Première année Bac sciences économiques et la gestion

10 Cours bien détaillés

10 Résumés bien précis

10 Séries d'exercices

6 Devoirs libres corrigés

6 Devoirs surveillés

2025/2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Version, 12/06/2025

Table des matières

1 : Notions de logique..03
2 : Equations, inéquations et systèmes..12
Devoir Libre 1..19
DS1..20
3 : Fonctions numériques..21
4 : Suites numériques..35
Devoir Libre 2..42
DS2..43
5 : Dénombrement..44
Devoir Libre 3..52
DS3..53
6 : Matrices et systèmes..54
7 : Logarithme décimal..63
Devoir Libre 4..67
DS4..68
8 : Limite d'une fonction..69
9 : Dérivation..76
Devoir Libre 5..86
DS5..87
10 : Etude de fonctions..88
Devoir Libre 6..99
DS6..100

Corrections des devoirs libres :

https://drive.google.com/file/d/1dkk4mYrljy2ZadcJRrSgbeBGAivWP_HU/view?usp=sharing

1

Notions de logique

1) Proposition – Fonction propositionnelle – Quantificateurs

A retenir 1 :

1/On appelle **proposition** (ou assertion) tout énoncé mathématique ayant un sens et qui pouvant être soit vrai soit faux (il ne peut être à la fois vrai et faux).

2/On appelle **fonction propositionnelle** tout énoncé mathématique qui contient une variable (ou plus) appartenant à un ensemble donné, et qui devient une proposition chaque fois qu'on remplace cette variable par un élément de cet ensemble.

Remarques 1 :

1/*/ Si une proposition est vraie, alors on dit que sa valeur de vérité est vraie et on la note par V ou 1

*/ Si une proposition est fausse, alors on dit que sa valeur de vérité est fausse et on la note par F ou 0.

*Le tableau suivant est appelé le **tableau de vérité** de la proposition P :

P
V
F

2/ Une proposition est souvent notée par les lettres : P, Q, R...

3/ Selon le nombre des variables, les fonctions proportionnelles sont notées $P(x)$, $Q(x;y)$, $R(x;y;z)$...

Exemple 1 :

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

P_1 ‘’ 1 est un entier relatif ‘’

P_2 ‘’ $\sqrt{9+16}=\sqrt{9}+\sqrt{16}$ ‘’

P_3 “ $\dfrac{2}{5}$ est un nombre décimale“

P_4 ‘’ 2 est le seul nombre pair et premier ‘’

P_5 ‘’ Un carrée est un parallélogramme ‘’

Exemple 2 :

Déterminer la nature des énoncés mathématiques suivants

P " $\pi=3,14$ "

Q " $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2\in\mathbb{N}$ "

$A(x)$ ‘’ $x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 0$ ’’

$B(x)$ ‘’ $x\in\mathbb{R},\ x^2\geq x$ ’’

R ‘’ $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel ’’

$C(n)$ ‘’ $n\in\mathbb{N}^*,\ n^2+n+1$ est un nombre premier ’’

$D(n;m)$ ‘’ $(n;m)\in\mathbb{N}^2,\ n+m=10$ ’’

A retenir 2 :

Soit E un ensemble et $P(x)$ une fonction propositionnelle.

1) La proposition $(\forall x\in E)\ P(x)$ se lit **quel que soit** x appartient à E on a $P(x)$

2) La proposition $(\exists x\in E)\ P(x)$ se lit **il existe au moins** x appartient à E tel que $P(x)$

3) La proposition $(\exists! x\in E)\ P(x)$ se lit **il existe un unique** x appartient à E tel que $P(x)$

Exemple 3 :

Lire et déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P:\ (\exists! x\in\mathbb{R})\ x^2=25$; $Q:\ (\forall x\in\mathbb{R})\ 2024\leq x\leq 2026$; $R:\ (\exists x\in\mathbb{R})\ x^2+x+1=0$

Remarques 2 :

1/ Il existe des propositions qui contient plusieurs quantificateurs par exemple :

$P: (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad y > x$

$Q: (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad y > x$

$R: (\forall x \in [0;1])(\forall y \in [2;3]) \quad \dfrac{x+y}{1+xy} \leq 1$

$S: (\exists y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) \quad x+y > 5$

2/ On peut permuter des quantificateurs de même nature.

3/ On ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes.

4/ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par un ou plusieurs quantificateurs on obtient une proposition.

5/ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

6/ $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow [(\exists (a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*): \ x = \dfrac{a}{b}$ et $a \wedge b = 1]$.

Exemple 4 :

Ecrire les propositions suivantes avec les quantificateurs puis déterminer leurs vérités :

P : L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ admet au moins une solution réelle.

Q : Tous les nombres naturels sont positifs.

R : Certains nombres réels ne sont pas rationnels.

S : L'équation $2x + 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$

T : Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel m on a : $m = 2n$

Exemple 5 :

Etudier la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P_1: \ (\exists! x \in \mathbb{R}) \ \ x^2 = 4$

$P_2: \ (\forall x \in \mathbb{R}) \ \ x^2 + x + 1 > 0$

$P_3: \ (\exists x \in \mathbb{N}) \ \ 3x - 1 = 0$

Application 1 :

Exercice 1 de la série 1.

2) Négation d'une proposition

A retenir 3 :

1/ La négation d'une proposition P est la proposition qui vraie si P est fausse ; et qui est fausse si P est vraie on la note : $\overline{P}$

2/ Le tableau suivant est appelé le **tableau de vérité de la négation :**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

3/ **La négation de certains symboles usuels :**

Symbole	$\forall$	$\exists$	$=$	$\in$	$\leq$	$\geq$	$<$	$>$
Négation	$\exists$	$\forall$	$\neq$	$\notin$	$>$	$<$	$\geq$	$\leq$

4/ **Négation d'une proposition quantifiée :**

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle d'une variable x d'un ensemble non vide E

*/ La négation de la proposition $(\forall x \in E) \ \ P(x)$ est la proposition $(\exists x \in E) \ \ \overline{P(x)}$

*/ La négation de la proposition $(\exists x \in E) \ \ P(x)$ est la proposition $(\forall x \in E) \ \ \overline{P(x)}$

Exemple 6 :

Déterminer la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P_1 : \sqrt{1+\sqrt{4}} = 3$; $P_2 : \pi > 3,14$; $P_3 : \sqrt{11} \in [3;4]$; $P_4 : (\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 = 36$; $P_5 : (\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq x$

Application 2 : Exercices 2 et 3 de la série 1

3) Opérations sur deux propositions

A retenir 4 :

1/ La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps on la note $(P \text{ et } Q)$ ou $P \wedge Q$

2/ La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie on la note $(P \text{ ou } Q)$ ou $P \vee Q$

Soient P et Q deux propositions :

3/ La proposition $(\overline{P} \text{ ou } Q)$ qui est fausse seulement si P est vraie et Q est fausse s'appelle **l'implication** de deux propositions P et Q (dans cet ordre) se note $P \Rightarrow Q$

4/ L'équivalence de deux propositions P et Q, est la proposition qu'on note $P \Leftrightarrow Q$ et elle est vraie seulement si P et Q ont la même valeur de vérité.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Exemple 7 :

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

Proposition	Valeur de vérité
P_1 $2<7$ et $10=5$	
P_1 $2<7$ ou $10=5$	
$\pi \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \neq 2$	
$1=2 \Rightarrow 3=4$	
5 est un nombre impair $\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$	
$P :\ \lvert -4 \rvert = 4 \Leftrightarrow 3 \leq 12$	
$Q :\ 1+\sqrt{6}^2 = 7 \Leftrightarrow 12 = 2^2 \times 3^2$	

Remarques 3 :

1/L'implication : $P \Rightarrow Q$ se lit :

*/ P implique Q.

*/ Si on a P alors Q.

2/Les propositions $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ n'ont pas la même table de vérité, alors l'implication logique n'est pas commutative.

3/ L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$

Remarques 4 :

1/L'équivalence : $P \Leftrightarrow Q$ se lit :

*/ P équivalent à Q.

*/ P si et seulement si Q.

*/ $P\Rightarrow Q$ et $Q\Rightarrow P$

2/Les propositions $P\Leftrightarrow Q$ et $Q\Leftrightarrow P$ ont la même table de vérité, alors l'équivalence logique est commutative.

4) Lois logiques

Activité

Dresser le tableau de vérité de la proposition : $P\Rightarrow(Q\Rightarrow P)$

A retenir 5 :

Une **loi logique** est une proposition formée de plusieurs propositions P, Q,….. liée entre elles par des connecteurs logiques et qui est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité des propositions P, Q,…..

Remarque 5 :

Pour montrer qu'une proposition est une loi logique il suffit de dresser sa table de vérité.

Exemple 8 :

Soient P et Q deux propositions. Montrer que la proposition $P\Rightarrow(\overline{P}\Rightarrow Q)$ est une loi logique :

A retenir 6 : La négation de la conjonction, disjonction, implication et l'équivalence :

Quelles que soit les propositions P et Q, les propositions suivantes sont des lois logiques :

Lois de Morgan :

$\overline{(P\,et\,Q)}\Leftrightarrow\left(\overline{P}\,ou\,\overline{Q}\right)$ (On dit que la négation de $(P\,et\,Q)$ est $\left(\overline{P}\,ou\,\overline{Q}\right)$)

$\overline{(P\,ou\,Q)}\Leftrightarrow\left(\overline{P}\,et\,\overline{Q}\right)$ (On dit que la négation de $(P\,ou\,Q)$ est $\left(\overline{P}\,et\,\overline{Q}\right)$)

Négation de l'implication :

$\overline{(P\Rightarrow Q)}\Leftrightarrow\left(P\,et\,\overline{Q}\right)$ (On dit que la négation de $(P\Rightarrow Q)$ est $\left(P\,et\,\overline{Q}\right)$)

Négation de l''équivalence :

$\overline{(P\Leftrightarrow Q)}\Leftrightarrow\left(\overline{P}\Leftrightarrow Q\right)$ (On dit que la négation de $(P\Leftrightarrow Q)$ est $\left(\overline{P}\Leftrightarrow Q\right)$)

$\overline{(P\Leftrightarrow Q)}\Leftrightarrow\left(P\Leftrightarrow\overline{Q}\right)$ (On dit que la négation de $(P\Leftrightarrow Q)$ est $\left(P\Leftrightarrow\overline{Q}\right)$)

$\overline{(P\Leftrightarrow Q)}\Leftrightarrow\overline{[(P\Rightarrow Q)\ et\ (Q\Rightarrow P)]}$ (On dit que la négation de $(P\Leftrightarrow Q)$ est $\overline{[(P\Rightarrow Q)\ et\ (Q\Rightarrow P)]}$)

Exemple 9 :

Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$, déterminer la négation des propositions suivantes :

$P:\ x>2\Rightarrow x\leq 5$ $\qquad Q:\ a=b\ ou\ b=c$ $\qquad R:\ x\in\mathbb{R}^{+}\Leftrightarrow\sqrt{x}\in\mathbb{R}$ $\qquad S:\ a<b\ \ et\ \ b<c$

Remarque 7 : Quelles que soit les propositions P, Q et R, les propositions suivantes sont des lois logiques :

1/ Lois logiques usuelles :

$\overline{\overline{P}}\Leftrightarrow P$; $\left(P\,ou\,\overline{P}\right)$; $(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow\left(\overline{P}\,ou\,Q\right)$

$(P\Leftrightarrow Q)\Leftrightarrow[(P\Rightarrow Q)\ et\ (Q\Rightarrow P)]$; $(P\Leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\left(\overline{P}\Leftrightarrow\overline{Q}\right)$

2/ La commutativité :

$(P\,et\,Q)\Leftrightarrow(Q\,et\,P)$

$(P\,ou\,Q)\Leftrightarrow(Q\,ou\,P)$

$(P\Leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(Q\Leftrightarrow P)$

3/ L'associativité :

$[(P\ et\ Q)\ et\ R]\Leftrightarrow[P\ et\ (Q\ et\ R)]$; $[(P\ ou\ Q)\ ou\ R]\Leftrightarrow[P\ ou\ (Q\ ou\ R)]$

4/ La distributivité :

$\left[P et (Q ou R)\right] \Leftrightarrow \left[(P et Q) ou (P et R)\right]$; $\left[P ou (Q et R)\right] \Leftrightarrow \left[(P ou Q) et (P ou R)\right]$

Application 3 :

Exercices 4-5-6 de la série 1.

5) Raisonnements mathématiques

5-1 Raisonnement par contre-exemple

A retenir 7 :

Pour montrer qu'une proposition de type $(\forall x \in E)\ P(x)$ est fausse, il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Ce type de démonstration est appelé raisonnement par contre-exemple.

Exemple 10 :

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ x^2 + x - 2 = 0$; 2) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2):\ 3x + 5y = 8$

Application 4 : Exercice 7 de la série 1.

5-2 Raisonnement direct (déductif)

A retenir 8 :

Pour démontrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on utilise l'un des méthodes suivantes :

1/ On montre que $P \Rightarrow ..... \Rightarrow ..... \Rightarrow ..... \Rightarrow .... \Rightarrow Q$ à l'aide des opérations et des propriétés mathématiques.

2/ On suppose P est vraie et on montre que Q est vraie.

Ce type de démonstration est appelé raisonnement direct ou raisonnement déductif ou raisonnement par des implications successives.

Exemples 11 :

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}):\ |x| \leq 2 \Rightarrow |3x+1| \leq 7$

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}):\ x > 0 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} \geq 2$

Application 5 : Exercice 8 de la série 1.

5-3 Raisonnement par contraposée

A retenir 9 :

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Ce type de démonstration est appelé raisonnement par contraposée.

Remarques 8 :

Il faut bien distinguer entre la négation, la contraposé et la réciproque.

*/ la négation de $P \Rightarrow Q$ est $(P\ et\ \overline{Q})$

*/ la réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$

*/ la contraposé de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Exemples 12 :

Soit a et b deux nombres réels tel que $a \neq -b$. Montrer que : $a \neq -\dfrac{1}{2}b \Rightarrow \dfrac{a-b}{a+b} \neq -3$

Application 6 : Exercice 9 de la série 1.

5-4 Raisonnement par équivalence

A retenir 10 :

1/ Pour démontrer qu'une équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on utilise l'un des méthodes suivantes :

*/ On montre que $P \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow Q$ à l'aide des opérations et des propriétés mathématiques.

➢ Ce type de démonstration est appelé raisonnement par des équivalences successives.

*/ On montre que les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies.

2/ Pour démontrer qu'une proposition P est vraie il suffit de montrer que $P \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow Q$ à l'aide des opérations et des propriétés mathématiques où Q une proposition vraie.

Exemples 13 :

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $|x-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$

2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $x^2 - 3 \geq 3(2x-4)$

Application 7 : Exercice 10 de la série 1.

5-5 Raisonnement par disjonction des cas

A retenir 11 :

Pour montrer qu'une proposition de type $(\forall x \in E)$ $P(x)$ est vraie, il suffit de montrer que $P(x)$ est vraie dans tous les cas de la variable x dans E .

Ce type de démonstration est appelé raisonnement par disjonction des cas.

Exemples 14 :

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $x^2 - x + 1 \geq |x-1|$

Application 8 :

Exercice 11 de la série 1.

5-6 Raisonnement par l'absurde

A retenir 12 :

Pour montrer qu'une proposition est vraie par le raisonnement par l'absurde on suppose que $\overline{P}$ est vraie (C'est-à-dire que P est fausse) et on cherche à trouver une contradiction.

Exemples 15 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $A = \frac{n+3}{n+5}$, montrer que $A \neq 1$

Application 9 : Exercice 12 de la série 1.

5-7 Raisonnement par récurrence

A retenir 13 : Principe de récurrence

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Pour montrer que la proposition $(\forall n \geq n_0)$ $P(n)$ est vraie, on suive les étapes suivantes :

- Initialisation : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \geq n_0$, on suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie.

Exemples 16 :

Montrer que la proposition : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie.

Application 10 : Exercice 13 de la série 1.

Résumé 1 : Notions de logique

Proposition-fonction propositionnelle

1/ Une proposition (ou assertion) est tout énoncé mathématique ayant un sens et qui pouvant être soit vrai soit faux (il ne peut être à la fois vrai et faux).
2/ On appelle fonction propositionnelle tout énoncé mathématique qui contient une variable (ou plus) appartenant à un ensemble donné, et qui devient une proposition chaque fois qu'on remplace cette variable par un élément de cet ensemble.
3/ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par un ou plusieurs quantificateurs on obtient une proposition.

Opérations sur les propositions

		conjonction	*disjonction*	*implication*	*équivalence*
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Négation

1/ Tableau de vérité de la négation :

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

2/ La négation des symboles usuels :

Symbole	$\forall$	$\exists$	$=$	$\in$	$\leq$	$\geq$	$<$	$>$
Négation	$\exists$	$\forall$	$\neq$	$\notin$	$>$	$<$	$\geq$	$\leq$

3/ Négation d'une proposition quantifiée :

A/ La négation de la proposition $(\forall x \in E)\ P(x)$ est la proposition $(\exists x \in E)\ \overline{P(x)}$

B/ La négation de la proposition $(\exists x \in E)\ P(x)$ est la proposition $(\forall x \in E)\ \overline{P(x)}$

4/Négation de la conjonction, disjonction, implication et équivalence :

A/ La négation de $(P\ et\ Q)$ est $(\overline{P}\ ou\ \overline{Q})$

B/ La négation de $(P\ ou\ Q)$ est $(\overline{P}\ et\ \overline{Q})$

C/ La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P\ et\ \overline{Q})$)

D/ La négation de $(P \Leftrightarrow Q)$ est $(\overline{P} \Leftrightarrow Q)$

(ou bien $(P \Leftrightarrow \overline{Q})$ ou bien $\overline{[(P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow P)]}$)

Loi logique

1/ Une loi logique est une proposition formée de plusieurs propositions P, Q,.....liée entre elles par des connecteurs logiques et qui est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité des propositions P, Q,..... .
2/ Pour montrer qu'une proposition est une loi logique il suffit de dresser sa table de vérité

Raisonnements mathématiques

Question	**Raisonnement convenable**	**Méthode d' utilisation**
Montrer que $P \Leftrightarrow Q$	Raisonnement par équivalence.	Voir à retenir 10
Montrer que $P \Rightarrow Q$	Type 1 : Si P et Q ne contiens pas le symbole $\neq$, on utilise souvent le rais. déductif.	Voir à retenir 8
	Type 2 : Si P et Q contiens le symbole $\neq$, on utilise souvent le rais. par contraposée	Voir à retenir 9
Montrer que P	Type 1 : Si P contient la valeur absolue, on utilise souvent le rais. par disjonction des cas. On utilise aussi ce type de raisonnement dans les équations et les inéquations.	Voir à retenir 11
	Type 2 : Si P contient l' un des mots : n' appartient pas, n' admet pas, n' est pas..., on utilise souvent le rais. par l' absurde.	Voir à retenir 12
	Type 2 : Si P est une proposition ni de type 1 ni de type 2, on utilise souvent le rais. par équivalence	Voir à retenir 10
Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ P(n)$ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ P(n)$	On utilise souvent le rais. par récurrence	Voir à retenir 13
Montrer que $(\forall x \in E)\ \ P(x)$ est fausse	On utilise le rais. par contre-exemple	Voir à retenir 7

Il existe d'autres raisonnements mathématiques (de base) comme le calcul de la différence de deux expressions (Comparaison) ou la simplification d'une expression pour obtient une autre (Egalité de deux expressions).

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 1BSEG	**Série 1** **Notions de logique**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1

Ecrire en utilisant les quantificateurs les propositions suivantes :

P : Pour tout entier naturel n il existe un entier naturel m tel que $n+m=10$

Q : Il existe un réel M tel que pour toute x de $\mathbb{R}$ on a : $x \leq M$

R : Il existe un nombre rationnel x tel que : $x^2=2$

S : Il n'existe aucun nombre rationnel solution de l'équation : $x^2=2$

T : Entre deux réels il existe toujours un rationnel.

Exercice 2

Déterminer la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

P_1 : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \sqrt{x^2}=x$

P_2 : $(\forall x \geq 0)\ x^2-x-2 \geq 0$

P_5 : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*)\ x^2+y^2 \neq 1$

Exercice 3

Donner la négation de chacune des phrases suivantes :

P : Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.

Q : Certains nombres entiers sont pairs.

R : Tout entier naturel divisible par 3 est divisible par 9

Exercice 4

Déterminer la négation des propositions suivantes :

P : $(\forall x \in \mathbb{R})(x=0 \text{ ou } x<50)$

Q : $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2<54 \text{ et } x \in \mathbb{Z})$

R :

$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})\ x<y-1 \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq x^2+y^2$

S : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ -1 \leq x+y \leq 2 \Rightarrow |x+y| \leq 2$

Exercice 5 : Loi logique

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

1) $\overline{(P\, et\, Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}\, ou\, \overline{Q})$

2) $\overline{(P\, ou\, Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}\, et\, \overline{Q})$

Exercice 6 : Rais. par contre-exemple

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1) Tous les nombres premiers est impair.

2) Tous les nombres impairs est premier.

3) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n^2+n+1$ est premier.

4) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ 3x+5y=8$

5) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ |x|+|y|=|x+y|$

Exercice 7 : Rais. direct

Montrer que :

1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ |x| \leq 2 \Rightarrow |3x+1| \leq 7$

2) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x>0 \Rightarrow x+\frac{1}{x} \geq 2$

3) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x>1 \Rightarrow x^2+x-2>0$

4) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ 1+xy=x+y \Rightarrow (x=1 \text{ ou } y=1)$

Exercice 8 : Rais. par contraposée

1) $(\forall x;y \in \mathbb{R})\ x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1+\frac{x}{2}$

3) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2+x-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$

4) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n^2 \text{ est impair } \Rightarrow n \text{ est impair}$

5) $(\forall x;y;z \in \mathbb{R})\ x+y \leq z \Rightarrow \left(x \leq \frac{1}{2}z \text{ ou } y \leq \frac{1}{2}z\right)$

Exercice 9 : Rais. par équivalence

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ \sqrt{2x+2}=1+\sqrt{x} \Leftrightarrow x=1$

2) Montrer que $(\forall x \in [1;+\infty[)\ \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$

3) Montrer que : $(\forall x;y \in \mathbb{R})\ |x|+|y|=|x+y| \Leftrightarrow xy \geq 0$

Exercice 10 : Rais. par disjonction des cas

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^2+|x-4|+2=0$

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ n(n+1)$ est pair (étudier les cas si n est pair et si n est impair)

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2-5x+6}>x+4$

Exercice 11 : Rais. par l'absurde

1) Soit ABC un triangle et $a>0$ tel que $BC=3a,\ CA=2a$ et $AB=4a$.

Montrer que ABC n'est pas rectangle.

2) Soit $a;b \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $ab=1$ montrer que :

$(a \leq 1 \text{ ou } b \leq 1)$

Exercice 12 : Rais. par récurrence

Montrer que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 3^0+3^1+...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

3) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1^3+2^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

4) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1+3+...+(2n+1)=(n+1)^2$

DL3

1BACSEG
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1

1) Calculer sans utiliser la calculatrice les nombres suivants : A_8^3, $3!$, C_6^3, A_9^4, 3^3, C_7^2, $4!$ et 4^3

2) A l'aide d'une calculatrice scientifique donner la valeur des nombres suivants : A_5^2, $5!$, C_7^4 et 5^3

Exercice 2

Une urne contient 3 boules jaunes, 2 boules rouges et 4 boules bleu

Recopier et compléter le tableau suivant :

	On tire **simultanément 3 boules** de l'urne	On tire **successivement et sans remise 2** boules de l'urne	On tire **successivement avec remise 2** boules de l'urne
Le nombre de possibilités est :			
Le nombre de tirages comportant 3 boules bleu est :			
Le nombre de tirages comportant des boules de mêmes couleurs est :			
Le nombre de tirages comportant exactement 2 boules rouges est :			
Le nombre de tirages comportant des boules de couleurs différents deux à deux est :			

Exercice 3

1) On veut former des mots à deux lettres distinctes, avec les lettres : A ; B ; C ; D ; E et F : Déterminer le nombre de mots possibles.

2) Considérons 6 personnes : Combien de groupes de 2 personnes peuvent être formés ?

Exercice 4

1) Soit a et b deux réels. Développer $(a+b)^5$

2) Montrer que $C_n^0 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$ (remarquer que $2^n = (1+1)^n$)

3) Montrer que $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

Correction

بسم الله الرحمن الرحيم

DS3

Nom et Prénom……………………………

……………………………………………………

N°……………………………………………

Classe : 1BSEG

Choisir la bonne réponse $\boxed{\times}$ (après avoir effectué les opérations nécessaires)

(2 points pour chaque question)

A) Un sac contient 5 boules rouges et 4 boules vertes. On tire deux boules du sac successivement et avec remise.

1) Le nombre de tirages possibles est :	36	28	81	56	72	64	Autre
2) Le nombre de possibilités d'obtenir deux boules vertes est :	Impossible	25	16	20	12	9	Autre
3) Le nombre de possibilités d'obtenir des boules de la même couleur est :	2	13	41	Impossible	32	9	Autre

B) Un sac contient une boule jaune, trois boules noires et trois boules rouges. On tire simultanément quatre boules du sac.

1) Le nombre de tirages possibles est :	84	70	35	15	126	100	Autre
2) Le nombre de possibilités d'obtenir trois boules noires et une boule rouge est :	2	3	4	11	7	5	Autre
3) Le nombre de possibilités d'obtenir deux boules rouges et deux boules noires est :	9	30	3	18	113	6	Autre
4) Le nombre de possibilités d'obtenir toutes les boules de la même couleur est :	89	70	113	5	1	Autre	Impossible
5) Le nombre de possibilités d'obtenir une boule jaune et trois boules rouges est :	7	10	1	70	89	Autre	Impossible

C) Un sac contient 6 boules vertes et 3 boules jaunes. On tire deux boules au hasard du sac successivement et sans remise.

1) Le nombre de tirages possibles est :	1	110	121	4	72	81	Autre
2) Le nombre de possibilités d'obtenir deux boules jaunes est :	18	25	20	6	9	2	Autre

6

Matrices et systèmes

1) Définition et vocabulaire

Activité 1

Le tableau ci-dessous donne l'état du stock concernant deux produits de beauté B_1 et B_2 sur trois points de vente P_1, P_2 et P_3.

1- Donner la colonne représentant l'état du stock du produit B_1 sur les trois points de ventes.

2- Donner la ligne représentant l'état du stock en B_1 et B_2 sur le point de vente P_3.

3- Que représente le nombre 24 situé à l'intersection de la troisième ligne et la deuxième colonne du tableau?

	B_1	B_2
P_1	70	35
P_2	30	27
P_3	27	24

Définition 1

n et p étant deux entiers naturels non nuls.

- On appelle ***matrice*** de dimension $n \times p$, un tableau de nombres réels comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.
- Soit M une matrice d'ordre $n \times p$. Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{éme}}$ ligne et la $j^{\text{éme}}$colonne est noté a_{ij}. La matrice M se note aussi $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$

Coefficient situé à la $1^{ère}$ ligne et la $2^{ème}$ colonne

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 1^{ère} \text{ ligne} \\ \\ \\ \rightarrow n^{ème} \text{ ligne} \end{matrix}$$

$1^{ère}$ colonne $\quad$ $p^{ème}$ colonne

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ -1 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & -6 & 6 \\ 7 & -5 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$ est une matrice de dimension 4×4 (à 4 lignes et 4 colonnes)

On a $a_{43} =$; $a_{23} =$; $a_{32} =$; $a_{13} =$; $a_{31} =$

Remarque 1 :

- Une matrice de dimension $1 \times n$ est appelée matrice ligne de taille n.
- Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée matrice colonne de taille n.
- Une matrice de dimension $n \times n$ est appelée matrice carrée de taille n ou d'ordre n.

Application 1

1) Soit A une matrice d'ordre 3×3 dont voici certains termes : $a_{21} = 4$, $a_{32} = 5$, $a_{23} = 1$, $a_{13} = -5$, $a_{12} = 7$ et $a_{31} = 3$

Recopier et compléter $A = \begin{pmatrix} 6 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 0 \end{pmatrix}$

2) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & . \\ . & . & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ dont les termes manquants sont : $b_{21} = 4$, $b_{22} = -1$ et $b_{13} = 5$.

a) Recopier et compléter B.

b) Quel est l'ordre de B ?

c) Déterminer b_{23} .Peut – on parler de b_{32} ? Pourquoi ?

Application 2

Dans la matrice ci- dessous sont rangées les notes de trois élèves e_1 , e_2 et e_3 de la manière suivante :
pour i∈{1,2,3}, la colonne i indique les notes de l'élève e_i respectivement en mathématiques , en économie et en gestion .

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 9 \\ 10 & 15 & 13 \\ 15 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

1- Donner l'ordre de M. Que représente la troisième colonne de M ?
Que représente la première ligne de M ?
2- Quelle est la note obtenue en économie pour l'élève e_3 ?
3- On pose $M = (a_{ij})$ Donner les valeurs de a_{11}, a_{23}, a_{33} et a_{32}

Vocabulaire des matrices

Diagonale

Matrice ligne

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$$

Exemple :

$(1 \quad 2 \quad -5)$

: matrice ligne d'ordre 3

Matrice colonne

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Exemple :

$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$: matrice colonne d'ordre 4

Matrice carrée

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice d'ordre $n \times n$ est appelée **Matrice carrée d'ordre *n***

Exemple :

$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$: matrice carrée d'ordre 3

Matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice unité

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice unité d'ordre n :

$\boldsymbol{I_n}$ ou **I**

Exemple :

$\boldsymbol{I_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$: matrice unité

Matrice nulle

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 2

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ deux matrices de même ordre $n \times p$

Deux matrices sont égales si et seulement si, elles sont de même ordre et leurs coefficients de mêmes indices sont égaux deux à deux.

Autrement dit $A = B$ si et seulement si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le p$

Application 3

1) Compléter les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & \cdots \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ \cdots & -2 & 6 \end{pmatrix}$ pour qu'elles soient égales.

2) Déterminer le réel a pour que la matrice $B = \begin{pmatrix} a^2 & a^2-1 \\ 2a+2 & a^2 \end{pmatrix}$ soit égale à la matrice unité d'ordre 2.

2) Opérations sur les matices

2-1 Somme et différence de deux matrices

Activité 2

Sur trois de ses points de vente, un gestionnaire de stock d'une chaîne de magasins suit l'état du stock de trois articles de confection : des séries de chemises (c), des séries de pantalons (p) et des séries de vestes (v). Les matrices I, E et S ci- dessous indiquent respectivement l'état initial du stock (I), Les entrées du stock (E) et les sorties du stock (S)

$$I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 20 \\ 10 & 15 & 25 \\ 25 & 30 & 30 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 5 \\ 20 & 4 & 3 \\ 25 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

1- Donner la matrice S_1 représentant le stock total avant les sorties.

2- Donner la matrice S_2 représentant le nouvel état des stocks après les sorties.

Définition 3

Soit A = (a_{ij}) et B = (b_{ij}) deux matrices de même ordre $n\times p$.

- La somme des deux matrices A et B, notée A + B, est la matrice C = $(a_{ij} + b_{ij})$ de même ordre $n\times p$.
- La différence des deux matrices A et B, notée A – B, est la matrice D = $(a_{ij} - b_{ij})$ de même ordre $n\times p$.

Exemple 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+9 \\ -3+4 & 5+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

$$A-B = \begin{pmatrix} 1-2 & 0-9 \\ -3-4 & 5-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$$

Application 4

Calculer :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Propriété

A, B et C trois matrices d'ordre $n\times p$ (n et p deux entiers naturels non nuls) et **O** la matrice nulle d'ordre $n\times p$.

- $A + O = O + A = A$
- $A + B = B + A.$
- $(A + B) + C = A + (B + C).$