est libre.
On considère $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$.
Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \operatorname{Ker}\left((f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k}\right)$

1 Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f.

2 Montrer que $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$.

3 Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on considère l'endomorphisme φ_k de F_k tel que, pour tout $x \in F_k$, $\varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.

3.a Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

3.b Déterminer, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, la dimension de F_k.

3.c Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, l'indice de nilpotence de φ_k est m_k.

4 Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, tel que chaque bloc est une matrice de $\mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ de la forme $A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$.

Partie 4: Cycles

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

- $f^p(x_0)=x_0$.
- $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux a deux.

On dit alors que la famille $\left(x_0, f(x_0) \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est un $p-$ cycle de f.

1 Soit $\left(x_0, f(x_0), \ldots ., f^{p-1}(x_0)\right)$ un $p-$ cycle de f.

1.a Montrer que $f^p=\mathrm{id}_E$.

1.b Montrer que l'ensemble $F_{x_0}=\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\right) \text{ est une famille libre}\right\}$ admet un maximum noté γ.

1.c **i)** Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$, ,$f^k(x_0) \in \operatorname{Vect}\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{\gamma-1}(x_0)\right)$.

ii) Montrer que $\gamma=n$.

iii) Déterminer le nombre des valeurs propres distinctes de f.

2 Soit $\mathscr{B}_{x_0}=\left(x_0, f(x_0) \ldots \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ un n-cycle de f.

2.a Justifier que $\mathscr{B}_{x_0}$ est une base de E.

2.b Déterminer la matrice G de l'endomorphisme f dans la base B_{x_0}.

2.c On pose $\omega=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k=\begin{pmatrix} \overline{\omega}^{k} \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$, où $\overline{\omega}$ désigne le conjugué de ω.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, vérifier que U_k est un vecteur propre de G associé à une valeur propre α_k à déterminer.

3 Soit $M=(m_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,l}=\overline{\omega}^{kl}$. On note $\overline{M}=(\overline{m}_{k,l})_{1\leq k,l\leq n'}$ où $\overline{m}_{k,l}$ est le conjugué de $m_{k,l}$.

3.a Calculer $M\,\overline{M}$.

3.b En déduire que $M \in GL_n(C)$ et calculer M^{-1}

4 Soit $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $H=\begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \ldots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$.

4.a Montrer que H est diagonalisable.

4.b Déterminer les valeurs propres de H et une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de H.

Partie 5 : La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel des matrices nilpotentes

On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée seulement par des 0 . On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Déterminer la dimension de $\mathcal{T}$.

2 Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice appartenant à $\mathcal{T}$.

3 Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}$.

4 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ telle que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$. Montrer que $\dim\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F\right) > 0$.

5 En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Concours National Commun

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 2

Session 2024 - Filière MP

Exercice

1

1.a On vérifie que : $PQ = 4I_3$.

1.b Donc $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$.

2

2.a On a $Au = u$ donc $\alpha = 1$.

2.b On a $Av = 2v$ et $Aw = 2w$ donc $\beta = 2$.

2.c On a $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$, $\dim E_1(A) = 1$ et $\dim E_2(A) = 2$, donc $E_1(A) \oplus E_2(A) = \mathbb{R}^3$ par suite A est diagonalisable .

Soit P est la matrice de passage de la base canonique vers la base des vecteurs propres .

Soit $D = \mathrm{Diag}(1, 2, 2)$, on a alors $A = PDP^{-1}$.

3

3.a C'est vrai pour 1, supposons le pour n , alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A.A^n \\ &= \left(PDP^{-1}\right)\left(PD^nP^{-1}\right) \\ &= \left(PD^{n+1}P^{-1}\right) \end{aligned}$$

d'où le résultat pour $n+1$. D'où pour tout entier n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

3.b On a $D^n = \mathrm{Diag}(1, 2^n, 2^n)$.

3.c Après calcul on trouve $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+1 & 1-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2 & 2^{n+1}-2 \\ 1-2^n & 1-2^n & 3\times 2^n - 1 \end{pmatrix}$

Problème.

Partie 1: Noyaux itérés

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, on note pour tout entier naturel $k, \mathcal{N}_k = \operatorname{Ker}(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \operatorname{Im}(f^k)$.

1 Le noyau etl'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.

- Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathcal{N}_k$. On a $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \mathcal{N}_{k+1}$. D'où $\boxed{\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+1}}$.
- Soit $y \in \mathcal{I}_{k+1}$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$. Pour $a = f(x) \in E$ on a alors $f^k(a) = f^{k+1}(x) = y$ et donc $y \in \mathcal{I}_k$. Ainsi $\boxed{\mathcal{I}_{k+1} \subset \mathcal{I}_k}$.

2 Soit $k \in \mathbb{N}$. $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+1}$ implique $\dim\mathcal{N}_k \leq \dim\mathcal{N}_{k+1}$ donc la suite $(\dim\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- Comme $(\dim\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels croissante et majorée par n, celle-ci est nécessairement constante à partir d'un certain rang $k_0 \leq n$.
- Soit $A = \{k \in [\![0; n]\!] \mid \dim\mathcal{N}_k = \dim\mathcal{N}_{k+1}\}$. A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc elle possède un plus petit élément q.

On a $\mathcal{N}_q \subset \mathcal{N}_{q+1}$ et $q \in A$ donc $\dim \mathcal{N}_q = \dim \mathcal{N}_{q+1}$ par suite $\boxed{\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}}$.

3 On a $\mathcal{I}_{q+1} \subset \mathcal{I}_q$ et $\dim \mathcal{I}_a = n - \dim \mathcal{N}_q = n - \dim \mathcal{N}_{q+1} = \dim \mathcal{I}_{q+1}$ donc $\boxed{\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}}$.

4 Soit $x \in \mathcal{N}_q \cap \mathcal{I}_q$. Il existe $a \in E$ tel que $x = f^q(a)$et $f^q(x) = 0$donc $f^{q+1}(a) = 0$ d'où $a \in \mathcal{N}_{q+1} = \mathcal{N}_q$ par suite $x = f^q(a) = 0$. Ainsi $\mathcal{N}_q \cap \mathcal{I}_q = \{0\}$. De plus, par le théorème du rang : $\dim \mathcal{N}_q + \dim \mathcal{I}_q = \dim E$ donc $\boxed{\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E}$.

5 Pour tout entier naturel k, $\mathcal{I}_k$ est un sous espace stable de E soit $\varphi_k = f_{|\mathcal{I}_k} \in \mathscr{L}(\mathcal{I}_k)$.

5.a Le théorème du rang donne $\dim\mathcal{I}_k = \dim\operatorname{Ker}(\varphi_k) + \dim\operatorname{Im}(\varphi_k)$.

On a :

- $\operatorname{Im}(\varphi_k) = \varphi_k(\mathcal{I}_k) = f(\mathcal{I}_k) = \mathcal{I}_{k+1}$.
- $\operatorname{Ker}(\varphi_k) = \{x \in \mathcal{I}_k \mid \varphi_k(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{I}_k \mid f(x) = 0\}$ donc $\operatorname{Ker}(\varphi_k) = \mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f)$.

Ainsi $\dim\mathcal{I}_k = \dim(\mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f)) + \dim\mathcal{I}_{k+1}$ qui s'écrit $\boxed{\dim\mathcal{I}_k - \dim\mathcal{I}_{k+1} = \dim(\mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f))}$

5.b Par le théorème du rang on a

$$\boxed{(n - \dim\mathcal{N}_k) - (n - \dim\mathcal{N}_{k+1}) = \dim\mathcal{N}_{k+1} - \dim\mathcal{N}_k = \dim(\mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f))}$$

On sait que $\mathcal{I}_{k+1} \subset \mathcal{I}_k$ donc $\dim(\mathcal{I}_{k+1} \cap \operatorname{Ker}(f)) \leq \dim(\mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f))$, par suite on a

$$\boxed{\dim\mathcal{N}_{k+2} - \dim\mathcal{N}_{k+1} \leq \dim\mathcal{N}_{k+1} - \dim\mathcal{N}_k}$$

Donc la suite $(\dim\mathcal{N}_{k+1} - \dim\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

Soit U une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n-1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé a U.

1 Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\mathrm{Im}\,(u^r)$.

1.a On a $\mathrm{Im}(v) = v(\mathrm{Im}\,(u^r)) = u^s(\mathrm{Im}\,(u^r)) = \mathrm{Im}\,(u^{s+r})$.

1.b On a $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}\,(u^r) \cap \mathrm{Ker}\,(u^s) \subset \mathrm{Ker}\,(u^s)$.

1.c De la question a) on a $\dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim(\mathrm{Im}(u^{s+r}))$, le théorème du rang donne :

$$\boxed{\mathrm{dimIm}(u^{s+r}) + \mathrm{dimKer}(u^{s+r}) = n \text{ et } \mathrm{dimIm}(v) + \mathrm{dimKer}(v) = \mathrm{dimIm}(u^r)}$$

donc

$$\boxed{n - \mathrm{dimKer}(u^{s+r}) = \mathrm{dimIm}(u^r) - \mathrm{dimKer}(v)}$$

comme $\mathrm{dimIm}(u^r) = n - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(u^r))$ alors

$$\boxed{\mathrm{dimKer}(u^{s+r}) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(u^r)) + \mathrm{dimKer}(v)}$$

$\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}\,(u^s)$ donc $\mathrm{dimKer}(v) \leq \mathrm{dimKer}\,(u^s)$ ainsi $\boxed{\dim\,(\mathrm{Ker}\,(u^{r+s})) \leq \dim\,(\mathrm{Ker}\,(u^r)) + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(u^s))}$.

1.d On prouve le résultat demandé par récurrence sur i.

- Initialisation : le résultat est vrai pour $i = 1$ car v est de rang $n-1$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$.
- Hérédité : soit $i \in [\![0; n-1]\!]$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang i.

La question précédente indique que

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+1})) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u^i)) + \dim(\mathrm{Ker}(u))}$$

Comme u est de rang $n-1$ alors $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension 1et l'hypothèse de récurrence donne

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+1})) \leq i+1}$$

ce qui prouve le résultat au rang $i+1$.

Si $i \geq n+1$ le résultat est évident . Ainsi pour tout i dans $\mathbb{N}$, $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u^i)) \leq i}$.

2

2.a On a $U^n = 0$, donc $u^n = 0$ et $u^i = 0$ $\forall i \geq n$ par suite $\dim(\mathrm{Ker}(u^i)) = n \quad \forall i \geq n$.

On prouve le résultat demandé par récurrence sur i.

- Initialisation : le résultat est vrai pour $i = 1$.
- Hérédité : soit $i \in [\![0; n-1]\!]$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang i.

D'après la partie 1 la suite $(\dim(\mathrm{Ker}(u^i)))_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante , donc

$$\boxed{i = \dim(\mathrm{Ker}(u^i)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u^{i+1})) \leq i+1}$$

Si $\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+1})) < i+1$ alors forcement

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u^i)) = \dim(\mathrm{Ker}(u^{i+1}))}$$

par suite $\mathrm{Ker}(u^i) = \mathrm{Ker}(u^{i+1})$.

Remarquons que si $x \in \mathrm{Ker}(u^{i+2})$ alors $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^{i+1}) = \mathrm{Ker}(u^i)$ et $u^{i+1}(x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u^{i+1})$, ainsi $\mathrm{Ker}(u^{i+2}) \subset \mathrm{Ker}(u^{i+1})$ d'où $\mathrm{Ker}(u^{i+2}) = \mathrm{Ker}(u^{i+1})$.

Par récurrence on a donc $\mathrm{Ker}(u^i) = \mathrm{Ker}(u^{i+1}) = ... = \mathrm{Ker}(u^n) = E$ ce qui est absurde .

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+1})) = i+1$. D'où le résultat pour $i+1$.

Ainsi on a $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u^i)) = i}$.

2.b Soit i dans $[\![0;n-1]\!]$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u^i)) = i$, donc $u^i \neq 0$.

Ainsi on a $u^n = 0$ et pour tout $i \leq n-1$ $u^i \neq 0$ donc l'indice de nilpotence de u est égal à n.

2.c On a $u^{n-1} \neq 0$, il existe donc $e \in E \setminus \{0\}$ tel que $u^{n-1}(e) \neq 0$.

Montrons que $(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e))$ est libre. Pour cela, on suppose que

$$\boxed{\alpha_0 e + \alpha_1 u(e) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(e) = 0}$$

En composant par u^{n-1}, on a alors

$$\boxed{\alpha_0 u^{n-1}(e) + \alpha_1 u^n(e) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{2n-2}(e) = 0}$$

Puisque $u^k = 0$ pour tout $k \geq n$ alors $\alpha_0 u^{n-1}(e) = 0$ ainsi $\alpha_0 = 0$.

A chaque fois on compose par $u^{n-2}, u^{n-3}, ..., u$, on obtient par un processus récurrent $\alpha_1 = \alpha_{21} = ... = \alpha_{n-1} = 0$.

La famille $\mathscr{B}_e$ est donc libre et possède $n = \dim(E)$ éléments donc c'est une base de E.

2.d La matrice de u dans la base $\mathscr{B}_e$ est donnée par $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

3 Soit A et B deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$, posons f_A et f_B les endomorphismes de E canoniquement associé à A et B , il existe donc deux bases $\mathscr{B}_e$ et $\mathscr{B}_{e'}$ de E dans lesquelles les matrices de f_A et def_B sont identiques à la matrice de la question d) , ce qui prouve que A et B sont semblables .

Partie 3 : Réduction d'un endomorphisme particulier

1 Soit $1 \leq k \leq p$, on sait que $f \circ (f - \lambda_k)^{m_k} = (f - \lambda_k)^{m_k} \circ f$ donc $\mathrm{Ker}\left((f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k}\right)$ est stable par f .

2 Les p polynômes $(\lambda_k - X)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux, on déduit par le théorème de décomposition des noyaux, que

$$\operatorname{Ker} \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k \mathrm{id}_E - f)^{m_k} = \operatorname{Ker}\left((\lambda_1 \mathrm{id}_E - f)^{m_1}\right) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}\left((\lambda_p \mathrm{id}_E - f)^{m_p}\right)$$

et d'après le théorème de Cayley Hamilton on a $\operatorname{Ker} \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k \mathrm{id}_E - f)^{m_k} = \operatorname{Ker}(\chi_f(f)) = E$.

Ainsi on a $\boxed{E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p}$.

3 Pour tout entier $k \in [\![0, p]\!]$, posons $\varphi_k = f_{|F_k} - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k} \in \mathscr{L}(F_k)$, on a pour tout $x \in F_k, \varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.

3.a Soit $k \in [\![0, p]\!]$, pour tout x dans F_k on a $\varphi_k^{m_k}(x) = (f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k}(x) = 0$ donc $\varphi_k^{m_k} = 0$ et φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .

3.b Remarquons que $\varphi_k = f_{|F_k} - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$ et $(X - \lambda_k)^{m_k}$ est un polynôme annulateur de $f_{|F_k}$ donc $\mathrm{Sp}(f_{|F_k}) = \{\lambda_k\}$,on en déduit que $\chi_{f_{|F_k}}(X) = (X - \lambda_k)^{\dim F_k}$.

F_k est un sous espace stable par f donc $\chi_{f_{|F_k}} | \chi_f$, ce qui donne $\dim F_k \leq m_k$.

Le degré du polynôme caractéristique χ_f est égale à $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ et on a aussi $\dim F_1 + \dim F_2 + \ldots + \dim F_p = n$, si on suppose qu'il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $\dim F_i < m_i$ alors $\dim F_1 + \ldots + \dim F_p < m_1 + \cdots + m_p$ ce qui est absurde , ainsi pour tout k dans $[\![1, p]\!]$ on a $\boxed{\dim F_k = m_k}$.

3.c Montrons que $\varphi_k^{m_k - 1} \neq 0$. Supposons par l'absurde que que $\varphi_k^{m_k - 1} = 0$ et considérons le polynôme

$$Q(X) = (X - \lambda_k)^{m_k - 1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i} = \frac{\chi_f(X)}{\lambda_k - X}$$

On a

$$Q(f) = (f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k - 1} \circ \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i} \right)$$

Les polynômes d'un même endomorphisme commutent , donc pour tout $x \in F_k$ on a

$$Q(f)(x) = \left[\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i} \right) \right] \left(\varphi_k^{m_k - 1}(x) \right) = 0$$

et pour tout $x \in F_j$ avec $j \neq k$ on a

$$Q(f)(x) = \left[(f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k - 1} \circ \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,\ i \neq j}}^{p} (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i} \right) \right] \left(\varphi_j^{m_j}(x) \right) = 0$$

Comme $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, on a alors pour tout $x \in E$ il existe $(x_1, ..., x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tels que $x = x_1 + ... + x_p$, donc $Q(f)(x) = Q(f)(x_1) + ... + Q(f)(x_p) = 0$.

Ainsi $Q(f) = 0$ avec Q de degré $n - 1$, $Q(f)$ est donc une combinaison linéaire non nulle de $(\mathrm{id}_E, f, \cdots, f^{n-1})$ ce qui est contraire à l'hypotèse stipulant que $(\mathrm{id}_E, f, \cdots, f^{n-1})$ est une partie libre. Donc $\varphi_k^{m_k-1} \neq 0$.

On en déduit que pour tout entier k dans $[\![1,p]\!]$, l'indice de nilpotence de φ_k est m_k.

4 Pour tout entier k dans $[\![1,p]\!]$, $\varphi_k \in \mathscr{L}(F_k)$ est nilpotente d'ordre $m_k = \dim F_k$, d'après la partie 2 la matrice de φ_k dans une base $\mathscr{B}_{e_k}$ de F_k est de la forme

$$Mat_{\mathscr{B}_{e_k}}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{C})$$

comme $f_{|F_k} = \varphi_k - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$ alors sa matrice dans la base $\mathscr{B}_{e_k}$ est de la forme

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Soit $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{e_1} \cup \mathscr{B}_{e_2} \cup ... \cup \mathscr{B}_{e_p}$ la base de E adaptée à la somme directe $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs de la forme $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Diag}(\ A_1, A_2, ...A_p)$.

Partie 4: Cycles

1 Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un $p-$ cycle de f.

1.a Pour tout entier k dans $[\![1,p-1]\!]$ on a $f^p(f^k(x_0)) = f^k(f^p(x_0)) = f^k(x_0)$, comme $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E alors $f^p(x) = x$ pour tout $x \in E$, ainsi $\boxed{f^p = \mathrm{id}_E}$.

1.b E est de dimension n, par conséquent, une partie libre de E a au plus n éléments. De plus $x_0 \neq 0$ donc $1 \in F_{x_0}$. Ainsi F_{x_0} est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ donc elle admet un maximum noté γ.

1.c

i) Montrons par récurrence que $\forall k \geq \gamma \quad f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$.

- $\gamma + 1 \notin F_{x_0}$ donc $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0), f^{\gamma}(x_0))$ est liée, comme $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$ est libre alors

$$f^{\gamma}(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$$

- Supposons que $f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$, alors

$$f^{k+1}(x_0) \in \mathrm{Vect}(f(x_0), f^2(x_0), \cdots, f^{\gamma}(x_0))$$

et comme

$$f^{\gamma}(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$$

on a bien

$$f^{k+1}(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0)).$$

Finalement pour tout entier $k \geq \gamma$, $\boxed{f^k(x_0) \in \text{Vect}\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{\gamma-1}(x_0)\right)}$.

ii) $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est une famille génératrice de E et

$$\forall k \geq \gamma,\ f^k(x_0) \in \text{Vect}\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{\gamma-1}(x_0)\right)$$

donc

$$E = \text{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0)) = \text{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$$

comme $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$ est libre alors c'est une base de E et $\dim E = n = \gamma$.

iii) D'après la question a) $f^p = \text{id}_E$ avec $p = n = \gamma$, donc $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de f , par suite le polynôme minimal π_f divise $X^n - 1$.

Posons

$$\pi_f(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + ... + a_0 \text{ avec } d \leq n$$

on a alors

$$f^d(x_0) + a_{d-1}f^{d-1}(x_0) + ... + a_0x_0 = 0$$

donc la famille $(x_0, f(x_0), \cdots, f^d(x_0))$ est liée, par suite $d+1 \notin F_{x_0}$ et forcement $d+1 > n$, ainsi $d = n$.

On sait que les valeurs propre de f sont exactement les racines de π_f , donc

$$\text{Sp}(f) = \left\{e^{2ik\pi}, k \in [\![1, n]\!]\right\}$$

et f admet n valeurs propres distinctes .

1.a Soit $\mathscr{B}_{x_0} = \left(x_0, f(x_0) \ldots\ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ un n-cycle de f , ce qui signifie $\mathscr{B}_{x_0}$ est une famille génératrice de E de cardinal $n = \dim E$ donc elle constitue une base de E.

1.b On a $f(f^{j-1}(x_0)) = \begin{cases} f^j(x_0) \text{ si } 1 \leq j \leq n-2 \\ x_0 \text{ si } j = n-1 \end{cases}$, ce qui donne

$$G = Mat_{\mathscr{B}_{x_0}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.c Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a $GU_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^{nk} \\ \overline{\omega}^{k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \overline{\omega}^{k} U_k$. Donc U_k est un vecteur propre de G associé à la valeur propre $\overline{\omega}^{k}$.

2 Soit $M = (m_{k,\ell})_{1\le k,\ell \le n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,\ell} = \overline{\omega}^{k\ell}$. On note $\overline{M} = (\overline{m}_{k,\ell})_{1\le k,\ell\le n}$, où $\overline{m}_{k,\ell}$ est le conjugué de $m_{k,\ell}$.

2.a Posons $M\,\overline{M} = (a_{k,\ell})_{1\le k,\ell\le n}$. Pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$ on a

$$\begin{aligned} a_{k,\ell} &= \sum_{j=1}^{n} m_{k,j}\overline{m}_{j,\ell} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{\omega}^{kj}\omega^{j\ell} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\omega^{\ell-k}\right)^j \end{aligned}$$

Si $\ell = k$ alors $a_{k,\ell} = n$ et si $\ell \neq k$ alors $a_{k,\ell} = \omega^{\ell-k}\dfrac{1-\left(\omega^{\ell-k}\right)^n}{1-\omega^{\ell-k}} = 0$ (car $\left(\omega^{\ell-k}\right)^n = (\omega^n)^{\ell-k} = 1$) .

On conclus que $\boxed{M\,\overline{M} = n\mathrm{I}_n}$.

2.b Ainsi $M \in GL_n(C)$ et $\boxed{M^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{M}}$.

3 Soit $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $H = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \ldots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$

3.a Remarquons que $G^2 = Mat_{\mathscr{B}_{x_0}}(f^2)$ et

$$Mat_{\mathscr{B}_{x_0}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de même pour tout $k \in [\![3, n-1]\!]$

$$G^k = Mat_{\mathscr{B}_{x_0}}(f^k) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \vdots \\ \leftarrow k \\ \vdots \\ \vdots \\ \leftarrow n \end{array}$$

Nous avons alors $H = b_0 I_0 + b_1 G + \dots + b_{n-1} G^{n-1}$.

Comme G admet n valeurs propres distinctes alors elle est diagonalisable, elle s'écrit de la forme $H = PDP^{-1}$ avec D matrice diagonale et P matrice inversible, par suite $G^k = PD^kP^{-1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, ainsi H est semblable à la matrice diagonale : $b_0 I_0 + b_1 D + \dots + b_{n-1} D^{n-1}$. H est donc diagonalisable .

3.b D'après la question 1) on a $D = \text{Diag}(\varpi, \varpi^2, \dots, \varpi^n)$, si on pose $Q(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_{n-1} X^{n-1}$alors H est semblable à la matrice $Q(D) = \text{Diag}\left(Q\left(\varpi\right), Q\left(\varpi^2\right), \dots, Q\left(\varpi^n\right)\right)$, ce qui donne

$\boxed{\text{Sp}(H) = \left\{Q\left(\varpi\right), Q\left(\varpi^2\right), \dots, Q\left(\varpi^n\right)\right\}}$ et on a $(U_1, \dots, U_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de H.

Partie 5 : La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel des matrices nilpotentes

1 Une base de $\mathcal{T}$ est la famille $(E_{ij})_{i>j}$ qui est est de cardinal $\frac{n(n-1)}{2}$ donc $\boxed{\dim\mathcal{T} = \dfrac{n(n-1)}{2}}$.

2 Soit M une matrice nilpotente, donc $\pi_M(X) = X^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne $\text{Sp}(M) = \{0\}$ et $\chi_M(X) = X^n$ qui est scindé , donc M est trigonalisable et elle est semblable à une matrice triangulaire de diagonale nulle .

3 On a $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T} = \{0\}$ donc la somme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{T}$ est directe et on a $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ alors $\dim\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \dim\mathcal{T} = n^2$ ce qui prouve que $\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}}$.

4 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ tel que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$.

Si on suppose que $\dim\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F\right) = 0$ alors $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et F sont en somme directe et

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus F) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(F)$$

on a $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$et $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$ donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus F) > n^2$, ce qui est absurde .

Ainsi $\boxed{\dim\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F\right) > 0}$.

5 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ tel que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$, d'après la question 4) on a $\dim\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F\right) > 0$.

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F$, M est symétrique et réelle donc diagonalisable et elle est nilpotente donc $\text{Sp}(M) = \{0\}$,on en déduit que $M = 0$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F = \{0\}$ ce qui est absurde.

Ainsi tout sous-espace vectoriel F de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ vérifie $\dim(F) \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Or $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ et $\dim(\mathcal{T}) = \frac{n(n-1)}{2}$, donc la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ est $\frac{n(n-1)}{2}$.

FIN

ARTS ET MÉTIERS ParisTech

ESTP PARIS
L'ECOLE DES GRANDS PROJETS

POLYTECH LILLE

E3A POLYTHECH

enscm CHIMIE Montpellier

ESTACA ECOLE D'INGENIEURS

ensait ROUBAIX
ECOLE D'INGENIEURS TEXTILE

E3A POLYTHECH

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2024 - FILIÈRE MP

Durée 4 heures

Le sujet est composé de quatre exercices tous indépendants .

Exercice 1

Pour tout réel x, on rappelle que la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif k vérifiant :

$$\boxed{k \leq x < k+1}$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0,1[$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y, la variable aléatoire définie par :

$$\boxed{Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor}$$

1 Représenter dans un repère orthonormal la fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.

2 Déterminer $Y(\Omega)$.

3 Soit k un entier naturel non nul.
Écrire l'événement $(Y = k)$ à l'aide d'événements $(X = j)$ où j est un entier naturel non nul.

4 Déterminer la loi de Y.

Exercice 2

1 **Question préliminaire.**

En utilisant l'égalité $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 .

On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\cos(n)}{n}$$

On note R son rayon de convergence.

2 Montrer que $R \geq 1$.

3 Prouver que la série de terme général $\cos(n)$ diverge.

4 En déduire la valeur de R.

On note alors, pour tout $x \in]-R, R[\,,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n} x^n$.

5 Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière définie par : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{in} x^n$, où i désigne le nombre complexe usuel tel que $i^2 = -1$.

6 En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

7 Déterminer alors une expression de la somme de la série entière proposée à l'aide de fonctions usuelles.

8 En déduire le rayon de convergence et la somme $g(x)$ de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n$.

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^\top = 3A^2 - A - I_n$ où $A^\top$ désigne la matrice transposée de la matrice A.

1 Démontrer que la matrice $B = 3A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.

2 Montrer que les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.

On pourra étudier le signe de $Y^\top BY$ *pour un vecteur* Y *de* $\mathbb{R}^n$.

3 Montrer que l'on a : $A = 3\left(A^\top\right)^2 - A^\top - I_n$.

4 En déduire que le polynôme $P(X) = \left(3X^2 - X - 1\right)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A.

5 Déterminer un polynôme unitaire annulateur de $A^\top$.

6 Factoriser P en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

7 La matrice A est-elle inversible?

8 Établir que la matrice A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.

9 Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé.Montrer que V est aussi vecteur propre de $A^\top$.

10 On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P.

On appelle $\mathscr{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associés à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ de $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2, \quad L_i\left(\alpha_j\right) = \delta_{i,j} \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{(symbole de Kronecker).}$$

10.1 Déterminer L_1 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

10.2 Vérifier que $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

10.3 Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme R dans la base $\mathscr{L}$.

11 **Étude des puissances de A**

11.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

11.1.1 Exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P dans la base $\mathscr{L}$.

11.1.2 En déduire une expression de A^k.

11.2 Démontrer que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.

Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice A et des $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$.

Exercice 4

Questions préliminaires

1 Démontrer qu'une fonction f de classe C^1 sur un segment J est lipschitzienne sur J.

2 Démontrer qu'une fonction k-lipschitzienne sur un intervalle I est uniformément continue sur cet intervalle.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que : $\forall g \in F, \|g\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\mathrm{d}t$ et $\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ définissent des normes respectivement sur les espaces F et E.

Soient $g \in F$ et $f \in E$.

3 Montrer que la fonction

$$\boxed{x \mapsto (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t}$$

est bien définie sur $\mathbb{R}$.

4 Démontrer que $f \star g = g \star f$.

5 On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

5.1 Représenter la fonction f_1 dans un repère orthonormal.

5.2 La fonction f_1 est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

6 **Étude de $f_1 \star g$.**

6.1 Montrer que $f_1 \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

6.2 Si g est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, prouver que la fonction $f_1 \star g$ est uniformément continue sur$\mathbb{R}$.

6.3 Démontrer que pour tout x réel :

$$\boxed{(f_1 \star g)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(u)\mathrm{d}u}$$

6.4 Si g est continue sur $\mathbb{R}$, prouver que $f_1 \star g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

7 **Étude de $f_1 \star f_1$.**

7.1 Justifier que $f_1 \star f_1$ existe.

7.2 Déterminer l'expression de $(f_1 \star f_1)(x)$ suivant les valeurs du réel x.

7.3 Représenter la fonction $f_1 \star f_1$ dans un repère orthonormal.

7.4 La fonction $f_1 \star f_1$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

8 Soit α un réel strictement positif.

On note h_α la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} f_1\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

8.1 Représenter graphiquement la fonction h_2 dans un repère orthonormal.

8.2 Vérifier que l'on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x)\mathrm{d}x = 1$.

8.3 Soit x_0 un point en lequel la fonction g est continue.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} (h_\alpha \star g)(x_0) = g(x_0)$.

9 Étude d'une norme subordonnée.

9.1 Montrer que pour tout h dans E : $\|h \star g\|_\infty \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty$.

9.2 Montrer que l'endomorphisme Φ de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ qui à tout h associe à $h \star g$ est continu.

9.3 En déduire une majoration de $|||\Phi|||$ (norme subordonnée de Φ).

10

On suppose dans cette question que g est une fonction bornée, continue par morceaux et que f vérifie la propriété

$$\exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \text{ vérifiant } |x| \geq A, \quad f(x) = 0.$$

Montrer que $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

⋆ ⋆ ⋆ Fin du sujet ⋆ ⋆ ⋆

E3A POLYTHECH

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

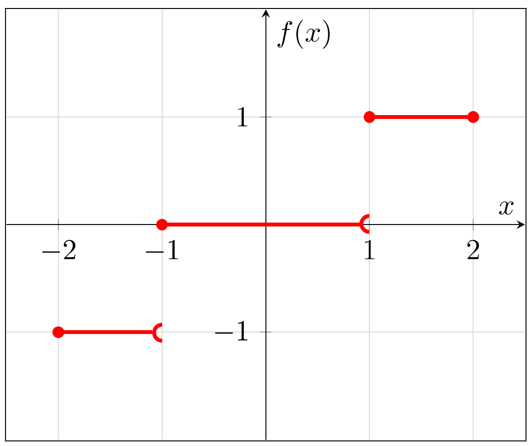
Session 2024 - Filière MP

Exercice 1

1 Soit $f : x \mapsto \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor$. On a

$$\left(\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = k\right) \Leftrightarrow k \leq \frac{x+1}{2} < k+1$$
$$\Leftrightarrow 2k-1 \leq x < 2k+1$$

La représentation graphique de f sur $[-2, 2]$ est :



2 $X \sim \mathcal{G}(p)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$Y(\Omega) = \left\{ \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} p & \text{si } k = 2p \\ p+1 & \text{si } k = 2p+1 \end{cases}$$

Ainsi

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

3 Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} (Y = k\ ) &= \left(\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = k \right) \\ &= \left(k \leq \frac{X+1}{2} < k+1 \right) \\ &= (2k - 1 \leq X < 2k+1) \\ &= (X = 2k-1) \cup (X = 2k) \end{aligned}$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (Y = k) = (X = 2k-1) \cup (X = 2k)$

4 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Les deux événements $(X = 2k - 1)$ et $(X = 2k)$ sont disjoints donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(X = 2k-1) + \mathbb{P}(X = 2k) \\ &= pq^{2k-2} + pq^{2k-1} \text{ (avec } q = 1 - p \text{)} \\ &= pq^{2k-2}(1+q) \\ &= \left(1 - q^2\right) \left(q^2\right)^{k-1} \end{aligned}$$

Ainsi $Y \sim \mathcal{G}\left(1 - q^2\right)$

Exercice 2

1 Par l'absurde, si $\cos(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\cos^2\left(\frac{n}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\cos(n) = 2\cos^2\left(\frac{n}{2}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$$

c'est une contradiction. Ainsi la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 .

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ donc $R \geq \mathrm{Rcv}(\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n})$, or $\mathrm{Rcv}(\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}) = 1$ donc $\boxed{R \geq 1}$.

3 D'après la question 1, $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \cos(n)$ diverge grossièrement .

4 On sait que la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$ et sa série dérivée $\sum\limits_{n\geq 1} \cos(n) x^{n-1}$ ont même rayon de convergence R.
La série $\sum\limits_{n\geq 1} \cos(n)$ diverge grossièrement donc la série entière dérivée diverge en $x = 1$; donc $R \leq 1$. Ainsi $\boxed{R = 1}$.

5 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{e}^{in} x^n = \left(x\mathrm{e}^i\right)^n$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathrm{e}^{in} x^n$ converge si et seulement si, $\left|x\mathrm{e}^i\right| < 1$, c'est-à-dire si et seulement si, $|x| < 1$. Donc $\mathrm{Rcv}(\sum\limits_{n\geq 0} \mathrm{e}^{in} x^n) = 1$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{in} x^n = \frac{1}{1 - x\mathrm{e}^i}}$.

6 Pour tout $x \in]-1, 1[$ non nul, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n) x^{n-1} \\
&= \frac{1}{x}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n) x^n - 1\right] \\
&= \frac{1}{x}\left[\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{in} x^n\right) - 1\right] \\
&= \frac{1}{x}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - x\mathrm{e}^i}\right) - 1\right] \\
&= \frac{\cos(1) - x}{x^2 - 2x\cos(1) + 1}.
\end{aligned}$$

comme $f'(0)=\cos(1)$ alors $\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad f'(x)=\dfrac{\cos(1)-x}{x^2-2x\cos(1)+1}}$.

7 Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$ on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+\int_0^x \frac{\cos(1)-t}{t^2-2t\cos(1)+1}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t-\cos(1)}{t^2-2t\cos(1)+1}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x\cos(1)+1\right). \end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad f(x)=-\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-2x\cos(1)+1\right)}$.

8 On montre comme en 4 que le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos(n)+\frac{1}{2}$ donc, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n}x^n &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{n}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n \\ &= \frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}\ln(1-x) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n}x^n=-\dfrac{1}{4}\ln\left(x^2-2x\cos(1)+1\right)-\dfrac{1}{2}\ln(1-x)}$

Exercice 3

1 On a

$$B = \left(3A^2 - A - I_n\right) A = A^\top A$$

donc $B^\top = \left(A^\top A\right)^\top = A^\top A = B$, ainsi $\boxed{B \text{ est symétrique réelle}}$.

2 La matrice B est symétrique réelle et, pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$Y^\top BY = Y^\top A^\top AY = (AY)^\top AY = \|AY\|_2^2 \geq 0$$

donc la matrice A est symétrique positive. Par caractérisation spectrale des matrices positives, on a $\boxed{\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+}$.

3 On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(A^k\right)^\top = \left(A^\top\right)^k$ donc, en transposant l'identité $A^\top = 3A^2 - A - I_n$, on obtient $\boxed{A = 3\left(A^\top\right)^2 - A^\top - I_n}$.

4 En remplaçant $A^\top$ par $3A^2 - A - I_n$ dans l'identité précédente, il vient :

$$\begin{aligned} A &= 3\left(3A^2 - A - I_n\right)^2 - \left(3A^2 - A - I_n\right) - I_n \\ &= 27A^4 - 18A^3 - 18A^2 + 7A + 3I_n \end{aligned}$$

après simplification on a $\boxed{9A^4 - 6A^3 - 6A^2 + 2A + I_n = 0}$ donc $9X^4 - 6X^3 - 6X^2 + 2X + 1$ est un polynôme annulateur de A.

On vérifie simplement que ce polynôme est égal à $\left(3X^2 - X - 1\right)^2 - X^2$.

Ainsi $\boxed{P(X) = \left(3X^2 - X - 1\right)^2 - X^2 \text{ annule } A}$.

5 Si P est un polynôme annulateur de A, alors P est annulateur de $A^\top$. Puisque son coefficient dominant est égal à 9 alors $\frac{1}{9}P$ est un polynôme annulateur unitaire de $A^\top$

6 Par une identité remarquable, on a :

$$P(X) = \left(3X^2 - 2X - 1\right)\left(3X^2 - 1\right)$$

donc $\boxed{P(X) = 9(X-1)\left(X + \frac{1}{3}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$.

7 On a $9A^4 - 6A^3 - 6A^2 + 2A + I_n = 0$ donc

$$A\left(-9A^3 + 6A^2 + 6A - 2I_n\right) = I_n$$

donc $\boxed{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} = -9A^3 + 6A^2 + 6A - 2I_n}$

8 P est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples donc A est diagonalisable .

Les valeurs propres de A sont parmi les racines de P, ainsi $\mathrm{Sp}(A) \subset \left\{1, -\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

9 On a

$$\begin{aligned} A^\top V &= \left(3A^2 - A - I_n\right) V \\ &= 3A^2V - AV - I_nV \\ &= 3\lambda^2 V - \lambda V - V \\ &= \left(3\lambda^2 - \lambda - 1\right) V \end{aligned}$$

et V est non nul car c'est un vecteur propre de A donc V est un vecteur propre de $A^\top$.

10 On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P.

10.1 On a

$$L_1(X) = \frac{(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)(X-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}$$

après simplification , il vient :

$$L_1(X) = \frac{9}{8}\left(X + \frac{1}{3}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

10.2 Soient c_1, c_2, c_3, c_3 des réels tels que $\sum_{i=1}^{4} c_i L_i(X) = 0$.

Pour tout $j \in [\![1, 4]\!]$ on a

$$\sum_{i=1}^{4} c_i L_i(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{4} c_i \delta_{i,j} = c_j = 0$$

Ainsi la famille (L_1, L_2, L_3, L_4) est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui est un espace de dimension 4, donc $\boxed{\mathscr{L} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X]}$.

10.3 Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$, soient c_1, c_2, c_3, c_3 des réels tels que $R(X) = \sum_{i=1}^{4} c_i L_i(X)$, alors pour tout $j \in [\![1,4]\!]$ on a

$$R(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{4} c_i L_i(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{4} c_i \delta_{i,j} = c_j$$

donc $\boxed{R = \sum_{i=1}^{4} R(\alpha_i) L_i(X)}$.

11

11.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

11.1.1 On effectue la division euclidienne de X^k par le polynôme P , il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $R \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$X^k = PQ + R$$

En évaluant cette égalité en les α_i, il vient :

$$\forall i \in [\![1,4]\!], \quad R(\alpha_i) = \alpha_i^k$$

d'après **10.3**, on a $\boxed{R(X) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^k L_i(X)}$.

11.1.2 Puisque P est annulateur de A, en évaluant l'identité $X^k = PQ + R$ en A, on obtient $\boxed{A^k = R(A) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^k L_i(A)}$.

11.2

- Puisque $\alpha_1 = 1$ et $|\alpha_i| < 1$ pour $i \in [\![2,4]\!]$ alors on a

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^k L_i(A) = L_1(A)$$

- Montrons que la limite est une matrice de projection.

Puisque A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P\text{diag}(1, \ldots, 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) P^{-1}$$

avec $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Alors

$$A^k = P\mathrm{diag}\left(1, \dots, 1, \lambda_1^k, \dots, \lambda_p^k\right) P^{-1} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \underbrace{P\mathrm{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)P^{-1}}_{M}$$

On a $M^2 = M$ donc $\boxed{\lim\limits_{k \to +\infty} A_k \text{ est une matrice de projection}}$.

Exercice 4

1 Soit $[a,b]$ est un segment et $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$, alors f' est continue sur $[a,b]$ donc f' est bornée sur $[a,b]$.

On note $\|f'\|_\infty$ la borne supérieure de $|f'|$ sur $[a,b]$.

L'inégalité des accroissements finis donne

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \left\|f'\right\|_\infty |x-y|$$

donc f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

2 Soit f une fonction k-lipschitzienne sur un intervalle I, avec $k > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k} > 0$. Alors pour tout $(x,y) \in I^2$,

$$|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k|x-y| = k\eta = \varepsilon$$

donc f est uniformément continue sur I.

3 **Produit de convolution :**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque f est continue et g est continue par morceaux, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f(x-t)g(t)| \leq \|f\|_\infty |g(t)|$$

comme $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ alors $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\forall (f,g) \in E \times F, \quad f \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

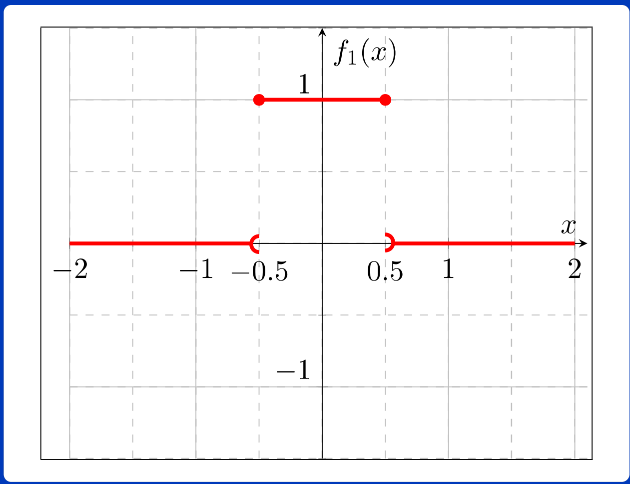
4 Soit $x \in \mathbb{R}$. Le changement de variable $u = x - t$, donne

$$(g \star f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\mathrm{d}u = (f \star g)(x)$$

Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $\boxed{f \star g = g \star f}$.

5 On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

5.1 La représentation graphique de la fonction f_1 est :



5.2 La fonction f_1 est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ mais n 'est pas continue, car elle est discontinue en $-\frac{1}{2}$ et en $\frac{1}{2}$.

6 Étude de $f_1 \star g$.

6.1 Puisque $f_1 \in E$ et $g \in F$, alors d'après la question 3 on a

$f_1 \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

6.2 Supposons que g est k-lipschitzienne. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, comme $f_1 \star g = g \star f_1$ alors on a :

$$\begin{aligned} |(f_1 \star g)(x) - (f_1 \star g)(y)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)g(x-t) - f_1(t)g(y-t)\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)(g(x-t) - g(y-t))| \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

l'expression de f_1 permet d'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)(g(x-t) - g(y-t))| \,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} |g(x-t) - g(y-t)|\mathrm{d}t$$

par suite

$$\begin{aligned}|(f_1\star g)(x)-(f_1\star g)(y)| &\leq \int_{-1/2}^{1/2}|g(x-t)-g(y-t)|\mathrm{d}t\\ &\leq \int_{-1/2}^{1/2}k|(x-t)-(y-t)|\mathrm{d}t\\ &\leq |x-y|\int_{-1/2}^{1/2}k\ \mathrm{d}t\\ &\leq k|x-y|\end{aligned}$$

Ainsi, $(f_1\star g)$ est k-lipschitzienne et donc $\boxed{f_1\star g \text{ est uniformément continue}}$.

6.3 Pour tout x réel, on a :

$$(f_1\star g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x-t)g(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

avec $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ la fonction caractéristique de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Comme

$$x-t\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\Leftrightarrow t\in\left[x-\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}\right]$$

alors : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad (f_1\star g)(x)=\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}g(t)\mathrm{d}t}$.

6.4 Si g est continue sur $\mathbb{R}$ alors elle admet une primitive G de classe $\mathscr{C}^1$surℝ.

D'après la question précédente et le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (f_1\star g)(x)=G\left(x+\frac{1}{2}\right)-G\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

ainsi par composition

$$f_1\star g\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$$

Par dérivation des fonctions composées, on a : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad (f_1\star g)'(x)=g\left(x+\frac{1}{2}\right)-g\left(x-\frac{1}{2}\right)}$.

7 Étude de $f_1\star f_1$.

7.1 On a $f_1\in E$ et f_1 est nulle en dehors du segment $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ sur lequel elle est continue; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $f_1\in E\cap F$ et, d'après la question 3 :

$$f_1\star f_1 \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.$$

7.2 D'après la question 6.3 , on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f_1 \star f_1)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)\mathrm{d}t$$

Distinguons les cas suivants

- Si $x < -1$ ou $x > 1$, $\left[x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}\right] \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \emptyset$ donc $(f_1 \star f_1)(x) = 0$.

- Si $-1 \leq x \leq 0$, on a $x + \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et $x - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$ donc

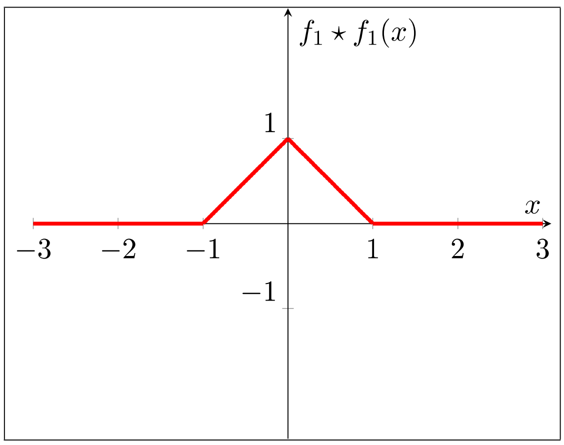
$$(f_1 \star f_1)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = x+1$$

- Si $0 < x \leq 1$, on a $x + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ et $x - \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ donc

$$(f_1 \star f_1)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)\mathrm{d}t = \int_{x-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = 1-x$$

Ainsi $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_1 \star f_1)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1+x & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

7.3 La représentation graphique de la fonction $f_1 \star f_1$ est



7.4 La fonction f_1 est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ $]-1,0[$ $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

Par ailleurs

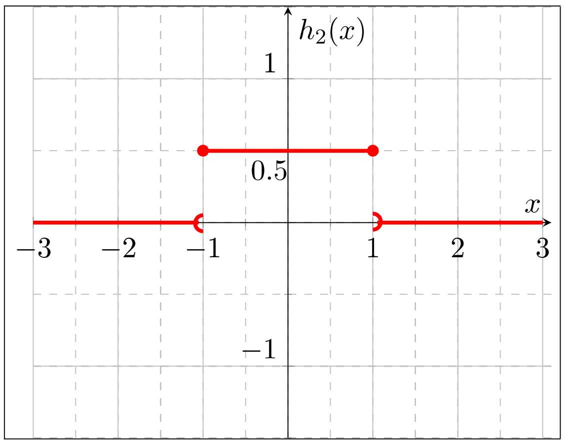
$$\begin{cases} f(-1)=0=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(f_1\star f_1\right)(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(1+x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(f_1\star f_1\right)(x) \\ f(0)=1=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(f_1\star f_1\right)(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f_1\star f_1\right)(x) \\ f(1)=0=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(f_1\star f_1\right)(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(f_1\star f_1\right)(x) \end{cases}$$

donc pour tout $a\in\{-1,0,1\}$ on a $f(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\left(f_1\star f_1\right)(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\left(f_1\star f_1\right)(x)$ donc $\left(f_1\star f_1\right)$ est continue en a , ainsi $f_1\star f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

8

8.1 $h_2 : x\in\mathbb{R}\mapsto \frac{1}{2}f_1(\frac{x}{2})$ donc pour tout $h_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{si } x\in[-1,1] \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$.

La représentation graphique de la fonction h_2 est :



8.2 h_α est nulle en dehors sur segment $\left[-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right]$ où elle est continue et constante égale à $\frac{1}{\alpha}$. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x)dx=\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\alpha}dx=\frac{\alpha}{\alpha}=1$$

Ainsi $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x)dx=1}$.

8.3 Soit x_0 un point de continuité de g.

Pour tout $\alpha>0$, par une méthode analogue à celle de la question 6.3 , on obtient

$$\left(h_\alpha\star g\right)(x_0)=\frac{1}{\alpha}\int_{x_0-\frac{\alpha}{2}}^{x_0+\frac{\alpha}{2}} g(t)dt$$

posons $G : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$, alors

$$(h_\alpha \star g)(x_0) = \frac{G\left(x_0+\frac{\alpha}{2}\right) - G\left(x_0-\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}$$

Puisque g est continue en x_0, le théorème fondamental de l'analyse assure que la fonction $x \mapsto \int_0^x g(t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en x_0 et de dérivée en x_0 égale à $g(x_0)$, comme

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt + \int_{-\infty}^{0} g(t)dt$$

et $\int_{-\infty}^{0} g(t)dt$ est une constante alors G est de classe $\mathscr{C}^1$ en x_0 et de dérivée en x_0 égale à $g(x_0)$, ainsi :

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{G\left(x_0+\frac{\alpha}{2}\right) - G\left(x_0-\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha} = g(x_0)$$

ce qui prouve $\boxed{\lim_{\alpha\to 0} (h_\alpha \star g)(x_0) = g(x_0)}$.

9

9.1 Soit $h \in E$ et $g \in F$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|(h\star g)(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)g(t)dt\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x-t)g(t)|dt$$

h est bornée sur $\mathbb{R}$, donc $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2\ |h(x-t)| \leq \|h\|_\infty$, par suite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x-t)g(t)|dt \leq \|h\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt = \|h\|_\infty \|g\|_1 .$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\|h\star g\|_\infty \leq \|h\|_\infty \|g\|_1}$.

9.2 Soit $g \in F$ fixée

- L'inégalité obtenue à la question précédente montre que $h\star g \in E$ pour tout $h \in E$, donc l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : E & \to & E \\ h & \mapsto & h\star g \end{array}$$

est bien définie .

La linéarité de l'intégrale assure la linéarité de Φ, donc Φ est un endomorphisme de E .

- L'inégalité obtenue à la question précédente s'écrit

$$\forall h \in E, \quad \|\Phi(h)\|_\infty \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty$$

donc Φ est une application linéaire continue sur $(E, \|.\|_\infty)$.

9.3 Puisque l'on a :

$$\forall h \in E, \quad \|\Phi(h)\|_\infty \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty$$

alors

$$|||\Phi||| = \sup \frac{\|\Phi(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} \leq \|g\|_1$$

10 Notons $U = [-A, A]$, on a U est un compact et $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash U$, f est donc bornée intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = \sup\limits_{t\in U} |f(t)|$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, supposons $|y - x| \leq 1$.

Les applications $t \mapsto f(x - t)$ et $t \mapsto f(y - t)$ sont intégrable sur $\mathbb{R}$, donc

$$\begin{aligned}|(f \star g)(x) - (f \star g)(y)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)|\, |g(t)|\, dt \\ &\leq \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)|\, dt \quad (*)\end{aligned}$$

par le changement de variable $u = y - t$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y+u) - f(u)|\, du$$

L'ensemble D des points de discontinuité de f est de cardinal fini donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y+u) - f(u)|\, du = \int_{\mathbb{R}\backslash D} |f(x-y+u) - f(u)|\, du \; (**)$$

L'application $(v, u) \mapsto |f(v + u) - f(u)|$ vérifie :

$$|f(v+u) - f(u)| \underset{v\to 0}{\to} 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}\backslash D$$

et

$$|f(v+u) - f(u)| \leq \begin{cases} 2\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| & \text{si } u \in [-A-1, A+1] \text{ et } v \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } u \in \mathbb{R}\backslash[-A-1, A+1] \text{et } v \in [-1, 1] \end{cases}$$

Le théorème de la convergence dominée donne

$$\int_{\mathbb{R}\setminus D} |f(v+u) - f(u)|\, du \underset{v \to 0}{\to} 0$$

Alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \alpha < 1$ tel que :

$$|v| < \alpha \Rightarrow \int_{\mathbb{R}\setminus D} |f(v+u) - f(u)|\, du \leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_\infty}$$

(*on suppose* $\|g\|_\infty \neq 0$ *, car le cas* $g = 0$ *est trivial*) .

Les relations (*) et (**) donnent alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ |x-y| < \alpha \Rightarrow |(f \star g)(x) - (f \star g)(y)| \leq \varepsilon$$

Ce qui prouve $\boxed{f \star g \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R}}$.

FIN

E3A POLYTHECH
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
SESSION 2024 - FILIÈRE MPI

Durée 4 heures

Le sujet est composé de quatre exercices tous indépendants .

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

On note, pour $f \in E, N_0(f) = \sup_{\mathbb{R}} |f|$.

Questions de cours

1 Rappeler l'ensemble de définition, la parité, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$.

2 En déduire le tableau des variations de la fonction arctan ainsi que l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormal en faisant apparaitre sa tangente en 0 et ses éventuelles asymptotes.

3 Justifier que arctan est élément de E et donner $N_0(\arctan)$.

4 Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \arctan(v(t))$.
On rappelle que la dérivée de la fonction composée de deux fonctions u et v dérivables est la fonction définie par $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$ sur un intervalle correctement choisi.

5 Déterminer une expression simple de la fonction $t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

6 Soit f une fonction de E.

6.1 Montrer que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \arctan(xt)\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

6.2 On pose, pour tout réel x :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(xt)\frac{f(t)}{1+t^2}dt$$

Montrer que $\Phi(f)$ appartient à E.

6.3 Montrer que l'on peut se restreindre à l'intervalle $[0, +\infty[$ pour l'étude de la fonction $\Phi(f)$.

7 Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme Φ de E.

8 Montrer que pour tout $f \in E, \Phi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

9 Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction h.

9.1 Justifier que h est continue sur $\mathbb{R}$.

9.2 Montrer que h appartient à E.

10 Soit f_0 la fonction constante égale à 1 et $g = \Phi(f_0)$.

10.1 Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

10.2 Pour tout réel x strictement positif, exprimer $g'(x)$ sous forme intégrale.

10.3 Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, simplifier l'expression : $g(x) + g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

10.4 **Une autre expression de g'.**

10.4.1 On fixe x, réel de $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $F(T) = \dfrac{1}{(1 + x^2T)(1 + T)}$.

10.4.2 Montrer que sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 - 1}$.

10.4.3 Donner alors l'expression de g' sur $]0, +\infty[$.

10.5 Donner le tableau des variations et l'allure de la courbe représentative de g sur $\mathbb{R}$.

On précisera ses éventuelles asymptotes et son comportement au voisinage de 0 .

Exercice 2

Notations pour l'exercice :

- i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.

- Pour tout entier naturel non nul n, on notera $E_n = \mathbb{C}_n[X]$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

- $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1 .

Questions préliminaires

1 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On note $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}(f)$ ainsi $f = g + ih$.

Montrer que $\overline{\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \overline{f(t)}dt$.

2 Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On suppose que l'on a : $\forall z \in \mathbb{U}, P(z) = 0$.

Justifier que P est le polynôme nul.

3 Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $z \in \mathbb{U}$ si, et seulement si, $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

4 Soit $P = 1 + iX$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\overline{P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}$.

5 Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que la trace de la matrice A est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Soit n un entier naturel non nul.

6 Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E_n, on pose :

$$\boxed{\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}Q\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) d\theta}$$

6.1 Soient k et ℓ deux entiers naturels de $[\![0, n]\!]$. Évaluer $\varphi\left(X^k, X^\ell\right)$.

6.2 Soient $a \in \mathbb{C}$ et P, Q, R trois éléments de E_n. Montrer que l'on a :

- $\varphi(aP + Q, R) = \bar{a}\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$
- $\varphi(P, aQ + R) = a\varphi(P,Q) + \varphi(P,R)$
- $\varphi(Q,P) = \overline{\varphi(P,Q)}$.

6.3 Soit $P \in E_n$. Montrer que $\varphi(P,P)$ est un réel positif ou nul.

6.4 Soit $P \in E_n$. Prouver l'équivalence : $\varphi(P,P) = 0 \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{C}}[x]$.

6.5 Soit Q_0 un polynôme de E_n avec $Q_0 = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On note $M = \sup\limits_{z\in\mathbb{U}} |Q_0(z)|^2$.

6.5.1 Calculer $\varphi\left(Q_0, Q_0\right)$ à l'aide des coefficients de Q_0.

On pourra utiliser les questions **6.2** et **6.1** .

6.5.2 Démontrer que $M \geq 1$.

6.5.3 Prouver que $M = 1$ si, et seulement si, $Q_0 = X^n$.

Exercice 3

Question de cours

1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1.1 Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n, de a, de b et de u_1.

1.2 Préciser le comportement de u à l'infini.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

3

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Un joueur lance successivement et de façon indépendante n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N.

Chaque boule a la probabilité $\dfrac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases.

On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides après n lancers.

2 Déterminer en fonction de n et de N les valeurs que peut prendre T_n.

3 Donner les lois de T_1 et de T_2.

Pour la suite, on prendra $n \geq 2$

4 Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = 2)$.

5 Calculer $\mathbb{P}(T_n = n)$.

On pourra distinguer les cas $n \leq N$ et $n > N$.

6 6. Prouver que, pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)$$

7 On considère dans cette question la fonction génératrice :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)\, x^k$$

7.1 Montrer que $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k)\, x^k$.

7.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n'(x) + xG_n(x)$$

7.3 En dérivant l'expression précédente, démontrer que:

$$\mathbb{E}\left[T_{n+1}\right] = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}\left[T_n\right] + 1$$

7.4 En déduire la valeur de $\mathbb{E}\left[T_n\right]$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

7.5 Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la i-ème case est pleine, 0 sinon.

Exercice 4

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[1,n]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que A est équitable si :

$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3, \quad a_{i,j} = a_{i,k}a_{k,j}$

1 Donner deux exemples de matrices équitables pour $n = 3$.

2 Déterminer l'ensemble des matrices A pour lesquelles: A est équitable et $-A$ est équitable.

3 Démontrer que si A est équitable, alors sa transposée $A^\top$ est aussi équitable.

4 On suppose que A est équitable. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,i} = a_{j,j}$.

On suppose désormais que A est une matrice équitable non nulle.

5 Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer $a_{k,k}$.

6 Soit B une matrice équitable non nulle. Montrer que $A + B$ n'est pas équitable.

7 Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} \neq 0$.

8 Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, exprimer $a_{i,j}$ à l'aide de $a_{i,1}$ et $a_{j,1}$.

9 **Quelques résultats remarquables.**

9.1 Montrer que A est de rang 1 .

9.2 Calculer A^2.

9.3 La matrice A est-elle diagonalisable ?

9.4 Montrer que la matrice A est semblable à $\mathrm{Diag}(n, 0, \ldots, 0)$.

9.5 Montrer que la matrice A est semblable à la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 .

10 Démontrer que A est symétrique si, et seulement si, A est à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

11 Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables symétriques non nulles.

12 Si G est un sous-groupe fini de $(\mathbb{K}^*, \times)$, déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables à coefficients dans G.

13 Déterminer toutes les matrices carrées équitables de taille 2 à coefficients dans le groupe $\mathbb{U}_2$.

FIN

E3A POLYTHECH

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Session 2024 - Filière MPI

Exercice 1

1 La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, impaire de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

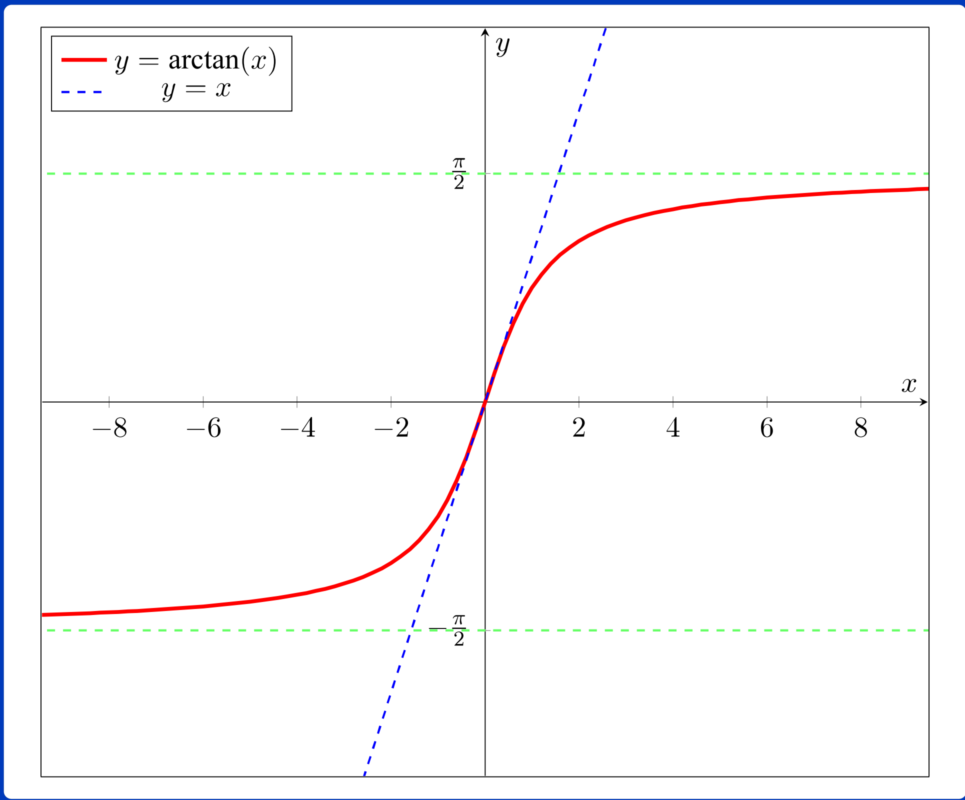
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

2 La fonction arctan′ étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, le tableau de variations est donnée par :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$

L'équation de la tangente en 0 est $y = \arctan(0) + \arctan'(0)x$, c'est-à-dire $y = x$. Le graphe de arctan possède deux asymptotes horizontales, la droite d'équation $y = -\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

L'allure de la courbe représentative dans un repère orthonormal est donnée par la figure suivante :



3 La fonction arctan étant $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle est continue et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

donc arctan est bornée et $N_0(\arctan) \leq \frac{\pi}{2}$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, alors $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ ainsi

$$N_0(\arctan) = \frac{\pi}{2}$$

4 Si v est dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, alors $\arctan \circ v$ est dérivable sur I par composition de fonctions dérivables et, pour tout $t \in I$, on a :

$$\frac{d}{dt}[\arctan(v(t))] = \frac{v'(t)}{1 + v(t)^2}$$

5 La fonction $f : t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ est définie et $\mathscr{C}^\infty$sur$\mathbb{R}^*$ par composition. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2} . \frac{1}{1 + \frac{1}{t^2}} = 0$$

donc f est constante sur chaque intervalle du domaine de définition de f, et donc constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Puisque $f(1) = 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et $f(-1) = 2\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

6 Soit $f \in E$.

6.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h_x : t \mapsto \arctan(xt).\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$ par opérations élémentaires sur les fonctions continues, n a : $|h_x(t)| \leq M\frac{\pi}{2}.\dfrac{1}{1+t^2}$ donc

$$h_x(t) \underset{t \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, par le théorème de comparaison la fonction h_x est aussi intégrable sur $[1, +\infty[$.

D'autre part, h_x est continue sur le segment $[0, 1]$ donc intégrable sur ce segment, ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_x : t \mapsto \arctan(xt)\,\frac{f(t)}{1+t^2} \in L^1([0, +\infty[).$$

6.2

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \arctan(xt).\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\arctan(xt)\,\frac{f(t)}{1+t^2}\right| \leq \frac{M\pi}{2\,(1+t^2)}$$

posons $\varphi : t \mapsto \dfrac{M\pi}{2\,(1+t^2)}$, on a $\varphi \in L^1\left(\mathbb{R}_+\right)$.

D'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre l'application

$$\Phi(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} \arctan(xt)\,\frac{f(t)}{1+t^2}dt$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|\Phi(f)(x)| &= \left|\int_0^{+\infty} \arctan(xt)\ \frac{f(t)}{1+t^2}dt\right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left|\arctan(xt)\frac{f(t)}{1+t^2}dt\right| \\ &\leq \frac{M\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}\end{aligned}$$

comme

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty}\Big[\arctan(t)\Big]_0^A = \frac{\pi}{4}$$

alors $|\Phi(f)(x)| \leq \dfrac{M\pi^2}{4}$. Ainsi $\boxed{\Phi(f) \in E}$

6.3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction arctan est impaire donc

$$\begin{aligned}\Phi(f)(-x) &= \int_0^{+\infty} \arctan(-xt)\ \frac{f(t)}{1+t^2}dt \\ &= -\int_0^{+\infty} \arctan(xt)\ \frac{f(t)}{1+t^2}dt \\ &= -\Phi(f)(x)\end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\Phi(f) \text{ est impaire}}$ et on peut restreindre l'étude de Φ à l'intervalle $[0, +\infty[$.

7 D'après la question 6.2 on a $\Phi(E) \subset E$.
Soit $(f, g) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Puisque E est un espace vectoriel, $\lambda f + g \in E$ et donc $\Phi(\lambda f + g)$ est bien définie, d'après la question 6.1 et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha f + \beta g)(x) &= \int_0^{+\infty} \arctan(xt)\ \frac{\alpha f(t) + \beta g(t)}{1+t^2}dt \\ &= \alpha\int_0^{+\infty} \arctan(xt)\ \frac{f(t)}{1+t^2}dt + \beta\int_0^{+\infty} \arctan(xt)\ \frac{g(t)}{1+t^2}dt \\ &= \alpha\Phi(f)(x) + \beta\Phi(g)(x)\end{aligned}$$

Ce qui donne $\Phi(\lambda f + g) = \lambda\Phi(f) + \Phi(g)$ et donc $\boxed{\Phi \in \mathscr{L}(E)}$.

8 Par application du théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale à paramètre .

Soit

$$\begin{array}{rcl} g : [0,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \arctan(xt)\,\dfrac{f(t)}{1+t^2} \end{array}$$

- La fonction g est continue sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.
- Pour tout $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question **6.1** .
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ avec :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t}{1+x^2t^2}\,\frac{f(t)}{(1+t^2)}$$

- Soit $a > 0$, on a

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq N_0(f)\frac{t}{(1+t^2)\,(1+a^2t^2)} = \varphi(t)$$

La fonction φ est continue sur $[0,+\infty[$ et

$$\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} N_0(f).\frac{t}{a^2t^4} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc φ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Le théorème dérivation des fonctions définies par une intégrale à paramètre assure que $\Phi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$.
Ceci étant valable pour tout $a > 0$, alors $\Phi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \frac{d\Phi(f)}{dx}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x^2t^2}\,\frac{f(t)}{(1+t^2)}dt$$

9 La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}$.

9.1 Chaque h_n étant continue sur $\mathbb{R}$ et la suite $(h_n)_{n\in N}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers h , donc h est continue sur $\mathbb{R}$.

9.2 La convergence de suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers h sur $\mathbb{R}$ est équivalent à :

$$N_0\,(h - h_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Pour $\varepsilon = 1$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \ , N_0\left(h - h_n\right) \leq \varepsilon$$

en particulier on a $N_0\left(h - h_{n_0}\right) \leq 1$, donc $h - h_{n_0} \in E$.

Comme E est un espace vectoriel , $h - h_{n_0} \in E$ et $h_{n_0} \in E$, alors $h = h - h_{n_0} + h_{n_0} \in E$.

Ainsi $\boxed{(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } h \text{ dans } (E, N_0)}$.

10 Soit f_0 la fonction constante égale à 1 et $g = \Phi(f_0)$.

10.1 Pour tout $x > 0$, on pose

$$h_x : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2} \end{array} \right.$$

alors

$$g(x) = \Phi(f_0)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} h_x(t) dt$$

On pose

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right.$$

- Pour tout $t \in \left]0, +\infty\right[$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} h_x(t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t^2} = h(t)$$

- Pour tout $x > 0$ et tout $t \in]0, +\infty[$, on a $|h_x(t)| \leq h(t)$ et h est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après la version aux paramètres continus du théorème de convergence dominée , on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} h_x(t) dt = \int_0^{+\infty} h(t) dt = \frac{\pi^2}{4}$$

Ainsi $\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = \dfrac{\pi^2}{4}}$.

10.2 D'après le résultat de la question **8** applique à $\Phi(f_0)$, on a

$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[\ , \quad g'(x) = \frac{d\Phi(f_0)}{dx}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\left(1 + x^2t^2\right)\left(1+t^2\right)} dt$$

10.3 Soit $x > 0$, on a

$$g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{t}{x}\right)}{1+t^2} dt$$

le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ dans la seconde intégrale donne :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{x}\right) &= -\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \arctan\left(\frac{1}{xu}\right) \frac{du}{u^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \arctan\left(\frac{1}{xu}\right) du \end{aligned}$$

donc

$$g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \left(\arctan(xt) + \arctan\left(\frac{1}{xt}\right)\right) dt$$

d'après la question **5** on a $\arctan(xt) + \arctan\left(\dfrac{1}{xt}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi^2}{4}$$

Ainsi $\boxed{\forall x > 0, \quad g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}}$.

10.4 **Une autre expression de g'.**

10.4.1 Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Posons $F(T) = \dfrac{1}{(1+x^2T)(1+T)}$.

La fraction rationnelle F se décompose en éléments simples de la forme :

$$F_x(T) = \frac{\alpha}{1+x^2T} + \frac{\beta}{1+T}$$

avec

$$\alpha = \Big[\left(1+x^2T\right) F_x(T)\Big]_{T=-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2-1} \quad \text{et} \quad \beta = \Big[(1+T)F_x(T)\Big]_{T=-1} = -\frac{1}{x^2-1}$$

Ainsi $\boxed{\frac{1}{(1+x^2T)(1+T)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2T} - \frac{1}{1+T}\right)}$.

10.4.2 Pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, il suit de **10.2** et du calcul précédent que :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} dt \\
&= \int_0^{+\infty} tF\left(t^2\right) dt \\
&= \frac{1}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2t}{1+x^2t^2} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt
\end{aligned}$$

Soit $A > 0$ on a

$$\begin{aligned}
\int_0^A \left(\frac{x^2t}{1+x^2t^2} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt &= \frac{1}{2} \int_0^A \frac{2x^2t}{1+x^2t^2} - \frac{2t}{1+t^2} dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{1+x^2t^2}{1+t^2} \right| \right]_0^A
\end{aligned}$$

et on fait tendre $A \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2t}{1+x^2t^2} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \ln(x)$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\,, \quad g'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}}$.

10.4.3 D'après la question **8** on a $g = \Phi\left(f_0\right) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ donc

$$g'(1) = \lim_{x \to 1} g'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u(2+u)} = \frac{1}{2}.$$

par suite

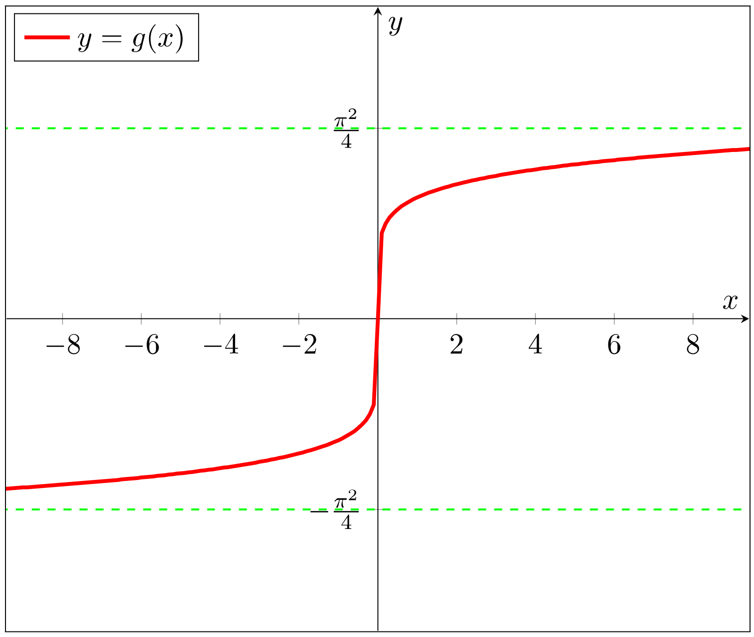
$$\forall x \in]0,+\infty[\,, \quad g'(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

10.5 • Si $x \in]0,1[\,, \ln(x) < 0$ et $x^2 - 1 < 0$ donc $g'(x) > 0$.

Si $x \in]1,+\infty[\,, \ln(x) > 0$ et $x^2 - 1 > 0$ donc $g'(x) > 0$.

• On a $g(0) = 0$ et d'après la question 10.1 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4}$. Puisque $\lim\limits_{x \to 0} g'(x) = +\infty$, la courbe représentative de g admet une tangente verticale au point d'abscisse 0 établie à la qet g est impaire , on en déduit le tableau de variations et la courbe représentative de g :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g(x)$			$+$		$\Vert$		$+$		
$g'(x)$	$-\frac{\pi^2}{4}$	$\nearrow$	$-\frac{\pi^2}{8}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi^2}{8}$	$\nearrow$	$\frac{\pi^2}{4}$



Exercice 2

1 L'intégrale d'une fonction à valeurs complexes est définit par :

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f)(t)dt + i\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(f)(t)dt$$

puisque $\overline{f} = \mathrm{Re}(f) - i\mathrm{Im}(f)$ alors :

$$\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f)(t)dt - i\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(f)(t)dt = \overline{\int_0^{2\pi} f(t)dt}$$

2 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Si P s'annule en tout point de $\mathbb{U}$, alors P admet une infinité de racines distinctes, donc il est nul.

3

- Si $z \in \mathbb{U}$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ et

$$\bar{z} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

- Réciproquement, si $\bar{z} = \frac{1}{z}$, alors $1 = \bar{z}z = |z|^2$ donc $|z| = 1$ et $z \in \mathbb{U}$.

Ainsi, on a $\boxed{z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}}$

4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $P = 1 + iX$. On a

$$\begin{aligned}\overline{P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)} &= \overline{1 + i\mathrm{e}^{i\theta}}\\ &= 1 - i\mathrm{e}^{-i\theta}\\ &= 1 - i(\cos(\theta) - i\sin(\theta))\\ &= 1 - \sin(\theta)) - i\cos(\theta)\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\overline{P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)} = (1 - \sin(\theta)) - i\cos(\theta)}$.

5 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

- **Méthode 1** : Le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, il s'écrit donc

$\chi_A(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$, où les λ_k sont les valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.
On sait que

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A)$$

les relations entre les coefficients et les racines donne alors $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$.

- **Méthode 2** : Le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc A est trigonalisable dans $\mathbb{C}[X]$. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n}\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n}\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Puisque la trace est invariante par conjugaison, alors $\boxed{\operatorname{Tr}(A)=\operatorname{Tr}(T)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$.

6

6.1 Soit $(k,\ell)\in [\![0,n]\!]^2$. On a

$$\varphi\left(X^k,X^\ell\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-k\theta}\mathrm{e}^{i\ell\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{j(\ell-k)\theta}d\theta=\delta_{k,\ell}$$

donc où δ, désigne le symbole de Kronecker, ainsi $\boxed{\forall(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2,\quad \varphi\left(X^k,X^\ell\right)=\delta_{k,\ell}}$.

6.2 Soit $a\in\mathbb{C}$ et $P,Q,R\in E_n$.

- $$\begin{aligned}\varphi(aP+Q,R)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{aP\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)+Q\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}R\left(\mathrm{e}^{j\theta}\right)d\theta\\&=\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{a}\overline{P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}\,R\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)+\overline{Q\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}R\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)d\theta\\&=\bar{a}\varphi(P,R)+\varphi(Q,R)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi(aP+Q,R)=\bar{a}\varphi(P,R)+\varphi(Q,R)}$.

- $$\begin{aligned}\varphi(P,aQ+R)&=\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\overline{aQ\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)R\left(\mathrm{e}^{j\theta}\right)}\,d\theta\\&=\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{a}\;P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\overline{Q\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}\;+P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\overline{R\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}d\theta\\&=\bar{a}\varphi(P,Q)+\varphi(P,R)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi(P,aQ+R)=\bar{a}\varphi(P,Q)+\varphi(P,R)}$.

- $$\begin{aligned}\varphi(P,Q)&=\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}Q\left(\mathrm{e}^{j\theta}\right)d\theta\\&=\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{P\left(\mathrm{e}^{j\theta}\right)\overline{Q\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}}d\theta\\&=\overline{\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(\mathrm{e}^{j\theta}\right)\overline{Q\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}d\theta}\;=\overline{\varphi(Q,P)}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi(P,Q)=\overline{\varphi(Q,P)}}$.

6.3 Soit $P\in E_n$. On a

$$\varphi(P,P)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta$$

et pour tout $\theta\in[0,2\pi]\,,\left|P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|^2\geq 0$, donc $\boxed{\forall P\in E_n,\quad \varphi(P,P)\in\mathbb{R}_+}$.

6.4 Soit $P\in E_n$. Si P est nul, on a évidemment $\varphi(P,P)=0$.

Réciproquement, si $\varphi(P,P)=0$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta=0$. Puisque la fonction , $\theta\mapsto\left|P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|^2$ est continue et positive sur $[0,2\pi]$, alors $P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)=0$ pour tout $\theta\in[0,2\pi]$. Par suite P s'annule sur $\mathbb{U}$, d'après la question 3, P est le polynôme nul.

Ainsi $\boxed{\forall P\in E_n,\quad \varphi(P,P)=0\Leftrightarrow P=0_{\mathbb{C}[X]}}$.

Les propriétés des questions 6.3 *et* 6.4 *permettent de dire que φ est une forme hermitienne définie positive sur E_n; elle définit ce qu'on peut appeler un produit scalaire complexe sur cet espace .*

6.5 On note $Q_0=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $a_n=1$ et $M=\sup\limits_{z\in\mathbb{U}}|Q_0(z)|^2$.

6.5.1 D'après les questions **6.1** et **6.2** , on a :

$$\begin{aligned}\varphi\left(Q_0,Q_0\right)&=\varphi\left(\sum_{k=0}^{n}a_kX^k,\sum_{\ell=0}^{n}a_\ell X^\ell\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\;\varphi\left(X^k,\sum_{\ell=0}^{n}a_\ell X^\ell\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\overline{a_k}a_\ell\varphi\left(X^k,X^\ell\right)\end{aligned}$$

or $\varphi\left(X^k,X^\ell\right)=\delta_{k,\ell}$ donc

$$\varphi\left(Q_0,Q_0\right)=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}a_k=\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2=1+\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|^2$$

Ainsi $\boxed{\varphi\left(Q_0,Q_0\right)=1+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|^2}$.

$\boxed{6.5.2}$ D'une part, on a $= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 \geq 1$, d'autre part

$$\varphi(Q_0, Q_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| Q_0\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta = M$$

Ainsi, $1 \leq \varphi(Q_0, Q_0) \leq M$ et $\boxed{M \geq 1}$.

$\boxed{6.5.3}$ Soit $Q_0 = X^n$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a $\left|Q_0\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 = \left|e^{in\theta}\right|^2 = 1$ donc $M = 1$.

Réciproquement, supposons $M = 1$, puisque $\varphi(Q_0, Q_0) \leq M$ et $\varphi(Q_0, Q_0) \geq 1$ donc $\varphi(Q_0, Q_0) = 1$.

Ce qui donne

$$\varphi(Q_0, Q_0) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 = 1$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 = 0$$

donc, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!], a_k = 0$. Autrement dit, $Q_0 = X^n$.

Ainsi $\boxed{M = 1 \Leftrightarrow Q_0 = X^n}$.

Exercice 3

Dans cet exercice posons pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Y_k la variable aléatoire discrète qui donne le numéro de la case dans laquelle tombe la k-ième boule lancée.

Les $(Y_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ suivent la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, N]\!])$ et elles sont mutuellement indépendantes .

$\boxed{1}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant : $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{1.1}$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique de raison géométrique $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et arithmétique b.

- On cherche une solution constante : soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$ donc $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.
- Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$, elle verifie $v_{n+1} = av_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, elle est donc géométrique de raison a , par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = a^{n-1} v_1$$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = a^{n-1}\left(u_1 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}}$.

1.2 De l'expression précédente on distingue les cas suivants :

- si $u_1 = \dfrac{b}{1-a}$, alors la suite (u_n) est constante;
- si $a \in]-1,1[$, la suite $\left(a^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{b}{1-a}$;
- si $a \in \mathbb{R}\backslash\,]-1,1]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

2 Au minimum, $T_n = 1$ si toutes les boules tombent dans la même case. Deux cas se présentent :

- Si $n \geq N$, toutes les cases peuvent être occupées donc $T_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$.
- Si $n \leq N$, au minimum une case est occupée et au maximum n cases le sont, dans ce cas, $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

Ainsi $\boxed{T_n(\Omega) = [\![1, \min(n, N)]\!]}$.

3

- Loi de T_1 : si $n = 1$, donc $T_1(\Omega) = \{1\}$ ainsi $T_1 = 1$, c'est la variable aléatoire certaine .
- Loi de T_1 : si $n = 2$, on lance deux boules , qui vont occuper une ou deux cases.

L'événement $(T_2 = 1)$ est réalisé quand les deux boules tombent sur une même case. Une fois connu la case de la première boule la probabilité que la deuxième boule tombe dans cette case est $\dfrac{1}{N}$ donc $\mathbb{P}\left(T_2 = 1\right) = \dfrac{1}{N}$ par conséquent $\mathbb{P}\left(T_2 = 2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(T_2 = 1\right) = 1 - \dfrac{1}{N}$.

Ainsi la loi de T_2 est donnée par : $\boxed{T_2(\Omega) = \{1, 2\}\ ,\ \mathbb{P}\left(T_2 = 1\right) = \frac{1}{N} \ \text{ et } \mathbb{P}\left(T_2 = 2\right) = \frac{N-1}{N}}$.

Autre méthode : On a

$$(T_2 = 1) = \bigcup_{k=1}^{N} (Y_1 = k, Y_2 = k)$$

Par σ-additivité et indépendance des Y_k on a :

$$\mathbb{P}\left(T_2 = 1\right) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}\left(Y_1 = k\right)\mathbb{P}\left(Y_2 = k\right) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N}$$

d'où le résultat et

$$\mathbb{P}\left(T_2 = 2\right) = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$$

On remarque que ce résultat englobe le cas $N = 1$.

4 • Exprimons événement $(T_n = 1)$ à l'aide des variables aléatoires Y_k , l'événement $(T_n = 1)$ se réalise si toutes les boules tombent dans la même case donc ,

$$\boxed{(T_n = 1) = \bigcup_{k=1}^{N} \left[\bigcap_{i=1}^{n} (Y_i = k)\right]}$$

les événements $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (Y_i = k)$ sont disjoints donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = 1) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (Y_i = k)\right)}$$

par l'indépendance des Y_k on a

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = 1) = \sum_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}((Y_i = k)) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)^n = \frac{1}{N^{n-1}}}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(T_n = 1) = \dfrac{1}{N^{n-1}}}$.

• L'événement $(T_n = 2)$ se réalise si toutes les boules tombent dans deux cases différentes.

Pour construire $(T_n = 2)$ on prend une partie à deux éléments $\{i, j\} \subset [\![1, N]\!]$ et une partie $A \subset [\![1, n]\!]$ telle que $A \neq \varnothing$ et $A \neq [\![1, n]\!]$ de sorte que lors des lancers d'indice $k \in A$ la boule tombe dans la case i , bien sur la boule tombe dans la case j sinon .

On a donc

$$\boxed{(T_n = 2) = \bigcup_{\{i,j\} \subset [\![1,N]\!]} \left(\bigcup_{\substack{A \subset [\![1,n]\!] \\ A \neq \varnothing \\ A \neq [\![1,n]\!]}} \left[\left(\bigcap_{k \in A} (Y_k = i) \right) \cap \left(\bigcap_{k \in \overline{A}} (Y_k = j) \right) \right] \right)}$$

les événements considérés sont disjoints et les Y_k sont indépendantes , ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n = 2) &= \sum_{\{i,j\}\subset[\![1,N]\!]} \left(\sum_{\substack{A\subset[\![1,n]\!]\\ A\neq\varnothing\\ A\neq[\![1,n]\!]}} \left[\left(\prod_{k\in A} \mathbb{P}(Y_k = i) \right) \left(\prod_{k\in \overline{A}} \mathbb{P}(Y_k = j) \right) \right] \right) \\
&= \sum_{\{i,j\}\subset[\![1,N]\!]} \left(\sum_{\substack{A\subset[\![1,n]\!]\\ A\neq\varnothing\\ A\neq[\![1,n]\!]}} \left[\left(\frac{1}{N}\right)^{\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(\overline{A})} \right] \right) \\
&= \left(\frac{1}{N}\right)^n \mathrm{Card}\left\{ \ \{i,j\} \subset [\![1,N]\!] \right\} \mathrm{Card}\left\{ A \subset [\![1,n]\!] \middle| A \neq \varnothing, A \neq [\![1,n]\!] \ \right\}
\end{aligned}$$

On sait que

$$\mathrm{Card}\left\{ \ \{i,j\} \subset [\![1,N]\!] \right\} = \binom{n}{2}$$

et

$$\mathrm{Card}\left\{ A \subset [\![1,n]\!] \middle| A \neq \varnothing, A \neq [\![1,n]\!] \ \right\} = 2^n - 2$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{n}{2} \dfrac{2^n - 2}{N^n}}$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(T_n = 1) = \dfrac{1}{N^{n-1}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{n}{2} \dfrac{2^n - 2}{N^n}}$.

5 • Si $n > N$, l'événement $(T_n = n)$ est impossible car il ne peut y avoir plus de N cases occupées , donc $\mathbb{P}(T_n = n) = 0$.

• Si $n \leq N$, l'événement $(T_n = n)$ se réalise si, et seulement si les n boules tombent dans des cases distinctes.

Pour construire $(T_n = n)$ on prend une partie à n éléments $A \subset [\![1,N]\!]$, c'est l'ensemble des numéros des n cases où les n boules tombent , mais il faut tenir compte de l'ordre d'apparition de ces numéros , pour cela consdérons $S(A)$ l'ensemble de tous les $n-$uplets d'éléments de A . On a donc :

$$(T_n = n) = \bigcup_{\substack{A\subset[\![1,N]\!]\\ \mathrm{Card}\,A=n}} \left(\bigcup_{(a_1,\ldots,a_n)\in S(A)} \left(\bigcap_{k=1}^{n} (Y_k = a_k) \right) \right)$$

le même raisonnement que précédement donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = n) &= \sum_{\substack{A\subset[\![1,N]\!]\\ \mathrm{Card}A=n}} \left(\sum_{(a_1,\dots,a_n)\in S(A)} \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y_k = a_k) \right) \right) \\ &= \frac{1}{N^n}\mathrm{Card}\left\{ A\subset[\![1,n]\!] \middle| \mathrm{Card}A = n \right\}.\mathrm{Card}S(A)\end{aligned}$$

on sait que

$$\mathrm{Card}\left\{ A\subset[\![1,n]\!] \middle| \mathrm{Card}A = n \right\} = \binom{N}{n}$$

et

$$\mathrm{Card}S(A) = n!$$

donc

$$\mathbb{P}(T_n = n) = \binom{N}{n} n! \frac{1}{N^n} = \frac{N!}{N^n (N-n)!}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(T_n = n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n > N \\ \dfrac{N!}{N^n(N-n)!} & \text{si} \quad n \leq N \end{cases}}$

6 La famille $(T_n = i)_{1\leq i\leq \min(N,n)}$ est un système complet d'événements .
Soit $k \in [\![1,n]\!]$, la formule de probabilité totale donne

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{\min(N,n)} \mathbb{P}_{(T_n=i)}(T_{n+1} = k)\,\mathbb{P}(T_n = i)$$

D'une part on a, pour tout $i \in [\![1,\min(N,n)]\!]$, si $(T_n = i)$ est réalisé alors soit $(T_{n+1} = i)$ soit $(T_{n-1} = i+1)$ est réalisé , donc pour $k \neq i$ et $k \neq i+1$ on a $\mathbb{P}_{(T_n=i)}(T_{n+1} = k) = 0$, par suite

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{(T_n=k)}(T_{n+1} = k)\,\mathbb{P}(T_n = k) + \mathbb{P}_{(T_n=k-1)}(T_{n+1} = k)\,\mathbb{P}(T_n = k-1)$$

et d'autre part :

- Si $(T_n = k)$ est réalisé, k cases sont occupées donc la probabilité que la ($n+1$)-ième boule tombe dans l'une des cases déjà occupées est $\dfrac{k}{N}$, donc $\mathbb{P}_{(T_n=k)}(T_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N}$.
- Si $(T_n = k-1)$ est réalisé, $k-1$ cases sont occupées donc la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tombe dans une cases non occupée est $\dfrac{N-(k-1)}{N}$, donc $\mathbb{P}_{(T_n=k-1)}(T_{n+1} = k) = \dfrac{N-k+1}{N}$.

Ainsi $\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \dfrac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)}$.

6.1 On a $\mathbb{P}(T_n=0)=0$ et $\mathbb{P}(T_n=k)=0$ pour tout $k>n$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$G_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(T_n=k)\,x^k$$

6.2 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, en utilisant l'identité établie en 6 , on obtient

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x)&=\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(T_{n+1}=k)\,x^k\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n=k)+\frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n=k-1)\right)x^k\\
&=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1}k\mathbb{P}(T_n=k)\,x^k+\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(T_n=k-1)\,x^k-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)\mathbb{P}(T_n=k-1)\,x^k\\
&=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(T_n=k)\,x^k+\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(T_n=k)\,x^{k+1}-\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}(T_n=k)\,x^{k+1}\\
&=\frac{x}{N}G_n'(x)+xG_n(x)-\frac{x^2}{N}G_n'(x).
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad G_{n+1}(x)=\frac{1}{N}\left(x-x^2\right)G_n'(x)+xG_n(x)}$.

6.3 Les séries génératrices impliquées étant polynomiales, elles sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$G_{n+1}'(x)=\frac{1}{N}(1-2x)G_n'(x)+\frac{1}{N}\left(x-x^2\right)G_n''(x)+G_n(x)+xG_n'(x)$$

donc, en évaluant en 1, il vient :

$$G_{n+1}'(1)=-\frac{1}{N}G_n'(1)+G_n(1)+G_n'(1)$$

on sait que $G_n(1)=1, G_n'(1)=\mathbb{E}[T_n]$ et $G_{n+1}'(1)=\mathbb{E}[T_{n+1}]$ donc : $\boxed{\mathbb{E}[T_{n+1}]=\left(1-\frac{1}{N}\right)\mathbb{E}[T_n]+1}$.

6.4 La suite $(\mathbb{E}[T_n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique de raison géométrique $a=\left(1-\frac{1}{N}\right)$ et de raison arithmétique $b=1$ donc $\dfrac{b}{1-a}=N$, d'après la question 1, on a :

$$\mathbb{E}[T_n]=\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}(\mathbb{E}[T_1]-N)+N$$

Puisque $\mathbb{E}[T_1] = 1$, alors

$$\mathbb{E}[T_n] = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}(1-N) + N = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

Ainsi $\forall n \in N^*, \quad \mathbb{E}[T_n] = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$.

Puisque $\left|\frac{N-1}{N}\right| < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}[T_n] = N$.

6.5 Si on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la case numéro i est pleine voir "non vide" après n lancers et 0 sinon, le nombre de cases non vides est

$$T_n = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

On a $X_i(\Omega) = \{0,1\}$ donc X_i est une variable aléatoire de Bernoulli. Déterminons son paramètre. L'événement $(X_i = 0)$ se réalise si, et seulement si, toutes les boules tombent dans des cases aux numéros autres que i donc ,

$$(X_i = 0) = \bigcap_{k=1}^{n} (Y_k \neq i) = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{(Y_k = i)}$$

L'indépendance des Y_k donne

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{(Y_k = i)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{N}\right) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

Ainsi $\forall i \in [\![1, N]\!], \quad X_i \sim \mathscr{B}\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$

Par suite $\forall i \in [\![1, N]\!], \quad \mathbb{E}[X_i] = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$

Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{N}\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

donc

$$\mathbb{E}[T_n] = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

Exercice 4

1 Les matrices

$$0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont équitables.

2 Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est équitable, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $a_{i,j} = a_{i,k}a_{k,j}$.

Et si $-A$ est équitable, alors

$$-a_{i,j} = (-a_{i,k})(-a_{k,j}) = a_{i,k}a_{k,j} = a_{i,j}$$

ainsi, $a_{i,j} = 0$. Ceci étant valable pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, donc $A = 0_n$.

Puisque 0_n est une matrice équitable, on peut conclure :

$\forall A \in \mathscr{M}_n(K)$, A et $-A$ sont équitables si et seulement si $A = 0$.

3 Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ équitable.

Notons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ et $A^\top = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ avec $b_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$.

Soit $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$, on a :

$$b_{i,j} = a_{j,i} = a_{j,k}a_{k,i} = b_{k,j}b_{i,k} = b_{i,k}b_{k,j}$$

donc la matrice $A^\top$ est équitable.

Ainsi A équitable $\Leftrightarrow$ $A^\top$équitable .

4 Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ équitable. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$a_{i,i} = a_{i,j}a_{j,i} = a_{j,i}a_{i,j} = a_{j,j}$$

Ainsi A équitable $\Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,i} = a_{j,j}$

5 Soit A équitable non nulle et $k \in [\![1,n]\!]$.

En prenant $i = j = k$ dans la relation de définition d'une matrice équitable, on a :

$$\boxed{a_{k,k} = a_{kk}a_{k,k} = a_{k,k}^2}$$

donc $a_{k,k} \in \{0,1\}$.

Si il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_{k,k} = 0$, alors, d'après la question 4, A est à diagonale nulle.

Ce qui donne, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\boxed{a_{i,j} = a_{i,i}a_{i,j} = 0}$$

donc A est la matrice nulle, contradiction.

Ainsi $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,i} = 1}$.

6 Soit B équitable non nulle. D'après la question 5, comme A est équitable non nulle, les coefficients diagonaux de A et de B sont égaux à 1 .

Mais les coefficients diagonaux de $A+B$ sont égaux à 2 , donc $A+B$ ne peut pas être équitable.

Ainsi : la somme de deux matrices équitables non nulles n'est pas équitable.

7 Si il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_{i,j} = 0$, alors

$$\boxed{a_{i,i} = a_{i,j}a_{ji} = 0,}$$

ce qui contredit le résultat établi en 5.

Ainsi $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \neq 0}$.

8 Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

On a :

$$\boxed{a_{i,j} = a_{i,1}a_{1,j}}$$

et

$$\boxed{a_{1,j}a_{j,1} = a_{1,1} = 1}$$

d'après la question la question **7** $a_{j,1} \neq 0$ donc $a_{1,j} = \dfrac{1}{a_{j,1}}$, ainsi $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = \dfrac{a_{i,1}}{a_{j,1}}}$.

9 **Quelques résultats remarquables .**

9.1 Soiy $j \in [\![1,n]\!]$, d'après la question **8** la j ième colonne de A s'écrit

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{1,1}}{a_{j,1}} \\ \dfrac{a_{2,1}}{a_{j,1}} \\ \vdots \\ \dfrac{a_{n,1}}{a_{j,1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{j,1}} \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{j,1}} C_1$$

A est non nulle donc forcement $C_1 \neq 0$, par suite

$$\text{rg}(A) = \text{rg}\left(C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = \text{rg}\left(C_1\right) = 1$$

Ainsi $\boxed{\text{rg}(A) = 1}$.

Remarque : *on peut exprimer donc les matrices équitables de tailles* 2 *et* 3 *sous la forme :*

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1/a & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ 1/a & 1 & b \\ 1/ab & 1/b & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } ab \neq 0$$

9.2 Posons $A^2 = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,j} = n a_{i,j}$$

donc $\boxed{A^2 = nA}$.

9.3 La relation précédente montre que le polynôme $X^2 - nX = X(X-n)$ est annulateur et A il est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

9.4 Comme $X(X-n)$ annule A, alors $\text{Sp}(A) \subset \{0, n\}$. Soit $p \in [\![0,n]\!]$ la multiplicité de la valeur propre 0 , donc la multiplicité de la valeur propre n est $n-p$.

On sait que

$$\text{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

or $a_{k,k} = 1$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ donc

$$\text{Tr}(A) = p \times 0 + (n-p) \times n = n$$

ainsi $p = n-1$ et $\boxed{A \text{ est semblable à } \text{Diag}(n, 0, \ldots, 0)}$.

9.5 Soit A une matrice équitable . Notons J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 .

On a $J^2 = nJ$ donc $X(X-n)$ annule J. Il s'ensuit que J est diagonalisable, $\text{Sp}(J) \subset \{0, n\}$.

Comme $\text{Tr}(A) = n$ alors , comme dans la question **9.4,** la multiplicité de 0 est $n-1$ et la multiplicité de n est 1 .

Donc J semblable à $\text{Diag}(n, 0, \ldots, 0)$. Par transitivité A est semblable à J.

10 Si A est symétrique, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$\boxed{1 = a_{i,i} = a_{i,j}a_{ji} = a_{i,j}^2}$$

donc $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$.

Réciproquement, supposons que A est symétrique et tous ces coefficients sont dans $\{-1, 1\}$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Puisque $a_{i,j}a_{ji} = a_{i,i} = 1$, alors $a_{i,j}$ et a_{ji} sont de même signe, et donc égaux.

Ainsi $\boxed{A \in S_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} \in \{-1,1\}}$.

11 Soit A équitable symétrique non nulle. Donc ses coefficients sont dans $\{-1, 1\}$.

- D'après la question **9.1** on a $\text{rg}(A) = 1$ et

$$\boxed{\forall (j \in [\![1,n]\!] \ , C_j = \frac{1}{a_{j,1}} C_1 = a_{j,1} C_1}$$

chaque colonne est égale à la première ou à son opposé.

La matrice A est entièrement déterminée par la première colonne C_1. Puisque le coefficient $a_{1,1}$ est égal à 1 , on a 2^{n-1} choix pour les autres coefficients de C_1 et donc au plus 2^{n-1} choix pour A.

- Réciproquement : supposons que $C_1 = {}^\top(a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1})$ est fixée dans $\{-1, 1\}^n$, avec $a_{1,1} = 1$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, on pose $a_{i,j} = \dfrac{a_{i,1}}{a_{j,1}} \in \{-1,1\}$, alors, pour tout $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$

$$\boxed{a_{i,k}a_{k,j} = \frac{a_{i,1}}{a_{k,1}} \frac{a_{k,1}}{a_{j,1}} = \frac{a_{i,1}}{a_{j,1}} = a_{i,j}}$$

donc la matrice A ainsi construite est équitable non nulle à coefficients dans $\{-1, 1\}$; elle est donc symétrique.

Conclusion : Il existe 2^{n-1} matrices équitables symétriques non nulles.

12 Soit G un sous-groupe fini de cardinal q de $(\mathbb{K}^*, .)$.

Une matrice équitable à coefficients dans G est de rang 1 et entièrement déterminée par sa première colonne, dont le premier coefficient est 1, le même raisonnement que celui effectué à la question 11 montre qu'il existe q^{n-1} matrices équitables à coefficients dans G.

13 On a $\mathbb{U}_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 1\right\} = \{-1, 1\}$, il y a $2^{2-1} = 2$ matrices de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{U}_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un autre exemple avec $\mathbb{U}_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\right\} = \{1, j, \overline{j}\}$, de la remarque 9.a les matrices équitables de taille 3 à coefficients dans $\mathbb{U}_3$ sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \overline{j} \\ 1 & 1 & \overline{j} \\ j & j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & j \\ 1 & 1 & j \\ \overline{j} & \overline{j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{j} & \overline{j} \\ j & 1 & 1 \\ j & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j & j \\ \overline{j} & 1 & 1 \\ \overline{j} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{j} & 1 \\ j & 1 & j \\ 1 & \overline{j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j & 1 \\ \overline{j} & 1 & \overline{j} \\ 1 & j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{j} & j \\ j & 1 & \overline{j} \\ \overline{j} & j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j & \overline{j} \\ \overline{j} & 1 & j \\ j & \overline{j} & 1 \end{pmatrix}$$

École des Ponts

isae
Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace
SUPAERO

MINES PARIS

MINES ET PONTS

ENSTA

TELECOM
Paris

ENSAE

CONCOURS COMMUN MINES ET PONTS
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 1
SESSION 2024 - FILIÈRE MP

Durée: 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Généralisation d'une intégrale de Dirichlet et application

Le but de ce sujet est de calculer l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\, dt$$

et d'utiliser ce calcul pour évaluer une espérance.

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0,1[$ fixé.

1 Montrer que pour tout $\theta \in \,]-\pi,\pi[$, la fonction f définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} \end{array} \right.$$

est définie et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$r : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} dt \end{array} \right.$$

2 Montrer que la fonction r est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et que :

$$\forall \theta \in]-\pi,\pi[, \quad r'(\theta) = -ie^{i\theta}.\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\,dt$$

Indication : soit $\beta \in]0,\pi[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta;\beta]$ et $t \in [0,+\infty[$, $\left|1+te^{i\theta}\right|^2 \geq \left|1+te^{i\beta}\right|^2 = (t+\cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2$.

Soit g la fonction définie par

$$g : \begin{cases}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{ix\theta}.\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}dt \end{cases}$$

3 Montrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et que pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$,

$$g'(\theta) = ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty} h'(t)dt$$

où h est la fonction définie par

$$h : \begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^x}{1+te^{i\theta}} \end{cases}$$

Calculer $h(0)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)$.

En déduire que la fonction g est constante sur $]-\pi,\pi[$.

4 Montrer que pour tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2i}\left(g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}\right) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\,dt$$

5 En déduire que :

$$\forall \theta \in]0,\pi[, \quad g(\theta)\sin(\theta x) = \int_{\text{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\,du,$$

où $\text{cotan}(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

6 Montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{\theta \to \pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

7 En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0,1[$ fixé.

8 Montrer que.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t} \right) dt$$

9 Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

10 Établir l'identité

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}$$

11 En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2}$$

12 En déduire enfin que :

$$\forall y \in]0;\pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y\sin(y)}{y^2 - n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\, dt$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\, dt = (2p+1)\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

14 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\, dt$$

15 En déduire que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right) dt$$

16 En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\, dt$$

Dans le cas $p=0$, cette intégrale est communément appelée "Intégrale de Dirichlet".

17 Montrer que :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos(2(p-k)t)\right)$$

Indication : On pourra développer $\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p}$.

18 En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,dt = \frac{\pi.(2p+1)!}{2^{2p+1}.(p!)^2}$$

Partie IV : Calcul de $\mathbb{E}(|S_n|)$

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par :

$$\mathbb{P}(X_1=-1) = \mathbb{P}(X_1=1) = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

19 Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes deux un nombre fini de valeurs réelles. On suppose que T et $-T$ suivent la même loi.

20 Montrer que :

$$\mathbb{E}(\cos(S+T)) = \mathbb{E}(\cos(S))\mathbb{E}(\cos(T))$$

21 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^n$$

22 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leq |a|$. Nontrer que

$$|a+b| = |a| + \text{signe}(a)b$$

où $\text{signe}(x) = \frac{x}{|x|}$ pour x réel non nul. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{E}(|S_{2n-1}|)$$

23 Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}|s|$$

24 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}\left(|S_n|\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^n}{t^2}\, dt$$

25 Conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}\left(|S_{2n}|\right) = \mathbb{E}\left(|S_{2n-1}|\right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}$$

Fin

Concours commun Mines et Ponts

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 1

Session 2024 - Filière MP

Généralisation d'une intégrale de Dirichlet et application

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0,1[$ fixé et

$$f : \begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}} \end{cases}$$

1 Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$, on a $\mathrm{e}^{i\theta} \neq -1$ et $1+t\mathrm{e}^{i\theta} \neq 0$ pour tout $t \in]0,+\infty[$, donc f est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.

- En 0 :

On a $|f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$, comme $1-x<1$ alors la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable au voisinage de 0 par suite f est intégrable au voisinage de 0 .

- En $+\infty$:

On a $|f(t)| \underset{t\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2-x}}$, puisque $2-x>1$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{2-x}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ par suite f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$r : \begin{cases}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}} dt \end{cases}$$

2 Considérons la fonction u : $\left\{\begin{array}{ccc}]-\pi,\pi[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\theta,t) & \longmapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}}dt \end{array}\right.$

- Soit $\beta\in]0,\pi[$, $\theta\in[-\beta,\beta]$ et $t\in[0,+\infty[$ on a

$$\begin{aligned}\left|1+t\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2 &= \left(1+t\mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(1+t\mathrm{e}^{-i\theta}\right)\\ &= 1+2t\cos(\theta)+t^2\\ &= (t+\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2\end{aligned}$$

la fonction cos est pair et décroissante sur $[0,\beta]$, donc $\cos(\theta)\geq\cos(\beta)$ pour tout $\theta\in[-\beta,\beta]$, par suite

$$\left|1+t\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2\geq 1+2t\cos(\beta)+t^2=\left|1+t\mathrm{e}^{i\beta}\right|^2$$

ainsi $\boxed{|1+t\mathrm{e}^{i\theta}|^2\geq|1+t\mathrm{e}^{i\beta}|^2=(t+\cos(\beta))^2+(\sin(\beta))^2\quad(1)}$.

- La fonction u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[\times[0,+\infty[$ et $\dfrac{\partial u}{\partial\theta}(\theta,t)=\dfrac{-i\mathrm{e}^{i\theta}t^x}{(1+t\mathrm{e}^{i\theta})^2}$

Soit $\beta\in]0,\pi[$, en utilisant l'inégalité (1) on trouve, pour tout $\theta\in[-\beta,\beta]$ et $t\in[0,+\infty[$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}(\theta,t)\leq\frac{t^x}{|1+t\mathrm{e}^{i\beta}|^2}$$

la fonction $\varphi:t\mapsto\dfrac{t^x}{|1+t\mathrm{e}^{i\beta}|^2}=\dfrac{t^x}{(t+\cos(\beta))^2+(\sin(\beta))^2}$ est définie continue sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{2-x}}$ avec $2-x>1$, donc φ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On obtient ainsi une relation de domination de $\dfrac{\partial u}{\partial\theta}$, le théorème de dérivation des intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle quelconque assure que r est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\beta,\beta]$ pour tout $\beta\in]0,\pi[$, par suite r est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et $\boxed{\forall\theta\in]-\pi,\pi[,\quad r'(\theta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial\theta}(\theta,t)dt=-i\mathrm{e}^{i\theta}.\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{(1+t\mathrm{e}^{i\theta})^2}\,dt}$

Soit g la fonction définie par

$$g:\left\{\begin{array}{ccc}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{ix\theta}.\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}}dt \end{array}\right.$$

3

- On a $\forall\theta\in]-\pi,\pi[$, $g(\theta)=\mathrm{e}^{ix\theta}r(\theta)$, donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et pour tout $\theta\in]-\pi,\pi[$

$$
\begin{aligned}
g'(\theta) &= \mathrm{e}^{ix\theta}r'(\theta) + ix\mathrm{e}^{ix\theta}r(\theta)\\
&= i\mathrm{e}^{ix\theta}\int_0^{+\infty}\left(\frac{-\mathrm{e}^{i\theta}t^x}{(1+t\mathrm{e}^{i\theta})^2} + \frac{xt^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}}\right)dt\\
&= i\mathrm{e}^{ix\theta}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^x}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}}\right)' dt
\end{aligned}
$$

ainsi $\boxed{g'(\theta) = i\mathrm{e}^{ix\theta}\int_0^{+\infty} h'(t)dt}$ avec $h : t \longmapsto \dfrac{t^x}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}}$.

- On a $h(0) = 0$ et $h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{t^{1-x}}$, comme $1 - x > 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 0$.
- L'expression de g' s'écrit

$$
g'(\theta) = i\mathrm{e}^{ix\theta}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A h'(t)dt = i\mathrm{e}^{ix\theta}\left(\lim_{A\to+\infty} h(A) - h(0)\right)
$$

d'où $g'(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$, on en déduit que g est constante sur $]-\pi,\pi[$.

4 D'après la question (3) g est constante sur $]-\pi,\pi[$ donc pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$ on a $g(\theta) = g(-\theta) = g(0) \in \mathbb{R}$.

On sait que $\overline{g(\theta)} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\overline{\left(\frac{\mathrm{e}^{ix\theta}t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}}\right)}dt$ ce qui donne $\overline{g(\theta)} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ix\theta}t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{-i\theta}}dt = g(-\theta)$, par suite on a

$$
\mathrm{Im}\left(g(\theta)\mathrm{e}^{-ix\theta}\right) = g(\theta)\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-ix\theta}\right) = -\sin(x\theta)g(\theta)
$$

écrivons

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left(g(\theta)\mathrm{e}^{-ix\theta}\right) &= \frac{1}{2i}\left(g(\theta)\mathrm{e}^{-ix\theta} - g(-\theta)\mathrm{e}^{ix\theta}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\theta}} - \frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{-i\theta}}\right)dt\\
&= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\frac{t^x(\mathrm{e}^{-i\theta}-\mathrm{e}^{i\theta})}{(1+t\mathrm{e}^{i\theta})(1+t\mathrm{e}^{-i\theta})}dt\\
&= -\sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\,dt
\end{aligned}
$$

Ainsi pour tout $\theta \in]0,\pi[$

$$
\boxed{g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2i}\left(g(-\theta)\mathrm{e}^{ix\theta} - g(\theta)\mathrm{e}^{-ix\theta}\right) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\,dt}
$$

5 Soit $\theta \in]0,\pi[$, on a

$$
g(\theta)\sin(x\theta) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{(t+\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2}\,dt = \frac{1}{\sin(\theta)}\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{\left(\frac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2+1}\,dt
$$

posons $u=\frac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ alors $t=u\sin(\theta)-\cos(\theta)$ et $dt=\sin(\theta)\ du$ ce qui donne

$$\boxed{g(\theta)\sin(\theta x)=\int_{\text{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\ du}$$

6 En s'inspirant de la question précédente, on écrit

$$g(\theta)\sin(\theta x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\theta,u)\ du$$

avec ψ la fonction définie de $]0,\pi[\times\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ par :

$$\psi(\theta,u)=\begin{cases}\dfrac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2} & \text{si} \quad u\in[\text{cotan}(\theta)\ ,+\infty[\\ 0 & \text{si} \quad u\in]-\infty\ ,\text{cotan}(\theta)[\end{cases}$$

on applique en suite le théorème de la convergence dominée à l'intégrale de cette fonction :

- Convergence :

Soit $u\in\mathbb{R}$, on a $\text{cotan}(\theta)\underset{\theta\to\pi^-}{\to}-\infty$, il existence donc un $\alpha\in]0,\pi[$ tel que $\forall\ \theta\in]\alpha,\pi[$, $\text{cotan}(\theta)\leq u$, ce qui donne

$$\psi(\theta,u)=\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2},\ \forall\theta\in]\alpha,\pi[$$

on en déduit $\psi(\theta,u)\underset{\theta\to\pi^-}{\to}\dfrac{1}{1+u^2}$.

- Domination :

Pour tout $u\in[\text{cotan}(\theta)\ ,+\infty[$, on a

$$0\leq u\sin(\theta)-\cos(\theta)=|u\sin(\theta)-\cos(\theta)|\leq 1+|u|$$

donc $(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x\leq(1+|u|)^x$, par suite

$$|\psi(\theta,u)|\leq\frac{(1+|u|)^x}{1+u^2}\quad,\ \forall\theta\in]0,\pi[$$

De plus $\dfrac{(1+|u|)^x}{1+u^2}\underset{u\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{u^{2-x}}$ et $2-x>1$ donc la fonction $u\mapsto\dfrac{(1+|u|)^x}{1+u^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, par parité elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On obtient ainsi une relation de domination de la fonction ψ sur $]0,\pi[\times\mathbb{R}$ par une fonction intégrable.

Le théorème de convergence dominée permet d'écrire

$$\lim_{\theta\to\pi^-}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\theta,u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\theta\to\pi^-}\psi(\theta,u)du$$

c'est-à dire

$$\lim_{\theta\to\pi^-}\int_{\text{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}du=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}$$

ainsi $\boxed{\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\pi}$

7 D'après la question (3) la fonction g est constante sur $]-\pi,\pi[$, donc $g(0)=\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)$.

On a $g(0)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$ et la question précédente donne $\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ d'où

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0,1[$ fixé.

8 On a

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt=\int_0^{1}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt+\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$$

dans la deuxième intégrale on pose $u=\frac{1}{t}$, ce qui donne $\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt=\int_0^1\frac{u^{-x}}{1+u}du$, d'où la relation

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt=\int_0^{1}\left(\frac{t^{x-1}}{1+t}+\frac{t^{-x}}{1+t}\right)\,dt}$$

9 Pour tout $t\in]0,1[$ et $N\in\mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^{N}(-t)^n=\frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}dt&=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^nt^{n+x-1}\right)dt+(-1)^{N+1}\int_0^1\frac{t^{N+x}}{1+t}dt\\&=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+x}+(-1)^{N+1}\int_0^1\frac{t^{N+x}}{1+t}dt\end{aligned}$$

la dernière intégrale se majore par

$$\left|\int_0^1\frac{t^{N+x}}{1+t}dt\right|\le\frac{1}{2}\int_0^1 t^{N+x}dt=\frac{1}{2(N+x+1)}$$

donc elle tend vers 0 quand N tend vers l'infini , par passage à la limite on obtient $\boxed{\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}}$

10 On utilise la relation de la question (8) $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right) dt$ et on montre de la même façon que $\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}$, ainsi on a $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}}$

11 D'après la question (7) on a $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin(\pi x)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x} \\
&= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x}\right)
\end{aligned}$$

d'où la relation $\boxed{\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2}}$

12 Soit $y \in]0;\pi[$, on écrit la relation précédente avec $x = \frac{y}{\pi}$:

$$\frac{\pi}{\sin(y)} = \frac{\pi}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \pi y}{n^2\pi^2 - y^2}$$

on en déduit $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{y^2 - n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}}$.

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 Soit $f : t \mapsto \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}$

- En 0 on a :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1-(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2))^{2p+1}}{t^2} \\
&= \frac{1-(1-(2p+1)\frac{t^2}{2}+o(t^2))}{t^2} \\
&= \frac{2p+1}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

ainsi $f(t) \underset{t\to 0}{\to} \frac{2p+1}{2}$, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0,1]$.

- En $+\infty$ on a :

$$|f(t)| \leq \frac{2}{t^2}$$

donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Par conséquent f est intégrable sur $]0,+\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,dt$ converge .

- Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Une intégration par partie donne :

$$\int_a^b \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t}\right]_a^b + (2p+1)\int_a^b \frac{\sin(t)(\cos(t))^{2p}}{t}\,dt$$

et on a $\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t} = tf(t)$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to+\infty}} \left[-\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t}\right]_a^b = 0$, par passage à la limite on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,dt = (2p+1)\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt}$$

14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a par changement de variable $t = u + n\pi$

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = (-1)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p}\frac{\sin(u)}{u-n\pi}\,dt$$

La relation de Chasles et un changement de variable $t = -u$ donnent

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt &= (-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2p}\frac{\sin(u)}{u-n\pi}\,dt + (-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t+n\pi}\,dt\\ &= (-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\sin(t)\left(\frac{1}{t-n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right)\,dt\end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,dt}$

15 Par application de la relation de Chasles on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,dt\end{aligned}$$

pour tout $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4} \leq n^2\pi^2 - t^2$ donc $\left|(\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right| \leq \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2-1/4}$.

La série $\sum \frac{1}{n^2-1/4}$ converge donc la série de fonctions $\sum (\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}$ converge normalement et uniformément sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

On peut donc intervertir les symboles $\sum$ et $\int$ ce qui donne

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\,dt}$$

16 D'après la question (12) la dernière formule devient :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \left(1 - \frac{\sin(t)}{t}\right) dt$$

ce qui donne

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\, dt}$$

17 Linéarisation de $(\cos(t))^{2p}$:

$$\begin{aligned}
(\cos(t))^{2p} &= \left(\frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}\right)^{2p} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \mathrm{e}^{ikt} \mathrm{e}^{-i(2p-k)t} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \mathrm{e}^{i2(k-p)t} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \mathrm{e}^{i2(k-p)t} + \sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} \mathrm{e}^{i2(k-p)t} \right)
\end{aligned}$$

dans la deuxième somme on fait le changement $h = 2p - k$, ce qui donne

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \mathrm{e}^{i2(k-p)t} + \sum_{h=0}^{p-1} \binom{2p}{h} \mathrm{e}^{i2(p-h)t} \right)$$

en regroupant les termes on obtient $\boxed{(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t) \right)}$

18 D'après la question (16) on a

$$\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\, dt$$

la formule de la question (17) donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\, dt = \frac{1}{2^{2p}} \left(\frac{\pi}{2} \binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(p-k)t) dt \right)$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt) dt = 0$, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} = \frac{\pi (2p)!}{2^{2p+1}.(p!)^2}}$

De la question (13) on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\, dt = (2p+1) \int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$, on en déduit alors

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\, dt = \frac{\pi (2p+1)!}{2^{2p+1}.(p!)^2}}$$

Partie IV : Calcul de $\mathbb{E}\left(|S_n|\right)$

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé .

Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, de même loi donnée par :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X_1=-1\right)=\mathbb{P}\left(X_1=1\right)=\frac{1}{2}}$$

Donc pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $X_k\left(\Omega\right)=\{-1,1\}$ et $\mathbb{P}\left(X_k=-1\right)=\mathbb{P}\left(X_k=1\right)=\frac{1}{2}$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$, donc $S_n(\Omega)=[\![-n,n]\!]$.

19 Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

- Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on a

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X_k\right)=\sum_{x\in X_k(\Omega)}x\mathbb{P}\left(X_k=x\right)=-\mathbb{P}\left(X_1=-1\right)+\mathbb{P}\left(X_1=1\right)=0}$$

ce qui donne $\boxed{\mathbb{E}\left(S_n\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_k\right)=0}$.

- Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{V}\left(X_k\right)=\mathbb{E}\left(X_k^2\right)-\left(\mathbb{E}\left(X_k\right)\right)^2=\mathbb{E}\left(X_k^2\right)$ et

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X_k^2\right)=\sum_{x\in X_k(\Omega)}x^2\mathbb{P}\left(X_k=x\right)=\mathbb{P}\left(X_1=-1\right)+\mathbb{P}\left(X_1=1\right)=1}$$

donc et $\mathbb{V}\left(X_k\right)=1$.

Les variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes donc $\boxed{\mathbb{V}\left(S_n\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}\left(X_k\right)=n}$.

Soient S et T deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $S(\Omega)$ et $T(\Omega)$ sont égaux et finis, donc S et T admettent des espérances .

T et $-T$ suivent la même loi, ce qui revient à dire que si $t\in T(\Omega)$ alors $-t\in T(\Omega)$ et $\mathbb{P}\left(T=t\right)=\mathbb{P}\left(T=-t\right)$.

20 On a

$$\boxed{\mathbb{E}(\cos(S+T))=\mathbb{E}(\cos(S)\cos(T))-\mathbb{E}(\sin(S)\sin(T))}$$

comme S et T sont indépendantes alors $\cos(S)$ et $\cos(T)$ sont indépendantes, de même que $\sin(S)$ et $\sin(T)$ sont indépendantes, donc

$$\boxed{\mathbb{E}(\cos(S+T))=\mathbb{E}(\cos(S))\ \mathbb{E}(\cos(T))-\mathbb{E}(\sin(S))\ \mathbb{E}(\sin(T))}$$

par le théorème de transfert on a

$$\mathbb{E}(\sin(T)) = \sum_{t\in T(\Omega)} \sin(t)\mathbb{P}\left(T=t\right)$$

changeons la variable t par $-t$ en tenant compte que $\mathbb{P}\left(T=t\right)=\mathbb{P}\left(T=-t\right)$,

$$\mathbb{E}(\sin(T)) = \sum_{t\in T(\Omega)} \sin(-t)\mathbb{P}\left(T=-t\right) \;= -\sum_{t\in T(\Omega)} \sin(t)\mathbb{P}\left(T=t\right) = -\mathbb{E}(\sin(T))$$

donc $\mathbb{E}(\sin(T))=0$ et $\boxed{\mathbb{E}(\cos(S+T))=\mathbb{E}(\cos(S))\;\mathbb{E}(\cos(T))}$.

21 Soit $t\in\mathbb{R}$. Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que $\mathbb{E}\left(\cos\left(tS_n\right)\right)=\left(\cos(t)\right)^n$.

- Initialisation :

Soit $t\in\mathbb{R}$, on a $S_1=X_1$, le théorème de transfert donne

$$\mathbb{E}\left(\cos\left(tX_1\right)\right)=\sum_{x\in X_1(\Omega)}\cos\left(tx\right)\mathbb{P}\left(X_1=x\right)=\cos\left(-t\right)\mathbb{P}\left(X_1=-1\right)+\cos\left(t\right)\mathbb{P}\left(X_1=1\right)=\cos(t)$$

ainsi $\mathbb{E}\left(\cos\left(tS_1\right)\right)=\cos(t)$. Le résultat est donc vrai pour $n=1$.

- Hérédité :

Supposons le résultat vrai pour $n\geq 1$.

On a $S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$, d'après le théorème des coalitions les variables S_n et X_{n+1} sont indépendantes, de plus X_{n+1} et $-X_{n+1}$ suivent la même loi, la question (20) donne alors $\mathbb{E}\left(\cos\left(tS_{n+1}\right)\right)=\mathbb{E}\left(\cos\left(tS_n\right)\right)\mathbb{E}\left(\cos\left(tX_{n+1}\right)\right)$.

Les variables X_1 et X_{n+1} suivent la même loi donc $\mathbb{E}\left(\cos\left(tX_{n+1}\right)\right)=\mathbb{E}\left(\cos\left(tX_1\right)\right)=\cos(t)$, par hypothèse de récurrence on a $\mathbb{E}\left(\cos\left(tS_n\right)\right)=\left(\cos(t)\right)^n$, par suite $\mathbb{E}\left(\cos\left(tS_{n+1}\right)\right)=\left(\cos(t)\right)^{n+1}$, d'où le résultat est vrai pour $n+1$.

Ainsi on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in\mathbb{R}$, $\boxed{\mathbb{E}\left(\cos\left(tS_n\right)\right)=\left(\cos(t)\right)^n}$.

22

- Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a\neq 0$ et $|b|\leq|a|$. On a

$$|a+b| = \left|\;|a|\,\mathrm{signe}(a)+b\;\right| = \left|\;|a|+\mathrm{signe}(a)b\;\right|$$

comme $|a|+\mathrm{signe}(a)b\geq|b|+\mathrm{signe}(a)b\geq 0$ alors $\boxed{|a+b|=\;|a|+\mathrm{signe}(a)b}$.

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ on a $|S_{2n}|=|S_{2n-1}+X_{2n}|$ et S_{2n-1} est la somme d'un nombre impair de variables qui prennent les valeurs 1 ou -1 , donc $0\notin S_{2n-1}\left(\Omega\right)$ et $|S_{2n-1}|\geq 1$, ainsi $|X_{2n}|=1\leq|S_{2n-1}|$.

Le résultat précédent donne $|S_{2n}| = |S_{2n-1} + X_{2n}| = |S_{2n-1}| + \text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|S_{2n}|\right) &= \mathbb{E}\left(|S_{2n-1}|\right) + \mathbb{E}\left(\text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(|S_{2n-1}|\right) + \text{signe}(S_{2n-1})\mathbb{E}\left(X_{2n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(|S_{2n-1}|\right) \quad (\text{ car } \mathbb{E}\left(X_{2n}\right) = 0)
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}\left(|S_{2n}|\right) = \mathbb{E}\left(|S_{2n-1}|\right)}$.

23 Soit $s \in \mathbb{R}^*$ et $A \geq 0$ on a

$$\int_0^A \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt = \int_0^A \frac{1-\cos(|s|\,t)}{t^2}\,dt \overset{u=|s|t}{=} |s| \int_0^{|s|A} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,du$$

d'après la partie III l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$, par passage à la limite on obtient

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}|s|}$$

Le cas $s = 0$ est trivial .

24 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $\omega \in \Omega$ on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tS_n(\omega))}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}|S_n(\omega)|$ qu'on écrit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}|S_n|$.
- Montrons que $\mathbb{E}\left(|S_n|\right) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathbb{E}\left(\cos(tS_n)\right)}{t^2}\,dt$.

Comme $S_n(\Omega) = [\![-n,n]\!]$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|S_n|\right) &= \sum_{k\in[\![-n,n]\!]} |k|\,\mathbb{P}\left(S_n = k\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k\in[\![-n,n]\!]} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tk)}{t^2}\,dt\right) \mathbb{P}\left(S_n = k\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{+\infty} \sum_{k\in[\![-n,n]\!]} \frac{1-\cos(tk)}{t^2} \mathbb{P}\left(S_n = k\right)\right) dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\mathbb{E}\left(1\right) - \mathbb{E}\left(\cos(tS_n)\right)}{t^2}\,dt
\end{aligned}$$

ce qui donne alors $\mathbb{E}\left(|S_n|\right) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathbb{E}\left(\cos(tS_n)\right)}{t^2}\,dt$.

- D'après la question (21) on a $\mathbb{E}\left(\cos\left(tS_n\right)\right) = (\cos(t))^n$ donc $\boxed{\mathbb{E}\left(|S_n|\right) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^n}{t^2}\,dt}$

25 D'après la question (18) on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,dt = \frac{\pi(2p+1)!}{2^{2p+1}.(p!)^2}$ et la question (22) permet de conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}\left(|S_{2n}|\right) = \mathbb{E}\left(|S_{2n-1}|\right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}$$

Fin

CONCOURS COMMUN MINES ET PONTS
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2
SESSION 2024 - FILIÈRE MP

Durée: 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Phénomènes de seuil dans les graphes

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur à 1 .

On désigne par $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.

Le groupe symétrique des permutations de $[\![1,n]\!]$ est noté $\mathcal{S}_n$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté card(E) ou $|E|$.

Un **graphe** G est un couple (S,A) où :

- S désigne un ensemble fini non vide d'éléments appelés **sommets** du graphe G
- A désigne un ensemble éventuellement vide d'éléments appelés **arêtes** du graphe G, une arête étant un ensemble $\{s,s'\}$ où s et s' sont des sommets distincts de S.
  Un sommet n'appartenant à aucune arête est dit **isolé**.
  Par convention, le **graphe vide** est le couple d'ensembles vides $(\varnothing,\varnothing)$.
  On peut représenter un graphe non vide dans un plan à l'aide :
- de disques schématisant les sommets du graphe
- de segments reliant ces disques pour les arêtes du graphe.
  Par exemple, on a représenté sur la figure 1 , le graphe $G=(S,A)$ avec :

$$S=[\![1,9]\!] \text{ et } A=\{\{1,2\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,9\},\{2,8\}\}$$

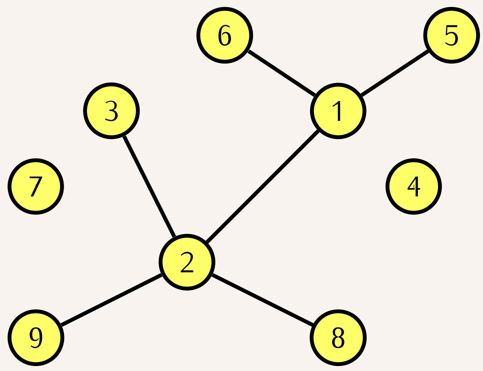


Figure 1- un graphe à 9 sommets et 6 arêtes

On remarquera que les arêtes sont constituées de deux sommets distincts, ce qui interdit la présence de «boucles» reliant un sommet à lui-même.

De plus, une même arête ne peut être présente plusieurs fois dans un graphe.

Un type de graphe utilisé dans ce problème est l'étoile.

Une étoile de centre s et à d branches avec d entier naturel non nul, est un graphe (S, A) où $S = \{s, s_1, s_2, \ldots, s_d\}$ est de cardinal $d+1$, et A est du type

$$\boxed{A = \{\{s, s_1\}, \{s, s_2\}, \ldots, \{s, s_d\}\}}$$

On a représenté figure 2 une étoile de centre 4 à 5 branches avec $S = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

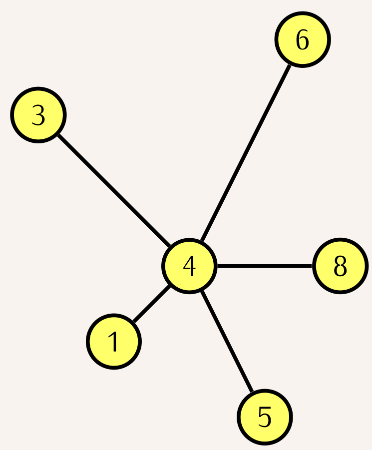


Figure 2 - une étoile à 5 branches

Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes; on dit que :

- G' est inclus dans G si $S' \subset S$ et $A' \subset A$

- G' est une copie de G s'il existe une bijection σ de S' dans S telle que :

$$\boxed{\forall\left(s', t'\right) \in S' \times S' \quad \left\{s', t'\right\} \in A' \Longleftrightarrow\left\{\sigma\left(s'\right), \sigma\left(t'\right)\right\} \in A}$$

Par exemple, le graphe de la figure 1 contient plusieurs copies d'étoiles à une branche (correspondant aux segments), plusieurs copies d'étoiles à deux branches, mais aussi une copie d'une étoile à 3 branches (de centre 1) et une copie d'une étoile à 4 branches (de centre 2).

Dans une première partie, on étudie quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence.

On introduit ensuite la notion de fonction de seuil en probabilité des graphes aléatoires.

Les deux parties qui suivent la première partie sont indépendantes de celle-ci, et sont consacrées à l'étude de deux exemples.

Partie I : Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

Soit $G=(S, A)$ un graphe non vide où $|S|=n$. Indexer arbitrairement les sommets de 1 à n revient à choisir une bijection (appelée aussi indexation) σ entre $\llbracket 1, n\rrbracket$ et S. On pourra alors noter :

$$\boxed{S=\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}}$$

où $\sigma(i)$ est le sommet d'index i.

Une indexation σ étant choisie, on définit la matrice d'adjacence $M_{G, \sigma}$ du graphe G associée à σ comme étant la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne est :

$$\boxed{\left(M_{G, \sigma}\right)_{i, j}= \begin{cases}1 & \text { si }\{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \\ 0 & \text { sinon }\end{cases}}$$

On remarquera d'une part que la matrice $M_{G, \sigma}$ est toujours symétrique (car pour tous i et j entiers, $\{i, j\}=\{j, i\}$) et d'autre part que les termes de la diagonale sont tous nuls (pas de boucle dans un graphe).

Voici par exemple la matrice d'adjacence $M_{G, \text{ id }}$ du graphe G représenté sur la figure 1 :

$$\boxed{M_{G, \mathrm{id}}=\left(\begin{array}{ccccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)}$$

Soit ρ une permutation du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et $M=\left(m_{i, j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Montrer que les matrices M et $\left(m_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ sont semblables.

En déduire que si $G=(S,A)$ est un graphe non vide, et si σ et σ' sont deux indexations de S, alors $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

2 Justifier qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable.

3 Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1.

4 Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2 et représenter un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent.

Si $G=(S,A)$ est un graphe non vide et si σ et σ' sont des indexations de S, comme les matrices $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique (ce que l'on ne demande pas de démontrer).

On notera χ_G ce polynôme caractéristique commun et on dira que χ_G **est le polynôme caractéristique du graphe** G.

Par convention, le polynôme caractéristique du graphe vide est le polynôme constant égal à 1.

5 Soit G un graphe et G' une copie de G. Justifier que $\chi_G=\chi_{G'}$.

6 Soit $G=(S,A)$ un graphe avec $|S|=n\geq 2$. On note $\chi_G(X)=X^n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kX^k$.

Donner la valeur de a_{n-1} et exprimer a_{n-2} à l'aide de $|A|$.

7 En déduire le polynôme caractéristique d'un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches avec $1\leq d\leq n-1$.

Déterminer alors les valeurs et vecteurs propres d'une matrice d'adjacence de ce graphe.

Si $G=(S,A)$ est un graphe non vide et si s appartient à S, on définit le graphe $G\backslash s$ comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est $S\backslash\{s\}$ et l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de A qui ne contiennent pas s.

Voici par exemple figure 3 un graphe G et le graphe $G\backslash 2$:

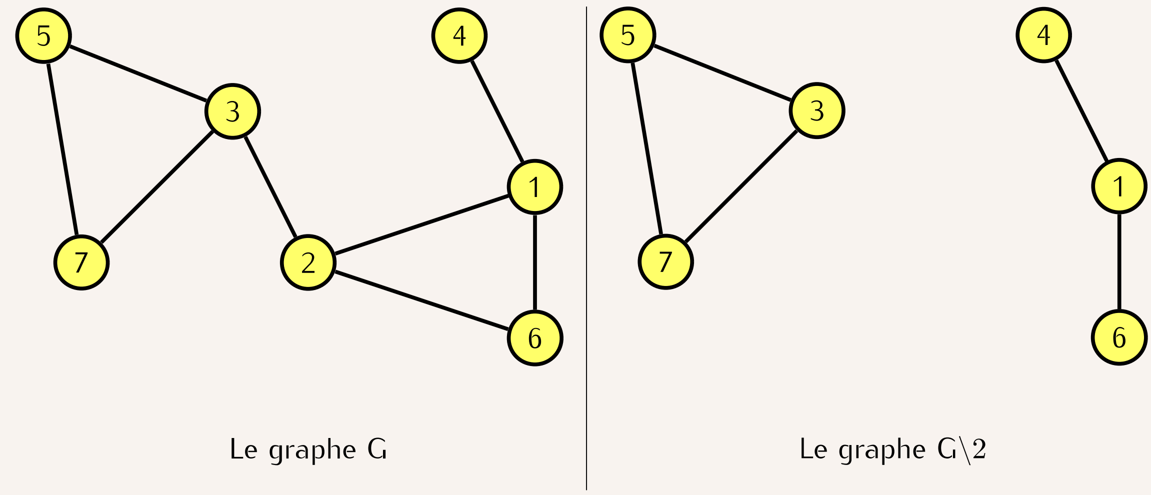


Figure 3

Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes non vides tels que S_1 et S_2 soient disjoints, c'est-à-dire tels que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Soit $s_1 \in S_1$ et soit $s_2 \in S_2$.

On définit le graphe $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \cup S_2$ et $A = A_1 \cup A_2 \cup \{\{s_1, s_2\}\}$.

8 Montrer que :

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1 \backslash s_1} \times \chi_{G_2 \backslash s_2}$$

9 Déterminer le polynôme caractéristique de la double étoile à d_1+d_2+2 sommets, constituée respectivement de deux étoiles disjointes à d_1 et d_2 branches, à qui l'on a ajouté une arête supplémentaire reliant les deux centres des deux étoiles.

Quel est le rang de la matrice d'adjacence de cette double étoile?

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que n est supérieur à 2 et on notera :

- N l'entier $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- Ω_n l'ensemble des graphes de sommets $S = [\![1, n]\!]$
- p_n un réel dépendant de n appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et $q_n = 1 - p_n$.

Pour tous i et j appartenant à $S = [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, on note $X_{\{i,j\}}$ l'application de Ω_n dans $\{0, 1\}$ telle que pour tout $G \in \Omega_n$ avec $G = (S, A)$:

$$X_{\{i,j\}}(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in A \\ 0 & \text{si } \{i, j\} \notin A \end{cases}$$

Ainsi, $\left(X_{\{i,j\}}=1\right)=\left\{G\in\Omega_n \mid X_{\{i,j\}}(G)=1\right\}$ est l'ensemble des graphes de Ω_n dont $\{i,j\}$ est une arête. Réciproquement, on remarquera aussi que pour $G=(S,A)$, on peut écrire

$$\{G\}=\bigcap_{\{i,j\}\in A}\left(X_{\{i,j\}}=1\right)\bigcap_{\{i,j\}\notin A}\left(X_{\{i,j\}}=0\right)$$

On admet l'existence d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega_n,\mathcal{P}(\Omega_n))$ telle que les applications $X_{\{i,j\}}$ soient des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p_n et indépendantes. On note $\mathcal{E}_n=(\Omega_n,\mathcal{P}(\Omega_n),\mathbb{P})$ l'espace probabilisé ainsi construit.

Autrement dit, pour un graphe G donné appartenant à Ω_n, la probabilité qu'une arête $\{i,j\}$ soit contenue dans G est p_n, et les arêtes apparaissent dans G de façon indépendante.

10 Soit $G=(S,A)\in\Omega_n$. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(\{G\})$ de l'événement élémentaire $\{G\}$ en fonction de p_n, q_n, N et $a=\text{card}(A)$.

Retrouver alors le fait que $\mathbb{P}(\Omega_n)=1$.

Dans la suite du problème on étudie la notion de fonction de seuil pour une propriété $\mathcal{P}_n$ vérifiée sur une partie des graphes de Ω_n.

Une **fonction de seuil** pour la propriété $\mathcal{P}_n$ est une suite $(t_k)_{k\geq 2}$ de réels strictement positifs tels que :

- si $p_n=o(t_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 0
- si $t_n=o(p_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 1.

Partie II : Une première fonction de seuil

Section A - Deux inégalités

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$.

11 Montrer que $\mathbb{P}(X>0)\leq\mathbb{E}(X)$.

12 Montrer que si $\mathbb{E}(X)\neq 0$, alors $\mathbb{P}(X=0)\leq\dfrac{\mathbb{V}(X)}{(\mathbb{E}(X))^2}$.

ndication: on remarquera que $[X=0]\subset[|X-\mathbb{E}(X)|\geq\mathbb{E}(X)]$.

Section B - Une fonction de seuil

13 Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire A_n représentant le nombre d'arêtes d'un graphe de Ω_n?

14 Montrer que si $p_n=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n>0)=0$.

15 Montrer que si $\dfrac{1}{n^2} = o(p_n)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n > 0) = 1$.

16 En déduire une propriété $\mathcal{P}_n$ et sa fonction de seuil associée.

Partie III : Fonction de seuil de la copie d'un graphe

Si $G = (S, A)$ est un graphe, on note s_G (resp. a_G) le cardinal de S (resp. A) .

Soit $G_0 = (S_0, A_0)$ un graphe particulier fixé. Par commodité d'écriture, on note $s_0 = s_{G_0}$ le cardinal de $S_0, a_0 = a_{G_0}$ le cardinal de A_0 et on suppose que $s_0 \geq 2$ et que $a_0 \geq 1$.

On va étudier la fonction de seuil de la propriété $\mathcal{P}_n$: «contenir une copie de G_0».

On note X_n^0 la variable aléatoire réelle discrète définie sur l'espace probabilisé $\mathcal{E}_n$ telle que pour $G \in \Omega_n$, l'entier $X_n^0(G)$ est égal au nombre de copies de G_0 contenues dans G.

On introduit :

- l'ensemble $\mathscr{C}_0$ des copies de G_0 dont les sommets sont inclus dans $[\![1, n]\!]$:

$$\mathscr{C}_0 = \{H \mid H \text{ est une copie de } G_0 \text{ et } H = (S_H, A_H) \text{ avec } S_H \subset [\![1, n]\!]\}$$

- pour un graphe $H = (S_H, A_H)$ avec $S_H \subset [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli X_H définie par :

$$\forall G \in \Omega_n \quad X_H(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \subset G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- le réel ω_0 défini par :

$$\omega_0 = \min_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geq 1}} \frac{s_H}{a_H}$$

17 Montrer que

$$\mathbb{E}(X_H) = p_n^{a_H}$$

18 Soit S_0' un ensemble fixé de cardinal s_0. On note c_0 le nombre des graphes dont l'ensemble des sommets est S_0' et qui sont des copies de G_0.

Exprimer le cardinal de $\mathscr{C}_0$ à l'aide de c_0 et en utilisant un majorant simple de c_0, justifier que le cardinal de $\mathscr{C}_0$ est inférieur à n^{s_0}.

19 Exprimer X_n^0 à l'aide de variables aléatoires du type X_H, et montrer que :

$$\mathbb{E}(X_n^0) = \sum_{H \in \mathscr{C}_0} \mathbb{P}(H \subset G) \leq n^{s_0} p_n^{a_0}$$

20 En déduire que si $p_n = \mathrm{o}\left(n^{-\omega_0}\right)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_n^0 > 0\right) = 0$.

Indication : on pourra introduire $H_0 \subset G_0$ réalisant le minimum donnant ω_0.

On suppose dorénavant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^{\omega_0} p_n\right) = +\infty$.

21 Montrer que l'espérance $\mathbb{E}\left(\left(X_n^0\right)^2\right)$ vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\left(X_n^0\right)^2\right) = \sum_{(H,H')\in\mathscr{C}_0^2} \mathbb{P}\left(H \cup H' \subset G\right) = \sum_{(H,H')\in\mathscr{C}_0^2} p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}$$

Pour $k \in [\![0, s_0]\!]$, on note :

$$\Sigma_k = \sum_{\substack{(H,H')\in\mathscr{C}_0^2 \\ s_{H\cap H'}=k}} \mathbb{P}\left(H \cup H' \subset G\right)$$

22 Montrer que $\Sigma_0 \leq \left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2$.

23 Soit $k \in [\![1, s_0]\!]$; montrer que :

$$\Sigma_k \leq \sum_{H\in\mathscr{C}_0} \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}$$

24 Justifier que pour tous entiers naturels q et r vérifiant $1 \leq q \leq r$, on a :

$$\binom{r}{q} r^{-q} \geq \frac{1}{q!}\left(1 - \frac{q-1}{q}\right)^q$$

et en déduire que pour $k \in [\![1, s_0]\!]$, on a $\Sigma_k = o\left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)^2\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

25 Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{V}\left(X_n^0\right)}{\left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2} = 0$ où $\mathbb{V}\left(X_n^0\right)$ désigne la variance de X_n^0.

26 Montrer alors que la suite $\left(k^{-\omega_0}\right)_{k\geq 2}$ est une fonction de seuil pour la propriété $\mathcal{P}_n$.

27 Retrouver le résultat de la question 16 et déterminer une fonction de seuil pour la propriété «contenir une copie de l'étoile à d branches» avec d entier fixé supérieur à 1.

Fin

Concours Commun Mines et Ponts

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 2

Session 2024 - Filière MP

Partie I : Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

Soit ρ une permutation du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et $M=(m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1

- Soit $(V_j)_{1\leq j\leq n}$la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et P_ρ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $P_\rho\ V_j=V_{\rho(j)}$

(*P_ρ matrice de permutation, on vérifie pour tous $\rho,\rho'\in\mathcal{S}_n$: $P_\rho P_{\rho'}=P_{\rho\rho'}$ et $P_{\rho-1}=(P_\rho)^{-1}$*) .

On a

$$P_\rho MV_j=P_\rho\left(\sum_{i=1}^n m_{i,j}V_i\right)=\sum_{i=1}^n m_{i,j}V_{\rho(i)}$$

ρ étant inversible donc

$$P_\rho MV_j=\sum_{i=1}^n m_{\rho^{-1}(i),j}V_i$$

de même on trouve

$$MP_\rho V_j=MV_{\rho(j)}=\sum_{i=1}^n m_{i,\rho(j)}V_i$$

ainsi

$$P_{\rho^{-1}}MP_\rho V_j=P_{\rho^{-1}}\left(\sum_{i=1}^n m_{i,\rho(j)}V_i\right)=\sum_{i=1}^n m_{i,\rho(j)}V_{\rho^{-1}(i)}$$

par suite

$$\left(P_{\rho^{-1}}MP_\rho\right)V_j=\sum_{i=1}^n m_{\rho(i),\rho(j)}V_i$$

comme $P_{\rho^{-1}}=(P_\rho)^{-1}$ alors $P_{\rho^{-1}}MP_\rho=(P_\rho)^{-1}MP_\rho=\left(m_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, ce qui prouve que les matrices M et $\left(m_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ sont semblables.

- Par définition si $M_{G,\mathrm{id}}=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ alors $M_{G,\sigma}=\left(a_{\sigma(i),\sigma(j)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, donc $M_{G,\sigma}=(P_\sigma)^{-1}M_{G,\mathrm{id}}P_\sigma$

ce qui donne

$$M_{G,\sigma}=(P_\sigma)^{-1}\left(P_{\sigma'}M_{G,\sigma'}(P_{\sigma'})^{-1}\right)P_\sigma=P_{\sigma^{-1}\sigma'}M_{G,\sigma'}\left(P_{\sigma^{-1}\sigma'}\right)^{-1}$$

ainsi $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

2 Une matrice d'adjacence est symétrique réelle, le théorème spectral assure qu'elle est diagonalisable.

3 Soit une matrice d'adjacence M non nulle telle que $\text{rg}(M) = 1$.

0 est donc valeur propre de M d'ordre supérieur à $n-1$, soit λ l'autre valeur propre de M .

On a $\text{Tr}(M) = \sum_{\alpha \in S_p(M)} \alpha = \lambda = 0$ donc $\text{Sp}(M) = \{0\}$, comme M est diagonalisable alors elle est égale à la matrice nulle, ce qui est absurde, par suite $\text{rg}M \geqslant 2$.

(Autre méthode : *M est la matrice d'adjacence d'un graphe non vide, il existe donc $i < j$ tels que $m_{i,j} = 1$, et par symétrie, $m_{j,i} = 1$. La sous matrice* $\begin{pmatrix} m_{i,i} & m_{i,j} \\ m_{j,i} & m_{j,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est de rang 2 donc* $\text{rg}M \geqslant 2$.)

4 • Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment une étoiles.

Il existe alors des entiers distincts $i_0, i_1, \ldots, i_d$ dans $[\![1;n]\!]$ tels que

$$m_{i,j} = m_{j,i} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = i_0 \text{ et } j \in \{i_1, \ldots, i_d\} \\ 0 \text{ si } i = i_0 \text{ et } j \notin \{i_1, \ldots, i_d\} \\ 0 \text{ si } i \neq i_0 \end{cases}$$

Posons $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de M, alors on a pour tout $j \in [\![1;n]\!]$

$$C_j = \begin{cases} V_{i_0} & \text{si } j \in \{i_1, \ldots, i_d\} \\ V_{i_1} + \cdots + V_{i_d} & \text{si } j = i_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

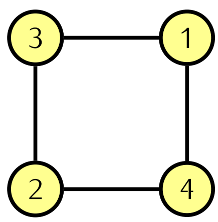
avec $(V_j)_{1 \leq j \leq n}$la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarquons que $\text{Vect}\,(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \text{vect}\,(V_{i_0}, V_{i_1} + \cdots + V_{i_d})$ et la famille $(V_{i_0}, V_{i_1} + \cdots + V_{i_d})$ est libre,

donc $\text{rg}M = \text{rg}\,(C_1, C_2, \ldots, C_n) = 2$.

• Soit $G = (S, A)$ avec : $S = [\![1,4]\!]$ et $A = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$, on a

$$M_{G,\text{id}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Le graphe G

le graphe G n'est pas étoilé et sa matrice d'adjacence $M_{G,\text{id}}$ est de rang 2 .

5 Soit $G' = (A', S')$ une copie de $G = (A, S)$, donc par définition il existe une bijection σ de S' dans S telle que

$$\boxed{\forall (s', t') \in S'^2 \quad \{s', t'\} \in A' \iff \{\sigma(s'), \sigma(t')\} \in A}$$

Ce qui signifie

$$\boxed{\left(M_{G',\mathrm{id}}\right)_{i,j} = 1 \iff \left(M_{G,\sigma}\right)_{i,j} = 1}$$

donc

$$\boxed{M_{G',\mathrm{id}} = M_{G,\sigma}}$$

d'après la question 1) les matrices $M_{G,\mathrm{id}}$ et $M_{G',\mathrm{id}}$ sont semblable d'où $\boxed{\chi_{G'} = \chi_G}$

6 On note $\chi_G(X) = \det(X\mathrm{I}_n - M_{G,\mathrm{id}}) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$.

- $M_{G,\mathrm{id}}$ est à diagonale nulle donc $\boxed{a_{n-1} = -\mathrm{Tr}\left(M_{G,\mathrm{id}}\right) = 0}$.
- Posons $M_{G,\mathrm{id}} = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $X\mathrm{I}_n - M_{G,\mathrm{id}} = (P_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $P_{i,j} = \begin{cases} X & \text{si } i = j \\ -m_{i,j} & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Par définition du déterminant on a

$$\boxed{\chi_G(X) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} P_{i,\sigma(i)}}$$

Remarquons que , pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on a

$$\boxed{\deg\left(\prod_{i=1}^{n} P_{i,\sigma(i)}\right) = \mathrm{Card}\{i \in [\![1;n]\!] \mid \sigma(i) = i\}}$$

Pour $\sigma = \mathrm{id}$ le degré de $\prod_{i=1}^{n} P_{i,\sigma(i)}$ est n et si σ est une transposition alors le degré de $\prod_{i=1}^{n} P_{i,\sigma(i)}$ est exactement égal à $n-2$, dans les autres cas le degré de $\prod_{i=1}^{n} P_{i,\sigma(i)}$ est strictement inférieur à $n-2$.

Soit la transposition $\tau = (i\ j)$ de $\mathcal{S}_n$, avec $i < j$, alors

$$\boxed{(-1)^{\varepsilon(\tau)} \prod_{i=1}^{n} P_{i,\tau(i)} = -m_{i,j}m_{j,i} \prod_{k\notin\{i,j\}} (X - m_{k,k}) = -m_{i,j}^2 X^{n-2}}$$

Ainsi en considérant toutes les transpositions le coefficient de X^{n-2} sera donné part donné par

$$\boxed{a_{n-2} = -\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2 \\ i<j}} m_{i,j}^2}$$

Dans cette somme il ne reste que les coefficients $m_{i,j} = 1$ et $i < j$, donc ceux qui représentent une arête dans A, d'où $\boxed{a_{n-2} = -|A|}$

- Une autre méthode :

$M_{G,\text{id}}$ est symétrique et réelle donc son polynôme caractéristique est scindé : $\chi_G(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$, les relations entre les coefficients et les racines donnent : $a_{n-2} = \sum_{1\le i<j\le n} \lambda_i\lambda_j$ qu'on écrit

$$a_{n-2} = \frac{1}{2}\left((\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)^2 - (\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2)\right)$$

mais $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \text{Tr}\left(M_{G,\text{id}}\right) = 0$ et $\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 = \text{Tr}\left(\left(M_{G,\text{id}}\right)^2\right)$ donc

$$a_{n-2} = \frac{-1}{2}\text{Tr}\left(\left(M_{G,\text{id}}\right)^2\right)$$

$M_{G,\text{id}}$ est symétrique alors $\text{Tr}\left(\left(M_{G,\text{id}}\right)^2\right) = \text{Tr}\left(M_{G,\text{id}}.M_{G,\text{id}}^{\top}\right)$. Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire usuel s'exprime par $\langle A,B\rangle = \text{Tr}\left(A.B^{\top}\right)$, ce qui donne pour toute matrice $M = (\alpha_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, $\text{Tr}\left(M.M^{\top}\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \alpha_{i,j}^2$

donc

$$a_{n-2} = \frac{-1}{2} \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} m_{i,j}^2 = -\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2 \\ i<j}} m_{i,j}^2 = -|A|$$

7 Soit $G=(S,A)$ un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches avec $1 \le d \le n-1$.

Reprenons des notations de la question 4) , $M = M_{G,\text{id}} = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ la matrice d'adjacence de G et $i_0, i_1, \ldots, i_d$ dans $[\![1;n]\!]$ des indices distincts tels que

$$m_{i,j} = m_{j,i} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = i_0 \text{ et } j \in \{i_1,\ldots,i_d\} \\ 0 \text{ si } i = i_0 \text{ et } j \notin \{i_1,\ldots,i_d\} \\ 0 \text{ si } i \neq i_0 \end{cases}$$

- D'après la question 4) on a $\text{rg}M = 2$ donc $\dim\text{Ker}M = n-2$ et 0 est une valeur propre de M de multiplicité au moins $n-2$, le spectre de M est donc de la forme $\text{Sp}(M) = \{0,\lambda,\mu\}$ par suite

$$\chi_G(X) = X^{n-2}(X-\lambda)(X-\mu) = X^n - (\lambda+\mu)X^{n-1} + \lambda\mu X^{n-2}$$

d'après la question 6) on a $\lambda+\mu = 0$ et $\lambda\mu = -|A|$, sachant que les sommets non isolés de G forment une étoiles à d branche alors $|A| = d$ et ainsi $\boxed{\chi_G = X^{n-2}\left(X^2-d\right) \text{ et } \text{Sp}(M) = \left\{0,\sqrt{d},-\sqrt{d}\right\}}$

Un calcul direct donne :

- Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in E_0(M)$, on a

$$MX=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} m_{1,j}x_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n} m_{n,j}x_j\end{pmatrix} \text{ avec } \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j=\begin{cases} x_{i_1}+\cdots+x_{i_d} & \text{si} \quad i=i_0\\ x_{i_0} & \text{si} \quad i\in\{i_1,\ldots,i_d\}\\ 0 & \text{si} \quad i\notin\{i_0,i_1,\ldots,i_d\}\end{cases}$$

donc

$$MX=0\Leftrightarrow\begin{cases} x_{i_1}+\cdots+x_{i_d}=0\\ x_{i_0}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_{i_1}=-x_{i_2}-\cdots-x_{i_d}\\ x_{i_0}=0\\ x_j\in\mathbb{R}\ ,\ j\notin\{i_0,i_1,\ldots,i_d\}\end{cases}$$

ainsi $\boxed{E_0(M)=\text{Vect}\left(\{V_j, j\notin\{i_0,i_1,\ldots,i_d\}\ \}\cup\{V_{i_k}-V_{i_1}, j\notin [\![2;d]\!]\}\right)}$

- Soit $\lambda\in\left\{\sqrt{d},-\sqrt{d}\right\}$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in E_\lambda(M)$, donc

$$MX=\lambda X\Leftrightarrow\begin{cases} x_{i_1}+\cdots+x_{i_d}=\lambda x_{i_0}\\ x_{i_0}=\lambda x_{i_1}=\ldots=\lambda x_{i_d}\\ x_j=0\ ,\ j\notin\{i_0,i_1,\ldots,i_d\}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \lambda^2 x_{i_0}=dx_{i_0}\ \text{(évident)}\\ x_{i_1}=\ldots=x_{i_d}=\frac{1}{\lambda}x_{i_0}\\ x_j\in\mathbb{R}\ ,\ j\notin\{i_0,i_1,\ldots,i_d\}\end{cases}$$

ce qui donne $X=V_{i_0}+\frac{1}{\lambda}V_{i_1}+\cdots+\frac{1}{\lambda}V_{i_d}$,ainsi $\boxed{E_\lambda(M)=\text{Vect}\left(\lambda V_{i_0}+V_{i_1}+\cdots+V_{i_d}\right)\ avec \lambda\in\left\{\sqrt{d},-\sqrt{d}\right\}}$

8 Soient $G_1=(S_1,A_1)$ et $G_2=(S_2,A_2)$ deux graphes non vides tels que $S_1\cap S_2=\varnothing$, $s_1\in S_1$ et $s_2\in S_2$.

On définit le graphe $G=(S,A)$ avec $S=S_1\cup S_2$ et $A=A_1\cup A_2\cup\{\{s_1,s_2\}\}$.

Posons $S_1=\{s_{1,1},...,s_{p,1}\}$ et $S_2=\{s_{1,2},...,s_{q,2}\}$ avec $n=p+q$, $s_1=s_{1,1}$ et $s_2=s_{1,2}$.

Au début nous allons définir une nouvelle indexation de G qui va nous simplifier le travail :

- Soient σ_1 et σ_2 deux indexations de S_1 et S_2 définies par :

$$\begin{cases}\sigma_1(i)=s_{i,1} \text{ si } i\in[\![1;p]\!]\\ \sigma_2(i)=s_{i,2} \text{ si } i\in[\![1;q]\!]\end{cases}$$

ce qui donne deux copies de G_1 et de G_2 , notées $G_1'=(S_1',A_1')$ et $G_2'=(S_2',A_2')$, avec $A_1'=[\![1;p]\!]$ et $A_2'=[\![1;q]\!]$.

Une indexation de $S = S_1 \cup S_2$ est donnée par

$$\sigma(k) = \begin{cases} \sigma_1(k) & \text{si } k \in [\![1;p]\!] \\ \sigma_2\,(k-p) & \text{si } k \in [\![p+1;n]\!] \end{cases}$$

on obtient donc une copie $G' = (S', A')$ de G telle que $S' = S'_1 \cup S'_2$ et $A' = A'_1 \cup A'_2 \cup \{\{1, p+1\}\}$.

- La matrice d'adjacence s'écrit alors

$$M_{G',\sigma} = \left(\begin{array}{c|c} M_{G'_1,\sigma_1} & E_{1,1} \\ \hline E_{1,1} & M_{G'_2,\sigma_2} \end{array}\right)$$

avec $E_{1,1} = (\delta_{1,i}\delta_{1,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est la première matrice de la base canonique de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Ce qui donne

$$\chi_G(X) = \chi_{G'}(X) = \left|\begin{array}{c|c} X\mathrm{I}_p - M_{G'_1,\sigma_1} & -E_{1,1} \\ \hline -E_{1,1} & X\mathrm{I}_q - M_{G'_2,\sigma_2} \end{array}\right|$$

Notons, pour simplifier, les matrices avec leurs colonnes

$$\left(\begin{array}{c|c} X\mathrm{I}_p - M_{G'_1,\sigma_1} & 0 \\ \hline 0 & X\mathrm{I}_q - M_{G'_2,\sigma_2} \end{array}\right) = [C_1|C_2|...|C_n\ ]$$

et $X\mathrm{I}_n - M_{G',\sigma} = [C_1 - V_{p+1}|C_2|...|C_{p+1} - V_1|...|C_n]$, avec $(V_j)_{1\leq j\leq n}$la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Le déterminant est $n-$linéairie donc

$$\chi_G(X) = \underbrace{\det([C_1|...|C_n\ ])}_{\Delta_1} - \underbrace{\det([V_{p+1}|C_2|...|C_n\ ])}_{\Delta_2} - \underbrace{\det([C_1|...|V_1|...|C_n\ ])}_{\Delta_3} + \underbrace{\det([V_{p+1}|C_2|...|V_1|...|C_n\ ])}_{\Delta_4}$$

- ▶ Le déterminant Δ_1 est diagonale par blocs donc $\Delta_1{=}\chi_{G'_1}(X)\chi_{G'_2}(X){=}\chi_{G_1}(X)\chi_{G_2}(X)$
- ▶ Δ_2 et Δ_3 sont les déterminants d'une matrice et de sa transposée donc ils sont égaux.

Remarquons que la famille $(V_{p+1}, C_{p+1}, ..., C_n)$ est liée, car on a

$$[V_{p+1}|C_{p+1}|...|C_n\ ] = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & \\ \vdots & X\mathrm{I}_q - M_{G'_2,\sigma_2} \\ 0 & \end{array}\right)$$

le bloc d'en haut est nul et ce lui d'en bas contient $q+1$ vecteurs de $\mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, donc ils sont liés, ce qui donne $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$.

► On développe le déterminant Δ_4 par rapport à la première colonne, le terme d'indice $(p+1,1)$ vaut 1 , on obtient un déterminant d'ordre $n-1$, puis on développe ce nouveau déterminant par rapport à la p ième colonne , le terme d'indice $(1,p)$ vaut 1 , ce qui revient à éliminer la première et la $p+1$ ième ligne ainsi que la première et $p+1$ ième colonne du déterminant Δ_1, ce qui donne

$$\Delta_4=(-1)^{2+p}(-1)^{1+p}\left|\begin{array}{c|c} \left[X\mathrm{I}_p-M_{G_1',\sigma_1}\right]_{1,1} & 0 \\ \hline 0 & \left[X\mathrm{I}_q-M_{G_2',\sigma_2}\right]_{1,1}\end{array}\right|$$

avec $\left[X\mathrm{I}_p-M_{G_1',\sigma_1}\right]_{1,1}$ la sous matrice de $X\mathrm{I}_p-M_{G_1',\sigma_1}$obtenue en éliminant la première ligne et la première colonne , ce qui revient à éliminer les arêtes de G_1' qui contiennent le sommet $\{1\}$, donc c'est une matrice d'adjacence de $G_1'\backslash 1$ par suite

$$\det\left(\left[X\mathrm{I}_p-M_{G_1',\sigma_1}\right]_{1,1}\right)=\chi_{G_1'\backslash 1}(X)$$

comme $G_1'\backslash 1$ est une copie de $G_1\backslash s_1$ alors $\chi_{G_1'\backslash 1}=\chi_{G_1\backslash s_1}$, de même on a

$$\det\left(\left[X\mathrm{I}_q-M_{G_2',\sigma_2}\right]_{1,1}\right)=\chi_{G_2\backslash s_2}(X)$$

ce qui prouve que $\Delta_4=-\chi_{G_1\backslash s_1}(X)\ \chi_{G_2\backslash s_2}(X)$

On en déduit donc $\boxed{\chi_G(X)=\chi_{G_1}(X)\times\chi_{G_2}(X)-\chi_{G_1\backslash s_1}(X)\times\chi_{G_2\backslash s_2}(X)}$

9 Soient G_1 et G_2 deux étoiles disjointes de sommets respectifs s_1 et s_2 et soit G la réunion des deux graphes en ajoutant l'arête $\{s_1,s_2\}$. Selon la question précédente

$$\chi_G(X)=\chi_{G_1}(X)\times\chi_{G_2}(X)-\chi_{G_1\backslash s_1}(X)\times\chi_{G_2\backslash s_2}(X)$$

- On a $\chi_{G_1}(X)=X^{d_1-2}\left(X^2-d_1\right)$ et $\chi_{G_2}(X)=X^{d_2-2}\left(X^2-d_2\right)$

- Les graphes $G_1\backslash s_1$ et $G_2\backslash s_2$ sont de sommets isolés, donc leurs matrices d'adjacences sont nulles ce qui donne $\chi_{G_1\backslash s_1}(X)=X^{d_1-1}$ et $\chi_{G_2\backslash s_2}(X)=X^{d_2-1}$.

Par conséquent on a $\chi_G(X)=X^{d_1+d_2-4}\left(X^2-d_1\right)\left(X^2-d_2\right)-X^{d_1+d_2-2}$, d'où

$\boxed{\chi_G(X)=X^{d_1+d_2-4}\left(X^4-\left(d_1+d_2+1\right)X^2+d_1d_2\right)}$

- La matrice M , d'adjacence de G est diagonalisable , donc $\mathrm{Ker}\,(M)$ est de dimension égale à la multiplicité de 0 dans χ_G , ainsi $\mathrm{dimKer}\,(M)=d_1+d_2-4$ par suite $\boxed{\mathrm{rg}(M)=d_1+d_2-\mathrm{dimKer}\,(M)=4}$.

10

- Pour tous $i,j,i',j' \in S$, les événements $\left[X_{\{i,j\}}=1\right]$ et $\left[X_{\{i',j'\}}=0\right]$ sont mutuellement indépendants,

de l'expression

$$\{G\}=\left(\bigcap_{\{i,j\}\in A}\left[X_{\{i,j\}}=1\right]\right)\bigcap\left(\bigcap_{\{i,j\}\in A}\left[X_{\{i,j\}}=0\right]\right)$$

on a

$$\mathbb{P}(\{G\})=\prod_{\{i,j\}\in A}\mathbb{P}\left(X_{\{i,j\}}=1\right)\times\prod_{\{i,j\}\notin A}\mathbb{P}\left(X_{\{i,j\}}=0\right)$$

avec $\mathbb{P}\left(X_{\{i,j\}}=1\right)=p_n$ si $\{i,j\}\in A$, $\mathbb{P}\left(X_{\{i,j\}}=0\right)=q_n$ si $\{i,j\}\notin A$, $|A|=a$ et $\left|\overline{A}\right|=N-a$, donc $\mathbb{P}(\{G\})=p_n^a q_n^{N-a}$

- Pour tout $k\in[\![0;N]\!]$, posons

$$\Delta_k=\{G=(S,A)\in\Omega_n \mid \mathrm{Card}A=k\}$$

on a

$$\Omega_n=\bigcup_{k\in[\![0;N]\!]}\Delta_k$$

qui est une réunion disjointe ($(\Delta_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une partition de Ω_n) donc

$$\mathbb{P}(\Omega_n)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{G\in\Delta_k}\mathbb{P}(\{G\})=\sum_{k=0}^{N}p_n^k q_n^{N-k}\mathrm{Card}\Delta_k$$

Posons $\mathcal{D}$ l'ensemble de toutes les parties de cardinal 2 de $[\![0;n]\!]$ et pour tout $k\in[\![0;n]\!]$ $\mathcal{P}_k(\mathcal{D})$ l'ensemble de toutes les parties de cardinal k de $\mathcal{D}$.

Pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, l'application qui à $G=(S,A)$ associe A est une bijection de Δ_k vers $\mathcal{P}_k(\mathcal{D})$ donc

$$\mathrm{Card}\Delta_k=\mathrm{Card}\mathcal{P}_k(\mathcal{D})=\binom{N}{k}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\Omega)=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}p_n^k(1-p_n)^{N-k}=1$$

Partie II : Une première fonction de seuil

Section A - Deux inégalités

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$.

11 On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X>0)\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(X>0) \leqslant \mathbb{E}(X)}$.

12 Supposons que $\mathbb{E}(X) \neq 0$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ on a si $X(\omega) = 0$ alors $|X(\omega) - \mathbb{E}(X)| = \mathbb{E}(X)$ par suite $[X=0] \subset [\,|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \mathbb{E}(X)]$.

On en déduit que $\mathbb{P}(X = 0) \leqslant \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \mathbb{E}(X)\right)$ et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $\boxed{\mathbb{P}(X=0) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X)^2}}$

Section B - Une fonction de seuil

13 La variable A_n s'écrit

$$A_n = \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{D}} X_{\{i,j\}}$$

où $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble de toutes les parties de cardinal 2 de $[\![1;n]\!]$, $\mathrm{Card}\mathcal{D} = N$.

Les variables $X_{\{i,j\}}$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n . Pout tout $t \in [-1,1]$, la fonction génératrice de A_n est donnée par

$$\begin{aligned}G_{A_n}(t) &= \prod_{\{i,j\}\in\mathcal{D}} G_{X_{\{i,j\}}}(t) \\ &= (q_n + p_n t)^N \\ &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p_n^k q_n^{N-k} t^k\end{aligned}$$

donc la variable A_n suit la loi binomiale de paramètres (N, p_n) .

14 On suppose que $p_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,on a

$$\mathbb{P}(A_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(A_n = 0) = 1 - (1-p_n)^N$$

comme $N = \frac{n(n-1)}{2}$ alors

$$\begin{aligned}(1-p_n)^N &= \exp\left(\frac{n^2+o(n^2)}{2}\left(-p_n + o(p_n)\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{-p_n n^2}{2}\left(1+o(1)\right)\right)\end{aligned}$$

ainsi $(1-p_n)^N \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n > 0) = 0}$.

15 On suppose que $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o(p_n)$

D'après la question 12. on a

$$\mathbb{P}(A_n = 0) \leqslant \frac{\mathbb{V}(A_n)}{\mathbb{E}(A_n)^2}$$

La variable A_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(N, p_n)$ donc

$$\mathbb{E}(A_n) = Np_n \text{ et } \mathbb{V}(A_n) = Np_n(1-p_n)$$

ce qui donne

$$\frac{\mathbb{V}(A_n)}{\mathbb{E}(A_n)^2} = \frac{1-p_n}{Np_n} \leqslant \frac{1}{Np_n}$$

Comme $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o(p_n)$ alors $n^2 p_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$ et donc $\frac{1}{Np_n} = \frac{2}{n(n-1)p_n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$.

On en déduit que $\mathbb{P}(A_n = 0) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$ et puisque $\mathbb{P}(A_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(A_n = 0)$ alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n > 0) = 1}$.

16 L'étude de l'événement $[A_n > 0]$ nous impose la propriété suivante : $\mathscr{P}_n$ « Un graphe G choisi aléatoirement possède au moins une arête » . La fonction de seuil de $\mathscr{P}_n$ est la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 2}$.

Partie III : Fonction de seuil de la copie d'un graphe

17 Rappelons que Ω_n l'ensemble des graphes de sommets $S = [\![1, n]\!]$, donc pour tout $G \in \Omega_n$ on a

$$H \subset G \Longleftrightarrow A_H \subset A_G \Longleftrightarrow A_G = A_H \cup B \text{ avec } B \subset \mathcal{D} \setminus A_H$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}[X_H = 1\,] &= \{G \in \Omega_n \mid A_G = A_H \cup B \text{ avec } B \subset \mathcal{D}\backslash A_H\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{N-a_H} \left(\bigcup_{\substack{B\subset\mathcal{D}\backslash A_H \\ |B|=k}} \{G \in \Omega_n \mid A_G = A_H \cup B\ \} \right)\end{aligned}$$

la réunion étant disjointe donc

$$\mathbb{P}\left(X_H = 1\right) = \sum_{k=0}^{N-a_H} \sum_{\substack{B\subset\mathcal{D}\backslash A_H \\ |B|=k}} \mathbb{P}\left(\{(S, A_H \cup B)\ \}\right)$$

d'après la question 10) on a $\mathbb{P}(\{(S, A_H \cup B)\ \}) = p_n^{a_H+|B|} q_n^{N-a_H-|B|}$, et on sait que

$$\operatorname{Card}\{B \subset \mathcal{D}\backslash A_H \mid\ |B| = k\} = \binom{N-a_H}{k}$$

par suite

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_H = 1\right) &= \sum_{k=0}^{N-a_H} \binom{N-a_H}{k} p_n^{a_H+k} q_n^{N-a_H-k} \\ &= p_n^{a_H} \sum_{k=0}^{N-a_H} \binom{N-a_H}{k} p_n^{ak} q_n^{N-a_H-k} \\ &= p_n^{a_H}\end{aligned}$$

Donc la variable X_H suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n^{a_H}$, ainsi $\boxed{\mathbb{E}\left(X_H\right) = p_n^{a_H}}$.

18

- L'ensemble $\mathscr{C}_0$ des copies de G_0 dont les sommets sont inclus dans $[\![1, n]\!]$ s'écrit

$$\mathscr{C}_0 = \bigcup_{\substack{S\subset[\![1,n]\!] \\ |S|=s_0}} \{H \mid H \text{ une copie de } G_0 \text{ et } H = (S, A_H)\ \}$$

on a $\operatorname{Card}\{H \mid H \text{ une copie de } G_0 \text{ et } H = (S, A_H)\ \} = c_0$ donc $\boxed{|\mathscr{C}_0| = \binom{n}{s_0} c_0}$

- On sait qu'un graphe $H = (S_0', A_H)$ est une copie de G_0 s'il existe une bijection σ de S_0' telle que

$$\forall (s,t) \in S_0' \times S_0' \quad \{s,t\} \in A_H \iff \{\sigma(s), \sigma(t)\} \in A_{G_0}$$

ainsi l'application de $\{H \mid H \text{ une copie de } G_0 \text{ et } H = (S_0', A_H)\ \}$ vers l'ensemble des bijections σ de S_0', qui a H associe σ est surjective , donc $\operatorname{Card}\{H \mid H \text{ une copie de } G_0 \text{ et } H = (S_0', A_H)\ \} = c_0 \leq s_0!$.

On en déduit que

$$|\mathscr{C}_0| = \binom{n}{s_0} c_0 = \frac{n(n-1)\ldots(n-s_0+1)}{s_0!} c_0 \leq n^{s_0}$$

19 On a pour tout $G \in \Omega_n$, $X_n^0(G)$ est le nombre de copies de G_0 contenues dans G et $X_H(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \subset G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc

$$X_n^0 = \sum_{H \in \mathscr{C}_0} X_H$$

et

$$\mathbb{E}\left(X_n^0\right) = \sum_{H \in \mathscr{C}_0} \mathbb{E}\left(X_H\right)$$

d'après la question 17) $\mathbb{E}\left(X_H\right) = \mathbb{P}\left(X_H = 1\right) = \mathbb{P}(H \subset G)$ par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X_n^0\right) &= \sum_{H \in \mathscr{C}_0} \mathbb{P}(H \subset G) \\ &= \sum_{H \in \mathscr{C}_0} p_n^{a_H} \\ &= \sum_{H \in \mathscr{C}_0} p_n^{a_0} \\ &= p_n^{a_0} |\mathscr{C}_0| \end{aligned}$$

la question 17) donne alors $\boxed{\mathbb{E}\left(X_n^0\right) = \sum_{H \in \mathscr{C}_0} \mathbb{P}(H \subset G) \leq n^{s_0} p_n^{a_0}}$

20 Puisque l'ensemble $\{H \subset G_0 \mid a_H \geq 1\}$ est fini alors la valeur $\omega_0 = \min\limits_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geq 1}} \frac{s_H}{a_H}$ existe et elle est atteinte en un $H_0 \subset G_0$, donc $\omega_0 = \frac{s_{H_0}}{a_{H_0}}$.

- Définissons sur $\mathcal{E}_n$, la variable aléatoire réelle discrète Y_n telle que pour $G \in \Omega_n$, l'entier $Y_n(G)$ est le nombre de copies de H_0 contenues dans G. Les variables Y_n et X_n^0 se comportent de la même manière vu qu'on a changé G_0 par H_0 .

Puisque $H_0 \subset G_0$ alors toute copie de G_0 contient au moins une copie de H_0 , par conséquent on a$X_n^0 \leq Y_n$. L'inégalité démontrée dans la question 19) et la croissance de l'espérance donne :

$$\mathbb{E}\left(X_n^0\right) \leq \mathbb{E}\left(Y_n\right) \leq n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}}$$

On a $p_n = o\left(\frac{1}{n^{\omega_0}}\right)$ donc

$$n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}} = o\left(n^{s_{H_0} - \omega_0 a_{H_0}}\right) = o(1)$$

on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(X_n^0\right) = 0.}$

- Ecrivons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_n^0 > 0\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(X_n^0 = k\right)\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{E}\left(X_n^0 = k\right)\\ &\leqslant \mathbb{E}\left(X_n^0\right)\end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_n^0 > 0\right) = 0\ .}$

21 On a $X_n^0 = \sum_{H\in\mathscr{C}_0} X_H$ donc

$$\left(X_n^0\right)^2 = \sum_{H,H'\in\mathscr{C}_0} X_H X_{H'}$$

et par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}\left(\left(X_n^0\right)^2\right) = \sum_{H,H'\in\mathscr{C}_0} \mathbb{E}\left(X_H X_{H'}\right)$$

$X_H X_{H'}$ suit aussi une loi de Bernoulli et

$$\begin{aligned}\left[X_H X_{H'} = 1\right] &= \left[X_H = 1\right] \cap \left[X_{H'} = 1\right]\\ &= \left\{G \in \Omega_n \mid H \subset G\right\} \cap \left\{G \in \Omega_n \mid H' \subset G\right\}\\ &= \left\{G \in \Omega_n \mid H \cup H' \subset G\right\}\\ &= \left[X_{H\cup H'} = 1\right]\end{aligned}$$

d'après la question 17)

$$\mathbb{P}\left(X_H X_{H'} = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_{H\cup H'} = 1\right) = p_n^{a_{H\cup H'}}$$

Par définition $a_{H\cup H'} = |A_H \cup A_{H'}|$ donc

$$a_{H\cup H'} = |A_H| + |A_{H'}| - |A_H \cap A_{H'}| = a_H + a_{H'} - a_{H\cap H'}$$

comme H et H' sont dans $\mathscr{C}_0$ alors $a_H = a_{H'} = a_0$, d'où $a_{H\cup H'} = 2a_0 - a_{H\cap H'}$.

On en déduit que $\mathbb{P}\left(X_{H\cup H'} = 1\right) = \mathbb{P}\left(H \cup H' \subset G\right) = p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}$, ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\left(X_n^0\right)^2\right) = \sum_{(H,H')\in\mathscr{C}_0^2} \mathbb{P}\left(H \cup H' \subset G\right) = \sum_{(H,H')\in\mathscr{C}_0^2} p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}}$$

22 On a

$$\Sigma_0 = \sum_{\substack{(H,H')\in\mathscr{C}_0^2\\ s_{H\cap H'}=0}} \mathbb{P}\left(H\cup H'\subset G\right) = \sum_{\substack{(H,H')\in\mathscr{C}_0^2\\ s_{H\cap H'}=0}} p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}$$

remarquons que $s_{H\cap H'}=0 \Leftrightarrow a_{H\cap H'}=0 \Leftrightarrow H\cap H'=\varnothing$, donc

$$\Sigma_0 = \sum_{\substack{(H,H')\in\mathscr{C}_0^2\\ s_{H\cap H'}=0}} p_n^{2a_0} \leq p_n^{2a_0}\left|\mathscr{C}_0\right|^2$$

dans la question 19) on a établi que $\mathbb{E}\left(X_n^0\right)=p_n^{a_0}\left|\mathscr{C}_0\right|$ d'où l'on a $\boxed{\Sigma_0 \leq \left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2}$.

23 Soit $k\in[\![1,s_0]\!]$; on a

$$\Sigma_k = \sum_{H\in\mathscr{C}_0}\ \sum_{\substack{H'\in\mathscr{C}_0\\ s_{H\cap H'}=k}} p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}$$

Remarquons que dans la deuxième somme les $a_{H\cap H'}$ ne sont pas forcément constants !.

Par définition de ω_0 on a

$$\forall H'\in\Omega_H \quad a_{H\cap H'} \leqslant \frac{s_{H\cap H'}}{\omega_0} = \frac{k}{\omega_0}$$

puisque $p_n\in\,]0;1[$ alors

$$\forall H'\in\Omega_H \quad p_n^{-a_{H\cap H'}} \leqslant p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\Sigma_k &\leq \sum_{H\in\mathscr{C}_0} p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}}\left(\sum_{\substack{H'\in\mathscr{C}_0\\ s_{H\cap H'}=k}} 1\right)\\
&\leq \sum_{H\in\mathscr{C}_0} p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}}\operatorname{Card}\left\{\ H'\in\mathscr{C}_0 \mid s_{H\cap H'}=k\right\}\\
&\leq \sum_{H\in\mathscr{C}_0} p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}}\operatorname{Card}\left\{\ H'\in\mathscr{C}_0 \mid |S_H\cap S_{H'}|=k\right\}
\end{aligned}$$

Soit $A\in\mathcal{P}_{s_0}\left([\![1,n]\!]\right)$, posons $F_A=\left\{B\in\mathcal{P}_{s_0}\left([\![1,n]\!]\right)\ \mid |A\cap B|=k\right\}$.

On a la partition

$$\left\{H'\in\mathscr{C}_0 \mid |S_H\cap S_{H'}|=k\ \right\} = \bigcup_{B\in F_{S_H}}\left\{\ H'\in\mathscr{C}_0 \mid S_{H'}=B\right\}$$

donc

$$\text{Card}\left\{\ H' \in \mathscr{C}_0 \mid |S_H \cap S_{H'}| = k\right\} = \sum_{B \in F_{S_H}} \text{Card}\left\{\ H' \in \mathscr{C}_0 \mid S_{H'} = B\right\}$$

d'après la question 18) on a $\text{Card}\left\{\ H' \in \mathscr{C}_0 \mid S_{H'} = B\right\} = c_0$, ce qui donne

$$\text{Card}\left\{\ H' \in \mathscr{C}_0 \mid |S_H \cap S_{H'}| = k\right\} = c_0 \text{Card}\left(F_{S_H}\right)$$

Remarquons que

$$B \in F_A \Leftrightarrow \exists!(C, D) \in \mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{s_0-k}([\![1, n]\!] \setminus A) \text{ tel que } B = C \cup D$$

ce qui définie une bijection entre F_A et $\mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{s_0-k}([\![1, n]\!] \setminus A)$, donc

$$\text{Card} F_A = \text{Card}\left(\mathcal{P}_k(A)\right) \text{Card}\left(\mathcal{P}_{s_0-k}([\![1, n]\!] \setminus A)\right) = \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}$$

on en déduit

$$\text{Card}\left\{\ H' \in \mathscr{C}_0 \mid |S_H \cap S_{H'}| = k\right\} = \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0$$

ainsi $\Sigma_k \leq \sum_{H \in \mathscr{C}_0} \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}} \quad (1)$

24 On suppose que $\lim_{n \to +\infty} \left(n^{\omega_0} p_n\right) = +\infty$.

- On a pour tout q et r vérifiant $1 \leq q \leq r$

$$\binom{r}{q} r^{-q} = \frac{r(r-1)\cdots(r-q+1)}{q!} r^{-q} = \frac{1}{q!}\left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{2}{r}\right)\cdots\left(1 - \frac{q-1}{r}\right)$$

pour tout $k \in [\![1, q-1]\!]$ $\left(1 - \frac{2}{r}\right) \geqslant \left(1 - \frac{q-1}{q}\right)$ donc

$$\binom{r}{q} r^{-q} \geq \frac{1}{q!}\left(1 - \frac{q-1}{q}\right)^q \quad (2)$$

- La formule (1) de la question 23) s'écrit en fait

$$\Sigma_k \leq |\mathscr{C}_0| \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}}$$

On sait que $\mathbb{E}\left(X_n^0\right) = p_n^{a_0} |\mathscr{C}_0|$ et $|\mathscr{C}_0| = \binom{n}{s_0} c_0$ donc

$$\begin{aligned}\Sigma_k &\leqslant \left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2 \frac{1}{|\mathscr{C}_0|} c_0 \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} \\ &\leqslant \left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2 \frac{\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}}{\binom{n}{s_0}} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}\end{aligned}$$

puisque $\binom{n-s_0}{s_0-k} \leq \frac{(n-s_0)^{s_0-k}}{k!} \leq \frac{n^{s_0-k}}{k!}$ alors

$$\frac{\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}}{\binom{n}{s_0}} \leq \binom{s_0}{k} \frac{k!}{\binom{n}{s_0} n^{k-s_0}}$$

l'inégalité (2) donne $\frac{1}{\binom{n}{s_0} n^{k-s_0}} \leq \frac{1}{n^k} s_0! \left(1 - \frac{s_0-1}{s_0}\right)^{-s_0}$ donc

$$\frac{\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}}{\binom{n}{s_0}} \leq \underbrace{\left(k!\binom{s_0}{k} s_0! \left(1 - \frac{s_0-1}{s_0}\right)^{-s_0}\right)}_{C} \frac{1}{n^k}$$

ainsi il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\Sigma_k \leqslant \left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2 \frac{C}{(n^{\omega_0} p_n)^{\frac{k}{\omega_0}}}$$

Par hypothèse $\lim_{n\to+\infty} (n^{\omega_0} p_n) = +\infty$ donc $\boxed{\Sigma_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2\right)}$.

- La formule de Koenig-Huygens donne $\frac{\mathbb{V}\left(X_n^0\right)}{\left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2} = \frac{\mathbb{E}\left(\left(X_n^0\right)^2\right)}{\left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2} - 1$.

D'après la question 21) on a

$$\mathbb{E}\left(\left(X_n^0\right)^2\right) = \sum_{(H,H')\in\mathscr{C}_0^2} \mathbb{P}\left(H \cup H' \subset G\right) = \sum_{k=0}^{s_0} \Sigma_k$$

donc

$$\frac{\mathbb{V}\left(X_n^0\right)}{\left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2} = \frac{\Sigma_0}{\left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2} + \frac{\sum_{k=1}^{s_0} \Sigma_k}{\left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2} - 1 \qquad (1)$$

D'après la question 24) on a $\boxed{\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{s_0}\Sigma_k}{\left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad (2)}$.

- Calculons Σ_0 :

On suit la démarche des questions 22) et 23) , on a $s_{H\cap H'}=0 \Leftrightarrow a_{H\cap H'}=0 \Leftrightarrow H\cap H'=\varnothing$ donc

$$\begin{aligned}
\Sigma_0 &= \sum_{H\in\mathscr{C}_0} p_n^{2a_0}\left(\sum_{\substack{H'\in\mathscr{C}_0\\ s_{H\cap H'}=0}} 1\right)\\
&= \sum_{H\in\mathscr{C}_0} p_n^{2a_0}\operatorname{Card}\left\{\ H'\in\mathscr{C}_0 \mid s_{H\cap H'}=0\right\}\\
&= \sum_{H\in\mathscr{C}_0} p_n^{2a_0}\operatorname{Card}\left\{\ H'\in\mathscr{C}_0 \mid S_H\cap S_{H'}=\varnothing\right\}\\
&= \sum_{H\in\mathscr{C}_0} p_n^{2a_0}\operatorname{Card}\left\{H'\in\mathscr{C}_0 \mid S_{H'}\in\mathcal{P}_{s_0}(\overline{S_H})=\varnothing\right\}
\end{aligned}$$

On a la partition

$$\left\{H'\in\mathscr{C}_0 \mid S_H\cap S_{H'}=\varnothing\right\}=\bigcup_{B\in\mathcal{P}_{s_0}(\overline{S_H})}\left\{H'\in\mathscr{C}_0 \mid S_{H'}=B\right\}$$

donc

$$\operatorname{Card}\left\{H'\in\mathscr{C}_0 \mid S_H\cap S_{H'}=\varnothing\right\}=\sum_{B\in\mathcal{P}_{s_0}(\overline{S_H})}\operatorname{Card}\left\{H'\in\mathscr{C}_0 \mid S_{H'}=B\right\}$$

d'après la question 18) on a $\operatorname{Card}\left\{H'\in\mathscr{C}_0 \mid S_{H'}=B\right\})=c_0$, ce qui donne

$$\operatorname{Card}\left\{\ H'\in\mathscr{C}_0 \mid S_H\cap S_{H'}=\varnothing\right\}=c_0\operatorname{Card}\left(\mathcal{P}_{s_0}(\overline{S_H})\right)=c_0\binom{n-s_0}{s_0}$$

on en déduit $\boxed{\Sigma_0=c_0\ \left|\mathscr{C}_0\right|\ p_n^{2a_0}\binom{n-s_0}{s_0}=(c_0)^2\binom{n}{s_0}\binom{n-s_0}{s_0}p_n^{2a_0}}$

Bien sûr si $\frac{n}{2}<s_0$ alors $\Sigma_0=0$, mais dans notre cas on fait tendre n vers $+\infty$ et s_0 est fixe, on prend donc n assez grand ($n>2s_0$) par suite $\Sigma_0>0$.

- Ce résultat permet d'écrire

$$\frac{\Sigma_0}{\left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2}=\frac{(c_0)^2\binom{n}{s_0}\binom{n-s_0}{s_0}p_n^{2a_0}}{\left(c_0\binom{n}{s_0}p_n^{a_0}\right)^2}=\frac{\binom{n-s_0}{s_0}}{\binom{n}{s_0}}$$

comme $\binom{n}{s_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{s_0}}{s_0!}$ et $\binom{n-s_0}{s_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n-s_0)^{s_0}}{s_0!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{s_0}}{s_0!}$ alors on a $\boxed{\frac{\Sigma_0}{\left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \qquad (3)}$

- Finalement les relations (1) , (2) et (3) donnent $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{V}\left(X_n^0\right)}{\left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2} = 0}$.

25 D'après la question 12) on a $\mathbb{P}(X_n^0 = 0) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(X_n^0\right)}{\left(\mathbb{E}\left(X_n^0\right)\right)^2}$ donc $\mathbb{P}(X_n^0 = 0) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, par suite $\mathbb{P}(X_n^0 > 0) = 1 - \mathbb{P}(X_n^0 = 0) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

Ainsi on a :

- Si $n^{-\omega_0} \underset{n\to+\infty}{=} o(p_n)$ (c.a.d $\lim_{n\to+\infty} (n^{\omega_0} p_n) = +\infty$) alors $\mathbb{P}(X_n^0 > 0) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
- Si $p_n = o\left(n^{-\omega_0}\right)$ d'après la question 20) on a $\mathbb{P}(X_n^0 > 0) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Donc la suite $(k^{-\omega_0})_{k\geq 2}$ est une fonction de seuil pour la propriété $\mathscr{P}_n$.

26

- Soit G_0 le graphe formé de deux sommets et une arête. Dans ce cas, les variables A_n et X_n^0 sont identiques et le seul graphe $H \subset G_0$ qui contient au moins une arête est G_0 lui même et par suite $\omega_0 = \min_{\substack{H\subset G_0\\ a_H\geq 1}} \frac{s_H}{a_H} = 2$.

On retrouve ainsi le résultat de la question 16.

- Si G_0 est une étoile à $d \geqslant 1$ branches , soit H un graphe contenu dans G_0, on a deux cas :
  - ▶ H ne contient pas le centre s de G_0 donc il est a sommets isolés et $a_H = 0$.
  - ▶ H contient le centre s de G_0 donc il est une étoile à k branches avec $k \in [\![2, d]\!]$ donc $a_H = k - 1$, $s_H = k$.

Ainsi

$$\boxed{\omega_0 = \min_{2\leqslant k\leqslant d} \frac{k}{k-1} = \frac{d}{d-1}}$$

et la suite $\left(k^{-\frac{d}{d-1}}\right)_{k\geq 2}$ est une fonction de seuil pour la propriété «contenir une copie de l'étoile à d branches» avec d entier fixé supérieur à 1.

Fin

ÉCOLE
POLYTECHNIQUE

IP PARIS

CONCOURS X - ENS

1794

ENS

CONCOURS X-ENS

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES A (XLSR)

Session 2024 - Filières MP - MPI

Durée: 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le problème comporte deux parties qui sont indépendantes.

NOTATIONS

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1,\dots,n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle point fixe de σ un élément $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\sigma(i) = i$. On note $\nu(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ. On appelle dérangement une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe. On note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$ et D_n son cardinal.

Si k est un entier naturel tel que $k \leqslant n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial correspondant au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Par convention, on pose $\binom{n}{k} = 0$ pour un entier naturel $k > n$.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels. Si de plus $n \geqslant 0$ est un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des éléments $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

Si $n \geqslant 0$ et $d \geqslant 1$ sont deux entiers naturels, on note $d \mid n$ la relation « d divise n ». Si x est un réel, on note $E(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire l'unique entier $E(x)$ tel que $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.

Si p est un nombre premier et n un entier naturel non nul, on note

$$\nu_p(n) = \max\{\nu \in \mathbb{N} : p^\nu \mid n\}.$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

Pour tout ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

On note $\ln_2$ la fonction de $]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\ln_2(x) = \ln(\ln(x))$.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de nombres réels, on note, pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\leqslant x} a_n = \sum_{n=1}^{E(x)} a_n, \qquad \sum_{\substack{p\leqslant x \\ p \text{ premier}}} a_p = \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p, \qquad \prod_{\substack{p\leqslant x \\ p \text{ premier}}} a_p = \prod_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p$$

avec la convention que la somme indexée par l'ensemble vide vaut 0 et le produit indexé par l'ensemble vide vaut 1.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'il existe un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Premiére partie

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. Pour tout nombre réel x, on considère la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$M_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}.$$

1

1.a Montrer que la matrice $-M_0$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

1.b En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1).$$

2 Calculer

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma), \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\nu(\sigma) \text{ et } \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}.$$

3 Établir que

$$\operatorname{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \operatorname{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\}$$

et en déduire la probabilité qu'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ tirée uniformément au hasard soit de signature prescrite.

4 Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, préciser à quelle condition sur $\nu(\sigma)$, on a $\sigma \in \mathfrak{D}_n$. En déduire que

$$\operatorname{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \operatorname{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\} + (-1)^{n-1}(n-1).$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-1}{0} & & & & \binom{m-1}{m-1} & 0 \\ \binom{m}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m+1}(\mathbb{R}).$$

5

5.a Justifier que les familles $(1, X, \ldots, X^m)$ et $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^m)$ sont des bases de $\mathbb{R}_m[X]$.

5.b Montrer que la transposée de M est la matrice de l'application linéaire identité

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_m[X] & \to & \mathbb{R}_m[X] \\ P & \to & P \end{array}$$

dans les bases $(1, X, \ldots, X^m)$ au départ et $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^m)$ à l'arrivée.

5.c Établir que M est inversible et expliciter son inverse.

5.d En déduire que pour tous $(u_0, \ldots, u_m), (v_0, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\text{si } \forall k \leqslant m, \quad u_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} v_\ell, \quad \text{alors} \quad \forall k \leqslant m, \quad v_k = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} u_\ell.$$

6 Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2 , on considère l'espace probabilisé $(\mathfrak{D}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{D}_n))$ muni de la probabilité uniforme. On définit une variable aléatoire Y_n par $Y_n(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

7

7.a Expliciter la loi de Y_n.

7.b Calculer, pour tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n = \varepsilon)$.

Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2 , on considère l'espace probabilisé $(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n))$muni de la probabilité uniforme. On définit une variable aléatoire Z_n par $Z_n(\sigma) = \nu(\sigma)$.

8

8.a Expliciter la loi de Z_n.

8.b Calculer, pour tout entier naturel $k \leqslant n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)$.

8.c Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation aléatoire ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Soit n un entier naturel non nul. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on rappelle qu'il existe, à l'ordre près, une unique décomposition $\sigma = c_1 c_2 \cdots c_{\omega(\sigma)}$, où $\omega(\sigma) \in \mathbb{N}^*$ et $c_1, \ldots, c_{\omega(\sigma)}$ sont des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \cdots \leqslant \ell_{\omega(\sigma)}$ et $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{\omega(\sigma)} = n$. En particulier, on prendra garde au fait que l'on prend ici en compte les cycles c_i de longueur 1, qui correspondent aux points fixes de σ, auquel cas c_i est l'identité.

Par exemple, si σ est la permutation identité de $\{1, \ldots, n\}$, on a $\omega(\sigma) = n$ et $\ell_{\omega(\sigma)} = 1$. Et si σ est la permutation $(1,2)$ de $\{1,2,3\}$, on a $\sigma = c_1 \circ c_2$ où c_1 est l'identité et $c_2 = (1,2)$ de sorte que $\omega(\sigma) = 2$.

On obtient ainsi une application $\omega : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}$. On se propose de montrer qu'en moyenne, $\omega(\sigma)$ est de l'ordre de $\ln(n)$ dans un sens que l'on précisera.

Pour un entier k inférieur ou égal à n, on note $s(n,k)$ le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ telles que $\omega(\sigma) = k$.

On considère alors, sur l'espace probabilisé $(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n))$ muni de la probabilité uniforme, la variable aléatoire X_n définie par $X_n(\sigma) = \omega(\sigma)$.

9 Calculer, pour $n \in \{2,3,4\}$, la quantité $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \omega(\sigma)$.

10 Préciser $s(n,n)$ et $s(n,1)$ puis montrer que, pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, on a

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k).$$

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pourra distinguer les cas $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(1) \neq 1$.

11 Établir que, pour tout réel x, $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k$.

12 Démontrer que $\mathbb{E}[X_n] \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

13

13.a Montrer que

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}.$$

13.b En déduire que

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k^2 s(n,k) = \mathbb{E}[X_n] + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right).$$

14

14.a Montrer que

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2 \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)^2+(2\gamma+1)\ln(n)+c+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

pour un réel c à préciser.

14.b Montrer que

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2 \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+c+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

15 Justifier qu'il existe un nombre réel $C>0$ tel que, pour tout réel $\varepsilon>0$ et tout entier $n\geqslant 1$, on a

$$\mathbb{P}\left(|X_n-\ln(n)|>\varepsilon\ln(n)\right)\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2\ln(n)}.$$

Deuxième partie

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$\omega(n)=\text{Card}\,\{p\text{ premier }: p\mid n\}=\sum_{\substack{p\mid n\\ p\text{ premier}}}1.$$

Par exemple, $\omega(6)=\omega(12)=2$

16 Soit $(a_n)_{n\geqslant 2}$ une suite de nombres réels. Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $A(t)=\sum_{2\leqslant k\leqslant t}a_k$. Soit $b:[2,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Montrer que pour tout entier $n\geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n}a_k b(k)=A(n)b(n)-\int_2^n b'(t)A(t)dt.$$

17 L'objectif de cette question est de démontrer que si n est un entier naturel non nul, alors $\prod_{\substack{p\leq n\\ p\text{ premier}}}p\leqslant 4^n$.

17.a Traiter les cas $n\in\{1,2,3\}$. On suppose à présent $n\geqslant 4$ et le résultat connu au rang k pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$.

17.b Établir le résultat au rang n si n est pair.

17.c Soit $n=2m+1$ avec $m\in\mathbb{N}$. Justifier que $\prod_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1\\ p\text{ premier}}}p$ divise $\binom{2m+1}{m}$ et montrer que $\binom{2m+1}{m}\leqslant 4^m$.

17.d Conclure.

18 Soit n un entier naturel non nul et soit p un nombre premier. Justifier la formule $\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} E\left(\frac{n}{p^k}\right)$ et montrer que

$$\frac{n}{p} - 1 < \nu_p(n!) \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$

19

19.a Par comparaison avec une intégrale, établir que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + O(\ln(n)).$$

19.b Justifier que $n! = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}$ et en déduire que

$$n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - n\ln(4) < \ln(n!) \leqslant n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}.$$

19.c Justifier que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ converge.

19.d Conclure que $\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + O(1)$.

20

20.a On pose, pour tout réel $t \geqslant 2$,

$$R(t) = \sum_{\substack{p\leqslant t \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(t).$$

Montrer, en utilisant le résultat de la question 16, que

$$\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} = 1 + \ln_2(n) - \ln_2(2) + \frac{R(n)}{\ln(n)} + \int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\, dt.$$

20.b Justifier que la fonction $t \mapsto \frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$.

20.c Établir que $\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln_2(n) + c_1 + O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$, pour un réel $c_1 \in \mathbb{R}$ à préciser.

21

21.a Soient x un réel positif supérieur ou égal à 1 et $q \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la quantité

$$\operatorname{Card}\left\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] : n \equiv 0 (\text{mod} q)\right\} - \frac{x}{q}$$

est bornée en valeur absolue par un réel indépendant de x et de q.

21.b Démontrer, à l'aide d'une interversion de sommes, que $\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n) \underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(x)+O(1)$.

22

22.a Montrer que

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left(\omega(n)-\ln_2(x)\right)^2 \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2\right)-\ln_2(x)^2+O\left(\ln_2(x)\right).$$

22.b Montrer que

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2=\sum_{\substack{p_1\leq x\\ p_1 \text{ premier}}}\ \sum_{\substack{p_2\leq x\\ p_2 \text{ premier}}}\mathrm{Card}\left\{n\in\mathbb{N}^* : n\leqslant x, p_1\mid n \text{ et } p_2\mid n\right\}$$

22.c Montrer que

$$\left(\sum_{\substack{p_1,p_2\leq x\\ p_1\neq p_2 \text{ premiers}}}\mathrm{Card}\left\{n\in\mathbb{N}^* : n\leqslant x, p_1\mid n \text{ et } p_2\mid n\right\}\right)-x\ln_2(x)^2 \underset{x\to+\infty}{=} O\left(x\ln_2(x)\right).$$

On pourra estimer le cardinal de l'ensemble des paires de nombres premiers (p_1,p_2) tels que $p_1p_2\leqslant x$ quand x tend vers $+\infty$.

22.d Conclure que $\frac{1}{x}\left(\sum_{n\leq x}\left(\omega(n)-\ln_2(x)\right)^2\right) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\ln_2(x)\right)$.

23

On pose $\mathcal{S}=\left\{n\geqslant 3 : \left|\frac{\omega(n)-\ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right|\geqslant\left(\ln_2(n)\right)^{1/4}\right\}$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{Card}\{n\leqslant x : n\in\mathcal{S}\}=0.$$

On pourra commencer par écrire $\mathrm{Card}(\mathcal{S}\cap[1,x]) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{Card}(\mathcal{S}\cap[\sqrt{x},x])+O(\sqrt{x})$ *et remarquer que dans la somme du membre de droite, la différence* $|\ln_2(n)-\ln_2(x)|$ *reste bornée.*

On dit alors que l'ensemble $\mathcal{S}$ a densité 0 . De même que pour les permutations, on obtient que, en dehors d'un ensemble de densité nulle, $\omega(n)=\ln(\ln(n))(1+o(1))$.

Fin

Concours X-ENS

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques A (XLSR)

Session 2024 - Filière MP . MPI

Le problème à pour sujet les théorèmes de Mertens et de Hardy et Ramanujan

Premiére partie

1

1.a • Les matrices M_x sont symétriques réelles donc elles sont diagonalisables , en particulier M_0 et $-M_0$ sont diagonalisables.

• Remarquons que $I_n + M_0$ est de rang 1 donc 1 est valeur propre de $-M_0$ d'ordre supérieur ou égal à $n-1$, par suite $-M_0$ admet au plus une autre valeur propre λ , et on sait que $\text{Tr}(-M_0) = (n-1) \times 1 + \lambda = 0$ ainsi $\lambda = 1-n$ et 1 est valeur propre de $-M_0$ d'ordre égal à $n-1$.

Finalement $\text{Sp}(-M_0) = \{1, 1-n\}$.

• $E_1(-M_0)$ est l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$ et $E_{1-n}(-M_0) = E_1(-M_0)^{\perp} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

1.b Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $M_x = (a_{i\ j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq i\leq n}}$. Le polynôme caractéristique de $-M_0$ est donné par

$$\boxed{\chi_{(-M_0)}(x) = \det(M_x) = (x-1)^{n-1}(x+n-1)}$$

par définition du déterminant on a

$$\boxed{\chi_{(-M_0)}(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\ \sigma(i)}}$$

remarquons que pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} a_{i\ \sigma(i)} = \prod_{\substack{i=1 \\ \sigma(i)=i}}^{n} a_{i\ \sigma(i)} \prod_{\substack{i=1 \\ \sigma(i)\neq i}}^{n} a_{i\ \sigma(i)} = x^{\nu(\sigma)}}$$

d'où

$$\boxed{\chi_{(-M_0)}(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1).}$$

2

- Pour $x=1$ on obtient $\boxed{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)=0}$.
- Par dérivation on a

$$\frac{d\chi_{(-M_0)}}{dx}(x)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\nu(\sigma)x^{\nu(\sigma)-1}=n(x-1)^{n-2}(x+n-2).$$

Pour $x=1$ on obtient $\boxed{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\nu(\sigma)=\begin{cases}0 \text{ si } n\geq 3\\ 2 \text{ si } n=2\end{cases}}$.

- On a par intégration

$$\begin{aligned}\int_0^1\chi_{(-M_0)}(x)dx &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}\\ &=\int_0^1(x-1)^n+n(x-1)^{n-1}dx\\ &=\left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}+(x-1)^n\right]_0^1\end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}=(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}}$.

3 D'après 2 on a $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)=0$, et on a

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma) &= \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \varepsilon(\sigma)=1}}\varepsilon(\sigma)+\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \varepsilon(\sigma)=-1}}\varepsilon(\sigma)\\ &=\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \varepsilon(\sigma)=1}}1-\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \varepsilon(\sigma)=-1}}1\\ &=\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{S}_n:\varepsilon(\sigma)=1\}-\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{S}_n:\varepsilon(\sigma)=-1\}\end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{S}_n:\varepsilon(\sigma)=1\}=\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{S}_n:\varepsilon(\sigma)=-1\}$$

Posons $A=\{\sigma\in\mathfrak{S}_n:\varepsilon(\sigma)=1\}$, on a $\mathfrak{S}_n=A\cup\overline{A}$ et $\operatorname{Card}A=\operatorname{Card}\overline{A}=\frac{n!}{2}$, ainsi la probabilité qu'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ tirée uniformément au hasard soit dans A (ou dans $\overline{A}$) est $\frac{1}{2}$.

4 Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on a évidement $\sigma\in D_n$ si et seulement si $\nu(\sigma)=0$, on a . Dans la question 1b on a

$$\chi_{(-M_0)}(x)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)x^{\nu(\sigma)}=(x-1)^{n-1}(x+n-1).$$

le coefficient constant est donné par

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{D}_n}\varepsilon(\sigma)=(-1)^{n-1}(n-1)$$

et on a

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{D}_n}\varepsilon(\sigma)=\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{D}_n:\varepsilon(\sigma)=1\}-\operatorname{Card}\{\sigma\in\mathfrak{D}_n:\varepsilon(\sigma)=-1\}$$

d'où

$$\text{Card}\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=1\}=\text{Card}\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\}+(-1)^{n-1}(n-1).$$

5 Soit $m\in\mathbb{N}$. On considère la matrice $M=(a_{i\,j})_{\substack{1\le i\le m+1\\ 1\le j\le m+1}}$ avec $a_{i\,j}=\begin{cases}\binom{i-1}{j-1} & \text{si } j\le i\\ 0 & \text{si } i<j\end{cases}$

5.a Les familles $(1,X,\dots,X^m)$ et $(1,(X-1),\dots,(X-1)^m)$ sont de degrés strictement croissants , donc elles sont libres dans $\mathbb{R}_m[X]$, de plus elles ont $m+1$ éléments , donc elles forment deux bases de $\mathbb{R}_m[X]$.

5.b Soit $j\in[\![1,m]\!]$ on a

$$\begin{aligned}X^j&=(X-1+1)^j\\&=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(X-1)^i\end{aligned}$$

donc la j ieme colonne de la matrice, N, de l'application linéaire identité dans les bases $(1,X,\dots,X^m)$ au départ et $(1,(X-1),\dots,(X-1)^m)$ à l'arrivée est

$$\begin{pmatrix}\binom{j}{0}\\ \vdots\\ \binom{j}{j}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

qui est la transposée de la j ieme ligne de la matrice M , d'où $N={}^tM$.

5.c N est inversible car elle est la matrice de l'application identité qui est bijective et N^{-1} est la matrice de l'application linéaire identité dans les bases $(1,(X-1),\dots,(X-1)^m)$ au départ et $(1,X,\dots,X^m)$ à l'arrivée , comme $N={}^tM$ donc M est inversible .

De la relation

$$(X-1)^j=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}X^i(-1)^{j-i}$$

on a la j ieme colonne de la matrice N^{-1} est

$$\begin{pmatrix}(-1)^j\binom{j}{0}\\ \vdots\\ (-1)^0\binom{j}{j}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

et

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ (-1)^i\binom{i}{0} & (-1)^{i-1}\binom{i}{1} & \cdots & \binom{i}{i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ (-1)^m\binom{m}{0} & (-1)^{m-1}\binom{m}{1} & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix}$$

Ainsi $M^{-1}=(b_{i\ j})_{\substack{1\leq i\leq m+1\\ 1\leq j\leq m+1}}$ avec $b_{i\ j}=\begin{cases}(-1)^{i-j}\binom{i-1}{j-1} \text{ si } j\leq i\\ 0 \quad \text{si } i<j\end{cases}$

5.d Soit $(u_0,\ldots,u_m),(v_0,\ldots,v_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$, posons $U={}^t(u_0,\ldots,u_m)$ et $V={}^t(v_0,\ldots,v_m)$

$$\text{si } \forall k\leqslant m,\quad u_k=\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}v_\ell$$

qui s'exprime par $U=MV$ donc $V=M^{-1}U$ par suite on a

$$\forall k\leqslant m,\quad v_k=\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{k-\ell}\binom{k}{\ell}u_\ell.$$

appelée formule d'inversion de Pascal .

6 Écrivons $\mathfrak{S}_n=\bigcup\limits_{0\leq k\leq n}\{\sigma\in\mathfrak{S}_n\ :\ \nu(\sigma)=k\}$, c'est une réunion disjointe donc

$$n!=\mathrm{Card}\mathfrak{S}_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{S}_n\ :\ \nu(\sigma)=k\}$$

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, posons P_k l'ensemble des parties à k élément de $[\![1,n]\!]$, on établie une bijection par :

$$\begin{array}{ccc}\{\sigma\in\mathfrak{S}_n\ :\ \nu(\sigma)=k\} & \to & \mathcal{P}_k\times\mathfrak{D}_{n-k}\\ \sigma & \mapsto & (F(\sigma),\sigma')\end{array}$$

avec $F(\sigma)=\{i\in\ [\![1,n]\!]\ :\ \sigma(i)=i\}$ et σ' la restriction de σ sur $\overline{F(\sigma)}$ le complémentaire de $F(\sigma)$ dans $[\![1,n]\!]$ (support de σ) .

On en déduit

$$\mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{S}_n\ :\ \nu(\sigma)=k\}=\binom{n}{k}D_{n-k}$$

Ce qui revient à dire : pour déranger $n-k$ éléments dans un ensemble à n éléments, il faut choisir les $n-k$ éléments devant être dérangés, soit $\binom{n}{k}$ possibilités, puis effectivement déranger ces $n-k$ éléments, soit D_{n-k} possibilités. Il y a donc $\binom{n}{k}D_{n-k}$ façons de déranger $n-k$ éléments dans un ensemble de n éléments.

On a donc

$$n!=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$$

la formule d'inversion de Pascal donne

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Ainsi pour tout entier naturel n non nul , $\boxed{D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$.

7

7.a On a $Y_n(\mathfrak{D}_n) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \dfrac{\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\}}{D_n}$, or on a

$$D_n = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} + \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\}$$

et d'après 4

$$\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\} + (-1)^{n-1}(n-1).$$

donc

$$\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \frac{D_n + (-1)^{n-1}(n-1)}{2}$$

par suite $\boxed{\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n}}$ et $\mathbb{P}(Y_n = -1) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 1)$.

7.b On a $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ donc $D_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1} n!$ et $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2D_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où pour tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n = \varepsilon) = \frac{1}{2}}$.

8

8.a On a $Z_n(\mathfrak{S}_n) = [\![0, n]\!]$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on a $\mathbb{P}(Z_n = k) = \dfrac{\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \nu(\sigma) = k\}}{n!}$.

D'après la question 6 on a $\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ : \ \nu(\sigma) = k\} = \dbinom{n}{k} D_{n-k}$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{\binom{n}{k} D_{n-k}}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}}$$

8.b Pour tout entier naturel $k \leqslant n$ (fixé et ne dépend pas de n) on a $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}}$.

Z_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre 1.

8.c Le nombre moyen de points fixes d'une permutation aléatoire est égale à l'espérance de Z_n, on a

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{n} k \mathbb{P}(Z_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

simplifions cette somme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{k!} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} + \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \end{aligned}$$

on a $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}(-1)^{n-k-} = n(x-1)^{n-1}$ donc $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}(-1)^{n-k} = 0$, ainsi $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_{n-1})$, et on a $\mathbb{E}(Z_2) = 1$ d'où $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = 1}$

Le calcul de l'espérance de Z_n se fait aisément en remarquant que Z_n est la somme des variables aléatoires de Bernoulli $Z_n = X_1 + \cdots + X_n$, où $X_k(\sigma)$ prend la valeur 1 si k est un point fixe de σ et 0 sinon . On a $\mathbb{P}(X_k = 1) = \dfrac{1}{n}$ d'où $\mathbb{E}(Z_n) = 1$.

9

- $n = 2$, dans S_2 on a l'identité et une transposition ce qui donne $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma) = \frac{3}{2}$.
- $n = 3$, dans S_3 on a l'identité ,trois transpositions et deux 3-cycles ce qui donne $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma) = \frac{11}{6}$.
- $n = 4$, dans S_4 on a l'identité ,six transpositions, huit de 3-cycles, trois produit de deux transpositions disjointes et six 4-cycles ce qui donne $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma) = \frac{49}{24}$.

10

- L'identité est l'unique permutation qui se décompose en produit de n cycles à supports disjoints , donc $\boxed{s(n,n) = 1}$.
- $s(n,1)$ est le nombre des $n-$cycles de $\mathfrak{S}_n$, un $n-$cycle de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit $(n, a_1, ..., a_{n-1})$ avec $a_1, ..., a_{n-1} \in [\![1,n]\!]$ et $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}$ est une permutation de $\mathfrak{S}_{n-1}$, ce qui établit une bijection entre l'ensemble des $n-$cycles de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{S}_{n-1}$, par suite $\boxed{s(n,1) = (n-1)!}$.
- pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, posons $E(n,k)$ l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui se décompose en produit de k cycles à supports disjoints.

Écrivons $E(n,k) = A(n,k) \cup B(n,k)$ avec $A(n,k) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ : \sigma(1) = 1\ \}$ et $B(n,k) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ : \sigma(1) \neq 1\ \}$.

Soit $\sigma \in E(n,k)$, $\sigma = c_1c_2...c_k$, on a deux cas :

► Si $\sigma \in A(n,k)$ alors 1 est un point fixe (on suppose $c_1 = (1)$) donc la restriction de σ à $[\![2,n]\!]$ est une permutations de $\mathfrak{S}_{n-1}$ qui se décompose en produit de $k-1$ cycles à supports disjoints, on etablit ainsi une bijection entre $A(n,k)$ et $E(n-1,k-1)$ donc $\text{Card}A(n,k) = s(n-1,k-1)$.

► Si $\sigma \in B(n,k)$ posons $\sigma(1) = j \neq 1$, 1 et j sont dans un des cycles c_i posons $c_1 = (1, j, \sigma(j), , ..., \sigma^p(j))$ (il correspond à l'orbite de 1) .

On a $(1,j)c_1 = (j, \sigma(j), , ..., \sigma^p(j))$ donc $(1,j)\sigma \in E(n-1,k)$, ainsi l'application qui a σ associe le couple $(\sigma(1), (1,\sigma(1))\circ\sigma)$ est une bijection de $B(n,k)$ vers $[\![2,n]\!] \times E(n-1,k)$ ce qui donne $\text{Card}B(n,k) = (n-1)s(n-1,k)$, d'où la relation $\boxed{s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k).(1)}$

11 Posons $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k$, la relation de récurrence (1) donne

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= x^n + (n-1)!x + \sum_{k=2}^{n-1} s(n-1,k-1)x^k + (n-1)\sum_{k=2}^{n-1} s(n-1,k)x^k \\
&= x^n + (n-1)!x + \sum_{k=1}^{n-2} s(n-1,k)x^{k+1} + (n-1)(P_{n-1}(x) - (n-2)!x) \\
&= x^n + (n-1)!x + x(P_{n-1}(x) - x^{n-1}) + (n-1)(P_{n-1}(x) - (n-2)!x) \\
&= (x+n-1)(P_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

Donc $P_n(x) = (x+n-1)...(x+2)P_2(x)$, avec $P_2(x) = x^2 + x$, d'où $\boxed{\prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k}$.

Les $s(n,k)$ sont appelés les nombres de Stirling de première espèce « non signés » .

12 On a $X_n(\mathfrak{S}_n) = [\![1,n]\!]$ et $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{s(n,k)}{n!}$, donc $\mathbb{E}[X_n] = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} ks(n,k)$.

D'après la question 11 on a :

$$\sum_{k=1}^{n} ks(n,k)x^{k-1} = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i).\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{x+i} \quad (2)$$

donc $\sum_{k=1}^{n} ks(n,k) = n!\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}$ et $\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ d'où $\boxed{\mathbb{E}[X_n] \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)}$.

13

13.a On dérive la relation (1) :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k)x^{k-2} = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i).\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{x+i}\right)^2 - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(x+i)^2}\right)$$

pour $x = 1$ on obtient

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}.$$

13.b On a

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k^2 s(n,k) - \mathbb{E}[X_n]$$

ce qui donne

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k^2 s(n,k) = \mathbb{E}[X_n] + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right).$$

14

14.a Écrivons

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2 &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \omega(\sigma)=k}}\omega(\sigma)^2\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k^2\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \omega(\sigma)=k}}1\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k^2 s(n,k)\end{aligned}$$

par suite

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2=\mathbb{E}\left[X_n\right]+\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right).$$

et on a

- $\mathbb{E}\left[X_n\right]\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)$
- $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{ij}=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)^2+2\gamma\ln(n)+\gamma^2+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$
- $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{i=n+1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}$ avec $\sum\limits_{i=n+1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$ donc $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6}+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

ce qui donne $\boxed{\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)^2+(2\gamma+1)\ln(n)+\left(\gamma+\gamma^2-\dfrac{\pi^2}{6}\right)+O\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)}$

14.b On a

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\omega(\sigma)-\ln(n)\right)^2=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2-2\frac{\ln(n)}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)+\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\ln(n)^2$$

et

- $\frac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)^2+(2\gamma+1)\ln(n)+c+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$
- $\frac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)=\mathbb{E}\left[X_n\right]\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)$
- $\frac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\ln(n)^2=\ln(n)^2$

ce qui donne

$$\boxed{\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\omega(\sigma)-\ln(n)\right)^2\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+c+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).}$$

15 Soit $\varepsilon>0$, remarquons que $\mathbb{P}\left(|X_n-\ln(n)|>\varepsilon\ln(n)\right)=\mathbb{P}\left(\left(X_n-\ln(n)\right)^2>\varepsilon^2\ln(n)^2\right)$, l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}\left(|X_n-\ln(n)|>\varepsilon\ln(n)\right)\leqslant\frac{\mathbb{E}\left(\left(X_n-\ln(n)\right)^2\right)}{\varepsilon^2\ln(n)^2}.$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(X_n-\ln(n)\right)^2\right)&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_n=k)\left(k-\ln(n)\right)^2.\\&=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\left(k-\ln(n)\right)^2.s(n,k)\\&=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\\omega(\sigma)=k}}\left(\omega(\sigma)-\ln(n)\right)^2\\&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\omega(\sigma)-\ln(n)\right)^2\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}\left(\left(X_n-\ln(n)\right)^2\right)\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+c+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$, il existe donc un $n_0\geq 2$ tel que $\mathbb{E}\left(\left(X_n-\ln(n)\right)^2\right)\leq 2\ln(n)$ pour tout $n\geq n_0$, posons $C=\max\left(\{2\}\cup\left\{\frac{\mathbb{E}\left((X_i-\ln(i))^2\right)}{\ln(i)},i\in[\![2,n]\!]\right\}\right)$, alors pour tout entier $n\geqslant 1$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}\left(|X_n-\ln(n)|>\varepsilon\ln(n)\right)\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2\ln(n)}.}$$

le cas $n=1$ est trivial.

Deuxième partie

16 Soit $(a_n)_{n\geqslant 2}$ une suite de nombres réels. Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $A(t)=\sum\limits_{2\leqslant k\leqslant t} a_k$. Soit $b:[2,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Pour tout $n\geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} a_k b(k) &= a_2 b(2)+\sum_{k=3}^{n}\left(A(k)-A(k-1)\right)b(k)\\ &= a_2 b(2)+\sum_{k=3}^{n} A(k)b(k)-\sum_{k=2}^{n-1} A(k)b(k+1)\\ &= A(n)b(n)+\sum_{k=2}^{n-1} A(k)\left(b(k)-b(k+1)\right) \quad (\ A(2)b(2)=a_2 b(2)\ )\end{aligned}$$

remarquons que

$$A(k)\left(b(k+1)-b(k)\right)=A(k)\int_k^{k+1} b'(t)dt=\int_k^{k+1} A(t)b'(t)dt$$

la relation de Chasles donne

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} a_k b(k)=A(n)b(n)-\int_2^n b'(t)A(t)dt.}$$

Il s'agit d'une généralisation de l'intégration par parties, appelée formule sommatoire d'Abel .

17

17.a On a $\prod\limits_{\substack{p\leq 1\\ p \text{ premier}}} p=1\ \leq 4,\quad \prod\limits_{\substack{p\leq 2\\ p \text{ premier}}} p=2\leq 4^2\ ,\quad \prod\limits_{\substack{p\leq 3\\ p \text{ premier}}} p=6\leq 4^3.$

On suppose à présent $n\geqslant 4$ et le résultat connu au rang k pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$.

17.b Si n est pair alors $\prod\limits_{\substack{p\leq n\\ p \text{ premier}}} p=\prod\limits_{\substack{p\leq n-1\\ p \text{ premier}}} p\leqslant 4^{n-1}\leqslant 4^n.$

17.c

- Soit $n=2m+1$ avec $m\in\mathbb{N}$. Pour tout $p\in[\![m+2,2m+1]\!]$, p divise $(2m+1)!=m!(m+1)!\binom{2m+1}{m}$

et il est premier avec $m!(m+1)!$ donc il divise $\binom{2m+1}{m}$ par suite $\prod\limits_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1\\ p \text{ premier}}} p$ divise $\binom{2m+1}{m}$.

- On a $\binom{2m+1}{m}+\binom{2m+1}{m+1}\leqslant\sum\limits_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{m}=2^{2m+1}$ comme $\binom{2m+1}{m}=\binom{2m+1}{m+1}$ alors

$\binom{2m+1}{m}\leqslant 4^m.$

17.d Pour $n \geqslant 2$ posons $P(n) =$ « $\displaystyle\prod_{\substack{p\leq k \\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^k$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$ ».

$P(2)$ est vrai et on suppose que $P(n)$ est vrai , il résulte de ce qui précède que $P(n+1)$ est vrai .

Ainsi pour tout $n \geqslant 2$ $\boxed{\displaystyle\prod_{\substack{p\leq n \\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^n}$.

18 • Pour k suffisamment grand $E\left(\dfrac{n}{p^k}\right) = 0$, la somme évoquée existe car elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

On a $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$, parmi les entiers allant de 1 à n, il y en a exactement $E\left(\frac{n}{p}\right)$ divisibles par p, $E\left(\frac{n}{p^2}\right)$ divisibles par p^2, etc...donc

$$\boxed{v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} E\left(\frac{n}{p^k}\right).}$$

• On a $\dfrac{n}{p^k} - 1 < E\left(\dfrac{n}{p^k}\right) \leq \dfrac{n}{p^k}$ donc $\dfrac{n}{p} - 1 < E\left(\dfrac{n}{p^k}\right)$ et

$$\boxed{\nu_p(n!) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p-1}.}$$

de plus $\frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)} = \frac{n}{p-1}$ d'où $\boxed{\dfrac{n}{p} - 1 < \nu_p(n!) \leqslant \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p(p-1)}}$.

19

19.a Soit $k \geq 2$, on a $\ln(k) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \ln(t)dt \leq \ln(k+1)$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)dt$, donc

$$\boxed{\int_1^n \ln(t)dt \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leq \int_1^{n+1} \ln(t)dt}$$

soit

$$\boxed{0 \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \int_1^n \ln(t)dt \leq \int_n^{n+1} \ln(t)dt \leq \ln(n+1)}$$

et on a $\displaystyle\int_1^n \ln(t)dt = n\ln(n) - n$ ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + O(\ln(n)) \quad (1)}$.

19.b

• Soit $p \leq n$, on a $\nu_p(n!) = \max\{\nu \in \mathbb{N} : p^\nu \mid n!\}$ donc $p^{\nu_p(n!)} \mid n!$ et $p^{\nu_p(n!)+1} \nmid n!$, ce qui donne $\displaystyle\prod_{\substack{p\leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)} \mid n!$.

Réciproquement si $n! = \displaystyle\prod_{q \text{ premier}} q^{m_q}$, la décomposition de $n!$ en produit de nombres premiers , alors les $q \leq n$ et $m_q \leq \nu_q(n!)$ par suite $n! \mid \displaystyle\prod_{\substack{p\leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}$, ainsi $\boxed{n! = \displaystyle\prod_{\substack{p\leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}}$.

• On a $\ln(n!) = \displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \nu_p(n!)\ln(p)$, l'inégalité de la question 18 donne

$$\boxed{n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \ln(p) < \ln(n!) \leqslant n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + n \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}.}$$

et $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \ln(p) = \ln\left(\prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p\right)$, d'après la question 17 on a $\prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p \leq 4^n$

donc $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \ln(p) \leqslant 4\ln(n)$, ainsi

$$\boxed{n \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - 4\ln(n) < \ln(n!) \leqslant n \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + n \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}. \quad (2)}$$

19.c On a $\dfrac{\ln(k)}{k(k-1)} = o\left(\dfrac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$ donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{\ln(k)}{k(k-1)}$ converge.

19.d La relation (2) donne

$$\frac{\ln(n!)}{n} - \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} < \frac{\ln(n!) + 4\ln(n)}{n}$$

d'après la relation (1) de la question 19a on a

$$\frac{\ln(n!)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - 1 + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

de plus $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leq \sum\limits_{k\leq n} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ converge donc $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}$ est bornée par suite

$$\frac{\ln(n!)}{n} - \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + O(1) \text{ et } \frac{\ln(n!) + 4\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + O(1)$$

d'où $\boxed{\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \dfrac{\ln(p)}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + O(1).}$

Ce résultat est le premier théorème de Mertens démontré en 1874 .

20

20.a Posons pour $n \geq 2$, $S(n) = \sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \dfrac{\ln(p)}{p}$ et $a_n = S(n) - S(n-1)$,on a

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{\ln(n)}{n} & \text{si } n \text{ est premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

écrivons

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} &= \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} \frac{1}{\ln(p)} \\ &= \sum_{2\leq k\leqslant n} a_k \frac{1}{\ln(k)} \end{aligned}$$

d'après la question 16 on a, avec $b(t)=\dfrac{1}{\ln(t)}$,

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p}=A(n)\frac{1}{\ln(n)}+\int_2^n\frac{1}{t(\ln(t))^2}A(t)dt$$

On a $A(n)=\sum\limits_{2\leq k\leqslant n}S(k)-S(k-1)=S(n)$ et $S(t)=R(t)+\ln(t)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p}&=1+\frac{R(n)}{\ln(n)}+\int_2^n\frac{1}{t\ln(t)}dt+\int_2^n\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}dt\\ &=1+\ln(\ln(n))-\ln(\ln(2))+\frac{R(n)}{\ln(n)}+\int_2^n\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\,dt.\end{aligned}$$

d'où l'on a $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p}=1+\ln_2(n)-\ln_2(2)+\frac{R(n)}{\ln(n)}+\int_2^n\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\,dt.$

20.b D'après la question 19d on a $R(t)\underset{t\to+\infty}{=}O(1)$, donc $\dfrac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\underset{t\to+\infty}{=}O(\dfrac{1}{t(\ln(t))^2})$,

comme $\displaystyle\int_2^n\frac{1}{t(\ln(t))^2}\,dt=\frac{1}{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(n)}$ alors la fonction $t\mapsto\dfrac{R(t)}{t(\ln(t))^2}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$.

20.c Écrivons

$$\int_2^n\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\,dt=\int_2^{+\infty}\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\,dt+\int_n^{+\infty}\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}dt$$

avec

$$\int_n^{+\infty}\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}dt=O(\int_n^{+\infty}\frac{1}{t(\ln(t))^2}dt)=O(\frac{1}{\ln(n)})$$

et $\frac{R(n)}{\ln(n)}=O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$, ce qui donne $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p}\underset{n\to+\infty}{=}\ln_2(n)+c_1+O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$

avec $c_1=1-\ln_2(2)+\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{R(t)}{t(\ln(t))^2}\,dt.$

Ce résultat est le deuxième théorème de Mertens

21

21.a Soit $x\geq 1$ et $q\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\{n\in\mathbb{N}\cap[1,x]:n\equiv 0(\mathrm{mod}q)\}=\{kq\ :k\in\mathbb{N}\cap[1,\frac{x}{q}]\}$$

donc $\mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}\cap[1,x]:n\equiv 0(\mathrm{mod}q)\}=E(\frac{x}{q})$ et on sait que $\left|E(\frac{x}{q})-\frac{x}{q}\right|\leq 1$, d'où le résultat .

21.b Écrivons

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\omega(n) &= \sum_{n\leqslant x}\ \sum_{\substack{p|n\\ p \text{ premier}}} 1\\ &= \sum_{\substack{p\leq x\\ p \text{ premier}}}\ \sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n}} 1\\ &= \sum_{\substack{p\leq x\\ p \text{ premier}}} \mathrm{Card}\{n\in\mathbb{N}\cap[1,x] : n\equiv 0(\mathrm{mod} p)\}\\ &= \sum_{\substack{p\leq x\\ p \text{ premier}}} E\left(\frac{x}{p}\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n) = \sum_{\substack{p\leq x\\ p \text{ premier}}}\frac{1}{p}+\frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leq x\\ p \text{ premier}}}\left(E\left(\frac{x}{p}\right)-\frac{x}{p}\right)$$

et

$$\frac{1}{x}\left|\sum_{\substack{p\leq x\\ p \text{ premier}}}\left(E\left(\frac{x}{p}\right)-\frac{x}{p}\right)\right| \leq \frac{1}{x}\sum_{\substack{p\leq x\\ p \text{ premier}}} 1 \leq 1$$

d'après question 20c on a $\boxed{\dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n\leqslant x}\omega(n) \underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(x)+O(1)}$

C'est le théorème Hardy et Ramanujan, il donne $\ln_2(x)$ comme un ordre moyen de $\omega(x)$.

22

22.a Écrivons

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2 = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 - 2\,\frac{\ln_2(x)}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)+\ln_2(x)^2\frac{E(x)}{x}$$

d'après la question précédente on a

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2 \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2-\ln_2(x)^2+O(\ln_2(x))+\underbrace{\ln_2(x)^2\frac{E(x)-x}{x}}_{O\left(\frac{\ln_2(x)^2}{x}\right)}$$

d'où $\boxed{\dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2 \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2-\ln_2(x)^2+O\left(\ln_2(x)\right).}$

22.b Pour tout $x \geq 2$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} \omega(n)^2 &= \sum_{n \leqslant x} \left(\sum_{\substack{p_1 | n \\ p_1 \text{ premier}}} 1 \right) \left(\sum_{\substack{p_2 | n \\ p_2 \text{ premier}}} 1 \right) \\
&= \sum_{n \leqslant x} \sum_{\substack{p_1 | n \\ p_1 \text{ premier}}} \sum_{\substack{p_2 | n \\ p_2 \text{ premier}}} 1 \\
&= \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premier}}} \sum_{\substack{p_2 \leq x \\ p_2 \text{ premier}}} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p_1 | n \text{ et } p_2 | n}} 1 \\
&= \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premier}}} \sum_{\substack{p_2 \leq x \\ p_2 \text{ premier}}} \operatorname{Card}\{n \in \mathbb{N}^* : n \leqslant x, p_1 \mid n \text{ et } p_2 \mid n\}
\end{aligned}$$

22.c On a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \text{ premiers}}} \operatorname{Card}\{n \in \mathbb{N}^* : n \leqslant x, p_1 \mid n \text{ et } p_2 \mid n\} &= \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \text{ premiers}}} \operatorname{Card}\{n \in \mathbb{N}^* : n \leqslant x, p_1 p_2 \mid n\} \\
&= \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \text{ premiers}}} E(\frac{x}{p_1 p_2})
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \text{ premiers}}} \operatorname{Card}\{n \in \mathbb{N}^* : n \leqslant x, p_1 \mid n \text{ et } p_2 \mid n\} = \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \text{ premiers}}} \left(\frac{x}{p_1 p_2} + O(1) \right)$$

ce qui donne $\displaystyle\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \text{ premiers}}} O(1) \underset{x \to +\infty}{=} O\left(x \ln_2(x)\right)$.

- La somme $\displaystyle\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \text{ premiers}}} O(1)$ est dominée par $\displaystyle\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 p_2 \leq x \\ p_1, p_2 \text{ premiers}}} 1$ et on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 p_2 \leq x \\ p_1, p_2 \text{ premiers}}} 1 &= \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premiers}}} \sum_{\substack{p_2 \leq \frac{x}{p_1} \\ p_2 \text{ premiers}}} 1 \\
&\leq \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premiers}}} \sum_{k \leq \frac{x}{p_1}} 1 \\
&\leq \sum_{\substack{p_1 \leq x \\ p_1 \text{ premiers}}} \frac{x}{p_1}
\end{aligned}$$

ce qui donne $\displaystyle\sum_{\substack{p_1, p_2 \leq x \\ p_1 p_2 \leq x \\ p_1 \neq p_2 \text{ premiers}}} O(1) \underset{x \to +\infty}{=} O\left(x \ln_2(x)\right)$.

- La somme $\displaystyle\sum_{\substack{p_1,p_2\le x\\ p_1p_2\le x\\ p_1\ne p_2 \text{ premiers}}} \frac{x}{p_1p_2}$ s'écrit

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\le x\\ p_1p_2\le x\\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} \frac{x}{p_1p_2} - \sum_{\substack{p\le x\\ p^2\le x\\ p \text{ premiers}}} \frac{x}{p^2}$$

et $\displaystyle\sum_{\substack{p\le x\\ p^2\le x\\ p \text{ premiers}}} \frac{x}{p^2} \le x\sum_{n\le x}\frac{1}{n^2} \le \frac{\pi^2}{6}x$ donc elle est aussi dominée par $x\ln_2(x)$.

Remarquons que $\{(p_1,p_2) : p_1,p_2 \le \sqrt{x}\ \} \subset \{(p_1,p_2) : p_1,p_2 \le x \text{ et } p_1p_2 \le x\} \subset \{(p_1,p_2) : p_1,p_2 \le x\ \}$ donc

$$\left(\sum_{\substack{p\le\sqrt{x}\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p}\right)^2 \le \sum_{\substack{p_1,p_2\le x\\ p_1p_2\le x\\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} \frac{1}{p_1p_2} \le \left(\sum_{\substack{p\le x\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p}\right)^2$$

et on a

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{x}\\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} &\underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(\sqrt{x}) + c_1 + O\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(x) + \ln(1-\frac{\ln(2)}{\ln(x)}) + c_1 + O\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(x) + c_1 + O\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\le x\\ p_1p_2\le x\\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} \frac{1}{p_1p_2} \underset{x\to+\infty}{=} \ln_2(x)^2 + O\left(\ln_2(x)\right)$$

et

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\le x\\ p_1p_2\le x\\ p_1\ne p_2 \text{ premiers}}} \frac{x}{p_1p_2} \underset{x\to+\infty}{=} x\ln_2(x)^2 + O\left(x\ln_2(x)\right)$$

d'où $$\boxed{\left(\sum_{\substack{p_1,p_2\le x\\ p_1\ne p_2 \text{ premiers}}} \operatorname{Card}\{n\in\mathbb{N}^* : n\leqslant x, p_1 \mid n \text{ et } p_2\mid n\}\right) - x\ln_2(x)^2 \underset{x\to+\infty}{=} O\left(x\ln_2(x)\right).}$$

22.d D'après 22b

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 &= \sum_{\substack{p_1\le x\\ p_1 \text{ premier}}}\ \sum_{\substack{p_2\le x\\ p_2 \text{ premier}}} \operatorname{Card}\{n\in\mathbb{N}^* : n\leqslant x, p_1\mid n \text{ et } p_2\mid n\}\\ &= \sum_{\substack{p_1,p_2\le x\\ p_1\ne p_2 \text{ premiers}}} \operatorname{Card}\{n\in\mathbb{N}^* : n\leqslant x, p_1\mid n \text{ et } p_2\mid n\} + \sum_{\substack{p\le x\\ p \text{ premiers}}} \operatorname{Card}\{n\in\mathbb{N}^* : n\leqslant x, p\mid n\ \}\end{aligned}$$

or $\sum\limits_{\substack{p\leq x\\ p \text{ premiers}}} \operatorname{Card}\left\{n\in\mathbb{N}^*: n\leqslant x, p\mid n\ \right\} \underset{x\to+\infty}{=} O\left(x\ln_2(x)\right)$ donc

$$\boxed{\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2 \underset{x\to+\infty}{=} x\ln_2(x)^2+O\left(x\ln_2(x)\right)}$$

et de la question 22a on a $\boxed{\dfrac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left(\omega(n)-\ln_2(x)\right)^2 \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\ln_2(x)\right).}$

23 On pose $S=\left\{n\geqslant 3: \left|\frac{\omega(n)-\ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right|\geqslant(\ln_2(n))^{1/4}\right\}$.

- On a $\operatorname{Card}(S\cap[1,x])=\operatorname{Card}(S\cap[\sqrt{x},x])+\operatorname{Card}(S\cap[1,\sqrt{x}])$ et $\operatorname{Card}(S\cap[1,\sqrt{x}])\leq\sqrt{x}$

donc $\operatorname{Card}(S\cap[1,x]) \underset{x\to+\infty}{=} \operatorname{Card}(S\cap[\sqrt{x},x])+O(\sqrt{x})$.

- Remarquons que

$$\boxed{\frac{1}{x}\sum_{n\in\mathcal{S}\cap[\sqrt{x},x]}\left(\omega(n)-\ln_2(x)\right)^2 \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\ln_2(x)\right).}$$

et pour tout $n\in S\cap[\sqrt{x},x]$ on a

$$\boxed{\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right|\leq\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(x)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right|+\left|\frac{\ln_2(n)-\ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right|}$$

et $0\leq\ln_2(x)-\ln_2(n)\leq\ln_2(x)-\ln_2(\sqrt{x})=-\ln(1-\frac{\ln(2)}{\ln(x)})$ donc

$$\boxed{\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right|\leq\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(x)}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right|+\left|\frac{\ln(1-\frac{\ln(2)}{\ln(x)})}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right|}$$

par suite

$$\begin{aligned}
\left(\ln_2(\sqrt{x})\right)^{1/4}\operatorname{Card}(\mathcal{S}\cap[\sqrt{x},x]) &\leq \sum_{n\in\mathcal{S}\cap[\sqrt{x},x]}\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(n)}{\sqrt{\ln_2(n)}}\right|\\
&\leq \sum_{n\in\mathcal{S}\cap[\sqrt{x},x]}\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(x)}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right|+x\left|\frac{\ln(1-\frac{\ln(2)}{\ln(x)})}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right|
\end{aligned}$$

l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$\sum_{n\in\mathcal{S}\cap[\sqrt{x},x]}\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(x)}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right|\leq\sqrt{x}\left(\sum_{n\in\mathcal{S}\cap[\sqrt{x},x]}\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(x)}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right|^2\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}O\left(\sqrt{x\ln_2(x)}\right)=O(x)$$

donc $\sum\limits_{n\in\mathcal{S}\cap[\sqrt{x},x]}\left|\frac{\omega(n)-\ln_2(x)}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right|=O(x)$ ce qui donne $(\ln_2(\sqrt{x}))^{1/4}\operatorname{Card}(S\cap[\sqrt{x},x])=O(x)$.

Finalement

$$\boxed{\operatorname{Card}(\mathcal{S}\cap[1,x]) \underset{x\to+\infty}{=} \operatorname{Card}(\mathcal{S}\cap[\sqrt{x},x])+O(\sqrt{x}) \underset{x\to+\infty}{=} O(x\left(\ln_2(\sqrt{x})\right)^{-1/4})}$$

ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \mathrm{Card}\{n \leqslant x : n \in S\} = 0.$$

Fin

ÉCOLES POLYTECHNIQUE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES B (X)

SESSION 2024 - FILIÈRES MP - MPI

Durée: 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet comporte quatre parties. La première partie est indépendante des trois autres.

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On note également $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Si E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et si $v_1, \ldots, v_k$ sont des éléments de E, on note $\mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_k)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$.

Si $k \geqslant 1$ est un entier et si E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathbb{R}$ dans E.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Si U est un ouvert de E et $f : U \to E$ une fonction différentiable, pour tout $x \in U$ on note $df(x)$ la différentielle de f en x. On rappelle que $df(x)$ est alors un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de E. Si g est un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de E, on note $\|g\|$ sa norme d'opérateur, c'est-à -dire

$$\|g\| = \sup\{\|g(v)\| \mid v \in E, \|v\| \leqslant 1\}$$

Pour $a \in E$ et $r > 0$ un nombre réel positif, on note $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et rayon r et $\overline{B(a, r)}$ la boule fermée de centre a et rayon r.

On note Id_E l'application identité de E dans E.

Si p et q désignent deux entiers naturels non nuls, on note $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si $p = q$, on note $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ pour $\mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. On identifie également le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^p$ avec le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des vecteurs colonnes $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\exp(A) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ l'exponentielle de la matrice A.

Première partie

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, périodique de période $T > 0$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0. \qquad (1)$$

1

1.a Justifier l'existence de deux solutions y_1 et y_2 dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ à (1) telles que :

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(0)=1 \\ y_1'(0)=0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} y_2(0)=0 \\ y_2'(0)=1 \end{array}\right.$$

Justifier que $\mathrm{Vect}\,(y_1,y_2)$ est l'ensemble des solutions de (1) dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

1.b Montrer que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)=1$$

2 Montrer que si $y\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est une solution de (1), alors la fonction $t\mapsto y(t+T)$ l'est aussi. En déduire que pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$y(t+T)=y(T)y_1(t)+y'(T)y_2(t)$$

3 Soit $\mu\in\mathbb{C}^*$, et soit $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\mu=\mathrm{e}^{\lambda T}$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

i) L'équation (1) possède une solution $y\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ non nulle qui vérifie :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t+T)=\mu y(t)$$

ii) Le nombre complexe μ est solution de l'équation d'inconnue x :

$$x^2-\left(y_1(T)+y_2'(T)\right)x+1=0$$

iii) L'équation différentielle (1) possède une solution $y\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ non nulle telle que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}u(t),$$

où $u\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est une fonction T-périodique.

4 Soient μ_1,μ_2 les racines complexes de l'équation d'inconnue x :

$$x^2-\left(y_1(T)+y_2'(T)\right)x+1=0.$$

4.a Montrer que si $\mu_1\neq\mu_2$ et si λ est un nombre complexe tel que $\mu_1=\mathrm{e}^{\lambda T}$, alors pour toute solution y de (1), il existe deux fonctions T-périodiques w_1 et w_2, ainsi que deux nombres complexes α et β tels que

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t)=\alpha\mathrm{e}^{\lambda t}w_1(t)+\beta\mathrm{e}^{-\lambda t}w_2(t)$$

4.b Supposons que $\mu_1 = \mu_2$. Montrer que $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$ et que l'équation (1) admet une solution non nulle et périodique dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Deuxième partie

5 Soit $a \in E$ et soit U un ouvert de E contenant a. Soit $f : U \to E$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U telle que $df(a) = \mathrm{Id}_E$.

5.a Soient V un ouvert convexe de E et h une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de V dans E.
On suppose qu'il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in V$, $\|dh(x)\| \leqslant C$.
Montrer que pour tous x_1 et x_2 dans V, on a $\|h(x_2) - h(x_1)\| \leqslant C \|x_2 - x_1\|$.

5.b Montrer qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset U$ et

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B(a,r)}, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \geqslant \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| .$$

Nous fixons désormais un réel $r > 0$ vérifiant ces conditions dont la valeur sera utilisée dans la suite des questions de cette deuxième partie.

5.c Montrer que pour tout $x \in B(a,r)$, l'application linéaire $df(x)$ est injective.

6 Soit $y_0 \in E$ tel que $\|y_0 - f(a)\| \leqslant \dfrac{r}{4}$.

6.a Montrer que l'application

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \overline{B(a,r)} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|y_0 - f(x)\|^2 \end{array} \right.$$

admet un minimum atteint en un point x_0 de $B(a,r)$.

6.b Montrer que $f(x_0) = y_0$.

7 On note $W = \left\{ y \in E \,\middle|\, \|y - f(a)\| < \frac{r}{4} \right\}$ et $V = f^{-1}(W) \cap B(a,r)$.

7.a Justifier que V et W sont des ouverts de E.

7.b Montrer que

$$f_{|V} : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est une bijection continue de V sur W dont la réciproque est une fonction continue sur W.

Troisième partie

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{C}[A]$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de la forme $P(A)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme. On note

$$(\mathbb{C}[A])^* = \left\{B \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid B^{-1} \in \mathbb{C}[A]\right\}$$

8

8.a Justifier que $\mathbb{C}[A]^*$ est un sous-groupe abélien de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

8.b Montrer que $(\mathbb{C}[A])^* = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

9 Montrer que $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*$.

10 Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit l'application

$$Z_a : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & t + iat(1-t). \end{cases}$$

10.a Montrer que l'application

$$\begin{cases}]0,1[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (t,a) & \longmapsto & Z_a(t) \end{cases}$$

est injective.

10.b Soient M_1 et M_2 deux éléments de $(\mathbb{C}[A])^*$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [0,1], \quad M(t) = Z_a(t)M_1 + (1 - Z_a(t))\, M_2 \in (\mathbb{C}[A])^*$$

10.c En déduire que $(\mathbb{C}[A])^*$ est connexe par arcs.

11

11.a Montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{C}[A]$ contenant 0 et un ouvert V de $\mathbb{C}[A]$ contenant la matrice identité I_n tels que la fonction exponentielle induit une bijection continue de $U \subset \mathbb{C}[A]$ sur V dont la réciproque est une fonction continue sur V.

11.b En déduire que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$.

12 Montrer que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$.

13 On veut montrer que $\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*$. On suppose que $\exp(\mathbb{C}[A]) \neq (\mathbb{C}[A])^*$ et on fixe $M_1, M_2 \in (\mathbb{C}[A])^*$ telles que $M_1 \in \exp(\mathbb{C}[A])$ et $M_2 \notin \exp(\mathbb{C}[A])$.

13.a Montrer qu'il existe une application continue f de $(\mathbb{C}[A])^*$ dans $\{0,1\}$ telle que $f(M_1) = 0$ et $f(M_2) = 1$.

13.b Conclure.

14 Conclure que $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Quatrième partie

Soient $T > 0$ un nombre réel et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel. Soit

$$A : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & A(t) \end{cases}$$

une application continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. On considère le système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (2)$$

où X est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

15 Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}^*$ et une solution $Y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ non nulle de (2) tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t+T) = \mu Y(t)$$

Soit $\mathcal{S}$ l'espace des solutions dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ de (2). Soit $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ une base de $\mathcal{S}$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ la matrice dont les colonnes sont $Y_1(t), \ldots, Y_n(t)$. On dispose ainsi d'une application M de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

16

16.a Montrer que pour tout nombre réel t, $M(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $M'(t) = A(t)M(t)$.

16.b Montrer que la matrice $(M(t))^{-1}M(t+T)$ est indépendante de $t \in \mathbb{R}$.

16.c En déduire qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t+T) = M(t)\exp(TB)$$

16.d En déduire qu'il existe une application $Q : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ continue sur $\mathbb{R}$ et T périodique telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t) = Q(t)\exp(tB)$$

(On appelle cette identité la forme normale de la matrice M).

On admet qu'il existe deux matrices D et N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que D est diagonalisable, N est nilpotente et

$$\boxed{B = D + N \text{ et } DN = ND.}$$

Il existe donc une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ telles que $D = P\Delta P^{-1}$.

17

17.a Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Z_1(t), Z_2(t), \ldots, Z_n(t) \in \mathbb{C}^n$ les colonnes de la matrice $M(t)P$. Montrer que $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ est une base de l'espace $\mathcal{S}$.

17.b Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les nombres complexes tels que $\Delta = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Pour tous $0 \leqslant i \leqslant n-1, 1 \leqslant k \leqslant n$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $R_{i,k}(t)$ la k-ième colonne de la matrice $\frac{1}{i!}Q(t)N^iP$.

Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$\boxed{Z_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t}\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_{i,k}(t)\right)}$$

et vérifier que les applications $R_{i,k}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques.

17.c En déduire que si les parties réelles des λ_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$ sont strictement négatives et si Y est une solution quelconque de (2), alors

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0}$$

18

18.a Montrer que si B a une valeur propre de la forme $\lambda = i\dfrac{2k\pi}{mT}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, alors (2) a une solution mT-périodique non nulle.

18.b On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que (2) possède une solution mT-périodique non nulle. Montrer que $\exp(TB)$ possède une valeur propre qui est une racine m-ième de l'unité.

19 Dans cette question, on suppose que (2) possède une solution T'-périodique X avec $T' \notin \mathbb{Q}T$.

Montrer que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{A(u)X(t) = A(t)X(t).}$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui n'est pas de la forme $(\mathbb{Z}\ a)$ pour $a \in \mathbb{R}$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

20 On suppose dans cette question qu'il n'existe pas de sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^n$, différent de $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$, tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}, V$ est stable par $A(t)$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et sur B pour que (2) ait au moins une solution périodique non nulle.

21 Soit le système différentiel

$$\boxed{X'(t) = A(t)X(t) + b(t) \quad (3)}$$

où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique.

On suppose que 1 n'est pas valeur propre de $\exp(TB)$. Montrer que (3) possède une unique solution T-périodique.

22 Résoudre le système différentiel

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = x(t) - \cos(t)y(t) \\ y'(t) = \cos(t)x(t) + y(t) \end{cases}}$$

et déterminer sa forme normale (voir la question 16d).

Fin

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques B (X)

Session 2024 - Filière MP . MPI

Première partie

On note S l'ensemble des solutions de (1) sur $\mathbb{R}$.

1

1.a D'après le théorème de Cauchy linéaire, les deux problèmes de Cauchy

$$(P_1)\begin{cases} y''+qy=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \quad \text{et } (P_2)\begin{cases} y''+qy=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

admettent respectivement une unique solution y_1 et y_2 dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Le Wronskien de la famille (y_1, y_2) en 0 vaut $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ainsi (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de (1), donc c'est une base de l'ensemble S, qui est de dimension 2.

Par suite $\boxed{S = \text{Vect}\,(y_1, y_2) \text{ est l'ensemble des solutions de (1) dans } \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})}$.

1.b Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$, on a

$$\varphi'(t) = y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t) = y_1(t)(q(t)y_2(t)) - y_1''(t)(q(t)y_1(t)) = 0$$

donc φ est constante sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(t) = \varphi(0) = W(0) = 1$, d'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\quad y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = 1}$.

2 L'application $\varphi_T : t \mapsto y(t+T)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_T''(t) = y''(t+T) = -q(t+T)y(t+T)$$

Or q est T-périodique, donc:

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \varphi_T''(t) = -q(t)y(t+T) = -q(t)\varphi_T(t)$$

ce qui démontre que φ_T est solution de (1) sur $\mathbb{R}$.

D'après la question 1.a, l'application φ_T est donc combinaison linéaire de y_1 et y_2, soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\varphi_T = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

En évaluant en 0 cette égalité, ainsi que celle obtenue par dérivation $\varphi_T' = \alpha y_1' + \beta y_2'$, on obtient:

$$\begin{cases} \varphi_T(0) = y(T) = \alpha \\ \varphi_T'(0) = y'(T) = \beta \end{cases}$$

D'où le résultat : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t).$

3 On note Φ_T l'endomorphisme définit par

$$\Phi_T : \begin{cases} S & \to & S \\ y & \mapsto & (\varphi_T : t \mapsto y(t+T)) \end{cases}$$

i) $\Leftrightarrow$**ii)** L'existence d'une application non nulle y vérifiant (i) est équivalent à μ est valeur propre de Φ_T .

D'après la question 2) on a

$$\mathrm{Mat}_{(y_1,y_2)}(\Phi_T) = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\chi_{\Phi_T}(X) = X^2 - (y_1(T) + y_2'(T))X + (y_1(T)y_2'(T) - y_1'(T)y_2(T)).$$

D'après la question 1.b) on a $y_1(T)y_2'(T) - y_1'(T)y_2(T) = 1$, donc

$$\chi_{\Phi_T}(X) = X^2 - (y_1(T) + y_2'(T))X + 1.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \textbf{i)} &\Leftrightarrow \mu \in \mathrm{Sp}(\Phi_T) \\ &\Leftrightarrow \chi_{\Phi_T}(\mu) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mu^2 - (y_1(T) + y_2'(T))\mu + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \textbf{ii)} \end{aligned}$$

i) $\Leftrightarrow$**iii)**

Supposons **i)**. Soit $y \in S$ non nulle telle que: $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t+T) = \mu y(t)$, et posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} y(t)$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} u(t)$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t+T) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{-\lambda T} y(t+T) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{1}{\mu}.\mu y(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} y(t) = u(t),$$

u est donc T-périodique, ainsi **i)** implique **iii)**.

Réciproquement si **iii)** est vraie, alors u est T-périodique et

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = \mathrm{e}^{\lambda T}\mathrm{e}^{\lambda t}u(t+T) = \mathrm{e}^{\lambda T}\mathrm{e}^{\lambda t}u(t) = \mu y(t),}$$

et y est une solution non nulle de (1) par hypothèse: d'où **i)**.

Ce qui donne l'équivalence des trois assertions.

4

4.a On a $\mathrm{Sp}(\Phi_T) = \{\mu_1, \mu_2\}$ avec $\mu_1 \neq \mu_2$. Φ_T est diagonalisable et S admet une base $(y_1,\, y_2)$ formée de vecteurs propres de Φ_T .

La question 3. assure l'existence de deux fonctions w_1 , w_2 de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et T-périodiques telles que $y_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t} w_1(t)$ et $y_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_2 t} w_2(t)$.

La forme de χ_{Φ_T} donne $\mu_1.\mu_2 = 1$ et on a $\mu_1 = \mathrm{e}^{\lambda T}$, donc $\mu_2 = \mathrm{e}^{-\lambda T}$, par suite $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_2 = -\lambda$.

Par conséquent, pour toute solution y de (1) il existe α et β tels que :

$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha \mathrm{e}^{\lambda t} w_1(t) + \beta \mathrm{e}^{-\lambda t} w_2(t)}$.

4.b Si $\mu_1 = \mu_2$, alors par les relations coefficients-racines on a: $\mu_1^2 = 1$, donc: $\mu_1 \in \{1, -1\}$.

Soit y vecteur propre de Φ_T associé à μ_1, donc y vecteur propre de Φ_T^2 associé à 1, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t+2T) = y(t)$, donc y une solution non nulle et $2T$-périodique de (1) $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Deuxième partie

5

5.a On suppose qu'il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in V, \|dh(x)\| \leqslant C$.

Soit γ l'application définie sur $[0,1]$ par $t \mapsto x_1 + t(x_2 - x_1)$. V est convexe donc $\gamma(\,[x_1, x_2]) \subset V$ et γ est de classe $\mathscr{C}^1$donc $h \circ \gamma$ est une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, et par la formule de la différentielle de la composée de deux fonctions on a

$$(h \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}h\,(\gamma(t)) \circ \gamma'(t) = (\mathrm{d}h\,(\gamma(t))\,)\,(x_2 - x_1)$$

donc

$$h(x_2) - h(x_1) = \int_0^1 (h \circ \gamma)'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (\mathrm{d}h\,(\gamma(t))\,)\,(x_2 - x_1)\mathrm{d}t,$$

et par l'inégalité des normes :

$$\|h(x_2) - h(x_1)\| \leqslant \int_0^1 \|\,(\mathrm{d}h\,(\gamma(t))\,)\,(x_2 - x_1)\|\mathrm{d}t$$

l'application linéaire d$h\,(\gamma(t))$ est continue donc

$$\|\,(\mathrm{d}h\,(\gamma(t))\,)\,(x_2 - x_1)\| \leq \|\mathrm{d}h(\gamma(t))\|\,.\|x_1 - x_2\| \leq C.\|x_1 - x_2\|$$

d'où $\boxed{\|h(x_2) - h(x_1)\| \leqslant C.\|x_1 - x_2\|}$.

5.b Considérons l'application $h = \mathrm{Id}_E - f$.

On a $h \in \mathscr{C}^1(U, E)$ et

$$\mathrm{d}h = \mathrm{d}f - \mathrm{d}\,(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{d}f - \mathrm{Id}_E = \mathrm{d}f - \mathrm{d}f(a)$$

par suite d$h(a) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Comme dh est continue en a, alors il existe $r_1 > 0$ tel que:

$$\forall x \in U \cap B(a, r_1), \|\mathrm{d}h(x) - \mathrm{d}h(0)\| = \|\mathrm{d}h(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$$

U est ouvert donc il existe $r_2 > 0$ tel que $B(a, r_2) \subset U$. Soit $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$, on a $\overline{B(a,r)} \subset U \cap B(a, r_1)$ et donc

$$\forall x \in \overline{B(a,r)}, \|\mathrm{d}h(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$$

la question précédente appliquée au convexe $\overline{B(a,r)}$ donne :

$$\forall (x_1, x_2) \in \overline{B(a,r)}^2, \quad \|h(x_1) - h(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Par l'inégalité triangulaire (bis) on a

$$\begin{aligned}\forall (x_1, x_2) \in \overline{B(a,r)}^2, \quad \|h(x_1) - h(x_2)\| &= \|(x_1 - x_2) - (f(x_1) - f(x_2))\| \\ &\geqslant \|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\|\end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall(x_1,x_2)\in\overline{B(a,r)}^2,\quad \|f(x_1)-f(x_2)\|\geqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|}$.

5.c Soit $x\in B(a,r)$ et $h\in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}f(x))$ donc $\mathrm{d}f(x)(h)=0_E$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}$ tel que $\|\varepsilon h\|\leq r-\|x-a\|$.

Pour tout $t\in]0,\varepsilon]$ on a

$$\|x+th-a\|\leq\|x-a\|+\|th\|\leq\|x-a\|+\|\varepsilon h\|\leq r$$

donc $x+th\in\overline{B(a,r)}$ et par la question précédente on a

$$\left\|\frac{1}{t}\left(f\left(x+th\right)-f(x)\right)\right\|\geqslant\frac{\|x+th-x\|}{2t}=\frac{\|h\|}{2}$$

comme $\frac{1}{t}\left(f\left(x+th\right)-f(x)\right)\underset{t\to0}{\to}\mathrm{d}f(x)(h)=0_E$, donc $\|h\|=0$ et $h=0_E$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(\mathrm{d}f(x))=\{0_E\}\text{ et }\mathrm{d}f(x)\text{ est injective}}$.

6 Soit $y_0\in E$ tel que $\|y_0-f(a)\|\leqslant\frac{r}{4}$

6.a Les fonctions f et $\|\cdot\|$sont continues donc g est continue sur le compact $\overline{B(a,r)}$ (*car fermé et borné en dimension finie*) donc admet un minimum et l'atteint en un x_0 sur $\overline{B(a,r)}$.

Montrons que ce minimum est atteint sur $B(a,r)$. Soit x vérifiant $\|x-a\|=r$, alors

$$\|y_0-f(x)\|=\|y_0-f(a)+f(a)-f(x)\|\geqslant\|f(a)-f(x)\|-\|y_0-f(a)\|$$

comme $\|y_0-f(a)\|\leqslant\frac{r}{4}$ et $\|f(a)-f(x)\|\geqslant\frac{1}{2}\|a-x\|$donc

$$\|y_0-f(x)\|\geqslant\frac{1}{2}\|x-a\|-\frac{r}{4}=\frac{r}{4}$$

par suite

$$\|y_0-f(a)\|\leqslant\frac{r}{4}\leqslant\|y_0-f(x)\|$$

donc $g(x)\geqslant g(a)$.

Si $\|x_0-a\|=r$ alors $g(a)=g(x_0)$ et le minimum est aussi atteint en a. On en déduit que g atteint son minimum en un point de $B(a,r)$.

6.b Par l'absurde, supposons que $y_0\neq f(x_0)$.

D'apres la question 5.c $\mathrm{d}f(x_0)$ est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie, il est donc bijectif.

Soit $h\in E\backslash\{0\}$ tel que $\mathrm{d}f(x_0)(h)=(y_0-f(x_0))$.

Pour tout $0<t<\frac{r-\|x_0-a\|}{\|h\|}$ (car $x_0\in B(a,r)$) on a $x_0+th\in\overline{B(a,r)}$, la différentiabilité de f donne

$$f(x_0+th)=f(x_0)+\mathrm{d}f(x_0).th+\|th\|\varepsilon(th)$$

avec $\varepsilon(th) \underset{t\to 0}{\to} 0$. Donc

$$\begin{aligned}\|y_0 - f(x_0+th)\| &= \|y_0 - f(x_0) - t\mathrm{d}f(x_0)(h) - t\varepsilon(t)\| \\ &= \|(1-t)(y_0 - f(x_0)) - t\varepsilon(t)\| \\ &\leqslant (1-t)\|y_0 - f(x_0)\| + t\|\varepsilon(t)\|\end{aligned}$$

on a $\|y_0 - f(x_0)\| > 0$, alors pour t suffisamment proche de 0 on a $\|\varepsilon(t)\| < \|y_0 - f(x_0)\|$ et donc

$$\|y_0 - f(x_0+th)\| < \|y_0 - f(x_0)\|$$

donc $g(x_0+th) < g(x_0)$, ce qui est contredit le fait que g admet un minimum en $x_0$sur $\overline{B(a,r)}$.

D'où $\boxed{y_0 = f(x_0)}$.

7

7.a On a $W = B(f(a), \frac{r}{4})$ est une boule ouverte donc c'est un ouvert de E .

Comme f est continue de U vers E alors $f^{-1}(W)$ est un ouvert de U , il existe donc un ouvert A de E tel que $f^{-1}(W) = U \cap A$, par suite $V = U \cap A \cap B(a,r)$. Ainsi V est un ouvert de E.

7.b Rappelons que $f_{|V} : \begin{cases} V & \longrightarrow & W \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$

- On a $V = f^{-1}(W) \cap B(a,r)$ donc $f(V) \subset W$ et $f_{|V}$ est bien définie de V vers W.
- $f_{|V}$ est continue car f l'est .
- Surjectivité :

Soit $y_0 \in W$, alors $\|y_0 - f(a)\| \leqslant \dfrac{r}{4}$ et par la question 6 il existe $x_0 \in B(a,r)$ tel que $y_0 = f(x_0) \in W$, donc $x_0 \in V = f^{-1}(W) \cap B(a,r)$ et $y = f_{|V}(x_0)$ ainsi $\boxed{f_{|V} \text{ est surjective.}}$

- Injectivité :

Soit $x_1, x_2 \in V \subset \overline{B(a,r)}$, d'après 5.b on a $\|f(x_1) - f(x_2)\| \geqslant \dfrac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$ donc $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$, ainsi $\boxed{f_{|V} \text{ est injective}}$.

Par conséquent $\boxed{f_{|V} \text{ est bijective}}$.

- Continuité de $\left(f_{|V}\right)^{-1}$:

Soit $y_1, y_2 \in W$ et $x_1 = \left(f_{|V}\right)^{-1}(y_1),\ x_2 = \left(f_{|V}\right)^{-1}(y_2) \in V \subset \overline{B(a,r)}$.

La question 5.b donne

$$\left\|\left(f_{|V}\right)^{-1}(y_1) - \left(f_{|V}\right)^{-1}(y_2)\right\| = \|x_1 - x_2\| \leqslant 2\|f(x_1) - f(x_2)\| = 2\|y_1 - y_2\|.$$

$\left(f_{|V}\right)^{-1}$est 2-lipchitzienne donc elle est continue.

Ainsi $\boxed{f_{|V} \text{ un homéomorphisme de } V \text{ sur } W.}$

Troisième partie

Rappels sur l'exponentielle de matrices :

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

- $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. En particulier $\exp(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}) = I_n$.
- $\det(\exp(A)) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(A)}$.
- $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$
- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) = \left\{\mathrm{e}^{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\right\}$.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $V \in E_\lambda(A)$ alors $\exp(A)V = \mathrm{e}^{\lambda} V$
- Si $B = PAP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ alors $\exp(B) = P \exp(A) P^{-1}$.
- $\exp(\mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)) = \mathrm{Diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, ..., \mathrm{e}^{\lambda_n})$.
- si $A.B = B.A$ alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ et $A.\exp(B) = \exp(B).A$
- L'application $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\dfrac{d}{dt}(\exp(tA)) = A.\exp(tA) = \exp(tA).A$.

8

8.a On sait que $\mathbb{C}[A]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et donc $(\mathbb{C}[A], +, \times)$ est un anneau commutatif, par suite $(\mathbb{C}[A])^*$ est le groupe des unités de cette anneau. Donc $(\mathbb{C}[A])^*$ est un sous-groupe abélien de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

8.b
- Par définition de $(\mathbb{C}[A])^*$ on a l'inclusion $(\mathbb{C}[A])^* \subset \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- Soit $M \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$\boxed{\chi_M(M) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})} \text{ avec } \chi_M(0) = a_0 = (-1)^n \det(M) \neq 0}$$

On écrit $\chi_M = XP + a_0$, avec $P \in \mathbb{C}[X]$. L'égalité $\chi_M(M) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$ donne $\mathrm{I}_n = -\frac{1}{a_0} P(M).M$.
On en déduit $\boxed{M^{-1} = -\frac{1}{a_0} P(M)}$, donc $M^{-1} \in \mathbb{C}[M] \subset \mathbb{C}[A]$ et $M \in (\mathbb{C}[A])^*$.
D'où l'égalité $\boxed{\mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}[A])^*}$.

9 Soit $M \in \mathbb{C}[A]$. On sait que $\exp(M) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} M^n$ est une matrice inversible et $(\exp(M))^{-1} = \exp(-M)$, donc $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ .On a $\exp(M) = \displaystyle\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} M^n$, ce qui montre que $\exp(M)$ est limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{C}[A]$. Or $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, donc c'est un fermé (*il est donc stable par passage à la limite*),
on en déduit que $\exp(M) \in \mathbb{C}[A]$.

Ainsi: $\exp(M) \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}[A])^*$, d'où $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*}$.

10

10.a Posons $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ (t,a) & \mapsto & Z_a(t) \end{array} \right.$. Soient (t,a) et (t',a') dans $]0,1[\times\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
(\Phi(t,a)=\Phi(t',a')) &\Leftrightarrow (Z_a(t)=Z_{a'}(t')) \\
&\Leftrightarrow (t+iat(1-t)=t'+ia't'(1-t')) \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} t=t' \\ at(1-t)=a't'(1-t') \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t=t' \\ a=a' \end{array} \right. \quad ((t(1-t)=t'(1-t')\neq 0 \text{ car } t\in]0,1[) \\
&\Leftrightarrow (t,a)=(t',a')
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que l'application Φ est injective .

10.b Soit $a\in\mathbb{R}$. Posons pour tout $t\in[0,1]$, $M(t)=Z_a(t)M_1+(1-Z_a(t))\,M_2$. C'est un élément de $\mathbb{C}[A]$ pour tout $t\in[0,1]$, puisqu'il est combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{C}[A]$.

Considérons l'application $P : z\mapsto \det(zM_1+(1-z)\,M_2)$ .On a pour $z\in\mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned}
\det(zM_1+(1-z)M_2) &= (-z)^n \det(M_1)\det\left(I_n-(1-\frac{1}{z})\,(M_1^{-1}M_2)\right) \\
&= (-z)^n\det(M_2)\,\chi_{\left(M_1^{-1}M_2\right)}\left(1-\frac{1}{z}\right)
\end{aligned}$$

Comme $P(0)=\det(M_2)\neq 0$ et $P(1)=\det(M_1)\neq 0$, alors on a

$$\begin{aligned}
P(z)=0 &\Leftrightarrow 1-\frac{1}{z}\in \mathrm{Sp}(M_1^{-1}M_2) \\
&\Leftrightarrow z\in\left\{\frac{1}{1-\lambda},\ \lambda\in\mathrm{Sp}(M_1^{-1}M_2)\backslash\{1\}\right\}
\end{aligned}$$

L'ensemble $A=\left\{\frac{1}{1-\lambda},\ \lambda\in\mathrm{Sp}\left(M_1M_2^{-1}\right)\setminus\{1\}\right\}$ est fini, Φ est injective donc l'ensemble $B=\{a\in\mathbb{R},\ \exists t\in]0,1[, Z_a(t)\in A\}$ est fini (*éventuellement vide*).

Soit $a>\max B$ si $B\neq\varnothing$ (et $a=1$ si $B=\varnothing$) on a pour tout $t\in[0,1]$, $\det M(t)\neq 0$ et $M(t)\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

D'où l'existence a tel que $\boxed{\forall t\in[0,1],\quad M(t)\in\mathbb{C}[A]\cap\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})=(\mathbb{C}[A])^*}$.

10.c L'application $t\mapsto Z_a(t)$ est continue car polynomiale, donc l'application $t\mapsto M(t)$ est continue aussi, à valeurs dans $(\mathbb{C}[A])^*$ et vérifie: $M(0)=M_2$, $M(1)=M_1$. Cela montre que M_1 et M_2 sont reliés dans $(\mathbb{C}[A])^*$ par un chemin continu.

Ceci étant valable pour tout couple d'éléments de $(\mathbb{C}[A])^*$, donc $(\mathbb{C}[A])^*$ est connexe par arcs.

11

11.a Par application du résultat démontré dans la deuxième partie.

Considérons $\mathbb{C}[A]$ comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel et montrons que l'application $\exp : \mathbb{C}[A]\to(\mathbb{C}[A])^*$ est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$ et de différentielle en $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$ égale à l'identité.

On choisit sur $\mathbb{C}[A]$ une norme $\|\cdot\|$ d'algèbre, elle vérifie : $\forall A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$

et $\|A^n\|\leq\|A\|^n$.

- Différentiabilité sur $\mathbb{C}[A]$:

Soit M et H dans $\mathbb{C}[A]$ tel que $\|H\|\leqslant 1$. M et H commutent, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\exp(M+H)=\exp(M)\exp(H)&\\&=\exp(M)\left(I_n+H+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\right)\\&=\exp(M)+\exp(M)H+\exp(M)\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\end{aligned}$$

remarquons que $H\mapsto\exp(M)H$ linéaire et

$$\left\|\exp(M)\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\right\|\leqslant\|\exp(M)\|\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!}\right\|$$

par continuité de la norme on a

$$\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!}\right\|\leq\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|H^k\|}{k!}$$

$\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre donc $\left\|H^k\right\|\leq\|H\|^k$ pour tout $k\geq 2$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{H^k}{k!}\right\|&\leq\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|H\|^k}{k!}\\&\leq\|H\|^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\quad(\text{car }\ \|H\|\leq 1\ )\\&\leq \mathrm{e}\,\|H\|^2\end{aligned}$$

et

$$\left\|\exp(M)\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\right\|\leqslant \mathrm{e}\|\exp(M)\|\|H\|^2$$

ainsi $\exp(M)\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k=\mathrm{o}(H)$.

On en déduit que $\boxed{\exp(M+H)=\exp(M)+\exp(M)H+\mathrm{o}(H)}$ et donc exp est différentiable en M avec $\boxed{\mathrm{d}(\exp)(M):H\mapsto\exp(M).H}$.

- Classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{C}[A]$:

La fonction exp est différentiable sur $\mathbb{C}[A]$, donc elle est continue sur $\mathbb{C}[A]$.

Montrons que d(exp) est continue de $\mathbb{C}[A]$ vers $\mathscr{L}(\mathbb{C}[A])$, sur $\mathscr{L}(\mathbb{C}[A])$ on utilise la norme d'opérateur associée à une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[A]$.

Soit B , C et H dans $\mathbb{C}[A]$ on a

$$\|\left(\mathrm{d}(\exp)(B)-\mathrm{d}(\exp)(C)\right)(H)\|=\|\left(\exp(B)-\exp(C)\right).H\|\leq\|\left(\exp(B)-\exp(C)\right)\|\|H\|$$

donc la norme d'opérateur vérifie

$$\boxed{\|\mathrm{d}(\exp)(B) - \mathrm{d}(\exp)(C)\| \leq \|\exp(B) - \exp(C)\|}$$

ce qui prouve la continuité de $\mathrm{d}(\exp)$.

(*pour* $H = I_n$ *on obtient* $\|\mathrm{d}(\exp)(B) - \mathrm{d}(\exp)(C)\| = \|\exp(B) - \exp(C)\|$)

- Finalement, exp est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{C}[A]$ et $\mathrm{d}(\exp)(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[A]}$.

Le résultat démontré dans la deuxième partie 2 assure l'existence d'un ouvert U de $\mathbb{C}[A]$ contenant $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$ et un ouvert V de $\mathbb{C}[A]$ contenant $\exp\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}\right) = \mathrm{I}_n$ tels que exp soit bijective et bicontinue de U vers V .

11.b Soit $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$ montrons qu'il existe un voisinage W de M tel que $W \subset \exp(\mathbb{C}[A])$.

Soit $C \in \mathbb{C}[A]$ tel que: $M = \exp(C)$. Posons $W = \exp(\{C\} + U)$, on a

$$\boxed{\begin{aligned} W &= \{\exp(C+B) \ / \ B \in U\} \\ &= \{M\exp(B) \ / \ B \in U\} \\ &= \{MC \ / \ C \in V\} \\ &= M.V \end{aligned}}$$

On a $M^{-1} \in \mathbb{C}[A]$ donc l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[A] & \to & \mathbb{C}[A] \\ B & \mapsto & M^{-1}B \end{array} \right.$ est bien définie, bijective et elle est linéaire en dimension finie donc continue, ce qui permet d'écrire $W = M.V = \varphi^{-1}(V)$, ainsi W est un ouvert. Comme $I_n \in V$ alors $M \in W$.

On déduit que W est voisinage ouvert de M tel que $W \subset \exp(\mathbb{C}[A])$ par suite $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]$.

12 Montrons qu'il existe un fermé F de $\mathbb{C}[A]$ tel que $\exp(\mathbb{C}[A]) = F \cap (\mathbb{C}[A])^*$

- Montrons que $F = \exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $\mathbb{C}[A]$:

Soit $B \in \mathbb{C}[A] \setminus F$. On a $B\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ content B (*comme dans 11.b*).

Montrons que $B\exp(\mathbb{C}[A])$ est contenu dans $\mathbb{C}[A] \setminus F$.

Si il existe $D \in F$ tel que $B\exp(D) \in F$, comme $\exp(D), \exp(-D)$ et $B\exp(D)$ sont dans $\exp(\mathbb{C}[A])$ alors

$$\boxed{B = [B\exp(D)]\exp(-D) \in \exp(\mathbb{C}[A])}$$

ce qui est absurde, donc

$$\boxed{B\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A] \setminus F.}$$

Ainsi $\mathbb{C}[A] \setminus F$ est un ouvert et F est un fermé de $\mathbb{C}[A]$.

- D'après la question 9. $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*$, donc $\exp(\mathbb{C}[A]) = F \cap (\mathbb{C}[A])^*$par suite $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$.

Remarque : $(\mathbb{C}[A])^*$ n'est pas un sous espaces vectoriel de $\mathbb{C}[A]$, et il n'a pas de structure d'espace vectoriel normé mais une structure d'espace métrique .

13 On suppose que $\exp(\mathbb{C}[A]) \neq (\mathbb{C}[A])^*$ soit $M_1, M_2 \in (\mathbb{C}[A])^*$ telles que $M_1 \in \exp(\mathbb{C}[A])$ et $M_2 \notin \exp(\mathbb{C}[A])$.

13.a Soit f la fonction indicatrice de $(\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$, c'est-à-dire:

$$\begin{array}{rcl} f:(\mathbb{C}[A])^* & \to & \{0,1\} \\ M & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } M \notin \exp(\mathbb{C}[A]), \\ 0 & \text{si } M \in \exp(\mathbb{C}[A]). \end{cases} \end{array}$$

On a $f(M_1) = 0$ et $f(M_2) = 1$ donc $f\left((\mathbb{C}[A])^*\right) = \{0,1\}$.

Montrons que f est continue en vérifiant que l'image réciproque de tout fermé de $\{0,1\}$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$.

Les fermés de $\{0,1\}$ sont les fermés de $\mathbb{R}$ inclus dans $\{0,1\}$, ce sont donc toutes les parties de $\{0,1\}$.

On a :

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ($\emptyset$ *est un fermé de* $(\mathbb{C}[A])^*$)
- $f^{-1}(\{0\}) = \exp(\mathbb{C}[A])$ ($\exp(\mathbb{C}[A])$ *est un fermé de* $(\mathbb{C}[A])^*$ *(question 12.)*)
- $f^{-1}(\{1\}) = (\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ ($\exp(\mathbb{C}[A])$ *est un ouvet de* $\mathbb{C}[A]$ *donc ouvert de* $(\mathbb{C}[A])^*$ *(question 11.b)*)
- $f^{-1}(\{0,1\}) = (\mathbb{C}[A])^*$ ($(\mathbb{C}[A])^*$ *est un fermé de* $(\mathbb{C}[A])^*$)

Donc f est continue de $(\mathbb{C}[A])^*$vers $\{0,1\}$.

13.b La fonction $f : (\mathbb{C}[A])^* \to \mathbb{R}$ est continue et $(\mathbb{C}[A])^*$ connexe par arcs (question 10.c), donc l'image directe $f((\mathbb{C}[A])^*) = \{0,1\}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$, absurde car les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles .

La supposition du départ est fausse d'où $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*}$.

14 On a déjà $\exp\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Réciproquement, soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $A \in (\mathbb{C}[A])^*$, donc par la question précédente $A \in \exp(\mathbb{C}[A])$ or $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \exp\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right)$ donc $A \in \exp\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right)$. D'où l'inclusion réciproque et l'égalité :

$\boxed{\exp\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$.

Quatrième partie

15 D'après le théorème de Cauchy linéaire, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $X'(t) = A(t)X(t)$ (2) est un sous espace vectoriel le dimension n de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

Comme dans la partie 1, on vérifie que l'application:

$$\Psi_T : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{S} & \to & \mathcal{S} \\ Y & \mapsto & (Y_T : t \mapsto Y(t+T)) \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.

Ψ_T admet donc au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$, et 0 ne peut pas être valeur propre car Ψ_T bijectif et $(\Psi_T)^{-1} = \Psi_{-T}$.

D'où l'existence d'une valeur propre non nulle $\mu \in \mathbb{C}^*$de Ψ_T et $Y \in \mathcal{S}$ est un vecteur propre associé, l'égalité $\Psi(Y) = \mu Y$ se traduit par $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t+T) = \mu Y(t)}$.

16 Soit $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ une base de $\mathcal{S}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = \Big[Y_1(t)\Big|Y_2(t)\Big|\ldots\Big|Y_n(t)\Big]$ la matrice dont les colonnes sont $Y_1(t), \ldots, Y_n(t)$

16.a • Par définition, le wronskien de la famille de solutions $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est le déterminant de $M(t)$.
Or $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est une base de solutions, donc le wronskien n'est jamais nul, donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, M(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$

• On a

$$\begin{aligned} M'(t) &= \Big[Y_1'(t)\Big|Y_2'(t)\Big|\ldots\Big|Y_n'(t)\Big] \\ &= \Big[(A(t)Y_1(t)\Big|(A(t)Y_2(t)\Big|\ldots\Big|(A(t)Y_n(t)\Big] \\ &= A(t).\Big[Y_1(t)\Big|Y_2(t)\Big|\ldots\Big|Y_n(t)\Big] \end{aligned}$$

d'où le résultat : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = A(t)M(t)}$.
Les solutions de (2) sont de la forme $t \mapsto M(t)X_0$ avec $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
En général $\dfrac{d}{dt}\exp(X(t)) \neq X'(t)\exp(X(t))$, on ne peut pas dire que $M(t) = \exp(\int A(t)dt)$.

16.b Soit $k \in [\![1, n]\!]$, l'application $t \mapsto Y_k(t+T)$ est élément de S (question 15) .
Alors il existe $(\alpha_{i,k})_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \ , Y_k(t+T) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} Y_i(t)$$

Posons $(E_1, ..., E_n)$ la base canonique $\mathbb{C}^n$, donc $Y_k(t) = M(t)E_k$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $j \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} M(t)^{-1}M(t+T)E_j &= M(t)^{-1}Y_j(t+T) \\ &= M(t)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}Y_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}M(t)^{-1}Y_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}E_i \end{aligned}$$

ce qui prouve que la j ième colonne de $M(t)^{-1}M(t+T)$ est égale à ${}^{\top}(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, ..., \alpha_{n,j})$, par suite $M(t)^{-1}M(t+T) = (\alpha_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\boxed{M(t)^{-1}M(t+T) \text{ est indépendante de } t \in \mathbb{R}}$.

16.c On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ $M(t)^{-1}M(t+T) = M(0)^{-1}M(T)$, posons $P = M(0)^{-1}M(T)$ alors $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
D'après la question 14, il existe $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(C) = P$, soit $B = \frac{1}{T}C$ alors $\exp(TB) = P$.
Ainsi $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\ , M(t+T) = M(t)\exp(TB)}$.

16.d Soit

$$Q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & M(t)\exp(-tB) \end{array} \right.$$

on a $Q(t)=\Phi(M(t),\exp(-tB))$ avec

$$\Phi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\times\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C})\\ (M,N) & \longmapsto & M.N\end{array}\right.$$

Comme M et $t\mapsto\exp(-tB)$ sont continues et Φ bilinéaire en dimension finies alors Q est continue .

Pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}Q(t+T)&=M(t+T)\exp(-(t+T)B)\\&=M(t)\exp(TB)\exp(-TB)\exp(-tB)\\&=M(t)\exp(-tB)\\&=Q(t)\end{aligned}$$

donc Q est continue sur $\mathbb{R}$ et T périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\quad M(t)=Q(t)\exp(tB)}$.

17 On admet la décomposition de Dunford : Il existe deux matrices D et N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que D est diagonalisable, N est nilpotente et

$$B=D+N \text{ et } DN=ND.$$

Il existe donc une matrice $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ telles que $D=P\Delta P^{-1}$.

17.a Soit $(E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $M(t)P=\left[Z_1(t)\middle|Z_2(t)\middle|\dots\middle|Z_n(t)\right]$

- Vérifions que les Z_i sont dans $\mathcal{S}$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. On a pour $t\in\mathbb{R}$ $M(t)PE_i=Z_i(t)$ donc

$$\begin{aligned}Z_i'(t)&=M'(t).PE_i\\&=A(t)M(t)PE_i\\&=A(t)Z_i(t)\end{aligned}$$

donc Z_i vérifie (2).

- Le wronskien de la famille de solutions $(Z_1,\dots,Z_n)$ est le déterminant de $M(t)P$ qui est non nul, donc $(Z_1,\dots,Z_n)$est une base de $\mathcal{S}$.

17.b Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les nombres complexes tels que $\Delta=\mathrm{Diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$.

Pour tous $0\leqslant i\leqslant n-1, 1\leqslant k\leqslant n$ et $t\in\mathbb{R}$, on note $R_{i,k}(t)$ la k-ième colonne de la matrice $\dfrac{1}{i!}Q(t)N^iP$.

Soient $k\in[\![1,n]\!]$ et $t\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}Z_k(t)&=M(t)PE_k\\&=Q(t)\exp(tB)PE_k\\&=Q(t)\exp(tD+tN)PE_k,\end{aligned}$$

les matrices D et N commutent, donc $\boxed{\exp(tD+tN)=\exp(tN)\exp(tD)}$.

Comme $D=P\Delta P^{-1}$ alors $\boxed{\exp(tD)=P\exp(t\Delta)P^{-1}=P\,\mathrm{Diag}\left(\mathrm{e}^{t\lambda_1},\mathrm{e}^{t\lambda_2},\dots,\mathrm{e}^{t\lambda_n}\right)P^{-1}}$ et

$$\begin{aligned} Z_k(t) &= Q(t)\exp(tN)\exp(tD)PE_k \\ &= Q(t)\exp(tN)P\exp(t\Delta)P^{-1}PE_k \\ &= Q(t)\exp(tN)P\exp(t\Delta)E_k \end{aligned}$$

Or $\exp(t\Delta)E_k=\mathrm{e}^{t\lambda_k}E_k$ donc

$$Z_k(t)=\mathrm{e}^{t\lambda_k}Q(t)\exp(tN)PE_k$$

N est nilpotente d'ordre au plus n donc $\exp(tN)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}N^i$.

On en déduit :

$$Z_k(t)=\mathrm{e}^{t\lambda_k}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}Q(t)N^iPE_k=\mathrm{e}^{t\lambda_k}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}R_{i,k}(t).$$

Ainsi $\boxed{Z_k(t)=\mathrm{e}^{t\lambda_k}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}R_{i,k}(t)}$.

La continuité et la périodicité des $R_{i,k}$ découlent de celles de Q .

17.c On suppose que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \mathrm{Re}(\lambda_i)<0$.

Soit Y une solution de (2), alors il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}$ tel que $Y=\sum_{k=1}^{n}\alpha_kZ_k$.

Or

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ \forall t\in\mathbb{R},\ |Z_k(t)|\leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t}\sum_{i=0}^{+\infty}|t|^i\,|R_{i,k}(t)|$$

les $R_{i,k}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ car elles sont continues et périodiques et les $\mathrm{Re}\,(\lambda_k)<0$, donc $\forall k\in[\![1,n]\!],\ Z_k(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$, par suite $\boxed{Y(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0}$.

18

18.a Supposons qu'il existe $\lambda\in\mathrm{Sp}(B)$ tel que $\lambda=i\dfrac{2k\pi}{mT}$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et $m\in\mathbb{N}^*$. Soit V un vecteur propre de B associé à λ.

L'application $Y:t\mapsto M(t)V$ est solution non nulle de (2) (car $M'(t)=A(t)M(t)$).

Par continuité de l'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\times\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})\\ (M,X) & \longmapsto & M.X\end{array}\right.$ on a pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\exp(tB)V &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{t^\ell}{\ell!}B^\ell V\\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{t^\ell}{\ell!}\lambda^\ell V\\ &= \mathrm{e}^{t\lambda}V\end{aligned}$$

donc $Y(t) = Q(t)\exp(tB)V = \mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)V$.

Comme $mT\lambda = 2ik\pi \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et Q est T périodique alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Y(t+mT) = \mathrm{e}^{\lambda(t+mT)}Q(t+mT)V = \mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)V = Y(t)$$

Ainsi Y est une solution non nulle de (2) et mT-périodique.

18.b Soit Y une solution mT-périodique et non nulle.

Il existe $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que: $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = M(t)X_0 = Q(t)\exp(tB)X_0$.

Comme $Y(mT) = Y(0)$ alors $M(T)X_0 = M(0)X_0$ et

$$Q(mT)\exp(mTB)X_0 = Q(0)X_0.$$

Comme Q est T-périodique donc $Q(mT) = Q(0)$ et

$$Q(0)\exp(mTB)X_0 = Q(0)X_0.$$

or Q est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ donc

$$\exp(mTB)X_0 = \exp(TB)^m X_0 = X_0.$$

cela montre que 1 est une valeur propre de $\exp(TB)^m$.

Or $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\exp(TB)^m\right) = \{\lambda^m \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(TB))\}$ (*car toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables*) donc il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(TB))$ tel que $\lambda^m = 1$, d'où le résultat .

19 Pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, on a X et X' sont T-périodiques et T'-périodiques de X et A est T-périodique, donc X et X' sont $kT+\ell T'$-périodiques par suite

$$X'(t+kT+\ell T') = A(t+kT+\ell T')X(t+kT+\ell T') = A(t+kT+\ell T')X(t).$$

Posons $G = \mathbb{Z}T' + \mathbb{Z}T$, qui est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, engendré par T et T', on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall g \in G, \quad X'(t) = A(t+g)X(t).$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall g \in G, \quad A(t)X(t) = A(t+g)X(t) \ (*)$$

Le sous groupe G est soit dense dans $\mathbb{R}$ soit de la forme $\mathbb{Z}a$.

Si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = \mathbb{Z}a$ alors il existe $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $T = ak$ et $T' = a\ell$, de plus $(k,\ell) \neq (0,0)$ car $(T,T') \neq (0,0)$.

On en déduit que $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{\ell}{k} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse sur T'. Ainsi G est dense dans $\mathbb{R}$.

Soient $t,u \in \mathbb{R}$ et $(g_m)_{m\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $u-t$, alors par continuité de A

$$A\left(t+g_m\right) \underset{m\to+\infty}{\to} A(t+u-t) = A(u)$$

par suite

$$A\left(t+g_m\right)X(t) \underset{m\to+\infty}{\to} A(u)X(t),$$

mais pour tout $m \in \mathbb{N},\ A(t)X(t) = A(t+g_m)X(t)$, donc

$$A(t+g_m)X(t) \underset{m\to+\infty}{\to} A(t)X(t).$$

Par unicité de la limite on a $\boxed{\forall t, u \in \mathbb{R}, A(t)X(t) = A(u)X(t)}$.

20 ▶ Cas 1 : Si $n = 1$.

$A = a$ une constante complexe, l'équation devient scalaire $x'(t) = ax(t)$ et admet comme solutions les fonctions $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{at}$,

on n'a une solution T'- périodique avec $T' > 0$ si et seulement si $a \in \dfrac{2i\pi}{T'}\mathbb{Z}$. Dans ce cas on peut prendre $Q = \lambda$ et $B = a$.

▶ Cas 2 : Si $n \geq 2$.

- Cherchons les solutions T'-périodique non nulle avec $T' \notin \mathbb{Q}T$.

Soit X une solution T'-périodique non nulle avec $T' \notin \mathbb{Q}T$. Posons $V = \mathrm{Vect}(X(t)\ ; t \in \mathbb{R})$, c'est un sous espace de dimension finie de $\mathbb{C}^n$, il est donc fermé.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$on a

$$\frac{1}{h}(X(t+h) - X(t)) \in V$$

or V est fermé, donc $X'(t) \in V$. Comme $\forall t \in \mathbb{R},\ A(t)X(t) = X'(t)$ alors $A(t)V \subset V$ (V est stable par $A(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$).

Par hypothèse et puisque $V \neq \{0\}$ on a donc $V = \mathbb{C}^n$. Soient $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ tels que $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

Alors d'après la question 19 on a, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$A(u)X(t_i) = A(t_i)X(t_i)$$

Ainsi, $A(u)$ est déterminé sur une base de $\mathbb{C}^n$ de façon indépendante de u, donc A est constante.

Soit Y un vecteur propre de $A(0)$. Alors $\mathbb{C}Y$ est stable, par $A(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, qui est différent de $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$, ce qui contredit l'hypothèse sur A .

Donc il n'existe pas de solution T'-périodique non nulle avec $T' \notin \mathbb{Q}T$.

- Cherchons les solutions T'-périodique non nulle avec $T' \in \mathbb{Q}T$.

Soit X une solution T'-périodique avec $T' = \frac{m}{q}T$, $m, q \in \mathbb{N}^*$, donc X est mT-périodique et d'après la question 18.b), il existe $k \in \mathbb{Z}$ telle que:

$$\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{m}} \in \mathrm{Sp}(\exp(TB)) = \{\mathrm{e}^{T\lambda}; \lambda \in \mathrm{Sp}(B)\}$$

Il existe donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ tel que $\mathrm{e}^{T\lambda} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{m}}$ donc il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que

$$T\lambda = \frac{2ik\pi}{m} + 2i\ell\pi = \frac{2i(k+\ell m)\pi}{m}$$

Donc une condition nécessaire à l'existence de solutions T'-périodiques non nulle avec $T' \in \mathbb{Q}T$ est : B possède une valeur propre de la forme $\lambda \in \frac{2i\pi}{T}\mathbb{Q}$.

Réciproquement si B possède une valeur propre de la forme $\lambda \in \frac{2i\pi}{T}\mathbb{Q}$, la question 18.a assure l'existence d'une solution non nulle et mT-périodique .

Finalement l'équation (2) admet une solution périodique non nulle si et seulement si :

$$\boxed{\begin{cases} n = 1 \text{ et } A \in \dfrac{2i\pi}{T'}\mathbb{Z} \,,\, T' > 0 \\ n = 2 \text{ et } \mathrm{Sp}(B) \cap \dfrac{2i\pi}{T}\mathbb{Q} \neq \varnothing \end{cases}} .$$

Ce qui est équivalent à : $\boxed{B \text{ admet une valeur propre de la forme } \dfrac{2ik\pi}{mT} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } m \in \mathbb{N}^*}$.

21 Le théorème de Cauchy assure l'existence des solutions de (3) et que l'ensemble $\mathcal{S}_3$ des solutions de (3) s'écrit de la forme

$$\mathcal{S}_3 = \{X_p\} + \mathcal{S}_2$$

avec X_p est une solution particulière de (3) et $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des solutions de (2) .

Soit $X \in \mathcal{S}_3$ donc il existe $V \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$X(t) = M(t)V + X_p(t) = Q(t)\exp(tB)V + X_p(t)$$

- Si X est T-périodique alors $X(0) = X(T)$ et

$$Q(0)V + X_p(0) = Q(T)\exp(TB)V + X_p(T) = Q(0)\exp(TB)V + X_p(T)$$

donc

$$Q(0)\big[\exp(TB) - I_n\big]V = X_p(0) - X_p(T)$$

Par hypothèse on a $1 \notin \mathrm{Sp}(\exp(TB))$, alors $\exp(TB) - I_n$ est inversible et

$$V = \big[\exp(TB) - I_n\big]^{-1}\big[Q(0)\big]^{-1}(X_p(0) - X_p(T)) \quad (*)$$

ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence.

- Soit V définit par la relation (*) et $X : t \mapsto M(t)V + X_p(t)$.

On a $X(0) = X(T)$ par construction de V. Soit $Y : t \mapsto X(t+T)$, elle est donc dérivable.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} Y'(t) &= X'(t+T) \\ &= A(t+T)X(t+T) + b(t+T) \\ &= A(t)Y(t) + b(t) \quad (A \text{ et } b \text{ sont } T\text{-périodique}) \end{aligned}$$

Donc X et Y sont solutions du problème de Cauchy formé par $Z' = AZ + b$ et la condition initiale $Z(0) = X(0)$. Par unicité de la solution de ce problème on a $Y = X$, donc X est une solution de (3) T-périodique, d'où l'existence.

Finalement, (3) possède une unique solution T-périodique.

22 Posons $X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A(t)=\begin{pmatrix} 1 & -\cos(t) \\ \cos(t) & 1 \end{pmatrix}$, le système s'écrit $X'(t)=A(t)X(t)$.

Notons $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A(t)=I_2+\cos(t)J$.

On a $\chi_J(X)=X^2+1$, donc J est diagonalisable, un petit calcul donne

$$J=P\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}P^{-1}, \quad \text{avec :} \quad P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

donc

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad A(t)=PDP^{-1}=P\begin{pmatrix} 1+i\cos(t) & 0 \\ 0 & 1-i\cos(t) \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Posons $X=PY$ alors

$$X'(t)=A(t)X(t)\Leftrightarrow PY'(t)=A(t)PY(t)\Leftrightarrow Y'(t)=DY(t)$$

Notons $Y(t)=\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ donc

$$Y'(t)=DY(t)\Leftrightarrow \begin{cases} u'(t)=(1+i\cos(t))u(t) \\ v'(t)=(1-i\cos(t))v(t) \end{cases}$$

ainsi il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ tels que $Y(t)=\begin{pmatrix} \lambda e^{t+i\sin(t)} \\ \mu e^{t-i\sin(t)} \end{pmatrix}$ et $X(t)=PY(t)=\begin{pmatrix} \lambda e^{t+i\sin t}+\mu e^{t-i\sin t} \\ -i\lambda e^{t+i\sin t}+i\mu e^{t-i\sin t} \end{pmatrix}$.

- **Une forme normale complexe**

On a $X(t)=\begin{pmatrix} e^{t+i\sin t} & e^{t-i\sin t} \\ -ie^{t+i\sin t} & ie^{t-i\sin t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ on prend donc

$$M(t)=\begin{pmatrix} e^{t+i\sin t} & e^{t-i\sin t} \\ -ie^{t+i\sin t} & ie^{t-i\sin t} \end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix} e^{i\sin t} & e^{-i\sin t} \\ -ie^{i\sin t} & ie^{-i\sin t} \end{pmatrix}$$

Il suffit de poser $B=\mathrm{I}_n$ et $Q(t)=\begin{pmatrix} e^{i\sin t} & e^{-i\sin t} \\ -ie^{i\sin t} & ie^{-i\sin t} \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} e^{i\sin t} & 0 \\ 0 & e^{-i\sin t} \end{pmatrix}P^{-1}$ pour mettre M sous la forme $M(t)=Q(t)\exp(tB)$ avec $Q:\mathbb{R}\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ continue et 2π-périodique.

- **Une autre forme normale réelle :**

On a

$$X(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(\lambda \mathrm{e}^{i\sin t}+\mu \mathrm{e}^{-i\sin t}) \\ \mathrm{e}^t(-i\lambda \mathrm{e}^{i\sin t}+i\mu \mathrm{e}^{-i\sin t}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(\lambda \mathrm{e}^{i\sin t}+\mu \mathrm{e}^{-i\sin t}) \\ \mathrm{e}^t(-i\lambda \mathrm{e}^{i\sin t}+i\mu \mathrm{e}^{-i\sin t}) \end{pmatrix}$$
$$=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix} (\lambda+\mu)\cos(\sin t)+i(\lambda-\mu)\sin(\sin t) \\ i(-\lambda+\mu)\cos(\sin t)+(\lambda+\mu)\sin(\sin t) \end{pmatrix}$$
$$=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix} \cos(\sin t) & -\sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & \cos(\sin t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ i(-\lambda+\mu) \end{pmatrix}$$

on prend donc $M(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\cos(\sin(t)) & -\mathrm{e}^t\sin(\sin(t)) \\ \mathrm{e}^t\sin(\sin(t)) & \mathrm{e}^t\cos(\sin(t)) \end{pmatrix}$, $B=\mathrm{I}_n$ et $Q(t)=\begin{pmatrix} \cos(\sin t) & -\sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & \cos(\sin t) \end{pmatrix}$.

ÉCOLES NORMALES SUPERIEURES

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES C (ULSR)

Session 2024 - Filières MP - MPI

Durée: 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

NOTATIONS

Soit E une partie de $\mathbb{C}$.

Àtoute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E, ce que l'on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de Cesàro définie par

$$\forall n \geqslant 0, \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

et la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des écarts définie par

$$\forall n \geqslant 0, e_n = u_{n+1} - u_n$$

À toute série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles définie par

$$\forall n \geqslant 0, S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente, on note S sa somme définie par

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N$$

et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes définie par

$$\forall n \geqslant 0, R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

À toute série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, de rayon de convergence $R > 0$, on associe sa somme f définie sur $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ par

$$\forall z \in D(0,R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note

$$\mathscr{C}^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R};\ f \text{ continue sur } I\}\ ,\quad \mathscr{C}_b^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R};\ f \text{ continue et bornée sur } I\}$$

I. Lemme de Cesàro

Le but de cette partie est de démontrer le lemme de Cesàro, voir question 1, d'en proposer des applications et d'établir certaines variantes puis des réciproques partielles.

1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell\right). \qquad \text{(Cesàro)}$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, démontrer que le résultat subsiste si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

Application

2 En utilisant (Cesàro), calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$. Puis, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \alpha$. En utilisant (Cesàro), donner un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Retrouver ce résultat par un théorème de comparaison de séries à termes positifs.

4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in]0,+\infty[$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$. Démontrer que le résultat subsiste si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.

5 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$.
Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = ab$$

6 Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries de nombres complexes, convergentes de sommes respectives A et B. On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associées définie par $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} C_k\right) = AB. \qquad \text{(Cauchy)}$$

Ráciproques partielles

7 Vérifier que la réciproque de (Cesàro) n'est pas toujours vraie en exhibant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui ne converge pas et telle que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monotone}\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right)$$

Démontrer que le résultat subsiste pour $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right). \qquad \text{(Hardy faible)}$$

Indication : on pourra démontrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} k e_k = n u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k$$

10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right). \qquad \text{(Hardy fort)}$$

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell$ et $e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

10.a Soit $0 \leqslant n < m$. Démontrer que

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j$$

10.b En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $2 \leqslant n < m$, on a

$$\left|\frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n\right| \leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$$

et

$$|u_n - \ell| \leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{m+1}{m-n}\left(|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|\right)$$

10.c En déduire (Hardy fort).

Indication : on pourra prendre $m = 1 + [\alpha n]$ avec un paramètre $\alpha > 1$ à choisir, où $[x]$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

II. Théorème d'Abel

Le but de cette partie est de démontrer le théorème d'Abel, voir question 11, d'en proposer des applications et d'établir certaines variantes et des réciproques partielles.

11 Soit $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et de somme f. On note

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} ; |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\pi/2, \pi/2], z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}$$

pour $\theta_0 \in [0, \pi/2[$.

Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\sum_{n \geqslant 0} a_n \text{ converge} \right) \Rightarrow \left(\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right). \qquad \text{(Abel)}$$

11.a Démontrer (Abel) pour $R > 1$.

À partir de maintenant, on suppose que $R = 1$ et que $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$ converge, et on se donne un $\theta_0 \in [0, \pi/2[$

11.b Démontrer que pour tous $N \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N \left(z^N - 1 \right)$$

11.c En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, on a

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$$

11.d Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

11.e Démontrer qu'il existe $\rho(\theta_0) > 0$ tel que pour tout $z \in \Delta_{\theta_0}$ de la forme $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $0 < \rho \leqslant \rho(\theta_0)$, on a

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

En déduire (Abel).

12 Démontrer que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$$

13 Exhiber une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1 et de somme f, telle que $f(z)$ converge quand $z \to 1, |z| < 1$ et telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ ne converge pas.

14 Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. Soit $S \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\lim_{\substack{x\to 1^- \\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S \text{ et } a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S\right). \qquad \text{(Taubérien faible)}$$

Dans la suite de cette question on suppose que $\lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S$ et que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

14.a Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$, on a

$$|S_n - f(x)| \leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| + \frac{\sup\limits_{k>n}(k\,|a_k|)}{n(1-x)}$$

14.b En déduire (Taubérien faible) en spécifiant $x = x_n = 1 - 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

15 Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. Soit $S \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\lim_{\substack{x\to 1^- \\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S \text{ et } a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S\right). \qquad \text{(Taubérien fort)}$$

15.a Démontrer que, sans perte de généralité, on peut supposer que $S = 0$.

On suppose désormais que $\lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S$ et que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, avec $S = 0$.

15.b On définit Θ de la manière suivante

$$\Theta = \left\{\theta : [0,1] \to \mathbb{R}; \forall x \in [0,1[, \sum_{n\geqslant 0} a_n \theta(x^n) \text{ converge et } \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \theta(x^n) = 0\right\}$$

Démontrer que Θ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

15.c Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$. Démontrer que $P \in \Theta$.

15.d Démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \lim_{\substack{x\to 1^- \\ x\in\mathbb{R}}} (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n P\left(x^n\right) = \int_0^1 P(t)dt$$

On définit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

15.e Démontrer que pour établir (Taubérien fort), il suffit de démontrer que $g \in \Theta$.

15.f Soit

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{g(x)-x}{x(1-x)} & \text{si } x \in \left]0,1\right[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, démontrer qu'il existe $s_1, s_2 \in \mathscr{C}^0([0,1])$ vérifiant

$$s_1 \leqslant h \leqslant s_2 \text{ et } \int_0^1 \left(s_2(x) - s_1(x)\right) dx \leqslant \varepsilon$$

Représenter graphiquement h et deux telles fonctions s_1, s_2.À partir de maintenant, $\varepsilon > 0, s_1$ et s_2 sont fixés.

15.g Démontrer qu'il existe $T_1, T_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\sup_{x\in[0,1]} |T_1(x) - s_1(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \sup_{x\in[0,1]} |T_2(x) - s_2(x)| \leqslant \varepsilon$$

On pose, pour tout $x \in [0,1]$

$$P_1(x) = x + x(1-x)\left(T_1(x) - \varepsilon\right),\ P_2(x) = x + x(1-x)\left(T_2(x) + \varepsilon\right) \text{ et } Q(x) = \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}$$

15.h Démontrer que

$$P_1(0) = P_2(0) = 0, P_1(1) = P_2(1) = 1, P_1 \leqslant g \leqslant P_2 \text{ et } 0 \leqslant \int_0^1 Q(x)dx \leqslant 5\varepsilon$$

15.i Démontrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \left]0,1\right[$,

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q\left(x^n\right)$$

15.j Conclure.

III. Variantes continues du lemme de Cesáro et du théorème d'Abel

Le but de cette partie est d'étudier des versions continues du lemme de Cesàro, du théorème d'Abel et de leurs réciproques partielles.

16 Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,+\infty[)$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \ell\right)$$

17 À l'aide d'un contre-exemple, démontrer que la réciproque du résultat de la question 16 est fausse.

18 Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,+\infty[)$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = \ell\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell\right)$$

19 Soit $f \in \mathscr{C}_b^0([0,+\infty[)$. On définit la transformée de Laplace de f par la fonction

$$\mathscr{L}(f) : t \in \,]0,+\infty[\, \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f(x)dx$$

Démontrer que $\mathscr{L}(f)$ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et exprimer sa dérivée.

20 Soit $f \in \mathscr{C}_b^0([0,+\infty[)$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\lim_{t\to0^+} \mathscr{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f(x)dx\right)$$

On suppose que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

20.a Démontrer que la fonction

$$F : x \in [0,+\infty[\, \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)dt$$

est bien définie, continue et bornée sur $[0,+\infty[$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et vérifie $F' = -f$.

20.b Démontrer que $\lim_{t\to0^+} \mathscr{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ par une intégration par parties.

21 Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

22 Soit $f \in \mathscr{C}_b^0([0,+\infty[)$ et $S \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{t \to 0^+} \mathscr{L}(f)(t) = S \text{ et } f(t) \underset{t \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \Rightarrow \left(\int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ converge et } \int_0^{+\infty} f(x)dx = S\right)$$

Pour cela, en utilisant les notations de la question 15 de la section 2 , on pourra démontrer qu'il existe $M > 0$ et $A > 0$ tels que pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{+\infty} f(x) g\left(e^{-tx}\right) dx - \int_A^{+\infty} f(x) P_1\left(e^{-tx}\right) dx \right| &\leqslant M \int_A^{+\infty} Q\left(e^{-tx}\right) e^{-tx} \frac{1 - e^{-tx}}{x} dx \\ &\leqslant M \int_0^1 Q(u) du \end{aligned}$$

Fin du sujet

Écoles Normales Superieures

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques C (ULSR)

Session 2024 - Filière MP . MPI

Le problème à pour sujet les théorèmes d'Abel et de Hardy et les théorèmes Taubériens

I. Lemme de Cesàro

1 • Cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{C}$.

Soit $\varepsilon > 0$, an a, par hypothèse sur la convergence de (u_n) :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$|\sigma_n - l| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k - l\right| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - l)\right| = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - l) + \sum_{k=n_0}^{n}(u_k - l)\right|$$

L'inégalité triangulaire donne alors :

$$|\sigma_n - l| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - l)\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k - l|$$

le deuxième terme vérifie pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{(n - n_0 + 1)\,\varepsilon}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus, le premier terme étant une somme finie de réels, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - l)\right| = 0$$

Ce qui donne, d'après la définition de la limite:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - l)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

en posant $N = \max(n_0, n_1)$, on obtient :

$$\forall n \geq N, |\sigma_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi on a

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; / \; n \geq N \Rightarrow |\sigma_n - l| \leq \varepsilon$$

Ce qui permet donc d'écrire:

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_n = l$$

- Cas $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Soit $A > 0$. La suite u tend vers $+\infty$, il existe donc un rang n_0 à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à $2A$. On a, pour tout $n > n_0$:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n} u_k \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + 2A\frac{n - n_0 + 1}{n}$$

et $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n_0-1} u_k + 2A\frac{n_0-n_0+1}{n} = 2A + \dfrac{B}{n}$ avec $B = \sum\limits_{k=1}^{n_0-1} u_k + 2(1-n_0)A \in \mathbb{R}$.

Il existe un rag n_1 à partir duquel on a $\left|\dfrac{B}{n}\right| \leq A$ et donc $\dfrac{B}{n} \geq -A$. En posantSoit $N = \max(n_0, n_1\ )$ on obtient

$$\forall n \geq N, \sigma_n \geq 2A - A = A$$

Ainsi on a

$$\forall A > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; / \; n \geq N \Rightarrow \sigma_n \geq A$$

Ce qui permet donc d'écrire:

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_n = +\infty$$

- Cas $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite $-u$.

Application

2 Soit $u=\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. En utilisant Cesàro on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
La fonction $x\mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$, donc pour tout $k\geq 1$ on a

$$\boxed{\frac{1}{k+1}\leq \int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leq \frac{1}{k}}$$

et pour $n\geq 2$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leq \int_1^{n+1}\frac{dt}{t}\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

ainsi

$$\boxed{\ln(n+1)\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq 1+\ln(n)}$$

ce qui donne $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$ et $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}}$.

3

- On a $e_n = u_{n+1}-u_n$ donc $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} e_k = \dfrac{u_{n+1}-u_0}{n+1}$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \alpha\in\mathbb{R}^*$,le lemme de Cesàro donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1},}{n+1}=\alpha$ ainsi $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha n}$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \alpha\in\mathbb{R}^*$ donc $e_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha$, à partir d'un certain rang e_n et α sont de même signe et la série $\sum e_n$ diverge, le théorème de comparaison de séries à termes de signe constant donne $\sum\limits_{k=0}^{n} e_k \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\alpha$ soit $u_{n+1}-u_0 \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\alpha$ d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha n$.

4

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\,]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell\in\,]0,+\infty[$, composons par ln

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(u_{n+1}\right)-\ln\left(u_n\right)=\ln(\ell)}$$

La question précédente donne

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(u_n\right)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\sqrt[n]{u_n}\right)=\ln(\ell)}$$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell}$.

- Si $\ell=+\infty$ (respectivement $\ell=0$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=+\infty$ (respectivement $-\infty$) , d'près la question 1 on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=+\infty\quad(\text{respectivement}-\infty)}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(u_n)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\sqrt[n]{u_n}\right)=+\infty \quad (\text{respectivement} -\infty)$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\sqrt[n]{u_n}\right)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\sqrt[n]{u_n}\right)=+\infty$

- Soit $u_n=n!$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n}=n+1\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty}$.
- Soit $v_n=\frac{n^n}{n!}$,on a $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=(1+\frac{1}{n})^n\underset{n\to+\infty}{\to}e$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=e}$.

5 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}},a\in\mathbb{C}$ et $b\in\mathbb{C}$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$.

Posons $w_n=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$, on a

$$\begin{aligned}
w_n-ab&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_kb_{n-k}-ab)\\
&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_kb_{n-k}-ab_{n-k}+ab_{n-k}-ab)\\
&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_k-a)b_{n-k}+\frac{a}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(b_{n-k}-b)
\end{aligned}$$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc elle est bornée , soit $M=\sup\limits_{k\geq0}|b_k|$, donc

$$|w_n-ab|\leq\frac{M}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|a_k-a|+\frac{|a|}{n+1}\sum_{k=1}^{n}|b_k-b|$$

le lemme de Cesàro on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}|a_k-a|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k-b|=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=ab$, d'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)=ab}$$

6 Soit $\sum\limits_{n\geqslant0}a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant0}b_n$ deux séries convergentes de sommes respectives A et B, $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$, posons $A_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$, $B_n=\sum\limits_{k=0}^{n}b_k$ et $C_n=\sum\limits_{k=0}^{n}c_k$.

On a $C_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$, comme

$$(0\leq k\leq n \text{ et } 0\leq i\leq k)\Leftrightarrow(0\leq i\leq n \text{ et } i\leq k\leq n)\quad(*)$$

alors après interversion des sommes

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{i=0}^{n}\left(a_i \sum_{k=i}^{n} b_{k-i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} B_k \end{aligned}$$

ce qui donne pour tout $N \geq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} C_n &= \sum_{n=0}^{N}\left[\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} B_k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{N}\left[\left(\sum_{n=k}^{N} a_{n-k}\right) B_k\right] \quad \text{(d'après (*))} \\ &= \sum_{k=0}^{N} A_{N-k} B_k \end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{n=0}^{N} C_n = \dfrac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} A_{N-k} B_k}$

d'après la question 5. on a $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1}\sum\limits_{k=0}^{N} A_{N-k}B_k = AB$, d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k\right) = AB}$

Réciproques partielles

7 Soit $u_n = (-1)^n$, on a $\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge .

8 • On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$ par suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $+\infty$ ce qui est absurde , donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et elle converge vers ℓ' , le lemme de Cesàro donne $\ell = \ell'$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est , le cas précédent donne le résultat . Finalement on a

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monotone}\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right)$$

• Si $\ell = +\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est forcement croissante, car si elle est décroissante alors soit elle converge soit elle tend vers $-\infty$ ce qui contredit $\ell = +\infty$, si elle est majorée alors elle converge vers une limite finie ce qui contredit $\ell = +\infty$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

le cas $\ell = -\infty$ est similaire .

9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell$ et $e_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(u_{n+1} - u_n\right) = 0$.

Ecrivons

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(k\left(u_{k+1}-u_k\right)\right) &= \sum_{k=0}^{n} k u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} k u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)u_k - \sum_{k=1}^{n} k u_k \\ &= -\sum_{k=0}^{n} u_k + n u_{n+1} + u_0\end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{n} \times \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k e_k\right) - \frac{u_0}{n} + \frac{n+1}{n}\sigma_n. \quad (*)$$

par hypothèse et par le lemme de Cesàro,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^{n} k e_k = 0.$$

En passant à la limite dans $(*)$, nous obtenons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

10 On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell$ et $e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

10.a Soit $0 \leqslant n < m$. Démonstration. Posons, pour $n \in \mathbb{N}, x_n = u_{n+1} - u_n$. Soient $0 \leqslant n < m$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n &= \sum_{k=n+1}^{m} \left(u_k - u_n\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{m} \left(\sum_{i=n}^{k-1} \left(u_{i+1} - u_i\right)\right)\end{aligned}$$

comme

$$(n+1 \leq k \leq m \;\text{ et }\; n \leq i \leq k-1) \Leftrightarrow (n \leq i \leq m-1 \;\text{ et }\; i+1 \leq k \leq m) \quad (*)$$

alors

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{i=n}^{m-1}\left(\sum_{k=i+1}^{m} e_i\right) = \sum_{i=n}^{m-1} (m-i)\, e_i.$$

10.b • On a $e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc il existe une constante $C > 0$ telle que $|e_n| \leq \dfrac{C}{n}$,donc pour tous $2 \leqslant n < m$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{m-n}\sum_{k=n+1}^{m} u_k - u_n\right| &= \left|\sum_{i=n}^{m-1}\frac{m-i}{m-n}e_i\right| \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{m-1}\frac{m-i}{m-n}|e_i| \\
&\leq C\sum_{i=n}^{m-1}\frac{m-i}{m-n}\,\frac{1}{i} \\
&\leqslant C\sum_{i=n}^{m-1}\frac{1}{i}.
\end{aligned}$$

L'inégalité $\dfrac{1}{i} \leq \displaystyle\int_{i-1}^{i}\frac{dt}{t} = \ln(i) - \ln(i-1)$, pour tout $i \geq 2$, donne

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{m-n}\sum_{k=n+1}^{m} u_k - u_n\right| &\leqslant C\sum_{i=n}^{m-1}(\ln(i) - \ln(i-1)) \\
&\leqslant C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\frac{1}{m-n}\sum_{k=n+1}^{m} u_k = \frac{(m+1)\,\sigma_m - (n+1)\,\sigma_n}{m-n}$$

d'où pour tous $2 \leqslant n < m$

$$\left|\frac{(m+1)\,\sigma_m - (n+1)\,\sigma_n}{m-n} - u_n\right| \leqslant C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right).$$

• Par l'inégalité triangulaire, pour tous $n < m$,

$$\begin{aligned}
|u_n - \ell| &\leqslant \left|\frac{(m+1)\,\sigma_m - (n+1)\,\sigma_n}{m-n} - u_n\right| + \left|\frac{(m+1)\,\sigma_m - (n+1)\,\sigma_n}{m-n} - \ell\right| \\
&\leqslant C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \left|\frac{(m+1)\,(\sigma_m - \ell) - (n+1)\,(\sigma_n - \ell)}{m-n}\right| \\
&\leqslant C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{m+1}{m-n}\,|\sigma_m - \ell| + \frac{n+1}{m+1}\,|\sigma_n - \ell| \\
&\leqslant C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{m+1}{m-n}\,(|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|)
\end{aligned}$$

10.c Soit $\alpha > 1$ et $m = 1 + [\alpha n]$. On a $\alpha n < m \leq \alpha n + 1$ donc $\dfrac{m-1}{n} \leqslant \alpha$ et $(\alpha - 1)n < m - n$, par suite $\dfrac{m+1}{m-n} \leq \dfrac{\alpha n + 2}{(\alpha-1)n} \leqslant \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$.

Nous avons donc pour tout $n \geq 2$ et $\alpha > 1$

$$|u_n - \ell| \leqslant C\ln(\alpha) - C\ln(1 - \frac{1}{n}) + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \times \left(\left|\sigma_{1+[\alpha n]} - \ell\right| + |\sigma_n - \ell|\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{\alpha \to 1} K\ln(\alpha) = 0$ alors, il existe e $\alpha > 1$ tel que $C\ln(\alpha) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[-C\ln(1 - \frac{1}{n}) + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \times \left(\left|\sigma_{1+[\alpha n]} - \ell\right| + |\sigma_n - \ell|\right)\right] = 0$ alors

$$\exists N \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \left|-C\ln(1 - \frac{1}{n}) + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \times \left(\left|\sigma_{1+[\alpha n]} - \ell\right| + |\sigma_n - \ell|\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \;/\; n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

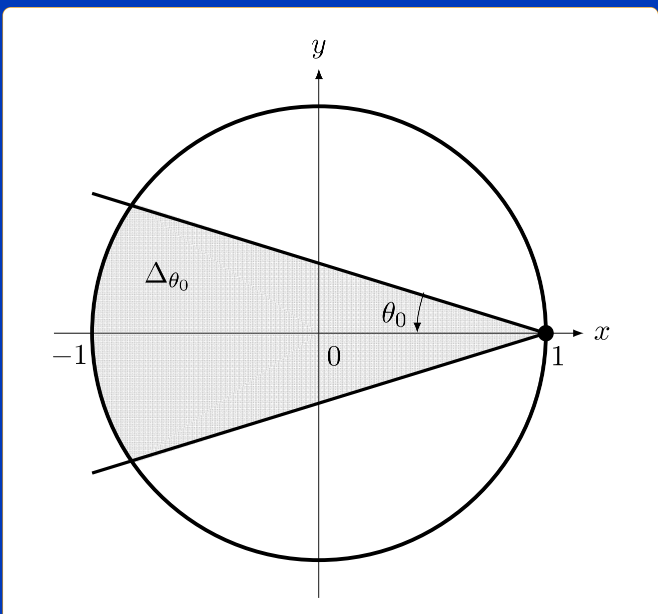
Le suite (u_n) converge donc vers ℓ .

II. Théorème d'Abel

11 On note pour $\theta_0 \in [0, \pi/2[$.

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\right\}$$

D'ont la représentation graphique :



11.a Si $R > 1$ alors f est définie et continue en 1 , ainsi pour tout θ_0 on a

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \lim_{z\to 1} f(z) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

À partir de maintenant, on suppose que $R = 1$ et que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge, et on se donne un $\theta_0 \in [0, \pi/2[$.

11.b Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, on a va réaliser une transformation d'Abel en écrivant pour tout $n \geq 1, a_n = R_{n-1} - R_n$. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N &= \sum_{n=1}^{N} a_n\left(z^n - 1\right)\\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(R_{n-1} - R_n\right)\left(z^n - 1\right)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n\left(z^{n+1} - 1\right) - \sum_{n=0}^{N} R_n\left(z^n - 1\right)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n\left(z^{n+1} - z^n\right) - R_N\left(z^N - 1\right)
\end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N\left(z^N - 1\right)}$

11.c On a $R_N \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ et $z^N \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, ce qui prouve la convergence de $\sum R_n z^n$ pour $|z| < 1$ et par passage à la limite sur N on obtient $\boxed{f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n}$

11.d Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $R_n \to 0$, on peut fixer $N_0 > 0$ assez grand tel que $|R_k| < \varepsilon$ pour tout $k > N_0$, on a pour tout $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$,

$$\begin{aligned}
|f(z) - S| &\leq |z-1|\sum_{k=0}^{N_0} |R_k z^k| + |z-1|\sum_{k=N_0+1}^{+\infty} |R_k z|^k\\
&\leq |z-1|\sum_{k=0}^{N_0} |R_k| + |z-1|\varepsilon\sum_{k=N_0+1}^{+\infty} |z|^k\\
&\leq |z-1|\sum_{k=0}^{N_0} |R_k| + |z-1|\varepsilon\sum_{k=0}^{+\infty} |z|^k\\
&\leq |z-1|\sum_{k=0}^{N_0} |R_k|^k + \varepsilon\frac{|z-1|}{1-|z|} \qquad (*)
\end{aligned}$$

11.e • Pour $z \in \Delta_{\theta_0}$ on écrit $z = 1 - \rho e^{i\theta}$.

On a $|z-1| = \rho$ et $|z|^2 = z\bar{z} = 1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2$, donc

$$\begin{aligned}\frac{|z-1|}{1-|z|} &= \rho\frac{1+|z|}{1-|z|^2}\\ &\leq \frac{2\rho}{2\rho\cos(\theta)-\rho^2}\\ &\leq \frac{2}{2\cos(\theta_0)-\rho}\end{aligned}$$

comme $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos(\theta_0) > 0$, prenons $\rho(\theta_0) \in]0, \cos(\theta_0)[$, on a pour tout $z \in \Delta_{\theta_0}$ de la forme $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $0 < \rho \leqslant \rho(\theta_0)$

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

• Preuve du théorème d'Abel :

Soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{1+\frac{2}{\cos(\theta_0)}}$, on définie N_0 pour ε' comme dans la question d) et prenons $\alpha > 0$ assez petit pour que $|z-1|\sum\limits_{k=0}^{N_0}|R_k| \leq \varepsilon'$ pour tout $|z-1| < \alpha$.

De la relation (*) , pour ε', on obtient alors la majoration suivante pour tout $z \in \Delta_{\theta_0}$ tel que $|z-1| < \alpha$:

$$|f(z)-S| \leq \varepsilon' + \varepsilon'\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \varepsilon'(1+\frac{2}{\cos(\theta_0)}) = \varepsilon$$

Ainsi on a

$$\forall\varepsilon > 0 , \exists\alpha > 0 \ / \ \forall z \in \Delta_{\theta_0} , |z-1| < \alpha \Rightarrow |f(z)-S| \leq \varepsilon$$

d'où $\boxed{\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n}$.

12 La série entière $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}z^n$ est de rayon de convergence 1 et $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ (par le CSSA) , d'apres (Abel) pour $\theta_0 = 0$ on a

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_0}} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^n = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\in]0,1[}} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

par dérivation intégration on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^n = \arctan(x)$ pour tout $x\,]-1,1[$, d'où $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}}$.

13 La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n z^n$ est de rayon de convergence 1, de somme $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$, on a $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} f(z) = \frac{1}{2}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ ne converge pas.

14 Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. On suppose que $\lim\limits_{\substack{x\to 1^-\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S \in \mathbb{C}$ et $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

14.a Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1[$,on a

$$|S_n - f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|\left(1-x^k\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|\, x^k$$

remarquons que $(1-x^k) = (1-x)(1+x+..+x^{k-1}) \leq k(1-x)$, de plus $na_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée , ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|\, x^k &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} |ka_k|\, \frac{1}{k} x^k \\ &\leq \sup_{k>n}\left(k\,|a_k|\right) \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \\ &\leq \frac{\sup\limits_{k>n}\left(k\,|a_k|\right)}{n(1-x)}\end{aligned}$$

Ainsi on a $|S_n - f(x)| \leqslant (1-x)\sum\limits_{k=1}^{n} k\,|a_k| + \dfrac{\sup\limits_{k>n}\left(k\,|a_k|\right)}{n(1-x)}$

14.b Pour $n\in\mathbb{N}^*$, choisissons $x = x_n = 1 - \frac{1}{n}$ et posons $M_n = \sup\limits_{k>n}\left(k\,|a_k|\right)$.

On a $na_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\geq 0\ /\ \forall n\geq N \Rightarrow |na_n|\leq\varepsilon$$

par suite

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\geq 0\ /\ \forall n\geq N \Rightarrow \sup_{k>n}\left(k\,|a_k|\right)\leq\varepsilon$$

d'où $M_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Pour $x = x_n$ on a $\dfrac{M_n}{n(1-x)} = M_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. De plus, par le théorème de Cosàro,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| k\right)\times(1-x_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| k\right)\times\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On a donc prouvé que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f(x_n) - S_n\right) = 0.$$

Par ailleurs,

$$\boxed{S_n - f(x_n) + f(x_n) - S = S_n - S.}$$

on a par hypothèse $\lim\limits_{\substack{x \to 1^- \\ x \in \mathbb{R}}} f(x) = S$, la caractérisation séquentielle de la limite donne $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) - S = 0$, ainsi la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers S .

On en déduit que la série $\sum a_n$ converge et $\boxed{\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n}$.

15

15.a Quitte à remplacer a_0 par $a_0 - S$ on peut supposer $\lim\limits_{\substack{x \to 1^- \\ x \in \mathbb{R}}} f(x) = 0$ sans perte de généralité .

On suppose désormais que $\lim\limits_{\substack{x \to 1^- \\ x \in \mathbb{R}}} f(x) = S$ et que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, avec $S = 0$.

15.b On a : $\Theta \subset \mathscr{F}([0,1], \mathbb{R})$, Θ contient la fonction nulle et évidement stable par combinaison linéaire , donc c'est un sous espace vectoriel de $\mathscr{F}([0,1], \mathbb{R})$.

15.c Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$, pour montrer que $P \in \Theta$, il suffit de montrer que $X^k \in \Theta$ pout tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, si $x \in [0,1[$ alors $x^k \in [0,1[$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n \left(x^k\right)^n$ converge et par composition

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x^k\right)^n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0}$$

donc $X^k \in \Theta$. Par suite $X\mathbb{R}[X] \subset \Theta$.

15.d Par linéarité, il suffit d'établir le résultat pour $P = X^k$, avec $k \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\boxed{\begin{aligned}(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) &= (1-x) \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^{1+k}\right)^n \\ &= (1-x) \times \frac{1}{1-x^{1+k}} \\ &= \frac{1}{1+x+\cdots+x^k}\end{aligned}}$$

donc $(1-x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) \underset{x \to 1^-}{\to} \dfrac{1}{1+k} = \displaystyle\int_0^1 P(t)dt$.

Ainsi on a $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X], \lim\limits_{\substack{x \to 1^- \\ x \in \mathbb{R}}} (1-x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)dt}$

15.e Remarquons que $g \in \Theta$ si et seulement si $\forall x \in [0,1[\,,\ \sum\limits_{\substack{n\geqslant 0\\ x^n \geq \frac{1}{2}}} a_n$ converge et $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{\substack{n=0\\ x^n\geq \frac{1}{2}}}^{+\infty} a_n = 0$

On a $x^n \geq \frac{1}{2}$ dès que $n \leq -\frac{\ln(2)}{\ln(x)}$, posons $N_x = \left[-\frac{\ln(2)}{\ln(x)}\right]$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n.$$

Supposons que $g \in \Theta$, dans ce cas $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{N_x} a_n = 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^\star$ et posons $\alpha_m = \exp\left(-\frac{\ln(2)}{m}\right)$, on a $N_{\alpha_m} = m$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} \alpha_m = 1$. Alors, par caractérisation séquentielle de la limite, nous obtenons

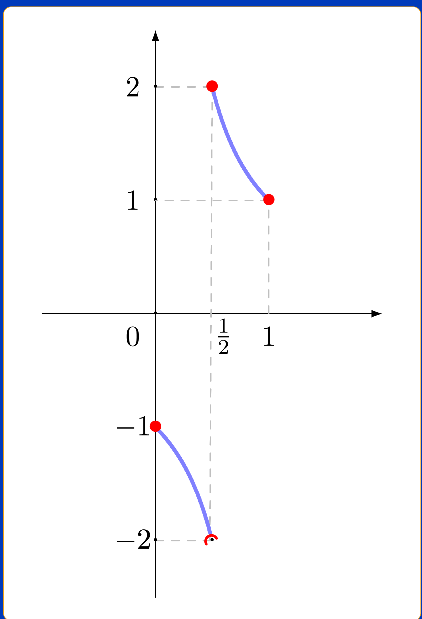
$$\sum_{n=0}^{m} a_n = \sum_{n=0}^{N_{\alpha_m}} a_n \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

ainsi, la série $\sum a_n$ converge vers 0.

15.f On a

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

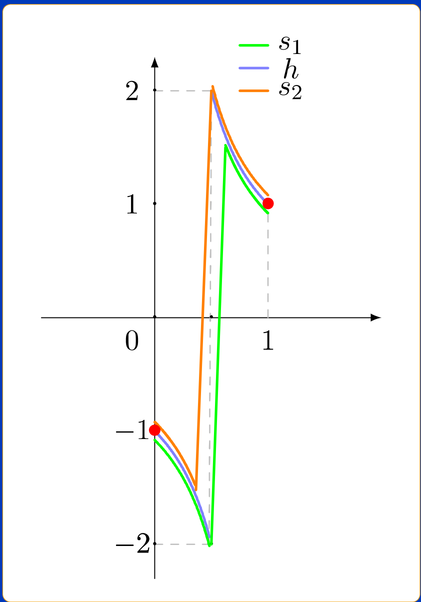
dont la représentation graphique



Étant donné $\varepsilon > 0$, on choisit α , a et b tels que les fonctions s_1 et s_2 définies sur $[0,1]$ par

$$s_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ a(x-\frac{1}{2}) - 2 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\alpha\right] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}+\alpha, 1\right] \end{cases} \quad , \quad s_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}-\alpha\right] \\ b(x-\frac{1}{2}) + 2 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

vérifient : $s_1(\frac{1}{2}+\alpha) = h(\frac{1}{2}+\alpha)$, $s_2(\frac{1}{2}-\alpha) = h(\frac{1}{2}-\alpha)$ et $\displaystyle\int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\, dx \leqslant \varepsilon$.
on obtient $a = \frac{1}{\alpha}\left(h(\frac{1}{2}+\alpha)+2\right)$ et $b = \frac{1}{\alpha}\left(2 - h(\frac{1}{2}-\alpha)\right)$.



Les fonction s_1 et s_2 coïncident sur $\left[0, \frac{1}{2}-\alpha\right] \cup \left[\frac{1}{2}+\alpha, 1\right]$ donc

$$\int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\, dx = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} (s_2(x) - s_1(x))\, dx$$

remarquons que $-2 \leq s_1(x) \leq 2$ et $-2 \leq s_2(x) \leq 2 \quad \forall x \in [0,1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\, dx \leq 8\alpha$, il suffit de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{8}$. D'où l'existence de $s_1, s_2 \in \mathscr{C}^0([0,1])$ vérifiant

$$s_1 \leqslant h \leqslant s_2 \text{ et } \int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\, dx \leqslant \varepsilon$$

15.g Soit $\varepsilon > 0, s_1$ et s_2 sont fixés. D'après le théorème de Stone et Weierstrass s_1 et s_2 sont limites uniforme de suites de polynôme sur $[0,1]$,

donc il existe $T_1, T_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\sup_{x\in[0,1]} |T_1(x) - s_1(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \sup_{x\in[0,1]} |T_2(x) - s_2(x)| \leqslant \varepsilon$$

15.h Pour tout $x \in [0,1]$,

$$P_1(x) = x + x(1-x)\left(T_1(x) - \varepsilon\right), \; P_2(x) = x + x(1-x)\left(T_2(x) + \varepsilon\right) \text{ et } Q(x) = \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}$$

On a :

- $P_1(0) = P_2(0) = 0$ et $P_1(1) = P_2(1) = 1$.
- $T_1 - \varepsilon \leq s_1 \leq T_1 + \varepsilon$ et $T_2 - \varepsilon \leq s_2 \leq T_2 + \varepsilon$ donc $T_1 - \varepsilon \leqslant h \leqslant T_2 + \varepsilon$. Sur $]0,1[$, $h(x) = \dfrac{g(x) - x}{x(1-x)}$

donc $P_1 \leqslant g \leqslant P_2$, qui est aussi vérifiée pour 0 et 1.

- $Q(x) = \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)} = T_2(x) - T_1(x) + 2\varepsilon$, or $T_2 \leq s_2 + \varepsilon$ et $-T_1 \leq -s_1 + \varepsilon$, donc $0 \leq Q \leq s_2 - s_1 + 4\varepsilon$

ce qui donne

$$0 \leqslant \int_0^1 Q(x)dx \leqslant \int_0^1 s_2(x) - s_1(x)dx + 4\varepsilon \leqslant 5\varepsilon$$

15.i Soit $x \in]0,1[$. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant \frac{M}{n}$ et on a $P_1 \leqslant g \leqslant P_2$ donc

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \left(g(x^n) - P_1(x^n)\right) \\
&\leqslant M \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(P_2(x^n) - P_1(x^n)\right) \quad (g(1) = P_1(1)) \\
&\leqslant M \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n(1-x^n)Q(x^n).
\end{aligned}$$

Or $1 - x^n \leqslant n(1-x)$ donc

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q\left(x^n\right)$$

15.j Soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+6M}$ reprenons les étapes de la question 5 avec ε' .

La question **i)** donne

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right)\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1\left(x^n\right)\right| + M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q\left(x^n\right) \quad (1)$$

D'après la question **d)**

$$\lim_{z \to 1^-} (1-z) \times \sum_{n=0}^{+\infty} z^n Q(z^n) = \int_0^1 Q(t)dt$$

et la question **h)** donne $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 Q(t) \leqslant 5\varepsilon'$,donc il existe $0 < \alpha < 1$ tel que

$$\forall x\in[1-\alpha,1[\,,\ \left|(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}x^nQ(x^n)-\int_0^1 Q(t)dt\right|\leqslant\varepsilon'.$$

par suite

$$\forall x\in[1-\alpha,1[\,,\ M(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}x^nQ(x^n)\leqslant 6M\varepsilon'\ (2)$$

De plus, $P_1\in X\mathbb{R}[X]$ ainsi, d'après **c)** ,

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nP_1(x^n)=0$$

Donc, il existe $0<\beta<1$ tel que

$$\forall x\in[1-\beta,1[\,,\left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_nP_1(x^n)\right|\leqslant\varepsilon'\ (3)$$

Soit $\eta=\min(\alpha,\beta)$ les relations $(1),(2)$ et (3) donne

$$\forall x\in[1-\eta,1[\,,\left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_ng\left(x^n\right)\right|\leqslant\varepsilon'\ (1+6M)=\varepsilon$$

Ainsi $g\in\Theta$ ce qui prouve le théorème Taubérien fort .

III. Variantes continues du lemme de Cesáro et du théorème d'Abel

16 Soit $f\in\mathscr{C}^0([0,+\infty\,[)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon>0$, il existe $A>0$ tel que , pour tout $x>A$ on a $|f(x)-\ell|\leq\frac{\varepsilon}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-\ell\right|&\leq\frac{1}{x}\int_0^A|f(t)-\ell|\,dt+\frac{1}{x}\int_A^x|f(t)-\ell|\,dt\\&\leq\frac{x-A}{x}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{x}\int_0^A|f(t)-\ell|\,dt\\&\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{x}\int_0^A|f(t)-\ell|\,dt\end{aligned}$$

comme $\frac{1}{x}\int_0^A|f(t)-\ell|\,dt\underset{x\to+\infty}{\to}0$ alors il existe $B>0$ tel que , pour tout $x>A$ on a $\frac{1}{x}\int_0^A|f(t)-\ell|\,dt\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi pour pout $x>\max(A,B)$ on a $\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-\ell\right|\leq\varepsilon$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\ell}$.

17 $f : x \mapsto \cos(x)$ est un contre-exemple que la réciproque du résultat de la question 16 est fausse.

18 Tout d'abord, on peut se ramener au cas où $\ell = 0$ en changeant f par la fonction $x \mapsto f(x) - \ell x$,

posons $q(x) = f(x+1) - f(x)$.

On a pour $x > 0$

$$\boxed{\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x-[x])}{x} + \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{[x]-1} q(x-[x]+k)}$$

q est continue soit $A_k = \sup\limits_{x\in[k,k+1]} |q(x)|$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = 0$ alors pour $\varepsilon > 0$ il existe $A > 0$ tel que $x > A \Rightarrow |q(x)| < \varepsilon$, ainsi pour tout $k > A$ on a $\forall x \in [k, k+1] \quad |q(x)| < \varepsilon$ donc $A_k < \varepsilon$ d'où $A_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$.

Pour tout $k \in [0, [x]-1]$ on a $x - [x] + k \in [k, k+1]$ donc

$$\boxed{\left|\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{[x]-1} q(x-[x]+k)\right| \leq \frac{1}{[x]-1}\sum_{k=0}^{[x]-1} A_k}$$

d'après Cesàro, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{[x]-1}\sum\limits_{k=0}^{[x]-1} A_k = 0$ de plus $\left|\frac{f(x-[x])}{x}\right| \leq \frac{A_0}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x-[x])}{x} = 0$ ce qui donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Ainsi $\boxed{\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = \ell\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell\right)}$

19 Soit $f \in \mathscr{C}_b^0([0, +\infty[)$ et $M > 0$ telle que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

On a pour tout $(x, t) \in t \in (]0, +\infty[)^2 \quad \left|\mathrm{e}^{-tx} f(x)\right| \leq M\mathrm{e}^{-tx}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-tx}$ est intégrable $]0, +\infty[$ donc la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-tx} f(x)$ est intégrable $]0, +\infty[$ et $\mathscr{L}(f)$ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$, on a $\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{e}^{-tx} f(x)\right)\right| = \left|-x\mathrm{e}^{-tx} f(x)\right| \leq bM\mathrm{e}^{-at}$, donc $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, ceci est vrai pour tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$ donc $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\boxed{\forall t \in]0, +\infty[\quad \mathscr{L}(f)'(t) = \int_0^{+\infty} -x\mathrm{e}^{-tx} f(x)dx}$$

20 Soit $f \in \mathscr{C}_b^0([0, +\infty[)$.

20.a Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x)dx - \int_0^x f(x)dx$, f est continue donc $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ de dérivée f , par suite F de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $F' = -f$.

$$\boxed{F : x \in [0, +\infty[\mapsto \int_x^{+\infty} f(t)dt}$$

Puisque F est continue et tend vers 0 en $+\infty$ elle est donc bornée sur $[0, +\infty[$.

20.b Soit $A>0$. Les fonctions $u : x \mapsto -F(x)$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^{-tx}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,A]$ donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^A \mathrm{e}^{-tx} f(x)dx &= \left[-\mathrm{e}^{-tx}F(x)\right]_0^A - t\int_0^A \mathrm{e}^{-tx}F(x)dx\\ &= F(0) - \mathrm{e}^{-tA}F(A) - t\int_0^A \mathrm{e}^{-tx}F(x)dx.\end{aligned}$$

La fonction F est bornée sur $[0,+\infty\,[$ donc $\mathrm{e}^{-tA}F(A) \underset{A\to+\infty}{\to} 0$ ainsi par passage à la limite quand A tend vers $+\infty$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}E^{-tx} f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx - t\int_0^{+\infty} \mathrm{e}E^{-tx}F(x)dx.$$

Soit $\varepsilon>0$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ alors

$$\exists B>0 \;/\; \forall x \in [0,+\infty[\,,\; x \geqslant B \;\Rightarrow\; |F(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

ainsi

$$\begin{aligned}\left|t\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}F(x)\;dx\right| &\leqslant t\int_0^{B} \mathrm{e}^{-tx}|F(x)|\;dx + t\int_B^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}|F(x)|\;dx\\ &\leqslant tB\left(\sup_{x\in[0,+\infty\,[} |F(x)|\right) + \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{-Bt}\\ &\leqslant tB\left(\sup_{x\in[0,+\infty\,[} |F(x)|\right) + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{t\to0}\left(tB \sup\limits_{x\in[0,+\infty\,[} |F(x)|\right) = 0$ donc $\exists\alpha>0 \;/\; \forall t \in \,]0,\alpha[\;\, , tB \sup\limits_{x\in[0,+\infty\,[} |F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ par suite

$$\forall t \in \,]0,\alpha[\;\; ,\; \left|t\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}F(x)\;dx\right| \leqslant \varepsilon\;.$$

ainsi $\lim\limits_{t\to0^+} t\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}F(x)\;dx = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{t\to0^+} \mathscr{L}(f)(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\;dx}$.

21 La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ existe .

Soit $A>0$ on a

$$\int_1^A \frac{\sin(x)}{x}dx = \cos(1) - \frac{\cos(A)}{A} - \int_1^A \frac{\cos(x)}{x^2}dx$$

la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_1^A \frac{\cos(x)}{x^2}dx$ existe d'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$.

Par ailleurs, la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et y est bornée.

Le question précédente permet d'affirmer que $\lim\limits_{t\to 0^+}\mathscr{L}(f)(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx.$

La fonction $\mathscr{L}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc pour tout $t\in]0,+\infty[$ on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f)'(t) &= -\int_0^{+\infty}\sin(x)\mathrm{e}^{-xt}dx \\
&= -\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-t+i)x}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{-t+i}\right) \\
&= -\frac{1}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t>0$, $\mathscr{L}(f)(t) = -\arctan(t)+C$.

f est majorée par 1 sur $[0,+\infty[$ par suite $|\mathscr{L}(f)(t)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}dx = \frac{1}{t}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathscr{L}(f)(t) = 0$ ce qui donne $C = \dfrac{\pi}{2}$.

Par conséquent, pour tout $t>0$, $\boxed{\mathscr{L}(f)(t) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(t)}$.

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}}$.

22 Soit $f\in\mathscr{C}_b^0([0,+\infty[)$ et $S\in\mathbb{R}$.

- On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\frac{1}{x})$ donc qu'il existe $A>0, M>0$ tels que $|f(x)| \leq \dfrac{M}{x}$ pour $x\geq A$. Alors F est bien définie pour $t>0$, et on suppose que F a une limite en 0^+.

Soit $\varepsilon>0$ fixé, et les polynômes P_1, P_2 et Q de la question 15 , on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_A^{+\infty} f(x)g(\mathrm{e}^{-tx})dx - \int_A^{+\infty} f(x)P_1(\mathrm{e}^{-tx})dx\right| &\leq \int_A^{+\infty}|f(x)|\left(g(\mathrm{e}^{-tx}) - P_1(\mathrm{e}^{-tx})\right)dx \\
&\leq M\int_A^{+\infty}\frac{1}{x}\left(P_2(\mathrm{e}^{-tx}) - P_1(\mathrm{e}^{-tx})\right)dx \\
&\leq M\int_A^{+\infty}Q(\mathrm{e}^{-tx})\mathrm{e}^{-tx}\frac{1-\mathrm{e}^{-tx}}{x}dx \\
&\leq M\int_0^{\mathrm{e}^{-tA}}Q(u)\frac{u-1}{\ln(u)}du \quad (u=\mathrm{e}^{-tx}\ ,\ du=-tdx)
\end{aligned}$$

on a $0 \leq \dfrac{u-1}{\ln(u)} \leq 1$ $\forall u \in]0,1[$ donc

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x)g(\mathrm{e}^{-tx})dx - \int_A^{+\infty} f(x)P_1(\mathrm{e}^{-tx})dx\right| \leq M\int_0^1 Q(u)du \leq 5M\varepsilon$$

D'autre part on a

$$\int_0^A f(x)g(\mathrm{e}^{-tx})dx - \int_0^A f(x)P_1(\mathrm{e}^{-tx})dx = \int_0^A f(x)\left(g(\mathrm{e}^{-tx}) - P_1(\mathrm{e}^{-tx})\right)dx$$

la fonction $g - P_1$ est bornée sur $[0,1]$ donc la $(x,t) \mapsto f(x)\left(g(\mathrm{e}^{-tx}) - P_1(\mathrm{e}^{-tx})\right)$ est majorée sur $[0,A] \times [0,+\infty[$,le théorème de la convergence dominée donne

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^A f(x)g(\mathrm{e}^{-tx})dx - \int_0^A f(x)P_1(\mathrm{e}^{-tx})dx = \int_0^A f(x)\lim_{t\to 0^+}\left(g(\mathrm{e}^{-tx}) - P_1(\mathrm{e}^{-tx})\right)dx = 0$$

il existe donc $\alpha \in]0,1[$ telle que

$$\forall t \in]0,\alpha[\quad , \quad \left|\int_0^A f(x)g(\mathrm{e}^{-tx})dx - \int_0^A f(x)P_1(\mathrm{e}^{-tx})dx\right| \leq \varepsilon$$

par conséquent

$$\forall t \in]0,\alpha[\ , \ \left|\int_0^{+\infty} f(x)g(\mathrm{e}^{-tx})dx - \int_0^{+\infty} f(x)P_1(\mathrm{e}^{-tx})dx\right| \leq (1+5M)\varepsilon \qquad (1)$$

- Posons $P_1(x) = \sum_{k=1}^{n_1} a_k x^k$, $(P_1(0) = 0)$ donc

$$\int_0^{+\infty} f(x)P_1(\mathrm{e}^{-tx})dx = \sum_{k=1}^{n_1} a_k \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ktx}dx = \sum_{k=1}^{n_1} a_k \mathscr{L}(f)(kt)$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\int_0^{+\infty} f(x)P_1(\mathrm{e}^{-tx})dx &= \sum_{k=1}^{n_1} a_k \lim_{t\to 0^+}\mathscr{L}(f)(kt)\\ &= S\sum_{k=1}^{n_1} a_k\\ &= SP_1(1)\\ &= S\end{aligned}$$

il existe donc $\beta \in]0,1[$ telle que

$$\forall t \in]0,\beta[\quad , \quad \left| \int_0^{+\infty} f(x) P_1(\mathrm{e}^{-tx}) dx - S \right| \leq \varepsilon \quad (2)$$

Soit $\eta = \min(\alpha, \beta)$, les (1) et (2) donnent

$$\forall t \in]0,\eta[\quad , \quad \left| \int_0^{+\infty} f(x) g(\mathrm{e}^{-tx}) dx - S \right| \leq (2+5M)\varepsilon \qquad (3)$$

donc

$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^{+\infty} f(x) g(\mathrm{e}^{-tx}) dx = S$$

- On a $g(\mathrm{e}^{-tx}) = 1$ si et seulement si $x \leq \frac{\ln 2}{t}$ donc

$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^{+\infty} f(x) g(\mathrm{e}^{-tx}) dx = \lim_{t \to 0^+} \int_0^{\frac{\ln 2}{t}} f(x) dx = S$$

ce qui prouve $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A f(x) dx = S$, ainsi $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et $\int_0^{+\infty} f(x) dx = S$.

Fin

CONCOURS X-ENS

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (XEULS)

Session 2024 - Filières PC

Durée: 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

NOTATIONS

- Dans toute la suite, d désignera un entier strictement positif. On désignera par $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées de taille $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ on notera

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr}\left(A^\top B\right)$$

où $\operatorname{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{d} M_{ii}$ est la trace de la matrice $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et $A^\top$ sa transposée. Selon la convention habituelle, M_{ij} désigne le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de la matrice M pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant d$.

- Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^d$, on notera $|u|$ sa norme euclidienne canonique. Un tel vecteur sera considéré comme un vecteur colonne et $u^\top$ sera le vecteur ligne associé. On notera $\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}^d} = u^\top v$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$ lorsque u et v sont dans $\mathbb{R}^d$. En particulier on aura $|u|^2 = \langle u, u\rangle_{\mathbb{R}^d} = u^\top u$.

- On notera I_d la matrice identité de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. On désignera par

$$\mathrm{O}_d(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}) \mid M^\top M = \mathrm{I}_d\right\}$$

le groupe orthogonal sur $\mathbb{R}^d$ et par

$$\mathrm{SO}_d(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\right\}$$

le groupe spécial orthogonal, où $\det(M)$ désigne le déterminant de $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. On notera

$$\operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right) = \mathbb{R}^d \times \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$$

- Pour toute famille $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$, on notera $A = (a_1|\dots|a_d)$ la matrice de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ dont la i-ème colonne de A est formée des coordonnées du vecteur a_i.

- Pour toute famille de réels $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$, on notera $\operatorname{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ la matrice diagonale de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$.

1. PRÉLIMINAIRES

1 Soit $R \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$. Vérifier que $\det(R) \in \{-1,+1\}$.

2 Vérifier que $(A,B) \mapsto \langle A,B\rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.

On notera $\|A\| = \sqrt{\langle A,A\rangle}$ la norme associée.

3

3.a Montrer que pour tous $u,v \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, on a $\langle u,Av\rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle uv^\top, A\rangle$.

3.b Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour $A,B \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.

3.c En déduire que pour tous A,B et C dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ on a

$$\langle A,BC\rangle = \langle B^\top A, C\rangle = \langle AC^\top, B\rangle$$

4 Soit $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$ une matrice diagonale à coefficients positifs et soit $R \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$.

4.a Montrer que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, on a $|R_{ii}| \leqslant 1$ où R_{ii} est le i-ème coefficient diagonal de R.

4.b En déduire que $\langle D,R\rangle \leqslant \mathrm{Tr}(D)$.

2. ENSEMBLE DES DÉPLACEMENTS DE $\mathbb{R}^d$

Pour tout $g = (\tau, R) \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on note $\phi_g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ l'application définie par

$$\phi_g(x) = Rx + \tau$$

On remarquera que lorsque $\tau = 0, \phi_g$ est une rotation vectorielle de l'espace $\mathbb{R}^d$, et lorsque $R = \mathrm{I}_d, \phi_g$ est une translation. Dans le cas général, on dira que ϕ_g est un déplacement de l'espace $\mathbb{R}^d$.

5

5.a Vérifier que pour tous $a,b \in \mathbb{R}^d$ et $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $|\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |a-b|$.

5.b Montrer pour tous $g,g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $\phi_g = \phi_{g'}$ si et seulement si $g = g'$.

5.c Montrer qu'il existe un unique $e \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que ϕ_e soit l'application identité sur $\mathbb{R}^d$ c'est-à-dire que $\phi_e(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

6

6.a Vérifier que pour tous $g,g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, il existe un unique $g'' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$. On notera $g'g$ cet élément dans la suite.

6.b Vérifier que pour tous g_1, g_2 et g_3 dans $\mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ on a $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$.

7 Soit $g \in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

7.a Montrer que ϕ_g est bijective. On note ϕ_g^{-1} son application réciproque.

7.b Montrer qu'il existe un unique $g' \in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$, que l'on explicitera en fonction de g, tel que $\phi_{g'} = \phi_g^{-1}$. On notera $g' = g^{-1}$.

7.c Vérifier que $ge = eg = g$ puis que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

8 Pour quelles valeurs de d a-t-on $gg' = g'g$ pour tous $g, g' \in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$?

3. DISTANCE À DÉPLACEMENT PRÈS

On considère n un entier strictement positif et

$$\mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}) = \left\{ \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \mid \boldsymbol{z}_i \in \mathbb{R}^d, 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$$

l'espace vectoriel des familles de n points dans $\mathbb{R}^d$ muni de la norme $\|\boldsymbol{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{z}_i|^2}$. Pour tous $g \in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $\boldsymbol{z} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ on note

$$g \cdot \boldsymbol{z} = \left(\phi_g\left(\boldsymbol{z}_i\right)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \qquad (1)$$

9

9.a Montrer que pour tous $g, g' \in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $\boldsymbol{z} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on a $g \cdot (g' \cdot \boldsymbol{z}) = (gg') \cdot \boldsymbol{z}$.

9.b Montrer que pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et tout $g \in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$, si $\boldsymbol{x} = g \cdot \boldsymbol{y}$ alors $\boldsymbol{y} = g^{-1} \cdot \boldsymbol{x}$.

Pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on note

$$\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \inf \left\{ \|\boldsymbol{y} - g \cdot \boldsymbol{x}\| \mid g \in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right) \right\}$$

10

10.a Montrer que pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et tout $g \in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a

$$\|g \cdot \boldsymbol{y} - g \cdot \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|$$

10.b En déduire que $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

10.c Montrer que pour tous $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^3$ et $(g, g') \in \left(\mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)^2$, on a

$$\|\boldsymbol{z} - g \cdot \boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{z} - (gg') \cdot \boldsymbol{y}\| + \|g' \cdot \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|$$

10.d En déduire que $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqslant \delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

11 Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on note $c(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}) \mid \exists g \in \text{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right), g \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\}$.

11.a Montrer que si $c(\boldsymbol{x}) \cap c(\boldsymbol{y}) \neq \emptyset$ alors $c(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{y})$.

11.b Montrer que si $c(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{y})$ alors $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

4. UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

On fixe dans cette partie $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et on introduit pour tout $(\tau, R) \in \text{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$

$$J(\tau, R) = \sum_{i=1}^{n} \left|\boldsymbol{y}_i - (R\boldsymbol{x}_i + \tau)\right|^2 = \|\boldsymbol{y} - g \cdot \boldsymbol{x}\|^2$$

où $g = (\tau, R)$.

12 On note $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i$ et $\overline{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y}_i$.

12.a Montrer que $J(\tau, R) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}} - R\left(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}\right)\right|^2\right) + n|\overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}} - \tau|^2$.

12.b En déduire que pour tout $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, l'application $\tau \mapsto J(\tau, R)$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ a un unique minimum, noté $\tau(R)$, que l'on explicitera.

13 On munit $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de la topologie associée à la norme $\|M\| = \sqrt{\langle M, M\rangle}$.

13.a Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = A^\top M$ est continue.

13.b Montrer que $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble fermé borné de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

14

14.a Montrer qu'il existe $R_* \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$ tel que $J\left(\tau\left(R_*\right), R_*\right) \leqslant J(\tau, R)$ pour tout $(\tau, R) \in \text{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

14.b Montrer que R_* n'est pas forcément unique.

15 Montrer que si $V_n(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}|^2$ et $V_n(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}}|^2$ alors

$$\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 = nV_n(\boldsymbol{x}) + nV_n(\boldsymbol{y}) - 2 \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), R\rangle$$

où $Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est une matrice que l'on précisera.

5. CALCUL DE e $\delta(x, y)$ DANS LE CAS OÙ $\mathbf{det}(Z(x, y)) > 0$.

Soit $Z \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note $\mathsf{S} = Z^\top Z$.

16 Montrer qu'il existe une famille décroissante $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ de réels strictement positifs et une base orthonormée $(u_1,\dots,u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ telle que $Su_i=\lambda_i u_i$ pour tout $1\leqslant i\leqslant d$.

On appellera valeurs singulières de Z la famille $\left(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_d}\right)$.

17 On considère $v_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}Zu_i$ pour tout $1\leqslant i\leqslant d$.

17.a Montrer que $(v_1,\dots,v_d)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$.

17.b Vérifier que si $U=(u_1|\dots|u_d)\,,V=(v_1|\dots|v_d)$ et $D=\mathrm{Diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_d}\right)$ alors $Z=VDU^\top$.

18 Mettre sous la forme précédente $Z=VDU^\top$, en spécifiant vos choix de U,V et D, les matrices $Z_1=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$ et $Z_2=\begin{pmatrix}0&1\\-2&0\end{pmatrix}$.

19 On considère que $\det(Z)>0$.

19.a Montrer que si $R\in\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ alors $V^\top RU\in\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$.

19.b Montrer que

$$\boxed{\sup_{R\in\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})}\langle Z,R\rangle=\sup_{R\in\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})}\langle D,R\rangle}$$

20 Donner la valeur de $\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ en fonction de $V_n(\boldsymbol{x}),V_n(\boldsymbol{y})$ et des valeurs singulières de $Z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ dans le cas où $\det(Z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))>0$.

6. LE CAS OÙ $\det(Z(x,y))<0$

On considère $R\in\mathrm{O}_d(\mathbb{R})$.

21

21.a Montrer que si λ est une valeur propre de R alors $\lambda\in\{+1,-1\}$.

21.b Montrer que $\det(R+I)=\det(R)\det\left(I+R^\top\right)$.

21.c En déduire que si $\det(R)=-1$ alors $\det(R+I)=0$.

On suppose dorénavant que $\det(R)=-1$.

22

22.a Montrer qu'il existe une base orthonormée $(u_1,\dots,u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ telle que l'on a $Ru_d=-u_d$ et $u_d^\top Rx=0$ pour tout $x\in E_1$ où $E_1=\mathrm{Vect}\,(u_1,\dots,u_{d-1})$.

22.b En déduire que $R\,(E_1)\subset E_1$ puis que $R\,(E_1)=E_1$.

On considère une matrice $D=\mathrm{Diag}\,(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ diagonale de coefficients diagonaux $\alpha_i\geqslant0$ décroissants. On note $U=(u_1|\dots|u_d)$.

23

23.a Vérifier que $\langle D, R\rangle = \langle S, R'\rangle$ où $R' = U^\top RU$ et $S = U^\top DU$

23.b Montrer que si $R_0 = \left(R'_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant d-1} \in \mathscr{M}_{d-1}(\mathbb{R})$ alors $R_0 \in \mathrm{O}_{d-1}(\mathbb{R})$.

24 On pose $S_0 = (S_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d-1} \in \mathscr{M}_{d-1}(\mathbb{R})$.

24.a Montrer que $\langle D, R\rangle = \mathrm{Tr}\,(S_0R_0) - S_{dd}$.

24.b Montrer que $\mathrm{Tr}\,(S_0R_0) \leqslant \mathrm{Tr}\,(S_0)$.

24.c Montrer que $\mathrm{Tr}\,(S_0) + S_{dd} = \mathrm{Tr}(D)$ et en déduire que $\langle D, R\rangle \leqslant \mathrm{Tr}(D) - 2S_{dd}$.

25

25.a Montrer que $S_{dd} = \sum\limits_{j=1}^{d} \alpha_j U_{jd}^2$ où $U = (U_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$.

25.b En déduire que $\langle D, R\rangle \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{d-1} \alpha_i\right) - \alpha_d$.

26 Donner la valeur de $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ en fonction de $V_n(\boldsymbol{x}), V_n(\boldsymbol{y})$ et des valeurs singulières de $Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ dans le cas où $\det(Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) < 0$.

FIN

CONCOURS X-ENS

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES (XEULS)

Session 2024 - Filière PC

1. PRÉLIMINAIRES

1 Soit $R \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$ donc $R^\top R = \mathrm{I}_d$, par suite

$$\det\left(R^\top R\right) = \det\left(R^\top\right)\det(R) = \det(R)^2 = 1$$

Ainsi $\boxed{\det(R) \in \{-1, +1\}}$.

2 Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &= \operatorname{Tr}\left(A^\top B\right)\\ &= \sum_{j=1}^{d}(A^\top B)_{jj}\\ &= \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d}(A^\top)_{ji}B_{ij}\\ &= \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d}A_{ij}B_{ij}\end{aligned}$$

c'est l'expression du produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.

3

3.a Soient $u, v \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.

$$\langle u, Av\rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum_{i=1}^{d} u_i[Av]_i = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} A_{ij}u_iv_j$$

on a $uv^\top \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et $[uv^\top]_{i,j} = u_iv_j$ donc

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} A_{ij}u_iv_j = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} A_{ij}[uv^\top]_{i,j} = \langle A, uv^\top\rangle$$

ainsi $\boxed{\langle u, Av\rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle uv^\top, A\rangle.}$

3.b Soit $A, B \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{d}[AB]_{i,i}\\ &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}A_{ij}B_{ji}\\ &= \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d}B_{ji}A_{ij}\\ &= \sum_{j=1}^{d}[BA]_{jj}\\ &= \mathrm{Tr}(BA)\end{aligned}$$

3.c Soit $A, B\ , C \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}\langle A, BC\rangle &= \mathrm{Tr}\left(A^\top BC\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left(\left(B^\top A\right)^\top C\right)\\ &= \left\langle B^\top A, C\right\rangle\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle A, BC\rangle &= \mathrm{Tr}\left(A^\top BC\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left(CA^\top B\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left(\left(AC^\top\right)^\top B\right)\\ &= \left\langle AC^\top, B\right\rangle\end{aligned}$$

donc $\boxed{\langle A, BC\rangle = \left\langle B^\top A, C\right\rangle = \left\langle AC^\top, B\right\rangle}$.

4 Soit $D = \mathrm{Diag}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_d\right)$ à coefficients positifs et $R \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$.

4.a $R \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$ donc les colonnes de R sont orthonormées, pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$ on a $R_{ii}^2 \leq \sum_{j=1}^{d} R_{ij}^2 = 1$ ce qui donne $\boxed{|R_{ii}| \leqslant 1}$.

4.b On a : $\langle D, R\rangle = \mathrm{Tr}\,(DR)$ et $[DR]_{ij} = \alpha_i R_{ij}$ donc $\langle D, R\rangle = \sum_{i=1}^{d}\alpha_i R_{ii}$ comme $\alpha_i \geq 0$ et $|R_{ii}| \leqslant 1$ pour tout i alors $\langle D, R\rangle \leq \sum_{i=1}^{d}\alpha_i\,|R_{ii}| \leq \sum_{i=1}^{d}\alpha_i$ ainsi $\boxed{\langle D, R\rangle \leq \mathrm{Tr}(D)}$.

2. ENSEMBLE DES DÉPLACEMENTS DE $\mathbb{R}^d$

5

5.a Soient $a, b \in \mathbb{R}^d$ et $g = (\tau, R) \in \text{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a

$$\begin{aligned} |\phi_g\ (a) - \phi_g(b)| &= |Ra + \tau - Rb - \tau| \\ &= |R(a-b)| \end{aligned}$$

R est une matrice de $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ donc elle conserve la norme ce qui donne $\boxed{|\phi_g\ (a) - \phi_g(b)| = |a-b|}$.

5.b Soient $g = (\tau, R), g' = (\tau', R') \in \text{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

$\Leftarrow$) Supposons $g = g'$, alors $\tau = \tau'$ et $R = R'$ donc $\phi_g = \phi_{g'}$

$\Rightarrow$) Supposons $\phi_g = \phi_{g'}$, alors pour $x = 0_d$, on a :

$\phi_g\left(0_{\mathbb{R}^d}\right) = \phi_{g'}\left(0_{\mathbb{R}^d}\right)$ donc $\tau = \tau'$.

On en déduit pour tout x de $\mathbb{R}^d$, on a $Rx = R'x$ donc $R = R'$ par suite $g = g'$.

Ainsi pour tous $g, g' \in \text{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a $\phi_g = \phi_{g'}$ si et seulement si $g = g'$.

5.c $e = (0_{\mathbb{R}^d}, \text{I}_d)$ est une solution , montrons qu'elle est unique .

Soit (τ, R) tel que $\forall x \in \mathbb{R}^d, \phi(x) = x$, en particulier pour $x = 0_{\mathbb{R}^d}$ on a $\phi\left(0_{\mathbb{R}^d}\right) = \tau = 0_{\mathbb{R}^d}$, par suite

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \phi(x) = Rx = x$$

donc $R = \text{I}_d$, d'où $(\tau, R) = (0_{\mathbb{R}^d}, \text{I}_d)$.

6

6.a Soit $g, g' \in \text{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g = R'(Rx + \tau) + \tau' = R'Rx + R'\tau + \tau'$$

soit $g'' = (R'\tau + \tau', R'R) \in \text{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$ donc $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$.

L'unicité découle de la question 5.b . On note $\boxed{g'g = (R'\tau + \tau', R'R)}$.

6.b Soit $g_1, g_2, g_3 \in \text{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$, posons $g_1 = (\tau_1, R_1)\,, g_2 = (\tau_2, R_2)$ et $g_3 = (\tau_3, R_3)$, on a

$$g_2g_3 = (R_2\tau_3 + \tau_2, R_2R_3) \text{ et } g_1\left(g_2g_3\right) = (R_1(R_2\tau_3 + \tau_2) + \tau_1, R_1R_2R_3)$$

et

$$g_1g_2 = (R_1\tau_2 + \tau_1, R_1R_2) \text{ et } \left(g_1g_2\right)g_3 = (R_1R_2\tau_3 + R_1\tau_2 + \tau_1, R_1R_2R_3)$$

ce qui donne $\boxed{g_1\left(g_2g_3\right) = \left(g_1g_2\right)g_3}$.

7 Soit $g \in \text{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

7.a Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\phi_g(x) = y \iff Rx + \tau = y \iff x = R^{-1}(y - \tau) \iff x = R^{\top}(y - \tau)$$

l'équation $\phi_g(x) = y$ admet une solution unique donc ϕ_g est bijective.

7.b Soit $g' = (-R^\top\tau, R^\top) \in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$,la question précédente donne pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\boxed{\phi_g(x) = y \Longleftrightarrow x = \phi_{g'}(y)}$$

d'où g' est l'unique élément de $\mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$ tel que $\phi_{g'} = \phi_g^{-1}$.

Notons $g^{-1} = (-R^\top\tau, R^\top)$.

7.c Soit $g = (\tau, R)$ on a $e = (0_{\mathbb{R}^d}, \mathrm{I}_d)$ donc

$$\boxed{ge = (R0_{\mathbb{R}^d} + \tau, R\mathrm{I}_d) = (\tau, R) = g}$$

et

$$\boxed{eg = (\mathrm{I}_d\tau + 0_{\mathbb{R}^d} +, \mathrm{I}_dR) = (\tau, R) = g}$$

d'où $\boxed{ge = eg = g}$.

Et on a

$$\boxed{gg^{-1} = \left(R\left(-R^\top\tau\right) + \tau, RR^\top\right) = (-\mathrm{I}_d\tau + \tau, \mathrm{I}_d) = (0, \mathrm{I}_d) = e}$$

de même

$$\boxed{g^{-1}g = \left(R^\top\tau - R^\top\tau, R^\top R\right) = (0, \mathrm{I}_d) = e}$$

d'où $\boxed{gg^{-1} = g^{-1}g = e}$

8 Soit $g, g' \in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$ on a

$$\begin{aligned} gg' = g'g &\Leftrightarrow \phi_g \circ \phi_{g'} = \phi_{g'} \circ \phi_g \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^d, R'Rx + R'\tau + \tau' = RR'x + R\tau' + \tau \end{aligned}$$

Pour $x = 0$ on trouve $R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau$ donc

$$\begin{aligned} (gg' = g'g) &\Rightarrow \ (R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau\ ) \text{ et } \left(\forall x \in \mathbb{R}^d, R'Rx = RR'x\right) \\ &\Rightarrow (\ R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau) \ \text{ et } \ (R'R = RR') \end{aligned}$$

la réciproque est évidente , ainsi

$$\boxed{gg' = g'g \Leftrightarrow (R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau) \ \text{ et } \ (R'R = RR') \ (1)}$$

Si $d \geq 2$, dans $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ il existe $R' \neq \mathrm{I}_d$, soit $\tau \in \mathbb{R}^d$ tel que $R'\tau \neq \tau$, prenons $g = (\tau, \mathrm{I}_d)$ et $g' = (0, R')$ alors $gg' \neq g'g$.

Si $d = 1$ alors $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R}) = \{1\}$ la condition (1) est vérifiée et pour tous $g, g' \in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$ $gg' = g'g$.

Ainsi $\mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$ est commutatif si et seulement si $d = 1$.

3. DISTANCE À DÉPLACEMENT PRÈS

9

9.a Soient $g=(\tau,R), g'=(\tau',R')\in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{z}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} g\cdot(g'\cdot\boldsymbol{z}) &= \phi_g\left((g'.\boldsymbol{z})_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \\ &= \left[\phi_g\left(\phi_{g'}\left(\boldsymbol{z}_i\right)\right)\right]_{1\leqslant i\leqslant n} \\ &= \left[\phi_g\circ\phi_{g'}\left(\boldsymbol{z}_i\right)\right]_{1\leqslant i\leqslant n} \\ &= \left[\phi_{gg'}\left(\boldsymbol{z}_i\right)\right]_{1\leqslant i\leqslant n} \\ &= (gg')\cdot\boldsymbol{z} \end{aligned}$$

d'où $\boxed{g\cdot(g'\cdot\boldsymbol{z})=(gg')\cdot\boldsymbol{z}}$.

9.b Soient $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g=(\tau,R)\in\mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Supposons que $\boldsymbol{x}=g.\boldsymbol{y}$. La question 9.a et le fait que $g^{-1}g=e$ donnent

$$g^{-1}\cdot\boldsymbol{x}=g^{-1}\cdot(g\cdot\boldsymbol{y})=\left(g^{-1}g\right)\cdot\boldsymbol{y}=e\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}$$

ainsi $\boxed{\boldsymbol{y}=g^{-1}\cdot\boldsymbol{x}}$

10

10.a Soient $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g=(\tau,R)\in\mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

On a

$$\|g\cdot\boldsymbol{y}-g\cdot\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\phi_g\left(y_i\right)-\phi_g\left(x_i\right)\right|^2}$$

Puis par la question 5.a, on a pour tout $1\leqslant i\leqslant n$,

$$\left|\phi_g\left(y_i\right)-\phi_g\left(x_i\right)\right|=\left|y_i-x_i\right|$$

Donc :

$$\|g\cdot\boldsymbol{y}-g\cdot\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|y_i-x_i\right|^2}=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$$

10.b Soit $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g\in\mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Posons $\boldsymbol{z}=g^{-1}\cdot\boldsymbol{y}$, alors $\boldsymbol{y}=g.\boldsymbol{z}$, de la question précédente on a

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{y}-g\cdot\boldsymbol{x}\| &= \|g\cdot\boldsymbol{z}-g\cdot\boldsymbol{x}\| \\ &= \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}\| \\ &= \left\|g^{-1}\cdot\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right\| \\ &= \left\|\boldsymbol{x}-g^{-1}\cdot\boldsymbol{y}\right\| \end{aligned}$$

or l'application $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right) \longrightarrow \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right) \\ \quad g \mapsto g^{-1}\end{array}\right.$ est bijective, alors

$$\boxed{\begin{aligned}\left\{\|\boldsymbol{y}-g \cdot \boldsymbol{x}\| \mid g \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)\right\} & =\left\{\left\|\boldsymbol{x}-g^{-1} \cdot \boldsymbol{y}\right\| \mid g \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)\right\} \\ & =\left\{\|\boldsymbol{x}-g \cdot \boldsymbol{y}\| \mid g \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}\end{aligned}}$$

on en déduit que $\boxed{\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$.

10.c Soient $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^3$ et $g, g' \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
Écrivons

$$\boxed{\|\boldsymbol{z}-g \cdot \boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{z}-(g g') \cdot \boldsymbol{y}+(g g') \cdot \boldsymbol{y}-g \cdot \boldsymbol{x}\|}$$

l'inégalité triangulaire donne

$$\boxed{\begin{aligned}\|\boldsymbol{z}-g \cdot \boldsymbol{x}\| & \leq\|\boldsymbol{z}-(g g') \cdot \boldsymbol{y}\|+\|(g g') \cdot \boldsymbol{y}-g \cdot \boldsymbol{x}\| \\ & \leq\|\boldsymbol{z}-(g g') \cdot \boldsymbol{y}\|+\|g(g' \cdot \boldsymbol{y})-g \cdot \boldsymbol{x}\| \quad \text{(voir la question 6.)} \\ & \leq\|\boldsymbol{z}-(g g') \cdot \boldsymbol{y}\|+\|g' \cdot \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| \quad \text{(d'après la question 10.b)}\end{aligned}}$$

10.d D'après la question précédente on a pour tous $g, g' \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$,

$$\boxed{\|\boldsymbol{z}-g \cdot \boldsymbol{x}\| \leqslant\|\boldsymbol{z}-(g g') \cdot \boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{x}-g' \cdot \boldsymbol{y}\|}$$

donc

$$\boxed{\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqslant\|\boldsymbol{z}-g \cdot \boldsymbol{x}\| \leqslant\|\boldsymbol{z}-(g g') \cdot \boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{x}-g' \cdot \boldsymbol{y}\|}$$

soit $g'' \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$prenons $g=g''\left(g'\right)^{-1}$ alors

$$\boxed{\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqslant\|\boldsymbol{z}-g'' \cdot \boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{x}-g' \cdot \boldsymbol{y}\|}$$

cette relation étant valable pour tout $g', g'' \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$, fixons g' alors

$$\boxed{\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})-\|\boldsymbol{x}-g' \cdot \boldsymbol{y}\| \leqslant\|\boldsymbol{z}-g'' \cdot \boldsymbol{y}\|}$$

$\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})-\|\boldsymbol{x}-g' \cdot \boldsymbol{y}\|$ est un minorant de $\left\{\|\boldsymbol{z}-g'' \cdot \boldsymbol{y}\| \mid g'' \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}$ par suite

$$\boxed{\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})-\|\boldsymbol{x}-g' \cdot \boldsymbol{y}\| \leqslant \inf \left\{\|\boldsymbol{z}-g'' \cdot \boldsymbol{y}\| \mid g'' \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}}$$

(*car l'* inf *est le plus grand des minorants*) donc

$$\boxed{\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqslant \delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})+\|\boldsymbol{x}-g' \cdot \boldsymbol{y}\|}$$

par suite $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})-\delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$ est un minorant de $\left\{\|\boldsymbol{y}-g' \cdot \boldsymbol{x}\| \mid g' \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}$ donc

$$\boxed{\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})-\delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) \leq \inf \left\{\|\boldsymbol{y}-g \cdot \boldsymbol{x}\| \mid g \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}}$$

ainsi $\boxed{\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqslant \delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).}$

11 Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on note $c(\boldsymbol{x}) = \left\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}) \mid \exists g \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right), g \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\right\}$.

11.a Supposons que $c(\boldsymbol{x}) \cap c(\boldsymbol{y}) \neq \emptyset$. Soit $\boldsymbol{z} \in c(\boldsymbol{x}) \cap c(\boldsymbol{y})$.

Par conséquent, il existe $g_1, g_2 \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$ tels que : $\boldsymbol{z} = g_1 \cdot \boldsymbol{x} = g_2 . \boldsymbol{y}$ donc

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= g_1^{-1}(g_2 \cdot \boldsymbol{y}) = \left(g_1^{-1} g_2\right) \cdot \boldsymbol{y} \quad (1) \\ \boldsymbol{y} &= g_2^{-1}(g_1 \cdot \boldsymbol{x}) = \left(g_2^{-1} g_1\right) \cdot \boldsymbol{x} \quad (2) \end{aligned}}$$

- Montrons que $c(\boldsymbol{x}) \subset c(\boldsymbol{y})$: Soit $\boldsymbol{t} \in c(\boldsymbol{x})$, donc il existe $f \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$ tel que $f \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}$, par la relation (1) on a

$$\boxed{\boldsymbol{t} = f \cdot \left(\left(g_1^{-1} g_2\right) \cdot \boldsymbol{y}\right) = \left(f\left(g_1^{-1} g_2\right)\right) \cdot \boldsymbol{y}}$$

comme $f\left(g_1^{-1} g_2\right) \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$ alors $\boldsymbol{t} \in c(\boldsymbol{y})$ et $c(\boldsymbol{x}) \subset c(\boldsymbol{y})$. • Montrons que $c(\boldsymbol{y}) \subset c(\boldsymbol{x})$: De la même manière ,la relation (2) donne le résultat .

La double inclusion donne $c(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{y})$.

11.b Supposons que $c(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{y})$. En prenant $g = e$, on a $\boldsymbol{x} \in c(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{y} \in c(\boldsymbol{y})$, donc $\boldsymbol{x} \in c(\boldsymbol{y})$ et $\boldsymbol{y} \in c(\boldsymbol{x})$, ainsi il existe $g' \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$ tel que $\boldsymbol{y} = g' . \boldsymbol{x}$, donc $0 \in \left\{\|\boldsymbol{y} - g \cdot \boldsymbol{x}\| \mid g \in \operatorname{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}$, ce qui prouve que $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

4. UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

On fixe dans cette partie $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et on introduit pour tout $(\tau, R) \in \text{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$

$$J(\tau, R) = \sum_{i=1}^{n} \left|\boldsymbol{y}_i - (R\boldsymbol{x}_i + \tau)\right|^2 = \|\boldsymbol{y} - g \cdot \boldsymbol{x}\|^2$$

où $g = (\tau, R)$.

12 On note $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i$ et $\overline{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y}_i$.

Rappelons que pour tous u et v dans $\mathbb{R}^d$:

- $\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}^d} = u^\top v$.
- $|u|^2 = \langle u, u\rangle_{\mathbb{R}^d} = u^\top \ u$.
- $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}^d}$.

12.a Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on a

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{y}_i - (R\mathbf{x}_i + \tau)\right|^2 &= \left|[\boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}} - R\left(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}\right)] + [\overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}} - \tau]\right|^2 \\
&= \left|\boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}} - R\left(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}\right)\right|^2 + \left|\overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}} - \tau\right|^2 + 2\left\langle \boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}} - R\left(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}\right), \overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}} - \tau\right\rangle_{\mathbb{R}^d}
\end{aligned}$$

remarquons que :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left\langle \boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}} - R\left(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}\right), \overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}} - \tau\right\rangle_{\mathbb{R}^d} &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}} - R\left(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}\right)] \ , \ \overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}} - \tau \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y}_i - n\overline{\boldsymbol{y}} - R\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x} - n\ \overline{\boldsymbol{x}}\right) \ , \ \overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}} - \tau \right\rangle_{\mathbb{R}^d}
\end{aligned}$$

comme $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y}_i - n\overline{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x} - n\ \overline{\boldsymbol{x}} = 0$ alors $\sum_{i=1}^{n} \left\langle \boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}} - R\left(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}\right), \overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}} - \tau\right\rangle_{\mathbb{R}^d} = 0$, ce qui donne

$$J(\tau, R) = \sum_{i=1}^{n} \left|\boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}} - R\left(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}\right)\right|^2 + n|\overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}} - \tau|^2 \quad (1)$$

12.b Soit $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, la relation (1) s'écrit

$$J(\tau, R) = J(\overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}}, R) + n|\overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}} - \tau|^2 \quad (2)$$

donc

$$J(\tau, R) \geq J(\overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}}, R)$$

ainsi l'application $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ \tau \mapsto J(\tau, R) \end{array} \right.$ admet a un minimum, en $\tau(R) = \overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}}$. La relation (2) devient

$$J(\tau, R) = J(\tau(R), R) + n|\tau(R) - \tau|^2$$

Si $\tau \neq \tau(R)$ alors $n|\tau(R)-\tau|^2 > 0$ et $J(\tau,R) > J(\tau(R),R)$, d'où l'unicité de $\tau(R)$ comme minimum .

Ce qui prouve que l'application $\left\{\begin{array}{c} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ \tau \mapsto J(\tau,R) \end{array}\right.$ a un unique minimum en $\tau(R) = \overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}}$.

13 On munit $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ de la topologie associée à la norme $\|M\| = \sqrt{\langle M, M\rangle}$.

13.a Soit $g : \left\{\begin{array}{c} \mathscr{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_d(\mathbb{R})^2 \\ M \mapsto (M^\top, M) \end{array}\right.$ et $h : \left\{\begin{array}{c} \mathscr{M}_d(\mathbb{R})^2 \to \mathscr{M}_d(\mathbb{R}) \\ (A,B) \mapsto AB \end{array}\right.$

On a $f = hog$, f est continue car g est linéaire en dimensions finies et h est bilinéaire en dimensions finies donc elles sont continues .

13.b • On a $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_d(\mathbb{R}) \cap \{M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$, $\mathrm{O}_d(\mathbb{R}) = f^{-1}\{\mathrm{I}_d\}$,c'est l'image réciproque du fermé $\{\mathrm{I}_d\}$ par f qui est continue donc c'est un fermé de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, $\{M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$ est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par det qui est continue, car polynomiale, donc c'est un fermé de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.

$\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ est intersection de deux fermés donc il est fermé dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.

• Si $M \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$, alors :

$$\|M\| = \sqrt{\langle M, M\rangle} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(M^\top M\right)} = \sqrt{d}$$

Donc $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ est bornéAinsi $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ donc il est compact.

14

14.a Considérons l'application

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}_d(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ R & \mapsto & J(\tau(R),R) \end{array}\right.$$

avec $\tau(R) = \overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}}$ et $J(\tau(R),R) = \sum_{i=1}^{n} \left|\boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}} - R\left(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}\right)\right|^2$.

f est donc continue, $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble fermé borné, en dimension finie , donc il est compact , par conséquent f est bornée sur $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ et atteint ses bornes . Donc il existe $R_\star \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ tel que

$$J\left(\tau\left(R_*\right), R_*\right) = \inf_{R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})} J(\tau(R), R)$$

et d'après la question 12.b on a pour tout $(\tau, R) \in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $J(\tau(R),R) \leqslant J(\tau,R)$.

On en déduit qu'il existe $R_* \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ tel que $J\left(\tau\left(R_*\right), R_*\right) \leqslant J(\tau,R)$ pour tout $(\tau,R) \in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

14.b Prenons le cas ou, pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, $x_k = y_k = 1$ alors $J(\tau(R),R) = 0$, qui est la valeur minimale , elle est atteinte en toute matrice R et R_* n'est pas forcément unique.

15 Soit $R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} J(\tau(R),R) &= \sum_{i=1}^{n} \left|\boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}} - R\left(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}\right)\right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\left|y_i - \overline{y}\right|^2 + \left|R\left(x_i - \overline{x}\right)\right|^2\right) - 2\sum_{i=1}^{n} \left\langle y_i - \overline{y}, R\left(x_i - \overline{x}\right)\right\rangle_{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

$R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$, elle conserve la norme donc $|R(x_i - \bar{x})|^2 = |x_i - \bar{x}|^2$ pour tout i et d'après la question 3a on a

$$\boxed{\forall i\ ,\ \langle y_i - \bar{y}, R(x_i - \bar{x})\rangle_{\mathbb{R}^d} = \left\langle \left[(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top\right], R\right\rangle}$$

ce qui donne

$$\boxed{\begin{aligned} J(\tau(R), R) &= \sum_{i=1}^{n} \left(|y_i - \bar{y}|^2 + |x_i - \bar{x}|^2\right) - 2\sum_{i=1}^{n} \left\langle \left[(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top\right], R\right\rangle \\ &= nV_n(y) + nV_n(x) - 2\left\langle \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top, R\right\rangle \end{aligned}}$$

posons $Z(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top$ donc

$$\boxed{J(\tau(R), R) = nV_n(y) + nV_n(x) - 2\langle Z(x,y), R\rangle}$$

la continuité du produit scalaire et la compacité de $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ assure l'existence de $\sup\limits_{R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x,y), R\rangle$, ce qui donne :

$$\boxed{\begin{aligned} \delta(x,y)^2 &= \inf_{(\tau,R)\in \mathrm{Dep}\left(\mathbb{R}^d\right)} J(\tau, R) \\ &= \inf_{R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})} J(\tau(R), R) \end{aligned}}$$

d'où $\boxed{\delta(x,y)^2 = nV_n(y) + nV_n(x) - 2 \sup\limits_{R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x,y), R\rangle\ .}$

5. CALCUL DE e $\delta(x,y)$ DANS LE CAS OÙ $\mathbf{det}(Z(x,y)) > 0$.

16 Soit $Z \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ inversible et $S = Z^\top Z$.

Montrons que S est symétrique définie positive

• La matrice $S = Z^\top Z$ est symétrique réelle , donc diagonalisable dans une base orthonormée , il existe donc une base orthonormée $(u_1, \ldots, u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ formée de vecteurs propres de de S et il existe une famille de valeurs propres réelles telle que $Su_i = \lambda_i u_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$.

Quitte à changer les indices on peut supposer que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_d$.

• Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$x^\top S x = x^\top Z^\top Z x = (Zx)^\top (Zx) = |Zx|^2$$

donc $x^\top S x \geqslant 0$ et

$$\begin{aligned} x^\top S x = 0 &\Leftrightarrow |Zx| = 0 \\ &\Leftrightarrow Zx = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ (} \textit{car } Z \textit{ est inversible} \text{)} \end{aligned}$$

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}, x^\top S x > 0$.

S est symétrique définie positive donc $P(S) \subset \mathbb{R}^{*+}$, d'où il existe une famille décroissante $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ de réels strictement positifs et une base orthonormée $(u_1, \ldots, u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ telle que $Su_i = \lambda_i u_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$.

17 On considère $v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Z u_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$.

17.a Soit $1 \leqslant i, j \leqslant d$, on a

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} &= v_i^\top v_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} (Z u_i)^\top (Z u_j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} u_i^\top S u_j \end{aligned}$$

or $Su_j = \lambda_j u_j$ donc

$$\langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} u_i^\top u_j = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} \langle u_i, u_j \rangle_{\mathbb{R}^d}$$

Puisque $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ est orthonormée alors $\langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Par suite la famille $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ est orthonormée, donc elle est libre, de plus elle est de cardinal d , ce qui prouve que $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$.

17.b Soit $U=(u_1|\dots|u_d)$, $V=(v_1|\dots|v_d)$ et $D=\text{Diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_d}\right)$ on a

$$\begin{aligned} ZU &= (Zu_1|\dots|Zu_d) \\ &= \left(\sqrt{\lambda_i}v_i|\dots|\sqrt{\lambda_i}v_i\right) \\ &= VD \end{aligned}$$

(Car pour toute matrice A , $DA=(\sqrt{\lambda_i}A_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ et $AD=(\sqrt{\lambda_j}A_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$)

$U\in O_d(\mathbb{R})$, donc U est inversible d'inverse $U^\top$alors $\boxed{Z=VDU^\top}$.

18 Soit $Z_1=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$ et $Z_2=\begin{pmatrix}0&1\\-2&0\end{pmatrix}$, on a :

- $S_1=Z_1^\top Z_1=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$, donc $U_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $D_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $V_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.
- $S_2=Z_2^\top Z_2=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$, donc $U_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $D_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $V_1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

19 On suppose que $\det(Z)>0$.

19.a Supposons que $R\in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$:

- Montrons que $V^\top RU\in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$:

Les familles de colonnes de U et de V sont orthonormées donc $U,V\in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$ et $R\in\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})\subset \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$.

$(\mathrm{O}_d(\mathbb{R}),\times)$ est un sous groupe de $(\mathrm{GL}_d(\mathbb{R}),\times)$ donc : $V^\top RU=V^{-1}RU\in\mathrm{O}_d(\mathbb{R})$.

- Montrons que $\det\left(V^\top RU\right)=1$.

On a : $\det\left(V^\top RU\right)=\det(V)\det(R)\det(U)$

et $\det R=1$ donc $\det\left(V^\top RU\right)=\det(V)\det(U)$.

La relation $Z=VDU^\top$ donne $\det(Z)=\det(U)\det(V)\det(D)$, avec $\det(D)=\prod_{i=1}^d\sqrt{\lambda_i}>0$ et comme $\det(Z)>0$, alors $\det(U)\det(V)>0$.

La matrice $UV\in\mathrm{O}_d(\mathbb{R})$ donc $\det(UV)\in\{-1,1\}$, comme $\det(UV)=\det(U)\det(V)>0$ alors $\det(U)\det(V)=1$ d'où $\det\left(V^\top RU\right)=\det(V)\det(U)=1$.

On en déduit que $\boxed{V^\top RU\in\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})}$.

19.b Soit $R\in\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle Z,R\rangle &= \mathrm{Tr}\left(R^\top Z\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(R^\top VDU^\top\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(U^\top R^\top VD\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\left(V^\top RU\right)^\top D\right) \end{aligned}$$

donc $\langle Z,R\rangle=\left\langle V^\top RU,D\right\rangle$, de plus l'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})&\longrightarrow&\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})\\ R&\mapsto&V^\top RU\end{array}\right.$ est bien définie , d'après a), et elle est bijective donc $V^\top RU$ décrit $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ quand R décrit $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$,ce qui donne $\boxed{\sup\limits_{R\in\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})}\langle Z,R\rangle=\sup\limits_{R\in\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})}\langle D,R\rangle}$.

20 **Cas où** $\det(\mathbf{Z}(x, y)) > \mathbf{0}$.

Pour $Z = Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, on définie les valeurs singulières $\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d}\right)$ et la matrice D.

D'après la question 4.b on a $\langle D, R\rangle \leqslant \operatorname{Tr}(D)$ et si $R = \mathrm{I}_d$ alors $\langle D, R\rangle = \operatorname{Tr}(R^\top D) = \operatorname{Tr}(D)$ par suite

$$\sup_{R\in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), R\rangle = \sup_{R\in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R\rangle = \operatorname{Tr}(D) = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i}$$

D'après la question 15 $\delta(x, y)^2 = nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \sup_{R\in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), R\rangle$

ainsi $\boxed{\delta(x, y) = \left(nV_n(x) + nV_n(y) - 2\sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{2}}}$.

6. LE CAS OÙ $\det(Z(x,y)) < 0$

On considère $R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$.

21

21.a Soit λ valeur propre de R et x un vecteur propre associé , R est la matrice d'une isométrie qui conserve la norme donc

$$|Rx| = |\lambda||x| = |x|$$

x est non nul par suite $|\lambda| = 1$ et $\lambda \in \{+1, -1\}$.

21.b On a $R + I = R + RR^\top = R\left(I + R^\top\right)$, donc $\det(R+I) = \det(R)\det\left(I + R^\top\right)$.

21.c Supposons que $\det(R) = -1$ alors

$$\det(R+I) = -\det\left(I + R^\top\right) = -\det\left((I+R)^\top\right) = -\det(R+I)$$

d'où $\boxed{\det(R+I) = 0}$.

22 On suppose que $\det(R) = -1$.

22.a On a donc $\det(R+I) = 0$, ce qui signifie que -1 est une valeur propre de R.

Notons u_d le vecteur propre associé à -1 de norme 1, $|u_d| = 1$, en suite on le complète, par $u_1, \ldots, u_{d-1}$, en une base orthonormée ,$(u_1, \ldots, u_d)$,de $\mathbb{R}^d$.

On a $Ru_d = -u_d$ et $RR^\top = I$ donc

$$u_d = R^\top R u_d = R^\top\left(Ru_d\right) = R^\top\left(-u_d\right)$$

par suite $R^\top u_d = -u_d$ et $u_d^\top R = -u_d^\top$.

Soit $x \in E_1 = \mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_{d-1}\right) = \left(\mathbb{R}u_d\right)^\perp$, donc

$$u_d^\top Rx = -u_d^\top x = -\left\langle u_d, x\right\rangle_{\mathbb{R}^d} = 0$$

Ainsi il existe une base orthonormée $(u_1, \ldots, u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ telle que l'on a $Ru_d = -u_d$ et $u_d^T Rx = 0$ pour tout $x \in E_1 = \mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_{d-1}\right)$.

22.b Soit $x \in E_1$ on a $u_d^\top Rx = \langle u_d, Rx\rangle_{\mathbb{R}^d} = 0$,donc $Rx \in \left(\mathbb{R}u_d\right)^\perp = E_1$,ce qui donne $R\left(E_1\right) \subset E_1$.

R est inversible donc $\dim R\left(E_1\right) = \dim E_1$ d'où $R\left(E_1\right) = E_1$.

Soit $D = \mathrm{Diag}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_d\right) \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ diagonale de coefficients diagonaux $\alpha_i \geqslant 0$ décroissants.

On note $U = (u_1|\ldots|u_d)$.

23

23.a D'après 3.c, pour tous A, B et C dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ on a

$$\left\langle B, AC^\top\right\rangle \overset{(1)}{=} \langle BC, A\rangle \overset{(2)}{=} \left\langle C, B^\top A\right\rangle$$

On a $U \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$, donc $UU^\top = \mathrm{I}_d$ et

$$\langle D, R\rangle = \langle D, RUU^\top\rangle$$

l'égalité (1) donne

$$\langle D, R\rangle = \langle DU, RU\rangle$$

de même

$$\langle DU, RU\rangle = \langle UU^\top DU, RU\rangle$$

l'égalité (2) donne

$$\langle D, R\rangle = \langle U^\top DU, U^\top RU\rangle$$

D'où $\langle D, R\rangle = \langle S, R'\rangle$ avec $R' = U^\top RU$ et $S = U^\top DU$. Remarquons que $R' \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$.

23.b Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à R . D'après 22.b on a : $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_d)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$, $f(u_d) = -u_d$ et $f(E_1) = E_1$. U est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathscr{B}$, donc $R = U.Mat_{\mathscr{B}}(f).U^\top$ par suite $R' = Mat_{\mathscr{B}}(f)$, et on a

$$R' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & \ldots & u_{d-1} & u_d \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} R_0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & -1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_{d-1} \\ u_d \end{array}$$

Comme $R' \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$, $R^\top R = \mathrm{I}_d$, alors $R_0^\top R_0 = \mathrm{I}_{d-1}$ et $R_0 \in \mathrm{O}_{d-1}(\mathbb{R})$.

24

24.a On a

$$\langle D, R\rangle = \langle S, R'\rangle = \mathrm{Tr}\left(S^\top R'\right)$$

écrivons le produit par blocs :

$$S^\top R' = \left(\begin{array}{c|c} S_0^\top & A \\ \hline B & S_{dd} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} R_0 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} S_0^\top R_0 & A' \\ \hline B' & -S_{dd} \end{array}\right)$$

donc $\langle D, R\rangle = \mathrm{Tr}\left(S^\top R'\right) = \mathrm{tr}\left(S_0^\top R_0\right) - S_{dd}$, or S est symétrique réelle et donc S_0 l'est aussi d'où $\boxed{\langle D, R\rangle = \mathrm{Tr}\,(S_0 R_0) - S_{dd}}$.

24.b On a S_0 est symétrique réelle, donc par le théorème spectral il existe D_0 une matrice diagonale et $P \in O_{d-1}(\mathbb{R})$ telles que $S_0 = P^\top D_0 P$, donc :

$$\mathrm{Tr}\,(S_0 R_0) = \mathrm{Tr}\left(P^\top D_0 P R_0\right) = \mathrm{Tr}\left(D_0 P R_0 P^\top\right)$$

et $PR_0P^\top \in O_{d-1}(\mathbb{R})$, la question 4.b donne $\mathrm{tr}\left(D_0\left(PR_0P^\top\right)\right) \leq \mathrm{Tr}\,(D_0)$ or $\mathrm{Tr}\,(D_0) = \mathrm{Tr}\,(S_0)$ donc $\boxed{\mathrm{Tr}\,(S_0 R_0) \leqslant \mathrm{Tr}\,(S_0)}$.

- On a $\mathrm{Tr}\,(S) = \mathrm{Tr}\,(S_0) + S_{dd}$, or $S = U^\top DU$ donc $\mathrm{Tr}\,(S) = \mathrm{Tr}\,(D)$ ce qui donne $\mathrm{Tr}\,(S_0) + S_{dd} = \mathrm{Tr}(D)$.

- Les questions a. et b. donnent

$$\langle D, R\rangle = \mathrm{Tr}\,(S_0 R_0) - S_{dd} \leq \mathrm{Tr}\,(S_0) - S_{dd}$$

et $\mathrm{Tr}\,(S_0) = \mathrm{Tr}(D) - S_{dd}$,d'où $\boxed{\langle D, R\rangle \leqslant \mathrm{Tr}(D) - 2S_{dd}}$.

25

25.a On a $U = (U_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ et $S = U^\top DU$, ce qui donne

$$\begin{aligned} S_{dd} &= \left[\left(U^\top D\right) U\right]_{d,d} \\ &= \sum_{i=1}^{d} \left[U^\top D\right]_{d,i} U_{i,d} \\ &= \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \left[U^\top\right]_{d,j} D_{j,i}\right) U_{i,d} \end{aligned}$$

or $\left[U^\top\right]_{d,j} = U_{j,d}$ et $D_{j,i} = \alpha_j \delta_{i,j}$ donc

$$\begin{aligned} S_{dd} &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} U_{j,d}\left(\alpha_j \delta_{i,j}\right) U_{i,d} \\ &= \sum_{j=1}^{d} \alpha_j U_{jd}^2 \end{aligned}$$

25.b On a $U \in O_d(\mathbb{R})$ donc $UU^\top = \mathrm{I}_d$, le coefficient d'ordre (d, d) de $UU^\top$ s'écrit

$$\left[UU^\top\right]_{dd} = \sum_{i=1}^{d} U_{id}^2 = 1$$

on sait que les α_i sont décroissants donc :

$$S_{dd} = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j U_{jd}^2 \geqslant \alpha_d \sum_{j=1}^{d} U_{\mathrm{jd}}^2 = \alpha_d$$

d'après la question 24.c on a :

$$\langle D, R\rangle \leqslant \mathrm{Tr}(D) - 2S_{\mathrm{dd}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i\right) - 2\alpha_d$$

on en déduit que $\boxed{\langle D, R\rangle \leqslant \left(\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i\right) - \alpha_d.}$

26 **Cas où** $\det(\mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \mathbf{0}$.

On l'utilise la même démarche que la partie 5 . Pour $Z = Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, on définie les valeurs singulières $\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_d}\right)$ et la matrice $D = \mathrm{Diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_d}\right)$.

D'après la question 15 on a

$$\delta(x,y)^2 = nV_n(y) + nV_n(x) - 2 \sup_{R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x,y), R \rangle \ .$$

D'après la question 19.b , si $R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$, on a $Z = VDU^\top$ et $\langle Z, R \rangle = \left\langle V^\top RU, D \right\rangle$.

$\det(Z) < 0$ donc $\det(V)\det(U^\top) < 0$ par suite $V^\top RU$ décrit $\mathrm{O}_d(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ quand R décrit $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ ce qui donne

$$\sup_{R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), R \rangle = \sup_{R \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle$$

D'après la question 25. $\langle D, R \rangle \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i} \right) - \sqrt{\lambda_d}$ et pour la matrice $R_0 = \mathrm{Diag}(1, ...1, -1)$ on a égalité , ce qui donne

$$\boxed{\delta(x,y) = \left(nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \left(\sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_d} \right) \right)^{\frac{1}{2}}}$$