

Terminale Spécialité

# PRÉCIS DE MATHÉMATIQUES

Cours rigoureux avec démonstrations  
et exercices corrigés

Cours clair, rigoureux  
et complet

Démonstrations  
détaillées

Exercices  
d'entraînement  
et d'approfondissement

Chlomo Khalifa



Terminale Spécialité

# PRÉCIS DE MATHÉMATIQUES

Cours rigoureux avec démonstrations  
et exercices corrigés

Chlomo KHALIFA

Professeur de mathématiques au lycée



# Avant-propos

Cher lecteur, chère lectrice,

Le livre que tu tiens entre tes mains est le fruit de cinq années d'un travail laborieux, intense, obstiné mais avant tout passionné. C'est donc avec émotion et fierté que je te le présente aujourd'hui.

## Motivations

Plus jeune, je passais des heures incalculables dans les librairies, flânant patiemment entre les allées, ouvrant délicatement quelques livres au titre aguicheur ou à la couverture élégante, humant discrètement certaines pages exhalant un parfum unique de fibres naturelles et d'encre. Mais si ces déambulations étaient au début insouciantes, elles prirent au fil du temps un caractère plus grave et plus sérieux. Il n'était plus question de dénicher un roman de littérature particulièrement bien écrit, mais de partir quasi-exclusivement à la quête d'un livre de mathématique qui me donne entière satisfaction, c'est-à-dire un ouvrage réunissant à lui seul les critères suivants :

- un livre proposant un contenu mathématique à l'esthétique léchée mais épurée, de type université ou classe préparatoire ;
- un livre dont le contenu est d'un niveau de rigueur mathématique irréprochable ;
- un livre qui se suffit à lui-même, c'est-à-dire suffisamment détaillé et complet pour qu'un élève le possédant n'ait pas à chercher des explications ou des exercices complémentaires ailleurs.

Cette quête ardue me mena à feuilleter inlassablement un grand nombre de livres mathématiques de tout style et de tout niveau. Mais alors qu'une multitude d'ouvrages du supérieur me contentèrent au delà de toute espérance — ouvrages qui contribuèrent significativement à mon éducation mathématique et qui m'accompagnent encore maintenant —, s'agissant du lycée, je rencontrai peu de livres réunissant les critères susmentionnés et qui forment pourtant, à mes yeux, les ingrédients indispensables à la création d'un bon livre de mathématique.

C'est au cours de cette quête que l'idée germa dans mon esprit de créer pour mes futurs élèves de lycée un polycopié de cours qui cocherait toutes les cases,

dans la mesure de mes moyens. Je m'attelai donc à la tâche sans tarder. A travers les années d'enseignement, ce cours s'étoffait et s'améliorait sans cesse. Si le polycopié n'avait pas du tout vocation à être publié, certains encouragements répétés d'un certain nombre d'élèves et de collègues me décidèrent à le publier sous la forme d'un livre, mon souhait profond étant qu'il puisse être profitable au plus grand nombre.

## A qui s'adresse ce livre ?

Ce livre touche volontairement un très large public au sein de ceux qui sont concernés par l'enseignement de la spécialité mathématique en terminale.

- Ce livre sera un gage de réussite pour l'élève ne souhaitant pas poursuivre des études de mathématiques tout en ayant l'ambition d'obtenir une excellente note au baccalauréat. Il y trouvera un cours complet et clair, une sélection réfléchie d'exercices de type bac corrigés, ainsi que des conseils pratiques pour améliorer nettement sa rédaction.
- Ce livre sera une solide passerelle pour l'élève souhaitant continuer des études supérieures à majeur mathématiques. Il y trouvera un cours très rigoureux digne du niveau de rigueur exigé à l'université ou en classes préparatoires, ainsi que des exercices exigeants introduisant des notions incontournables du supérieur.

## Conseils d'utilisation

Je te propose quelques conseils d'utilisation de cet ouvrage afin que tu puisses en tirer le meilleur profit. Ces conseils dépendent de ton profil et de tes aspirations.

Si tu souhaites obtenir une excellente note au baccalauréat sans pour autant poursuivre des études de mathématique, tu mettras l'accent dans l'ordre :

- sur la CONNAISSANCE parfaite des éléments du cours : énoncés des définitions et des propriétés (sans démonstration), compréhension des exemples, des remarques et des rubriques de mise en garde ;
- sur les applications qui jalonnent régulièrement le cours : d'une importance capitale, elles vérifient ta capacité à appliquer correctement le contenu du cours via des petits exercices classiques ;
- sur les annales bac proposées en fin de chapitre : très variées et de difficultés progressives, ces annales te permettront de t'entraîner sur les différents types d'exercices susceptibles de tomber le jour J, mais aussi de te confronter à des exercices un peu moins classiques afin d'améliorer ta capacité d'adaptation à la nouveauté.

Si tu souhaites continuer des études supérieures à majeur mathématique, je t'exhorte, en plus, à mettre l'accent sur la COMPRÉHENSION profonde du cours. Cela passe bien sûr par la lecture approfondie des démonstrations. Cette pratique est indispensable si tu souhaites élever drastiquement ton niveau de mathématique

car elle te permettra de te familiariser avec les rudiments de logique et les raisonnements mathématiques fondamentaux. Elle exigera de ta part patience, rigueur intellectuelle et méthode. Tu pourras également composer les exercices d'approfondissement qui se distinguent par le marquage du symbole ♠ — ces exercices piquent un peu ! Très exigeants et dépassant allégrement le programme de terminale, ces exercices te feront habilement découvrir des notions importantes du supérieure.

Plus généralement, les applications de cours, exercices et démonstrations marqués par le symbole ♠ sont relativement difficiles et/ou hors programme, et peuvent être sautés en première lecture.

Note enfin que le symbole  $\square$ , situé systématiquement à la fin d'une démonstration, signale simplement la fin de cette dernière.

Trêves de bavardages, je te souhaite une agréable lecture et j'espère sincèrement que cet ouvrage te sera utile.

A Paris, le 1<sup>er</sup> novembre 2023

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Suites</b>	<b>15</b>
1.1	Raisonnement par récurrence . . . . .	15
1.1.1	Principe . . . . .	15
1.1.2	Exemples . . . . .	16
1.1.3	Inégalité de Bernoulli . . . . .	18
1.2	Limite de suite . . . . .	18
1.2.1	Limite infinie . . . . .	18
1.2.2	Limite finie . . . . .	20
1.3	Règles opératoires sur les limites . . . . .	22
1.3.1	Somme de limites . . . . .	22
1.3.2	Produit de limites . . . . .	22
1.3.3	Quotient de limites . . . . .	23
1.3.4	Formes indéterminées . . . . .	24
1.4	Limites et inégalités . . . . .	27
1.4.1	Théorème de comparaison . . . . .	27
1.4.2	Théorème des gendarmes . . . . .	28
1.5	Suites majorées, minorées, bornées . . . . .	29
1.5.1	Définitions . . . . .	29
1.5.2	Convergence des suites monotones . . . . .	30
1.6	Limite d'une suite géométrique . . . . .	32
1.6.1	Limite de la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $q \in \mathbb{R}$ . . . . .	32
1.6.2	Limite de la somme des termes d'une suite géométrique . . . . .	34
1.7	Exercices . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Limites de fonction</b>	<b>39</b>
2.1	Limite en l'infini . . . . .	39
2.1.1	Limite infinie en l'infini . . . . .	39
2.1.2	Limite finie en l'infini et asymptote horizontale . . . . .	40
2.2	Limite en un réel . . . . .	42
2.2.1	Limite infinie en un réel et asymptote verticale . . . . .	42
2.2.2	Limite finie en un réel . . . . .	44
2.3	Règles opératoires sur les limites . . . . .	45
2.3.1	Somme de limites . . . . .	45
2.3.2	Produit de limites . . . . .	46
2.3.3	Quotient de limites . . . . .	47

2.3.4	Formes indéterminées . . . . .	48
2.4	Limites et inégalités . . . . .	50
2.4.1	Théorème de comparaison . . . . .	50
2.4.2	Théorème des gendarmes . . . . .	51
2.5	Fonction exponentielle et limites en l'infini . . . . .	51
2.5.1	Limites de la fonction exponentielle . . . . .	51
2.5.2	Croissances comparées . . . . .	52
2.6	Exercices . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Continuité</b>	<b>57</b>
3.1	Notion de continuité . . . . .	57
3.1.1	Définitions . . . . .	57
3.1.2	Opérations et fonctions continues . . . . .	57
3.1.3	Dérivation et continuité . . . . .	60
3.2	Le théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	61
3.2.1	Cas général . . . . .	61
3.2.2	Cas des fonctions strictement monotones . . . . .	62
3.3	Fonctions continues et suites . . . . .	64
3.4	Exercices . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Complément de dérivation et convexité</b>	<b>71</b>
4.1	Complément de dérivation . . . . .	71
4.1.1	Fonctions composées . . . . .	71
4.1.2	Dérivée d'une fonction composée . . . . .	72
4.1.3	Dérivée seconde . . . . .	73
4.2	Convexité . . . . .	74
4.2.1	Définition . . . . .	74
4.2.2	Caractérisations des fonctions convexes dérivables . . . . .	74
4.2.3	Point d'inflexion . . . . .	78
4.3	Exercices . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Fonction logarithme népérien</b>	<b>87</b>
5.1	La fonction logarithme népérien . . . . .	87
5.1.1	Définition . . . . .	87
5.1.2	Conséquences de la définition . . . . .	88
5.1.3	Représentation graphique . . . . .	88
5.2	Propriétés algébriques du logarithme . . . . .	89
5.2.1	Relation fonctionnelle . . . . .	89
5.2.2	Propriétés algébriques . . . . .	89
5.3	Étude de la fonction logarithme népérien . . . . .	91
5.3.1	Continuité et dérivabilité . . . . .	91
5.3.2	Variations, équations et inéquations . . . . .	92
5.3.3	Limites . . . . .	94
5.3.4	Convexité . . . . .	95
5.3.5	Dérivée de $\ln(u)$ . . . . .	96
5.4	Exercices . . . . .	97

<b>6</b>	<b>Fonctions trigonométriques</b>	<b>101</b>
6.1	Rappels . . . . .	101
6.2	Fonctions cosinus et sinus . . . . .	102
6.2.1	Définitions . . . . .	102
6.2.2	Continuité . . . . .	102
6.2.3	Parité et périodicité . . . . .	103
6.2.4	Signe . . . . .	104
6.2.5	Résolution d'équations et d'inéquations . . . . .	105
6.2.6	Limites . . . . .	107
6.3	Dérivation et variations . . . . .	109
6.3.1	Dérivation . . . . .	109
6.3.2	Variations . . . . .	111
6.3.3	Convexité . . . . .	113
6.4	Exercices . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Primitives et équations différentielles</b>	<b>117</b>
7.1	Équation différentielle du premier ordre . . . . .	117
7.2	Équation différentielle $y' = f$ et primitives . . . . .	118
7.2.1	Primitives d'une fonction continue sur un intervalle . . . . .	118
7.2.2	Primitives des fonctions usuelles et opérations . . . . .	120
7.2.3	Primitives et composition . . . . .	122
7.3	Équation différentielle $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$ . . . . .	124
7.3.1	Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ . . . . .	124
7.3.2	Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ . . . . .	125
7.3.3	Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + f$ . . . . .	127
7.4	Exercices . . . . .	129
<b>8</b>	<b>Intégration</b>	<b>133</b>
8.1	Intégrale et aire . . . . .	133
8.1.1	Définition . . . . .	133
8.1.2	Notation . . . . .	134
8.2	Calcul d'intégrales . . . . .	136
8.2.1	Théorème fondamental de l'analyse . . . . .	136
8.2.2	Calcul d'intégrales . . . . .	137
8.3	Propriétés des intégrales . . . . .	140
8.3.1	Relation de Chasles . . . . .	140
8.3.2	Linéarité . . . . .	141
8.3.3	Positivité . . . . .	142
8.3.4	Passage à l'intégrale dans les inégalités . . . . .	143
8.3.5	Inégalité de la moyenne . . . . .	144
8.3.6	Aire du domaine compris entre deux courbes . . . . .	145
8.4	Intégration par parties . . . . .	146
8.5	Exercices . . . . .	147

<b>9</b>	<b>Combinatoire et dénombrement</b>	<b>153</b>
9.1	Cardinal d'ensembles finis . . . . .	153
9.1.1	Ensemble fini et cardinal . . . . .	153
9.1.2	Principe additif . . . . .	153
9.1.3	Principe multiplicatif . . . . .	155
9.2	Arrangements et permutations . . . . .	158
9.2.1	Factorielle d'un entier naturel . . . . .	158
9.2.2	Arrangements d'un ensemble . . . . .	158
9.2.3	Permutations d'un ensemble . . . . .	159
9.3	Combinaisons d'un ensemble fini . . . . .	161
9.3.1	Parties d'un ensemble fini . . . . .	161
9.3.2	Nombre de combinaisons . . . . .	162
9.3.3	Propriétés des coefficients binomiaux . . . . .	164
9.4	Exercices . . . . .	168
<b>10</b>	<b>Vecteurs, droites et plans de l'espace</b>	<b>171</b>
10.1	Vecteurs de l'espace . . . . .	171
10.1.1	Définitions et règles de calcul . . . . .	171
10.1.2	Vecteurs colinéaires, parallélisme, alignement . . . . .	176
10.2	Droites et plans de l'espace . . . . .	177
10.2.1	Caractérisation vectorielle d'une droite . . . . .	177
10.2.2	Caractérisation vectorielle d'un plan . . . . .	179
10.2.3	Vecteurs coplanaires . . . . .	180
10.3	Positions relatives de droites et de plans . . . . .	182
10.3.1	Position relative de deux droites . . . . .	182
10.3.2	Position relative d'une droite et d'un plan . . . . .	183
10.3.3	Position relative de deux plans . . . . .	186
10.4	Repérage dans l'espace . . . . .	190
10.4.1	Base de l'espace . . . . .	190
10.4.2	Repère de l'espace . . . . .	192
10.4.3	Opérations sur les coordonnées . . . . .	193
10.5	Exercices . . . . .	196
<b>11</b>	<b>Orthogonalité dans l'espace</b>	<b>201</b>
11.1	Produit scalaire dans l'espace . . . . .	201
11.1.1	Extension du produit scalaire à l'espace . . . . .	201
11.1.2	Propriétés algébriques . . . . .	202
11.2	Orthogonalité dans l'espace . . . . .	205
11.2.1	Orthogonalité de deux vecteurs . . . . .	205
11.2.2	Orthogonalité de deux droites . . . . .	205
11.2.3	Orthogonalité d'un plan et d'une droite . . . . .	207
11.3	Vecteur normal à un plan . . . . .	208
11.3.1	Définitions . . . . .	208
11.3.2	Propriétés . . . . .	211
11.4	Projections orthogonales dans l'espace . . . . .	213
11.4.1	Projeté orthogonal d'un point sur une droite . . . . .	213
11.4.2	Projeté orthogonal d'un point sur un plan . . . . .	215

11.5	Base orthonormée et repère orthonormé . . . . .	216
11.5.1	Définitions . . . . .	216
11.5.2	Propriétés . . . . .	217
11.6	Exercices . . . . .	218
<b>12</b>	<b>Représentations paramétriques et équations cartésiennes</b>	<b>225</b>
12.1	Représentations paramétriques d'une droite . . . . .	225
12.2	Équations cartésiennes d'un plan . . . . .	227
12.3	Système d'équations linéaires . . . . .	230
12.3.1	Déterminer l'intersection de deux droites . . . . .	230
12.3.2	Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan . . . . .	231
12.3.3	Déterminer l'intersection de deux plans . . . . .	233
12.3.4	Déterminer le projeté orthogonal d'un point . . . . .	234
12.4	Exercices . . . . .	236
<b>13</b>	<b>Sommes de variables aléatoires</b>	<b>241</b>
13.1	Rappels . . . . .	241
13.1.1	Variable aléatoire et loi de probabilité . . . . .	241
13.1.2	Espérance et variance d'une variable aléatoire . . . . .	242
13.1.3	Variable aléatoire $aX + b$ . . . . .	244
13.2	Somme de variables aléatoires . . . . .	246
13.2.1	Définition . . . . .	246
13.2.2	Espérance d'une somme de variables aléatoires . . . . .	248
13.2.3	Variables aléatoires indépendantes . . . . .	249
13.2.4	Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes . . . . .	250
13.3	Variables aléatoires i.i.d. . . . .	252
13.4	Exercices . . . . .	254
<b>14</b>	<b>Loi binomiale</b>	<b>257</b>
14.1	Schéma de Bernoulli . . . . .	257
14.1.1	Épreuve et loi de Bernoulli . . . . .	257
14.1.2	Espérance et variance d'une loi de Bernoulli . . . . .	258
14.1.3	Schéma de Bernoulli . . . . .	259
14.2	Loi binomiale . . . . .	260
14.2.1	Définition et propriété . . . . .	260
14.2.2	Représentation graphique d'une loi binomiale . . . . .	261
14.2.3	Espérance et variance d'une loi binomiale . . . . .	262
14.3	Exercices . . . . .	264
<b>15</b>	<b>Loi des grands nombres</b>	<b>271</b>
15.1	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . . .	271
15.1.1	Inégalité de Markov . . . . .	271
15.1.2	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . . .	273
15.2	Loi des grands nombres . . . . .	275
15.2.1	Inégalité de concentration . . . . .	276
15.2.2	Loi faible des grands nombres . . . . .	277
15.3	Exercices . . . . .	278

Correction des applications	283
Correction des exercices	347
<b>A Précis de rédaction</b>	<b>479</b>
A.1 Introduire tout ce dont on parle . . . . .	480
A.1.1 Introduire une variable . . . . .	480
A.1.2 Nommer un objet . . . . .	482
A.2 Les mélanges douteux . . . . .	483
A.2.1 Concernant les quantificateurs . . . . .	483
A.2.2 Concernant l'implication et l'équivalence . . . . .	484
A.3 Annoncer la couleur . . . . .	487
A.4 Citer une définition ou une propriété . . . . .	488
A.5 Définir une fonction . . . . .	488
A.6 Dériver une fonction . . . . .	490
<b>B Questions exigibles et lettres grecques</b>	<b>493</b>
B.1 Liste des questions de cours exigibles . . . . .	493
B.2 Table des lettres grecques . . . . .	495
<b>Remerciements</b>	<b>497</b>



# Suites

## 1.1 Raisonnement par récurrence

On utilise le raisonnement par récurrence lorsque l'on cherche à démontrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à un entier naturel  $n_0$  (en général  $n_0 = 0$  ou  $n_0 = 1$ ).

### 1.1.1 Principe

**Théorème 1.1. Principe de récurrence (admis)**

Soit une propriété qui dépend d'un entier naturel  $n$ , notée  $\mathcal{P}(n)$ , et soit  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Si l'on démontre les deux propriétés suivantes :

- $\mathcal{P}(n_0)$  (initialisation) ;
- pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  implique  $\mathcal{P}(n + 1)$  (hérédité),

alors pour tout entier  $n \geq n_0$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

*Remarque.* Le principe de récurrence peut être schématisé de la façon suivante. On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. Les deux conditions permettant de s'assurer que tous les dominos tombent sont :

- le premier domino tombe (initialisation) ;
- si un domino quelconque tombe, il renverse le domino suivant (hérédité).

*Remarque.* 1. Dans l'hérédité, on suppose que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour un entier  $n \geq n_0$  (cette hypothèse s'appelle l'**hypothèse de récurrence**), et on montre que  $\mathcal{P}(n + 1)$  est également vraie. Formellement, l'hérédité consiste à montrer la propriété suivante :

$$\forall n \geq n_0, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1)).$$

2. Une propriété  $\mathcal{P}(n)$  qui vérifie l'étape de l'hérédité est dite **héréditaire** à partir du rang  $n_0$  car sa véracité se transmet du rang  $n$  à son « héritier » de rang  $n + 1$ .

La section suivante propose deux exemples d'application du raisonnement par récurrence. On prêtera une attention particulière à la rédaction.

### 1.1.2 Exemples

*Exemple.* On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = (n + 1)^2$ . Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété «  $u_n = (n + 1)^2$  ».

- Initialisation. On a d'une part :  $u_0 = 1$ , et d'autre part :  $(0 + 1)^2 = 1$ , donc  $u_0 = (0 + 1)^2$  et ainsi  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Hérité. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire tel que  $u_n = (n + 1)^2$  (c'est l'hypothèse de récurrence, en abrégé H.R.). Montrons que  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $u_{n+1} = (n + 2)^2$ .  
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \\ &= (n + 1)^2 + 2n + 3 \quad \text{par H.R.} \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n + 2)^2. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie.

- Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

*Exemple.* On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

On souhaite démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est croissante sur  $\mathbb{N}$ , c'est-à-dire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq u_{n+1}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété «  $u_n \leq u_{n+1}$  ».

- Initialisation. On a d'une part :  $u_0 = 2$ , et d'autre part :  $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 2 = \frac{1}{2} \times 2 + 2 = 3$ , donc  $u_0 \leq u_1$  et ainsi  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Hérité. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire tel que  $u_n \leq u_{n+1}$ . Montrons que  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ .

Par hypothèse de récurrence, on a :  $u_n \leq u_{n+1}$ , donc :  $\frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}u_{n+1}$ , et donc :  $\frac{1}{2}u_n + 2 \leq \frac{1}{2}u_{n+1} + 2$ , c'est-à-dire :  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ .

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

*Remarque.* Notons qu'au début du raisonnement par récurrence, la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est écrite entre guillemets car c'est une propriété qui reste à démontrer. A ce stade, on ignore si elle est vraie.

### Attention !

Dans un raisonnement par récurrence, l'initialisation est indispensable ! En effet, une propriété uniquement héréditaire peut être fautive. Par exemple, la propriété «  $2^n$  est divisible par 3 » est héréditaire, mais elle n'est jamais vraie !

### Attention !

Il existe deux erreurs fréquentes de rédaction dans l'hérédité.

1. Commencer l'hérédité par la phrase : « Supposons que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, et montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie » est une erreur fondamentale ! Si l'on suppose que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il n'y a plus rien à prouver...
2. Débuter l'hérédité par les phrases : « Supposons qu'il existe un entier naturel  $n$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie... » ou « Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour un certain entier naturel  $n...$  » est une erreur plus subtile. En effet, dans ce cas, on montre uniquement la propriété :  $\exists n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ .

Pour éviter toute erreur, il est conseillé de commencer l'hérédité par la formulation : « Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie... ».

**Application 1.** Les deux questions de cette application sont indépendantes.

1. On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \sqrt{0,5u_n^2 + 8}.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $n! \geq 2^{n-1}$ .

### 1.1.3 Inégalité de Bernoulli

**Propriété 1.2. Inégalité de Bernoulli**

Soit  $a$  un réel positif. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

*Démonstration.* Soit  $a$  un réel positif. Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété «  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  ».

Montrons par récurrence que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

- Initialisation. On a d'une part :  $(1 + a)^0 = 1$  et d'autre part :  $1 + 0 \times a = 1$ , donc  $(1 + a)^0 = 1 + 0 \times a$ , et ainsi  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire tel que  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ . Montrons que  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$ . Par hypothèse de récurrence, on a :  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ , donc :  $(1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a)$  car  $1 + a > 0$ , soit :  $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2$ , soit :  $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2$ , donc :  $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$  car  $na^2 \geq 0$ . Ainsi,  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie.
- Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

□

## 1.2 Limite de suite

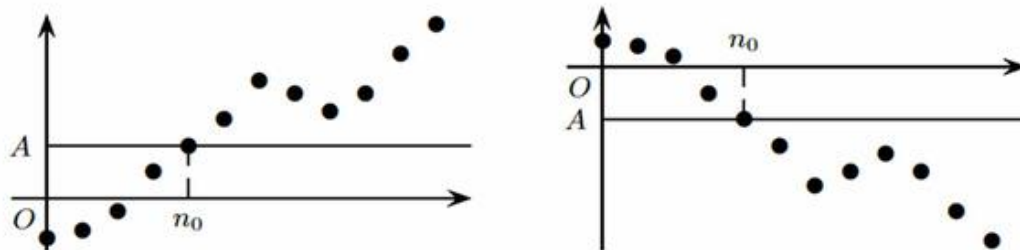
### 1.2.1 Limite infinie

**Définition 1.3.** 1. On dit qu'une suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$ , et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , si pour tout réel  $A > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq n_0$ , on a  $u_n > A$ .

2. On dit qu'une suite  $(u_n)$  a pour limite  $-\infty$ , et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ , si pour tout réel  $A < 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq n_0$ , on a  $u_n < A$ .

*Remarque.* Autrement dit :

- une suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$  lorsque pour tout réel  $A > 0$ , l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang  $n_0$  ;
- une suite  $(u_n)$  a pour limite  $-\infty$  lorsque pour tout réel  $A < 0$ , l'intervalle  $] - \infty ; A[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang  $n_0$ .



De manière vulgarisée, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  si le terme  $u_n$  est aussi grand que l'on veut lorsque  $n$  est suffisamment grand, et on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  si le terme  $u_n$  est aussi grand que l'on veut dans les négatifs lorsque  $n$  est suffisamment grand.

On donne ci-dessous les limites infinies de quelques suites usuelles.

**Propriété 1.4. Suites de référence de limite infinie (1)**

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$
3. Plus généralement, pour tout entier  $k \geq 1$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$ .
4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

*Démonstration* ♠. Soit un réel  $A > 0$ .

1. On note  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = n$ .  
Ainsi, en posant  $n_0 = \lfloor A \rfloor + 1$  on a bien, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n > A$ .
2. On note  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = n^2$ .  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n > A \iff n > \sqrt{A}$ .  
Ainsi, en posant  $n_0 = \lfloor \sqrt{A} \rfloor + 1$ , on a bien, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n > A$ .
3. Cette limite est admise.
4. On note  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \sqrt{n}$ .  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n > A \iff n > A^2$ .  
Ainsi, en posant  $n_0 = \lfloor A^2 \rfloor + 1$ , on a bien, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n > A$ .

□

On peut montrer de manière analogue les limites infinies suivantes.

**Propriété 1.5. Suites de référence de limite infinie (2)**

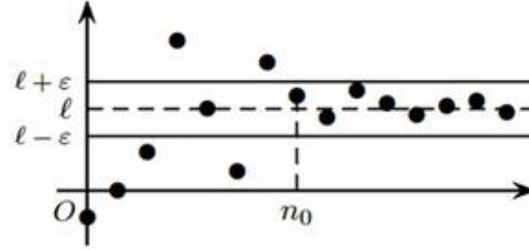
1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2) = -\infty$
3. Plus généralement, pour tout entier  $k \geq 1$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^k) = -\infty$ .
4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$

**Application 2** ♠. En utilisant la définition, montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n + 6) = +\infty$ .

### 1.2.2 Limite finie

**Définition 1.6.** On dit qu'une suite  $(u_n)$  a pour limite un réel  $\ell$  si pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq n_0$ , on a  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ .

*Remarque.* Autrement dit, une suite  $(u_n)$  a pour limite un réel  $\ell$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang  $n_0$ .



De manière vulgarisée, une suite  $(u_n)$  a pour limite un réel  $\ell$  si le terme  $u_n$  est aussi proche que l'on veut de  $\ell$  lorsque  $n$  est suffisamment grand, c'est-à-dire si les termes de la suite  $(u_n)$  finissent pas s'accumuler autour de  $\ell$ .

**Propriété 1.7. Unicité de la limite**

*Si une suite a pour limite un réel, ce réel est unique.*

*Démonstration ♠.* Supposons qu'une suite  $(u_n)$  a pour limites deux réels  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , et montrons alors que  $\ell_1 = \ell_2$ . Raisonnons par l'absurde, et supposons que  $\ell_1 \neq \ell_2$ .

Posons  $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell_2 - \ell_1| > 0$ .

Puisque  $(u_n)$  a pour limite  $\ell_1$ , il existe un entier  $N_1$  tel que pour tout entier  $n \geq N_1$ ,  $|u_n - \ell_1| < \varepsilon$ .

Puisque  $(u_n)$  a pour limite  $\ell_2$ , il existe un entier  $N_2$  tel que pour tout entier  $n \geq N_2$ ,  $|u_n - \ell_2| < \varepsilon$ .

En posant  $N = \max(N_1; N_2)$ , on obtient pour tout  $n \geq N$  :

$$\begin{cases} |u_n - \ell_1| < \varepsilon \\ |u_n - \ell_2| < \varepsilon \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout  $n \geq N$ , on a :

$$|\ell_2 - \ell_1| = |\ell_2 - u_n + u_n - \ell_1| \leq \underbrace{|\ell_2 - u_n|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell_2 - \ell_1|,$$

ce qui est absurde. Donc  $\ell_1 = \ell_2$  et ainsi la suite  $(u_n)$  a pour limite un unique réel.  $\square$

*Remarque.* On peut désormais noter licitement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  pour signifier qu'une suite  $(u_n)$  a pour limite un réel  $\ell$ .

On donne ci-dessous les limites nulles de quelques suites usuelles.

**Propriété 1.8. Suites de référence de limite nulle**

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

3. Plus généralement, pour tout entier  $k \geq 1$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ .

4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

*Démonstration* ♠. Soit un réel  $\varepsilon > 0$ .

1. On note  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{1}{n}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|u_n| < \varepsilon \iff \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ .

Ainsi, en posant  $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ , on a bien, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n| < \varepsilon$ .

2. On note  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{1}{n^2}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|u_n| < \varepsilon \iff \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ .

Ainsi, en posant  $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil + 1$ , on a bien, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n| < \varepsilon$ .

3. Cette limite est admise.

4. On note  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

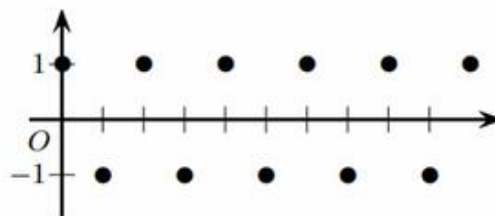
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|u_n| < \varepsilon \iff \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ .

Ainsi, en posant  $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$ , on a bien, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n| < \varepsilon$ .

□

*Remarque.* Notons  $(t_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $t_n = (-1)^n$ .

Tous les termes de la suite  $(t_n)$  valent soit 1 soit  $-1$ . Ils ne s'accroissent donc jamais définitivement près d'un réel. La suite  $(t_n)$  n'admet donc pas de limite (ni finie ni infinie).



**Définition 1.9.** 1. Une suite est dite convergente si elle a une limite réelle.

2. Une suite est dite divergente si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si elle a une limite infinie ou n'a pas de limite.

**Application 3** ♠. En utilisant la définition, montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 5 + \frac{1}{n} \right) = 5$ .

### 1.3 Règles opératoires sur les limites

Dans toute cette section, l'abréviation F.I. signifie « forme indéterminée ». Cette appellation est utilisée pour signifier que l'on ne peut pas conclure immédiatement sur la limite de la suite. Il s'agira alors, lorsque la limite existe, de lever l'indétermination en changeant habilement l'écriture (voir la sous-section 1.3.4).

#### 1.3.1 Somme de limites

**Propriété 1.10. Somme de limites (admise)**  
*Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites, et soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.*

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

*Exemple.* 1. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + n) = +\infty$ .

En effet :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , donc par somme de limites, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + n) = +\infty$ .

2. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} + 4 \right) = 4$ .

En effet :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 = 4$ , donc par somme de limites, on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} + 4 \right) = 4$ .

#### 1.3.2 Produit de limites

**Propriété 1.11. Produit de limites (admise)**  
*Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites, et soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.*

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

*Exemple.* 1. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n^3) = -\infty$ .

En effet :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2) = -2 < 0$ , donc par produit de limites, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n^3) = -\infty$ .

### 1.3. Règles opératoires sur les limites

2. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 1)\sqrt{n} = +\infty$ .

En effet, d'une part on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 1) = +\infty$  par somme de limites. D'autre part :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ , donc par produit de limites, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 1)\sqrt{n} = +\infty$ .

3. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{\sqrt{n}} + 5\right)(n^2 - 4) = +\infty$ .

En effet, d'une part on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{\sqrt{n}} = 0$  par produit de limites, et ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{\sqrt{n}} + 5\right) = 5$  par somme de limites. D'autre part :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 4) = +\infty$  par somme de limites.

Finalement, par produit de limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{\sqrt{n}} + 5\right)(n^2 - 4) = +\infty$ .

#### 1.3.3 Quotient de limites

##### Propriété 1.12. Quotient de limites (admise)

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites, et soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.

1. Cas où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

2. Cas où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple. 1. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0$ .

En effet :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty$  par somme de limites,

et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0$  par quotient de limites.

2. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{n} + 7}{8 + \frac{2}{n}} = \frac{7}{8}$ .

En effet, d'une part on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{5}{n} + 7 \right) = 7$  par somme de limites. D'autre part :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 8 + \frac{2}{n} \right) = 8$  par somme de limites, et ainsi, par quotient de limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{n} + 7}{8 + \frac{2}{n}} = \frac{7}{8}$ .

3. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + 5n^3}{1 - \frac{1}{n^2}} (e^{-n} - 2) = -\infty$ .

En effet, d'une part, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + 5n^3) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) = 1$ , donc par quotient de limites, on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + 5n^3}{1 - \frac{1}{n^2}} = +\infty$ . D'autre part, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-n} - 2) = -2$  par somme de limites et ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + 5n^3}{1 - \frac{1}{n^2}} (e^{-n} - 2) = -\infty$  par produit de limites.

**Application 4.** Déterminer chacune des limites ci-dessous.

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2n - \frac{1}{n} \right)$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 3n\sqrt{n} - 5 + \frac{\sqrt{2}}{n^2} \right)$
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 5 - \frac{2\sqrt{3}}{n^2\sqrt{n}} \right) (2 - e^n)$
4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{4 + n}{-2 + \frac{1}{n}} - e^4 \right)$

### 1.3.4 Formes indéterminées

Les quatre cas de formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{et} \quad \frac{0}{0}.$$

---

1. Voir l'exemple qui suit la propriété 1.19 qui indique que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$ , donc par quotient de limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1/e^n = 0$ .

### 1.3. Règles opératoires sur les limites

Dans chacun de ces cas d'indétermination, il n'est pas possible de déterminer, en l'état, la limite éventuelle de la suite en question.

Il existe plusieurs méthodes pour lever les indéterminations. Ces méthodes consistent pour l'essentiel à modifier habilement l'écriture de la suite afin d'obtenir une forme dont les théorèmes d'opérations présentés ci-dessus permettent de déterminer la limite éventuelle.

*Exemple.* 1. On cherche à calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 3n + 2)$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n + 2) = -\infty$ , nous avons une indétermination de la forme «  $+\infty - \infty$  ».

Afin de lever l'indétermination, on factorise par le terme prépondérant, comprendre qui tend « le plus vite » vers l'infini. Il s'agit ici du terme de plus haut degré, soit  $n^2$ .

On obtient, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$n^2 - 3n + 2 = n^2 \left( 1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right).$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = 1$  par somme de limites.

Par ailleurs, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ .

Par conséquent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left( 1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = +\infty$  par produit de limites.

Finalement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 3n + 2) = +\infty$ .

2. On cherche à calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 4}{30\sqrt{n} + 1}$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^2 + 4) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (30\sqrt{n} + 1) = +\infty$ , nous avons une indétermination de la forme «  $\frac{+\infty}{+\infty}$  ».

De la même manière, afin de lever l'indétermination, on factorise le numérateur par le terme prépondérant (ici  $n^2$ ) et le dénominateur par le terme prépondérant (ici  $\sqrt{n}$ ).

On obtient, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$\frac{2n^2 + 4}{30\sqrt{n} + 1} = \frac{n^2 \left( 2 + \frac{4}{n^2} \right)}{\sqrt{n} \left( 30 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)} = n\sqrt{n} \times \frac{2 + \frac{4}{n^2}}{30 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \quad \text{car } \frac{n^2}{\sqrt{n}} = n\sqrt{n}.$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{4}{n^2} \right) = 2$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 30 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 30$ , donc par quotient

de limites, on obtient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{4}{n^2}}{30 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{15}$

Par ailleurs, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} = +\infty$ .

Par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} \times \frac{2 + \frac{4}{n^2}}{30 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = +\infty$  par produit de limites.

Finalement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 4}{30\sqrt{n} + 1} = +\infty$ .

3. On cherche à calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n^2 + 1})$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} = +\infty^2$ , nous avons une forme indéterminée de la forme «  $+\infty - \infty$  ».

Cette fois-ci, pour lever l'indétermination nous allons multiplier et diviser le nombre  $n - \sqrt{n^2 + 1}$  par sa quantité conjuguée  $n + \sqrt{n^2 + 1}$  (strictement positive).

On obtient, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{aligned} n - \sqrt{n^2 + 1} &= \frac{(n - \sqrt{n^2 + 1})(n + \sqrt{n^2 + 1})}{n + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \frac{n^2 - (n^2 + 1)}{n + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \frac{-1}{n + \sqrt{n^2 + 1}}. \end{aligned}$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \sqrt{n^2 + 1}) = +\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = 0$  par quotient de limites.

Finalement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n^2 + 1}) = 0$ .

### Attention !

Une forme indéterminée ne signifie pas une absence de limite, mais plutôt une impossibilité, en l'état, de conclure sur l'éventuelle limite. Ces formes sont dites indéterminées, précisément dans le sens où tous les comportements sont possibles ! Voici quelques erreurs fréquentes chez les élèves.

1. La forme indéterminée  $\infty - \infty$  ne donne pas forcément 0 !

Par exemple  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n + 1) - n) = 1$ .

On a aussi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - n) = +\infty$ .

Notons enfin que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + (-1)^n) = +\infty$  (voir la section 1.4) et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $(n + (-1)^n) - n = (-1)^n$  n'a pas de limite.

2. Cette limite est obtenue ici uniquement par intuition. Elle est obtenue rigoureusement dans la section suivante à l'aide du théorème de comparaison ou en utilisant la propriété de composition de limites (voir exercice 2.3.)

**2. La forme indéterminée  $0 \times \infty$  ne donne pas forcément 0 !**

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \times n \right) = 1$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \times n^2 \right) = +\infty$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$  (voir la section 1.4) et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\frac{(-1)^n}{n} \times n = (-1)^n$  n'admet pas de limite.

**3. La forme indéterminée  $\frac{+\infty}{+\infty}$  ne donne pas forcément 1 !**

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n} = +\infty$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ , mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = 0$ .

**Application 5.** Déterminer les limites suivantes.

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-7n^3 + 5n + 3)$

4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + n}{n^3 + 4n}$

5.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$

3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n\sqrt{n} - n^2)$

6.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 2n} - (n+1)$

## 1.4 Limites et inégalités

### 1.4.1 Théorème de comparaison

**Théorème 1.13. Théorème de comparaison**

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  et soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que pour tout entier  $n \geq n_0$ , on a  $u_n \leq v_n$ .

1. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

2. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

*Démonstration* ♠. Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  et soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que pour tout entier  $n \geq n_0$ , on a  $u_n \leq v_n$ .

1. Soit un réel  $A > 0$ . On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , donc il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq n_1$ ,  $u_n \geq A$ .

On pose  $N = \max(n_0; n_1)$ . Il vient alors que pour tout entier  $n \geq N$ ,  $u_n \leq v_n$  et  $u_n \geq A$ .

Finalement, on a montré que pour tout  $A > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq N$ ,  $v_n \geq A$ . Par conséquent :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

2. Se démontre de façon analogue. □

- Exemple.* 1. Soit  $(u_n)$  une suite telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq n^2 + 1$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty$ , d'après le théorème de comparaison, on déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
2. Soit  $(v_n)$  une suite pour laquelle il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $v_n \leq -3n$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n) = -\infty$ , d'après le théorème de comparaison, on déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .
3. On souhaite calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1}$ .  
 Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $n^2 + 1 > n^2 \geq 0$ , donc  $\sqrt{n^2 + 1} > \sqrt{n^2} = n$  car la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .  
 Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} = +\infty$  d'après le théorème de comparaison.

**Application 6.** Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - (-1)^n)$ .

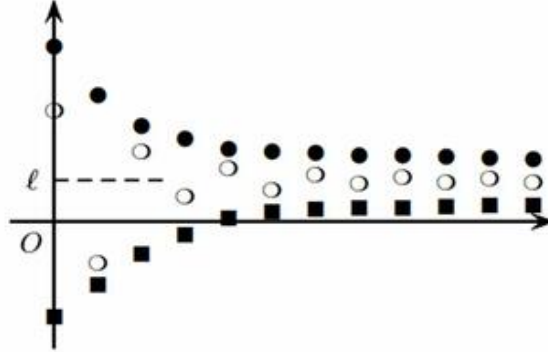
### 1.4.2 Théorème des gendarmes

**Théorème 1.14. Théorème des gendarmes**

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  et soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites. On suppose les hypothèses suivantes :

- les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers un réel  $\ell$  ;
- pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq v_n \leq w_n$ .

Alors la suite  $(v_n)$  est convergente, et sa limite est également égale à  $\ell$ .



*Démonstration* ♠. Soit  $\varepsilon > 0$ . La suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , donc il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq N_1$ ,  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ .

La suite  $(w_n)$  converge vers  $\ell$ , donc il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq N_2$ ,  $|w_n - \ell| < \varepsilon$ .

En posant  $N = \max(n_0, N_1, N_2)$ , on a pour tout entier  $n \geq N$ , 
$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ |u_n - \ell| < \varepsilon \\ |w_n - \ell| < \varepsilon \end{cases},$$

donc  $-\varepsilon < u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell < \varepsilon$ , donc  $-\varepsilon < v_n - \ell < \varepsilon$ , soit  $|v_n - \ell| < \varepsilon$ . Ainsi, la suite  $(v_n)$  converge vers  $\ell$  par définition.  $\square$

*Remarque.* 1. Les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  sont assimilées à des gendarmes et la suite  $(v_n)$  est assimilée à un suspect qui est pris en étau par les gendarmes.

2. Dans les pays anglo-saxons, le théorème des gendarmes est appelé **théorème du sandwich**.

*Exemple.* Notons  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ , donc :  $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ .

D'après le théorème des gendarmes, puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , il vient que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Application 7.** Déterminer les limites suivantes.

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1}\right) \qquad 2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n) + 2 \sin(n)}{n^2}$$

**Application 8.** On note  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_n = 3n - \sqrt{n^2 + 1}.$$

1. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $u_n = n \left(3 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)$ .

2. (a) Établir les inégalités strictes ci-dessous valables pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} < 1 + \frac{1}{n^2}$$

(b) Déduire la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$ .

3. Déterminer alors la limite de la suite  $(u_n)$ .

## 1.5 Suites majorées, minorées, bornées

### 1.5.1 Définitions

**Définition 1.15.** 1. Une suite  $(u_n)$  est dite majorée s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \leq M$ . On dit que  $M$  est un majorant de  $(u_n)$  ou bien que  $(u_n)$  est majorée par  $M$ .

2. Une suite  $(u_n)$  est dite *minorée* s'il existe un réel  $m$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \geq m$ . On dit que  $m$  est un *minorant* de  $(u_n)$  ou bien que  $(u_n)$  est *minorée par  $m$* .
3. Une suite  $(u_n)$  est dite *bornée* si elle est à la fois *majorée* et *minorée*.

*Exemple.* 1. La suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = n^2$  est minorée par 0. Cette suite n'est pas majorée.

2. Notons  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \cos(n)$ .  
Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $-1 \leq u_n \leq 1$ , la suite  $(u_n)$  est minorée par  $-1$  et majorée par  $1$  :  $(u_n)$  est donc bornée.

*Remarque.* Une suite majorée possède une infinité de majorants. En effet, si le réel  $M$  est un majorant de  $(u_n)$ , alors tous les réels supérieurs à  $M$  sont également des majorants de  $(u_n)$ . De même, une suite minorée possède une infinité de minorants.

**Application 9.** On note  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases} .$$

Démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est minorée par 0 et majorée par 4.

### 1.5.2 Convergence des suites monotones

**Propriété 1.16.** 1. Toute suite croissante et non majorée tend vers  $+\infty$ .  
2. Toute suite décroissante et non minorée tend vers  $-\infty$ .

*Démonstration* ♠. Soit une suite  $(u_n)$  et soit un réel  $A > 0$ .

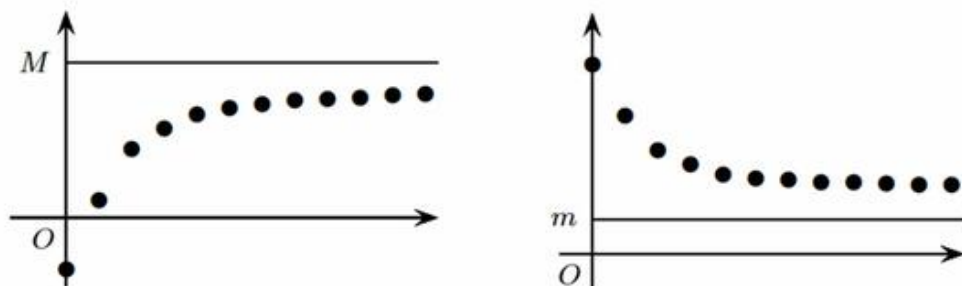
1. On suppose que  $(u_n)$  n'est pas majorée. En particulier, elle n'est pas majorée par  $A$ . Il existe donc  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $u_p > A$ .  
On suppose de plus que la suite  $(u_n)$  est croissante. Donc pour tout  $n \geq p$ , on a  $u_n \geq u_p$ .  
Ainsi, pour tout  $n \geq p$ , on a  $u_n > A$ , et donc  $u_n \geq A$ .  
Finalement, nous avons montré qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq p$ , on a  $u_n > A$ , c'est-à-dire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
2. Se démontre de façon analogue.

□

*Exemple.* La suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = n^2$  est croissante et n'est pas majorée, donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ .

**Théorème 1.17. Théorème de convergence monotone (admis)**

1. Si une suite est croissante et majorée, alors elle converge.
2. Si une suite est décroissante et minorée, alors elle converge.



- Exemple.* 1. La suite  $(v_n)$  définie pour tout entier  $n \geq 1$  par  $v_n = \frac{1}{n}$  est décroissante sur  $\mathbb{N}^*$  et est minorée par 0. Le théorème de convergence monotone permet alors d'affirmer que la suite  $(v_n)$  est convergente.
2. Notons  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

On a déjà vu que la suite  $(u_n)$  est croissante sur  $\mathbb{N}$  (voir la section 1.1.2) et qu'elle est majorée par 4 (voir l'application 9). La suite  $(u_n)$  est donc convergente.

**⚠ Attention !**

Le théorème de convergence monotone ne donne pas la valeur de la limite de la suite, il assure simplement son existence !

**Propriété 1.18.** 1. Si une suite est majorée par un réel  $M$  et converge vers un réel  $\ell$ , alors :  $\ell \leq M$ .

2. Si une suite est minorée par un réel  $m$  et converge vers un réel  $\ell$ , alors :  $\ell \geq m$ .

*Démonstration* ♠.

1. Soit  $(u_n)$  une suite majorée par un réel  $M$  et telle qu'elle converge vers un réel  $\ell$ . Montrons que  $\ell \leq M$ .

Par l'absurde, supposons que  $\ell > M$ . Il existe alors un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $\ell - \varepsilon > M$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ , c'est-à-dire  $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$ .

Par conséquent  $M < u_n$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle  $(u_n)$  est majorée par  $M$ . Donc  $\ell \leq M$ .

2. Se démontre de manière analogue. □

*Remarque.* Autrement dit, si une suite est majorée par un réel  $M$ , minorée par un réel  $m$  et convergente vers un réel  $\ell$ , alors :  $m \leq \ell \leq M$ .

*Remarque.* Le théorème de convergence monotone ne fournit certes pas explicitement la limite de la suite, mais donne toutefois un majorant ou un minorant de cette limite.

*Exemple.* Notons  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

On a vu que la suite  $(u_n)$  est minorée par 0 et majorée par 4 (voir l'application 9) et qu'elle est convergente (voir l'exemple précédent).

Par conséquent, la limite de  $(u_n)$  est comprise entre 0 et 4.

**Application 10.** Notons  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}.$$

1. Démontrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{5x + 4}{x + 2}$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

- (b) Justifier que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell \in [0; 4]$ .

**Application 11 ♠.** Montrer que si une suite est croissante (resp. décroissante) et converge vers un réel  $\ell$ , alors la suite est majorée (resp. minorée) par  $\ell$ .

## 1.6 Limite d'une suite géométrique

### 1.6.1 Limite de la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $q \in \mathbb{R}$

**Propriété 1.19.** Soit  $q$  un réel. Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}.$$

*Démonstration.* Soit  $q$  un réel.

## 1.6. Limite d'une suite géométrique

- Supposons que  $q > 1$ . Il existe donc un réel  $a > 0$  tel que  $q = 1 + a$ .  
D'après l'inégalité de Bernoulli, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q^n = (1+a)^n \geq 1+na$ .  
Mais puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+na) = +\infty$  car  $a > 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$  d'après le théorème de comparaison.
- Supposons que  $-1 < q < 1$ . Procédons par disjonction de cas.
  - Si  $q = 0$ , alors la suite  $(q^n)_{n \geq 1}$  est constante égale à 0, donc on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .
  - Si  $0 < q < 1$ , alors  $\frac{1}{q} > 1$  car la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
D'après le cas précédent, il vient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$ , soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty$ . Par quotient de limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{q^n}} = 0$ , soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .
  - Si  $-1 < q < 0$ , alors  $0 < -q < 1$  et donc d'après le cas précédent, on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-q)^n = 0$ .  
Par ailleurs, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \iff -(-q)^n \leq (-1)^n (-q)^n \leq (-q)^n \text{ car } (-q)^n \geq 0$$

$$\iff -(-q)^n \leq q^n \leq (-q)^n.$$
 D'après le théorème des gendarmes, puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-q)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -(-q)^n = 0$ , il vient que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .
- Supposons que  $q = 1$ . Alors la suite  $(q^n)_{n \geq 1}$  est constante égale à 1, donc on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ .

□

*Remarque.* Si  $q \leq -1$ , la suite  $(q^n)$  n'admet pas de limite.

*Exemple.* 1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$  car  $e > 1$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$  car  $-1 < \frac{1}{3} < 1$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$  car  $-1 < 0,75 < 1$ .

4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$  car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e^{-n} = (e^{-1})^n$  et  $e^{-1} = \frac{1}{e} \in ]-1; 1[$ .

### Application 12.

1. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  géométrique de raison  $q = 0,5$  et de premier terme  $u_0 = -2$ .
2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 6\right)$ .

## 1.6.2 Limite de la somme des termes d'une suite géométrique

**Propriété 1.20.** Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison un réel  $q \in ]-1; 1[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1 - q}.$$

*Démonstration.*  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ , donc par propriété, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{u_0}{1 - q} (1 - q^{n+1}).$$

Puisque  $-1 < q < 1$ , d'après la propriété 1.19, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ , et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q \times q^n = 0 \text{ par produit de limites, c'est-à-dire : } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0.$$

Par produit et somme de limites, on obtient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - q^{n+1}) = 1$ , et par produit de limites, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{1 - q} (1 - q^{n+1}) = \frac{u_0}{1 - q},$$

$$\text{soit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1 - q}.$$

□

*Exemple.* Notons  $(t_n)$  la suite géométrique de raison  $q = 0,2$  et de premier terme  $t_0 = 4$ . On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $T_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$ .

$$\text{Alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{t_0}{1 - q} = \frac{4}{1 - 0,2} = 5.$$

**Application 13.** Calculer la limite suivante.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right].$$

## 1.7 Exercices

**Exercice 1.1 (Sujet bac, Métropole, 2016).** Un loueur de voitures dispose au 1<sup>er</sup> mars 2022 d'un total de 10000 voitures pour l'Europe. Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1<sup>er</sup> mars de chaque année, 25% de son parc automobile et d'acheter 3000 voitures neuves. On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite  $(u_n)$  où, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1<sup>er</sup> mars de l'année 2022 +  $n$ . On a donc  $u_0 = 10000$ .

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,75u_n + 3000$ .

2. On note  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$v_n = u_n - 12000.$$

- (a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $0,75$ . Préciser son premier terme.  
 (b) Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ . Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$ .  
 (c) Justifier que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n = 12000 - 2000 \times 0,75^n.$$

- (d) En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
4. On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11950 voitures.

- (a) Recopier et compléter le programme Python suivant afin qu'il permette de répondre au problème posé.

```

1 U = 10000
2 N = 0
3 while U < .....:
4     N = N + 1
5     U = .....
6 print(...)
```

- (b) Déterminer l'année recherchée.

**Exercice 1.2 (Sujet bac, Nouvelle-Calédonie, 2017).** On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$ ,  $u_1 = 6$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$ .

### Partie A. Conjectures

1. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous nommée `u` prenant en argument un entier naturel  $n$  et renvoyant la valeur de  $u_n$ .

```

1 def u(n):
2     if n == 0:
3         return 3
4     elif n == 1:
5         return 6
6     else:
7         a = 3 #valeur de u_0
8         b = 6 #valeur de u_1
9         for i in range(2, ....):
10            u = ..... #valeur de u_n
11            a = .....
12            b = .....
13    return(....)

```

2. On fait appel à la fonction  $u$  pour quelques valeurs de la variable  $n$ . On présente les résultats dans le tableau ci-dessous, tronqués au millièmes.

$n$	4	5	6	...	21	22	23
$u_n$	6,984	6,996	6,999	...	6,999	6,999	6,999

Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite  $(u_n)$  ?

### Partie B. Étude de la suite

On note  $(v_n)$  et  $(w_n)$  les suites définies pour tout entier naturel  $n$  par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

- Démontrer que  $(v_n)$  est une suite constante.
  - En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$ .
- En utilisant le résultat de la question 1.(b), montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n < u_{n+1} < 15$ .
  - En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente. Que peut-on dire concernant la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)$  ?
- Démontrer que la suite  $(w_n)$  est géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
  - En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ .
  - Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 1.3 (Sujet bac, Am. du Nord, 2017).** Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier  $n \geq 1$ , la somme des

$n$  premiers termes consécutifs est égale au produit des  $n$  premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note  $(u_n)$ . Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$ ,
- pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n \geq 0$ ,
- pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$ .

1. On choisit  $u_0 = 3$ . Déterminer  $u_1$  et  $u_2$ .
2. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$ .  
On a en particulier :  $s_1 = u_0$ .

- (a) Vérifier que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $s_{n+1} = s_n + u_n$  et  $s_n > 1$ .
- (b) En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$

- (c) Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_n > 1$ .
3. (a) Compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il affiche, pour une valeur entière positive de  $n$  donnée, le terme  $u_n$ .

```

1 n = int(input("Entrer une valeur entière positive n
  : "))
2 u = 3
3 s = u
4 for i in range(1, n+1):
5     u = .....
6     s = .....
7 print(.....)

```

- (b) Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de  $u_n$  pour différentes valeurs de l'entier  $n$  :

$n$	0	5	10	20	30	40
$u_n$	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite  $(u_n)$  ?

4. (a) Justifier que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $s_n > n$ .
- (b) En déduire la limite de la suite  $(s_n)$  puis celle de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 1.4 ♠ (Suites adjacentes).** Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites adjacentes si  $(u_n)$  est croissante,  $(v_n)$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ .

### Partie A. Premiers exemples

Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = -\frac{1}{2^n}$  et  $v_n = \frac{1}{2^n}$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ .

### Partie B. Propriétés

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites adjacentes.

1. On note  $(w_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :  $w_n = v_n - u_n$ .
  - (a) Montrer que  $(w_n)$  est décroissante.
  - (b) En utilisant le résultat de l'application 11, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $w_n \geq 0$ .
2.
  - (a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_n \leq v_0$  et  $v_n \geq u_0$ .
  - (b) Dédire que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes.
3. Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont la même limite. On note  $\ell$  leur limite commune.
4. Montrer ensuite que pour tous les entiers naturels  $m$  et  $n$ , on a :

$$u_m \leq \ell \leq v_n.$$

### Partie C. Application

Notons  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies par  $u_0 = 2$  et  $v_0 = 10$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. Notons  $(w_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $w_n = v_n - u_n$ .
  - (a) Montrer que la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison  $\frac{5}{12}$ .
  - (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .
  - (c) Déterminer la limite de  $(w_n)$ .
2. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante.
3. Dédire que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes. On note  $\ell$  leur limite commune.
4. On note  $(t_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$t_n = 3u_n + 4v_n.$$

- (a) Montrer que la suite  $(t_n)$  est constante.
- (b) En déduire que la limite des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  est égale à  $\frac{46}{7}$ .



# Limites de fonction

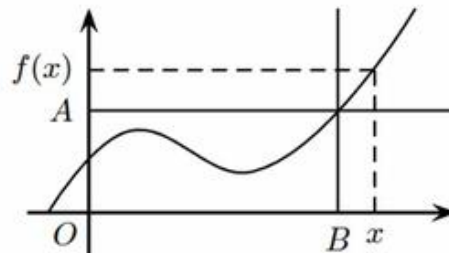
## 2.1 Limite en l'infini

Dans cette section, on considère une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $D_f$  de  $\mathbb{R}$ . On supposera que  $f$  est définie au voisinage de  $+\infty$  (c'est-à-dire qu'il existe un réel  $a$  tel que  $[a; +\infty[ \subset D_f$ ) et au voisinage de  $-\infty$  (c'est-à-dire qu'il existe un réel  $a'$  tel que  $] -\infty; a'] \subset D_f$ ).

### 2.1.1 Limite infinie en l'infini

**Définition 2.1.** On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , et on note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , si pour tout réel  $A > 0$ , il existe un réel  $B > 0$ , tel que pour tout  $x \in D_f$ , si  $x > B$ , alors  $f(x) > A$ .

*Remarque.* Autrement dit, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  si pour tout réel  $A > 0$ , l'intervalle  $[A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand.



De manière vulgarisée, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  si  $f(x)$  est aussi grand que l'on veut lorsque  $x$  est suffisamment grand.

*Remarque.* On introduit de manière analogue les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

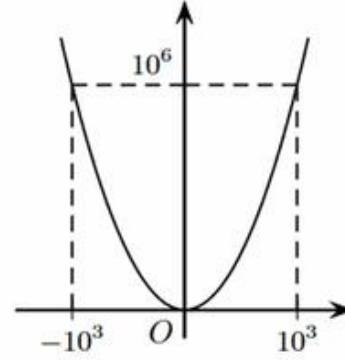
*Exemple.* Notons  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :  $f(x) = x^2$ .

— Il semble ci-contre que  $f(x)$  est aussi grand que l'on veut lorsque  $x$  est suffisamment grand.

On a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

— Il semble ci-contre que  $f(x)$  est aussi grand que l'on veut lorsque  $x$  est suffisamment grand dans les négatifs.

On a donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .



**Propriété 2.2. Fonctions de référence de limite infinie en l'infinie**

1. Pour tout entier  $n \geq 1$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ .

2. Pour tout entier  $n \geq 1$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

*Démonstration* ♠.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto x^n$  définie sur  $[0; +\infty[$ .

Soit un réel  $A > 0$ . Pour tout  $x > \sqrt[n]{A}$ , on a  $x^n > (\sqrt[n]{A})^n$  car la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ , c'est-à-dire  $f(x) > A$ .

Ainsi, en posant  $B = \sqrt[n]{A}$  on a bien pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , si  $x > B$ , alors  $f(x) > A$ . Par conséquent :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ .

2. Ces limites sont admises.

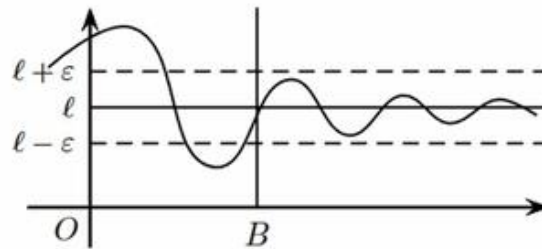
3. Se démontre de manière analogue à 1 en posant  $B = A^2$ .

□

**2.1.2 Limite finie en l'infini et asymptote horizontale**

**Définition 2.3.** On dit que  $f$  a pour limite un réel  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , et on note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ , si pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $B > 0$ , tel que pour tout  $x \in D_f$ , si  $x > B$ , alors  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ .

*Remarque.* Autrement dit, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  (aussi petit soit-il) contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand.



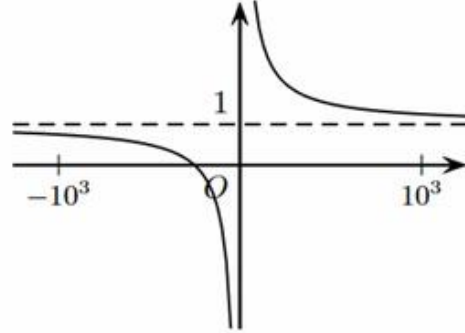
## 2.1. Limite en l'infini

De manière vulgarisée, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  si  $f(x)$  est aussi proche de  $\ell$  que l'on veut lorsque  $x$  est suffisamment grand.

*Remarque.* On introduit de manière analogue la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ .

*Exemple.* Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  dont la courbe représentative est donnée ci-contre. Il semble que  $f(x)$  est aussi proche de 1 que l'on veut :

- lorsque  $x$  est suffisamment grand, on a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ;
- lorsque  $x$  est suffisamment grand dans les négatifs, on a donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ .



### Propriété 2.4. Fonctions de référence de limite nulle en l'infini

1. Pour tout entier  $n \geq 1$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

*Démonstration* ♠.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^n}$  définie sur  $]0; +\infty[$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $x > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ , on a  $x^n > \frac{1}{\varepsilon}$  car la fonction  $x \mapsto x^n$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ . On a alors  $\frac{1}{x^n} < \varepsilon$  car la fonction inverse est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ , c'est-à-dire  $|f(x)| < \varepsilon$ .

Ainsi, en posant  $B = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ , on a bien pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , si  $x > B$ , alors  $|f(x) - 0| < \varepsilon$ . Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

On admet la limite :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ .

2. Se démontre de manière analogue en posant  $B = \frac{1}{\varepsilon^2}$ .

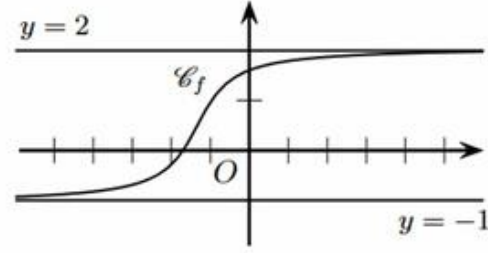
□

**Définition 2.5.** Lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  où  $\ell \in \mathbb{R}$ , on dit que, dans un repère orthonormé, la droite d'équation  $y = \ell$  est asymptote horizontale à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ .

On définit de même une asymptote horizontale en  $-\infty$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ .

*Exemple.* Dans le repère orthonormé ci-contre, on représente la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ .  
Il apparaît graphiquement que :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ , donc la droite d'équation  $y = 2$  est asymptote horizontale à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ , donc la droite d'équation  $y = -1$  est asymptote horizontale à  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$ .



## 2.2 Limite en un réel

### 2.2.1 Limite infinie en un réel et asymptote verticale

**Définition 2.6.** Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D_f$  et soit  $a$  un réel de  $D_f$  (éventuellement,  $a$  est une borne de  $D_f$ ). On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ , et on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , si pour tout réel  $A > 0$ , il existe un réel  $\delta > 0$ , tel que pour tout  $x \in D_f$ , si  $|x - a| < \delta$ , alors  $f(x) > A$ .

*Remarque.* Autrement dit, on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  si pour tout réel  $A$ , l'intervalle  $[A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez proche de  $a$ .

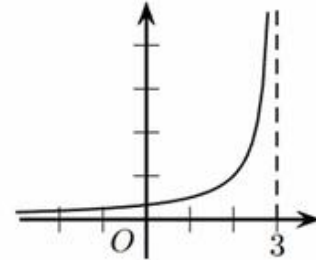
De manière vulgarisée, on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  lorsque la valeur de  $f(x)$  est aussi grande que l'on veut dès que  $x$  est suffisamment proche de  $a$ .

*Remarque.* On introduit de manière analogue la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

*Exemple.* Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $] -\infty; 3[$  dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

Il semble que  $f(x)$  est aussi grand que l'on veut lorsque  $x$  est suffisamment proche de 3.

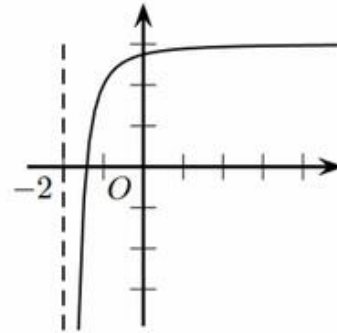
On a donc  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ .



*Exemple.* Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $] -2; +\infty[$  dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

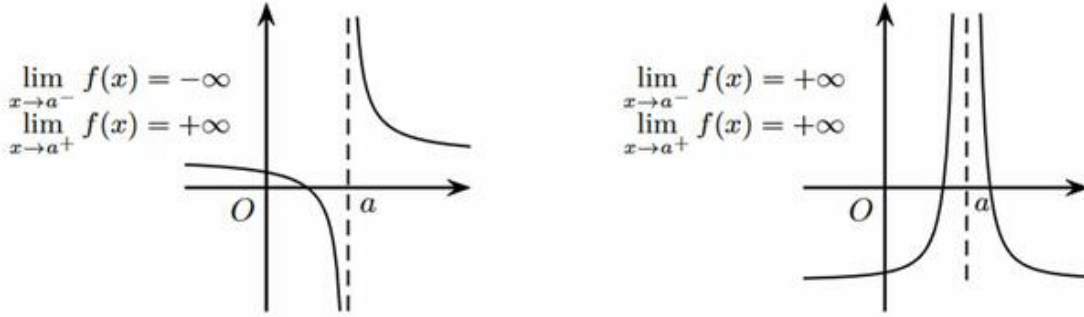
Il semble que  $f(x)$  est aussi grand dans les négatifs que l'on veut lorsque  $x$  est suffisamment proche de  $-2$ .

On a donc  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$ .



## 2.2. Limite en un réel

*Remarque.* Si  $f$  est définie sur  $] -\infty; a[ \cup ]a; +\infty[$ , on étudie les limites « à gauche » et « à droite » en  $a$ , que l'on note  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ , ou plus simplement  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .



### Propriété 2.7. Fonctions de référence de limite infinie en un réel (admise)

Soit  $a$  un réel quelconque.

1. Pour tout entier  $n \geq 1$  :  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ .

2. Pour tout entier  $n \geq 1$  :  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$

*Exemple.* 1.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ , soit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ .

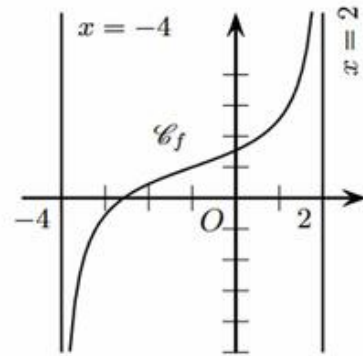
**Définition 2.8.** Lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ , on dit que, dans un repère orthonormé, la droite d'équation  $x = a$  est asymptote verticale à la courbe représentative de  $f$  en  $a$ .

*Exemple.* Dans le repère orthonormé ci-contre, on représente la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  définie sur  $] -4; 2[$ .

Il apparaît graphiquement que :

—  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ , donc la droite d'équation  $x = 2$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$  en 2 ;

—  $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -\infty$ , donc la droite d'équation  $x = -4$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$  en  $-4$ .



**Application 14.** Voici le tableau des variations d'une fonction  $f$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$f$	$-\infty$	$+\infty$	$2$	$+\infty$	$4$	$10$

$\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

1. Préciser le domaine de définition  $D_f$  de la fonction  $f$ .
2. Préciser les limites de  $f$  indiquées dans ce tableau.
3. Quelles conséquences graphiques peut-on déduire pour  $\mathcal{C}$ ?
4. Tracer, à main levée, une allure possible de la courbe  $\mathcal{C}$ .

### 2.2.2 Limite finie en un réel

**Définition 2.9.** Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D_f$ , soit  $a$  un réel de  $D_f$  ou une borne de  $D_f$  et soit un réel  $\ell$ . On dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$ , et on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , si pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\delta > 0$ , tel que pour tout  $x \in D_f$ , si  $|x - a| < \delta$ , alors  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ .

*Remarque.* Autrement dit, on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  (aussi petit soit-il) contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment proche de  $a$ .

De manière vulgarisée, on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  si  $f(x)$  est aussi proche de  $\ell$  que l'on veut dès que  $x$  est suffisamment proche de  $a$ .

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la propriété 3.2.

**Propriété 2.10.** Soit  $a$  un réel.

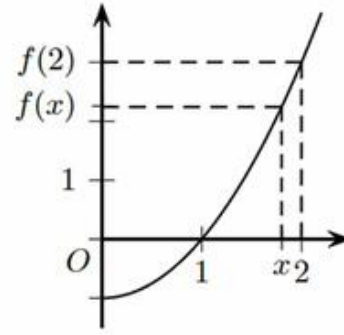
1.  $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$
2. Si  $a \geq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ .
3. Si  $P$  est une fonction polynôme,  $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ .
4. Si  $F$  est une fonction rationnelle définie en  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$

*Exemple.* Notons  $f$  la fonction polynomiale  $x \mapsto x^2 - 1$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

### 2.3. Règles opératoires sur les limites

On prend  $a = 2$ . Lorsque  $x$  est très proche de 2,  $x^2$  est très proche de  $2^2 = 4$ , donc  $f(x) = x^2 - 1$  est très proche de  $4 - 1 = 3$ .

On a donc  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$ .



*Exemple.* On a  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3}{x + 5} = \frac{1^2 - 3}{1 + 5} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ .

## 2.3 Règles opératoires sur les limites

En toute généralité, les propriétés relatives aux opérations sur les limites de suites restent valables pour les fonctions.

Comme pour les suites, l'abréviation F.I. signifie « forme indéterminée ». Elle est utilisée pour signifier que l'on ne peut pas conclure immédiatement sur la limite de la fonction (voir la section 2.3.4).

Dans toute cette section,  $a$  désigne un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

### 2.3.1 Somme de limites

#### Propriété 2.11. Somme de limites (admise)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur le même ensemble de définition, et soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

*Exemple.* 1. On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 3 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$ .

En effet :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , donc par somme de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 3 + \frac{1}{x} \right) = +\infty.$$

2. On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x - 5) = +\infty$ .

En effet :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 5) = +\infty$ , donc par somme de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x - 5) = +\infty.$$

3. On a  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{3}{x} - x \right) = -\infty$ .

En effet :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x} = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{3}{x} - x \right) = -\infty$  par somme de limites.

### 2.3.2 Produit de limites

**Propriété 2.12. Produit de limites (admise)**  
*Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur le même ensemble de définition, et soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.*

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<b>F.I.</b>

*Exemple.* 1. On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$ .

En effet :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 1$ , donc par produit de limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$ .

2. On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3)(4x + 1) = -\infty$

En effet :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x + 1) = +\infty$ , donc par produit de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3)(4x + 1) = -\infty$ .

3. On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x} = +\infty$

En effet :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , donc par produit de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x} = +\infty$ .

4. On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} - 2 \right) (\sqrt{x} - e^5) = -\infty$ .

En effet, d'une part on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} - 2 \right) = -2$  par somme de limites.

D'autre part :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - e^5) = +\infty$  par somme de limites.

Finalement, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} - 2 \right) (\sqrt{x} - e^5) = -\infty$  par produit de limites.

## 2.3.3 Quotient de limites

**Propriété 2.13. Quotient de limites (admise)**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur le même ensemble de définition, et soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.

1. Cas où  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

2. Cas où  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$0$ en res- tant positif	$0$ en res- tant négatif	$0$ en res- tant positif	$0$ en res- tant négatif	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

*Exemple.* 1. On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2) = 2$  (propriété 2.17) et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2}{x^3} + 6 \right) = 6$ ,

donc par quotient de limites :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2}{\frac{2}{x^3} + 6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

2. On a  $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$ . Par ailleurs, on a :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$  en restant positif (on

notera alors :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0^+$ ), donc  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x - 2} = +\infty$ .

**Application 15.** Déterminer chacune des limites ci-dessous.

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x)$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + 5 \right)$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( x^2 + 3x + \frac{1}{x-1} \right)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( x^2 + 3x + \frac{1}{x-1} \right)$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x} - 3}{2x - 4}$

### 2.3.4 Formes indéterminées

A l'instar des suites, les quatre formes indéterminées sont :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{et} \quad \frac{0}{0}.$$

Dans chacun de ces cas d'indétermination, il n'est pas possible de déterminer, en l'état, la limite éventuelle de la fonction en question.

Il existe plusieurs méthodes pour lever les indéterminations. Ces méthodes consistent pour l'essentiel à modifier habilement l'écriture de la fonction afin d'obtenir une forme dont les théorèmes d'opérations présentés ci-dessus permettent de déterminer la limite éventuelle.

*Exemple.* 1. On cherche à calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{2x^2 - 3}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 + 2x + 1) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 3) = +\infty$ , nous avons

une indétermination de la forme «  $\frac{+\infty}{+\infty}$  ».

Dans le cas d'une fonction rationnelle, on factorise le numérateur et le dénominateur par la puissance de  $x$  de plus haut degré.

On obtient ici, pour tout réel  $x \neq 0$  et tel que  $2x^2 - 3 \neq 0$  :

$$\frac{3x^4 + 2x + 1}{2x^2 - 3} = \frac{x^4 \left( 3 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)}{x^2 \left( 2 - \frac{3}{x^2} \right)} = \frac{x^2 \left( 3 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)}{2 - \frac{3}{x^2}}.$$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) = 3$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ , donc par produit de

limites, il vient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 3 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty$ .

Par ailleurs, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{3}{x^2} \right) = 2$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left( 3 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)}{2 - \frac{3}{x^2}} =$

$+\infty$  par quotient de limites.

Finalement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{2x^2 - 3} = +\infty$ .

2. On cherche à calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x}{\sqrt{x} - 1}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 1) = +\infty$ , nous avons une

indétermination de la forme «  $\frac{-\infty}{+\infty}$  ».

Pour lever l'indétermination, on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme prépondérant, comprendre le terme dont la croissance (ou la décroissance) est « la plus rapide » en  $+\infty$ .

On obtient ici, pour tout réel  $x > 0$  et distinct de 1 :

$$\frac{1-x}{\sqrt{x}-1} = \frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{x}{\sqrt{x}} \times \frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt{x} \times \frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

D'une part, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}-1\right) = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$ , donc par

quotient de limites, il vient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = -1$ .

D'autre part, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ .

Par conséquent, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \times \frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = -\infty$  par produit de limites.

Finalement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{\sqrt{x}-1} = -\infty$ .

3. On cherche à calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2-2x+1) = 1-2+1 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 1-1 = 0$ , nous

avons une indétermination de la forme «  $\frac{0}{0}$  ».

Afin de lever cette indétermination, il suffit simplement de remarquer que pour tout réel  $x$ ,  $x^2-2x+1 = (x-1)^2$ . Par conséquent, il vient :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0.$$

4. On cherche à calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x-1) = e^0-1 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , nous avons une indétermi-

nation de la forme «  $\frac{0}{0}$  ».

Afin de lever cette indétermination, il suffit de se rappeler que la fonction  $x \mapsto \exp(x)$  est dérivable en 0, donc<sup>1</sup> :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} = \exp'(0) = 1.$$

---

1. Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction définie sur  $I$  et  $a \in I$ . On rappelle que  $f$  est dérivable en  $a$  s'il existe un réel  $\ell$  tel que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$ . Dans ce cas,  $\ell$  est appelé le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  et est notée :  $\ell = f'(a)$ .

### ⚠ Attention !

A l'instar des suites, une forme indéterminée ne signifie pas une absence de limite, mais plutôt une impossibilité, en l'état, de conclure ! En somme, on peut se rappeler qu'une forme indéterminée est plutôt une forme à déterminer !

**Application 16.** Déterminer chacune des limites ci-dessous.

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x - 1}{-5x^2 + x - 2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3}{\sqrt{x} + 1}$
3.  $\lim_{x \rightarrow (1/2)} \frac{4x^2 - 4x + 1}{(2x - 1)(x + 3)}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{5}}{x}$

## 2.4 Limites et inégalités

### 2.4.1 Théorème de comparaison

#### Théorème 2.14. Théorème de comparaison

Soit  $a$  un réel, et soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur l'intervalle  $I = [a; +\infty[$  telles que pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x)$ .

1. Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .
2. Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

*Démonstration* ♠.

1. Soit  $A > 0$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , il existe un réel  $B > 0$  tel que pour tout  $x \in I$ , si  $x > B$ , alors  $f(x) > A$ .  
Or, pour tout  $x \in I$ ,  $g(x) \geq f(x)$ , donc si  $x > B$ , alors  $g(x) \geq f(x) > A$ , et donc  $g(x) > A$ .  
Nous avons donc montré qu'il existe  $B > 0$  tel que pour tout  $x \in I$ , si  $x > B$ , alors  $g(x) > A$ . D'où :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .
2. Se démontre de manière analogue.

□

*Remarque.* 1. On a un énoncé équivalent en  $-\infty$  avec  $I = ]-\infty; a]$ .

2. On a également un énoncé équivalent en un réel  $b$  avec un intervalle ouvert contenant  $b$ .

## 2.5. Fonction exponentielle et limites en l'infini

*Exemple.* Notons  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par  $f(x) = x + \cos(x)$ . Pour tout réel  $x \geq 0$ , on a  $\cos(x) \geq -1$ , donc  $x + \cos(x) \geq x - 1$ , soit :

$$f(x) \geq x - 1.$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ , donc d'après le théorème de comparaison,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**Application 17.** Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2}$ .

### 2.4.2 Théorème des gendarmes

**Théorème 2.15. Théorème des gendarmes (admis)**

Soit  $a$  un réel, et soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur l'intervalle  $I = [a; +\infty[$ . On suppose les hypothèses suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ , où  $\ell$  est un réel;
2. pour tout  $x \in I$ ,  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ .

Alors l'assertion suivante est vraie :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

*Remarque.* 1. On a un énoncé équivalent en  $-\infty$  avec  $I = ]-\infty; a]$ .

2. On a un énoncé équivalent en un réel  $b$  avec un intervalle ouvert contenant  $b$ .

*Exemple.* Notons  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in ]1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\cos(x)}{x+1}$ . Pour tout réel  $x > 1$ , on a  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ , donc en divisant par  $x+1 > 2 > 0$ , on obtient :

$$\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos(x)}{x+1} \leq \frac{1}{x+1} \quad \text{soit :} \quad \frac{-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}.$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ , donc par quotient de limites, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ . D'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**Application 18.** Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cos(x) + 1}{x^2 + 1}$ .

## 2.5 Fonction exponentielle et limites en l'infini

### 2.5.1 Limites de la fonction exponentielle

**Lemme 2.16.** Pour tout réel  $x$ , on a :

$$e^x \geq x + 1.$$

*Démonstration.* Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto e^x - x - 1$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
 Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $f'(x) = e^x - 1$ .  
 Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f'(x) > 0 \iff e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$$

On dresse alors le tableau de signe de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$  et on déduit le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	0	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Il apparaît donc que 0 est le minimum de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$ , soit :  $e^x - x - 1 \geq 0$ , soit encore :  $e^x \geq x + 1$ . □

**Propriété 2.17.** 1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$   
 2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

*Démonstration.*

1. D'après le lemme 2.16, pour tout réel  $x$ , on a  $e^x \geq x + 1$ .  
 Mais puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$ , il vient que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  d'après le théorème de comparaison.
2. On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , donc par composition de limites (exercice 2.3.) :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$ , soit :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ . □

### 2.5.2 Croissances comparées

**Propriété 2.18. Théorème des croissances comparées avec exp (1)**  
 Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

## 2.5. Fonction exponentielle et limites en l'infini

*Démonstration.* Soit un entier  $n \geq 1$  et soit  $x \in ]0; +\infty[$ .

D'après le lemme 2.16, on a  $e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1} + 1$ , et donc  $e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1}$ .

Puisque la fonction  $x \mapsto x^{n+1}$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ , il vient que :

$$\left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{soit : } e^x \geq \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \times x^{n+1}.$$

En posant  $k = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ , on a  $e^x \geq kx^{n+1}$  avec  $k > 0$ , et donc  $\frac{e^x}{x^n} \geq kx$ .

Or :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} kx = +\infty$  (car  $k > 0$ ), donc d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

□

*Remarque.* A première vue, la limite est de la forme indéterminée  $\frac{+\infty}{+\infty}$ , mais c'est sans compter le fait que la fonction exponentielle tend beaucoup plus rapidement vers  $+\infty$  que la fonction  $x \mapsto x^n$ . Pour un réel  $x$  donné suffisamment grand, le nombre  $e^x$  est bien plus grand que le nombre  $x^n$ , donc le quotient  $e^x/x^n$  reste très grand ! Bref, on retiendra qu'en  $+\infty$ , l'exponentielle remporte la bataille contre n'importe quelle puissance de  $x$ .

*Remarque.* Par quotient de limites, on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^n}} = 0$ , soit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ .

*Exemple.* On souhaite calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3)$ .

Pour tout réel  $x$ , on a  $e^x - x^3 = e^x \left(1 - \frac{x^3}{e^x}\right)$ .

Par croissance comparée, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^3}{e^x}\right) = 1$  par

somme de limites. Mais puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , il vient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x^3}{e^x}\right) = +\infty$  par produit de limites, soit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$ .

### Propriété 2.19. Théorème des croissances comparées avec exp (2)

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

*Démonstration.* Soit un entier  $n \geq 1$ . On a  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ , donc pour tout réel  $x > 0$ ,  $-x^n \leq (-x)^n \leq x^n$ , et donc on obtient :

$$\frac{-x^n}{e^x} \leq \frac{(-x)^n}{e^x} \leq \frac{x^n}{e^x}.$$

Mais puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^n}{e^x} = 0$  d'après la propriété précédente, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-x)^n}{e^x} = 0$  d'après le théorème des gendarmes, soit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)^n e^{-x} = 0$ .  
 Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)^n e^{-x} = 0$ , alors par composition de limites (exercice 2.3.) :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ . □

*Remarque.* A l'instar de la limite précédente, l'exponentielle remporte encore la bataille contre n'importe quelle puissance de  $x$  en  $-\infty$ .

**Application 19.** Calculer les limites suivantes.

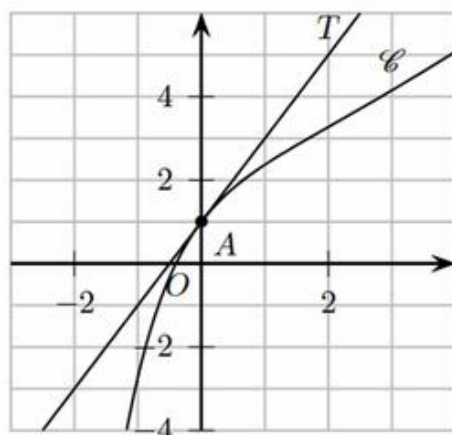
1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x^2 + 2x + 3)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 + 2x + 3)$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x} + x - 1)$
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x + 2e^x - 5}{e^{2x} - 3}$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - x^3 e^x}{e^x + x}$

## 2.6 Exercices

**Exercice 2.1** (Sujet bac, Antilles-Guyane, 2014). On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On donne dans le repère orthonormé ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  ainsi que la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $A$ .



**Partie A. Lecture graphique**

Dans cette partie, on répondra aux questions uniquement par lecture graphique.

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

2. Préciser la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $T$ .
3. Déterminer en justifiant l'équation de la droite  $T$ .

**Partie B. Démonstration**

1. Notons  $g$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :  $g(x) = 1 - x + e^x$ .
  - (a) Déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
  - (b) Dresser le tableau des variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - (c) Déduire le signe de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  puis la limite de  $f + \infty$ .
3. Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $f'(x) = e^{-x}g(x)$ .
4. En déduire le tableau des variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
5. (a) Montrer que l'équation réduite de la tangente  $T$  est  $y = 2x + 1$ .  
 (b) Étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $T$ .

**Exercice 2.2 (Sujet bac, Antilles-Guyane, 2013).**

**Partie A**

Notons  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :  $f(x) = (x + 1)e^x$ .

1. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
2. Démontrer que pour tout réel  $x$ , on a :  $f'(x) = (x + 2)e^x$ .
3. Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

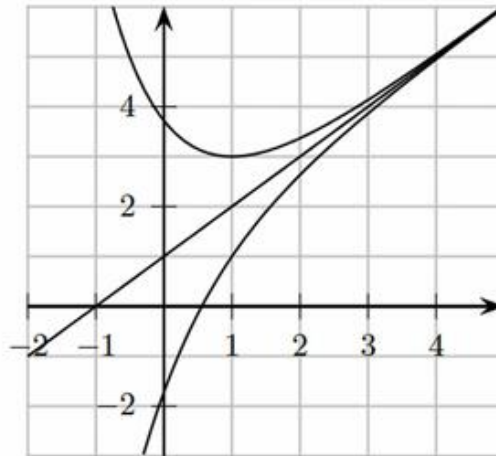
**Partie B**

Soit  $m$  un réel quelconque. On note  $g_m$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x}.$$

On note  $\mathcal{C}_m$  la courbe représentative de la fonction  $g_m$  dans un repère orthogonal du plan.

1. (a) Démontrer que pour réel  $x$ ,  $g_m(x) = 0$  si, et seulement si  $f(x) = m$ .  
 (b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}_m$  avec l'axe des abscisses en fonction du réel  $m$ .
2. On a représenté ci-dessous les courbes  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_e$  et  $\mathcal{C}_{-e}$ .



Identifier chacune de ces courbes sur la figure en justifiant.

3. Étudier la position de la courbe  $\mathcal{C}_m$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x + 1$  suivant les valeurs du réel  $m$ .

**Exercice 2.3 (Composition de limites).** *Avant d'entamer cet exercice, il est nécessaire de lire la section 4.1.1.*

*Notons que la propriété de composition de limites énoncée ci-dessous est au programme de l'écrit du baccalauréat. Sa démonstration est toutefois hors-programme.*

**Propriété.** Soient  $a$ ,  $\ell$  et  $\ell'$  trois réels quelconques, valant éventuellement  $-\infty$  ou  $+\infty$ . Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans un intervalle  $J$ , et soit  $v$  une fonction définie sur  $J$ .

$$\text{Si : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} u(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow \ell} v(x) = \ell' \end{cases}, \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow a} (v \circ u)(x) = \ell'.$$

### Partie A ♠. Démonstration

Le nombre de cas à justifier étant assez nombreux, démontrer le résultat énoncé ci-dessus uniquement lorsque (les autres cas se démontrent de manière analogue) :

1.  $a = +\infty$ ,  $\ell = +\infty$  et  $\ell' = +\infty$ .
2.  $a = +\infty$ ,  $\ell = +\infty$  et  $\ell' \in \mathbb{R}$ .
3.  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\ell = +\infty$  et  $\ell' = +\infty$ .

### Partie B. Exemples

Déterminer les limites suivantes.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+2x-1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{2}{x-1} + 2}$



# Continuité

## 3.1 Notion de continuité

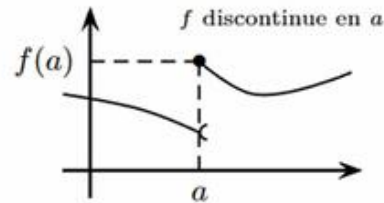
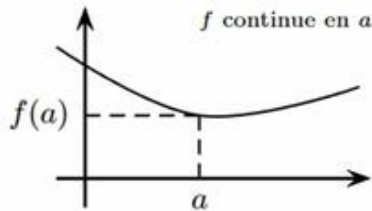
### 3.1.1 Définitions

**Définition 3.1.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

1. On dit que  $f$  est continue en un réel  $a$  de  $I$  si  $f$  admet une limite en  $a$  égale à  $f(a)$ , c'est-à-dire si :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
2. On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si  $f$  est continue en tout réel  $a$  de  $I$ .

*Remarque.* 1. Une fonction  $f$  non continue en un réel  $a$  est dite **discontinue** en  $a$ . On dit aussi que  $a$  est un **point de discontinuité** de  $f$ .

2. Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction discontinue en  $a$  présente un « saut » en  $a$ . Par conséquent, la courbe représentative  $\mathcal{C}$  d'une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  est en « un seul morceau » sur  $I$ , comprendre  $\mathcal{C}$  peut se tracer sans lever le crayon sur  $I$ .



*Remarque.* Soit  $f$  définie sur  $I$  et  $a \in I$ . Notons que :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  équivaut à : pour tout réel  $h$  tel que  $a + h \in I$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$ .

### 3.1.2 Opérations et fonctions continues

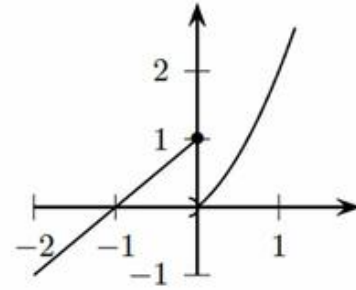
La propriété admise ci-dessous assure que les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition.

**Propriété 3.2. Continuité des fonctions de référence (admise)**

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $x \mapsto x^n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Plus généralement, les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
2. La fonction  $x \mapsto |x|$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .
4. La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .
5. La fonction  $x \mapsto e^x$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

*Exemple.* Étudions la continuité de la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x > 0 \\ x + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$



— Conjectures graphiques. La fonction  $f$  semble continue sur les intervalles  $] -\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$  car la courbe se trace sans lever le crayon sur ces deux intervalles.

La courbe présente un saut en 0 (on doit lever le crayon en 0), donc la fonction  $f$  n'est visiblement pas continue en 0.

La fonction  $f$  n'étant pas continue en 0, elle n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ .

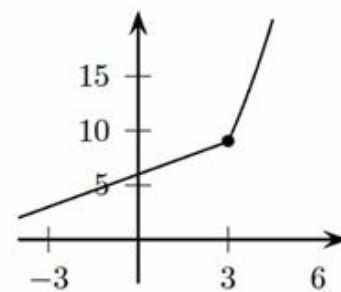
— Preuve. La fonction  $f$  est continue sur  $] -\infty; 0[$  en tant que fonction affine et est continue sur  $]0; +\infty[$  en tant que fonction polynôme.

La fonction  $f$  est-elle continue en 0? On a :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0$  et  $f(0) = 0 + 1 = 1$ , donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$  et ainsi, la fonction  $f$  n'est pas continue en 0.

Par conséquent,  $f$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ .

*Exemple.* Étudions la continuité de la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x \leq 3 \\ x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}.$$



— Conjectures graphiques. La fonction  $f$  semble continue sur  $\mathbb{R}$  car la courbe est en un seul morceau.

### 3.1. Notion de continuité

— Preuve. La fonction  $f$  est continue sur  $] -\infty ; 3[$  en tant que fonction affine et est continue sur  $]3 ; +\infty[$  en tant que fonction polynôme.

La fonction  $f$  est-elle continue en 3? On a :  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 6) = 3 + 6 = 9$  et  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 = 3^2 = 9$ .

De plus, on a :  $f(3) = 3 + 6 = 9$ , donc :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3), \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3).$$

Ainsi,  $f$  est continue en 3 et donc sur  $\mathbb{R}$ .

La propriété ci-dessous indique que la somme, le produit et le quotient de fonctions continues sont des fonctions continues.

**Propriété 3.3. Somme, produit et quotient de fonctions continues**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

1. La fonction  $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$  est continue sur  $I$ .
2. La fonction  $fg : x \mapsto f(x) \times g(x)$  est continue sur  $I$ .
3. Si pour tout  $x \in I$ ,  $g(x) \neq 0$ , la fonction  $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$  est continue sur  $I$ .

*Démonstration.* Soit  $a \in I$ . Puisque  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$ , elles sont continues en  $a$ , donc par définition on a :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ .

1. On a  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a)$  par somme de limites, donc  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = (f + g)(a)$ , et ainsi la fonction  $f + g$  est continue en  $a$ .
2. On a  $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = f(a) \times g(a)$  par produit de limites, donc  $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = (fg)(a)$ , et ainsi la fonction  $fg$  est continue en  $a$ .
3. On suppose que pour tout  $x \in I$ ,  $g(x) \neq 0$ . On a  $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$  par quotient de limites, donc  $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$ , et ainsi la fonction  $\frac{f}{g}$  est continue en  $a$ .

Ceci étant vrai pour tout  $a \in I$ , on a bien montré que les fonctions  $f + g$ ,  $fg$  et  $\frac{f}{g}$  sont continues sur  $I$ .

□

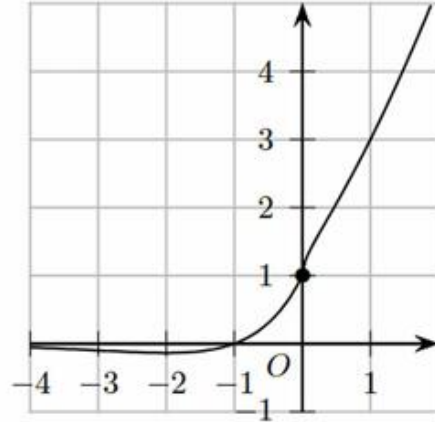
*Remarque.* Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité (et la stricte monotonie) de la fonction sur l'intervalle considéré.

*Exemple.* La fonction  $f : x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .  
En effet, les fonctions  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto \sqrt{x}$  sont continues sur  $[0; +\infty[$ , donc par somme de fonctions continues sur  $[0; +\infty[$ , la fonction  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

**Application 20.** On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x}(x+1) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On donne ci-contre la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  dans un repère du plan.



1. Par lecture graphique, la fonction  $f$  semble-t-elle continue sur  $\mathbb{R}$ ?
2. Dans cette question, on valide la conjecture faite à la question précédente.
  - (a) Étudier la continuité de  $f$  sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .
  - (b) La fonction  $f$  est-elle continue en 0? Conclure.

### 3.1.3 Dérivation et continuité

#### Propriété 3.4. Dérivabilité implique continuité

Toute fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  est continue sur  $I$ .

*Démonstration.* On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soient  $a \in I$  et  $h$  un réel non nul tel que  $a + h \in I$ . Alors on a :

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times h.$$

Par hypothèse,  $f$  est dérivable sur  $I$ , donc elle est en particulier dérivable en  $a$ , et donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ .

Comme  $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$ , par produit de limites on obtient  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = 0$ , soit  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$ , ce qui signifie par définition (voir la remarque qui suit la définition 3.1) que  $f$  est continue en  $a$ .

Ceci étant vrai pour tout  $a \in I$ , nous avons donc bien montré que  $f$  est continue sur  $I$ . □

**⚠ Attention !**

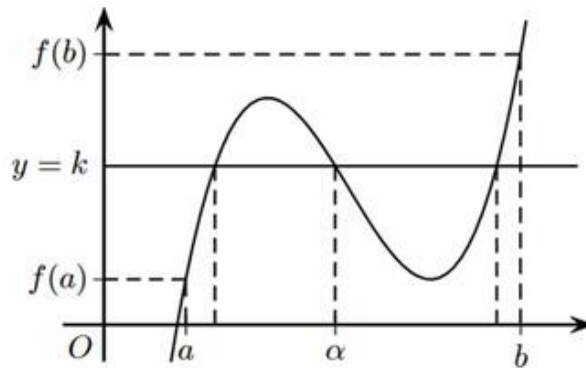
Une fonction continue sur  $I$  n'est pas forcément dérivable sur  $I$  !  
Par exemple, la fonction valeur absolue est continue sur  $\mathbb{R}$  mais n'est pas dérivable sur  $\mathbb{R}$ , car elle n'est pas dérivable en 0.

## 3.2 Le théorème des valeurs intermédiaires

### 3.2.1 Cas général

**Théorème 3.5. Théorème des valeurs intermédiaires**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$ . Alors pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution dans  $[a; b]$ .



*Démonstration* ♠. Cette démonstration fait l'objet de l'exercice 3.3. □

*Remarque.* 1. On peut utiliser aussi des limites si  $f$  n'est pas définie en  $a$  ou  $b$ , ou bien encore des limites en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

2. Dans le cas où 0 est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  (c'est-à-dire si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires), alors l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $[a; b]$ .

*Remarque.* Dans le repère du plan ci-dessus, la droite d'équation  $y = k$  coupe à trois reprises la courbe représentative de la fonction  $f$ , donc l'équation  $f(x) = k$  admet trois solutions dans l'intervalle  $[a; b]$ . En particulier :  $f(\alpha) = k$ .

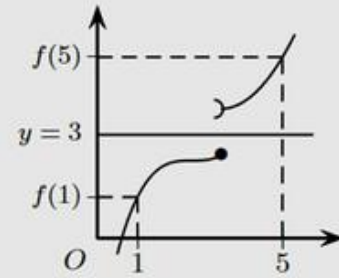
*Exemple.* Soit  $f$  une fonction définie et continue sur l'intervalle  $[-1; 3]$  telle que  $f(-1) = -2$  et  $f(3) = 2$ .

Pour tout réel  $k \in [-2; 2]$ , le théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution dans  $[-1; 3]$ .

### ⚠ Attention !

Dans le théorème des valeurs intermédiaires, l'hypothèse de continuité de la fonction  $f$  est primordiale !

Dans l'exemple ci-contre, la fonction  $f$  n'est pas continue sur l'intervalle  $[1; 5]$ . On a  $3 \in [f(1); f(5)]$  mais l'équation  $f(x) = 3$  n'admet pas de solution sur l'intervalle  $[1; 5]$ .



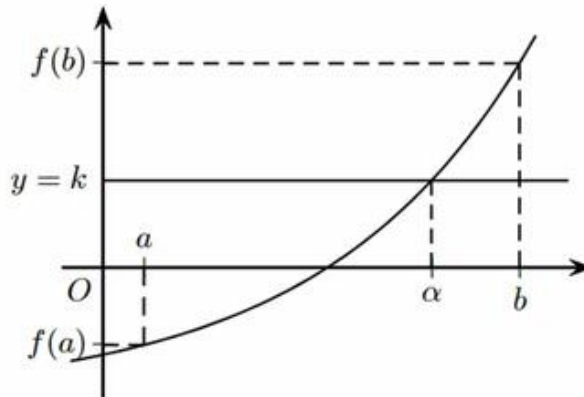
### ⚠ Attention !

Le théorème des valeurs intermédiaires ne permet pas de déterminer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = k$ , ni de calculer explicitement sa ou ses solutions !

## 3.2.2 Cas des fonctions strictement monotones

### Corollaire 3.6. Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , et soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle  $[a; b]$ . Alors pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution dans  $[a; b]$ .



*Démonstration.* Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ ,  $f$  une fonction continue strictement monotone sur l'intervalle  $[a; b]$ ,  $k$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

- Existence. La fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$ , donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel  $\alpha \in [a; b]$  tel que  $f(\alpha) = k$ .
- Unicité. Supposons qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  dans l'intervalle  $[a; b]$  tels que  $f(\beta) = f(\alpha) = k$ , et montrons alors que :  $\alpha = \beta$ .

### 3.2. Le théorème des valeurs intermédiaires

Par l'absurde, supposons que  $\beta \neq \alpha$ , par exemple  $\beta < \alpha$ . Puisque  $f$  est strictement monotone, alors soit  $f(\beta) < f(\alpha)$  (si  $f$  strictement croissante), soit  $f(\beta) > f(\alpha)$  (si  $f$  strictement décroissante). Dans tous les cas, on a  $f(\beta) \neq f(\alpha)$ , ce qui est une contradiction. Ainsi  $\beta = \alpha$ .

□

*Remarque.* 1. On peut aussi étendre ce corollaire aux intervalles ouverts en utilisant les limites.

2. Dans le cas où  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires (c'est-à-dire  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ , ou bien  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$ ), l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[a; b]$ .

*Remarque.* Dans le repère du plan ci-dessus, la droite d'équation  $y = k$  coupe à une seule reprise la courbe représentative de la fonction  $f$ , donc l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[a; b]$ .

*Exemple.* Notons  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :  $f(x) = e^x$ . On donne ci-dessous son tableau des variations sur  $[0; +\infty[$ .

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f$	1	2	$+\infty$

La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ . De plus,  $f(0) = e^0 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Or  $2 \in [1; +\infty[$ , donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution  $\alpha \in [0; +\infty[$ .

**Application 21.** On donne ci-dessous le tableau des variations d'une fonction continue  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$

- Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$  sur  $\mathbb{R}$  en justifiant.
- Résoudre l'inéquation  $f(x) > 0$  dans  $\mathbb{R}$ .

### 3.3 Fonctions continues et suites

**Propriété 3.7. (Admise)** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $I$ . Si  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell \in I$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) \quad \text{soit :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

*Exemple.* 1. Notons  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :  $f(x) = (x+1)^2$ . La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Notons  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :  $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ . Il vient donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(2) = 9.$$

2. On souhaite calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - 0,5^n}$ .

Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  et notons  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :  $u_n = 1 - 0,5^n$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $(u_n)$  est une suite d'éléments de  $\mathbb{R}_+$  et on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \in \mathbb{R}_+$ . Il vient donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - 0,5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(1) = 1.$$

#### Attention !

L'hypothèse de continuité est indispensable ! En effet, reprenons la suite  $(u_n)$  de l'exemple précédent mais considérons cette fois-ci la fonction

$f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :  $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2. \end{cases}$

$f$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$  et on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = 2 \neq f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = 1$ .

**Définition 3.8.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $I$  est stable par  $f$  si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \in I$ .

#### **Théorème 3.9. Théorème du point fixe**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  qui est stable par  $f$ . Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs dans  $I$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} .$$

Si  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell \in I$ , alors  $f(\ell) = \ell$ .

*Démonstration.* On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

Mais d'après la propriété 3.7, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(\ell)$ , d'où  $f(\ell) = \ell$  par unicité de la limite de  $(u_n)$ . □

*Remarque.* Autrement dit,  $\ell$  est une solution sur  $I$  de l'équation  $f(x) = x$ .

*Exemple.* On note  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases} .$$

— On a vu dans le chapitre 1 que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0; 4]$  et que la suite  $(u_n)$  est convergente vers un réel  $\ell \in [0; 4]$ .

— Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$  définie sur  $[0; 4]$ . La fonction  $f$  est donc telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

$f$  est continue sur  $[0; 4]$ . De plus,  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 4]$ , donc pour tout  $x \in [0; 4]$ , on a  $f(x) \in [f(0); f(4)] = [2; 4]$ . Puisque  $[2; 4] \subset [0; 4]$ , l'intervalle  $[0; 4]$  est bien stable par  $f$ .

D'après le théorème du point fixe, la limite  $\ell$  de  $(u_n)$  est solution sur  $[0; 4]$  de l'équation  $f(x) = x$ .

Pour tout  $x \in [0; 4]$ , on a :

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2}x + 2 = x \iff \frac{1}{2}x = 2 \iff x = 4.$$

Finalement :  $\ell = 4$  et ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ .

**Application 22.** On note  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 - \frac{u_n + 1}{e^{u_n}} \end{cases} .$$

1. Étudier les variations de la fonction  $f : x \mapsto 3 - \frac{x+1}{e^x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. (a) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ .  
(b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
3. Montrer que pour tout  $x \in [0; \alpha]$ , on a :  $f(x) \in [0; \alpha]$ .
4. Montrer que la suite  $(u_n)$  est positive, croissante et majorée par  $\alpha$ .
5. Justifier que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

### 3.4 Exercices

Exercice 3.1 (Sujet bac, Polynésie, 2010).

#### Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

Notons  $g$  la fonction définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :  $g(x) = e^x - xe^x + 1$ .

- Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
- Dresser le tableau des variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- (a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution notée  $\alpha$  sur  $[0; +\infty[$ .  
(b) À l'aide de la calculatrice, donner une approximation de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.  
(c) Montrer que  $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$ .
- Déduire le tableau de signe de la fonction  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .

#### Partie B. Étude des variations d'une fonction

Notons  $A$  la fonction définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :  $A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$ .

- Démontrer que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a :

$$A'(x) = \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}.$$

- Déduire le tableau des variations de la fonction  $A$  sur  $[0; +\infty[$ .
- Montrer que la fonction  $A$  admet pour maximum sur  $[0; +\infty[$  le nombre  $4(\alpha - 1)$ .

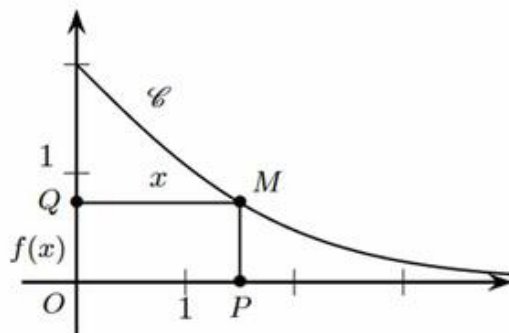
#### Partie C. Étude de la position d'un point sur une courbe

On note  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Pour tout réel  $x$  positif ou nul, on appelle  $M$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $x$ ,  $P$  le point de coordonnées  $(x; 0)$  et  $Q$  le point de coordonnées  $(0; f(x))$ .

$\alpha$  désigne le réel obtenu dans la partie A.



### 3.4. Exercices

1. Pour tout réel  $x \geq 0$ , exprimer l'aire du rectangle  $OPMQ$  en fonction de  $x$ .
2. Démontrer que l'aire du rectangle  $OPMQ$  est maximale lorsque  $M$  a pour abscisse  $\alpha$ . Donner la valeur de cette aire maximale.
3. Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , déterminer  $f'(x)$ .
4. (a) Déterminer le coefficient directeur de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $M$  d'abscisse  $\alpha$ .  
(b) Dédire que la droite  $\mathcal{T}$  est parallèle à la droite  $(PQ)$ .

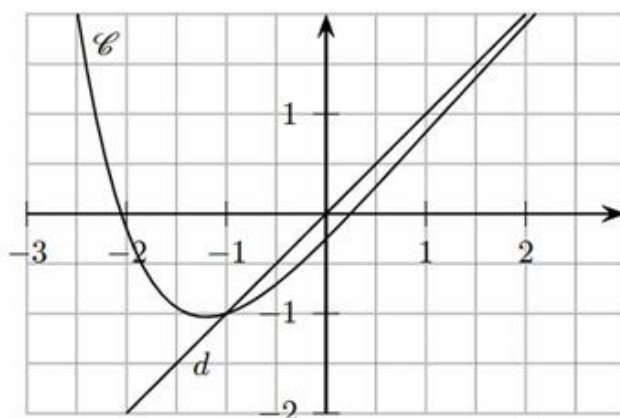
#### Exercice 3.2 (Type bac).

##### Partie A. Étude d'une fonction

On donne ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = x - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x},$$

ainsi que la droite  $d$  d'équation  $y = x$ .



1. (a) Déterminer l'expression algébrique de la fonction  $f'$ , puis l'expression algébrique de la fonction  $f''$ , fonction dérivée de la fonction  $f'$ .  
(b) Dédire les variations de la fonction  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .  
(c) Démontrer que l'équation  $f'(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  telle que  $-1,21 < \alpha < -1,20$ .
2. (a) Dédire de la question précédente les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .  
(b) Démontrer que si  $x$  appartient à l'intervalle  $I = [-1; 0]$ , alors  $f(x)$  appartient également à  $I$ .

##### Partie B. Étude d'une suite

On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. En utilisant la représentation graphique ci-dessus, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence de la suite  $(u_n)$  ?

2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :  $-1 < u_n < 0$ .
- (b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- (c) Dédurre que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite réelle  $\ell$  à déterminer.

**Exercice 3.3 ♠ (Théorème des valeurs intermédiaires).** *La partie C est indépendante des parties A et B.*

### Partie A. Un résultat préliminaire

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$  telle que  $f(a) \times f(b) \leq 0$ .

On souhaite montrer dans cette partie qu'il existe alors  $\alpha \in [a; b]$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

1. Que se passe-t-il si  $f(a) = 0$  ou  $f(b) = 0$ ?

On suppose donc dans la suite que  $f(a) \times f(b) < 0$ , par exemple  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$  (le cas  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$  se traite de la même manière).

On note  $(a_n)$  et  $(b_n)$  les suites définies par  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ b_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}.$$

3. Notons  $(w_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :  $w_n = a_n - b_n$ .

- (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $w_n = \frac{a - b}{2^n}$ .

- (b) Dédurre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \leq b_n$ .

4. Montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante et que la suite  $(b_n)$  est décroissante.

5. (a) Établir que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes<sup>1</sup>.

On note  $\alpha$  la limite commune de  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $a_n \in [a; b]$  et  $b_n \in [a; b]$ , puis montrer que  $\alpha \in [a; b]$ .

---

1. Voir l'exercice 1.4.

(c) En utilisant la propriété 3.7, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(\alpha).$$

6. Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(a_n) \leq 0$  et  $f(b_n) \geq 0$ .

7. Dédurre que  $f(\alpha) = 0$ .

### Partie B. Le théorème

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$  et soit un réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

On souhaite montrer dans cette partie qu'il existe alors  $\alpha \in [a; b]$  tel que  $f(\alpha) = k$ .

1. Que se passe-t-il si  $f(a) = k$  ou  $f(b) = k$ ?

On suppose donc dans la suite que  $f(a) < k < f(b)$  (le cas  $f(b) < k < f(a)$  se traite de la même manière).

2. Notons  $g$  la fonction  $x \mapsto f(x) - k$  définie sur  $[a; b]$ .

(a) Montrer que  $g$  est continue sur  $[a; b]$ .

(b) Montrer que  $g(a) \times g(b) < 0$ .

(c) Conclure en appliquant le résultat préliminaire de la partie A.

### Partie C. Algorithme de dichotomie

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , et soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle  $[a; b]$  telle que  $f(a) \times f(b) < 0$ .

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique  $\alpha \in [a; b]$  tel que  $f(\alpha) = 0$  (voir corollaire 3.6).

En s'inspirant des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies à la partie A, on peut fournir un algorithme, appelé méthode de dichotomie, qui détermine une approximation de  $\alpha$  avec une précision donnée<sup>2</sup>.

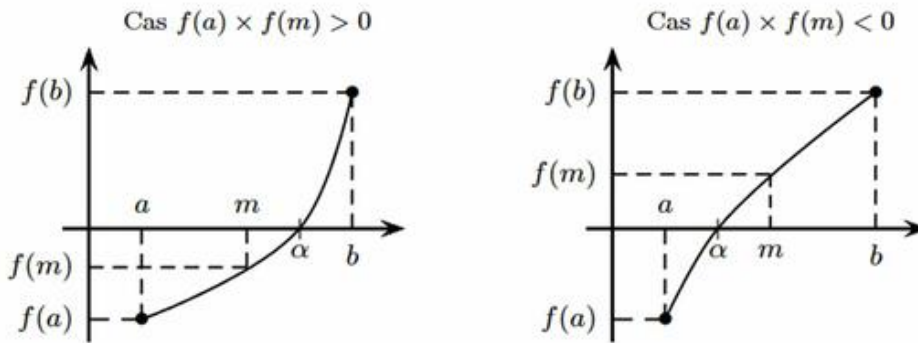
Voici le principe de la méthode de dichotomie :

- on calcule le milieu  $m$  de l'intervalle  $[a; b]$  puis le nombre  $f(m)$ ;
- on distingue trois cas :
  - si  $f(a) \times f(m) = 0$ , c'est-à-dire si  $f(m) = 0$ , l'algorithme s'arrête et retourne  $m$ ;
  - si  $f(a) \times f(m) > 0$ , alors  $\alpha \in [m; b]$ , et on change l'intervalle  $[a; b]$  en l'intervalle  $[m; b]$ ;

2. Plus précisément, les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  à la base de la méthode de dichotomie sont définies par :  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

- si  $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) f(a_n) > 0$ , alors  $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = b_n$ ;
- si  $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) f(a_n) \leq 0$ , alors  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ .

- si  $f(a) \times f(m) < 0$ , alors  $\alpha \in [a; m]$ , et on change l'intervalle  $[a; b]$  en l'intervalle  $[a; m]$ ;
- on réitère ce processus tant que l'amplitude de l'intervalle obtenu est strictement supérieur au seuil que l'on se fixe;
- l'algorithme renvoie la moyenne arithmétique des deux bornes du dernier intervalle obtenu.



1. Compléter la fonction `dichotomie(f, a, b, p)` ci-dessous afin qu'elle renvoie une approximation de  $\alpha$  à  $10^{-p}$  près,  $p$  étant un entier naturel non nul.

```

1 def dichotomie(f, a, b, p):
2     while b - a > 10**(-p):
3         m = .....
4         if f(m) == 0:
5             return .....
6         elif f(a) * f(m) > 0:
7             a = .....
8         else:
9             b = .....
10    return (a + b) / 2

```

2. Faire appel à la fonction précédente pour déterminer une approximation à 0,001 près de la racine de la fonction  $f : x \mapsto e^{0,5x} + x^2 - 4$  sur l'intervalle  $[0; 2]$ .



# Complément de dérivation et convexité

## 4.1 Complément de dérivation

### 4.1.1 Fonctions composées

**Définition 4.1.**  *$I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Soit  $u$  une fonction définie sur  $I$  et à valeurs dans  $J$ , et soit  $v$  une fonction définie sur  $J$ . La composée de  $u$  par  $v$  est la fonction, notée  $v \circ u$  (lire «  $v$  rond  $u$  »), définie pour tout  $x \in I$  par  $(v \circ u)(x) = v(u(x))$ .*

*Exemple.* Notons  $u$  la fonction  $x \mapsto x^2 + 1$  définie sur  $\mathbb{R}$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ ), et notons  $v$  la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ ).

- La fonction  $u \circ v$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = v(x)^2 + 1 = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1.$$

- La fonction  $v \circ u$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout réel  $x$ , on a :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2 + 1}.$$

#### Attention !

1. En toute généralité, on a  $v \circ u \neq u \circ v$ .
2. On veillera à ne pas confondre la fonction  $v \circ u : x \mapsto (v \circ u)(x) = v(u(x))$  définie sur  $I$  avec la fonction  $vu : x \mapsto (vu)(x) = v(x)u(x)$  définie sur  $I \cap J$ .

**Application 23.** Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto e^{x/(x-1)}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Décomposer la fonction  $f$  sous la forme  $v \circ u$  en précisant les fonctions  $u$  et  $v$ .

### 4.1.2 Dérivée d'une fonction composée

**Propriété 4.2. Dérivée d'une fonction composée**

*$I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur  $I$  et à valeurs dans  $J$ , et soit  $v$  une fonction définie et dérivable sur  $J$ . Alors la fonction  $v \circ u$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ , on a :*

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x).$$

*Démonstration* ♠. Soit un réel  $a \in I$ . Il s'agit d'établir l'égalité suivante :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(a)}{x - a} = u'(a) \times v'(u(a)).$$

Pour tout  $y \in J$ , on pose  $\tau(y) = \begin{cases} \frac{v(y) - v(u(a))}{y - u(a)} & \text{si } y \neq u(a) \\ v'(u(a)) & \text{si } y = u(a) \end{cases}$ .

Pour tout  $x \in I$  on a :  $\tau(u(x))(u(x) - u(a)) = v(u(x)) - v(u(a))$ , donc pour  $x \neq a$ , on obtient :

$$\tau(u(x)) \times \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = \frac{v(u(x)) - v(u(a))}{x - a}.$$

D'une part, la fonction  $u$  est dérivable en  $a$ , donc :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = u'(a)$$

D'autre part,  $u$  est continue en  $a$  (puisque  $u$  est dérivable sur  $I$ ), donc  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = u(a)$ . Comme  $v$  est dérivable en  $u(a)$ , on a :  $\lim_{y \rightarrow u(a)} \tau(y) = v'(u(a))$ , donc par composition de limite (voir exercice 2.3.) :

$$\lim_{x \rightarrow a} \tau(u(x)) = v'(u(a)).$$

Il vient par produit de limites :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{v(u(x)) - v(u(a))}{x - a} = u'(a) \times v'(u(a))$ . □

La fonction dérivée de chacune des fonctions dérivables ci-dessous est déduite de la propriété 4.2.

**Propriété 4.3. Dérivées de fonctions composées usuelles**

*Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ .*

1.  $(e^u)' = u'e^u$
2. Pour tout entier  $n \geq 1$  :  $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ .
3. Si  $u$  est strictement positive sur  $I$  :  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ .

#### 4.1. Complément de dérivation

*Exemple.* 1. Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto e^{x^2-3}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) = e^{u(x)}$  où  $u(x) = x^2 - 3$ .

La fonction  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par composition et, pour tout réel  $x$  :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2-3}.$$

2. Notons  $g$  la fonction  $x \mapsto (x^3 - 1)^4$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :  $g(x) = u(x)^4$  où  $u(x) = x^3 - 1$ .

La fonction  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par composition et, pour tout réel  $x$  :

$$g'(x) = 4 \times u'(x) \times u(x)^{4-1} = 12x^2(x^3 - 1)^3.$$

3. Notons  $h$  la fonction  $x \mapsto \sqrt{2x-4}$  définie sur  $]2; +\infty[$ .

Pour tout  $x \in ]2; +\infty[$ , on a :  $h(x) = \sqrt{u(x)}$  où  $u(x) = 2x - 4 > 0$ .

La fonction  $u$  est dérivable sur  $]2; +\infty[$ , donc la fonction  $h$  est dérivable sur  $]2; +\infty[$  par composition et, pour tout  $x \in ]2; +\infty[$  :

$$h'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2}{2\sqrt{2x-4}} = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}.$$

**Application 24.** Notons  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = x\sqrt{2x^2 + 1}.$$

Déterminer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### 4.1.3 Dérivée seconde

**Définition 4.4.**  $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est dite deux fois dérivable sur  $I$  si la fonction dérivée  $f'$  est elle-même dérivable sur  $I$ . La dérivée de  $f'$ , notée  $f''$ , est appelée dérivée seconde de  $f$ .

*Exemple.* Notons  $f$  la fonction polynomiale définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 13x + 9.$$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction polynôme et, pour tout réel  $x$ , on a  $f'(x) = 12x^2 + 4x + 13$ .

$f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction polynôme et, pour tout réel  $x$ , on a  $f''(x) = 24x + 4$ .

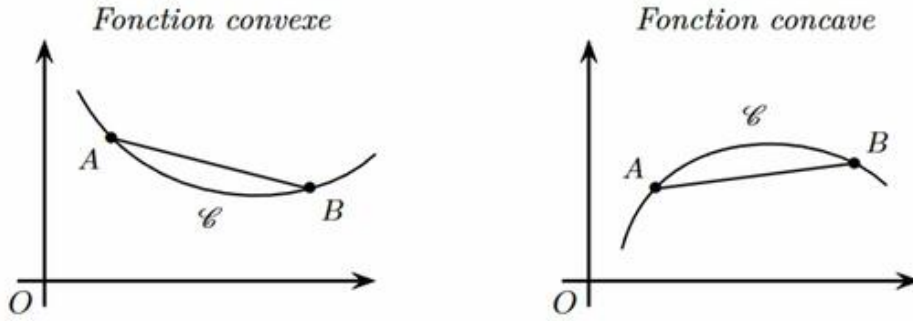
*Remarque.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $f^{(n)}$  la dérivée  $n$ -ième de la fonction  $f$ . En particulier, on a  $f^{(0)} = f$ ,  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$  et  $f^{(3)} = f'''$ .

## 4.2 Convexité

### 4.2.1 Définition

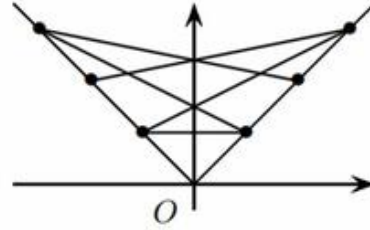
**Définition 4.5.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Notons  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. La fonction  $f$  est dite *convexe* sur  $I$  si, pour tous points distincts  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$ , le segment  $[AB]$  est situé au-dessus de la courbe  $\mathcal{C}$ .
2. La fonction  $f$  est dite *concave* sur  $I$  si, pour tous points distincts  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$ , le segment  $[AB]$  est situé en-dessous de la courbe  $\mathcal{C}$ .



*Remarque.* Le segment  $[AB]$  s'appelle une **corde** de  $f$ . Ainsi,  $f$  est convexe (respectivement concave) sur  $I$  si  $\mathcal{C}$  est située en-dessous (resp. au-dessus) de toutes ses cordes (voir l'exercice 4.4 pour une définition formelle).

*Exemple.* La fonction valeur absolue  $x \mapsto |x|$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  car il apparaît graphiquement que sa courbe représentative est située en-dessous de toutes ses cordes (la courbe est éventuellement confondues avec ses cordes).



*Remarque.* Étudier la **convexité d'une fonction**  $f$  sur un intervalle  $I$ , c'est déterminer si la fonction  $f$  est convexe, concave, ou ni convexe ni concave sur  $I$ . Dans ce dernier cas, étudier la convexité de  $f$  sur  $I$  consiste à déterminer les plus grands intervalles inclus dans  $I$  sur lesquels  $f$  est convexe ou concave.

### 4.2.2 Caractérisations des fonctions convexes dérivables

**Propriété 4.6. Première caractérisation de la convexité**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

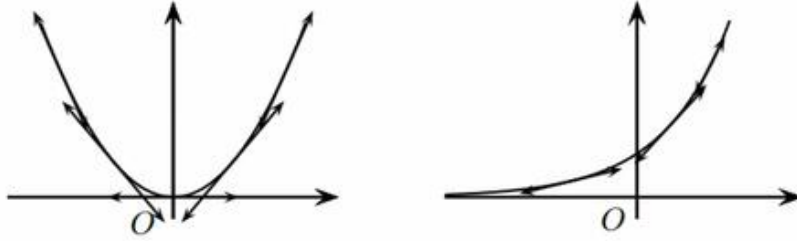
1. La fonction  $f$  est convexe sur  $I$  si, et seulement si sa courbe représentative est située au-dessus de toutes ses tangentes sur  $I$ .
2. La fonction  $f$  est concave sur  $I$  si, et seulement si sa courbe représentative est située en-dessous de toutes ses tangentes sur  $I$ .

## 4.2. Convexité

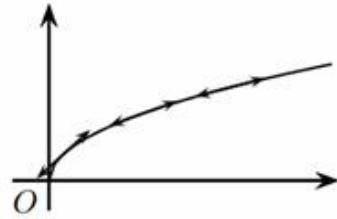
*Démonstration* ♠. La démonstration du sens réciproque fait l'objet de l'exercice 4.4, le sens direct étant admis. □

*Remarque.* En pratique, pour étudier graphiquement la convexité d'une fonction dérivable sur un intervalle donné, il suffit d'imaginer les tangentes à la courbe sur ce même intervalle, puis conclure selon leur emplacement (au-dessus ou en-dessous de la courbe).

*Exemple.* Les fonctions carré et exponentielle sont convexes sur  $\mathbb{R}$  car il apparaît graphiquement que leurs courbes représentatives sont entièrement situées au-dessus de toutes leurs tangentes sur  $\mathbb{R}$ .



*Exemple.* La fonction racine carrée est concave sur  $]0; +\infty[$  car il apparaît graphiquement que sa courbe représentative est entièrement située en-dessous de ses tangentes sur  $]0; +\infty[$ .

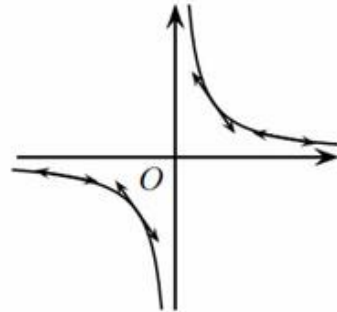


### ⚠ Attention !

La fonction racine carrée n'est pas convexe sur  $\mathbb{R}_+$  tout entier, mais uniquement sur  $\mathbb{R}_+^*$  ! En effet, sa courbe représentative n'admet pas de tangente en 0.

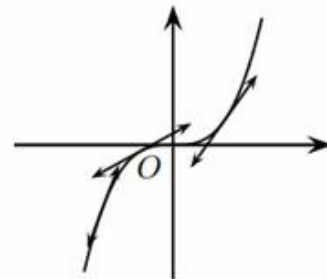
*Exemple.* Il apparaît graphiquement que la fonction inverse est :

- concave sur  $] -\infty; 0[$ ;
- convexe sur  $]0; +\infty[$ .



*Exemple.* Il apparaît graphiquement que la fonction cube est ni convexe ni concave sur  $\mathbb{R}$ . Par contre, il semblerait qu'elle soit :

- concave sur  $] -\infty; 0]$ ;
- convexe sur  $[0; +\infty[$ .



**Propriété 4.7. Deuxième caractérisation de la convexité**

Soit une fonction  $f$  deux fois dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

1. La fonction  $f$  est convexe sur  $I$  si, et seulement si, sa dérivée  $f'$  est croissante sur  $I$ , c'est-à-dire si, et seulement si sa dérivée seconde  $f''$  est positive sur  $I$ .
2. La fonction  $f$  est concave sur  $I$  si, et seulement si, sa dérivée  $f'$  est décroissante sur  $I$ , c'est-à-dire si, et seulement si sa dérivée seconde  $f''$  est négative sur  $I$ .

*Démonstration.* Soit une fonction  $f$  deux fois dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soit  $a \in I$ . Dans un repère du plan, on note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  et  $T_a$  la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$ . Notons que l'équation réduite de la droite  $T_a$  est donnée par  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

Dans cette démonstration, on démontre uniquement le sens réciproque, le sens direct étant admis.

1. Supposons que pour tout  $x \in I$ , on a  $f''(x) \geq 0$  et montrons que la fonction  $f$  est convexe sur  $I$ .

Notons  $\varphi$  la fonction définie sur  $I$  par :

$$\varphi(x) = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a)) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a).$$

La fonction  $\varphi$  est deux fois dérivable sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$ , on a :

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(a) \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = f''(x).$$

Pour tout  $x \in I$ , puisque  $f''(x) \geq 0$ , alors  $\varphi''(x) \geq 0$  et donc la fonction  $\varphi'$  est croissante sur  $I$ .

Or  $\varphi'(a) = 0$ , donc la fonction  $\varphi'$  est négative sur l'intervalle  $] -\infty ; a]$  et positive sur l'intervalle  $[a ; +\infty[$ . Par conséquent, la fonction  $\varphi$  est décroissante sur l'intervalle  $] -\infty ; a]$  et croissante sur l'intervalle  $[a ; +\infty[$ .

Or  $\varphi(a) = f(a) - f'(a)(a - a) - f(a) = 0$ , donc le minimum de la fonction  $\varphi$  est égal à 0, donc pour tout  $x \in I$ ,  $\varphi(x) \geq 0$ , c'est-à-dire :

$$f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a).$$

Cette inégalité traduit le fait que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de sa tangente  $T_a$  sur l'intervalle  $I$ . Ceci étant vrai pour tout  $a \in I$ , on a donc montré que  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de toutes ses tangentes sur  $I$ . D'après la première caractérisation de la convexité,  $f$  est convexe sur l'intervalle  $I$ .

2. Se démontre de manière strictement analogue.

□

*Remarque.* En pratique, pour étudier la convexité d'une fonction  $f$  deux fois dérivable dont l'expression est donnée, on détermine sa dérivée seconde  $f''$  puis on conclut selon son signe.

## 4.2. Convexité

*Exemple.* 1. On note  $f$  la fonction carré  $x \mapsto x^2$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} : f''(x) = 2 \geq 0$ .

On peut donc déduire que la fonction carré est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

2. On note  $f$  la fonction exponentielle  $x \mapsto e^x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} : f''(x) = e^x$ .

On peut donc déduire que la fonction exp est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

3. On note  $f$  la fonction racine carrée  $x \mapsto \sqrt{x}$  définie sur  $\mathbb{R}_+$ .

La fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) =$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ et } f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \leq 0.$$

On peut donc déduire que la fonction racine carré est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

4. On note  $f$  la fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

La fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$\text{et } f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

On dresse le tableau de signes de  $f''$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\frac{2}{x^3}$		-	+

On peut donc déduire que la fonction inverse est concave sur  $] -\infty ; 0[$  et convexe sur  $]0 ; +\infty[$ .

5. On note  $f$  la fonction cube  $x \mapsto x^3$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} : f''(x) = 6x$ .

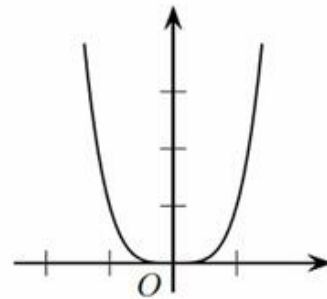
On dresse le tableau de signes de  $f''$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$6x$		-	+

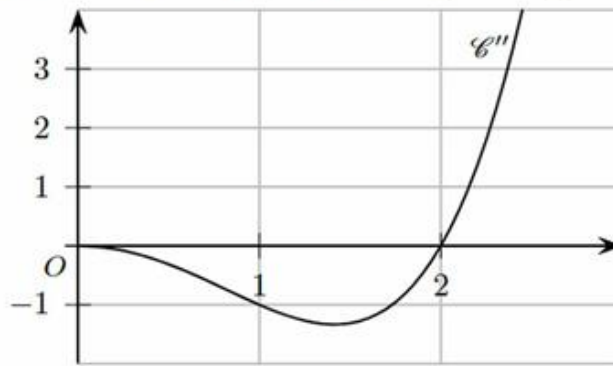
On peut donc déduire que la fonction cube est concave sur  $] -\infty ; 0]$  et convexe sur  $[0 ; +\infty[$ .

*Exemple.* La fonction  $f : x \mapsto x^4$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ . En effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f'(x) = 4x^3$  et  $f''(x) = 12x^2$ , donc  $f''(x) \geq 0$  car  $12 > 0$  et  $x^2 \geq 0$ .

Graphiquement, il apparaît clairement que  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  car sa courbe représentative se situe entièrement au-dessus de toutes ses tangentes sur  $\mathbb{R}$ .



**Application 25.** On a tracé ci-dessous la représentation graphique  $\mathcal{C}''$  de la dérivée seconde  $f''$  d'une fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$ .



Parmi les propositions suivantes, préciser laquelle est vraie en justifiant.

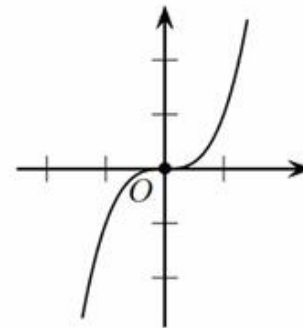
- |                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| 1. $f$ est concave sur $[1; 2]$ . | 3. $f$ est convexe sur $[0; +\infty[$ . |
| 2. $f$ est convexe sur $[0; 2]$ . | 4. $f$ est concave sur $[0; +\infty[$ . |

### 4.2.3 Point d'inflexion

**Définition 4.8.** Un point d'inflexion de la courbe représentative d'une fonction est un point où la courbe traverse sa tangente.

*Exemple.* La tangente à la courbe représentative de la fonction cube  $x \mapsto x^3$  au point  $O(0; 0)$  est l'axe des abscisses.

Il apparaît graphiquement que la courbe représentative de la fonction cube traverse sa tangente en  $O$ . Le point  $O$  est donc un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction cube.



- Remarque.*
1. Au point d'inflexion, la fonction change de convexité. Une courbe peut admettre plusieurs points d'inflexion.
  2. Une fonction convexe ou concave n'admet pas de point d'inflexion.

**Propriété 4.9. Caractérisation d'un point d'inflexion**

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et soit  $a \in I$ . Le point  $A(a; f(a))$  est un point d'inflexion de la courbe représentative de  $f$  si, et seulement si,  $f''(a) = 0$  et  $f''$  change de signe en  $a$ .

*Démonstration.* Dire que  $f''$  s'annule en changeant de signe en  $a$  équivaut à dire que  $f'$  change de sens de variation en  $a$ , qui équivaut à dire que  $f$  change de convexité en  $a$  d'après la propriété 4.7, qui équivaut à dire, par définition, que le point  $A(a; f(a))$  est un point d'inflexion de la courbe représentative de  $f$ . □

## 4.2. Convexité

*Exemple.* On note  $f$  la fonction cube  $x \mapsto x^3$  définie sur  $\mathbb{R}$ .  
On rappelle le tableau de signes de  $f''$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	

On a  $f''(0) = 0$  et  $f''$  change de signe en 0, donc le point  $O(0; f(0))$  c'est-à-dire  $O(0; 0)$  est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction cube  $f$ .

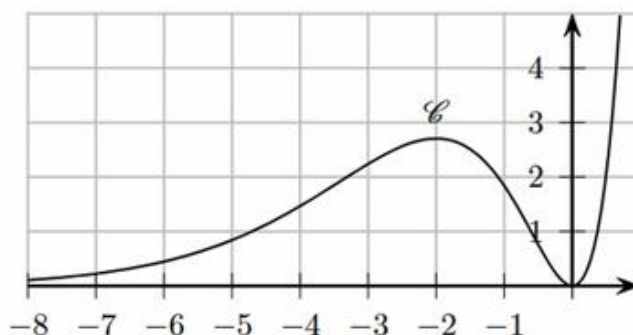
### Attention !

La seule condition  $f''(a) = 0$  n'implique pas en générale que le point  $A(a; f(a))$  est un point d'inflexion ! C'est vrai si en plus  $f''$  change de signe en  $a$ . Par exemple, la fonction  $f : x \mapsto x^4$  est telle que  $f''(0) = 0$ , mais la courbe représentative de  $f$  n'admet pas de point d'inflexion en 0 car  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**Application 26.** Notons  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = 5x^2e^x.$$

La courbe représentative  $\mathcal{C}$  de  $f$  est proposée dans le repère orthogonal du plan ci-dessous.



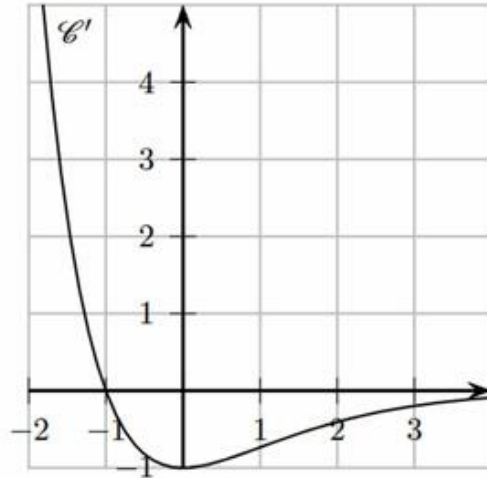
- Par lecture graphique, conjecturer la convexité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ainsi que l'existence d'éventuels points d'inflexion.
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Pour tout réel  $x$ , montrer que :  $f'(x) = 5x(x+2)e^x$ .
  - Étudier le signe de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - Déterminer le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau des variations complet.
- Pour tout réel  $x$ , montrer que :  $f''(x) = 5(x^2 + 4x + 2)e^x$ .
  - Déterminer le signe de la fonction  $f''$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - Retrouver les résultats conjecturés à la question 1.

### 4.3 Exercices

**Exercice 4.1 (Sujet bac, Métropole, 2021).** *Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.*

#### Partie A

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe  $\mathcal{C}'$  représentant la fonction dérivée  $f'$  d'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ .



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique uniquement.

1. Conjecturer le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Conjecturer la convexité de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie B

On admet que la fonction  $f$  mentionnée dans la partie 1 est définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
2. (a) Montrer que, pour tout nombre réel  $x$ , on a :  $f(x) = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}$ .  
 (b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
 (c) Justifier que la courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote que l'on précisera.
3. (a) Montrer que, pour tout nombre réel  $x$ , on a :

$$f'(x) = (-x - 1)e^{-x}.$$

- (b) Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (c) Montrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[-2; -1]$ .

### 4.3. Exercices

4. (a) Déterminer, pour tout nombre réel  $x$ , l'expression de  $f''(x)$  et étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Que représente pour la courbe  $\mathcal{C}$  son point  $A$  d'abscisse 0?

**Exercice 4.2 (Type bac).** On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}.$$

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

**Question préliminaire.** Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $xe^x + 1 > 0$ .

#### Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

Notons  $g$  la fonction définie pour tout réel par :

$$g(x) = x + 2 - e^x.$$

1. Déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Dresser le tableau des variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. (a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  admet exactement deux solutions sur  $\mathbb{R}$ .  
On notera  $\alpha$  et  $\beta$  les solutions avec  $\alpha < \beta$ .
- (b) Déterminer un encadrement de  $\beta$  à  $10^{-2}$  près.
4. En déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie B. Étude de la fonction $f$

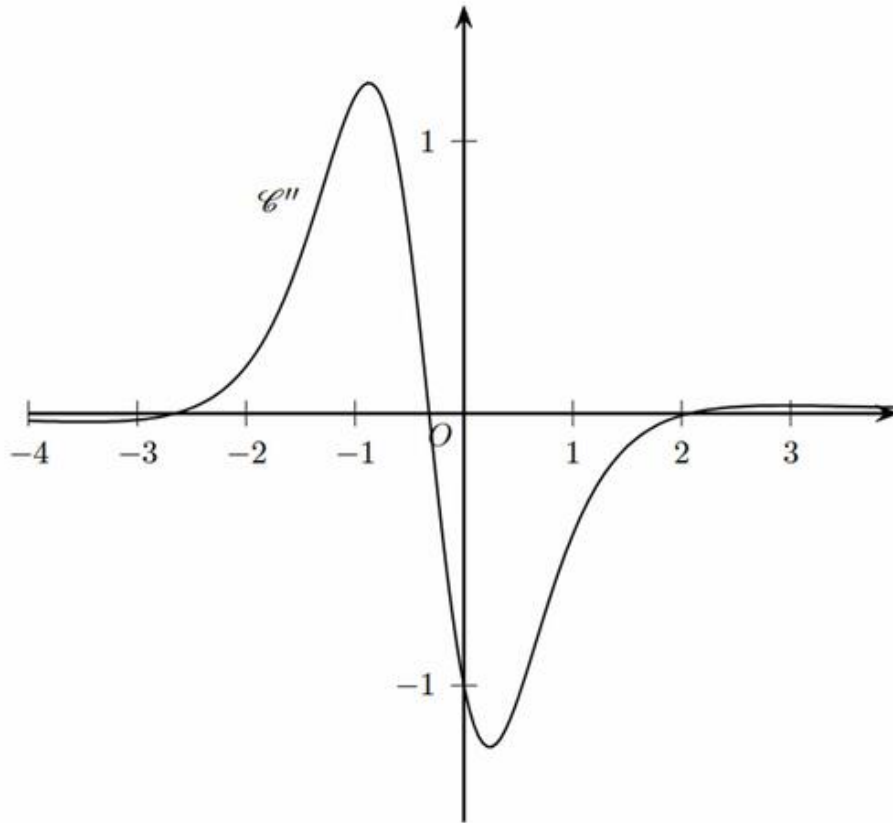
1. (a) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- (b) Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
2. (a) Montrer que, pour tout réel  $x$ , on a :

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}.$$

- (b) En déduire le tableau des variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. (a) Établir que  $f(\beta) = \frac{1}{\beta + 1}$ .
- (b) En utilisant l'encadrement de  $\beta$  établi dans la question 3 de la partie A, donner un encadrement de  $f(\beta)$  d'amplitude  $10^{-3}$ .
4. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.
5. (a) Établir que, pour tout réel  $x$ , on a :

$$f(x) - x = \frac{(x + 1)w(x)}{xe^x + 1} \quad \text{avec } w(x) = e^x - xe^x - 1.$$

- (b) Étudier le sens de variation de la fonction  $w$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - (c) En déduire le signe de  $w$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - (d) Déduire des questions précédentes la position relative de la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $T$ .
6. On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on donne dans le repère orthogonal ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}''$  représentative de la fonction  $f''$ .



Par lecture graphique uniquement et en justifiant, étudier la convexité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 4.3.** Soit  $n$  un entier naturel. On note  $f_n$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + e^x} + nx.$$

On note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les expressions algébriques des fonctions  $f'_n$  et  $f''_n$ .
2. Déduire que si  $n \geq 1$ , alors la fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
3. Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}_n$  admet un seul point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

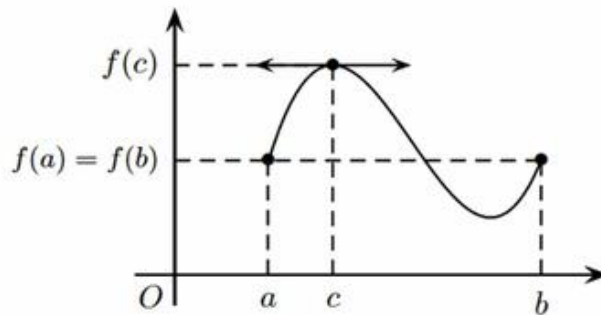
**Exercice 4.4.** ♠ (Théorème des accroissements finis). Pour les besoins de cet exercice, les deux propriétés ci-dessous seront admises.

- **Théorème des bornes atteintes**<sup>1</sup>. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Si  $f$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$ , alors  $f$  admet un minimum et un maximum sur  $[a; b]$ .
- **Condition nécessaire d'existence d'un extremum local**<sup>2</sup>. Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et soit  $a \in I$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $a$ , alors  $f'(a) = 0$ .

### Partie A. Théorème de Rolle

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ , dérivable sur  $]a; b[$  et telle que  $f(a) = f(b)$ .

On souhaite démontrer dans cette partie qu'il existe  $c \in ]a; b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .



1. Examiner le cas où  $f$  est constante sur  $[a; b]$ .
2. On suppose dans cette question que  $f$  n'est pas constante sur  $[a; b]$ . Il existe donc  $t_0 \in [a; b]$  tel que  $f(t_0) \neq f(a)$ , c'est-à-dire tel que  $f(t_0) > f(a)$  ou  $f(t_0) < f(a)$ .  
On supposera dans la suite que  $f(t_0) > f(a)$  (l'autre cas se traite de manière analogue).
  - (a) Montrer qu'il existe  $c \in [a; b]$  tel que pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) \leq f(c)$ .
  - (b) Dédurre que  $f(a) < f(c)$  puis que  $c \in ]a; b[$ .
  - (c) Conclure en sachant que la fonction  $f$  admet un maximum local en  $c$ .

**Application.** Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $[-1; 1]$  et telle que  $f'$  est continue sur  $[-1; 1]$ .

Notons  $g$  la fonction définie pour tout  $x \in [-1; 1]$  par :

$$g(x) = 2x^4 + x + f(x).$$

On suppose que  $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$ .

Montrer qu'il existe  $x \in ]-1; 1[$  tel que  $g'(c) = 0$ .

1. Dans le supérieur, le théorème des bornes atteintes s'énonce élégamment en ces termes : toute fonction continue sur un segment  $y$  est bornée et atteint ses bornes.

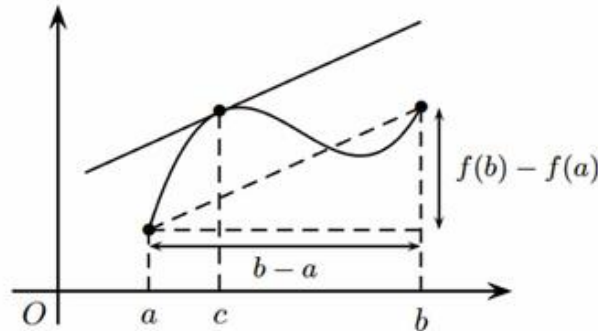
2. On rappelle qu'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  admet un maximum local en un réel  $a$  de  $I$  s'il existe un intervalle ouvert  $J$  inclus dans  $I$  contenant  $a$  tel que, pour tout  $x \in J$ ,  $f(x) \leq f(a)$ . On définit de même un minimum local en inversant le sens de l'inégalité. Un extremum local est un maximum ou un minimum local.

**Partie B. Théorème des accroissements finis**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$ .

On souhaite démontrer dans cette partie qu'il existe  $c \in ]a; b[$  tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Pour ce faire, on note  $g$  la fonction  $x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$  définie sur  $[a; b]$ .

1. Montrer que la fonction  $g$  vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.
2. Appliquer alors le théorème de Rolle à la fonction  $g$  puis conclure.

**Application.** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que si :

- $f$  est continue sur  $I$ ,
- $f$  est dérivable sur  $I \setminus \{a\}$ ,
- $f'$  admet une limite  $\ell$  en  $a$ ,

alors  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$ .

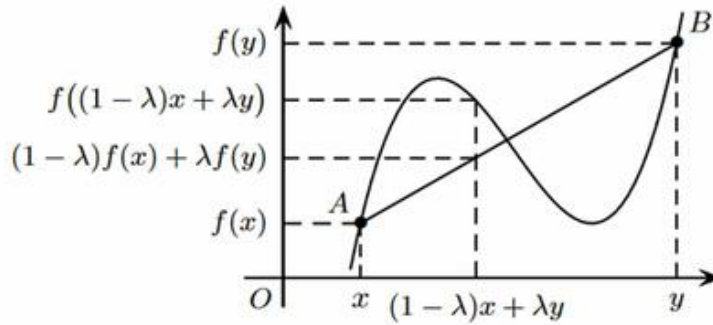
**Exercice 4.5. ♠ (Convexité).** L'objectif de cet exercice est de transcrire formellement la définition graphique de la convexité d'une fonction (définition 4.5), de démontrer le sens réciproque de la première caractérisation de la convexité d'une fonction dérivable (propriété 4.6), puis de démontrer l'inégalité de Jensen.

**Partie A. Définition formelle**

1. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  et soient  $x$  et  $y$  deux réels de  $I$ .
  - (a) Montrer que le segment d'extrémités  $x$  et  $y$  est l'ensemble des réels de la forme  $(1 - \lambda)x + \lambda y$ , où  $\lambda \in [0; 1]$ .

On montre de manière strictement analogue que le segment d'extrémités  $f(x)$  et  $f(y)$  est l'ensemble des réels de la forme  $(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$ , où  $\lambda \in [0; 1]$ .

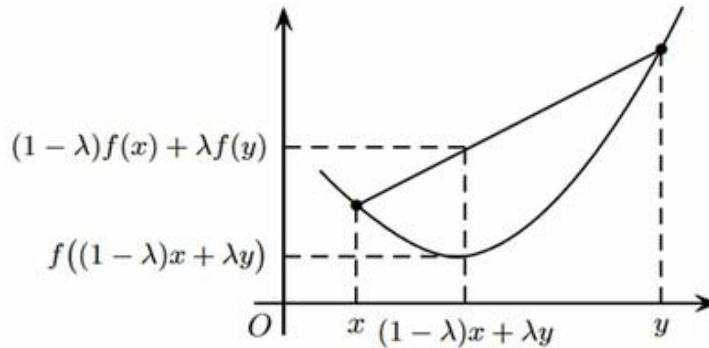
- (b) En notant  $A$  et  $B$  les points de coordonnées respectivement  $(x; f(x))$  et  $(y; f(y))$ , déduire l'ensemble des points définissant le segment  $[AB]$ .



2. Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Notons  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère du plan. Par définition :

- $f$  est convexe sur  $I$  si  $\mathcal{C}$  est en-dessous de toutes ses cordes sur  $I$ , c'est-à-dire, d'après la question 1, si :

$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0; 1], \quad f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y);$$



- $f$  est concave sur  $I$  si  $\mathcal{C}$  est au-dessus de toutes ses cordes sur  $I$ , c'est-à-dire, d'après la question 1, si :

$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0; 1], \quad f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

En utilisant la définition ci-dessus, montrer que la fonction :

- (a)  $x \mapsto |x|$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  ;  
 (b)  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### Partie B. Première caractérisation des fonctions convexes dérivables

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

La première caractérisation de la convexité (propriété 4.6) prétend que  $f$  est convexe sur  $I$  si, et seulement si la courbe représentative de  $f$  est située au-dessus de toutes ses tangentes.

Montrer le sens réciproque de cette propriété (le sens direct est admis).

## Partie C. Inégalité de Jensen

1. Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
Montrer que pour tous  $x_1, \dots, x_n \in I$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0; 1]$  tels que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  :

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

2. **Application.** *Les deux questions qui suivent sont indépendantes.*

- (a) Établir l'inégalité suivante valable pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tous  $a_1, \dots, a_n \in ]0; 1]$  tels que  $a_1 + \dots + a_n = 1$  :

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geq \frac{(n^2 + 1)^2}{n}.$$

- (b) Montrer que pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \in ]0; +\infty[$  et  $b \in [0; +\infty[$  :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{a + kb} \geq (n + 1) \frac{1}{a + \frac{n}{2}b}.$$



# Fonction logarithme népérien

## 5.1 La fonction logarithme népérien

### 5.1.1 Définition

**Définition 5.1.** Pour tout réel  $a > 0$ , l'unique solution<sup>1</sup> de l'équation  $e^x = a$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  est appelée logarithme népérien de  $a$  et est notée  $\ln(a)$ .

*Exemple.* L'équation  $e^x = 5$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  admet une unique solution par définition. Il s'agit de  $\ln(5)$ . À l'aide de la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de  $\ln(5)$  :  $\ln(5) \approx 1,61$ .

**Définition 5.2.** On appelle fonction logarithme népérien, notée  $\ln$ , la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  qui, à tout nombre réel  $x > 0$  associe le réel  $\ln(x)$ .

$$\begin{aligned} \ln : ]0; +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x) \end{aligned}$$

- Remarque.*
1. Pour simplifier, on note parfois  $\ln x$  au lieu de  $\ln(x)$ . Cependant, pour éviter toute ambiguïté, la notation avec la parenthèse est à privilégier.
  2. Par abus de langage, on parle souvent de « fonction logarithme » au lieu de fonction logarithme népérien.

### Attention !

Le logarithme népérien d'un nombre réel négatif n'a pas de sens ! Le logarithme népérien d'un réel strictement positif peut être toutefois négatif.

1. Pour tout réel  $a > 0$ , l'existence et l'unicité de la solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $e^x = a$  proviennent de l'application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires à la fonction  $x \mapsto e^x$ .

Par exemple, à l'aide de la calculatrice, on trouve :  $\ln(0,5) \approx -0,7 < 0$  et  $\ln(0,0002) \approx -8,5 < 0$ .

### 5.1.2 Conséquences de la définition

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition de la fonction logarithme népérien.

**Propriété 5.3.** 1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout réel  $y > 0$ , on a :

$$e^x = y \iff x = \ln(y).$$

2. Pour tout réel  $x > 0$ , on a :  $e^{\ln(x)} = x$ .

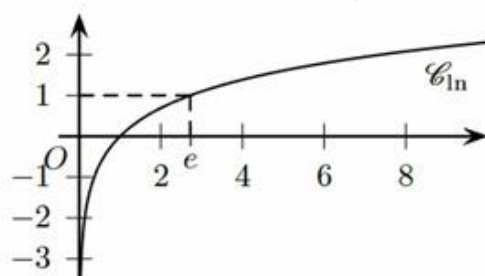
3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $\ln(e^x) = x$ . En particulier :

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1 \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1.$$

*Exemple.*  $e^{\ln(2)} = 2$  et  $\ln(e^2) = 2$ .

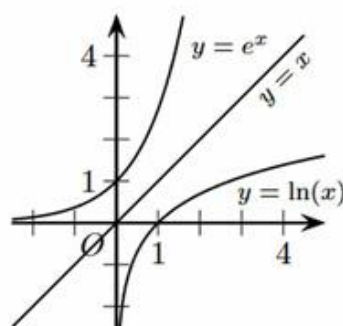
### 5.1.3 Représentation graphique

La représentation graphique  $\mathcal{C}_{\ln}$  de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé :



Cette courbe représentative  $\mathcal{C}_{\ln}$  se déduit simplement de la courbe représentative de la fonction exponentielle grâce au résultat suivant :

**Propriété 5.4. (admise)** Les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$  dans un repère orthonormé.



## 5.2 Propriétés algébriques du logarithme

### 5.2.1 Relation fonctionnelle

**Propriété 5.5. Relation fonctionnelle**

Pour tout réel  $x > 0$  et pour tout réel  $y > 0$ , on a :

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y).$$

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs.

On a d'une part :

$$e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)} \times e^{\ln(y)} = x \times y \quad (1)$$

et d'autre part :

$$e^{\ln(x \times y)} = x \times y, \quad (2)$$

il vient donc de l'égalité entre (1) et (2) que  $e^{\ln(x \times y)} = e^{\ln(x)+\ln(y)}$ , soit  $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque.* On peut généraliser la propriété 5.5 : pour tout entier  $n \geq 1$  et pour tous réels strictement positifs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , on a :

$$\ln(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \dots + \ln(x_n).$$

*Exemple.*  $\ln(6) + \ln(3) + \ln(2) = \ln(6 \times 3 \times 2) = \ln(36)$ .

#### Attention !

Il faut veiller à ne pas confondre la relation fonctionnelle de la fonction  $\ln$  avec celle de la fonction exponentielle qui est :

$$\text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{x+y} = e^x \times e^y.$$

*Remarque.* On dit que la fonction logarithme népérien transforme les produits en sommes tandis que la fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

### 5.2.2 Propriétés algébriques

Les propriétés algébriques de cette section sont des conséquences de la propriété 5.5.

**Propriété 5.6.** Pour tout réel  $x > 0$  et pour tout réel  $y > 0$ , on a :

$$1. \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$2. \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

2. On utilise le résultat suivant : pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $e^x = e^y \iff x = y$ .

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs.

1. En utilisant la propriété 5.5, on a :

$$\ln(x) = \ln\left(\frac{x}{y} \times y\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln(y),$$

donc  $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$  et la première égalité est établie.

2. La deuxième égalité se déduit immédiatement de la première :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(1) - \ln(x) = 0 - \ln(x) = -\ln(x).$$

□

**Propriété 5.7.** Pour tout réel  $x > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$\ln(x^n) = n \ln(x).$$

*Démonstration.* Soient  $x$  un réel strictement positif. Montrons par récurrence que tout entier naturel  $n$ , on a  $\ln(x^n) = n \ln(x)$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété «  $\ln(x^n) = n \ln(x)$  ».

- Initialisation. On a d'une part  $\ln(x^0) = \ln(1) = 0$  et d'autre part  $0 \times \ln(x) = 0$ , donc  $\ln(x^0) = 0 \times \ln(x)$  et ainsi  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Hérité. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $\ln(x^{n+1}) = (n+1) \ln(x)$ .

On a :

$$\begin{aligned} \ln(x^{n+1}) &= \ln(x^n \times x) \\ &= \ln(x^n) + \ln(x) \text{ d'après la propriété 5.5} \\ &= n \ln(x) + \ln(x) \text{ par H.R.} \\ &= (n+1) \ln(x). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

Si  $n \leq -1$ , on a  $\ln(x^n) = \ln\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln(x^{-n})$  d'après la deuxième égalité de la propriété 5.6. Or  $-n \geq 1$ , donc en faisant appel au cas précédent, on a  $\ln(x^{-n}) = -n \ln(x)$ , d'où  $\ln(x^n) = -\ln(x^{-n}) = n \ln(x)$ .

Finalement, nous avons montré que l'égalité est vérifiée pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

□

### 5.3. Étude de la fonction logarithme népérien

*Remarque.* De manière plus générale, on admet l'égalité  $\ln(x^y) = y \ln(x)$  pour tout réel  $x > 0$  et pour tout réel  $y$ . Cette propriété sera utilisée pour résoudre des équations et inéquations comportant des puissances (voir application 29).

**Propriété 5.8.** Pour tout réel  $x > 0$ , on a :

$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x).$$

*Démonstration.* Soit  $x$  un réel strictement positif. En vertu de la propriété 5.5, on a :

$$\ln(x) = \ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x}) = 2 \ln(\sqrt{x})$$

et ainsi  $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$ . □

*Exemple.* 1.  $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

3.  $\ln(\sqrt{5}) = \frac{1}{2} \ln(5)$

2.  $\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln(3) - \ln(4)$

4.  $2 \ln(3) = \ln(3^2) = \ln(9)$

*Exemple.*  $\ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5}) = \ln[(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})] = \ln(3^2 - (\sqrt{5})^2) = \ln(9 - 5) = \ln(4)$ .

#### Application 27.

1. Simplifier les expressions ci-dessous.

(a)  $3 \ln(2) + \ln(5) - 2 \ln(3)$

(b)  $\ln(e^2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)$

2. Vérifier les identités suivantes.

(a)  $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x + 1) - x = \ln(1 + e^{-x})$

(b)  $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = -\ln(\sqrt{1 + x^2} - x)$

## 5.3 Étude de la fonction logarithme népérien

### 5.3.1 Continuité et dérivabilité

**Propriété 5.9.** Dérivabilité de  $\ln$

La fonction logarithme népérien est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

*Démonstration.* On admet que la fonction logarithme népérien est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x > 0$  par :

$$f(x) = e^{\ln(x)} - x.$$

D'après la propriété 5.3, puisque pour tout réel  $x > 0$ ,  $e^{\ln(x)} = x$ , la fonction  $f$  est la fonction nulle. Sa dérivée est également la fonction nulle.

On note  $\ln'$  la fonction dérivée de la fonction  $\ln$ . Alors, pour tout réel  $x > 0$  :

$$f'(x) = \ln'(x)e^{\ln(x)} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire  $\ln'(x)e^{\ln(x)} = 1$ , soit  $\ln'(x) \times x = 1$ , soit encore  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ . □

*Remarque.* D'après la propriété 3.4, puisque la fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , elle est continue sur  $]0; +\infty[$ . Par conséquent, pour tout réel  $a > 0$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow a} \ln(x) = \ln(a)$ .

*Exemple.* Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$  définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

### 5.3.2 Variations, équations et inéquations

**Propriété 5.10. Variations de  $\ln$**

*La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .*

*Démonstration.* On note  $f$  la fonction  $x \mapsto \ln(x)$  définie sur  $]0; +\infty[$ . Alors, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a  $f'(x) = \frac{1}{x}$  d'après la propriété 5.9. Or, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $\frac{1}{x} > 0$ , donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ . □

La propriété ci-dessous est une conséquence de la stricte croissance de la fonction  $\ln$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

**Propriété 5.11. Pour tout réel  $x > 0$  et pour tout réel  $y > 0$ , on a :**

1.  $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$ .
2.  $\ln(x) < \ln(y) \iff x < y$ .

### 5.3. Étude de la fonction logarithme népérien

*Exemple.* On souhaite résoudre l'équation  $3 \ln(x) - 4 = 8$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

- On commence par déterminer l'ensemble de définition  $E$  de l'équation : il est nécessaire que  $x > 0$ , donc  $E = ]0; +\infty[$ .
- On résout ensuite l'équation sur  $E = ]0; +\infty[$  en se ramenant à une équation de la forme  $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$  où  $u$  et  $v$  sont deux fonctions à déterminer strictement positives sur  $E$ .  
Pour tout  $x \in E$ , on a :

$$\begin{aligned} 3 \ln(x) - 4 = 8 &\iff 3 \ln(x) = 12 \\ &\iff \ln(x) = \frac{12}{3} = 4 \\ &\iff \ln(x) = \ln(e^4) \quad (\text{forme souhaitée}) \\ &\iff x = e^4 \in E. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation est  $\mathcal{S} = \{e^4\}$ .

*Exemple.* On souhaite résoudre l'équation  $e^{3x-1} = 3$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .  
Pour ce faire, on compose par la fonction  $\ln$  de part et d'autre de l'égalité.  
Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} e^{3x-1} = 3 &\iff \ln(e^{3x-1}) = \ln(3) \\ &\iff 3x - 1 = \ln(3) \\ &\iff x = \frac{\ln(3) + 1}{3}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation est  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln(3) + 1}{3} \right\}$ .

**Application 28.** Résoudre les équations et inéquations ci-dessous d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

1.  $\ln(1 + 3x) = \ln(x + 1)$ .
2.  $\ln(1 - x) = \ln(x - 2)$ .
3.  $\ln(6x - 1) \geq 2$ .
4.  $e^{2x} + e^x - 6 > 0$
5.  $(2 - x) \ln(x + 3) > 0$

**Application 29.** Résoudre les équations ci-dessous d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

1.  $6^x = 2$
2.  $e^x e^{2x+1} = 2$

### 5.3.3 Limites

**Propriété 5.12. (admise)**

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

*Remarque.* 1. Par symétrie, ces limites se déduisent graphiquement de celles de la fonction exponentielle.

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  signifie que la droite d'équation  $x = 0$  (c'est-à-dire l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction  $\ln$ .

*Remarque.* On peut dresser le tableau des variations de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  :

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$\ln'(x)$		+		
$\ln$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

A partir du tableau des variations ci-dessus, on déduit alors le signe de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		-	0
			+

**Application 30.** Calculer les limites suivantes.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x)^2 - \ln(x))$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3 + \ln(x)}{\ln(x)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x)^2 - \ln(x))$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x)^2 - 2 \ln(x) + 1)$$

**Propriété 5.13.** 1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

### 5.3. Étude de la fonction logarithme népérien

*Démonstration.*

1. On a :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x)} \ln(x)$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  d'après la propriété 2.19, il vient par composition de limites (exercice 2.3.) :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ .

2. On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  d'après la propriété 2.18, il

vient par composition de limites (exercice 2.3.) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} = 0$ , soit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

□

*Remarque.* On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$  par produit de limites.

Le théorème de croissances comparées suivant généralise la propriété précédente.

**Théorème 5.14. Théorème des croissances comparées avec  $\ln$  (admis)**  
*Soit un entier  $n$  strictement positif.*

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

**Application 31.** Calculer les limites suivantes.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x - \ln(x))$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x+1}$

#### 5.3.4 Convexité

**Propriété 5.15. Convexité de  $\ln$**

*La fonction logarithme népérien est concave sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .*

*Démonstration.* On note  $f$  la fonction  $x \mapsto \ln(x)$  définie sur  $]0; +\infty[$ . Alors, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a  $f'(x) = \frac{1}{x}$  et  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ , donc la fonction  $f$  est concave sur  $]0; +\infty[$ .

□

5.3.5 Dérivée de  $\ln(u)$ 

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la propriété 4.2.

**Propriété 5.16. Dérivabilité de  $\ln \circ u$** 

Soit  $u$  une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Alors la fonction  $\ln \circ u : x \mapsto (\ln \circ u)(x) = \ln(u(x))$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée est la fonction définie sur  $I$  par :

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}.$$

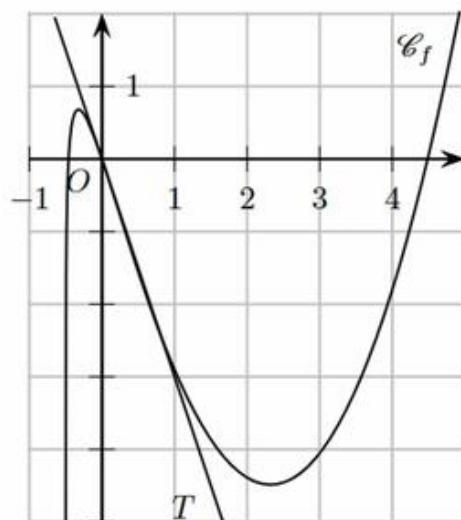
*Exemple.* Notons  $u$  la fonction  $x \mapsto x^2 + 1$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ , et notons  $f$  la fonction  $x \mapsto \ln(u(x))$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

**Application 32 (Étude de fonction).** Notons  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in ]-1/2; +\infty[$  par :

$$f(x) = x^2 - 5x + \ln(2x + 1).$$

On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé, la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$ , ainsi que la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.



- On répondra dans cette question uniquement à l'aide du graphique.
  - Conjecturer la limite de  $f$  en  $-\frac{1}{2}$  et en  $+\infty$ .
  - Conjecturer le sens de variations de  $f$  sur l'intervalle  $]-1/2; +\infty[$ .
  - Déterminer graphiquement une équation de la droite  $T$ .
- Cette question vise à démontrer par le calcul les résultats précédents.

5.4. Exercices

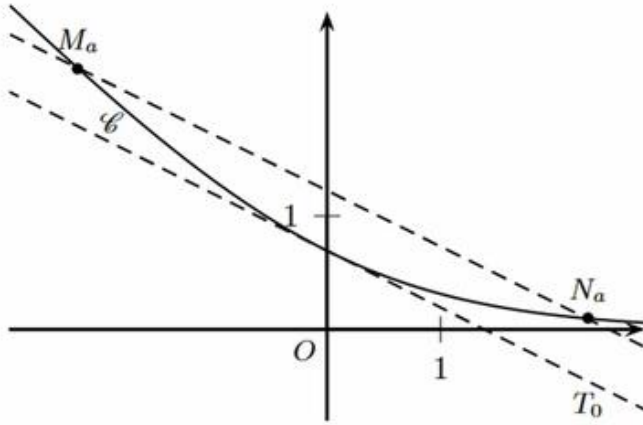
- (a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- (b) Justifier que pour tout  $x \in ]-1/2; +\infty[$ , on a :  $f'(x) = \frac{4x^2 - 8x - 3}{2x + 1}$ .
- (c) Dédire le tableau des variations de  $f$  sur  $] -1/2; +\infty[$ .
- (d) Déterminer une équation de la droite  $T$ .

## 5.4 Exercices

**Exercice 5.1 (Sujet bac, Métropole, 2023).** On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}).$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. La courbe  $\mathcal{C}$  est tracée ci-dessous.



- Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .
  - Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement ce résultat.
  - Pour tout nombre réel  $x$ , montrer que :

$$f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}.$$

- Dresser le tableau des variations complet de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- On note  $T_0$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en son point d'abscisse 0.
    - Déterminer une équation de la tangente  $T_0$ .
    - Montrer que la fonction  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .
    - En déduire que, pour tout nombre réel  $x$ , on a :  $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$ .
  - Pour tout nombre réel  $a$  différent de 0, on note  $M_a$  et  $N_a$  les points de la courbe  $\mathcal{C}$  d'abscisses respectives  $-a$  et  $a$ . On a donc :  $M_a(-a; f(-a))$  et  $N_a(a; f(a))$ .

- (a) Montrer que pour tout nombre réel  $x$ , on a :  $f(x) - f(-x) = -x$ .  
 (b) En déduire que les droites  $T_0$  et  $(M_a N_a)$  sont parallèles.

**Exercice 5.2 (Sujet bac, Métropole, 2007).** On note  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in ]-1; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal du plan.

### Partie A

1. Montrer que pour tout  $x \in ]-1; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = \frac{\ln(x+1) + x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1}.$$

2. Notons  $N$  la fonction définie pour tout  $x \in ]-1; +\infty[$  par :

$$N(x) = \ln(x+1) + x^2 + 2x.$$

- (a) Déterminer la limite de  $N$  en  $-1$  et en  $+\infty$ .  
 (b) Montrer que la fonction  $N$  est strictement croissante sur  $] -1; +\infty[$ .  
 (c) Calculer  $N(0)$  puis déduire le signe de la fonction  $N$  sur  $] -1; +\infty[$ .  
 (d) Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $] -1; +\infty[$ .  
 3. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite d'équation  $y = x$ .

### Partie B

1. Démontrer que si  $x \in [0; 4]$ , alors  $f(x) \in [0; 4]$ .  
 2. On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 4$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
 (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

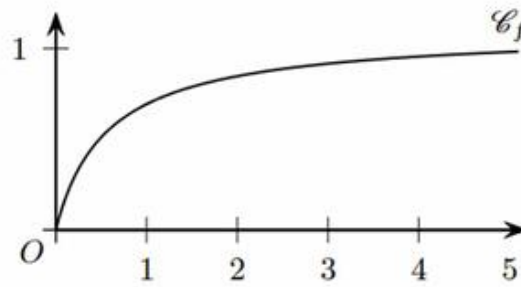
$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$

- (b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. On désigne par  $\ell$  sa limite.  
 (c) Déterminer la valeur de  $\ell$ .

**Exercice 5.3 (Sujet bac, Nouvelle-Calédonie, 2019).** On note  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal.



## Partie A

- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et en donner une interprétation graphique.
- (a) Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$  positif ou nul :

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}.$$

- En déduire que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

## Partie B

Notons  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout entier naturel :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ .
- (a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. On notera  $\ell$  sa limite.  
(b) Montrer que  $f(\ell) = \ell$ .

## Partie C

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de  $\ell$ .  
On introduit pour cela la fonction  $g$  définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

On donne ci-dessous le tableau des variations de la fonction  $g$  sur  $[0; +\infty[$  où  $x_0 = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \approx 0,215$  et  $g(x_0) \approx 0,088$ , en arrondissant à  $10^{-3}$ .

$x$	0	$x_0$	$+\infty$
$g$	0	$g(x_0)$	$-\infty$

(The table contains arrows indicating an increase from 0 to  $g(x_0)$  and a decrease from  $g(x_0)$  to  $-\infty$ .)

- Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution strictement positive. On la note  $\alpha$ .

2. (a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous nommée **f** afin qu'elle renvoie la valeur  $f(x)$  pour un réel  $x$  positif donné en argument<sup>3</sup>.

```
1 def f(x):
2     return .....
```

- (b) Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il affiche une valeur approchée de  $\alpha$  par excès à 0,01 près.

```
1 x = 0.22
2 while .....:
3     x = x + 0.01
4 print(x)
```

- (c) Donner la valeur affichée par le programme ci-dessus.

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 5.4 ♠ (Série harmonique).** L'objectif de cet exercice est de montrer que la série harmonique, c'est-à-dire la suite  $(h_n)$  définie pour tout entier  $n \geq 1$

par :  $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , est divergente.

1. On note  $f$  et  $g$  les fonctions définies pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

- (a) Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .  
 (b) Dresser le tableau des variations de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .  
 (c) Déduire les inégalités suivantes valables pour tout réel  $x \geq 0$  :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2. (a) Montrer que pour tout entier  $k \geq 1$ , on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

- (b) Montrer ensuite que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq h_n \leq \ln(n) + 1.$$

- (c) Déduire que la suite  $(h_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

3. Montrer que la suite  $(h_n)$  est équivalente à la suite  $(\ln(n))$  en  $+\infty$ , c'est-à-dire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1.$$

<sup>3</sup> Le package `numpy` est importé au préalable avec l'instruction suivante : `import numpy as np`

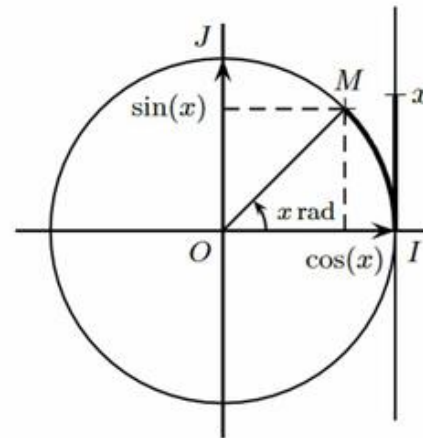


# Fonctions trigonométriques

Dans tout ce chapitre, la plupart des propriétés sont proposées sans démonstration formelle et sont déduites uniquement par lecture graphique du cercle trigonométrique.

## 6.1 Rappels

Soit  $x$  un réel de la droite numérique et soit  $M$  son point image sur le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé  $(O; I, J)$ . L'abscisse du point  $M$  est appelé cosinus de  $x$  et se note  $\cos(x)$ , l'ordonnée du point  $M$  est appelée sinus de  $x$  et se note  $\sin(x)$ .



**Propriété 6.1.** Pour tout réel  $x$ , on a :

1.  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
2.  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
3.  $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

On donne ci-dessous le tableau des valeurs remarquables du cosinus et du sinus<sup>1</sup>.

1. Les valeurs remarquables du cosinus et du sinus doivent être connues par coeur, ou du moins doivent pouvoir être retrouvées très rapidement à l'aide du cercle trigonométrique.

Angle $x$ (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

On rappelle les relations fondamentales ci-dessous.

**Propriété 6.2.** Pour tout réel  $x$ , on a :

1. $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$	5. $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
2. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$	6. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
3. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$	7. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$	8. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

## 6.2 Fonctions cosinus et sinus

### 6.2.1 Définitions

**Définition 6.3.** 1. La fonction sinus est la fonction qui associe à tout réel  $x$ , le réel  $\sin(x)$ .

2. La fonction cosinus est la fonction qui associe à tout réel  $x$ , le réel  $\cos(x)$ .

*Remarque.* Nous verrons plus tard dans le cours les représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus dans un repère orthogonal du plan.

### 6.2.2 Continuité

**Propriété 6.4. Continuité de cos et sin (admise)**  
 Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur  $\mathbb{R}$

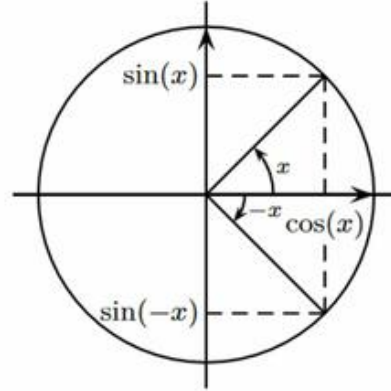
*Remarque.* Par définition, il vient donc que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$ .

*Exemple.* On a : 
$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x \sin(x)}{\cos(x) + 2} = \frac{\frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2}) + 4} = \frac{\frac{\pi}{2} \times 1}{0 + 4} = \frac{\pi}{8}$$
 par produit, somme et quotient de limites.

## 6.2.3 Parité et périodicité

**Propriété 6.5. Parité de cos et sin**

1. La fonction cosinus est paire sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire que pour tout réel  $x$ ,  $\cos(-x) = \cos(x)$ .
2. La fonction sinus est impaire sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire que pour tout réel  $x$ ,  $\sin(-x) = -\sin(x)$ .



- Remarque.*
1. La fonction cosinus (respectivement sinus) est paire (respectivement impaire) sur tout sous-intervalle de  $\mathbb{R}$  centré en 0.
  2. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus (respectivement sinus) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (respectivement par rapport à l'origine).

*Exemple.* Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$ .

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  car, pour tout réel  $x$ ,  $2 + \cos(x) \geq 1$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :  $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{2 + \cos(x)} = -f(x)$ , donc la fonction  $f$  est impaire sur  $\mathbb{R}$ .

Étant donné que les réels  $x$  et  $x + 2\pi$  ont le même point image sur le cercle trigonométrique, nous obtenons le résultat suivant.

**Propriété 6.6. Périodicité de cos et sin**

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période  $2\pi$  (ou  $2\pi$ -périodique), c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

- Remarque.*
1. L'interprétation graphique de la  $2\pi$ -périodicité des fonctions cosinus et sinus dans un repère orthogonal est la suivante : la portion de leur courbe représentative sur un intervalle quelconque d'amplitude  $2\pi$  est dupliquée indéfiniment à gauche et à droite.
  2. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Les fonctions cosinus et sinus sont également  $2k\pi$ -périodiques, c'est-à-dire pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x).$$

*Remarque.* Compte tenu de la parité et de la  $2\pi$ -périodicité des fonctions cosinus et sinus, il suffit de les étudier<sup>2</sup> sur l'intervalle  $[0; \pi]$ . En effet, une fois l'étude réalisée sur  $[0; \pi]$ , elle peut être déduite sur  $[-\pi; \pi]$  par symétrie (axiale ou centrale), puis étendue sur  $\mathbb{R}$  par translation de vecteur  $2k\pi\vec{OI}$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Exemple.* Reprenons la fonction  $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

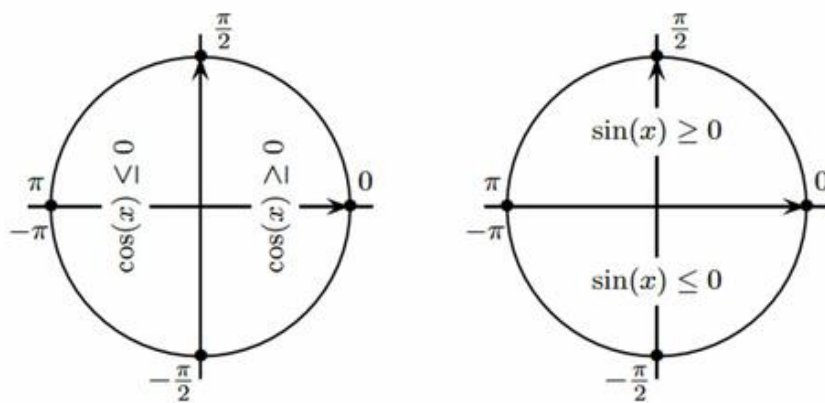
Pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{2 + \cos(x+2\pi)} = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$ , donc la fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique.

La fonction  $f$  étant impaire et  $2\pi$ -périodique, il suffit de l'étudier sur l'intervalle  $[0; \pi]$ .

### 6.2.4 Signe

**Propriété 6.7. Signe de cos et sin**

1. Pour tout  $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ , on a :  $\cos(x) \geq 0$  et pour tout  $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ , on a :  $\cos(x) \leq 0$ .
2. Pour tout  $x \in [0; \pi]$ , on a :  $\sin(x) \geq 0$ .



*Remarque.* 1. On déduit par symétrie le tableau de signe des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .

$x$	$-\pi$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$\pi$
$\cos(x)$		-	0	+
$x$	$-\pi$	$0$	$\pi$	
$\sin(x)$	0	-	0	+

2. L'étude portera sur le signe, les variations, la convexité...

2. Plus généralement :

— la fonction cosinus est positive sur l'ensemble  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] + 2\pi\mathbb{Z}$  et négative sur l'ensemble  $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] + 2\pi\mathbb{Z}$ ;

— la fonction sinus est positive sur l'ensemble  $[0; \pi] + 2\pi\mathbb{Z}$  et négative sur l'ensemble  $[-\pi; 0] + 2\pi\mathbb{Z}$

*Exemple.* On reprend la fonction  $f$  de l'exemple précédent. Puisque pour tout  $x \in [0; \pi]$ ,  $2 + \cos(x) > 0$ , le signe de  $f(x)$  est donné par le signe de  $\sin(x)$ . La fonction  $f$  est donc strictement positive sur l'intervalle  $]0; \pi[$  et  $f(0) = f(\pi) = 0$ .

### 6.2.5 Résolution d'équations et d'inéquations

**Propriété 6.8.** Soit  $a$  un nombre réel. Pour tout réel  $x$ , on a :

1.  $\cos(x) = \cos(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + 2k\pi$  ou  $\exists k' \in \mathbb{Z}, x = -a + 2k'\pi$
2.  $\sin(x) = \sin(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + 2k\pi$  ou  $\exists k' \in \mathbb{Z}, x = \pi - a + 2k'\pi$

*Exemple.* 1. On résout l'équation  $\cos(x) = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .  
Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} \cos(x) = 0 &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \exists k' \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{aligned}$$

L'ensemble  $S$  des solutions sur  $\mathbb{R}$  est :  $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ . Notons que l'ensemble  $S'$  des solutions sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  est :  $S' = \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$ .

2. On résout l'équation  $\sin(x) = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .  
Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} \sin(x) = 0 &\iff \sin(x) = \sin(0) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi \text{ ou } \exists k' \in \mathbb{Z}, x = \pi + 2k'\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi. \end{aligned}$$

L'ensemble  $S$  des solutions sur  $\mathbb{R}$  est :  $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Notons que l'ensemble  $S'$  des solutions sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  est :  $S' = \{-\pi; 0; \pi\}$ .

3. L'ensemble noté  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] + 2\pi\mathbb{Z}$  est l'ensemble des réels de la forme  $x + 2k\pi$  où  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  et  $k \in \mathbb{Z}$ . On déduit de manière analogue les autres ensembles introduits dans cette remarque.

3. On résout l'équation  $\cos(x) = -\frac{1}{2}$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} \cos(x) = -\frac{1}{2} &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \exists k' \in \mathbb{Z}, x = -\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi. \end{aligned}$$

L'ensemble  $S$  des solutions sur  $\mathbb{R}$  est :

$$S = \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \mid (k; k') \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

4. On résout l'équation  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 &\iff \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\quad \text{ou } \exists k' \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k'\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\quad \text{ou } \exists k' \in \mathbb{Z}, x = \frac{5\pi}{3} + 2k'\pi. \end{aligned}$$

L'ensemble  $S$  des solutions sur  $\mathbb{R}$  est :

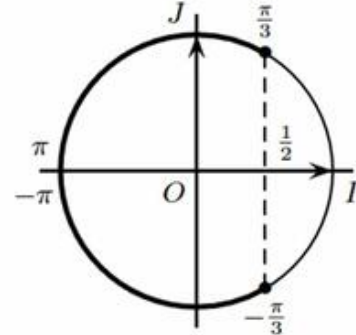
$$S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k'\pi \mid (k; k') \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Notons que l'ensemble  $S'$  des solutions sur  $[-\pi; \pi]$  est :  $S' = \left\{ -\frac{\pi}{3} \right\}$ .

*Exemple.* 1. On résout l'inéquation  $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$  d'inconnue  $x \in [-\pi; \pi]$ .

Pour tout  $x \in [-\pi; \pi]$ , on a :

$$\cos(x) \leq \frac{1}{2} \iff x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right].$$



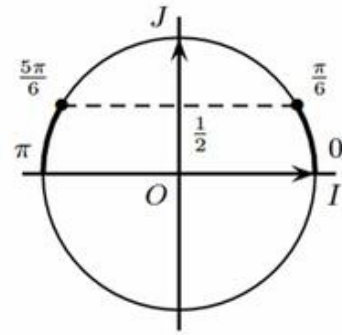
L'ensemble  $S$  des solutions est :  $S = \left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ . Notons que sur l'intervalle  $[0; \pi]$ , l'ensemble  $S'$  des solutions est :  $S' = \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$  et sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , l'ensemble  $S''$  des solutions est :  $S'' = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

2. On résout l'inéquation  $\sin(2x) \leq \frac{1}{2}$  d'inconnue  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Si  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , alors :  $2x \in [0; \pi]$ .

Ainsi, pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , on a :

$$\begin{aligned} \sin(2x) \leq \frac{1}{2} &\iff 2x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right] \\ &\iff x \in \left[0; \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$



L'ensemble  $S$  des solutions est :  $S = \left[0; \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Notons que sur l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , l'ensemble  $S'$  des solutions est :  $S' = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Application 33.** Résoudre dans l'intervalle  $I$  indiqué les équations et inéquations suivantes.

1.  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1, I = [-\pi; \pi]$

3.  $\cos(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}, I = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

2.  $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) - \sqrt{3} = 0, I = \mathbb{R}$

4.  $\cos(x)^2 = \frac{1}{2}, I = \mathbb{R}$

### 6.2.6 Limites

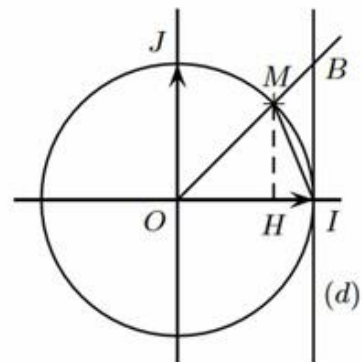
**Propriété 6.9.** 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$       2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

*Démonstration.*

1. Procédons en deux étapes.

— On montre que pour tout  $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ , on a :  $\sin(x) \leq x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ .

Soit  $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ . On note  $M$  le point image de  $x$  sur le cercle trigonométrique,  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des abscisses,  $(d)$  la droite d'équation  $x = 1$  et  $B$  le point d'intersection des droites  $(OM)$  et  $(d)$ .



On note  $\mathcal{A}_1$  l'aire du triangle  $OIM$ ,  $\mathcal{A}_2$  l'aire du secteur circulaire  $OIM$  et  $\mathcal{A}_3$  l'aire du triangle  $OIB$ .

On a alors l'encadrement :  $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2 \leq \mathcal{A}_3$ .

Or  $\mathcal{A}_1 = \frac{OI \times MH}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$ ,  $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times x = \frac{x}{2}$  et  $\mathcal{A}_3 = \frac{OI \times BI}{2} = \frac{BI}{2}$ , donc  $\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{BI}{2}$ .

Exprimons  $BI$  en fonction de  $x$ . Les droites  $(MH)$  et  $(BI)$  étant parallèles, on applique le théorème de Thalès au triangle  $OIM$  :  $\frac{OH}{OI} = \frac{MH}{BI}$ , soit  $\frac{\cos(x)}{1} = \frac{\sin(x)}{BI}$ , soit  $BI = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  car  $\cos(x) > 0$ .

On obtient alors  $\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\sin(x)}{2 \cos(x)}$ , soit  $\sin(x) \leq x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ .

— Comme  $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , on a  $\sin(x) > 0$ , et puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ , on a :

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin(x)}, \text{ soit : } \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Par continuité de la fonction cosinus en 0, on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) = \cos(0) = 1$ , donc en passant à la limite à droite quand  $x$  tend vers 0 et en vertu du théorème des gendarmes, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$  étant paire sur  $\mathbb{R}$ , on a également  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ , d'où le résultat.

2. Pour tout réel  $x$  non nul tel que  $\cos(x) \neq -1$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x) - 1}{x} &= \frac{(\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)}{x(\cos(x) + 1)} \\ &= \frac{\cos(x)^2 - 1}{x(\cos(x) + 1)} \\ &= \frac{-\sin(x)^2}{x(\cos(x) + 1)} \\ &= -\frac{\sin(x)}{x} \times \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x) + 1}. \end{aligned}$$

D'après 1, on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ , et par continuité en 0 de la fonction sinus et cosinus, on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x) + 1} = \frac{1}{\cos(0) + 1} = \frac{1}{2}$ .

---

4. L'aire d'un secteur de rayon  $r$  et d'angle au centre  $x$  mesuré en radians est donnée par  $\frac{1}{2}r^2x$ .

Par produit de limites, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$ .

□

*Remarque.* 1. On a montré que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ , soit :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = 1$ .

Par conséquent, la fonction sinus est dérivable en 0 et  $\sin'(0) = 1$ .

2. On a montré aussi que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$ , soit :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = 0$ .

Par conséquent, la fonction cosinus est dérivable en 0 et  $\cos'(0) = 0$ .

*Remarque.* Notons que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x)}{x} = -\infty$ .

*Exemple.* 1. On souhaite calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)^2}{x \cos(x)}$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)^2}{x \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$ , il vient :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)^2}{x \cos(x)} = 0$  par produit de limites.

2. On souhaite calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x}$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\cos(2x) - 1}{2x}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$ , il vient par composition de limites (voir exercice 2.3.) :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{2x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\cos(2x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x} = 0$  par produit de limites.

## 6.3 Dérivation et variations

### 6.3.1 Dérivation

#### Propriété 6.10. Dérivabilité de cos et sin

1. La fonction sin est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\sin'(x) = \cos(x).$$

2. La fonction cos est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

*Démonstration.*

1. Soit  $a$  un réel et soit  $h$  un réel non nul. On a<sup>5</sup> :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} &= \frac{\sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a)}{h} \\ &= \sin(a)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h}.\end{aligned}$$

D'après la propriété 6.9, on a  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ , donc par produit de limites on a  $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(a)\frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \cos(a)\frac{\sin(h)}{h} = \cos(a)$ .

Finalement, par somme de limites on obtient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \cos(a).$$

La fonction sinus est donc dérivable en  $a$  et  $\sin'(a) = \cos(a)$ .

2. Pour tout réel  $x$ , on a  $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = (\sin \circ u)(x)$  où  $u$  est la fonction  $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ .

D'après la propriété 4.2, les fonctions  $\sin$  et  $u$  étant dérivables sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $\cos$  l'est également sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= (\sin \circ u)'(x) = u'(x) \times \sin'(u(x)) \\ &= -1 \times \sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= -\sin(x).\end{aligned}$$

□

*Exemple.* Reprenons la fonction  $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\cos(x)(2 + \cos(x)) - \sin(x)(-\sin(x))}{(2 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{2\cos(x) + \cos(x)^2 + \sin(x)^2}{(2 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{2\cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2} \quad \text{car } \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.\end{aligned}$$

---

5. On utilise dans cette démonstration la formule d'addition suivante, admise dans le cadre de ce cours : pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ . Cette égalité est démontrée dans le cadre de l'enseignement de l'option mathématiques expertes.

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la propriété 4.2.

**Propriété 6.11. Dérivabilité de  $\cos \circ u$  et  $\sin \circ u$**

Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

1. La fonction  $\sin \circ u$  est dérivable sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$ , on a :

$$(\sin \circ u)'(x) = u'(x) \cos(u(x)).$$

2. La fonction  $\cos \circ u$  est dérivable sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$ , on a :

$$(\cos \circ u)'(x) = -u'(x) \sin(u(x)).$$

*Exemple.* Notons  $h$  la fonction  $x \mapsto 3 \cos \left( 2x^2 + \frac{2\pi}{5} \right)$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $x \mapsto 2x^2 + \frac{2\pi}{5}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc la fonction  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par composition et pour tout réel  $x$ , on a :

$$h'(x) = 3 \times (-4x) \sin \left( 2x^2 + \frac{2\pi}{5} \right) = -12x \sin \left( 2x^2 + \frac{2\pi}{5} \right).$$

### 6.3.2 Variations

Les variations des fonctions cosinus et sinus sur se déduisent immédiatement du signe de leurs fonctions dérivées.

**Propriété 6.12. Variations de  $\cos$  et  $\sin$**

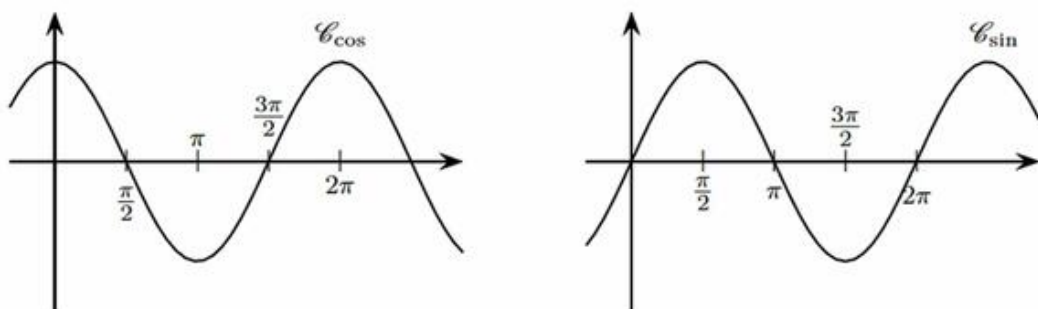
1. La fonction cosinus est strictement décroissante sur l'intervalle  $[0; \pi]$ .
2. La fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et strictement décroissante sur l'intervalle  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

*Remarque.* On déduit par symétrie le tableau des variations des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .

$x$	$-\pi$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$\pi$
$\sin'(x)$		- 0	+ 0	-
$\sin$	0		1	0
		-1		

$x$	$-\pi$	$0$	$\pi$
$\cos'(x)$	0	+	0
$\cos$	-1	1	-1

Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sur  $\mathbb{R}$  dans un repère orthogonal du plan sont les suivantes.

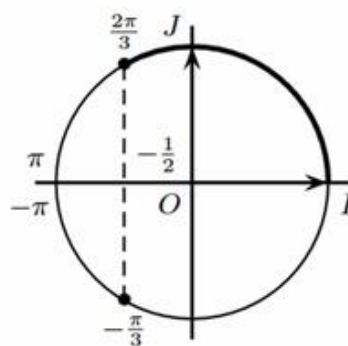


*Exemple.* On reprend la fonction  $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$  dont la fonction dérivée  $f'$  est  $x \mapsto \frac{2 \cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2}$ .

On souhaite étudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$ .  
 Pour tout  $x \in [0; \pi]$ , puisque  $(2 + \cos(x))^2 > 0$ , le signe de  $f'(x)$  est du signe uniquement de  $2 \cos(x) + 1$ .  
 On résout alors sur  $[0; \pi]$  l'inéquation  $2 \cos(x) + 1 > 0$  en s'aidant du cercle trigonométrique.

Pour tout  $x \in [0; \pi]$ , on a :

$$\begin{aligned} 2 \cos(x) + 1 > 0 &\iff 2 \cos(x) > -1 \\ &\iff \cos(x) > -\frac{1}{2} \\ &\iff x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$



On dresse le tableau de signe de  $f'$  sur  $[0; \pi]$  et l'on déduit le tableau des variations de  $f$  sur ce même intervalle.

$x$	0	$2\pi/3$	$\pi$	
$f'(x)$		+	0	-
$f$			$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
	0			0

**Application 34.** On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = e^{-x} \sin(x).$$

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

On pourra utiliser la formule (admise) d'addition suivante : pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ .

2. Dresser le tableau des variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .

### 6.3.3 Convexité

La propriété ci-dessous se déduit immédiatement du signe de la dérivée seconde des fonctions cosinus et sinus.

#### Propriété 6.13. Convexité de cos et sin

1. La fonction cosinus est concave sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et convexe sur  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .
2. La fonction sinus est concave sur  $[0; \pi]$ .

*Remarque.* Le caractère concave de la fonction sinus sur l'intervalle  $[0; \pi]$  permet d'établir l'inégalité suivante valable pour tout réel  $x$  :

$$|\sin(x)| \leq |x|.$$

Démontrons cette inégalité.

- La fonction sinus étant concave sur l'intervalle  $[0; \pi]$ , sa courbe représentative se situe en-dessous de toutes ses tangentes sur  $[0; \pi]$ , donc en particulier en-dessous de sa tangente en 0 dont l'équation réduite est :

$$y = \sin'(0)(x - 0) + \sin(0) = \cos(0)x = x.$$

Par conséquent, si  $x \in [0; \pi]$ , on a :  $|\sin(x)| = \sin(x) \leq x = |x|$ .

- Si  $x \in [-\pi; 0]$ , alors  $-x \in [0; \pi]$ , donc  $|\sin(-x)| \leq |-x| = x$ , c'est-à-dire  $|\sin(x)| \leq |x|$  car  $|\sin(-x)| = |-\sin(x)| = |\sin(x)|$ .
- Si  $x > \pi$  ou  $x < -\pi$ , on a  $|\sin(x)| \leq 1 \leq \pi \leq |x|$ .

Finalement, l'inégalité est bien établie pour tout réel  $x$ .

## 6.4 Exercices

**Exercice 6.1** (Sujet bac, Nouvelle-Calédonie, 2005). On note  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$  par :

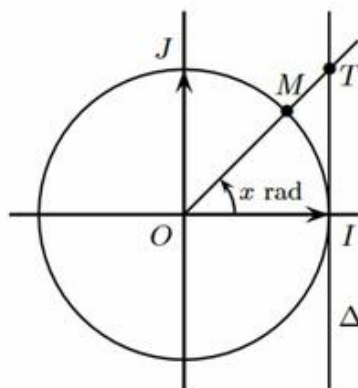
$$f(x) = \frac{7}{2} + 2 \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{4}{\cos(x)}.$$

1. Pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ , déterminer  $f'(x)$ .
2. Étudier le signe de  $f'$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ .
3. (a) Montrer que pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ , on a  $f(x) = \frac{7}{2} + \frac{2 \sin(x) - 4}{\cos(x)}$ .  
(b) Déduire  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ .
4. En déduire le tableau des variations de  $f$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ .

**Exercice 6.2.** ♠ (Fonction tangente). La partie A est indépendante des parties B et C.

### Partie A. Introduction

On munit le plan d'un repère orthonormé  $(O; I, J)$ . Soit  $x$  un réel distinct de  $\pi/2$ . On note  $M$  le point image de  $x$  sur le cercle trigonométrique de centre  $O$ ,  $\Delta$  la droite d'équation  $x = 1$  et  $T$  le point d'intersection des droites  $(OM)$  et  $\Delta$ .



Montrer que l'ordonnée du point  $T$  est égal, en fonction de  $x$ , à  $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ .

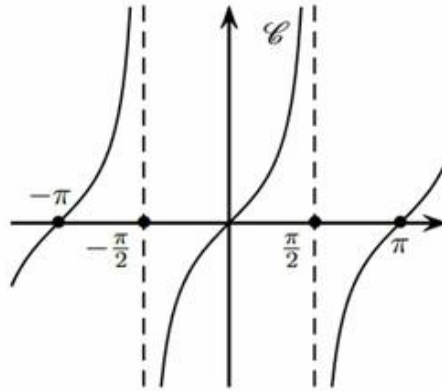
### Partie B. Étude sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

On appelle fonction tangente, notée  $\tan$ , la fonction ci-dessous :

$$\tan : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition  $D_{\tan}$  de la fonction  $\tan$ .

2. (a) Étudier la parité de la fonction  $\tan$  sur  $D_{\tan}$ .  
 (b) Démontrer que la fonction  $\tan$  est  $\pi$ -périodique.  
 (c) Expliquer pourquoi on peut restreindre le domaine d'étude de la fonction  $\tan$  à l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ .
3. Déterminer la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan(x)$ . Que peut-on déduire graphiquement ?
4. (a) Pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ , montrer que :  $\tan'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$ .  
 (b) Déduire les variations de la fonction  $\tan$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ , puis dresser son tableau des variations sur l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ .
5. Dans un repère orthogonal du plan, on note  $\mathcal{C}$  la représentation graphique de la fonction  $\tan$  et on note  $d$  la droite représentative de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.  
 Étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $d$  sur l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ .



### Partie C. Quelques propriétés

Dans toute cette partie, on pourra utiliser les formules (admises) d'addition suivantes : pour tous réels  $x$  et  $y$ ,

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

1. Pour tous réels  $x$  et  $y$  de l'ensemble  $D_{\tan}$ , montrer l'équivalence ci-dessous :

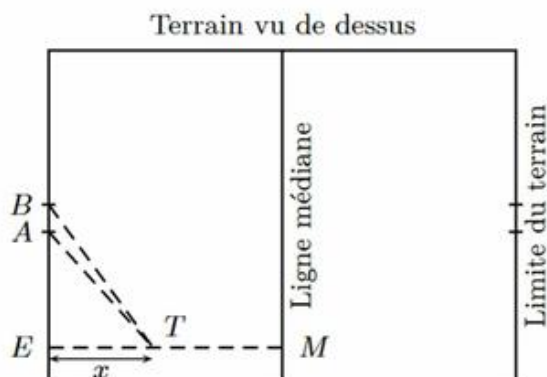
$$\tan(x) = \tan(y) \iff x = y + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Démontrer l'égalité suivante valable pour tous les réels  $x$  et  $y$  pour lesquels chaque terme est bien défini.

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$$

**Exercice 6.3 (Sujet bac, Métropole, 2016).** *Cet exercice fait appel à des résultats de l'exercice 6.2.*

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point  $E$  (voir figure ci-dessous) situé à l'extérieur du segment  $[AB]$ . La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point  $T$  que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment  $[EM]$  perpendiculaire à la droite  $(AB)$  sauf en  $E$ . La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points  $A$  et  $B$  sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point  $T$  qui rend l'angle  $\widehat{ATB}$  le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point  $T$  sur le segment  $[EM]$  pour laquelle l'angle  $\widehat{ATB}$  est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite de cet exercice, on pose  $x = ET$ ,  $x$  étant le réel qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes :  $EM = 50$  m,  $EA = 25$  m et  $AB = 5,6$  m. On note  $\alpha$  la mesure en radian de l'angle  $\widehat{ETA}$ ,  $\beta$  la mesure en radian de l'angle  $\widehat{ETB}$  et  $\gamma$  la mesure en radian de l'angle  $\widehat{ATB}$ .

1. En utilisant les triangles rectangles  $ETA$  et  $ETB$  ainsi que les longueurs fournies, exprimer  $\tan(\alpha)$  et  $\tan(\beta)$  en fonction de  $x$ .
2. L'angle  $\widehat{ATB}$  admet une mesure  $\gamma$  appartenant à l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ , résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

Montrer que  $\tan(\gamma) = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$ .

3. On note  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{5,6x}{x^2 + 765}$  définie sur  $]0; 50]$ .
  - (a) Démontrer que  $f$  admet un maximum sur  $]0; 50]$ .
  - (b) Montrer qu'il existe une unique valeur de  $x$  pour laquelle l'angle  $\widehat{ATB}$  est maximal et déterminer cette valeur de  $x$  au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle  $\widehat{ATB}$  à 0,01 radian près.



# Primitives et équations différentielles

## 7.1 Équation différentielle du premier ordre

**Définition 7.1.** 1. Une équation différentielle du premier ordre est une équation où l'inconnue est une fonction et faisant intervenir la dérivée de cette fonction.

2. Résoudre une équation différentielle dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , c'est trouver toutes les fonctions, définies et dérivables sur  $I$ , qui sont solutions de cette équation.

*Exemple.* 1. L'équation  $(E_1) : y'(x) = 2x$  est une équation différentielle du premier ordre.

Résoudre l'équation différentielle  $(E_1)$  dans  $\mathbb{R}$ , c'est déterminer toutes les fonctions  $f$ , dérivables sur  $\mathbb{R}$ , telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2x$ .

La fonction  $f : x \mapsto x^2 + 1$  définie sur  $\mathbb{R}$  est une solution de  $(E_1)$ . En effet,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2x$ .

2. L'équation  $(E_2) : y'(t) = 3y(t)$  est une équation différentielle du premier ordre.

La fonction  $f : t \mapsto e^{3t}$  définie sur  $\mathbb{R}$  est une solution de  $(E_2)$ . En effet,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f'(t) = 3e^{3t} = 3f(t)$ .

*Remarque.* Dans une équation différentielle :

- la variable est souvent notée  $x$  (ou  $t$ ) ;
- la fonction (c'est-à-dire l'inconnue) est souvent symbolisée par la seule lettre  $y$ .

Ainsi, l'équation différentielle  $(E_1)$  peut s'écrire  $y' = 2x$ , et l'équation différentielle  $(E_2)$  peut s'écrire  $y' = 3y$ .

## 7.2 Équation différentielle $y' = f$ et primitives

### 7.2.1 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

**Définition 7.2.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Une fonction  $F$  définie sur  $I$  est dite une primitive de  $f$  sur  $I$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  et si pour tout  $x \in I$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

*Remarque.* Autrement dit, une primitive de  $f$  sur  $I$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = f$ .

*Exemple.* La fonction  $F : x \mapsto \frac{x^2}{2}$  définie sur  $\mathbb{R}$  est une primitive de la fonction  $f : x \mapsto x$  définie sur  $\mathbb{R}$  car  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$  :  $F'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x)$ .

Ainsi,  $F$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' = x$ .

Le théorème fondamental ci-dessous est le théorème d'existence des primitives d'une fonction continue.

**Théorème 7.3.** Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  admet des primitives sur l'intervalle  $I$ .

*Démonstration.* Ce théorème sera démontré dans le chapitre suivant uniquement dans le cas où  $f$  est positive et croissante à travers le théorème fondamental de l'analyse. Le cas général est admis. □

**Théorème 7.4.** Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Alors les primitives de  $f$  sur  $I$  sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \mapsto F(x) + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* Soit  $G$  une fonction définie sur  $I$ . Il s'agit de montrer que  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  si, et seulement si, il existe un réel  $C$  tel que pour tout  $x \in I$ ,  $G(x) = F(x) + C$ .

$\implies$ ) Supposons que  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ . Alors  $G$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,  $G'(x) = f(x)$ .

Puisque  $F$  est aussi une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors pour tout  $x \in I$ ,  $F'(x) = f(x)$ , et donc  $G'(x) = F'(x)$ , soit encore  $(G - F)'(x) = 0$ .

La fonction  $(G - F)'$  étant nulle sur l'intervalle  $I$ , la fonction  $G - F$  est constante sur  $I$ . Il existe donc un réel  $C$  tel que pour tout  $x \in I$ ,  $(G - F)(x) = C$ , c'est-à-dire  $G(x) - F(x) = C$ , soit  $G(x) = F(x) + C$ .

## 7.2. Équation différentielle $y' = f$ et primitives

$\Leftarrow$ ) Supposons qu'il existe un réel  $C$  tel que pour tout  $x \in I$ ,  $G(x) = F(x) + C$ . La fonction  $G$  est dérivable sur  $I$  car  $F$  est dérivable sur  $I$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $G'(x) = F'(x) = f(x)$ . Donc  $G$  est une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

□

*Exemple.* Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

On a vu que la fonction  $F : x \mapsto \frac{x^2}{2}$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sont toutes les fonctions de la forme  $x \mapsto \frac{x^2}{2} + C$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

*Remarque.* 1. Une fonction continue sur l'intervalle  $I$  admet une infinité de primitives sur  $I$ .

2. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

**Propriété 7.5.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et soient  $x_0$  un réel de  $I$  et  $y_0$  un réel quelconque. Il existe alors une unique primitive  $G$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $G(x_0) = y_0$ .

*Démonstration.* La fonction  $f$  étant continue sur  $I$ , elle admet une primitive  $F$  sur  $I$ . Soit  $G$  une fonction définie sur  $I$ .

On raisonne par équivalences successives :

$$\begin{aligned}
 & G \text{ primitive de } f \text{ sur } I \text{ telle que } G(x_0) = y_0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, G(x) = F(x) + C & (\text{théorème 7.4}) \\ G(x_0) = y_0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, G(x) = F(x) + C \\ F(x_0) + C = y_0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, G(x) = F(x) + C \\ C = y_0 - F(x_0) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \forall x \in I, G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)
 \end{aligned}$$

La fonction  $G : x \mapsto F(x) + y_0 - F(x_0)$  est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  telle que  $G(x_0) = y_0$ .

□

*Remarque.* 1. Autrement dit, l'équation différentielle  $(E) : y' = f$  admet une unique solution  $G$  sur  $I$  telle que  $G(x_0) = y_0$ .

2. L'égalité  $G(x_0) = y_0$  est parfois appelée condition initiale<sup>1</sup> de l'équation différentielle  $(E)$ .

---

1. Le vocabulaire « condition initiale » est tiré de la physique et de la biologie, en référence à l'étude de quantités qui dépendent du temps (intensité électrique dans un circuit, concentration d'un composant dans une solution, taille d'une population etc.).

*Exemple.* On considère l'équation différentielle (E) :  $y' = e^{2x}$ . Soit  $F$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

$F$  solution sur  $\mathbb{R}$  de (E) telle que  $F(0) = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \\ F(0) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \\ \frac{1}{2}e^{2 \times 0} + C = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \\ C = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}.$$

Ainsi, la fonction  $F : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$  est l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation (E) telle que  $F(0) = -1$ .

**Application 35.** Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto 3x^2 - 2x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

- Vérifier que la fonction  $F : x \mapsto x^3 - x^2$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle (E) :  $y' = f$ .
- Déterminer la primitive  $G$  de  $f$  telle que  $G(1) = 2$ .

## 7.2.2 Primitives des fonctions usuelles et opérations

### Propriété 7.6. Primitives des fonctions usuelles

Fonction $f$	Une primitive $F$	Intervalle
$x \mapsto k, k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \geq 1$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \leq -2$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$

## 7.2. Équation différentielle $y' = f$ et primitives

*Démonstration.* Chaque fonction  $F$  figurant dans la deuxième colonne du tableau est dérivable sur l'intervalle correspondant, et sa dérivée est la fonction  $f$ .  $\square$

*Remarque.* Le tableau ci-dessus est en fait obtenu par lecture inverse du tableau des dérivées usuelles vues en classe de première.

*Exemple.* 1. Une primitive de la fonction  $f : x \mapsto x^5$  sur  $\mathbb{R}$  est la fonction

$$F : x \mapsto \frac{x^6}{6} \text{ définie sur } \mathbb{R}.$$

2. Une primitive de la fonction  $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$  sur  $]0; +\infty[$  est la fonction  $G : x \mapsto \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x}$  définie sur  $]0; +\infty[$ .

### Propriété 7.7. Linéarité des primitives

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soient  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$  et  $G$  une primitive de  $g$  sur  $I$ .

1.  $F + G$  est une primitive de  $f + g$  sur  $I$ .
2. Pour tout  $k$  réel,  $kF$  est une primitive de  $kf$  sur  $I$ .

*Démonstration.*  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ ,  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $I$ . Soit  $k$  un réel. Alors  $F$  et  $G$  sont dérivables sur  $I$ , et  $F' = f$  et  $G' = g$ .

1. La fonction  $F + G : x \mapsto (F + G)(x) = F(x) + G(x)$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ , on a :

$$(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x).$$

$F + G$  est donc bien une primitive de  $f + g$  sur  $I$ .

2. La fonction  $kF : x \mapsto (kF)(x) = kF(x)$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ , on a :

$$(kF)'(x) = kF'(x) = kf(x) = (kf)(x).$$

$kF$  est donc bien une primitive de  $kf$  sur  $I$ .  $\square$

*Exemple.* Notons  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = x^4 + 3 + 4e^x.$$

En utilisant la linéarité des primitives, une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est la fonction  $F$  définie pour tout réel  $x$  par :  $F(x) = \frac{x^5}{5} + 3x + 4e^x$ .

## 7.2.3 Primitives et composition

**Propriété 7.8. Primitives des fonctions composées usuelles**
*u est une fonction dérivable sur un intervalle I de  $\mathbb{R}$ .*

Fonction	Une primitive	Conditions sur u
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n \leq -2$ , $u \neq 0$ Si $n \geq 1$ , aucune
$u'e^u$	$e^u$	Aucune
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$u > 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	Aucune
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	Aucune

*Démonstration.* Chaque fonction figurant dans la deuxième colonne du tableau est dérivable sur  $I$ , et sa dérivée est la fonction figurant dans la première colonne.  $\square$

*Exemple.* 1. Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto 2x(x^2 + 1)$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $u(x) = x^2 + 1$ . Alors  $u'(x) = 2x$ , et ainsi  $f(x) = u'(x)u(x)$ .

Une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est donc  $F : x \mapsto \frac{u(x)^2}{2} = \frac{(x^2 + 1)^2}{2}$ .

2. Notons  $g$  la fonction  $x \mapsto (2x - 1)e^{x^2 - x + 4}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $u(x) = x^2 - x + 4$ . Alors  $u'(x) = 2x - 1$ , et ainsi  $g(x) = u'(x)e^{u(x)}$ .

Une primitive  $G$  de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  est donc  $G : x \mapsto e^{u(x)} = e^{x^2 - x + 4}$ .

3. Notons  $h$  la fonction  $x \mapsto \frac{2x}{4 + x^2}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $u(x) = 4 + x^2$ . Notons que  $u(x) > 0$ . Alors  $u'(x) = 2x$ , et ainsi  $h(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ .

Une primitive  $H$  de  $h$  sur  $\mathbb{R}$  est donc  $H : x \mapsto \ln(u(x)) = \ln(4 + x^2)$ .

4. Notons  $k$  la fonction  $x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$  définie sur  $\left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$ .

Soit  $x \in \left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$ . Posons  $u(x) = 3x + 1$ . Alors  $u'(x) = 3$ , et ainsi

$$k(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Une primitive  $K$  de  $k$  sur  $\left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$  est donc  $K : x \mapsto \sqrt{u(x)} = \sqrt{3x + 1}$ .

7.2. Équation différentielle  $y' = f$  et primitives

*Remarque.* « Primitiver » une fonction  $f$  sur  $I$  signifie, par abus de langage, déterminer une primitive de la fonction  $f$  sur  $I$ .

**Application 36.** Déterminer une primitive sur l'intervalle  $I$  de chacune des fonctions  $f$  ci-dessous.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $f : x \mapsto x^6 + 3x^2 + x - 4, I = \mathbb{R}$               | 4. $f : x \mapsto \frac{x+1}{x^2+2x}, I = ]0; +\infty[$  |
| 2. $f : x \mapsto \frac{3}{2x^5} - \frac{6}{x^4}, I = ]0; +\infty[$ | 5. $f : x \mapsto \sin(2x) - \cos(x), I = \mathbb{R}$    |
| 3. $f : x \mapsto xe^{x^2+1}, I = \mathbb{R}$                       | 6. $f : x \mapsto \frac{-1}{2(x-2)^3}, I = ]2; +\infty[$ |

**Propriété 7.9. Primitive de  $u' \times (v' \circ u)$**

$I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur  $I$  et à valeurs dans  $J$ , et soit  $v$  une fonction définie et dérivable sur  $J$ . Alors  $v \circ u$  est une primitive sur  $I$  de  $u' \times (v' \circ u)$ .

*Démonstration.* D'après la propriété 4.2, la fonction  $v \circ u$  est dérivable sur  $I$  et on a  $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$ . D'où le résultat. □

*Exemple.* On cherche une primitive de la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}.$$

$f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi, la fonction  $f$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ .

En posant  $u(x) = x^2 + 1$  et  $v(x) = -\frac{1}{x}$ , on a  $u'(x) = 2x$  et  $v'(x) = \frac{1}{x^2}$ , et donc on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2} u'(x) \times \frac{1}{u(x)^2} = \frac{1}{2} u'(x) v'(u(x)).$$

Par conséquent, une primitive  $F$  de  $f$  est la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$F(x) = \frac{1}{2} v(u(x)) = -\frac{1}{2(x^2 + 1)}.$$

Autrement dit,  $F$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' = f$ .

Notons que l'on peut retrouver l'expression de  $F$  en utilisant le fait que la fonction  $f$  est aussi de la forme  $\frac{1}{2} u' u^{-2}$ .

**Application 37.** Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y' = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$ .

*Remarque.* Il est toujours possible d'expliciter la dérivée d'une fonction dérivable. Il n'en est pas de même pour les primitives : la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  ne possède pas de primitive sous forme explicite.

## 7.3 Équation différentielle $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$

### 7.3.1 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

Dans cette section,  $a$  est un réel non nul.

**Définition 7.10.** L'équation différentielle  $y' = ay$ , qui peut aussi s'écrire  $y' - ay = 0$ , est appelée *équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants*.

*Remarque.* On dit aussi « sans second membre » au lieu de « homogène ».

**Propriété 7.11. Résolution de  $y' - ay = 0$**

Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $(E_1) : y' - ay = 0$  sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ce^{ax}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . Il s'agit de montrer que  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(E_1)$  si, et seulement si, il existe un réel  $C$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = Ce^{ax}$ .

$\Rightarrow$ ) Supposons que  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $(E_1) : y' = ay$ . Alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f'(x) = af(x)$ , c'est-à-dire  $f'(x) - af(x) = 0$ .  
Notons  $\theta$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$\theta(x) = e^{-ax} f(x).$$

La fonction  $\theta$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= -ae^{-ax} f(x) + e^{-ax} f'(x) = e^{-ax} (f'(x) - af(x)) \\ &= e^{-ax} \times 0 = 0, \end{aligned}$$

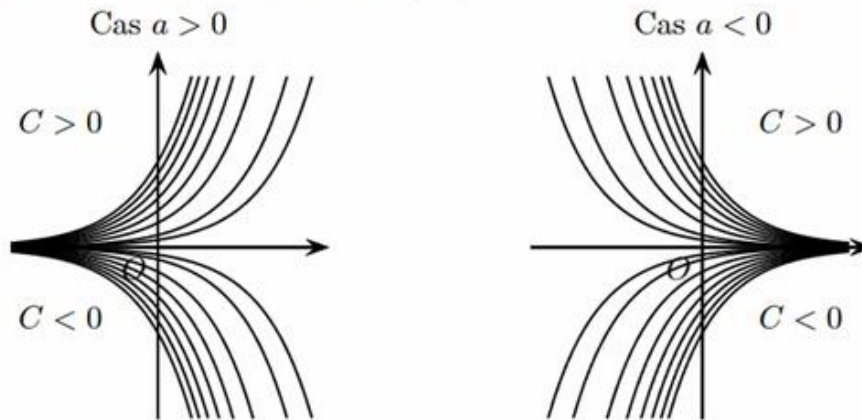
donc la fonction  $\theta'$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi, la fonction  $\theta$  est constante sur  $\mathbb{R}$ . Il existe donc un réel  $C$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\theta(x) = C$ , c'est-à-dire  $e^{-ax} f(x) = C$ , soit  $f(x) = Ce^{ax}$  en divisant par  $e^{-ax} > 0$ .

$\Leftarrow$ ) Supposons qu'il existe un réel  $C$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = Ce^{ax}$ . Alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f'(x) = Ca e^{ax} = af(x)$ . Donc  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $(E_1) : y' = ay$ .

□

7.3. Équation différentielle  $y' = ay + b$  et  $y' = ay + f$

*Remarque.* Le réel  $a$  étant fixé, voici pour différentes valeurs de  $C$ , les courbes représentatives des fonctions solutions de l'équation différentielle  $(E_1) : y' = ay$ , appelées aussi **courbes intégrales** de  $(E_1)$ .



Par tout point du plan passe une, et une seule courbe intégrale de  $(E_1)$ . On dit qu'elles réalisent un **feuilletage du plan**.

*Exemple.* Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' = -5y$  sont toutes les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-5x}$ , où  $C$  est un réel.

**Application 38.**  $(E)$  est l'équation différentielle  $2y' + 3y = 0$ .

1. Résoudre  $(E)$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  telle que  $f(4) = 1$ .
3. Donner une interprétation graphique du résultat.

### 7.3.2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

Dans cette section,  $a$  est un réel non nul et  $b$  est un réel.

**Définition 7.12.** L'équation différentielle  $y' = ay + b$ , qui peut aussi s'écrire  $y' - ay = b$ , est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

**Propriété 7.13. Résolution de  $y' - ay = b$**

Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $(E_2) : y' - ay = b$  sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . Il s'agit de montrer que  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(E_2)$  si, et seulement si, il existe un réel  $C$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ .

$\implies$ ) Supposons que  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $(E_2) : y' = ay + b$ . Alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f'(x) = af(x) + b \quad (1)$$

Nous procédons dans la suite en trois étapes.

- Étape 1. On montre que la fonction  $f_p : x \mapsto -\frac{b}{a}$  définie sur  $\mathbb{R}$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(E_2) : y' = ay + b$ .  
 $f'_p$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'_p(x) = 0$ , et  $af_p(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f'_p(x) = af_p(x) + b \quad (2)$$

et ainsi  $f_p$  est bien une solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(E_2)$ .

- Étape 2. On montre que la fonction  $f - f_p$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $(E_1) : y' = ay$ .  
 Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , en effectuant la différence entre (1) et (2), on obtient :

$$f'(x) - f'_p(x) = a(f(x) - f_p(x)), \text{ soit : } (f - f_p)'(x) = a(f - f_p)(x).$$

La fonction  $f - f_p$  est donc bien une solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(E_1)$ .

- Étape 3. D'après la propriété 7.11, il existe un réel  $C$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(f - f_p)(x) = Ce^{ax}$ , soit  $f(x) - f_p(x) = Ce^{ax}$ , soit encore :

$$f(x) = Ce^{ax} + f_p(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}.$$

$\impliedby$ ) Supposons qu'il existe un réel  $C$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ .  
 Alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

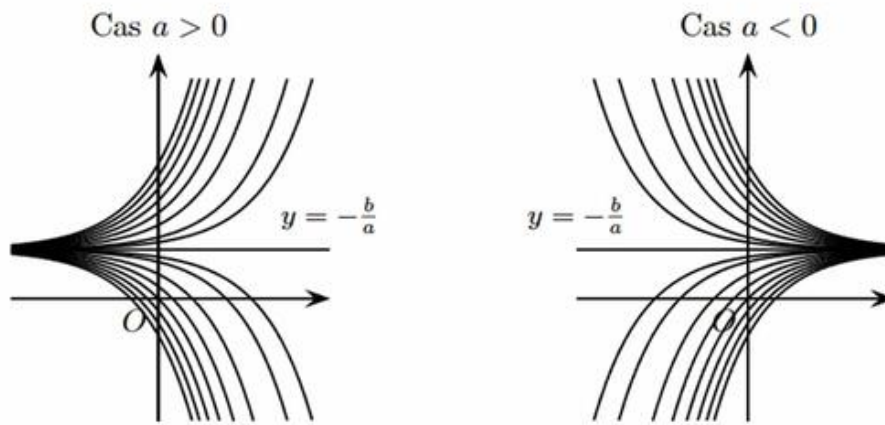
$$f'(x) = Ca e^{ax} = a \left( Ce^{ax} - \frac{b}{a} \right) + b = af(x) + b.$$

Donc  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $(E_2) : y' = ay + b$ . □

*Remarque.* Les solutions de  $(E_2) : y' = ay + b$  s'obtiennent en ajoutant aux solutions de  $(E_1) : y' = ay$  la solution particulière constante  $x \mapsto -\frac{b}{a}$  de  $(E_2)$ .

*Remarque.* Les réels  $a$  et  $b$  étant fixés, voici pour différentes valeurs de  $C$ , les courbes intégrales de  $(E_2)$ .

7.3. Équation différentielle  $y' = ay + b$  et  $y' = ay + f$



Par tout point du plan passe une, et une seule courbe intégrale de  $(E_2)$ .

*Exemple.* Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' + y = 2$  sont toutes les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-x} + 2$ , où  $C$  est un réel.

**Application 39.**  $(E)$  est l'équation différentielle  $y' - 4y = -5$ .

1. Résoudre  $(E)$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  telle que  $f(2) = 1/4$ .
3. Donner une interprétation graphique du résultat.

### 7.3.3 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + f$

Dans cette section,  $a$  est un réel non nul et  $f$  est une fonction définie et continue sur un intervalle de  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 7.14.** L'équation différentielle  $y' = ay + f$ , qui peut aussi s'écrire  $y' - ay = f$ , est (également) appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

**Propriété 7.15. Résolution de  $y' - ay = f$**

Soit  $\varphi$  une solution particulière sur  $I$  de l'équation  $(E_3) : y' - ay = f$ . Alors les solutions sur  $I$  de l'équation  $(E_3)$  sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ce^{ax} + \varphi(x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* Soit  $g$  une fonction définie sur  $I$ . Il s'agit de montrer que  $g$  est solution sur  $I$  de  $(E_3)$  si, et seulement si il existe un réel  $C$  tel que pour tout  $x \in I$ ,  $g(x) = Ce^{ax} + \varphi(x)$ .

$\implies$ ) Supposons que  $g$  est solution sur  $I$  de l'équation différentielle  $(E_3) : y' = ay + f$ . Alors  $g$  est dérivable sur  $I$ , et pour tout  $x \in I$ , on a :

$$g'(x) = ag(x) + f(x) \tag{1}$$

Par ailleurs, puisque  $\varphi$  est solution de  $(E_3)$ , alors  $\varphi$  est dérivable sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$ , on a :

$$\varphi'(x) = a\varphi(x) + f(x) \quad (2)$$

En effectuant la différence entre (1) et (2), on obtient pour tout  $x \in I$  :

$$g'(x) - \varphi'(x) = a(g(x) - \varphi(x)), \text{ soit : } (g - \varphi)'(x) = a(g - \varphi)(x).$$

La fonction  $g - \varphi$  est donc une solution sur  $I$  de l'équation différentielle  $(E_1) : y' = ay$ .

D'après la propriété 7.11, il existe un réel  $C$  tel que pour tout  $x \in I$ ,  $(g - \varphi)(x) = Ce^{ax}$ , soit  $g(x) - \varphi(x) = Ce^{ax}$ , soit encore :

$$g(x) = Ce^{ax} + \varphi(x).$$

$\Leftarrow$ ) Supposons qu'il existe un réel  $C$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = Ce^{ax} + \varphi(x)$ . Alors  $g$  est dérivable sur  $I$  comme somme de fonctions dérivables sur  $I$ , et pour tout  $x \in I$ , on a :

$$\begin{aligned} g'(x) - ag(x) &= Cae^{ax} + \varphi'(x) - a(Ce^{ax} + \varphi(x)) \\ &= \varphi'(x) - a\varphi(x) \\ &= f(x) \text{ car } \varphi \text{ est solution sur } I \text{ de } (E_3). \end{aligned}$$

Donc  $g$  est solution sur  $I$  de l'équation différentielle  $(E_3) : y' = ay + f$ . □

*Remarque.* Les solutions de  $(E_3) : y' = ay + f$  s'obtiennent en ajoutant aux solutions de  $(E_1) : y' = ay$  une solution particulière de  $(E_3)$ .

*Exemple.* On considère l'équation différentielle  $y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x$ .

La fonction  $\varphi : x \mapsto -x - 2$  définie sur  $\mathbb{R}$  est une solution particulière de  $(E)$ . En effet, la fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\varphi'(x) - \frac{1}{2}\varphi(x) = -1 - \frac{1}{2}(-x - 2) = -1 + \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x.$$

Par conséquent, les solutions de  $(E)$  sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ce^{\frac{1}{2}x} + \varphi(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - x - 2, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

### Attention !

Au moment de conclure la résolution d'une équation différentielle  $(E)$ , les rédactions maladroites suivantes sont à éviter :

- « les fonctions  $x \mapsto \dots$  sont solutions de l'équation  $(E)$  » ;
- « toutes les fonctions  $x \mapsto \dots$  sont solutions de l'équation  $(E)$  » ;
- « les fonctions  $x \mapsto \dots$  sont toutes solutions de l'équation  $(E)$  ».

En effet, il est primordial de préciser que nous avons trouvé exacte-

ment toutes les solutions cherchées ! Une rédaction correcte est donc :  
 « Les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions  $x \mapsto \dots$  » ou  
 encore : « Les solutions de l'équation (E) sont exactement les fonctions  
 $x \mapsto \dots$  » ou plus simplement : « Les solutions de l'équation (E) sont les  
 fonctions  $x \mapsto \dots$  ».

**Application 40.** Soit (E) l'équation différentielle  $2y' + 3y = 6x + 1$ .

1. Déterminer une fonction affine  $\varphi$  solution particulière de (E).
2. Dédire toutes les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$ .
3. Donner l'unique solution  $h$  de (E) tel que  $h(0) = 1$ .

## 7.4 Exercices

**Exercice 7.1.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $y' + y = (3 - 2x)e^x$ .

**Exercice 7.2.** On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = y^2 \quad (E)$$

1. Montrer que la fonction constante égale à 0 est solution de (E).
2. Soit  $g$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout réel  $x$ ,  $g(x) \neq 0$ .  
Montrer que  $g$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de (E) si, et seulement si,  $g$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

$$\frac{y'}{y^2} = 1.$$

3. Dédire les solutions ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$  de (E).
4. Déterminer la solution sur  $\mathbb{R}$  de (E) qui vaut 1 en 0.

**Exercice 7.3 (Sujet bac, La Réunion, 2004).** On désigne par  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On suppose que la fonction  $f$  vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y'' - y^2 = 1$
- (2)  $f'(0) = 1$

1. (a) Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) \neq 0$ .  
(b) Calculer  $f(0)$ .
2. Démontrer que la fonction  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y'' = y$ .
3. Pour tout réel  $x$ , on pose  $u(x) = f'(x) + f(x)$  et  $v(x) = f'(x) - f(x)$ .  
(a) Calculer  $u(0)$  et  $v(0)$ .  
(b) Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $u'(x) = u(x)$  et  $v'(x) = -v(x)$ .

- (c) En déduire que la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  définie sur  $\mathbb{R}$  est l'unique fonction satisfaisant aux propriétés (1) et (2).  
 La fonction  $f$  se nomme la fonction **sinus-hyperbolique**, notée **sinh**.
4. (a) Étudier les limites de la fonction  $\sinh$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .  
 (b) Dresser le tableau des variations de la fonction  $\sinh$  sur  $\mathbb{R}$ .
5. (a) Soit  $m$  un nombre réel. Démontrer que l'équation  $\sinh(x) = m$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 (b) Déterminer cette solution lorsque  $m = 3$ .

**Exercice 7.4.** Soit  $\alpha$  un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' = \alpha^2 y \quad (E)$$

1. Montrer que les fonctions  $x \mapsto e^{-\alpha x}$  et  $x \mapsto e^{\alpha x}$  sont solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

On considère dans la suite une fonction  $f$  définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que la fonction  $f$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, la fonction  $g : x \mapsto f'(x) - \alpha f(x)$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

$$y' + \alpha y = 0 \quad (F)$$

3. Déduire que  $f$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe un réel  $C$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) - \alpha f(x) = Ce^{-\alpha x}$ .
4. On note  $h$  la fonction  $x \mapsto e^{-\alpha x} f(x)$ .  
 Montrer que  $f$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe un réel  $C$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = Ce^{-2\alpha x}$ .
5. Déduire que  $f$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}$ .

**Exercice 7.5 ♠ (Modèle de Verhulst<sup>2</sup>).** Le modèle de Verhulst pour décrire l'évolution d'une population (animale ou humaine) est le suivant. On appelle  $p(t)$  la population au temps  $t$  (l'unité de temps est l'année, l'unité de population le millier d'individus). Pour des raisons de place disponible, de nourriture, etc. on postule que cette population admet une valeur maximum  $m$  strictement positive et que l'accroissement de la population pendant un petit intervalle de temps est proportionnel à la fois à :

- l'intervalle de temps ;
- la population  $p(t)$  (plus il y a d'individus, plus il y a de naissances) ;
- l'écart entre population théorique maximum et population actuelle  $m - p(t)$  (quand on approche du maximum de la population, la nourriture disponible devient rare et la mortalité augmente).

2. Pierre-François Verhulst (1804-1849) est un mathématicien belge.

Pour tout réel  $t \geq 0$ , on suppose que  $p(t)$  et  $m-p(t)$  sont des nombres réels (et pas seulement des entiers) strictement positifs.

Selon ce modèle, la fonction  $t \mapsto p(t)$  est solution sur  $[0; +\infty[$  de l'équation différentielle suivante :

$$y' = ay(m-y) \quad (1)$$

où  $a$  est une constante strictement positive.

1. Montrer que  $p$  est solution de (1) sur  $[0; +\infty[$  si, et seulement si, la fonction  $g : t \mapsto \frac{1}{p(t)}$  est solution sur  $[0; +\infty[$  d'une équation différentielle de la forme

$$y' = \alpha y + \beta \quad (2)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels que l'on précisera.

2. Résoudre l'équation différentielle (2) sur  $[0; +\infty[$  et en déduire que les solutions strictement positives de l'équation différentielle (1) sont toutes les fonctions définies sur  $[0; +\infty[$  de la forme :

$$t \mapsto \frac{m}{1 + \lambda e^{-amt}}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

3. (a) Étudier les variations de  $p$  sur  $[0; +\infty[$ .  
(b) Déterminer la limite de  $p$  quand  $t$  tend vers l'infini.
4. **Application.** Dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche la trop forte croissance d'une population de petits rongeurs en tuant une certaine quantité de rongeurs.

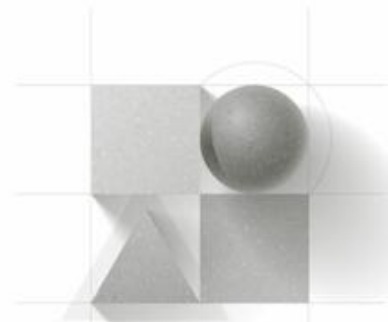
On note  $u(t)$  le nombre des rongeurs vivants au temps  $t$  (exprime en années) dans cette région, et on admet que la fonction  $u$ , ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$\begin{cases} u'(t) &= \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} \quad \forall t \in [0; +\infty[ \\ u(0) &= 1 \end{cases}$$

où  $u'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $u$ .

On suppose que, pour tout réel positif  $t$ , on a  $u(t) > 0$ .

- (a) Déterminer l'expression algébrique de la fonction  $u$ .
- (b) Au bout d'un grand nombre d'années, quelle sera la taille de la population de rongeurs ?



# Intégration

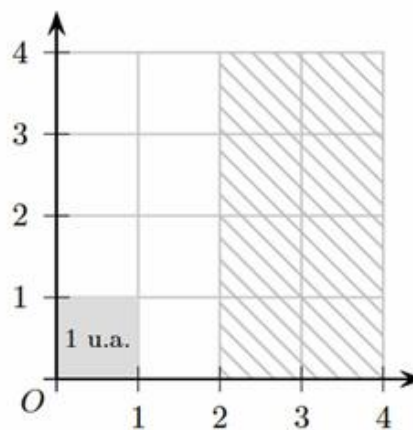
## 8.1 Intégrale et aire

### 8.1.1 Définition

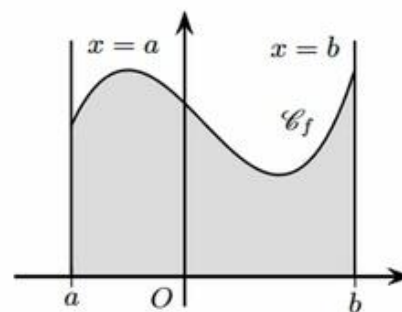
Dans le repère ci-contre, le carré grisé a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du carré « unité » qui a pour aire une **unité d'aire**. On écrit 1 u.a.

L'aire du rectangle hachuré est égale à 8 fois l'aire du carré grisé. L'aire du rectangle hachuré est donc égale à 8 u.a.

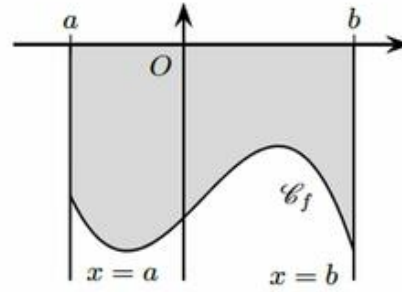
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le  $\text{cm}^2$  par exemple).



**Définition 8.1.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ . Soient  $f$  une fonction continue et positive sur l'intervalle  $[a; b]$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative. On appelle *intégrale de  $f$  sur  $[a; b]$* , l'aire (exprimée en u.a.) de la surface délimitée par  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .



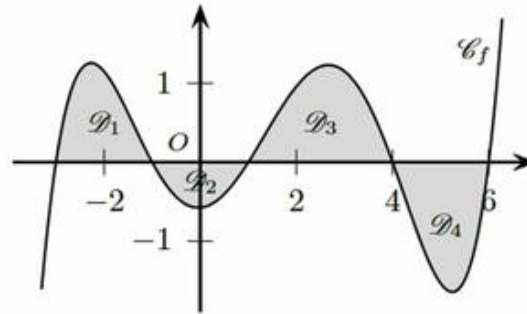
**Définition 8.2.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ . Soient  $f$  une fonction continue et négative sur l'intervalle  $[a; b]$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative. On appelle intégrale de  $f$  sur  $[a; b]$ , l'opposé de l'aire (exprimée en u.a.) de la surface délimitée par  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .



**Définition 8.3.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ . Soient  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative. On appelle intégrale de  $f$  sur  $[a; b]$ , l'aire (exprimée en u.a.) de la surface délimitée par  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  comptée :

- positivement lorsque  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de l'axe des abscisses ;
- négativement lorsque  $\mathcal{C}_f$  est en-dessous de l'axe des abscisses.

*Exemple.* On considère ci-contre la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Alors l'intégrale de  $f$  sur l'intervalle  $[-3; 6]$  est donnée, en unités d'aire, par : Aire( $\mathcal{D}_1$ ) - Aire( $\mathcal{D}_2$ ) + Aire( $\mathcal{D}_3$ ) - Aire( $\mathcal{D}_4$ ).



- Remarque.*
1. L'intégrale d'une fonction continue positive est un réel positif.
  2. L'intégrale d'une fonction continue négative est un réel négatif.
  3. L'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque est un nombre positif (respectivement négatif) lorsque la somme des aires des domaines situés au-dessus (respectivement en-dessous) de l'axe des abscisses est supérieure à la somme des aires des domaines situés en-dessous (respectivement au-dessus) de l'axe des abscisses.

### 8.1.2 Notation

L'intégrale de  $f$  sur l'intervalle  $[a; b]$  se note  $\int_a^b f(x) dx$  et se lit : « l'intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f(x) dx$  ».

- Remarque.*
1. Les réels  $a$  et  $b$  sont appelés les **bornes de l'intégrale** (ou les **bornes d'intégration** de la fonction  $f$ ).
  2. La variable  $x$  est une variable dite muette car elle n'intervient pas dans le résultat de l'intégrale. Ainsi, la variable  $x$  peut être remplacée par toute

## 8.1. Intégrale et aire

autre lettre n'intervenant pas par ailleurs dans l'intégrale. Par conséquent, nous pouvons tout-à-fait écrire :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du \dots$$

3. Le symbole  $dx$  indique que la variable d'intégration est  $x$  (nous verrons plus tard ce que cela signifie).

*Remarque.* Au vu de la définition d'une intégrale, on conviendra aisément que, pour tout réel  $a$  :

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

*Exemple.* Pour intégrer un peu la notion d'intégrale (sans jeu de mot aucun), étudions un exemple. On note  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

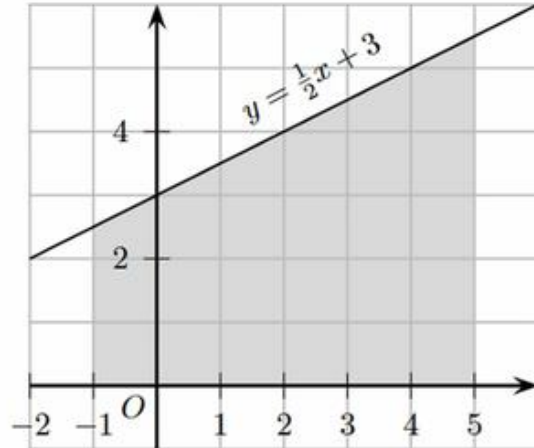
On souhaite déterminer l'intégrale  $\int_{-1}^5 f(x) dx$ , c'est-à-dire l'aire de la surface délimitée par la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x + 3$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 5$ .

Pour ce faire, nous allons nous aider de la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé :

Pour déterminer  $\int_{-1}^5 f(x) dx$ , il suffit alors de dénombrer le nombre de carrés de dimension 1 sur 1 qui se situent sous la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x + 3$  sur l'intervalle  $[-1; 5]$ .

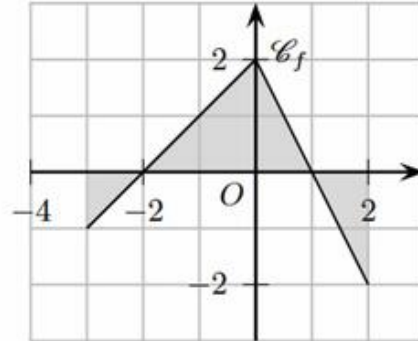
On dénombre facilement 24 carrés de dimension 1 sur 1, par conséquent :

$$\int_{-1}^5 f(x) dx = 24 \text{ u.a.}$$

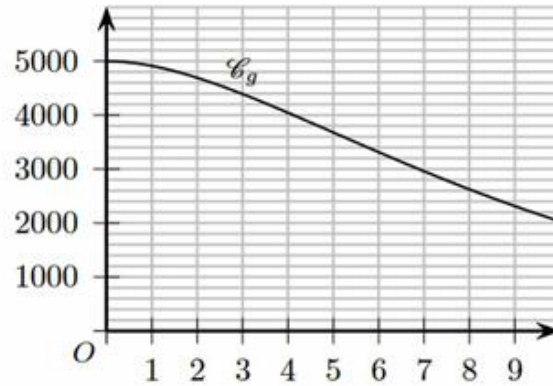


**Application 41.** On note  $f$  la fonction dont la représentation graphique est donnée dans le repère orthogonal ci-contre.

Déterminer l'intégrale  $\int_{-3}^2 f(x) dx$ .



**Application 42.** On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction  $g$ . Donner une valeur approchée (à une unité d'aire près) de l'intégrale  $\int_2^8 g(t) dt$  à l'aide de l'aire d'un trapèze.



Le décompte des unités d'aire sous la courbe représentative d'une fonction n'est pas forcément précis, et il suffirait que les bornes d'intégration de la fonction soient très espacées pour que le calcul de l'intégrale devienne très pénible, voire impossible. Pour remédier à ce problème, il nous faudrait trouver une méthode exacte de calcul d'intégrales, sans passer par le dénombrement des unités d'aires situées sous sa courbe représentative. C'est précisément le sujet de la suite de ce chapitre.

## 8.2 Calcul d'intégrales

### 8.2.1 Théorème fondamental de l'analyse

**Théorème 8.4. Théorème fondamental de l'analyse**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ , et soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$ . Alors la fonction  $F$  définie pour tout  $x \in [a; b]$  par :

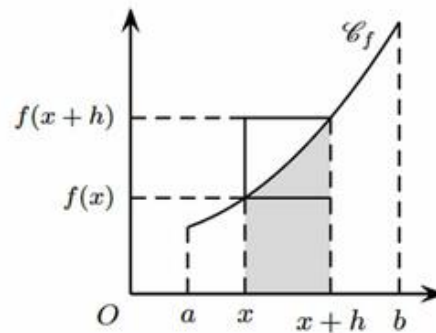
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable sur  $[a; b]$  et pour tout réel  $x \in [a; b]$ , on a  $F'(x) = f(x)$ .

*Démonstration.* On démontre ce théorème uniquement dans le cas où  $f$  est positive et croissante sur l'intervalle  $[a; b]$ . Le cas général est admis.

Soit  $x \in [a; b]$ , et soit  $h$  un réel non nul tel que  $x + h \in [a; b]$ .

- Si  $h > 0$ , puisque  $f$  est croissante, alors  $f(x) \leq f(x + h)$ . Par ailleurs,  $F(x + h) - F(x)$  exprime l'aire sous la courbe représentative de  $f$  sur l'intervalle  $[x; x + h]$  (aire de la zone grisée).



## 8.2. Calcul d'intégrales

On peut donc encadrer cette aire par l'aire de deux rectangles de même largeur  $h$  et de hauteurs  $f(x)$  et  $f(x+h)$  :

$$h \times f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq h \times f(x+h),$$

c'est-à-dire :

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h) \quad (1)$$

— Si  $h < 0$ , on démontre de manière analogue que :

$$f(x+h) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x) \quad (2)$$

Or la fonction  $f$  est continue en  $x$ , donc  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ , et donc d'après le théorème des gendarmes (voir le théorème 2.15), en passant à la limite quand  $h$  tend vers 0 dans les inégalités (1) et (2), on obtient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Ainsi  $F$  est dérivable en  $x$  et  $F'(x) = f(x)$ . Ceci étant vrai pour tout  $x \in [a; b]$ , nous avons bien montré que la fonction  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est dérivable sur  $[a; b]$  et  $F' = f$ . □

*Remarque.* 1. La fonction  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$ . Elle est même l'unique primitive de  $f$  sur  $[a; b]$  telle que  $F(a) = 0$ . Autrement dit,  $F$  est l'unique solution sur  $[a; b]$  de l'équation différentielle  $y' = f$  telle que  $F(a) = 0$ .

2. Ce théorème justifie donc bien l'existence de primitives d'une fonction continue  $f$  sur un intervalle (voir le théorème 7.3).

### 8.2.2 Calcul d'intégrales

Dans cette section, on propose une méthode exacte de calcul d'intégrales.

**Définition 8.5.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ . On définit l'intégrale  $\int_b^a f(x) dx$  par l'égalité

suivante : 
$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

*Exemple.* On a vu dans le dernier exemple de la section 8.1.2 que  $\int_{-1}^5 f(x) dx = 24$ ,

par conséquent : 
$$\int_5^{-1} f(x) dx = -24.$$

**Propriété 8.6. Calcul exacte d'une intégrale**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Alors pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , on a :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

*Démonstration.* On procède dans cette démonstration par disjonction de cas.

- On suppose que  $a < b$  et on note  $H$  la fonction définie pour tout  $x \in [a; b]$  par :

$$H(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

En vertu du théorème fondamental de l'analyse, pour tout  $x \in [a; b]$ , on a  $H'(x) = f(x)$  et  $H(a) = 0$ .

Par ailleurs,  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$ , donc pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $F'(x) = f(x)$ , et ainsi  $F'(x) = H'(x)$ . Par conséquent, il existe un réel  $C$  tel que pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $F(x) = H(x) + C$ . En particulier, on a  $F(a) = H(a) + C = C$  car  $H(a) = 0$ . Ainsi, pour tout  $x \in [a; b]$  on a  $F(x) = H(x) + F(a)$ , soit :

$$H(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

En particulier,  $H(b) = F(b) - F(a)$ . D'où l'égalité souhaitée.

- On suppose que  $a > b$ . D'après la définition 8.5 :  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .

D'après le cas précédent :  $\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b)$ , donc on obtient :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a).$$

- Dans le cas où  $a = b$ , l'égalité est évidente.

□

**Notation.** Afin d'alléger les écritures, on notera souvent :  $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ . On a donc :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

*Remarque.* On vérifie bien à l'aide de la propriété 8.6 que :  $\int_a^a f(x) dx = 0$ , car :

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0.$$

*Exemple.* Calculons  $\int_{-1}^5 \left(\frac{1}{2}x + 3\right) dx$ .

La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$  est continue sur l'intervalle  $[-1; 5]$ , elle admet donc des primitives sur  $[-1; 5]$ .

Une primitive de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$  sur  $[-1; 5]$  est la fonction  $F : x \mapsto \frac{x^2}{4} + 3x$ .

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^5 f(x) dx &= [F(x)]_{-1}^5 = \left[\frac{x^2}{4} + 3x\right]_{-1}^5 \\ &= \frac{5^2}{4} + 3 \times 5 - \left(\frac{(-1)^2}{4} + 3 \times (-1)\right) \\ &= \frac{25}{4} + 15 - \frac{1}{4} + 3 = \frac{24}{4} + 15 + 3 \\ &= 6 + 15 + 3 = 24. \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien le résultat obtenu par décompte des unités d'aires sous la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x + 3$  sur l'intervalle  $[-1; 5]$  (voir l'exemple de la section 8.1.2).

*Remarque.* 1. « **Intégrer** » la fonction  $f$  sur un intervalle  $[a; b]$  veut dire, par abus de langage, calculer l'intégrale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a; b]$ .

2. Dans la notation  $\int_a^b f(x) dx$ , le symbole  $dx$  indique (du moins dans le cadre de ce cours) que lors du calcul de l'intégrale, on primitive la fonction  $f$  par rapport à la variable  $x$  et aucune autre variable intervenant par ailleurs dans l'intégrale.

### Attention !

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$ . Si  $f$  est la fonction nulle sur  $[a; b]$ , alors :  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . La réciproque est toutefois fausse !

Si  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , cela n'implique pas forcément que pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) = 0$ . Par exemple, on a :

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

mais la fonction  $f : x \mapsto x^3$  n'est évidemment pas nulle sur l'intervalle  $[-1; 1]$  !

**Application 43.** Calculer les intégrales proposées.

$$1. \int_0^2 (e^x - 2x - 1) dx$$

$$3. \int_{-2}^3 \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx$$

$$2. \int_1^3 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

$$4. \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$$

## 8.3 Propriétés des intégrales

### 8.3.1 Relation de Chasles

**Propriété 8.7. Relation de Chasles**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels de  $I$ . Alors :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

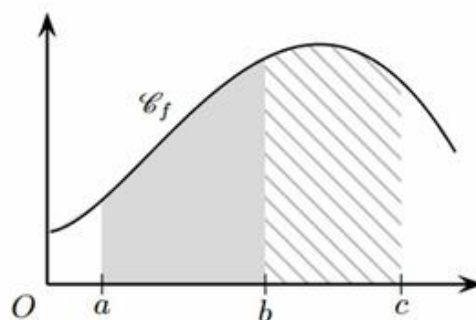
*Démonstration.* Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Alors :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x) dx.$$

□

*Remarque.* Lorsque  $f$  est positive sur  $I$  et  $a \leq b \leq c$ , la relation de Chasles traduit l'additivité des aires : l'aire de la réunion de deux domaines adjacents (domaine grisé et domaine hachuré dans la figure ci-contre) est la somme des aires de chacun d'eux.

Dans le cadre des intégrales, la relation de Chasles est vraie quels que soient l'ordre des nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  et le signe de  $f$ .



*Exemple.* Calculons  $\int_{-2}^2 x^3 dx$  en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 x^3 dx &= \int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx \\ &= \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 + \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^2 \\ &= \frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} + \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} \\ &= -4 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

*Remarque.* D'après la relation de Chasles :  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx$ .  
 Or  $\int_a^a f(x) dx = 0$ , donc  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0$ , et par conséquent, on retrouve bien la définition 8.5 :  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .

### 8.3.2 Linéarité

#### Propriété 8.8. Linéarité de l'intégrale

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ .

1. Pour tout réel  $k$  :  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ .

2.  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ .

*Démonstration.* Notons  $F$  et  $G$  des primitives respectivement de  $f$  et  $g$  sur  $I$ . En vertu de la propriété 7.7, pour tout réel  $k$ ,  $kF$  est une primitive de  $kf$ , et  $F + G$  est une primitive de  $f + g$ . Nous avons alors :

1.  $\int_a^b kf(x) dx = [kF(x)]_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k \int_a^b f(x) dx$ .

2.  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = [F(x) + G(x)]_a^b = (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ .

□

*Exemple.* Calculons  $\int_1^e \left( e^x - \frac{5}{x} \right) dx$  en utilisant les propriétés de linéarité :

$$\begin{aligned} \int_1^e \left( e^x - \frac{5}{x} \right) dx &= \int_1^e e^x dx - \int_1^e \frac{5}{x} dx \\ &= \int_1^e e^x dx - 5 \int_1^e \frac{1}{x} dx \\ &= [e^x]_1^e - 5[\ln(x)]_1^e \\ &= e^e - e^1 - 5(\ln(e) - \ln(1)) \\ &= e^e - e - 5 \ln(e) \\ &= e^e - e - 5 \end{aligned}$$

**Application 44.** On souhaite calculer l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$ .

1. On pose  $J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ . Calculer  $J$ .
2. Calculer  $I + J$ .
3. Dédurre  $I$ .

### 8.3.3 Positivité

#### Propriété 8.9. Positivité de l'intégrale

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$  tels que  $a \leq b$ .

1. Si, pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) \geq 0$ , alors :  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .
2. Si, pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) \leq 0$ , alors :  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$ .

*Démonstration.*  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et  $a$  et  $b$  sont deux réels de  $I$  tels que  $a \leq b$ .

1. Si la fonction  $f$  est positive sur  $[a; b]$ , l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  exprime l'aire sous la courbe représentative de  $f$  sur l'intervalle  $[a; b]$ , donc l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  est un nombre positif.
2. Si pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) \leq 0$ , alors  $-f(x) \geq 0$ , et donc d'après l'item 1, on a  $\int_a^b -f(x) dx \geq 0$ .

Mais comme par linéarité de l'intégrale, on a  $\int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ , il vient que :  $-\int_a^b f(x) dx \geq 0$ , soit :  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$ .

□

#### Attention !

1. L'hypothèse  $a \leq b$  est indispensable car  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ .
2. Les réciproques sont fausses. Par exemple,  $\int_{-1}^2 x dx = \frac{3}{2} \geq 0$ , mais la fonction  $x \mapsto x$  n'est pas positive sur l'intervalle  $[-1; 2]$ .

### 8.3. Propriétés des intégrales

*Exemple.* On pose  $I = \int_0^1 \frac{x-4}{x^2+x+1} dx$ .

Pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a  $x-4 < 0$  et  $x^2+x+1 > 0$ , donc  $\frac{x-4}{x^2+x+1} < 0$ .

Par positivité de l'intégrale, on conclut que  $\int_0^1 \frac{x-4}{x^2+x+1} dx < 0$ , soit :  $I < 0$ .

**Application 45.** Étudier le signe de chaque intégrale sans chercher à la calculer.

$$1. J = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} t \ln(t) dt \quad 2. K = \int_{-3}^{-2} \frac{e^{x-2}}{x} dx$$

#### 8.3.4 Passage à l'intégrale dans les inégalités

##### Propriété 8.10. Croissance de l'intégrale

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$  tels que  $a \leq b$ . Si pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) \geq g(x)$ , alors :

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

*Démonstration.* Si pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) \geq g(x)$ , alors pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) - g(x) \geq 0$ , donc en utilisant la positivité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0.$$

Or  $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$  par linéarité des intégrales (propriété 8.8), donc  $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0$ , soit  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ .  $\square$

*Remarque.* On dit souvent que l'on intègre l'inégalité sur l'intervalle  $[a; b]$ , ou que l'on passe à l'intégrale sur l'intervalle  $[a; b]$  dans l'inégalité.

*Exemple.* Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq 3$ . En intégrant l'inégalité précédente sur  $[0; 2]$ , on obtient :

$$\int_0^2 f(x) dx \leq \int_0^2 3 dx, \quad \text{soit : } \int_0^2 f(x) dx \leq 6.$$

**Application 46.** Notons  $f$  la fonction définie pour tout  $t \in ]0; +\infty[$  par :

$$f(t) = \frac{1}{te^t}.$$

On note  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier  $n \geq 1$  par  $u_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$ .

1. Soit un entier  $n \geq 1$ . Montrer que pour tout réel  $t \in [n; n+1]$ , on a :

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n).$$

2. Dédurre que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$ .

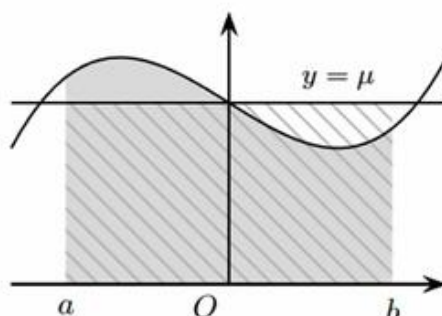
3. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ?

### 8.3.5 Inégalité de la moyenne

**Définition 8.11.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , et soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$ . On appelle valeur moyenne de  $f$  sur  $[a; b]$  le nombre

$$\text{réel } \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

*Remarque.* L'interprétation géométrique de la valeur moyenne  $\mu$  d'une fonction  $f$  positive sur  $[a; b]$  est que l'aire sous la courbe représentative de  $f$  (aire du domaine grisé) est égale à l'aire sous la droite d'équation  $y = \mu$  (aire du domaine hachuré) sur  $[a; b]$ .



*Exemple.* Notons  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 5.$$

La valeur moyenne  $\mu$  de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 10]$  est :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{10-0} \int_0^{10} (3x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \frac{1}{10} [x^3 - 2x^2 + 5x]_0^{10} \\ &= \frac{1}{10} (10^3 - 2 \times 10^2 + 5 \times 10) \\ &= \frac{1}{10} (1000 - 200 + 50) \\ &= 85. \end{aligned}$$

Finalement, la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[0; 10]$  est  $\mu = 85$ .

#### Propriété 8.12. Inégalité de la moyenne

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , et soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$ . Soient  $m$  et  $M$  deux réels tels que pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $m \leq f(x) \leq M$ . Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

### 8.3. Propriétés des intégrales

*Démonstration.* On sait que pour tout  $x \in [a; b]$ , on a  $m \leq f(x) \leq M$ . En passant à l'intégrale sur l'intervalle  $[a; b]$  dans ces inégalités, on obtient :

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx, \text{ soit : } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a).$$

□

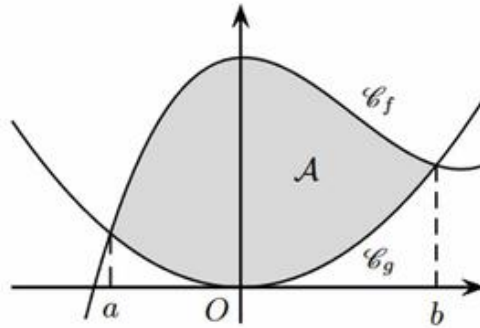
*Remarque.* A partir de l'inégalité de la moyenne, puisque  $b - a > 0$ , on déduit que :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M, \text{ soit : } m \leq \mu \leq M.$$

#### 8.3.6 Aire du domaine compris entre deux courbes

**Propriété 8.13.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , et soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur l'intervalle  $[a; b]$ . On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  leurs courbes représentatives dans un repère du plan. On suppose que pour tout  $x \in [a; b]$ , on a  $g(x) \leq f(x)$ . Alors l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine compris entre  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sur  $[a; b]$  est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \text{ u.a.}$$



*Démonstration.* On ne démontre que le cas où  $f$  et  $g$  sont positives sur  $[a; b]$ , le cas général étant admis.

Pour tout  $x \in [a; b]$ , on a  $0 \leq g(x) \leq f(x)$ , donc l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine compris entre  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  est donnée par la différence entre l'aire du domaine sous la courbe  $\mathcal{C}_f$  et celle du domaine sous la courbe  $\mathcal{C}_g$ , soit en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

□

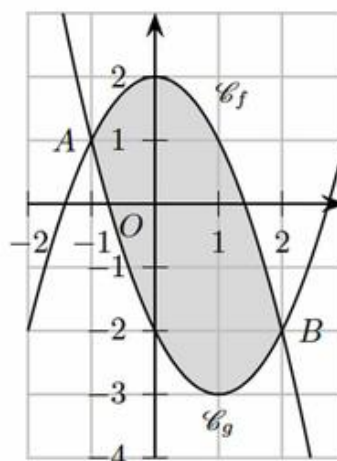
**Application 47.** Notons  $f$  et  $g$  les fonctions définies pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = -x^2 + 2 \text{ et } g(x) = x^2 - 2x - 2.$$

On donne ci-contre dans un repère orthonormé les représentations graphiques  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  des fonctions  $f$  et  $g$ .

Les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  se coupent aux points  $A(-1; 1)$  et  $B(2; -2)$ .

Calculer, en unités d'aires, l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine grisé.



## 8.4 Intégration par parties

Lorsque le calcul d'une intégrale n'est pas possible directement avec une primitive connue, on peut utiliser la formule dite de l'intégration par parties ci-dessous.

### Propriété 8.14. Intégration par parties

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  telles que  $u'$  et  $v'$  soient continues sur  $I$ . Soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ . Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

*Démonstration.* Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$ , donc la fonction produit  $uv$  est dérivable sur  $I$  et  $(uv)' = u'v + uv'$ .

Les fonctions  $u$ ,  $u'$ ,  $v$  et  $v'$  étant continues sur  $I$ , les fonctions  $(uv)'$ ,  $u'v$ ,  $uv'$  le sont également sur  $I$ . Ces fonctions admettent donc des primitives sur  $I$  et on a :

$$\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b ((u'(x)v(x) + u(x)v'(x))) dx.$$

Par linéarité des intégrales :  $\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$ .

La fonction  $uv$  est une primitive de la fonction  $(uv)'$ , donc :  $\int_a^b (uv)'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b$ .

On obtient donc :  $[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$ , d'où l'égalité souhaitée. □

*Exemple.* On souhaite calculer  $\int_{-1}^0 xe^x dx$ .

Pour tout réel  $x \in [-1; 0]$ , on pose  $u(x) = x$  et  $v(x) = e^x$ . Les fonction  $u : x \mapsto$

## 8.5. Exercices

$u(x)$  et  $v : x \mapsto v(x)$  sont dérivables sur  $[-1; 0]$  et pour tout  $x \in [-1; 0]$ , on a  $u'(x) = 1$  et  $v'(x) = e^x$ .

Par ailleurs, les fonctions  $u' : x \mapsto u'(x)$  et  $v' : x \mapsto v'(x)$  sont continues sur  $[-1; 0]$ .

D'après la formule d'intégration par parties, on a :

$$\int_{-1}^0 x e^x dx = [x e^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x dx = e^{-1} - [e^x]_{-1}^0 = 2e^{-1} - 1.$$

*Remarque.* 1. La formule d'intégration par parties peut également s'écrire de la manière suivante :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

2. Il est très important de choisir  $u$  et  $v$  de manière pertinente, au risque de ne pas pouvoir appliquer la formule d'intégration par parties. Le choix de  $u$  et  $v$  doit être guidé par le fait que certaines fonctions sont plus faciles à intégrer que d'autres.

**Application 48.** En appliquant la formule d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$1. I = \int_1^e (2x - 1) \ln(x) dx \qquad 2. J = \int_0^2 4(2x + 1)^3 e^{x^2+x-1} dx$$

## 8.5 Exercices

**Exercice 8.1 (Sujet bac, Pondichérie, 2008).**

1. Notons  $f$  et  $H$  les fonctions définies pour tout  $x \in [1; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad H(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

- (a) Justifier que  $f$  et  $H$  sont bien définies sur  $[1; +\infty[$ .  
(b) Quelle relation existe-t-il entre  $H$  et  $f$ ?  
(c) Notons  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé du plan.  
Interpréter en termes d'aire le nombre  $H(3)$ .

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement de  $H(3)$ .

- (a) Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $\frac{x}{e^x - 1} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ .  
(b) En déduire l'égalité suivante :

$$\int_1^3 f(x) dx = 3 \ln \left( 1 - \frac{1}{e^3} \right) - \ln \left( 1 - \frac{1}{e} \right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx.$$

(c) Montrer que si  $1 \leq x \leq 3$ , alors :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right).$$

(d) En déduire un encadrement de  $\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$  puis de  $H(3)$ .

**Exercice 8.2 (Sujet bac, Asie, 2010).**

### Partie A

On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x > 0$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal du plan.

1. (a) Déterminer la limite de la fonction  $f$  en 0.  
 (b) Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .  
 (c) Quelles conséquences graphiques peut-on déduire de ces deux résultats ?
2. (a) Démontrer que pour tout réel  $x$  strictement positif, on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1).$$

- (b) Déterminer le signe de  $f'$  et en déduire le tableau des variations de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
- (c) Démontrer que l'équation  $f(x) = 2$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}_+^*$  a une unique solution notée  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$  et donner la valeur approchée de  $\alpha$  arrondie au centième.

### Partie B. Étude d'une suite d'intégrales

On note  $(I_n)$  la suite d'intégrales définie pour tout entier  $n \geq 2$  par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx.$$

1. Calculer  $I_2$ .
2. (a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1 - n)I_n.$$

- (b) Calculer  $I_3$ .

3. (a) Établir que pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[1; 2]$  et pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :

$$0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}.$$

- (b) En déduire un encadrement de  $I_n$  pour tout entier  $n \geq 2$ , puis étudier la limite éventuelle de la suite  $(I_n)$ .

**Exercice 8.3 (Sujet bac, Métropole, 1995).** L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

- Notons  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in [0; 1]$  par :  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .
  - Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ . En déduire  $u_0$ .
  - Calculer  $u_1$ .
- Prouver que la suite  $(u_n)$  est décroissante, puis déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
  - Montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a :  $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$ .
  - En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \quad (1)$$

Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

- Pour tout entier  $n \geq 3$ , on pose  $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$ .
  - Vérifier que pour tout entier  $n \geq 3$ , on a :  $u_n + u_{n-2} = I_n$ .
  - Montrer que pour tout entier  $n \geq 3$ , on a :

$$nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}.$$

- (c) En déduire que pour tout entier  $n \geq 3$ , on a :

$$(2n-1)u_n \leq \sqrt{2} \quad (2)$$

- (d) A l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite  $(nu_n)$  est convergente et calculer sa limite.

**Exercice 8.4 ♠ (Intégrales de Wallis).** On note  $(W_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt.$$

1. (a) Pour tout entier naturel  $n$ , montrer que  $W_n > 0$  et  $W_{n+1} \leq W_n$ .  
 (b) La suite  $(W_n)$  est-elle convergente ?
2. Établir l'égalité ci-dessous valable pour tout entier naturel  $n$  :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$ .
4. Établir la limite suivante :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ .
5. Montrer que la suite  $(W_n)$  est équivalente à la suite  $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\right)$ , c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = 1.$$

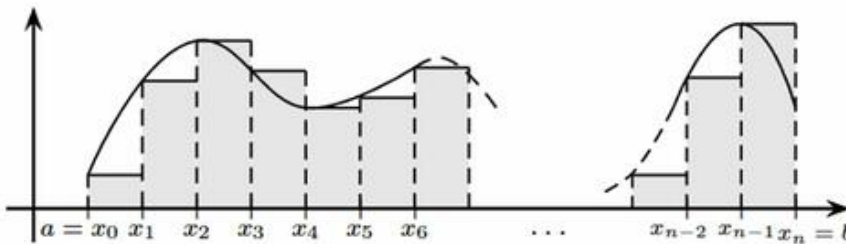
Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi/(2n)} = 0$  et que la suite  $(W_n)$  est équivalente à la suite  $\left(\sqrt{\pi/(2n)}\right)$ , un résultat dans le supérieur permettra de conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$ .

**Exercice 8.5 ♠ (Méthode des rectangles).** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$ .

Soit un entier  $n \geq 1$ .

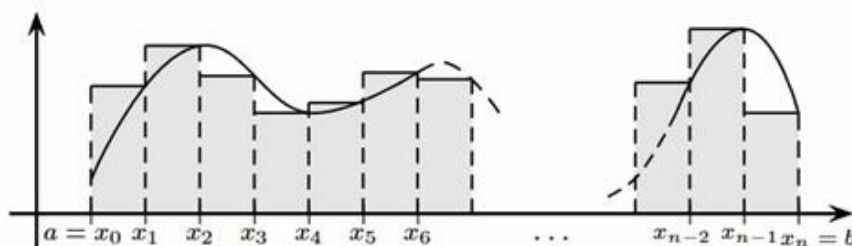
- Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on pose :  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ . La suite  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  ainsi définie est appelée une subdivision de  $[a; b]$  de pas  $h = \frac{b-a}{n}$ .
- Les nombres  $S_n(f)$  et  $S'_n(f)$  suivants se nomment **sommes de Riemann**<sup>1</sup> associées à la subdivision  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  et à la fonction  $f$  :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad ; \quad S'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$$



L'aire du domaine grisé est égale à  $S_n(f)$ .

1. Bernhard Riemann (1826-1866) est un mathématicien allemand, élève de Carl Gauss. Il a apporté d'inestimables contributions à la topologie, l'analyse et la géométrie différentielle. La géométrie riemannienne a servi de cadre mathématique à la théorie de la relativité générale.



L'aire du domaine grisé est égale à  $S'_n(f)$ .

On souhaite établir dans cet exercice, uniquement dans le cas où  $f$  est monotone et positive sur  $[a; b]$ , les égalités suivantes<sup>2</sup> :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Dans la suite, on suppose que la fonction  $f$  est croissante (le cas décroissant se traite de manière analogue).

1. Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  et pour tout  $x \in [x_k; x_{k+1}]$ , montrer que l'on a :

$$f(x_k) \leq f(x) \leq f(x_{k+1}).$$

2. Dédire les inégalités suivantes :

$$S_n(f) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq S'_n(f).$$

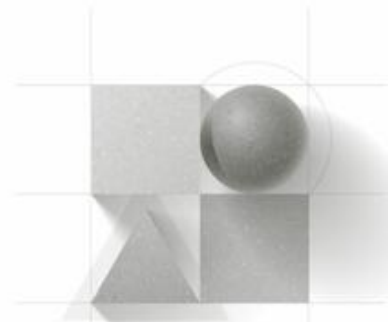
3. (a) Montrer que :  $S'_n(f) - S_n(f) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$ .  
 (b) Dédire la limite de la suite  $(S_n(f))$  puis celle de la suite  $(S'_n(f))$ .
4. **Application.** Calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p$ , où  $p \in \mathbb{N}$ .
5. (a) Compléter la fonction Python `rect(f, a, b, n)` ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $[a; b]$  et un entier  $n \geq 1$  donnés, une approximation  $S_n(f)$  de l'intégrale  $I = \int_a^b f(x) dx$ .

```

1 def rect(f, a, b, n):
2     h = (b - a) / n
3     s = 0
4     x = a
5     for i in range(n):
6         s = .....
7         x = x + h
8     return .....
```

- (b) Faire appel à la fonction `rect` pour trouver une approximation de l'intégrale  $\int_0^1 \ln(x+1) dx$ .

2. Le cas général, admis dans ce livre, sera démontré dans le supérieur.



# Combinatoire et dénombrement

## 9.1 Cardinal d'ensembles finis

### 9.1.1 Ensemble fini et cardinal

**Définition 9.1.** Soit  $E$  un ensemble.

1. On dit que  $E$  est un ensemble fini s'il contient un nombre fini d'éléments.
2. Le nombre d'éléments de  $E$  est appelé le cardinal de l'ensemble  $E$  et il est noté  $\text{Card}(E)$  ou  $|E|$ .

*Exemple.* Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  quatre réels distincts et l'ensemble  $E = \{\alpha; \beta; \gamma; \delta\}$ .  $E$  est un ensemble fini à quatre éléments, donc :  $\text{Card}(E) = 4$ .

*Remarque.* 1. On a :  $\text{Card}(\emptyset) = 0$ .

2. Certains ensembles ne sont pas finis : les ensembles  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  ou l'intervalle  $[0; 1]$  etc.

### 9.1.2 Principe additif

On rappelle que deux ensembles  $A$  et  $B$  sont dits disjoints si  $A \cap B = \emptyset$ , c'est-à-dire s'ils n'ont aucun élément en commun.

**Propriété 9.2. Principe additif**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis disjoints. Alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

*Démonstration.* Si  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ , l'égalité est vérifiée.

Posons  $A = \{a_1; \dots; a_n\}$  et  $B = \{b_1; \dots; b_p\}$ , où  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels non nuls et où  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p$  sont des réels tous distincts. Les ensembles  $A$  et  $B$  ainsi définis sont disjoints.

On a  $\text{Card}(A) = n$  (les réels  $a_1, \dots, a_n$  sont distincts) et  $\text{Card}(B) = p$  (les réels  $b_1, \dots, b_p$  sont distincts).

De plus  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(\{a_1; \dots; a_n; b_1; \dots; b_p\}) = n + p$  car  $A$  et  $B$  sont disjoints, d'où l'égalité souhaitée. □

*Exemple.* Posons  $E_1 = \{1; 3; 5\}$  et  $E_2 = \{2; 4; 6; 8\}$ .

Les ensembles  $E_1$  et  $E_2$  sont disjoints car  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ .

On a  $\text{Card}(E_1) = 3$  et  $\text{Card}(E_2) = 4$ , donc  $\text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) = 7$ .

Par ailleurs,  $E_1 \cup E_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8\}$ , donc  $\text{Card}(E_1 \cup E_2) = 7$ , et ainsi on retrouve bien l'égalité :  $\text{Card}(E_1 \cup E_2) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2)$ .

*Remarque.* 1. On peut généraliser le principe additif : soit un entier  $n \geq 2$  et soient  $n$  ensembles finis  $E_1, E_2, \dots, E_n$  deux à deux disjoints. Alors :

$$\text{Card}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + \dots + \text{Card}(E_n).$$

2. Lorsque les  $n$  ensembles sont de même cardinal  $p$ , le principe additif devient :

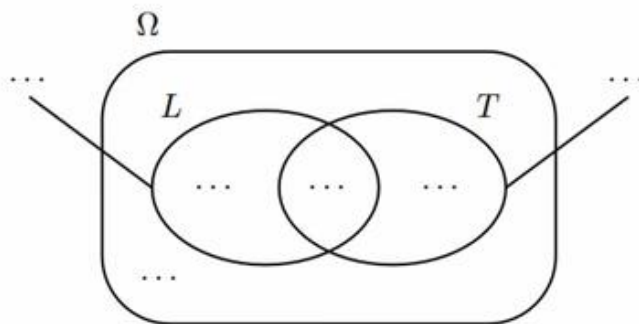
$$\text{Card}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = n \times \text{Card}(E_1) = np.$$

Dans ce cas particulier, le principe additif porte le nom de **principe des bergers**. Le rapport avec les bergers ? Un berger qui possède  $n$  moutons possède aussi  $4n$  pattes de moutons !

**Application 49.** Dans une classe de terminale, les options latin et théâtre sont proposées. On sait que 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune. On note :

- $L$  l'ensemble des élèves pratiquant le latin ;
- $T$  l'ensemble des élèves pratiquant le théâtre ;
- $\Omega$  l'ensemble de tous les élèves de cette classe.

1. Recopier et compléter le diagramme de Venn ci-dessous.



2. En utilisant le principe additif, calculer  $\text{Card}(\Omega)$ .

### 9.1.3 Principe multiplicatif

**Définition 9.3.** Soit un entier  $n \geq 2$  et soient  $n$  ensembles  $E_1, \dots, E_n$  non vides.

1. Le produit cartésien des ensembles  $E_1, \dots, E_n$  est l'ensemble, noté  $E_1 \times \dots \times E_n$ , composé des éléments  $(a_1; \dots; a_n)$  où  $a_1 \in E_1, \dots, a_n \in E_n$ .
2. Un élément  $(a_1; \dots; a_n)$  de  $E_1 \times \dots \times E_n$  est appelé un  $n$ -uplet.

*Remarque.* Soit  $E$  un ensemble non vide.

1. Le produit cartésien  $E \times E$  se note  $E^2$ . Plus généralement, pour tout entier  $n \geq 2$ , le produit cartésien  $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}}$  se note  $E^n$ .
2. Un élément de  $E^n$  s'appelle un  $n$ -uplet de  $E$ .

*Remarque.* 1. Un 2-uplet est appelé **couple**.

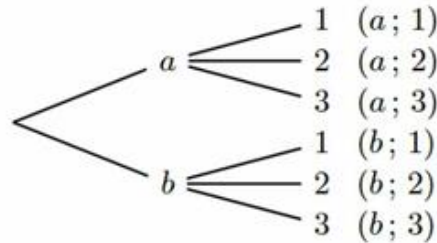
2. Un 3-uplet est appelé **triplet**.

3. Un 4-uplet est appelé **quadruplet**.

*Exemple.*  $a$  et  $b$  sont deux réels distincts. On pose  $E = \{a; b\}$  et  $F = \{1; 2; 3\}$ .

1. On a  $E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (a; 3); (b; 1); (b; 2); (b; 3)\}$ .

On peut retrouver facilement les couples de l'ensemble  $E \times F$  à l'aide de l'arbre ci-dessous.



On a aussi  $F \times E = \{(1; a); (1; b); (2; a); (2; b); (3; a); (3; b)\}$ .

2. On a  $E^2 = E \times E = \{(a; a); (a; b); (b; a); (b; b)\}$ .

*Exemple.* 1.  $(a; b; c; a; a; b; a; c; b; c)$  est un 10-uplet de l'ensemble  $E = \{a; b; c\}$  où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels distincts, c'est-à-dire un élément de l'ensemble  $E^{10}$ .

2.  $(1; 2; 2; 1)$  et  $(2; 2; 1; 1)$  sont deux 4-uplets (ou deux quadruplets) de l'ensemble  $E = \{1; 2\}$ . Ce sont donc deux éléments de l'ensemble  $E^4$ .

#### Attention !

Les éléments d'un  $n$ -uplet sont ordonnés ! Par exemple,  $(1; 3; 2)$  et  $(1; 2; 3)$  sont deux triplets différents.

**Propriété 9.4. Principe multiplicatif**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis non vides. Alors :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B).$$

*Démonstration.* Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls. Supposons que  $\text{Card}(A) = n$  et  $\text{Card}(B) = p$ .

Pour construire un couple de l'ensemble  $A \times B$ , on dispose de  $n$  choix pour la première composante, et pour chacun de ces choix, on dispose de  $p$  choix pour la deuxième composante, ce qui donne un total de  $n \times p$  choix. L'ensemble  $A \times B$  contient donc  $n \times p$  couples, d'où l'égalité souhaitée.  $\square$

*Remarque.* On peut généraliser le principe multiplicatif : soit un entier  $n \geq 2$  et soient  $n$  ensembles finis  $E_1, E_2, \dots, E_n$  non vides. Alors :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_n).$$

*Exemple.* Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

On note  $E$  l'ensemble des entrées,  $P$  l'ensemble des plats et  $D$  l'ensemble des desserts.

Le nombre de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert est donné par  $\text{Card}(E \times P \times D)$ .

On a  $\text{Card}(E) = 3$ ,  $\text{Card}(P) = 4$  et  $\text{Card}(D) = 2$ , donc d'après le principe multiplicatif,

$$\text{Card}(E \times P \times D) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(P) \times \text{Card}(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24.$$

**⚠ Attention !**

Le signe  $\times$  dans  $\text{Card}(E \times F)$  désigne le produit cartésien des ensembles  $E$  et  $F$  (il se lit « croix »), tandis que le signe  $\times$  dans  $\text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$  symbolise la multiplication entre deux nombres entiers (il se lit « fois ») !

La propriété ci-dessous est un cas particulier du principe multiplicatif (dans sa version généralisée) dans le cas où  $E_1 = E_2 = \dots = E_n$ .

**Propriété 9.5. Nombre de  $n$ -uplets de  $E$** 

Soient  $E$  un ensemble fini non vide et  $n$  un entier naturel non nul. Alors :

$$\text{Card}(E^n) = \text{Card}(E)^n.$$

Autrement dit, le nombre de  $n$ -uplets de  $E$  est égal à  $\text{Card}(E)^n$ .

*Exemple.* On lance trois dés cubiques l'un après l'autre dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse aux trois nombres apparaissant sur les faces supérieures.

On pose  $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  l'ensemble des issues possibles pour un dé.

Alors  $E^3$  est l'ensemble des triplets possibles. On a par exemple  $(1; 6; 4) \in E^3$ ,  $(6; 1; 4) \in E^3$  et  $(2; 2; 2) \in E^3$ .

Le cardinal de l'ensemble  $E^3$  est donné par :

$$\text{Card}(E^3) = \text{Card}(E)^3 = 6^3 = 216.$$

*Exemple.* On cherche le nombre de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) que l'on peut former avec les lettres A, E, I, O et U.

Cela revient à déterminer le nombre de 3-uplets de l'ensemble  $\mathcal{S} = \{A; E; I; O; U\}$ , c'est-à-dire à déterminer le nombre d'éléments de l'ensemble  $\mathcal{S}^3$ .

Puisque  $\text{Card}(\mathcal{S}^3) = \text{Card}(\mathcal{S})^3 = 5^3 = 125$ , on peut former 125 mots de trois lettres avec les lettres A, E, I, O et U.

*Exemple.* On dispose de trois tiroirs pour y ranger cinq pulls différents. On cherche le nombre de rangements possibles.

Posons  $\mathcal{T} = \{t_1; t_2; t_3\}$  l'ensemble des tiroirs. Un rangement est alors un 5-uplet de l'ensemble  $\mathcal{T}$ . Par exemple, le 5-uplet  $(t_1; t_1; t_2; t_3; t_3)$  de  $\mathcal{T}$  signifie que les deux premiers pulls sont rangés dans le tiroir  $t_1$ , le troisième est rangé dans le tiroir  $t_2$  et les deux derniers sont rangés dans le tiroir  $t_3$ . Le 5-uplet  $(t_1; t_1; t_1; t_1; t_1)$  de  $\mathcal{T}$  signifie, quant à lui, que les cinq pulls sont rangés dans le tiroir  $t_1$ .

On dispose alors de  $\text{Card}(\mathcal{T}^5) = \text{Card}(\mathcal{T})^5 = 3^5 = 243$  rangements possibles.

*Exemple.* On cherche le nombre de mots de sept lettres contenant le mot « OUPS » (par exemple « BOUPSAR » ou « QIOUPSI »).

Pour construire un mot quelconque de sept lettres contenant le sous-mot « OUPS », on peut :

- d'abord choisir la position du sous-mot « OUPS » (4 possibilités);
- puis choisir arbitrairement les autres lettres, c'est-à-dire choisir un 3-uplet de l'alphabet ( $26^3$  possibilités),

d'où un total de  $4 \times 26^3 = 70304$  mots.

*Remarque.* Les  $n$ -uplets d'un ensemble  $E$  sont utilisés dans des situations où les répétitions sont permises et où l'ordre à une importance. A ce titre, le nombre de  $n$ -uplets de  $E$  peut être vu comme étant le nombre de tirages avec ordre et avec remise de  $k$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments.

### Application 50.

1. On note  $C$  l'ensemble ci-dessous :

$$\{(6; 2); (6; 4); (5; 2); (5; 4); (10; 2); (10; 4); (3; 2); (3; 4)\}.$$

Écrire  $C$  sous la forme d'un produit cartésien de deux ensembles.

2. On pose  $E = \{a\}$ ,  $F = \{b; d\}$  et  $G = \{a; b; c\}$ , où  $a, b, c$  et  $d$  sont quatre réels distincts.  
Déterminer  $E \times F$ ,  $F^2$ ,  $E^2$  et  $E \times F \times G$ .

**Application 51.** Un immeuble est protégé par un digicode. Ce code peut être composé de quatre, cinq ou six chiffres allant de 0 à 9, puis d'une lettre sélectionnée parmi les lettres  $A$  ou  $B$ . On note :

- $A_4$  l'ensemble des mots de passes composés de 4 chiffres puis d'une lettre ;
  - $A_5$  l'ensemble des mots de passes composés de 5 chiffres puis d'une lettre ;
  - $A_6$  l'ensemble des mots de passes composés de 6 chiffres puis d'une lettre.
1. Expliciter les ensembles  $A_4$ ,  $A_5$  et  $A_6$  à l'aide de produits cartésiens, puis calculer leur cardinal.
  2. Donner le nombre total de codes que l'on peut former avec ce système en justifiant.

## 9.2 Arrangements et permutations

### 9.2.1 Factorielle d'un entier naturel

**Définition 9.6.** Soit  $n$  un entier naturel. On appelle *factorielle de  $n$*  l'entier naturel, noté  $n!$ , égal à :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

*Exemple.* 1. On a  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ .

2. On a  $\frac{6!}{3!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 4 \times 5 \times 6 = 120$ .

### 9.2.2 Arrangements d'un ensemble

**Définition 9.7.** Soit un entier  $n \geq 1$ . Soient  $E$  un ensemble à  $n$  éléments et  $k$  un entier tel que  $0 \leq k \leq n$ . Un  $k$ -arrangement de  $E$  (ou un arrangement de  $k$  éléments de  $E$ ) est un  $k$ -uplet d'éléments distincts de  $E$ .

*Exemple.* Posons  $E = \{a; b; c; d\}$ , où  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels distincts. Alors  $(b; c; d)$ ,  $(b; d; c)$ ,  $(c; b; d)$  et  $(a; c; d)$  sont quatre 3-arrangements de  $E$ .

#### Attention !

Un  $k$ -arrangement est un  $k$ -uplet. La réciproque est fautive : un  $k$ -uplet n'est pas forcément un  $k$ -arrangement ! Ainsi,  $(b; c; b)$  est un 3-uplet de  $E = \{a; b; c; d\}$  mais ne forme pas un 3-arrangement de  $E$  car ses éléments ne sont pas tous distincts.

**Propriété 9.8. Nombre de  $k$ -arrangements de  $E$** 

Soit un entier  $n \geq 1$ . Soient  $E$  un ensemble à  $n$  éléments et  $k$  un entier tel que  $0 \leq k \leq n$ . Le nombre de  $k$ -arrangements de  $E$ , noté  $\mathcal{A}_n^k$ , est donné par :

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

*Démonstration.* Afin de construire un  $k$ -uplet d'éléments distincts de  $E$ , il y a  $n$  choix pour le premier élément,  $n - 1$  choix pour le deuxième élément etc. et enfin  $n - k + 1$  choix pour le  $k$ -ième élément.

Par conséquent, d'après le principe multiplicatif, le nombre de  $k$ -arrangements de  $E$  est égal à :

$$n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

□

*Remarque.* 1. Le nombre  $\mathcal{A}_n^k$  est utilisé dans les situations où les répétitions ne sont pas permises et où l'ordre a une importance. À ce titre,  $\mathcal{A}_n^k$  peut être vu comme étant le nombre de tirages avec ordre et sans remise de  $k$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments.

2. On conviendra que si  $k > n$ , alors :  $\mathcal{A}_n^k = 0$ .

*Exemple.*  $a, b, c$  et  $d$  étant quatre réels distincts, le nombre de 3-arrangements de  $E = \{a; b; c; d\}$  est égal à  $4 \times 3 \times 2 = 24$ .

*Exemple.* On cherche le nombre de mots de trois lettres distinctes (ayant un sens ou non) que l'on peut former avec les lettres S, O, P, H, I et E.

Cela revient à déterminer le nombre de 3-arrangements de l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \{S; O; P; H; I; E\}.$$

On compte cent-vingts 3-arrangements de  $\mathcal{S}$  car  $6 \times 5 \times 4 = 120$ . Par conséquent, on peut former 120 mots de trois lettres distinctes avec les lettres S, O, P, H, I et E.

**Application 52.** Une compétition de jeux vidéos en ligne oppose six joueurs. À la fin, un classement des trois meilleurs joueurs est établi et il n'y a pas d'ex aequo. Combien y a-t-il de podiums possibles ?

### 9.2.3 Permutations d'un ensemble

**Définition 9.9.** Soit un entier  $n \geq 1$  et soit un ensemble  $E$  à  $n$  éléments. Une permutation de  $E$  est un  $n$ -arrangement de  $E$ .

*Exemple.* Posons  $E = \{a; b; c; d\}$  où  $a, b, c$  et  $d$  sont quatre réels distincts. L'ensemble  $E$  comporte 4 éléments.

- $(a; b; c; d)$ ,  $(a; b; d; c)$  et  $(a; c; b; d)$  sont trois 4-arrangements de  $E$ , ils forment donc trois permutations de  $E$ .
- $(a; b; c)$  est un 3-arrangement de  $E$ , il ne forme donc pas une permutation de  $E$ .

La propriété ci-dessous est un cas particulier de la propriété 9.8 avec  $k = n$ .

**Propriété 9.10. Nombre de permutations de  $E$**

*Soit un entier  $n \geq 1$  et soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. Alors le nombre de permutations de  $E$  est égal à  $n!$ .*

*Démonstration.* D'après la propriété 9.8, le nombre de permutations de  $E$  est donné par :

$$\mathcal{A}_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

□

*Exemple.*  $a$ ,  $b$  et  $c$  étant trois réels distincts, les permutations de  $E = \{a; b; c\}$  sont  $(a; b; c)$ ,  $(a; c; b)$ ,  $(b; a; c)$ ,  $(b; c; a)$ ,  $(c; a; b)$  et  $(c; b; a)$ . Elles sont au nombre de  $6 = 3!$ .

*Exemple.* On cherche le nombre de mots de six lettres distinctes (ayant un sens ou non) que l'on peut former avec les lettres S, O, P, H, I et E. Autrement dit, on cherche le nombre d'anagrammes<sup>1</sup> que l'on peut former avec le mot « SOPHIE ». Cela revient à déterminer le nombre de permutations de l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \{S; O; P; H; I; E\}.$$

On peut alors former  $6! = 720$  mots de six lettres distinctes avec les lettres S, O, P, H, I et E (6 choix pour la première lettre, 5 choix pour la deuxième lettre, 4 choix pour la troisième lettre ... 1 choix pour la dernière lettre).

*Exemple.* 1. On cherche le nombre de façons d'asseoir  $n$  personnes sur un banc rectiligne de  $n$  places.

On peut considérer que les personnes à asseoir sont numérotées de 1 à  $n$ . Les asseoir sur un banc rectiligne de  $n$  places revient à se donner un  $n$ -arrangement de  $E = \{1; \dots; n\}$ , d'où un total de  $n!$  configurations possibles.

2. On cherche le nombre de façons d'asseoir  $n$  personnes autour d'une table ronde de  $n$  places.

La différence entre une table ronde et un banc rectiligne, c'est qu'il n'y a pas de première place dans une table ronde (en particulier, on ne change pas la configuration des places assises si on demande à chaque personne de se déplacer d'une place sur sa droite).

Pour asseoir  $n$  personnes autour d'une table ronde :

1. Une anagramme d'un mot est un nouveau mot obtenu en changeant de place les lettres du premier mot. Par exemple, une anagramme de « gare » est « rage ».

### 9.3. Combinaisons d'un ensemble fini

- on peut commencer par asseoir arbitrairement la personne numérotée  $n$ ;
- lui placer des voisins de proche en proche par la droite en se donnant un  $(n - 1)$ -arrangement de  $E = \{1; \dots; n - 1\}$ , d'où un total de  $(n - 1)!$  configurations possibles.

**Application 53.** Sur une étagère se trouvent 12 livres différents : 5 de mathématiques, 4 de physique-chimie et 3 de sciences économiques.

1. De combien de manières différentes peut-on ranger ces livres sur l'étagère ?
2. De combien de manières différentes peut-on ranger ces livres sur l'étagère en ayant les livres de mathématiques côte à côte ?

## 9.3 Combinaisons d'un ensemble fini

### 9.3.1 Parties d'un ensemble fini

**Définition 9.11.** Soit  $E$  un ensemble. Une partie de  $E$  est un sous-ensemble de  $E$ .

*Exemple.* Si  $E = \{1; 2; 3\}$ , alors  $\emptyset$ ,  $\{2\}$  et  $\{1; 3\}$  sont des parties de  $E$ .

*Remarque.* 1. L'ensemble des parties de  $E$  est noté  $\mathcal{P}(E)$ . Par conséquent,  $\mathcal{P}(E)$  est un ensemble d'ensembles.

2.  $E \in \mathcal{P}(E)$  et  $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ .

**Propriété 9.12. Nombre de parties de  $E$**

Soit un entier naturel  $n$  et soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. Alors le nombre de parties de  $E$  est égal à  $2^n$ .

*Démonstration.* Si  $n = 0$ , alors  $E = \emptyset$  et  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ , donc le nombre de parties de  $E$  est bien égal à  $2^0 = 1$ .

Soit un entier  $n \geq 1$ . Considérons l'ensemble à  $n$  éléments  $E = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ . A chaque partie de  $E$ , on peut faire correspondre un unique  $n$ -uplet de l'ensemble  $\{0; 1\}$  de la manière suivante :

- si  $x_1$  appartient à la partie, on affecte 1 en première position du  $n$ -uplet, 0 sinon;
- si  $x_2$  appartient à la partie, on affecte 1 en seconde position du  $n$ -uplet, 0 sinon;
- ...
- si  $x_n$  appartient à la partie, on affecte 1 en  $n$ -ième position du  $n$ -uplet, 0 sinon.

Inversement, à chaque  $n$ -uplet de l'ensemble  $\{0; 1\}$  correspond une unique partie de  $E$ .

Par exemple, le  $n$ -uplet  $(0; 1; 0; 1; 0; \dots; 0)$  correspond à la partie  $\{x_2; x_4\}$  et le  $n$ -uplet  $(0; \dots; 0)$  correspond à  $\emptyset$ .

Par conséquent, il y a autant de parties de  $E$  que de  $n$ -uplet de l'ensemble  $\{0; 1\}$ . Mais d'après la propriété 9.5, on a  $\text{Card}(\{0; 1\}^n) = \text{Card}(\{0; 1\})^n = 2^n$ , d'où le résultat.

□

*Remarque.* Autrement dit, la propriété 9.12 stipule que pour  $E$  un ensemble fini, on a l'égalité suivante :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}.$$

*Exemple.* Posons  $E = \{1; 2; 3\}$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$  est donné par :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}.$$

On a bien  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 8 = 2^3 = 2^{\text{Card}(E)}$ .

### 9.3.2 Nombre de combinaisons

**Définition 9.13.** Soit un entier naturel  $n$ , soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments et soit  $k$  un entier tel que  $0 \leq k \leq n$ . Une combinaison de  $k$  éléments de  $E$  est une partie de  $k$  éléments de  $E$ .

*Exemple.* Posons  $E = \{a; b; c; d\}$  où  $a, b, c$  et  $d$  sont quatre réels distincts. Alors  $\{a; c; d\}$  est une combinaison de 3 éléments de  $E$ ,  $\{a; c\}$  est une combinaison de 2 éléments de  $E$ ,  $\{d\}$  est une combinaison d'un élément de  $E$  et  $\emptyset$  est la combinaison de  $E$  n'ayant aucun élément.

#### Attention !

Il faut veiller à ne pas confondre une combinaison de  $k$  éléments de  $E$  avec un  $k$ -uplet de  $E$  ! Dans un  $k$ -uplet, l'ordre des éléments compte, tandis que dans une combinaison de  $k$  éléments, l'ordre n'a pas d'importance. Par exemple, si  $E = \{1; 2; 3\}$ , alors  $\{1; 3\}$  est une combinaison de deux éléments de  $E$  et  $\{1; 3\} = \{3; 1\}$ , tandis que  $(1; 3)$  est un 2-uplet de  $E$ , mais  $(1; 3) \neq (3; 1)$ .

#### Propriété 9.14. Nombre de combinaisons de $k$ éléments de $E$

Soit un entier naturel  $n$ , soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments et soit  $k$  un entier tel que  $0 \leq k \leq n$ . Le nombre de combinaisons de  $k$  éléments de  $E$ , noté  $\binom{n}{k}$ , est donné par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

*Démonstration.* Considérons dans un premier temps le nombre de  $k$ -arrangements de  $E$ . D'après la propriété 9.8, il en existe  $\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ .

Mais puisque pour chaque combinaison de  $k$  éléments de  $E$ , le nombre de  $k$ -arrangements que l'on peut construire est égal à  $k!$  d'après la propriété 9.10, il y a  $k!$  fois plus de  $k$ -arrangements que de combinaisons de  $k$  éléments dans  $E$ . Par conséquent, il suffit de diviser  $\mathcal{A}_n^k$  par  $k!$  pour obtenir le nombre de combinaisons de  $k$  éléments de  $E$ . D'où le résultat.  $\square$

- Remarque.*
1. Le nombre  $\binom{n}{k}$  est utilisé dans les situations où les répétitions ne sont pas permises et où l'ordre n'a pas d'importance. A ce titre, le nombre  $\binom{n}{k}$  peut être vu comme étant le nombre de façons de tirer simultanément  $k$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments.
  2. Le nombre  $\binom{n}{k}$  est également appelé **coefficient binomial** (en référence au chapitre 14) et se lit «  $k$  parmi  $n$  ».
  3. On conviendra que si  $k > n$ , alors :  $\binom{n}{k} = 0$ .

- Remarque.*
1.  $\binom{n}{1} = n$  car il y a  $n$  parties de  $E$  à un élément.
  2.  $\binom{n}{n} = 1$  car la seule partie de  $E$  à  $n$  éléments est  $E$  lui-même.
  3.  $\binom{n}{0} = 1$  car  $\emptyset$  est la seule partie de  $E$  qui n'a pas d'élément.

*Exemple.* Dans l'ensemble  $E = \{1; 2; 3\}$ , on compte 3 parties de 1 élément (les parties  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  et  $\{3\}$ ) et 3 parties de deux éléments (les parties  $\{1; 2\}$ ,  $\{1; 3\}$  et  $\{2; 3\}$ ).

On a bien  $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{6}{2} = 3$  et  $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$ .

*Exemple.* On a  $\binom{33}{5} = \frac{33!}{5!(33-5)!} = 237336$ , il y a donc 237336 manières de tirer simultanément 5 éléments dans un ensemble de 33 éléments.

*Exemple.* On cherche le nombre d'anagrammes du mot « ANANAS ». Pour ce faire, voici deux manières de procéder.

- On numérote fictivement nos six lettres de 1 à 6 (ce qui signifie que, pour le moment, les six lettres sont distinctes). On peut alors former  $6!$  anagrammes à partir de ces lettres numérotées. Mais chaque anagramme a été comptée autant de fois qu'il y a de façons d'y permuter les 3 lettres « A » et les deux

lettres « N », soit  $3! \times 2!$  fois, donc le mot « ANANAS » compte  $\frac{6!}{3!2!} = 60$  anagrammes.

- Pour construire une anagramme de « ANANAS », on peut d'abord choisir la position des « A » ( $\binom{6}{3} = 20$  possibilités), puis celles des « N » ( $\binom{6-3}{2} = 3$  possibilités) et celle du « S » ( $\binom{3-2}{1} = 1$  possibilité), d'où un total de  $20 \times 3 \times 1 = 60$  anagrammes possibles (on aurait bien sûr pu choisir la position des lettres dans un ordre différent).

**Application 54.** Dans un jeu de 32 cartes, une « main » est composée de cinq cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent le valet de pique ?
3. Combien de mains ayant exactement quatre carreaux existe-t-il ?

### 9.3.3 Propriétés des coefficients binomiaux

**Propriété 9.15. Symétrie**

Soit un entier naturel  $n$  et soit  $k$  un entier tel que  $0 \leq k \leq n$ . Alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

*Démonstration.* Soit un entier  $n \geq 1$  et soit  $k$  un entier tel que  $0 \leq k \leq n$ . D'après la propriété 9.14, on a :

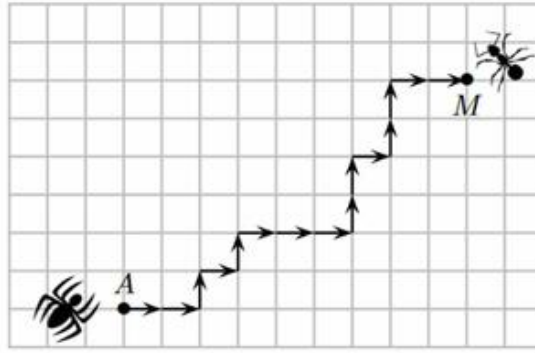
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

□

*Remarque.* Autrement dit, le nombre de parties de  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments est égal au nombre de parties de  $n - k$  éléments de cet ensemble.

*Exemple.* On a  $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$ . Cela signifie qu'il y a autant de façons de tirer simultanément 3 éléments dans un ensemble à 10 éléments que de tirer les 7 autres éléments.

*Exemple.* Une araignée en  $A$  se déplace sur une toile quadrillée représentée ci-dessous. Elle veut atteindre la fourmi en  $M$  et se déplace uniquement de gauche à droite et de bas en haut. On souhaite dénombrer tous les chemins possibles.



- Pour aller de  $A$  à  $M$ , l'araignée doit effectuer 9 déplacements vers la droite et 6 déplacements vers le haut, soit 15 déplacements en tout.  
La donnée d'un chemin peut être vue comme la donnée d'un mot de 15 lettres contenant neuf lettres « D » et six lettres « H », où « D » signifie un déplacement vers la droite et « H » un déplacement vers le haut.  
Par exemple, le chemin représenté dans le dessin ci-dessus est la donnée du mot « DDHDHDDDHHDDHDD ».
- Pour construire un mot de 15 lettres contenant neuf lettres « D » et six lettres « H », il suffit de choisir la position des six « H » car ensuite, il n'y a que des « D » à placer. Or de combien de façons pouvons-nous placer nos 6 « H » sur un mot vierge de 15 lettres ? Il y en a  $\binom{15}{6} = 5005$ , donc il existe 5005 mots possibles<sup>2</sup>.  
Finalement, l'araignée peut atteindre la fourmi en empruntant 5005 chemins possibles.
- Notons que par la propriété de symétrie, il y a également  $\binom{15}{9} = 5005$  mots possibles. En effet, pour construire un mot de 15 lettres contenant neuf lettres « D » et six lettres « H », on peut choisir de positionner d'abord les neuf « D ».

**Propriété 9.16. Relation de Pascal**

Soit un entier  $n \geq 1$  et soit  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq n$ . Alors :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

*Démonstration.* Soit un entier  $n \geq 1$  et soit  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq n$ .

- Méthode par le calcul. On a, en utilisant la propriété 9.14 :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

2. Une autre façon de voir les choses est que l'on cherche le nombre d'anagrammes du mot « DDHDHDDDHHDDHDD ». Pour les dénombrer, on pourra alors procéder de la même manière que pour le mot « ANANAS ».

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!k}{(k-1)!k(n-k+1)!} \\
 &= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} \\
 &= \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!} \\
 &= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} \\
 &= \binom{n+1}{k}.
 \end{aligned}$$

— Méthode par dénombrement. Notons  $E$  l'ensemble ci-dessous de cardinal  $n+1$  :

$$E = \{1; 2; \dots; n; n+1\}.$$

Le nombre de parties de  $E$  à  $k$  éléments est bien sûr  $\binom{n+1}{k}$ .

Parmi les parties de  $E$  à  $k$  éléments, on peut distinguer celles qui contiennent l'élément 1 de celles qui ne contiennent pas l'élément 1.

Compter le nombre de parties de  $E$  à  $k$  éléments contenant 1, c'est compter le nombre de façons de choisir  $k-1$  éléments parmi les  $n$  éléments restant, c'est-à-dire compter le nombre de parties à  $k-1$  éléments de  $E' = \{2; \dots; n; n+1\}$ , soit :  $\binom{n}{k-1}$ .

Compter le nombre de parties de  $E$  à  $k$  éléments ne contenant pas 1, c'est compter le nombre de parties à  $k$  éléments de  $E'$ , soit :  $\binom{n}{k}$ .

D'où l'égalité souhaitée. □

*Remarque.* Le tableau ci-dessous, appelé le **triangle de Pascal**, permet de déterminer facilement les coefficients binomiaux.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

On commence par remplir la première colonne et la diagonale par des 1. Le tableau se remplit ensuite de proche en proche en utilisant la relation de Pascal.

Par exemple, on peut lire dans le tableau (les cases grisées) que  $\binom{5}{3} = 10$  et que  $\binom{6}{3} = 20$ .

**Propriété 9.17. Formule du capitaine**

Soit un entier  $n \geq 1$  et soit  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq n$ . Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

*Démonstration.* Soit un entier  $n \geq 1$  et soit  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq n$ .

— Méthode par le calcul. On a, en utilisant la propriété 9.14 :

$$\begin{aligned} \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} &= \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k} \end{aligned}$$

— Méthode par dénombrement. On souhaite composer une équipe de  $k$  joueurs dont un capitaine parmi un ensemble de  $n$  individus. On peut former cette équipe de deux manières.

— On peut commencer par choisir les  $k$  joueurs de l'équipe ( $\binom{n}{k}$  possibilités), puis désigner le capitaine de l'équipe après coup parmi eux ( $k$  possibilités), d'où un total de  $k \times \binom{n}{k}$  équipes possibles.

— On peut procéder autrement et choisir d'abord le capitaine ( $n$  possibilités), puis compléter l'équipe en choisissant les  $k-1$  autres membres ( $\binom{n-1}{k-1}$  possibilités), d'où un total de  $n \times \binom{n-1}{k-1}$  équipes possibles.

D'où l'égalité :  $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$ .

□

**Propriété 9.18.** Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. Pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , on note  $A_k$  l'ensemble des parties de  $E$  composées de  $k$  éléments.

On a donc  $\text{Card}(A_k) = \binom{n}{k}$  d'après la propriété 9.14.

Par ailleurs, les  $A_k$  sont deux-à-deux disjoints et  $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n = \mathcal{P}(E)$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \text{Card}(A_k) \\ &= \text{Card}(A_0 \cup \dots \cup A_n) \text{ par le principe additif} \\ &= \text{Card}(\mathcal{P}(E)) \\ &= 2^n \text{ d'après la propriété 9.12.} \end{aligned}$$

□

*Remarque.* Cette formule est un cas particulier du **binôme de Newton**<sup>3</sup>

## 9.4 Exercices

**Exercice 9.1.** Le code d'entrée d'un immeuble tapé sur le clavier ci-dessous est composé par une lettre suivie d'un nombre de quatre chiffres distincts ou non.



1. Dénombrer tous les codes possibles.
2. Dénombrer les codes sans le chiffre 0.
3. Dénombrer les codes comportant au moins une fois le chiffre 0.
4. Dénombrer les codes comportant des chiffres distincts.
5. Dénombrer les codes comportant au moins deux chiffres identiques.
6. Quel est le nombre de codes possibles si la lettre peut être placée en première ou seconde position ?

**Exercice 9.2 (Type bac).** Au Poker, une main est un ensemble de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Un jeu de 52 cartes est composé de :

3. La formule du binôme de Newton est vue dans le cadre de l'option mathématiques expertes.

- 4 couleurs : Coeur, Carreau, Pique et Trèfle.
  - 13 valeurs : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As.
1. Dénombrer le nombre de mains possibles.
  2. Dénombrer le nombre de Carrés (mains contenant 4 cartes de même valeur et une carte supplémentaire différente).
  3. Dénombrer le nombre de Fulls (mains contenant 3 cartes de même valeur et 2 autres cartes de même valeur).
  4. Dénombrer le nombre de Brelans (mains contenant exactement 3 cartes de même valeur).
  5. Dénombrer le nombre de Quintes flush (5 cartes consécutives de même couleur).
  6. Dénombrer le nombre de Quintes (5 cartes de valeurs consécutives).

**Exercice 9.3.** Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à  $n$  lignes et  $p$  colonnes (et donc constitué de  $n \times p$  cases), où  $n$  et  $p$  sont deux entiers supérieurs à 2, parmi lesquelles un certain nombre  $k$  (inférieur ou égal à  $np$ ) sont noircies (et les autres blanches).

1. Combien y a-t-il de grilles différentes possibles ?
2. Combien de grilles ont les quatre coins noirs ?
3. Combien de grilles ont exactement deux coins noirs ?
4. Combien de grilles ont au plus une case noire sur chaque ligne ?
5. On suppose pour cette question  $n = p = k$ . Combien y a-t-il alors de grilles ayant exactement une case noire sur chaque ligne et sur chaque colonne ?
6. Calculer le nombre de façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille de Sudoku vierge<sup>4</sup>.
7. Comparer ce nombre avec le nombre de façons de répartir 9 chiffres 1 dans la grille sans respecter les règles du Sudoku (donner la valeur numérique pour chacun des deux).

**Exercice 9.4 ♠ (Identité de Vandermonde<sup>5</sup>).** Soient  $p$ ,  $q$  et  $\ell$  trois entiers naturels quelconques tels que  $\ell \leq p + q$ . Une urne contient  $p + q$  boules :  $p$  rouges et  $q$  blanches. On tire simultanément  $\ell$  boules dans l'urne. En raisonnant par disjonction de cas sur les façons possibles de tirer les  $\ell$  boules de l'urne, établir l'identité de Vandermonde ci-dessous<sup>6</sup> :

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{p}{k} \binom{q}{\ell-k} = \binom{p+q}{\ell}.$$

4. Le Sudoku est une grille à neuf lignes et neuf colonnes. Il doit y avoir un 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne. De plus, si on découpe la grille en neuf petites grilles de neuf cases en regroupant lignes et colonnes trois par trois, il doit y avoir un 1 exactement dans chacune de ces petites grilles.

5. Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) est un mathématicien, économiste, musicien et chimiste français.

6. Notons que dans la somme de l'identité de Vandermonde, on peut de manière plus précise faire varier l'indice de sommation  $k$  entre  $\max(0; \ell - q)$  et  $\min(\ell; p)$  afin d'y retirer les termes nuls (voir la correction de l'exercice).

**Exercice 9.5 ♠ (Mot terne).** On s'intéresse aux mots (concaténation de lettres) qu'il est possible de former avec l'alphabet  $\{a; b; c\}$  et obéissant aux contraintes suivantes :

- le mot est de longueur  $n$  (il contient  $n$  lettres),  $n$  étant un entier supérieur ou égal à 1 ;
- il commence et finit par la lettre  $a$  ;
- deux lettres adjacentes sont toujours différentes.

Un tel mot sera dit terne.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on désigne par  $t_n$  le nombre de mots ternes de longueur  $n$ .

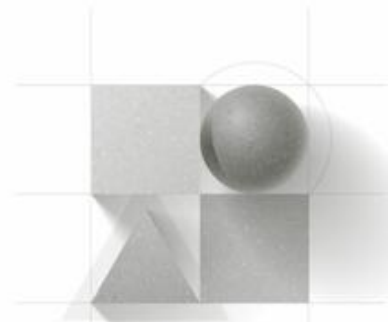
1. Déterminer tous les mots ternes pour  $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .
2. Montrer que pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $t_n = t_{n-1} + 2t_{n-2}$ .
3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence double<sup>7</sup>, démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$t_n = \frac{1}{6}2^n - \frac{2}{3}(-1)^n.$$

---

7. Le raisonnement par récurrence double consiste à montrer ici que :

- $\mathcal{P}(1)$  et  $\mathcal{P}(2)$  sont vraies (initialisation) ;
- $\forall n \geq 1$ ,  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1) \implies \mathcal{P}(n+2)$  (hérédité).



# Vecteurs, droites et plans de l'espace

## 10.1 Vecteurs de l'espace

Dans toute cette section, on étend à l'espace la notion de vecteur vue en géométrie plane dans les classes antérieures du lycée. En conséquence, les résultats mathématiques de cette section ne sont pas démontrés.

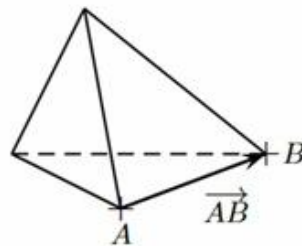
### 10.1.1 Définitions et règles de calcul

On rappelle succinctement dans ce paragraphe quelques éléments relatifs aux vecteurs.

#### Translation et vecteur

**Définition 10.1.** Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace.

1. À la translation qui transforme  $A$  en  $B$ , on associe un segment orienté  $[AB]$  appelé vecteur. On le note  $\overrightarrow{AB}$ . Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  schématise le déplacement de tout point de l'espace par cette translation.



2. La translation qui transforme  $A$  en  $B$  est aussi appelée translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .
3. On dit que le point  $B$  est l'image du point  $A$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

**Propriété 10.2. Caractérisation d'un vecteur**

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace. Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  associé à la translation qui transforme  $A$  en  $B$  est caractérisé par :

- sa norme (la longueur  $AB$ ) ;
- sa direction (inclinaison ou pente de la droite  $(AB)$ ) ;
- son sens (de  $A$  vers  $B$ ).

*Remarque.* 1. Le point  $A$  est l'origine du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  et le point  $B$  en est l'extrémité.

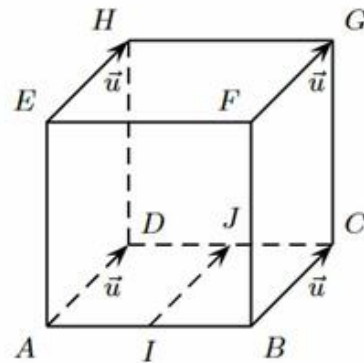
2. Le vecteur  $\overrightarrow{AA}$  se nomme le **vecteur nul** et se note  $\vec{0}$ . Le vecteur  $\overrightarrow{AA}$  n'a ni direction, ni sens mais une longueur égal à 0. Le vecteur nul est tel que son origine et son extrémité sont confondues.

3. La norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  se note  $\|\overrightarrow{AB}\|$ . On a donc  $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$ .

**Égalité de deux vecteurs**

**Définition 10.3.** Deux vecteurs non nuls de l'espace sont égaux s'ils ont même norme, même direction et même sens.

*Exemple.*  $ABCDEFGH$  est le cube représenté ci-dessous.  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$  et  $J$  est le milieu du segment  $[CD]$ .



On a  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{FG}$  car ces trois vecteurs ont même sens, même direction et même norme.

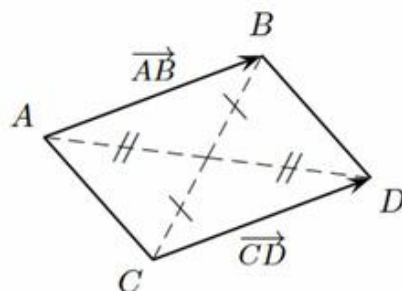
Il existe en réalité une infinité de vecteurs égaux au vecteur  $\overrightarrow{AI}$ .

*Remarque.* On note parfois un vecteur par une seule lettre, avec une flèche au dessus. On pourra donc écrire dans l'exemple précédent  $\vec{u} = \overrightarrow{FG}$ . On a alors  $\vec{u} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{FG}$ , et on dit que les vecteurs  $\overrightarrow{AI}$ ,  $\overrightarrow{DJ}$  et  $\overrightarrow{FG}$  sont des **représentants** du vecteur  $\vec{u}$ .

*Remarque.* Pour tout point  $A$  de l'espace, on a  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ .

**Propriété 10.4. Propriété du parallélogramme (1)**

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points de l'espace. On a  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  si, et seulement si  $ABDC$  est un parallélogramme.

**Somme de vecteurs**

**Définition 10.5.** Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'espace. L'opposé du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est le vecteur, noté  $-\overrightarrow{AB}$ , tel que  $\overrightarrow{AB}$  et  $-\overrightarrow{AB}$  soient de même direction, de même norme, mais de sens contraire.

*Remarque.* 1. Par conséquent, on a  $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ .

2. L'opposé du vecteur nul  $\vec{0}$  est lui-même.

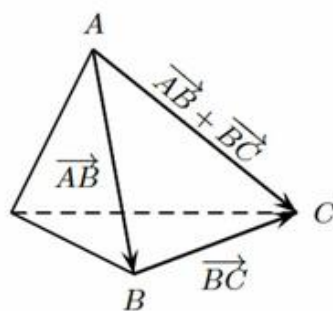
**Définition 10.6.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace.

1. La somme des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur, noté  $\vec{u} + \vec{v}$ , associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur  $\vec{u}$  et de vecteur  $\vec{v}$ .
2. La différence des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur, noté  $\vec{u} - \vec{v}$ , définie par  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ .

**Propriété 10.7. Relation de Chasles**

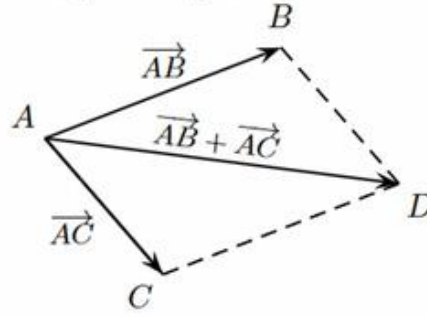
Soient  $A, B$  et  $C$  trois points de l'espace. On a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



**Propriété 10.8. Propriété du parallélogramme (2)**

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points de l'espace. On a  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  si, et seulement si,  $ABDC$  est un parallélogramme.



*Remarque.* En pratique, pour déterminer la somme de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , on utilise la relation de Chasles : on cherche systématiquement un représentant de  $\vec{v}$  dont l'origine est confondue avec l'extrémité de  $\vec{u}$ .

**Propriété 10.9.** Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace, on a :

1.  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .
2.  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ .
3.  $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$ .
4.  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ .

*Remarque.* 1. La propriété 4 définit la somme de trois vecteurs : le vecteur somme de trois vecteurs est obtenu soit en sommant d'abord les deux premiers puis en sommant le vecteur obtenu avec le troisième, soit en sommant les deux derniers puis en sommant le vecteur obtenu avec le premier.

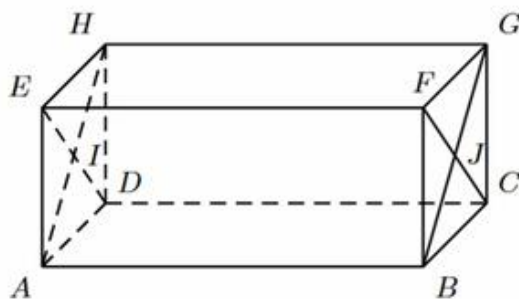
2. La propriété 4 se généralise au cas de plusieurs vecteurs.

*Exemple.* Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points quelconques de l'espace.

1.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$
2.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$
3.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

**Application 55.**  $ABCDEFGH$  est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.  $I$  et  $J$  sont les centres respectifs des faces  $ADHE$  et  $BCGF$ .

1. Déterminer dans la figure trois représentants au vecteur  $\overrightarrow{FG}$ .
2. Quelle est l'image du point  $I$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{FJ}$ ?
3. Compléter  $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{E\dots}$ .



### Produit d'un vecteur par un réel

**Définition 10.10.** Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul de l'espace et soit  $k$  un réel non nul. Le vecteur  $k\vec{u}$  est le vecteur qui a :

- la même direction que le vecteur  $\vec{u}$  ;
- le même sens que le vecteur  $\vec{u}$  si  $k > 0$ , le sens contraire du vecteur  $\vec{u}$  si  $k < 0$  ;

— pour norme  $|k| \times \|\vec{u}\|$ , c'est-à-dire :  $\|k\vec{u}\| = \begin{cases} k \times \|\vec{u}\| & \text{si } k > 0 \\ -k \times \|\vec{u}\| & \text{si } k < 0 \end{cases}$ .

Dans le cas où  $k = 0$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$ , on a  $k\vec{u} = \vec{0}$ .

**Propriété 10.11.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace et soient  $k$  et  $k'$  deux réels. On a :

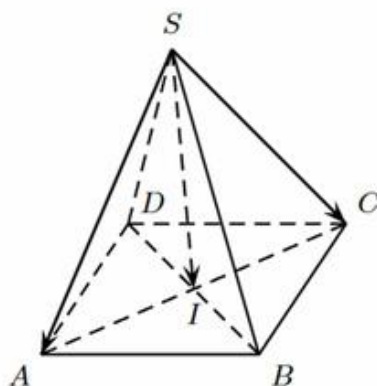
1.  $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
2.  $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
3.  $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
4.  $k\vec{u} = \vec{0}$  équivaut à  $k = 0$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$ .

*Exemple.* Dans cet exemple,  $A, B, C$  et  $D$  sont quatre points de l'espace,  $\vec{u}$  est un vecteur de l'espace.

1.  $3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$
2.  $5\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{u} = \left(5 - \frac{3}{2}\right)\vec{u} = \frac{7}{2}\vec{u}$
3.  $\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{10}\vec{u}\right) = \left[\frac{5}{4} \times \left(-\frac{1}{10}\right)\right]\vec{u} = -\frac{1}{8}\vec{u}$
4. Si  $5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ , alors  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$  et donc  $A = B$ .

**Application 56.**  $ABCD S$  est une pyramide de sommet  $S$  dont la base est le parallélogramme  $ABCD$  de centre  $I$ .

1. Exprimer le vecteur  $\vec{SB} + \vec{SD}$  en fonction du vecteur  $\vec{SI}$ .
2. Montrer que  $\vec{SI} = \alpha \vec{BA} + \beta \vec{BC} + \gamma \vec{BS}$  où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont trois réels.



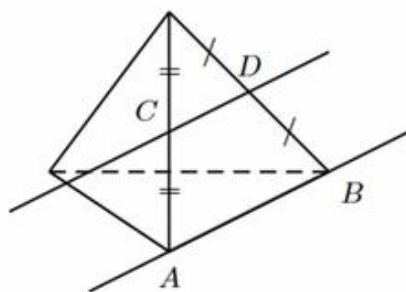
### 10.1.2 Vecteurs colinéaires, parallélisme, alignement

**Définition 10.12.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. On dit que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires s'il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$ .

*Remarque.* Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs de l'espace.

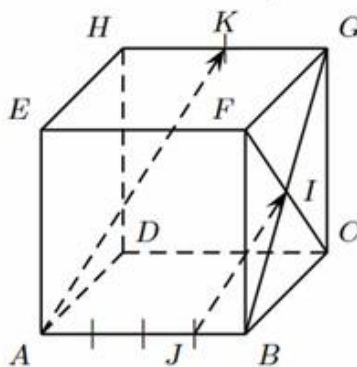
La propriété ci-dessous est une conséquence de la définition 10.12.

**Propriété 10.13.** Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points distincts de l'espace. Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires.

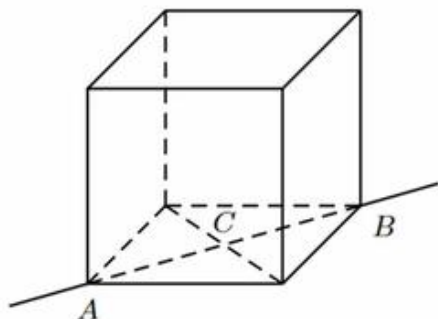


**Application 57.**  $ABCDEFGH$  est le cube représenté ci-dessous.  $I$  est le centre de la face  $BCGF$ ,  $K$  est le milieu de  $[HG]$  et  $J$  le point tel que  $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BA}$ .

1. Exprimer chacun des vecteurs  $\vec{AK}$  et  $\vec{IJ}$  en fonction des vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$ .
2. Dédire que les droites  $(AK)$  et  $(IJ)$  sont parallèles.



**Propriété 10.14.** Soient  $A, B$  et  $C$  trois points distincts de l'espace. Les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés si, et seulement si, les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

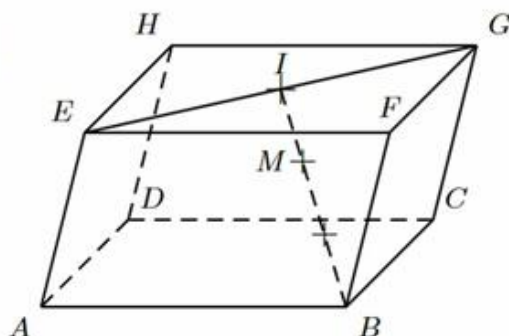


*Remarque.* Dans la propriété ci-dessus, on peut aussi utiliser par exemple les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .

*Remarque.* En particulier, le point  $B$  est le milieu du segment  $[AC]$  si, et seulement si  $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .

**Application 58.**  $ABCDEFGH$  est un parallélépipède.  $I$  est le milieu du segment  $[EG]$ ,  $M$  est le point tel que  $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0}$ .

- Justifier que  $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MG}$ .
  - Déduire que  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MG} = \vec{0}$ .
- Démontrer que les points  $D, M$  et  $F$  sont alignés.



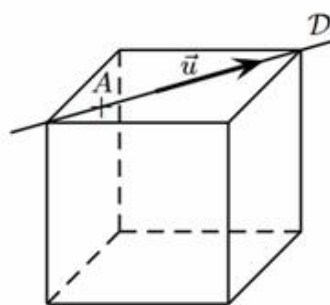
## 10.2 Droites et plans de l'espace

### 10.2.1 Caractérisation vectorielle d'une droite

**Définition 10.15.** On appelle *vecteur directeur* d'une droite de l'espace  $\mathcal{D}$  tout vecteur non nul  $\vec{u}$  dont la direction est celle de  $\mathcal{D}$ . On dit aussi que la droite  $\mathcal{D}$  est dirigée par le vecteur directeur  $\vec{u}$ .

- Remarque.*
- Si  $A$  et  $B$  sont deux points distincts de la droite  $d$ , le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur directeur de  $d$ . Plus généralement, tout représentant du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur directeur de  $d$ . Plus généralement encore, tout vecteur colinéaire au vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur directeur de  $d$ .
  - Une droite admet donc une infinité de vecteurs directeurs.

- Remarque.* 1. Un point  $A$  et un vecteur  $\vec{u}$  suffisent à déterminer (ou caractériser) une droite : c'est la droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ .
2. La droite passant par le point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$  peut se noter  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ .



**Propriété 10.16. Caractérisation vectorielle d'une droite**

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace. Un point  $M$  de l'espace appartient à la droite  $(AB)$  si, et seulement si, il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{AM} = k\vec{AB}$ .

*Démonstration.* Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace. On raisonne par équivalences successives.

$$\begin{aligned} M \text{ appartient à la droite } (AB) &\iff A, M \text{ et } B \text{ sont alignés} \\ &\iff \vec{AM} \text{ et } \vec{AB} \text{ colinéaires (propriété 10.14)} \\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{AM} = k\vec{AB} \end{aligned}$$

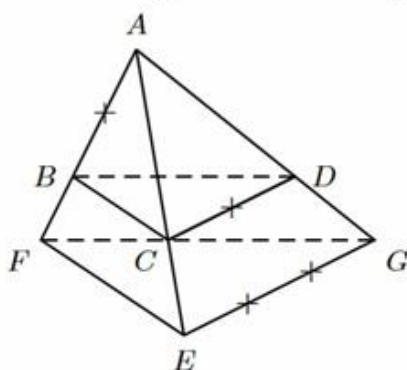
□

*Remarque.* 1. Autrement dit, la droite  $(AB)$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\vec{AM} = k\vec{AB}$  où  $k$  est un réel, c'est-à-dire tels que  $\vec{AM}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires.

2. Le segment  $[AB]$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\vec{AM} = k\vec{AB}$  où  $k \in [0; 1]$ .

*Exemple.* On considère un tétraèdre  $ABCD$ . Notons  $E, F$  et  $G$  les points définis par :

$$\vec{AE} = \frac{3}{2}\vec{AC}, \quad \vec{AF} = \frac{3}{2}\vec{AB} \quad \text{et} \quad \vec{EG} = \frac{3}{2}\vec{CD}.$$

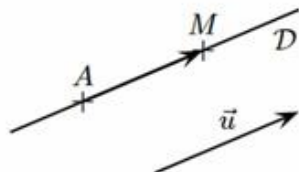


Alors :  $\vec{AG} = \vec{AE} + \vec{EG} = \frac{3}{2}\vec{AC} + \frac{3}{2}\vec{CD} = \frac{3}{2}(\vec{AC} + \vec{CD}) = \frac{3}{2}\vec{AD}$ .

Puisque  $\vec{AG} = k\vec{AD}$  avec  $k = \frac{3}{2}$ , le point  $G$  appartient à la droite  $(AD)$ .

La propriété qui suit se déduit de la propriété 10.16.

**Propriété 10.17.** Soit  $\mathcal{D}$  une droite de l'espace passant par un point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ . Un point  $M$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$  si, et seulement si,  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires.



**Application 59.** Soient  $M$ ,  $N$  et  $P$  trois points de l'espace non alignés. On note  $I$  et  $J$  les points définis par  $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{NJ} = 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}$ .

- (a) Montrer que  $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ .
- (b) Montrer que  $\overrightarrow{PJ} = -2\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MN}$ .
- Déduire que le point  $P$  appartient à la droite  $(IJ)$ .

### 10.2.2 Caractérisation vectorielle d'un plan

**Définition 10.18.** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non alignés de l'espace.

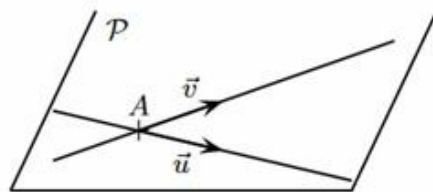
- Le plan  $(ABC)$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ , où  $x$  et  $y$  sont deux réels.
- On dit que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont des vecteurs directeurs du plan  $(ABC)$ , ou bien que le plan  $(ABC)$  est dirigé par les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

*Remarque.* Pour montrer qu'un point  $M$  appartient au plan  $(ABC)$ , il suffit de montrer qu'il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ .

*Remarque.* 1. Trois points non alignés suffisent à déterminer un plan.

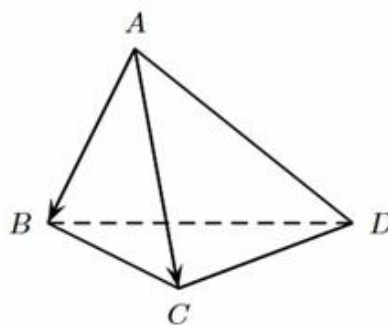
- Un point  $A$  et deux vecteurs non colinéaires  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  suffisent à déterminer un plan : c'est le plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A$  et de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Le plan  $\mathcal{P}$  peut alors se noter  $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ .



*Exemple.* On considère le tétraèdre  $ABCD$  ci-dessous.

- Le point  $A$  et les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  définissent le plan  $(ABC)$ .
- Le point  $M$  tel que  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$  appartient au plan  $(ABC)$ .



**Application 60.** On considère un tétraèdre  $ABCD$ . Notons  $M$  le point de l'espace tel que  $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC}$ .

Montrer que le point  $M$  appartient au plan  $(ABC)$ .

### 10.2.3 Vecteurs coplanaires

**Définition 10.19.** Des points de l'espace sont dits coplanaires s'il existe un plan qui contient ces points.

*Remarque.* Trois points de l'espace sont toujours coplanaires.

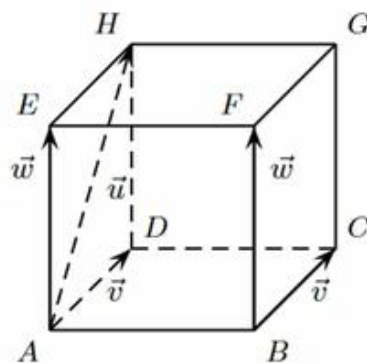
**Définition 10.20.** Soient  $O, A, B$  et  $C$  quatre points distincts de l'espace et soient trois vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}, \vec{v} = \overrightarrow{OB}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ . On dit que les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si les points  $O, A, B$  et  $C$  sont coplanaires.

*Remarque.* 1. En conservant le sens de la définition précédente, il est clair que deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires. En effet, quels que soient les points  $A, B$  et  $C$  de l'espace tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , il existe au moins un plan contenant les points  $A, B$  et  $C$  puisque les points  $A, B$  et  $C$  sont nécessairement coplanaires.

2. Si deux vecteurs parmi les trois vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires, alors  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont nécessairement coplanaires. En effet, supposons par exemple que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires. Alors les points  $O, A$  et  $B$  sont alignés. Il existe donc au moins un plan qui contient la droite  $(OA)$  et le point  $C$ , c'est-à-dire les points  $O, A, B$  et  $C$ .

*Exemple.*  $ABCDEFGH$  est un cube. On note  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  les vecteurs définis par  $\vec{u} = \overrightarrow{AH}, \vec{v} = \overrightarrow{BC}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ .

Les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires car les points  $A, D, H$  et  $E$  sont coplanaires.



### ⚠ Attention !

Si deux vecteurs parmi trois vecteurs de l'espace  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires, alors  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires, mais la réciproque est fautive : si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires, cela n'implique pas forcément que deux vecteurs parmi ces trois sont colinéaires ! L'exemple précédent en témoigne.

### ⚠ Attention !

Si des points de l'espace  $A, B, C, D, E$  et  $F$  sont coplanaires, alors les vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{CD}$  et  $\vec{EF}$  sont coplanaires, mais la réciproque est fautive : si les vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{CD}$  et  $\vec{EF}$  sont coplanaires, cela n'implique pas forcément que les points  $A, B, C, D, E$  et  $F$  le sont ! Ainsi, dans l'exemple précédent, les vecteurs  $\vec{EH}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{BC}$  sont coplanaires, mais les points  $E, H, A, D, B$  et  $C$  ne le sont pas.

#### Propriété 10.21. Caractérisation de la coplanarité de trois vecteurs

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace tels que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires. Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ .

*Démonstration.* Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points distincts. Notons  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  les vecteurs tels que  $\vec{u} = \vec{AB}$ ,  $\vec{v} = \vec{AC}$ ,  $\vec{w} = \vec{AD}$  et tels que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non colinéaires. Puisque  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$  sont non colinéaires, le triplet  $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$  définit un plan : le plan  $(ABC)$  (dirigé par les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ ). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ coplanaires} &\iff A, B, C \text{ et } D \text{ coplanaires} \\ &\iff D \in (ABC) \\ &\iff \text{il existe } (x; y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ . □

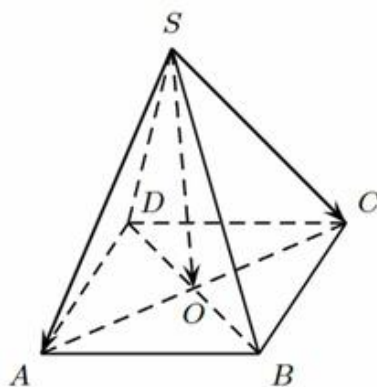
*Remarque.* 1. La propriété est bien sûr valable en supposant  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires.

2. Le vecteur nul est toujours coplanaires à deux autres vecteurs quelconques.

*Exemple.* Dans la pyramide régulière à base carrée  $ABCDS$  ci-contre, on a l'égalité suivante :  $\vec{SO} = \frac{1}{2}\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{SC}$  (voir l'application 56).

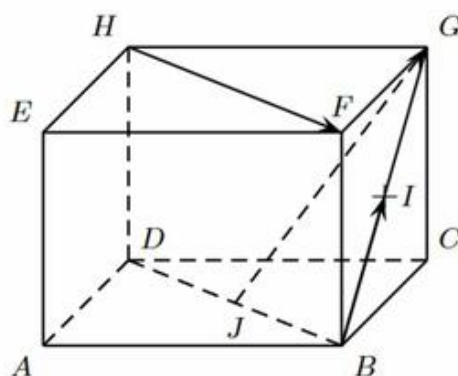
Les vecteurs  $\vec{SO}$ ,  $\vec{SA}$  et  $\vec{SC}$  sont donc coplanaires.

Notons que les vecteurs  $\vec{SO}$ ,  $\vec{SA}$  et  $\vec{SB}$  ne sont pas coplanaires.



**Application 61.** On considère un parallélépipède rectangle  $ABCDEFGH$  représenté ci-contre. On note  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des côtés  $[BG]$  et  $[DB]$ .

Montrer que les vecteurs  $\vec{BI}$ ,  $\vec{JG}$  et  $\vec{HF}$  sont coplanaires.



## 10.3 Positions relatives de droites et de plans

### 10.3.1 Position relative de deux droites

**Définition 10.22.** Soient  $O, A, B$  et  $C$  quatre points distincts de l'espace. On dit que les droites  $(OA)$  et  $(BC)$  sont coplanaires si les points  $O, A, B$  et  $C$  sont coplanaires.

**Propriété 10.23. (admise)**

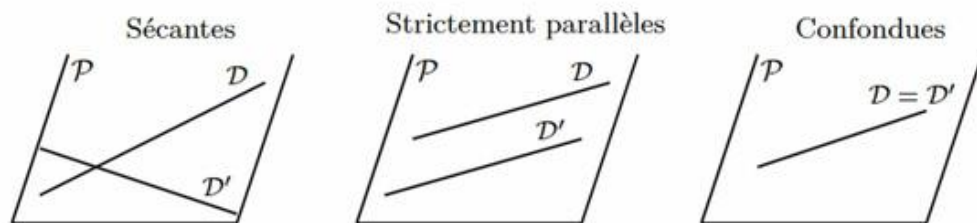
1. Deux droites de l'espace sont soit coplanaires soit non coplanaires.
2. Deux droites de l'espace sont coplanaires si, et seulement si, elles sont sécantes ou parallèles.

*Remarque.* Deux droites de l'espace sont donc non coplanaires si, et seulement si elles sont ni sécantes ni parallèles.

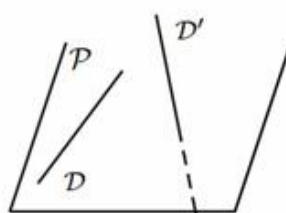
*Remarque.* D'après la propriété 10.13, deux droites sont parallèles si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

*Remarque.* On schématise ci-dessous les positions relatives de deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  contenues dans un plan  $\mathcal{P}$  de l'espace.

—  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont coplanaires.

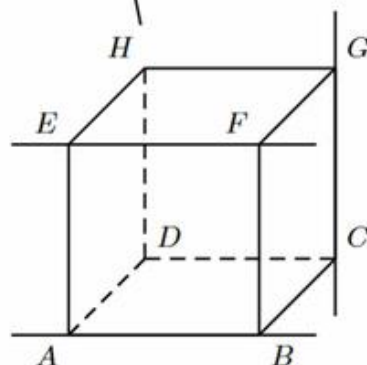


- $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont non coplanaires (ni sécantes ni parallèles).



*Exemple.*  $ABCDEFGH$  est un cube.

- Les droites  $(AB)$  et  $(EF)$  sont parallèles (donc coplanaires).
- Les droites  $(EF)$  et  $(EH)$  sont sécantes en  $E$  (donc coplanaires).
- Les droites  $(EF)$  et  $(CG)$  sont non coplanaires.



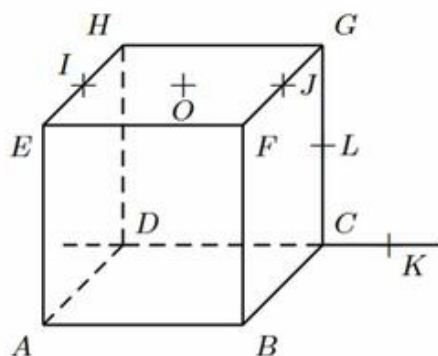
**⚠ Attention !**

Si deux droites de l'espace sont sécantes, alors elles ne sont pas parallèles. La réciproque est toutefois fautive : si deux droites ne sont pas parallèles, elles ne sont pas forcément sécantes ! En effet, deux droites non parallèles peuvent être non coplanaires.

**Application 62.** On considère un cube  $ABCDEFGH$ . Les points  $I, J$  et  $L$  sont les milieux respectifs des arêtes  $[EH], [FG]$  et  $[GC]$ .  $O$  et  $K$  sont deux points tels que  $\vec{IO} = \frac{1}{2}\vec{IJ}$  et  $\vec{DK} = \frac{3}{2}\vec{DC}$ .

Étudier les positions relatives des couples de droites suivantes.

1.  $(IO)$  et  $(DK)$ .
2.  $(BJ)$  et  $(EF)$ .
3.  $(JL)$  et  $(BC)$ .

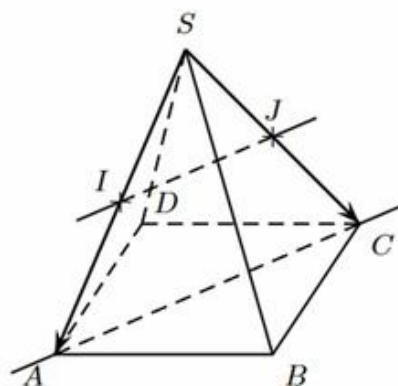


**10.3.2 Position relative d'une droite et d'un plan**

**Définition 10.24.** On dit qu'une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite contenue dans ce plan.

*Exemple.*  $ABCD S$  est une pyramide à base carrée.  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs des segments  $[SA]$  et  $[SC]$ .

En appliquant le théorème des milieux dans le triangle  $ACS$ , il vient que la droite  $(IJ)$  est parallèle à la droite  $(AC)$ . Puisque la droite  $(AC)$  est contenue dans le plan  $(ABC)$ , la droite  $(IJ)$  est parallèle au plan  $(ABC)$ .



**Propriété 10.25.** Soient  $\mathcal{D}$  une droite de vecteur directeur  $\vec{u}$  et  $\mathcal{P}$  un plan de vecteurs directeurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ . La droite  $\mathcal{D}$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$  si, et seulement si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires, c'est-à-dire si, et seulement si  $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$  où  $x$  et  $y$  sont deux réels.

*Démonstration.* Soit  $O$  un point du plan  $\mathcal{P}$ . Notons  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points distincts tels que  $\vec{u} = \vec{OA}$ ,  $\vec{v} = \vec{OB}$ ,  $\vec{w} = \vec{OC}$  et tels que  $O$ ,  $B$  et  $C$  sont non alignés. Avec ces notations, le plan  $\mathcal{P}$  est le plan  $(OBC)$ .

$\implies$ ) Supposons que  $\mathcal{D}$  est parallèle à  $\mathcal{P}$ . Alors la droite  $\mathcal{D}$  est parallèle à une droite  $\mathcal{D}'$  de vecteur directeur  $\vec{u}'$  contenue dans  $\mathcal{P}$ . Les vecteurs  $\vec{u}'$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont donc coplanaires. Il existe donc deux réels  $x$  et  $y$  tels que :  $\vec{u}' = x\vec{v} + y\vec{w}$ .

Or les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires, donc il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{u}'$ .

Il vient donc :  $\vec{u} = (kx)\vec{v} + (ky)\vec{w}$ , et ainsi les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires.

$\impliedby$ ) Supposons que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires. Alors les points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont coplanaires. En particulier, on a  $A \in (OBC)$ , donc la droite  $(OA)$  est contenue dans le plan  $(OBC)$ . La droite  $\mathcal{D}$  étant parallèle à la droite  $(OA)$ , elle est donc parallèle à une droite contenue dans le plan  $(OBC)$ . Donc  $\mathcal{D}$  est parallèle à  $\mathcal{P}$ .

□

*Exemple.* Le vecteur  $\vec{IJ}$  est un vecteur directeur de la droite  $(IJ)$ , les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  dirigent le plan  $(ABC)$ .

On montre alors que  $\vec{IJ} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$  avec  $x$  et  $y$  deux réels. On a :

$$\vec{IJ} = \vec{IS} + \vec{SJ} = \frac{1}{2}\vec{AS} + \frac{1}{2}\vec{SC} = \frac{1}{2}(\vec{AS} + \vec{SC}) = \frac{1}{2}\vec{AC} = 0\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

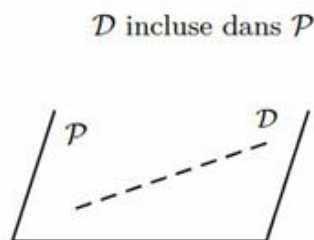
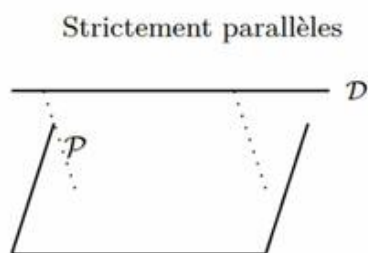
Les vecteurs  $\vec{IJ}$ ,  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont coplanaires, donc la droite  $(IJ)$  est parallèle au plan  $(ABC)$ .

**Propriété 10.26.** (admise) Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants en un point, soit parallèles.

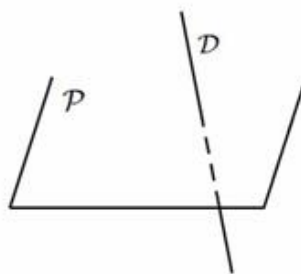
### 10.3. Positions relatives de droites et de plans

*Remarque.* On schématise ci-dessous les positions relatives d'une droite  $\mathcal{D}$  et d'un plan  $\mathcal{P}$  de l'espace.

- $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  sont parallèles.

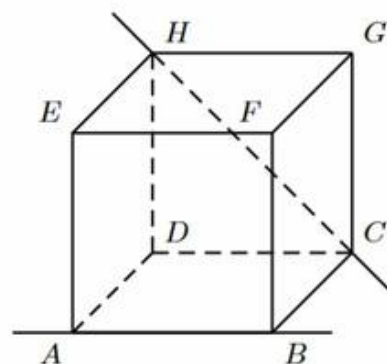


- $\mathcal{D}$  sécante à  $\mathcal{P}$  (l'intersection est un point).

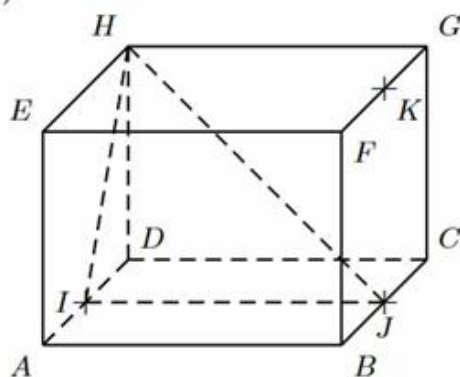


*Exemple.*  $ABCDEFGH$  est un cube.

- La droite  $(AB)$  et le plan  $(DCG)$  sont parallèles.
- La droite  $(HC)$  est incluse dans le plan  $(DCG)$ .
- La droite  $(HC)$  est sécante au plan  $(ABC)$  en le point  $C$ .



**Application 63.**  $ABCDEFGH$  est un parallélépipède rectangle.  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont les milieux respectifs des arêtes  $[AD]$ ,  $[BC]$  et  $[FG]$ . Dans cet exercice, on souhaite démontrer de deux manières que la droite  $(AK)$  est parallèle au plan  $(IJH)$ .



1. (a) Montrer que  $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IG}$ .  
 (b) Exprimer  $\overrightarrow{AK}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{IH}$ , puis conclure.
2. (a) Montrer que  $(AK)$  est parallèle à  $(IG)$ .  
 (b) Montrer que le point  $G$  appartient au plan  $(IJH)$  puis conclure.

### 10.3.3 Position relative de deux plans

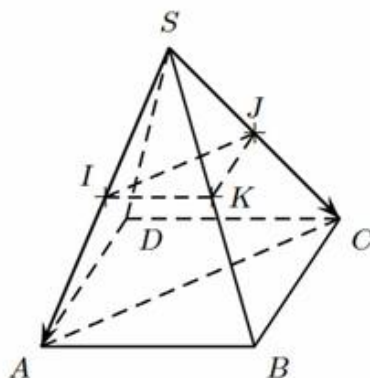
**Définition 10.27.** On dit que deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont parallèles s'il existe deux droites sécantes incluses dans  $\mathcal{P}$  qui soient parallèles à  $\mathcal{P}'$ .

*Exemple.*  $ABCDS$  est une pyramide à base carrée.  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont les milieux respectifs des segments  $[SA]$ ,  $[SB]$  et  $[SC]$ .

$(IK)$  et  $(KJ)$  sont deux droites sécantes du plan  $(IJK)$ .

En appliquant le théorème des milieux dans les triangles  $ABS$  et  $BCS$ , il vient que  $(IK)$  est parallèle à  $(AB)$  et  $(JK)$  est parallèle à  $(BC)$ . D'après la définition 10.24,  $(IK)$  est parallèle au plan  $(ABC)$  et  $(JK)$  aussi.

Les plans  $(IJK)$  et  $(ABC)$  sont donc parallèles.



La propriété suivante est une conséquence de la propriété 10.25 et de la définition 10.27.

**Propriété 10.28.** Deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont parallèles si, et seulement si, il existe deux vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathcal{P}$  et deux vecteurs directeurs  $\vec{u}'$  et  $\vec{v}'$  de  $\mathcal{P}'$  tels que  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}'$ ,  $\vec{v}'$  sont coplanaires et tels que  $\vec{v}$ ,  $\vec{u}'$ ,  $\vec{v}'$  sont coplanaires.

*Exemple.* On reprend la pyramide  $ABCDS$  de l'exemple précédent.

Les vecteurs  $\overrightarrow{IK}$  et  $\overrightarrow{KJ}$  sont des vecteurs directeurs du plan  $(IJK)$ . De même, les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont des vecteurs directeurs du plan  $(ABC)$ .

Par ailleurs, on a :

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{BC},$$

donc les vecteurs  $\overrightarrow{IK}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont coplanaires. De la même manière, on montre que  $\overrightarrow{KJ} = 0\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ , donc les vecteurs  $\overrightarrow{KJ}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont coplanaires.

Par conséquent, les plans  $(IJK)$  et  $(ABC)$  sont parallèles.

### 10.3. Positions relatives de droites et de plans

Le sens indirect de la propriété suivante est une conséquence immédiate de la propriété précédente, le sens direct étant admis.

**Propriété 10.29.** Deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont parallèles si, et seulement si, il existe deux vecteurs directeurs de  $\mathcal{P}$  et deux vecteurs directeurs de  $\mathcal{P}'$  qui sont colinéaires deux à deux.

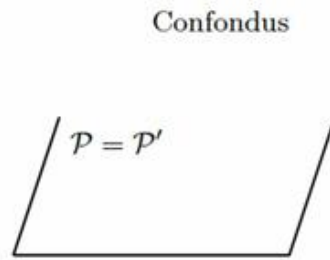
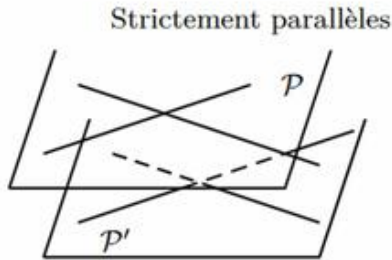
*Remarque.* En particulier, deux plans déterminés par le même couple de vecteurs directeurs sont parallèles.

*Exemple.* On reprend l'exemple précédent. On a  $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ , donc il existe deux vecteurs directeurs de  $(IKJ)$  et deux vecteurs directeurs de  $(ABC)$  qui sont colinéaires deux à deux. Les plans  $(IKJ)$  et  $(ABC)$  sont donc parallèles.

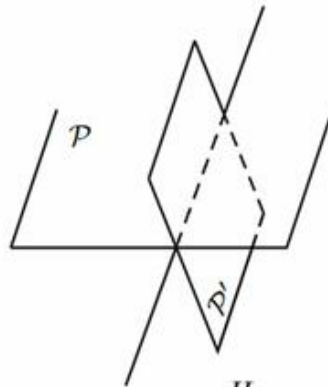
**Propriété 10.30. (admise)** Deux plans de l'espace sont soit sécants selon une droite, soit parallèles.

*Remarque.* On schématise ci-dessous les positions relatives de deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  de l'espace.

—  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont parallèles.



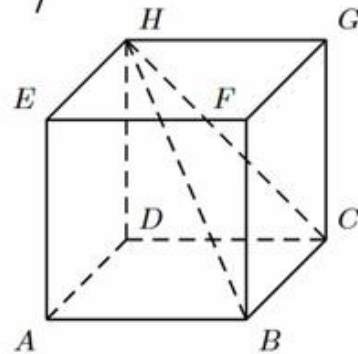
—  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont sécants (l'intersection est une droite).



*Exemple.*  $ABCDEFGH$  est un cube.

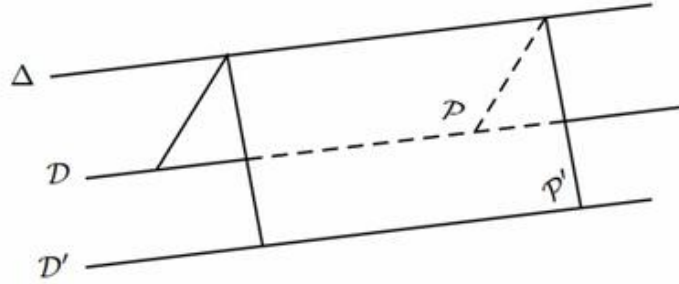
— Les plans  $(ABC)$  et  $(EFG)$  sont strictement parallèles.

— Les plans  $(BCG)$  et  $(BCH)$  sont sécants. Leur intersection est la droite  $(BC)$ .



**Théorème 10.31. Théorème du toit**

Soient deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sécants en une droite  $\Delta$ . Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites contenues respectivement dans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ . Si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles, alors  $\Delta$  est parallèle à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .



*Démonstration.* Soient les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  parallèles. Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple que la droite  $\Delta$  n'est pas parallèle à  $\mathcal{D}$ . Dans ce cas,  $\Delta$  n'est également pas parallèle à  $\mathcal{D}'$ .

Soit  $\vec{v}$  un vecteur directeur de  $\Delta$  et soit  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .

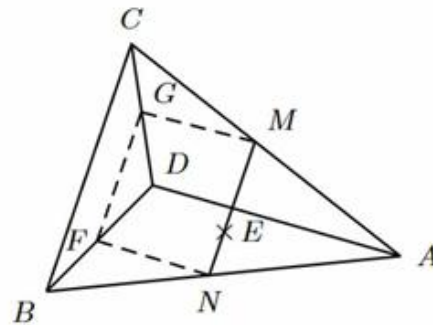
- Comme  $\Delta$  n'est pas parallèle à  $\mathcal{D}$ , alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires. La droite  $\Delta$  étant contenue dans le plan  $\mathcal{P}$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs directeurs non colinéaires de  $\mathcal{P}$ .
- De la même manière, puisque  $\Delta$  n'est pas parallèle à  $\mathcal{D}'$  et que la droite  $\Delta$  est contenue dans le plan  $\mathcal{P}'$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs directeurs non colinéaires de  $\mathcal{P}'$ .

Il vient donc que les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont parallèles. Cela est absurde puisque les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont supposés sécants en la droite  $\Delta$ . Donc la droite  $\Delta$  est parallèle à la droite  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .

□

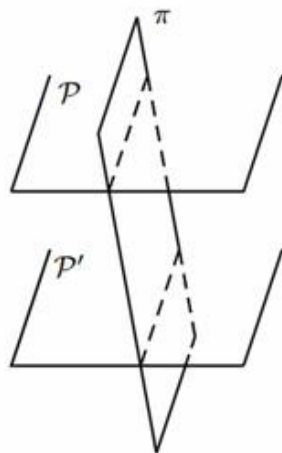
*Exemple.*  $ABCD$  est une pyramide.  $E$  est un point appartenant au plan  $(ABC)$ ,  $F$  et  $G$  sont deux points appartenant respectivement aux segments  $[BD]$  et  $[CD]$  et tels que les droites  $(BC)$  et  $(FG)$  sont parallèles.

En vertu du théorème de toit, l'intersection du plan  $(EFG)$  avec le plan  $(ABC)$  est la droite  $(MN)$  passant par le point  $E$  et parallèle aux droites  $(BC)$  et  $(FG)$ .



**Propriété 10.32. Propriété d'incidence**

Lorsque deux plans sont strictement parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



*Démonstration.* Soit  $\pi$  un plan sécant à  $\mathcal{P}$  distinct de  $\mathcal{P}$ .

Alors  $\pi$  est également sécant à  $\mathcal{P}'$ . En effet, par l'absurde, si  $\pi$  est parallèle à  $\mathcal{P}'$ , alors  $\pi$  est également parallèle à  $\mathcal{P}$  puisque  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont parallèles, ce qui est absurde.

Notons  $\Delta$  et  $\Delta'$  les droites d'intersection du plan  $\pi$  avec les plans respectivement  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ . Ces droites sont incluses dans  $\pi$  donc elles sont soit parallèles, soit sécantes. Si elles étaient sécantes, elles auraient un point d'intersection situé à la fois dans le plan  $\mathcal{P}$  et dans le plan  $\mathcal{P}'$ , ce qui est impossible. Donc  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont parallèles.  $\square$

*Exemple.* Soit  $ABCDEFGH$  un cube, soient  $J$  un point du segment  $[CG]$ ,  $K$  un point du segment  $[AE]$  et  $L$  un point du segment  $[DH]$ .

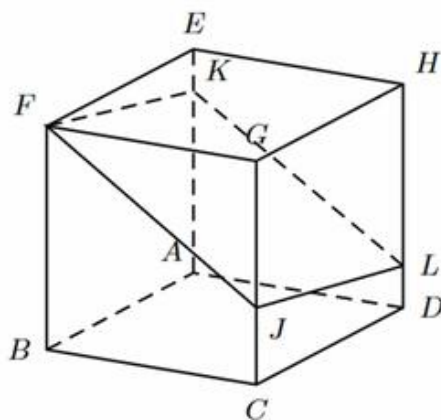
La section du cube  $ABCDEFGH$  par le plan  $(FJL)$  est donc le quadrilatère  $FKLJ$ .

On souhaite montrer que  $FKLJ$  est un parallélogramme.

Les faces  $(BCGF)$  et  $(ADHE)$  sont parallèles. Le plan  $(FJL)$  les coupe donc suivant deux droites parallèles  $(FJ)$  et  $(KL)$  d'après la propriété d'incidence.

De même, les faces  $(ABFE)$  et  $(DCGH)$  sont parallèles. Le plan  $(FJL)$  les coupe donc suivant deux parallèles  $(FK)$  et  $(JL)$  d'après la propriété d'incidence.

Le quadrilatère  $FJLK$  ayant ses côtés opposés parallèles est donc un parallélogramme.



**Application 64.** Soit  $ABCD S$  une pyramide régulière de sommet  $S$  et de base carrée de centre  $O$ .

1. Déterminer l'intersection des plans  $(SBO)$  et  $(SAC)$ .
2. Déterminer l'intersection des plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$ .

## 10.4 Repérage dans l'espace

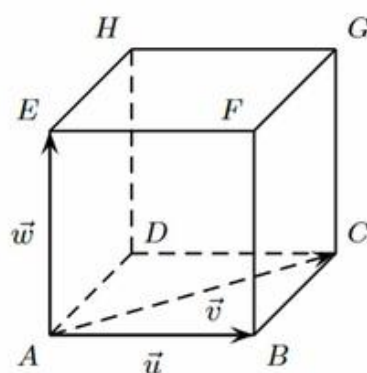
### 10.4.1 Base de l'espace

**Définition 10.33.** Un triplet de vecteurs non coplanaires  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est appelé une base de l'espace.

*Remarque.* Les vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont tous non nuls et sont non colinéaires deux à deux.

*Exemple.* On considère le cube  $ABCDEFGH$  représenté ci-contre. Posons  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ .

Les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  ne sont pas coplanaires car les points  $A, B, C$  et  $E$  ne le sont pas (le point  $C$  n'appartient pas au plan  $(ABE)$ ). Par conséquent, le triplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de l'espace.



**Propriété 10.34.** Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de l'espace. Alors pour tout vecteur  $\vec{u}$  de l'espace, il existe un unique triplet de réels  $(x; y; z)$  tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

*Démonstration.* On démontre l'existence du triplet, puis son unicité.

- Existence. Soient  $A, B, C, D$  et  $M$  des points de l'espace tels que  $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{j} = \overrightarrow{AC}$ ,  $\vec{k} = \overrightarrow{AD}$  et  $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ .

Les vecteurs  $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{AC}$  sont non colinéaires, sinon  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  seraient coplanaires, ce qui est exclu. Par conséquent, le triplet  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  définit un plan : le plan  $(ABC)$  (dirigé par les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ ).

Considérons la droite parallèle à la droite  $(AD)$  passant par le point  $M$  (cette droite est dirigée par le vecteur  $\vec{k} = \overrightarrow{AD}$ ). Cette droite est sécante au plan  $ABC$  en un point  $H$  (si elle était parallèle, on aurait eu  $\vec{k}, \vec{i}$  et  $\vec{j}$  coplanaires).

Les vecteurs  $\overrightarrow{HM}$  et  $\vec{k}$  sont colinéaires, donc  $\overrightarrow{HM} = z\vec{k}$  où  $z$  est un réel.

Par ailleurs, le point  $H$  appartient au plan  $(ABC)$ , donc  $\overrightarrow{AH} = x\vec{u} + y\vec{v}$  où  $x$  et  $y$  sont deux réels.

Comme  $\vec{u} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$ , on obtient finalement  $\vec{u} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{k}$ .

- Unicité. Supposons qu'il existe deux triplets de réels  $(x; y; z)$  et  $(x'; y'; z')$  tels que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

Alors  $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$ . Supposons que l'une des trois différences n'est pas nulle, par exemple  $z - z' \neq 0$ . On peut alors écrire après division par  $z - z'$  :

$$\vec{k} = \frac{x' - x}{z - z'}\vec{i} + \frac{y' - y}{z - z'}\vec{j}.$$

Il vient donc que les vecteurs  $\vec{k}$ ,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont coplanaires d'après la propriété 10.21, ce qui est absurde puisqu'ils sont supposés non coplanaires. Par conséquent, on a  $z - z' = 0$ , soit  $z = z'$ . De manière analogue, on montre que  $x = x'$  et  $y = y'$ .

On obtient finalement l'égalité  $(x; y; z) = (x'; y'; z')$ , d'où l'unicité.

□

*Remarque.*  $(x; y; z)$  sont les coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et on note  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

*Exemple.* On reprend le cube  $ABCDEFGH$  de l'exemple précédent. On souhaite déterminer les coordonnées de  $\overrightarrow{AH}$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ . On a :

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \vec{v} - \vec{u} + \vec{w} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}.$$

Ainsi, dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ , on a  $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

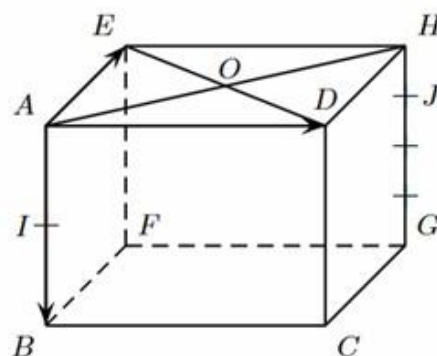
### ⚠ Attention !

L'ordre des vecteurs dans une base de l'espace est primordial !

Ainsi, dans l'exemple précédent les coordonnées de  $\overrightarrow{AH}$  sont donnés par

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ , mais sont donnés par  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  dans la base  $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$  !

**Application 65.**  $ABCDEFGH$  est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous. On note  $I$  le milieu de  $[AB]$ ,  $O$  le centre de la face  $ADHE$  et  $J$  le point défini par  $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$ .



1. Justifier que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  est une base de l'espace.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{OI}$  et  $\overrightarrow{BJ}$  dans cette base.

### 10.4.2 Repère de l'espace

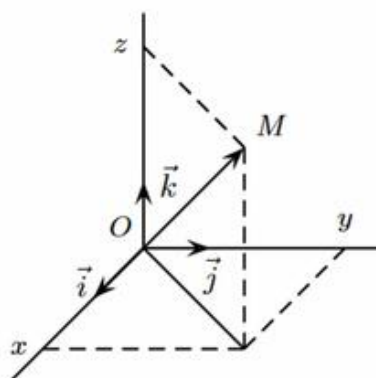
**Définition 10.35.** 1. Un repère de l'espace est formé d'un point  $O$  et d'une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On note  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un tel repère.

2. Le point  $O$  est appelé l'origine du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la propriété 10.34.

**Propriété 10.36.** Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère de l'espace. Alors pour tout point  $M$  de l'espace, il existe un unique triplet de réels  $(x; y; z)$  tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

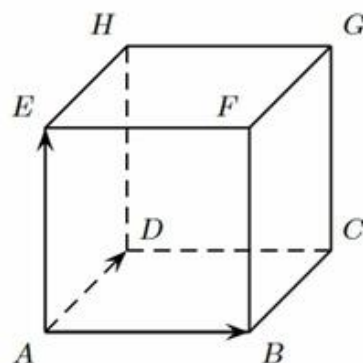


**Remarque.** 1.  $(x; y; z)$  sont les coordonnées de  $M$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et on note  $M(x; y; z)$ .

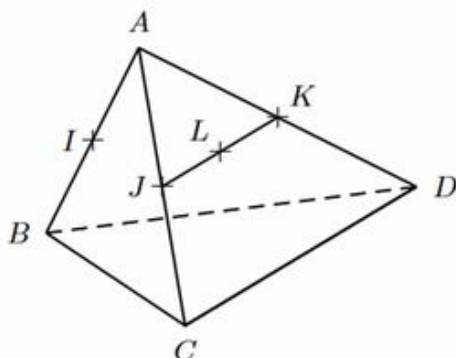
2.  $x$  est l'abscisse de  $M$ ,  $y$  est l'ordonnée de  $M$  et  $z$  est la cote de  $M$ .

**Exemple.** On considère le cube  $ABCDEFGH$  représenté ci-dessous. On choisit le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

- On a  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ , donc on a  $F(1; 0; 1)$ .
- On a aussi  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ , donc on a  $G(1; 1; 1)$ .
- De la même façon, on a  $B(1; 0; 0)$ ,  $C(1; 1; 0)$ ,  $D(0; 1; 0)$ ,  $E(0; 0; 1)$  et  $H(0; 1; 1)$ .



**Application 66.**  $ABCD$  est un tétraèdre. Les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont les milieux respectifs des arêtes  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[AD]$ . Le point  $L$  est le milieu du segment  $[JK]$ .



1. Justifier que  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  est un repère de l'espace.
2. Déterminer les coordonnées des points  $I$ ,  $J$ ,  $K$  et  $L$  dans ce repère.

### 10.4.3 Opérations sur les coordonnées

Toutes les opérations sur les coordonnées dans la géométrie plane s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une troisième coordonnée.

Dans toute cette section, l'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**Propriété 10.37.** Soient les points  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$ . Alors les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* On a  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ . D'après la propriété 10.36, on a  $-\overrightarrow{OA} = -x_A\vec{i} - y_A\vec{j} - z_A\vec{k}$  et  $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}$ , donc on obtient

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}.$$

D'où le résultat en vertu de la propriété 10.34. □

*Exemple.* Soient  $A(1; -1; 2)$  et  $B(3; 1; -4)$ .

On a alors  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-(-1) \\ -4-2 \end{pmatrix}$ , soit  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ .

**Propriété 10.38.** Soient les points  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$ . Alors les coordonnées du milieu  $I$  du segment  $[AB]$  sont :

$$I \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right).$$

*Démonstration.*  $I$  est le milieu de  $[AB]$ , donc  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ , et donc  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ . Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{AO} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AO} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}. \end{aligned}$$

D'après la propriété 10.36 on a alors  $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}) + \frac{1}{2}(x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k})$ , c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{x_A + x_B}{2}\vec{i} + \frac{y_A + y_B}{2}\vec{j} + \frac{z_A + z_B}{2}\vec{k}.$$

D'où le résultat en vertu de la propriété 10.34. □

*Exemple.* Notons  $A$  et  $B$  les points de coordonnées respectivement  $(3; 4; -4)$  et  $(-1; 6; 2)$ .

Alors le milieu  $I$  du segment  $[AB]$  a pour coordonnées :

$$I \left( \frac{3 + (-1)}{2}; \frac{4 + 6}{2}; \frac{-4 + 2}{2} \right) \text{ soit : } I(1; 5; -1).$$

**Propriété 10.39.** Soient les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ , et soit  $\lambda$  un réel.

1. Les coordonnées du vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  sont  $(\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ .

2. Les coordonnées du vecteur  $\lambda\vec{u}$  sont  $(\lambda\vec{u}) \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$ .

*Démonstration.* Par la propriété 10.34, on a  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ .

1. Il vient donc que :  $\vec{u} + \vec{v} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} + (z + z')\vec{k}$ .

D'où le résultat d'après la propriété 10.34.

2. Pour tout réel  $\lambda$  :  $\lambda\vec{u} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (\lambda x)\vec{i} + (\lambda y)\vec{j} + (\lambda z)\vec{k}$ .

D'où le résultat d'après la propriété 10.34. □

*Exemple.* Notons  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  les vecteurs de coordonnées respectivement  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$  et

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Alors le vecteur  $\vec{w} = \vec{u} + 3\vec{v}$  a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Finalement :  $\vec{w} \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ -16 \end{pmatrix}$ .

*Exemple.*  $\mathcal{P}_1$  est un plan de vecteurs directeurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{P}_2$  est un plan

de vecteurs directeurs  $\vec{t} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

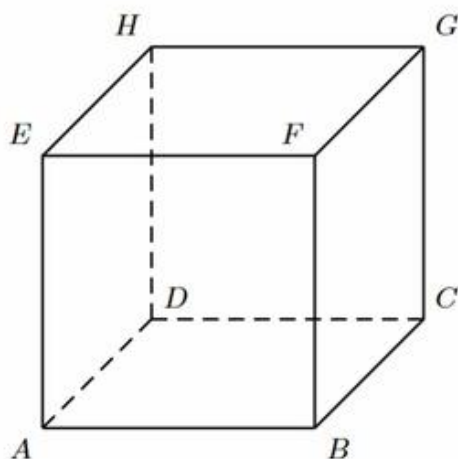
Notons alors que  $\vec{t} = -\vec{u} + 3\vec{v}$  et  $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$ , donc les vecteurs  $\vec{t}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  sont coplanaires ainsi que les vecteurs  $\vec{w}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ . On déduit d'après la propriété 10.28 que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont parallèles.

**Application 67.** Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne les points  $E(-1; 3; 2)$ ,  $F(2; -1; 3)$  et  $G(-1; 0; 1)$ .

Déterminer les coordonnées du point  $M$  tels que  $\vec{EM} = \vec{EF} + 2\vec{EG}$ .

## 10.5 Exercices

**Exercice 10.1** (Sujet bac, Centres étrangers, 2012).  $ABCDEFGH$  est le cube représenté ci-dessous.



On reproduira la figure et on la complétera au fur et à mesure de l'exercice.  
On se place dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

### Partie A

1. (a) Construire les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}.$$

- (b) Déterminer les coordonnées de chacun des points  $I$ ,  $J$  et  $K$ .  
(c) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites  $(IJ)$  et  $(IK)$ .
2.  $L$  est un point de l'arête  $[CD]$ . Donc les coordonnées de  $L$  sont de la forme  $(a; 1; 0)$  où  $a$  est un réel de l'intervalle  $[0; 1]$ .  
Pour quelle valeur de  $a$ , le point  $L$  appartient-il au plan  $(IJK)$ ?

### Partie B

Dans cette partie, on pose  $a = \frac{1}{4}$  et le point  $L$  a pour coordonnées  $(\frac{1}{4}; 1; 0)$ .

1. (a) Démontrer que le quadrilatère  $IKJL$  est un parallélogramme.  
(b) Calculer les coordonnées du centre de  $IKJL$ .  
(c) Quelle est la position relative des droites  $(IJ)$  et  $(KL)$ ?
2. (a) Démontrer que les droites  $(IJ)$  et  $(BH)$  sont sécantes.  
(b) Le centre du cube appartient-il au plan  $(IJK)$ ?

3. (a) Déterminer un point  $M$  de la droite  $(HG)$  tel que les droites  $(MF)$  et  $(IL)$  soient parallèles.  
 (b) Justifier que la droite  $(MF)$  est parallèle au plan  $(IJK)$ .

**Exercice 10.2 ♠ (Barycentre de points pondérés).**

**Partie A. Définition**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2, soient  $n$  points de l'espace  $A_1, \dots, A_n$  et soient  $n$  réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$ .

1. Soit  $M$  un point quelconque de l'espace. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k} = \vec{0} \iff \overrightarrow{A_1M} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{A_1A_n}.$$

2. Dédurre qu'il existe un unique point  $G$  de l'espace tel que :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}.$$

Un tel point  $G$  s'appelle le **barycentre** des points pondérés  $(A_1; \alpha_1), \dots, (A_n; \alpha_n)$  et on note  $G = \text{bar}(\{(A_1; \alpha_1), \dots, (A_n; \alpha_n)\})$ .

**Partie B. Deux points particuliers**

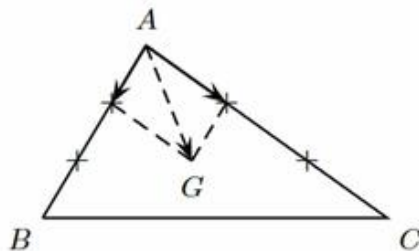
1. Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace. Montrer l'équivalence suivante :

$$G \text{ milieu de } [AB] \iff \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, G = \text{bar}(\{(A; \alpha), (B; \alpha)\}).$$

2. Soient  $A, B$  et  $C$  trois points de l'espace non alignés. Montrer l'équivalence suivante :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \iff \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, G = \text{bar}(\{(A; \alpha), (B; \alpha), (C; \alpha)\}).$$

Le point  $G$  est appelé **centre de gravité** du triangle  $ABC$ .



**Partie C. Propriétés**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2, soient  $n$  points de l'espace  $A_1, \dots, A_n$  et soient  $n$  réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$ .

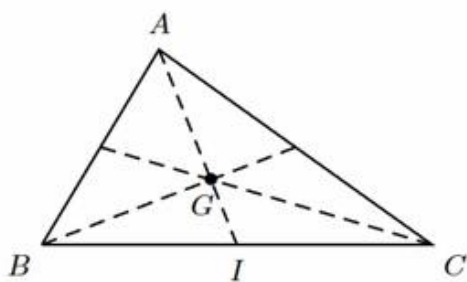
1. Démontrer que  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A_1; \alpha_1), \dots, (A_n; \alpha_n)$ , si, et seulement si pour tout réel  $\mu \neq 0$ ,  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A_1; \mu\alpha_1), \dots, (A_n; \mu\alpha_n)$ .
2. **Propriété de réduction.** Démontrer que si  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A_1; \alpha_1), \dots, (A_n; \alpha_n)$ , alors pour tout point  $M$  de l'espace, on a :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MG} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k}.$$

3. **Propriété d'associativité.** Démontrer que si  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A_1; \alpha_1), \dots, (A_n; \alpha_n)$ , et si  $K$  est le barycentre des points pondérés  $(A_1; \alpha_1), \dots, (A_{n-1}; \alpha_{n-1})$  avec  $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \neq 0$ , alors  $G$  est le barycentre des points pondérés  $\left(K; \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k\right)$  et  $(A_n; \alpha_n)$ .

**Partie D. Applications**

1. Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan. Notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = AB$ .
  - (a) En posant  $G = \text{bar}(\{(A; 3), (B; -2)\})$  et en utilisant la propriété de réduction, démontrer l'équivalence suivante :
 
$$M \in \mathcal{E} \iff GM = AB.$$
  - (b) Dédire alors l'ensemble  $\mathcal{E}$ .
2. Soit  $ABC$  un triangle. Notons  $G$  son centre de gravité et notons  $A'$  le milieu de  $[BC]$ .

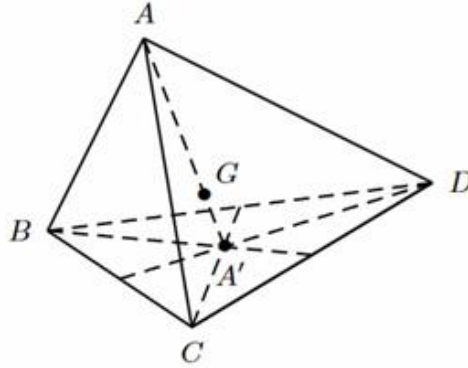


- (a) En utilisant la propriété d'associativité, montrer que :

$$G = \text{bar}(\{(A; 1), (A'; 2)\}).$$

10.5. Exercices

- (b) En déduire que :  $G \in (AA')$ .
- (c) Montrer que les médianes du triangle  $ABC$  sont concourantes en  $G$ .
3. Soit  $ABCD$  un tétraèdre. Posons  $G = \text{bar}(\{(A; 1), (B; 1), (C; 1), (D; 1)\})$ . Les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  sont respectivement les centres de gravité des triangles  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  et  $ABC$ .



Démontrer que les segments  $[AA']$ ,  $[BB']$ ,  $[CC']$  et  $[DD']$  sont concourants en  $G$ .



# Orthogonalité dans l'espace

## 11.1 Produit scalaire dans l'espace

Dans cette section, on étend aux vecteurs de l'espace la définition et les propriétés du produit scalaire dans le plan vues en classe de première.

### 11.1.1 Extension du produit scalaire à l'espace

Puisque deux vecteurs de l'espace sont nécessairement coplanaires, il en résulte que la définition du produit scalaire dans le plan vue en classe de première est encore valable dans l'espace.

**Définition 11.1.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace.

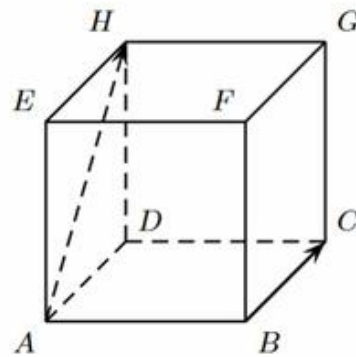
1. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls, on appelle produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel, noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , défini par  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ , où  $(\vec{u}, \vec{v})$  correspond à la mesure de l'angle géométrique associé à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
2. Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ , on définit le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  par  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

*Remarque.* 1. Le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{u}$ , noté  $\vec{u}^2$ , est appelé le carré scalaire de  $\vec{u}$ .

2. On a alors  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(0) = \|\vec{u}\|^2$ , et donc  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$ .

*Exemple.*  $ABCDEFGH$  est un cube d'arête 1 représenté ci-dessous.

On souhaite calculer  $\vec{BC} \cdot \vec{AH}$ .



On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG} = \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BG}\| \times \cos(\widehat{CBG}) \\ &= BC \times BG \times \cos(45^\circ) = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 1 \times \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

*Remarque.* Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, alors :  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ . En effet :

- si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de même sens, il vient que :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  car  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$  ;
- si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de sens opposé, il vient que :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  car  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ .

### 11.1.2 Propriétés algébriques

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont conservées dans l'espace.

#### Propriété 11.2. Symétrie et bilinéarité

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace, et soit  $k$  un réel. On a :

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2.  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
3.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

*Démonstration.* Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace, et  $k$  est un réel.

1. Puisque  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{v}, \vec{u})$ , il vient que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

2. Montrons que  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ . On a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (k\vec{v}) &= \|\vec{u}\| \times \|k\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, k\vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\| \times |k| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, k\vec{v}) \\ &= |k| \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, k\vec{v}). \end{aligned}$$

On distingue alors les trois cas suivant.

- Si  $k > 0$ , alors  $|k| = k$  et  $\cos(\vec{u}, k\vec{v}) = \cos(\vec{u}, \vec{v})$ .  
On a alors  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ .
- Si  $k < 0$ , alors  $|k| = -k$  et  $\cos(\vec{u}, k\vec{v}) = \cos(\pi + (\vec{u}, \vec{v})) = -\cos(\vec{u}, \vec{v})$ .  
On a alors  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = -k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times (-\cos(\vec{u}, \vec{v})) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ .
- Si  $k = 0$ , on a  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$  et  $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0$ , d'où l'égalité.

### 11.1. Produit scalaire dans l'espace

Dans tous les cas, nous avons montré que  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ .

On montre de manière analogue que  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ .

3. Cette démonstration fait l'objet de l'exercice 11.4.

□

*Exemple.* On reprend le cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1 de l'exemple précédent.

— On vérifie que  $\vec{BC} \cdot \vec{AH} = \vec{AH} \cdot \vec{BC}$ .

Puisque  $\vec{BC} = \vec{AD}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{AH} \cdot \vec{BC} &= \vec{AH} \cdot \vec{AD} = AH \times AD \times \cos(\widehat{HAD}) \\ &= \sqrt{2} \times 1 \times \cos(45^\circ) \\ &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1, \end{aligned}$$

donc on obtient bien  $\vec{BC} \cdot \vec{AH} = \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 1$ .

— On souhaite calculer  $\vec{BC} \cdot \vec{AG}$ .

On a  $\vec{BC} \cdot \vec{AG} = \vec{BC} \cdot (\vec{AH} + \vec{HG}) = \vec{BC} \cdot \vec{AH} + \vec{BC} \cdot \vec{HG}$ .

Or  $\vec{BC} = \vec{AD}$  et  $\vec{HG} = \vec{AB}$ , donc on obtient :

$$\vec{BC} \cdot \vec{HG} = \vec{AD} \cdot \vec{AB} = AD \times AB \times \cos(\widehat{BAD}) = 1 \times 1 \times \cos(90^\circ) = 0.$$

De plus, on a vu que  $\vec{BC} \cdot \vec{AH} = 1$ , donc finalement  $\vec{BC} \cdot \vec{AG} = 1 + 0 = 1$ .

#### Propriété 11.3. Identités remarquables

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. On a :

1.  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
2.  $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
3.  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

*Démonstration.*  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs de l'espace.

1. En utilisant la propriété 11.2, on a :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

2. En utilisant la propriété 11.2, on a :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u} + (-\vec{v})\|^2 = (\vec{u} + (-\vec{v}))^2 \\ &= (\vec{u} + (-\vec{v})) \cdot (\vec{u} + (-\vec{v})) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + (-\vec{v})) + (-\vec{v}) \cdot (\vec{u} + (-\vec{v})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (-\vec{v}) + (-\vec{v}) \cdot \vec{u} + (-\vec{v}) \cdot (-\vec{v}) \\
 &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\
 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2
 \end{aligned}$$

3. En utilisant la propriété 11.2, on a :

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + (-\vec{v})) \\
 &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (-\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot (-\vec{v}) \\
 &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} \\
 &= \vec{u}^2 + 0 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2
 \end{aligned}$$

□

#### Propriété 11.4. Formules de polarisation

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. On a :

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
2.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
3.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

*Démonstration.* Les trois formules de polarisation se déduisent immédiatement de la propriété 11.3.

□

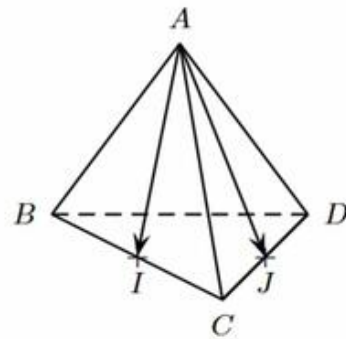
*Remarque.* En particulier, pour trois points quelconques  $A$ ,  $B$  et  $C$  de l'espace, on a d'après l'item 2 :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2).$$

*Exemple.* On reprend le cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1 de l'exemple précédent. On souhaite calculer  $\vec{BC} \cdot \vec{AH}$  à l'aide d'une formule de polarisation :

$$\begin{aligned}
 \vec{BC} \cdot \vec{AH} &= \vec{BC} \cdot \vec{BG} = \frac{1}{2} (BC^2 + BG^2 - CG^2) = \frac{1}{2} (1^2 + (\sqrt{2})^2 - 1^2) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + 2 - 1) = 1.
 \end{aligned}$$

**Application 68.** On a représenté ci-contre un tétraèdre régulier  $ABCD$  (chaque face est un triangle équilatéral) d'arête 6.  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs des arêtes  $[BC]$  et  $[CD]$ .



1. Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ .
2. Calculer  $AI$  et  $AJ$ .
3. Calculer  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$  en utilisant les égalités  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$  et  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AJ}$ .
4. Exprimer ce produit scalaire en fonction de  $\cos(\widehat{IAJ})$  et en déduire la mesure, en degré, de l'angle  $\widehat{IAJ}$ .

## 11.2 Orthogonalité dans l'espace

### 11.2.1 Orthogonalité de deux vecteurs

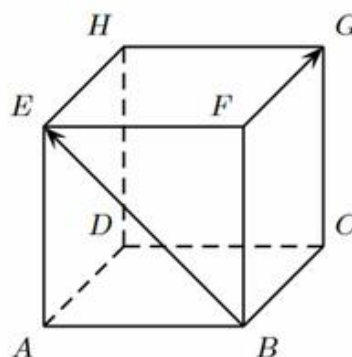
**Définition 11.5.** Deux vecteurs de l'espace  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dits orthogonaux si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

*Remarque.* 1. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur  $\vec{u}$  de l'espace car  $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$ .

2. Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si, et seulement si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  ou  $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ .

*Exemple.* On considère le cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1 représenté ci-dessous.

- Les vecteurs  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont orthogonaux car  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC}) = 1 \times 1 \times \cos(90^\circ) = 1 \times 0 = 0$ .
- De la même manière, les vecteurs  $\overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont orthogonaux.



Montrons maintenant que les vecteurs  $\overrightarrow{BE}$  et  $\overrightarrow{FG}$  sont orthogonaux. On a :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FG} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) \cdot \overrightarrow{FG} \\
 &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{FG} \\
 &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} \quad \text{car } \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \\
 &= 0 + 0 = 0,
 \end{aligned}$$

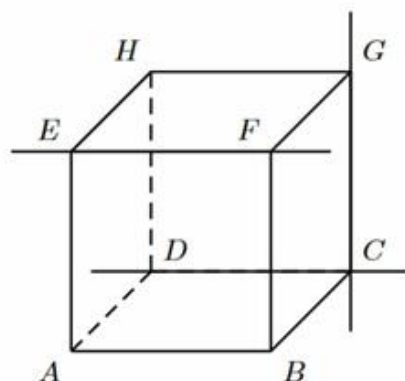
donc les vecteurs  $\overrightarrow{BE}$  et  $\overrightarrow{FG}$  sont bien orthogonaux.

### 11.2.2 Orthogonalité de deux droites

**Définition 11.6.** Deux droites de l'espace sont dites orthogonales si leurs parallèles passant par un même point quelconque sont perpendiculaires.

*Exemple.*  $ABCDEFGH$  est un cube.

- Les droites  $(CG)$  et  $(EF)$  sont orthogonales car la parallèle  $(GH)$  à la droite  $(EF)$  est perpendiculaire en  $G$  à la droite  $(CG)$ .
- Les droites  $(CD)$  et  $(CG)$  sont orthogonales car elles sont perpendiculaires en  $C$ .



### ⚠ Attention !

Deux droites perpendiculaires sont orthogonales mais deux droites orthogonales ne sont pas forcément perpendiculaires ! Dans l'exemple précédent, les droites  $(CG)$  et  $(EF)$  sont orthogonales mais elles ne sont pas perpendiculaires puisqu'elles ne sont pas coplanaires.

- Remarque.*
1. Si deux droites de l'espace sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
  2. Si deux droites de l'espace sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

**Propriété 11.7.** Deux droites de l'espace  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont orthogonales si, et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ .

*Démonstration.* On raisonne par double implication.

$\Rightarrow$ ) Supposons que les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont orthogonales. Il existe donc deux droites  $d$  et  $d'$  respectivement parallèles à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  perpendiculaires en un point  $A$ .  $\vec{u}$  étant un vecteur directeur de  $d$  et  $\vec{u}'$  un vecteur directeur de  $d'$ , on obtient :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}'\| \times \cos(\vec{u}, \vec{u}') = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}'\| \times \cos(90^\circ) = 0.$$

$\Leftarrow$ ) Supposons que  $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ . Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  étant non nuls, on a  $(\vec{u}, \vec{u}') = 90^\circ$ . Il existe dans ce cas deux droites  $d$  et  $d'$  dirigées par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  perpendiculaires en un point  $A$ . Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont alors respectivement parallèles à  $d$  et  $d'$ , elles sont donc orthogonales par définition.

□

*Exemple.* On a montré dans l'exemple de la section 11.2.1 que  $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$ , on déduit donc que les droites  $(BE)$  et  $(FG)$  sont orthogonales.

*Remarque.* Deux droites de l'espace  $(AB)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires si, et seulement si  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

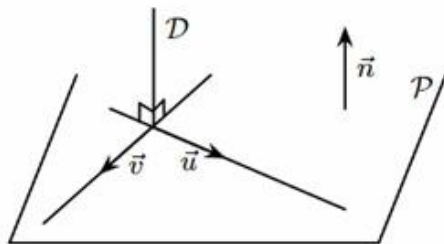
**Application 69.**  $ABCDEFGH$  est un cube d'arête un nombre réel  $a > 0$ .

1. Exprimer  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BG}$  et  $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{BG}$  en fonction de  $a$ .
2. Utiliser  $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$  pour calculer  $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG}$ .
3. En déduire que les droites  $(DF)$  et  $(BG)$  sont orthogonales.

### 11.2.3 Orthogonalité d'un plan et d'une droite

**Définition 11.8.** Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes les droites contenues dans ce plan.

**Propriété 11.9.** Soit une droite  $\mathcal{D}$  de vecteur directeur  $\vec{n}$  et soit un plan  $\mathcal{P}$  de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . La droite  $\mathcal{D}$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}$  si, et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$  et  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ .



*Démonstration.* On raisonne par double implication.

$\Rightarrow$ ) Supposons que la droite  $\mathcal{D}$  portée par le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}$ . Par définition,  $\mathcal{D}$  est orthogonale à toutes les droites contenues dans  $\mathcal{P}$ . En particulier,  $\mathcal{D}$  est orthogonale à deux droites sécantes contenues dans  $\mathcal{P}$  portées par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . D'après la propriété 11.7, il vient que  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$  et  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ .

$\Leftarrow$ ) Supposons que  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$  et  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ . Soit  $\mathcal{D}'$  une droite quelconque contenue dans  $\mathcal{P}$  de vecteur directeur  $\vec{w}$ . Ainsi, les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires. D'après la propriété 10.21, il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ . On obtient alors :

$$\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot (x\vec{u} + y\vec{v}) = x(\vec{n} \cdot \vec{u}) + y(\vec{n} \cdot \vec{v}) = 0.$$

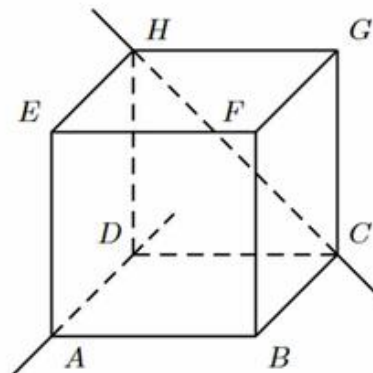
Puisque les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{w}$  sont orthogonaux, les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont orthogonales d'après la propriété 11.7.

On a donc montré que la droite  $\mathcal{D}$  est orthogonale à toute droite  $\mathcal{D}'$  du plan  $\mathcal{P}$ . Par définition,  $\mathcal{D}$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}$ . □

*Remarque.* Autrement dit, une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes quelconques incluses dans ce plan.

*Exemple.*  $ABCDEFGH$  est un cube.

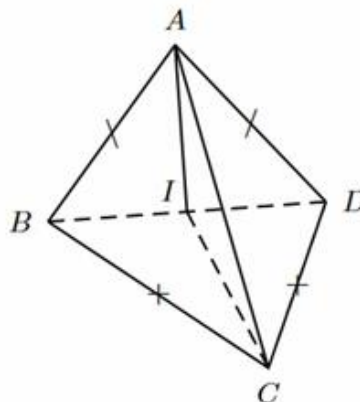
- On a  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$  et  $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$ . Comme les vecteurs  $\overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{DH}$  sont des vecteurs directeurs du plan  $(CDH)$ , la droite  $(DA)$  est orthogonale au plan  $(CDH)$ .
- La droite  $(DA)$  est orthogonale au plan  $(CDH)$ , elle est donc orthogonale à toutes les droites du plan  $(CDH)$ , en particulier à la droite  $(HC)$ .



- Remarque.*
1. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
  2. Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.

**Application 70.**  $ABCD$  est un tétraèdre tel que le triangle  $ABD$  est isocèle en  $A$  et le triangle  $BCD$  est isocèle en  $C$ .  $I$  est le milieu du segment  $[BD]$ .

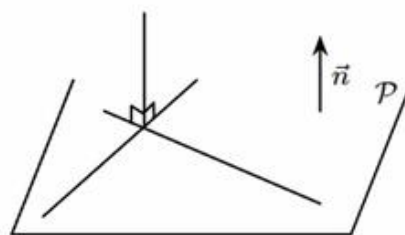
1. Montrer que la droite  $(BD)$  est orthogonale au plan  $(AIC)$ .
2. En déduire que les droites  $(BD)$  et  $(AC)$  sont orthogonales.



## 11.3 Vecteur normal à un plan

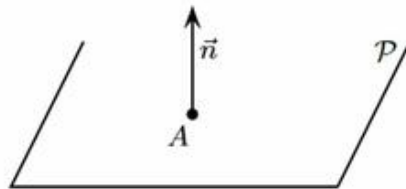
### 11.3.1 Définitions

**Définition 11.10.** On considère une droite orthogonale à un plan  $\mathcal{P}$ . Tout vecteur directeur  $\vec{n}$  de cette droite est appelé vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$ .



*Remarque.* En conséquence, un vecteur  $\vec{n} \neq \vec{0}$  est normal à un plan  $\mathcal{P}$  si, et seulement si  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de ce plan, c'est-à-dire :  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$  et  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ .

*Remarque.* Un plan est entièrement déterminé par un point  $A$  et un vecteur  $\vec{n}$  : c'est le plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

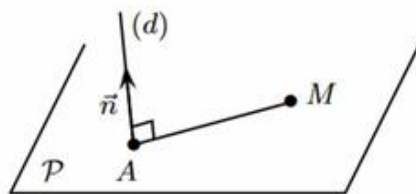


- Remarque.*
1. Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal à un plan est aussi un vecteur normal à ce plan.
  2. Si deux vecteurs sont normaux à un même plan, alors ils sont colinéaires entre eux.

**Propriété 11.11.** Soient  $A$  un point de l'espace et  $\vec{n}$  un vecteur non nul. Le plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ .

*Démonstration* ♠. Notons  $\mathcal{P}$  le plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  et notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ . Il s'agit alors de montrer que  $\mathcal{P} = \mathcal{F}$ . Pour ce faire, montrons  $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$  puis  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ .

- Soit  $M$  un point appartenant à  $\mathcal{P}$ . Alors la droite  $(d)$  passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{n}$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}$ .



Si  $M \neq A$ , la droite  $(AM)$  étant incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ , les droites  $(d)$  et  $(AM)$  sont orthogonales, il vient donc :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0, \text{ donc : } M \in \mathcal{F}.$$

Si  $M = A$ , on a :  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \vec{0} \cdot \vec{n} = 0$ , donc :  $M \in \mathcal{F}$ .  
On a donc montré que  $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ .

- Soit  $M$  un point de  $\mathcal{F}$ . Notons  $M'$  le projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $\mathcal{P}$  (voir définition 11.19). On a :

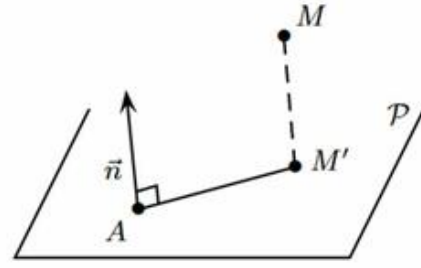
$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AM'} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{M'M} \cdot \vec{n}.$$

La droite  $(AM')$  étant incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ , on a  $\overrightarrow{AM'} \cdot \vec{n} = 0$ .

De plus, les vecteurs  $\overrightarrow{MM'}$  et  $\vec{n}$  étant colinéaires, il vient  $|\overrightarrow{M'M} \cdot \vec{n}| = M'M \times \|\vec{n}\|$ .

Puisque  $M \in \mathcal{F}$ , alors  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ , donc  $\overrightarrow{M'M} \cdot \vec{n} = 0$ , donc  $|\overrightarrow{M'M} \cdot \vec{n}| = 0$ , soit  $M'M \times \|\vec{n}\| = 0$ , donc  $MM' = 0$  puisque  $\|\vec{n}\| \neq 0$ , soit finalement  $M = M'$ , donc  $M \in \mathcal{P}$ .

On a donc montré que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ .



□

*Remarque.* Autrement dit, un point  $M$  appartient au plan passant par un point  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  si, et seulement si,  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ .

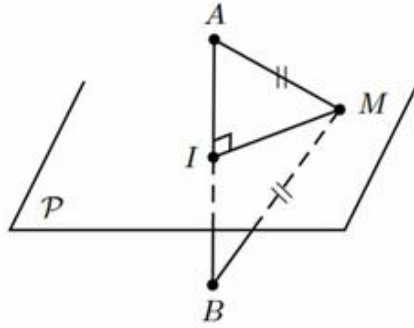
*Exemple.* Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace. Notons  $I$  le milieu du segment  $[AB]$  et notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $MA = MB$ . Remarquons que pour tout point  $M$  de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} \quad \text{car } \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}.$$

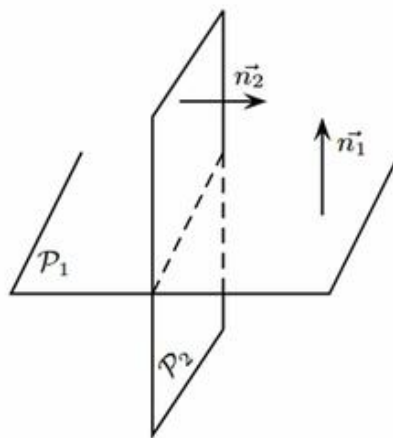
Raisonnons par équivalences successives :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\iff MA = MB \\ &\iff \|\overrightarrow{MA}\|^2 = \|\overrightarrow{MB}\|^2 \\ &\iff \|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 = 0 \\ &\iff (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \quad (\text{propriété 11.3}) \\ &\iff (2\overrightarrow{MI}) \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}) = 0 \\ &\iff \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\iff M \text{ appartient au plan passant par } I \\ &\quad \text{et de vecteur normal } \overrightarrow{AB} \quad (\text{propriété 11.11}). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble  $\mathcal{E}$  est le plan passant par  $I$  et de vecteur normal  $\overrightarrow{AB}$ . Ce plan se nomme le **plan médiateur** du segment  $[AB]$ .

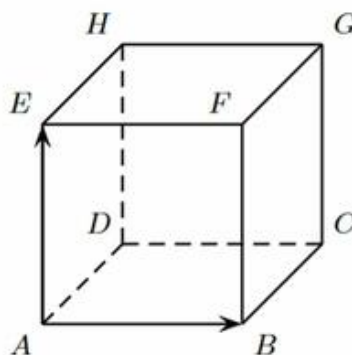


**Définition 11.12.** Soient  $\mathcal{P}_1$  un plan de vecteur normal  $\vec{n}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  un plan de vecteur normal  $\vec{n}_2$ . Le plan  $\mathcal{P}_1$  est dit perpendiculaire au plan  $\mathcal{P}_2$  si le vecteur  $\vec{n}_1$  est orthogonal au vecteur  $\vec{n}_2$ .



*Exemple.* On considère le cube  $ABCDEFGH$  représenté ci-dessous.

Le vecteur  $\vec{AB}$  est normal au plan  $(EAD)$  et le vecteur  $\vec{AE}$  est normal au plan  $(ABC)$ .  
Puisque  $\vec{AB} \cdot \vec{AE} = 0$ , on peut affirmer que les plans  $(EAD)$  et  $(ABC)$  sont perpendiculaires.

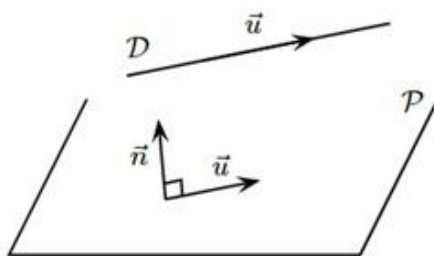


**Application 71.**  $ABCDEFGH$  est un cube.

1. Montrer que le vecteur  $\vec{CG}$  est normal au plan  $(FGH)$ .
2. Montrer que le vecteur  $\vec{AH}$  est un vecteur normal au plan  $(EDC)$ .

### 11.3.2 Propriétés

**Propriété 11.13.** Soient une droite  $\mathcal{D}$  de vecteur directeur  $\vec{u}$  et un plan  $\mathcal{P}$  de vecteur normal  $\vec{n}$ . La droite  $\mathcal{D}$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$  si, et seulement si,  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ .



*Démonstration.* On raisonne par double implication.

$\implies$ ) Supposons que la droite  $\mathcal{D}$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$ . Soient  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  deux vecteurs directeurs du plan  $\mathcal{P}$ .

Alors les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires. Il existe donc deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$ . Par ailleurs, puisque le vecteur  $\vec{n}$  est normal au plan  $\mathcal{P}$ , on a  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  et  $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ . On obtient alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (x\vec{v} + y\vec{w}) \cdot \vec{n} = x(\vec{v} \cdot \vec{n}) + y(\vec{w} \cdot \vec{n}) = 0.$$

$\impliedby$ ) Supposons que  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ . Soient  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  deux vecteurs directeurs de  $\mathcal{P}$  et soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non alignés tels que  $A \in \mathcal{P}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ . Notons  $A'$  le point tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ .

Puisque :  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ , alors :  $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{n} = 0$ , donc  $A'$  appartient au plan  $\mathcal{P}$  d'après la propriété 11.11.

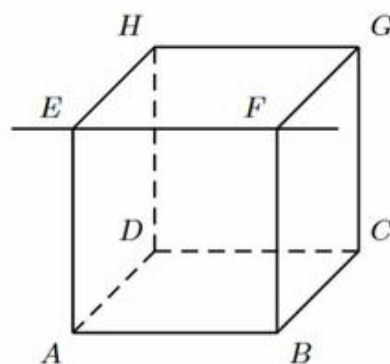
Par conséquent, les points  $A'$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont coplanaires, donc les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  le sont aussi. Il vient donc que la droite  $\mathcal{D}$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$  d'après la propriété 10.25. □

*Remarque.* 1. En conséquence, la droite  $\mathcal{D}$  est sécante avec le plan  $\mathcal{P}$  si, et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$ .

2. La droite  $\mathcal{D}$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}$  si, et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires.

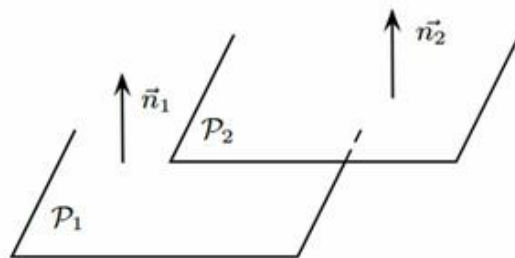
*Exemple.* Dans le cube  $ABCDEFGH$  ci-contre, le vecteur  $\overrightarrow{AE}$  est normal au plan  $(ABC)$  et le vecteur  $\overrightarrow{EF}$  dirige la droite  $(EF)$ .

Puisque  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ , la droite  $(EF)$  est parallèle au plan  $(ABC)$ .



La propriété ci-dessous est assez intuitive.

**Propriété 11.14. (admise)** Soient  $\mathcal{P}_1$  un plan de vecteur normal  $\vec{n}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  un plan de vecteur normal  $\vec{n}_2$ . Le plan  $\mathcal{P}_1$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}_2$  si, et seulement si,  $\vec{n}_1$  est colinéaire à  $\vec{n}_2$ .

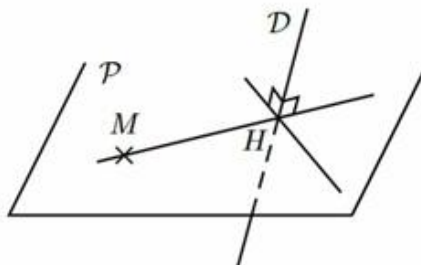


*Remarque.* En conséquence, les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants si, et seulement si, les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  ne sont pas colinéaires.

## 11.4 Projections orthogonales dans l'espace

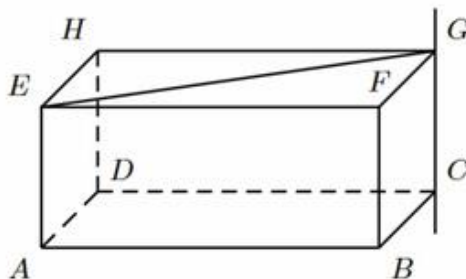
### 11.4.1 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

**Définition 11.15.** Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur une droite  $\mathcal{D}$  est le point  $H$ , intersection de  $\mathcal{D}$  avec le plan passant par  $M$  et orthogonal à  $\mathcal{D}$ .



*Remarque.* 1. Le plan passant par  $M$  et orthogonal à  $\mathcal{D}$  est unique.  
 2. Lorsque  $M \in \mathcal{D}$ , le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$  est le point  $M$  (les points  $H$  et  $M$  sont confondus).

*Exemple.* Dans le parallélépipède  $ABCDEFGH$  représenté ci-contre, le projeté orthogonal du point  $E$  sur la droite  $(CG)$  est le point  $G$  car le plan  $(EFG)$  est orthogonal à la droite  $(CG)$  et passe par le point  $E$ .



**Propriété 11.16.** Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur une droite  $\mathcal{D}$  est le point de  $\mathcal{D}$  le plus proche de  $M$ .

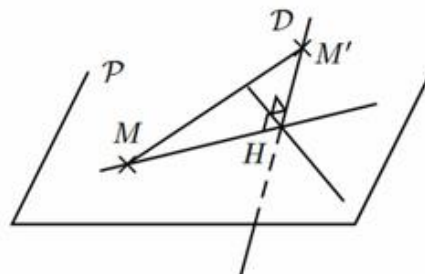
*Démonstration.* Notons  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $\mathcal{D}$ .

— Si  $M \in \mathcal{D}$ , alors  $MH = 0$  et  $H$  est bien le point de  $\mathcal{D}$  le plus proche de  $M$ .

— Si  $M \notin \mathcal{D}$ , soit  $M'$  un point quelconque de  $\mathcal{D}$  distinct de  $H$ .

Alors le triangle  $MM'H$  est rectangle en  $H$ . Le plus grand côté d'un triangle rectangle étant l'hypoténuse, on a  $MH < MM'$ .

Cela signifie bien que  $H$  est le point de  $\mathcal{D}$  le plus proche de  $M$ .



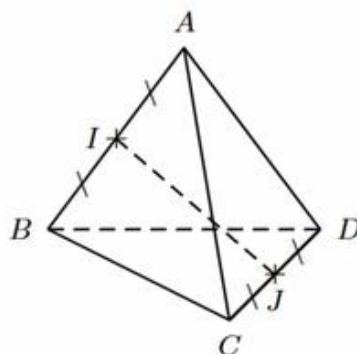
□

**Définition 11.17.** La distance d'un point  $M$  à une droite  $\mathcal{D}$  est la longueur  $MH$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $\mathcal{D}$ .

*Exemple.* On reprend le parallélépipède  $ABCDEFGH$  de l'exemple précédent. Le point  $G$  est le point de la droite  $(CG)$  le plus proche de  $E$ , et la distance du point  $E$  à la droite  $(CG)$  est la longueur  $EG$ .

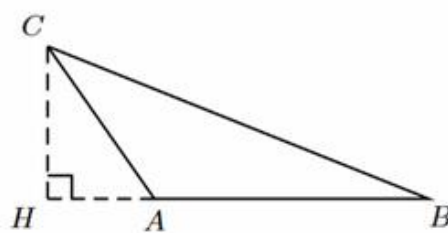
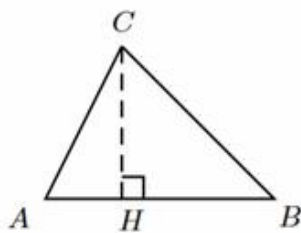
**Application 72.**  $ABCD$  est un tétraèdre régulier d'arête 1.  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[CD]$ .

1. Démontrer que les droites  $(IJ)$  et  $(CD)$  sont orthogonales.
2. En déduire la distance du point  $I$  à la droite  $(CD)$ .



**Propriété 11.18.** Soient  $A, B$  et  $C$  trois points de l'espace, soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls définis par  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . Notons  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur la droite  $(AB)$ . Alors on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } H \in [AB) \\ -AB \times AH & \text{sinon} \end{cases}$$



*Démonstration.* On suppose que  $H \in [AB)$  (le cas  $H \in (AB]$  se démontre de manière analogue).

On a  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ .

Mais puisque le triangle  $AHC$  est rectangle en  $H$ , alors  $\cos(\widehat{BAC}) = \cos(\widehat{HAC}) = \frac{AH}{AC}$ , donc on obtient :

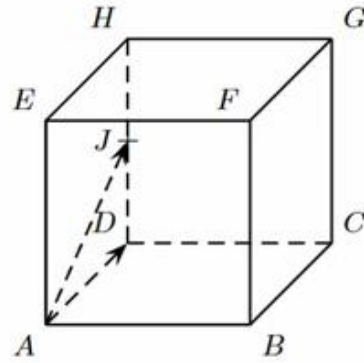
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \frac{AH}{AC} = AB \times AH.$$

□

*Exemple.* Dans le cube  $ABCDEFGH$  ci-contre de côté un réel  $a > 0$ ,  $J$  est le milieu  $[DH]$ .

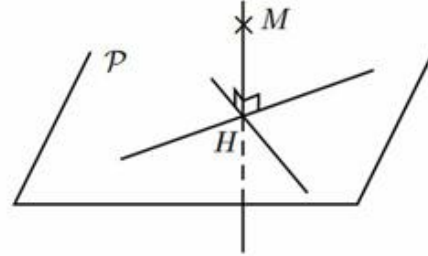
Alors  $\vec{AD} \cdot \vec{AJ} = \vec{AD} \cdot \vec{AD}$  car  $D$  est le projeté orthogonal de  $J$  sur la droite  $(AD)$ .

Ainsi  $\vec{AD} \cdot \vec{AJ} = AD^2 = a^2$ .



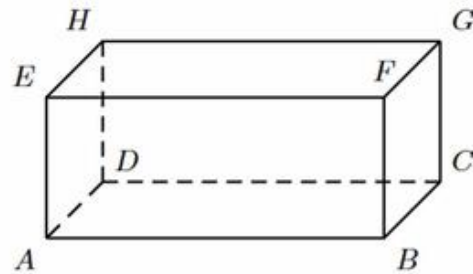
### 11.4.2 Projeté orthogonal d'un point sur un plan

**Définition 11.19.** Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur un plan  $\mathcal{P}$  est le point  $H$ , intersection du plan  $\mathcal{P}$  et de la droite passant par  $M$  et orthogonale à  $\mathcal{P}$ .



*Remarque.* Lorsque  $M \in \mathcal{P}$ , le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{P}$  est le point  $M$  (les points  $M$  et  $H$  sont confondus).

*Exemple.* Dans le parallélépipède  $ABCDEFGH$  représenté ci-contre, le projeté orthogonal du point  $E$  sur le plan  $(ABC)$  est le point  $A$  car la droite  $(EA)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .



**Propriété 11.20.** Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur un plan  $\mathcal{P}$  est le point de  $\mathcal{P}$  le plus proche de  $M$ .

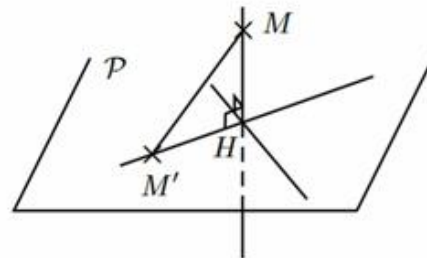
*Démonstration.* Notons  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

— Si  $M \in \mathcal{P}$ , alors  $MH = 0$  et  $H$  est bien le point de  $\mathcal{P}$  le plus proche de  $M$ .

— Si  $M \notin \mathcal{P}$ , soit  $M'$  un point quelconque de  $\mathcal{P}$  distinct de  $H$ .

Alors le triangle  $MM'H$  est rectangle en  $H$ . Le plus grand côté d'un triangle rectangle étant l'hypoténuse, on a  $MH < MM'$ .

Cela signifie bien que  $H$  est le point de  $\mathcal{P}$  le plus proche de  $M$ .

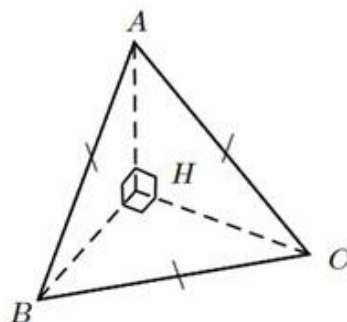


□

**Définition 11.21.** La distance d'un point  $M$  à un plan  $\mathcal{P}$  est la longueur  $MH$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

*Exemple.* On reprend le parallélépipède  $ABCDEFGH$  de l'exemple précédent. Le point  $A$  est le point du plan  $(ABC)$  le plus proche de  $E$ , et la distance du point  $E$  au plan  $(ABC)$  est la longueur  $EA$ .

**Application 73.**  $ABCH$  est une tétraèdre tel que  $ABC$  est un triangle équilatéral d'arête un réel  $a > 0$  et les autres faces sont des triangles rectangles en  $H$ .



1. Déterminer le produit scalaire  $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$ .
2. Développer puis réduire le produit scalaire  $(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC})$ .
3. Exprimer la distance du point  $A$  au plan  $(BHC)$  en fonction de  $a$ .

## 11.5 Base orthonormée et repère orthonormé

### 11.5.1 Définitions

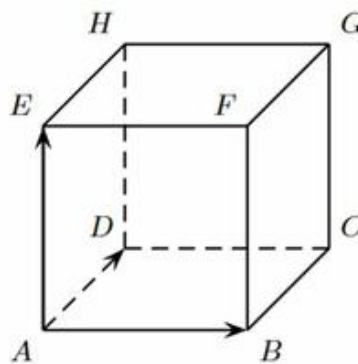
**Définition 11.22.** 1. Une base de l'espace est dite orthonormée si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et tous de norme choisie pour unité.

2.  $O$  étant un point quelconque de l'espace, le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est dit orthonormé si la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthonormée.

*Remarque.* Autrement dit, une base de l'espace  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est dite orthonormée si  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$  et  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ .

*Exemple.* On considère le cube  $ABCDEFGH$  représenté ci-dessous.

- Les repères  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  et  $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$  sont orthonormés.
- Le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$  n'est pas orthonormé.



## 11.5.2 Propriétés

**Propriété 11.23.** Dans une base orthonormée de l'espace  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soient les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ . Alors on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' + zz'.$$

*Démonstration.* Le triplet  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  étant une base de l'espace, on a d'après la propriété 10.34 :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u}' &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ &= xx'\vec{i}^2 + yy'\vec{j}^2 + zz'\vec{k}^2 + (xy' + yx')\vec{i} \cdot \vec{j} + (xz' + zx')\vec{i} \cdot \vec{k} \\ &\quad + (zy' + yz')\vec{j} \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Mais puisque la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthonormée, on a  $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$  et  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ ,  $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ ,  $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ , d'où l'égalité souhaitée. □

*Remarque.* 1. On a  $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ , donc  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

2.  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont orthogonaux si, et seulement si  $xx' + yy' + zz' = 0$ .

*Exemple.* 1. On considère  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}' \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  dans une base orthonormée.

$$\text{Alors } \vec{u} \cdot \vec{u}' = 1 \times (-2) + 4 \times 5 + 0 \times 1 = 18.$$

2. Notons  $\mathcal{P}$  le plan passant par le point  $A(1; -1; 5)$  et qui admet  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

comme vecteur normal.

On cherche à déterminer si le point  $M(3; 0; 3)$  appartient à  $\mathcal{P}$ . Il s'agit donc de vérifier si on a l'égalité  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  (d'après la propriété 11.11).

On a  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , donc  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 2 \times 2 + 1 \times 1 + (-3) \times (-2) = 11 \neq 0$ , et

par conséquent, le point  $M$  n'appartient pas au plan  $\mathcal{P}$  passant par le point  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

3. Dans un repère orthonormé de l'espace, les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  de vecteurs normaux respectifs  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{n}' \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  sont perpendiculaires car :

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times (-2) + 1 \times 4 + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0.$$

La droite  $d$  de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et le plan  $\mathcal{P}$  sont parallèles car :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + (-2) \times 1 + 1 \times 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

**Propriété 11.24.** Dans un repère orthonormé de l'espace  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soient les points  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$ . Alors on a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

*Démonstration.* D'après la propriété 10.37, on a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ .

Donc  $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$  d'après la propriété 11.23. Mais  $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$ , donc on obtient l'égalité souhaitée car  $AB \geq 0$ . □

*Exemple.* Notons  $A$  et  $B$  les points de coordonnées respectivement  $(-1; 5; 3)$  et  $(9; 5; -2)$  dans un repère orthonormé de l'espace.

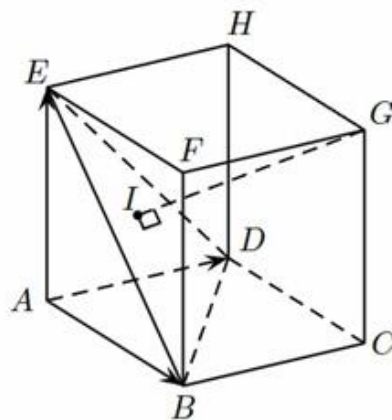
La longueur  $AB$  est donnée par :

$$AB = \sqrt{(9 - (-1))^2 + (5 - 5)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

**Application 74.** On considère le cube  $ABCDEFGH$  représenté ci-dessous et on se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

Soit  $I(x; y; z)$  le projeté orthogonal du point  $G$  sur le plan  $(BDE)$ .

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{EB}$ ,  $\overrightarrow{BI}$  et  $\overrightarrow{GI}$ .
2. Montrer que  $x = y = z$ .
3. En sachant que  $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$ , montrer que  $3x - 1 = 0$ .
4. Dédire que la distance du point  $G$  au plan  $(BDE)$  est égale à  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ .



## 11.6 Exercices

**Exercice 11.1 (Sujet bac, Centres étrangers, 2022).** L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormé.

On considère les points  $A(3; -2; 2)$ ,  $B(6; 1; 5)$ ,  $C(6; -2; -1)$  et  $D(0; 4; -1)$ .

On rappelle dans cet exercice que le volume  $\mathcal{V}$  d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times B \times h,$$

où  $B$  est l'aire d'une base du tétraèdre et  $h$  est la hauteur du tétraèdre s'appuyant sur cette base.

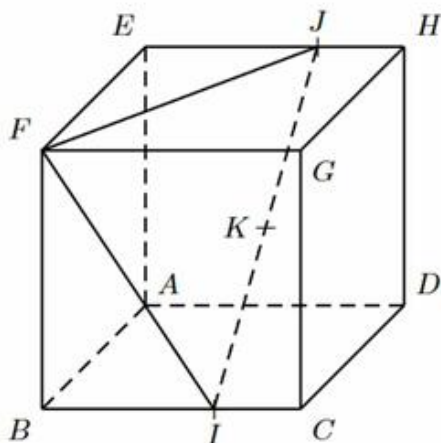
1. Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan.
2. (a) Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle.  
(b) Montrer que la droite  $(AD)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .
3. (a) Calculer le volume du tétraèdre  $ABCD$ .  
(b) Expliquer pourquoi l'angle  $\widehat{BDC}$  a pour mesure  $\frac{\pi}{4}$  rad.
4. (a) Expliquer pourquoi l'aire  $\mathcal{A}$  du triangle  $BDC$  est égale à :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times DB \times DC \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Calculer cette aire.

- (b) Déduire la distance du point  $A$  au plan  $(BDC)$ .

**Exercice 11.2 (Sujet bac, Polynésie, 2008).** Sur la figure ci-dessous, on a représenté le cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1.



On a placé les points  $I$  et  $J$  tels que  $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$ , et le milieu  $K$  de  $[IJ]$ .

On note  $P$  le projeté orthogonal de  $G$  sur le plan  $(FIJ)$ .

### Partie A

1. (a) Démontrer que le triangle  $FIJ$  est isocèle en  $F$ .  
(b) En déduire que les droites  $(FK)$  et  $(IJ)$  sont orthogonales.

On admet dans la suite que les droites  $(GK)$  et  $(IJ)$  sont orthogonales.

2. Démontrer que la droite  $(IJ)$  est orthogonale au plan  $(FGK)$ .
3. Démontrer que la droite  $(IJ)$  est orthogonale au plan  $(FGP)$ .
4. (a) Montrer que les points  $F, G, K$  et  $P$  sont coplanaires.  
 (b) En déduire que les points  $F, P$  et  $K$  sont alignés.

### Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ .

On note  $N$  le point d'intersection de la droite  $(GP)$  et du plan  $(ADB)$ .

On note  $(x; y; 0)$  les coordonnées du point  $N$ , où  $x$  et  $y$  sont deux réels.

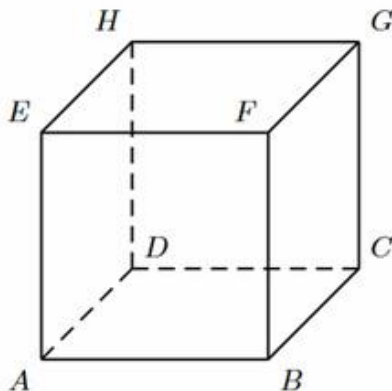
1. Donner les coordonnées des points  $F, G, I$  et  $J$ .
2. (a) Montrer que la droite  $(GN)$  est orthogonale aux droites  $(FI)$  et  $(FJ)$ .  
 (b) Exprimer les produits scalaires  $\vec{GN} \cdot \vec{FI}$  et  $\vec{GN} \cdot \vec{FJ}$  en fonction de  $x$  et  $y$ .  
 (c) Déterminer les coordonnées du point  $N$ .
3. Reproduire le cube  $ABCDEFGH$  et placer le point  $P$ .

**Exercice 11.3 (Sujet bac, Métropole, 2018).** Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.

On rappelle que dans un tétraèdre  $MNPQ$ , la hauteur issue de  $M$  est la droite passant par  $M$  orthogonale au plan  $(NPQ)$ .

### Partie A. Étude de cas particuliers

On considère un cube  $ABCDEFGH$ .



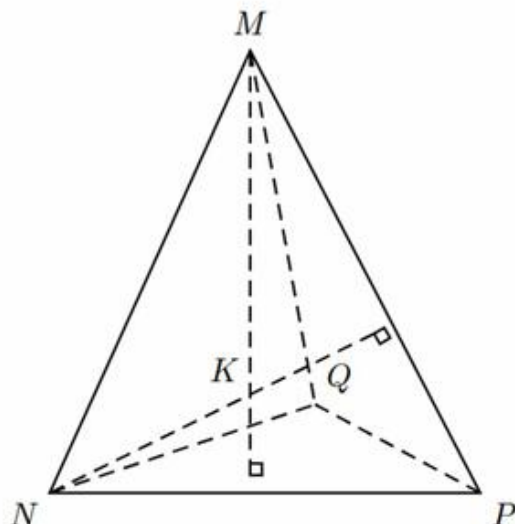
On admet que les droites  $(AG)$ ,  $(BH)$ ,  $(CE)$  et  $(DF)$ , appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre  $ABCE$ .
  - (a) Préciser la hauteur issue de  $E$  et la hauteur issue de  $C$  dans ce tétraèdre.
  - (b) Les quatre hauteurs du tétraèdre  $ABCE$  sont-elles concourantes ?
2. On se place dans le repère orthonormé  $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  et on considère le tétraèdre  $ACHF$ .
  - (a) Calculer les produits scalaires  $\vec{FD} \cdot \vec{AC}$  et  $\vec{FD} \cdot \vec{AH}$ .
  - (b) En déduire que  $(FD)$  est la hauteur issue de  $F$  du tétraèdre  $ACHF$ .
  - (c) Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre  $ACHF$  issues respectivement des sommets  $A, C$  et  $H$ .  
Les quatre hauteurs du tétraèdre  $ACHF$  sont-elles concourantes ?

Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un tétraèdre orthocentrique.

### Partie B. Une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre  $MNPQ$  dont les hauteurs issues des sommets  $M$  et  $N$  sont sécantes en un point  $K$ . Les droites  $(MK)$  et  $(NK)$  sont donc orthogonales aux plans  $(NPQ)$  et  $(MPQ)$  respectivement.



1. (a) Justifier que la droite  $(PQ)$  est orthogonale à la droite  $(MK)$ .  
On admet de même que les droites  $(PQ)$  et  $(NK)$  sont orthogonales.
- (b) Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite  $(PQ)$  et au plan  $(MNK)$  ? Justifier la réponse.
2. Montrer que les arêtes  $[MN]$  et  $[PQ]$  sont orthogonales.

Ainsi, on obtient la propriété suivante :

*Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux (on dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont « opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun).*

**Partie C. Application**

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

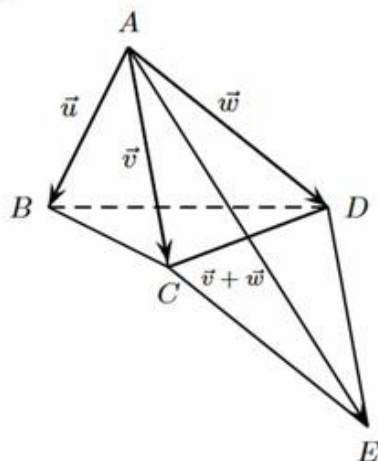
$$R(-3; 5; 2), S(1; 4; -2), T(4; -1; 5) \text{ et } U(4; 7; 3).$$

Le tétraèdre  $RSTU$  est-il orthocentrique ? Justifier.

**Exercice 11.4 (Démonstration).** On souhaite démontrer dans cet exercice que pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace, on a :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

Cette propriété n'est pas une extension banale du plan à l'espace car les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  ne sont pas nécessairement coplanaires.



Soient  $A, B, C, D$  et  $E$  quatre points de l'espace et soient  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$  et  $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AE}$ .

On cherche donc à démontrer l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

1. A l'aide d'une formule de polarisation, établir l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB^2 + \frac{1}{2}(AC^2 + AD^2) - \frac{1}{2}(BC^2 + BD^2).$$

2. On note  $I$  le milieu du segment  $[CD]$ . En utilisant le théorème de la médiane dans les triangles  $ACD$  et  $BCD$ , montrer que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB^2 + AI^2 - BI^2.$$

3. Montrer que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$ , puis conclure.

**Exercice 11.5 ♠ (Procédé de Gram<sup>1</sup>-Schmidt<sup>2</sup>).** Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est une méthode qui consiste à construire, à partir d'une base quelconque de l'espace  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ , une base orthonormée  $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$ .

1. Jørgen Pedersen Gram (1850-1916) est un mathématicien danois. Il reçu la médaille d'or de l'Académie des sciences danoise en 1884 pour un travail sur les nombres premiers.

2. Erhard Schmidt (1876-1959) est un mathématicien allemand, élève de David Hilbert. Avec de dernier, il est considéré comme l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle abstraite moderne.

### Partie A. Une projection vectorielle

Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul de l'espace. La fonction notée  $p_{\vec{u}}$  est la fonction qui associe à tout vecteur de l'espace  $\vec{v}$  l'unique vecteur  $p_{\vec{u}}(\vec{v})$  défini par :

$$p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

Pour tout vecteur  $\vec{v}$ , le vecteur  $p_{\vec{u}}(\vec{v})$  s'appelle la **projection orthogonale** de  $\vec{v}$  sur  $\vec{u}$ .

1. Dans une base orthonormée de l'espace  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

(a) Déterminer la projection orthogonale de  $\vec{v}$  sur  $\vec{i}$ .

(b) Déterminer de même  $p_{\vec{j}}(\vec{v})$  et  $p_{\vec{k}}(\vec{v})$ .

2. Montrer qu'une projection orthogonale est une application linéaire, c'est-à-dire que pour tous vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  et pour tout réel  $\alpha$ , on a :

$$p_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = p_{\vec{u}}(\vec{v}) + p_{\vec{u}}(\vec{w}) \quad \text{et} \quad p_{\vec{u}}(\alpha \vec{v}) = \alpha p_{\vec{u}}(\vec{v})$$

3. Pour tout vecteur de l'espace  $\vec{v}$ , démontrer l'équivalence suivante :

$$p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{v} \iff \vec{v} \text{ est colinéaire à } \vec{u}.$$

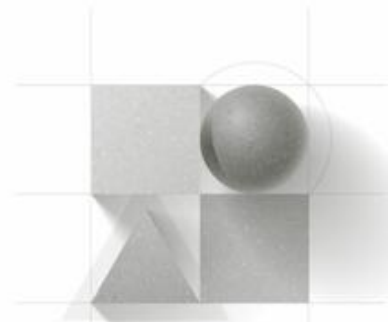
4. Pour tout vecteur de l'espace  $\vec{v}$ , démontrer l'équivalence suivante :

$$p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{0} \iff \vec{v} \text{ est orthogonal à } \vec{u}.$$

### Partie B. Procédé de Gram-Schmidt

Soit  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  une base quelconque de l'espace.

1. On pose  $\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ . Quelle est la norme de  $\vec{u}_1$  ?
2. Justifier que le vecteur  $\vec{v}' = \vec{v} - p_{\vec{u}_1}(\vec{v})$  est non nul et orthogonal à  $\vec{u}_1$ .
3. On pose  $\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \vec{v}'$ .
  - (a) Quelle est la norme du vecteur  $\vec{v}_1$  ?
  - (b) Vérifier que  $\vec{v}_1$  est orthogonal à  $\vec{u}_1$ .
4. Justifier que le vecteur  $\vec{w}' = \vec{w} - p_{\vec{u}_1}(\vec{w}) - p_{\vec{v}_1}(\vec{w})$  est non nul et orthogonal à  $\vec{u}_1$  et à  $\vec{v}_1$ .
5. Dédire un vecteur  $\vec{w}_1$  unitaire et orthogonal aux vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{v}_1$ , puis conclure.



# Représentations paramétriques et équations cartésiennes

## 12.1 Représentations paramétriques d'une droite

Notons  $\mathcal{D}$  la droite passant par le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et qui admet pour vecteur directeur le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ . Soit  $M$  un point quelconque de coordonnées  $(x; y; z)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \end{aligned}$$

Mais puisque les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $k\vec{u}$  sont données respectivement par  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$  et  $(k\vec{u}) \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}$ , il vient l'équivalence suivante :

$$M \in \mathcal{D} \iff \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} .$$

On déduit donc la propriété ci-dessous.

**Propriété 12.1.** La droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est l'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées vérifient le système d'équations  $(S)$  suivant d'inconnu le triplet  $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$(S) \begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

**Définition 12.2.** Le système  $(S)$  s'appelle une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$ , le réel  $k$  étant le paramètre de cette représentation.

- Remarque.*
1. Dans le système  $(S)$ , chaque valeur du paramètre  $k$  permet de déterminer un point de la droite  $\mathcal{D}$ . En particulier, pour  $k = 0$  on obtient les coordonnées du point  $A$ .
  2. Dans le système  $(S)$ , les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  du paramètre  $k$  sont les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}$ .
  3. La droite  $\mathcal{D}$  admet une infinité de représentations paramétriques. En effet, on peut choisir un point de  $\mathcal{D}$  autre que  $A$  ou choisir un vecteur non nul colinéaire à  $\vec{u}$  et autre que  $\vec{u}$ .

*Exemple.* Notons  $\mathcal{D}$  la droite passant par le point  $A(2; -3; 1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Une représentation paramétrique de  $\mathcal{D}$  est  $\begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = -3 + 4k \\ z = 1 + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$

- Pour  $k = 1$ , on obtient  $x = 5$ ,  $y = 1$  et  $z = 3$ , donc le point  $B(5; 1; 3)$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ . Une autre représentation paramétrique de la droite

$\mathcal{D}$  est donc donnée par le système  $\begin{cases} x = 5 + 3k' \\ y = 1 + 4k' \\ z = 3 + 2k' \end{cases} \quad k' \in \mathbb{R}.$

- Le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\vec{u}$  est aussi un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ , donc une autre

représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$  est  $\begin{cases} x = 2 + 6k'' \\ y = -3 + 8k'' \\ z = 1 + 4k'' \end{cases} \quad k'' \in \mathbb{R}.$

## 12.2. Équations cartésiennes d'un plan

- On cherche à déterminer si le point  $C(-1; -7; 3)$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ .  
On a :

$$\begin{aligned}
 C \in \mathcal{D} &\iff \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} -1 = 2 + 3t \\ -7 = -3 + 4t \\ 3 = 1 + 2t \end{cases} \\
 &\iff \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} 3t = -3 \\ 4t = -4 \\ 2t = 2 \end{cases} \\
 &\iff \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La dernière proposition étant fausse, la première est également fausse par équivalences. Donc le point  $C$  n'appartient pas à la droite  $\mathcal{D}$ .

**Application 75.** Notons  $\Delta$  la droite de l'espace dont une représentation paramétrique est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 8 - 2t \\ z = 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de la droite  $\Delta$ .
- La droite  $\Delta$  est-elle parallèle à la droite  $\mathcal{D}$  dirigée par le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ?

## 12.2 Équations cartésiennes d'un plan

**Propriété 12.3.** Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels non tous nuls et soit  $M$  un point quelconque. Le point  $M$  appartient à un plan  $\mathcal{P}$  de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  si, et seulement si il existe un réel  $d$  tel que les coordonnées de  $M$  vérifient l'équation ci-dessous d'inconnu le triplet  $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{E}$$

*Démonstration.* On raisonne par double implication.

$\implies$ ) Supposons que le point  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$  appartient au plan  $\mathcal{P}$  passant par le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

Alors  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  d'après la propriété 11.11.

Puisque  $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$ , il vient d'après la propriété 11.23 :

$$0 = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A).$$

Par conséquent :  $ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$ , soit :  $ax + by + cz + d = 0$  en posant  $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$ .

$\Leftarrow$ ) Supposons qu'il existe un réel  $d$  tel que que les coordonnées  $(x; y; z)$  de  $M$  vérifient l'égalité  $ax + by + cz + d = 0$ .

Les réels  $a, b$  et  $c$  étant non tous nuls, supposons par exemple que  $a \neq 0$ .

Alors :  $a \left( x + \frac{d}{a} \right) + by + cz = 0$ , soit :  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  avec  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $A \left( -\frac{d}{a}; 0; 0 \right)$ ,

donc  $M$  appartient au plan passant par le point  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  d'après la propriété 11.11.

□

*Remarque.* Autrement dit,  $a, b, c$  étant trois réels non tous nuls, un plan  $\mathcal{P}$  de vecteur normal  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est l'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées vérifient l'équation (E)  $ax + by + cz + d = 0$ , où  $d \in \mathbb{R}$ .

**Définition 12.4.** L'équation (E) s'appelle une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$ .

*Exemple.* 1. Le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $-3x + 2y - z + 5 = 0$  admet

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  pour vecteur normal.

Le point  $A(0; 0; 5)$  appartient à  $\mathcal{P}$  car  $-3 \times 0 + 2 \times 0 - 5 + 5 = 0$ .

2. Notons  $\mathcal{P}$  le plan passant par  $E(1; 4; -2)$  et de vecteur normal  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Alors une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  est de la forme  $2x - 3y - z + d = 0$ , où  $d$  est un réel.

Puisque le point  $E(1; 4; -2)$  appartient à  $\mathcal{P}$ , alors  $2 \times 1 - 3 \times 4 - (-2) + d = 0$ , soit  $-8 + d = 0$ , soit  $d = 8$ .

Finalement,  $2x - 3y - z + 8 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$ .

Le point  $B(1; 1; 7)$  appartient à  $\mathcal{P}$  car  $2 \times 1 - 3 \times 1 - 7 + 8 = 0$ .

*Remarque.* 1. Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes. En choisissant un autre vecteur normal à ce plan, on obtient une nouvelle équation cartésienne.

## 12.2. Équations cartésiennes d'un plan

2. Un plan peut être entièrement caractérisé par la donnée d'une de ses équations cartésiennes.

*Remarque.* — Le plan  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  passe par l'origine  $O(0; 0; 0)$  et admet  $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

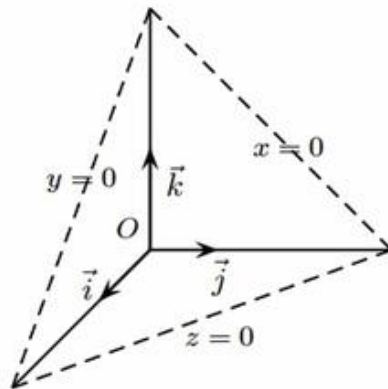
pour vecteur normal.

Une équation cartésienne du plan  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est donc de la forme  $0x + 0y + z + d = 0$ , où  $d \in \mathbb{R}$ , soit  $z + d = 0$ .

Mais puisque  $O(0; 0; 0)$  appartient au plan  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , alors  $0 + d = 0$ , soit  $d = 0$ .

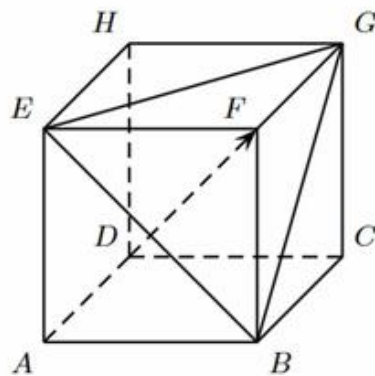
Finalement, une équation cartésienne du plan  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est  $z = 0$ .

- De la même façon, le plan  $(O; \vec{j}, \vec{k})$  admet pour équation cartésienne  $x = 0$  et le plan  $(O; \vec{i}, \vec{k})$  admet pour équation cartésienne  $y = 0$ .



**Application 76.**  $ABCDEFGH$  est un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé  $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ .

- Calculer les produits scalaires  $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EG}$  et  $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG}$
- (a) Déduire un vecteur normal au plan  $(EBG)$ .  
(b) Déterminer une équation cartésienne de ce plan.



**Application 77.** Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points  $A(1; -2; 4)$ ,  $B(-2; -6; 5)$  et  $C(-4; 0; -3)$ .

- Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan.
- (a) Trouver un vecteur normal  $\vec{n}$  au plan  $(ABC)$ .  
(b) Déduire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .

## 12.3 Système d'équations linéaires

### 12.3.1 Déterminer l'intersection de deux droites

*Exemple.* On se propose d'étudier la position relative des droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  de représentations paramétriques respectives :

$$(S) \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (S') \begin{cases} x = 17 + 2t' \\ y = -2 - 2t' \\ z = -4 + t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$$

— La droite  $\mathcal{D}$  a pour vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et la droite  $\mathcal{D}'$  a pour vecteur

directeur  $\vec{u}' \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  n'étant pas propor-

tionnelles, ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  ne sont pas parallèles.

— Soit  $I$  un point quelconque de coordonnées  $(x; y; z)$ .

$$I \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \iff (x; y; z) \text{ vérifie les systèmes } (S) \text{ et } (S')$$

$$\iff \text{il existe } (t; t') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \\ x = 17 + 2t' \\ y = -2 - 2t' \\ z = -4 + t' \end{cases}$$

$$\iff \text{il existe } (t; t') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} 5 + t = 17 + 2t' \\ 2 + t = -2 - 2t' \\ -2t = -4 + t' \end{cases}$$

$$\iff \text{il existe } (t; t') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} t - 2t' = 12 & (1) \\ t + 2t' = -4 & (2) \\ -2t - t' = -4 & (3) \end{cases}$$

On résout ce dernier système d'inconnu  $(t; t') \in \mathbb{R}^2$  par méthode de substitution.

$$(1) \quad t - 2t' = 12 \iff t = 12 + 2t'$$

$$(2) \quad t + 2t' = -4 \stackrel{(1)}{\iff} 12 + 2t' + 2t' = -4 \iff 4t' = -16 \iff t' = -4$$

$$(1) \quad t = 12 + 2t' \stackrel{(2)}{=} 12 + 2 \times (-4) = 4$$

(3)  $-2 \times 4 - (-4) = -4$ , donc le couple de réels  $(4; -4)$  est bien solution de l'équation (3).

On obtient donc l'équivalence suivante :

$$I \text{ appartient à } \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \iff \text{il existe } (t; t') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} t = 4 \\ t' = -4 \end{cases}$$

Cette dernière proposition étant évidemment vraie, il vient que le point  $I$  appartient aux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  n'étant pas parallèles, on déduit qu'elles sont sécantes en  $I$ .

Pour obtenir les coordonnées  $(x; y; z)$  du point  $I$ , on remplace  $t$  par 4 dans le système  $(S)$  (ou  $t'$  par  $-4$  dans le système  $(S')$ ). On obtient  $I(9; 6; -8)$ .

*Remarque.* Dans l'exemple ci-dessus, il est possible (mais plus délicat) de raisonner uniquement par équivalences de la manière suivante :

$$\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ sécantes en } I \iff (x; y; z) \text{ est l'unique triplet vérifiant } (S) \text{ et } (S')$$

$$\iff \exists! (t; t') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 5 + t = 17 + 2t' \\ 2 + t = -2 - 2t' \\ -2t = -4 + t' \end{cases}$$

$$\iff \quad \quad \quad \vdots$$

$$\iff \exists! (t; t') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} t = 4 \\ t' = -4 \end{cases}$$

Cette dernière proposition étant évidemment vraie, il vient que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont sécantes en  $I$ .

**Application 78.** Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1; -1; 2)$  et  $B(-1; 3; 4)$ , et on note  $\Delta$  la droite de représentation paramétrique :

$$(S) \begin{cases} x = -t \\ y = 5 - 2t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Étudier la position relative des droites  $(AB)$  et  $\Delta$ .

### 12.3.2 Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

*Exemple.* On se propose d'étudier la position relative de la droite  $\mathcal{D}$  et du plan  $\mathcal{P}$  dont une équation cartésienne et une représentation paramétrique sont respectivement :

$$(S) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (E) \quad x + y + z - 1 = 0.$$

— La droite  $\mathcal{D}$  a pour vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  et le plan  $\mathcal{P}$  a pour vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On a  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + 0 \times 1 + (-2) \times 1 = -1 \neq 0$ , donc la droite  $\mathcal{D}$  est sécante avec le plan  $\mathcal{P}$ .

— Notons  $(x; y; z)$  les coordonnées du point d'intersection  $I$  de la droite  $\mathcal{D}$  avec le plan  $\mathcal{P}$ . Alors  $(x; y; z)$  vérifie  $(S)$  et  $(E)$ . Il existe donc  $t \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel que : } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \\ -1 + t + 2 + 3 - 2t - 1 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel que : } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -3 \\ t = 3 \end{cases}.$$

Finalement  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  sont sécants en le point  $I(2; 2; -3)$ .

*Remarque.* Dans l'exemple ci-dessus, il est possible (mais plus délicat) de raisonner uniquement par équivalences de la manière suivante :

$\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  sécants en  $I \iff (x; y; z)$  est l'unique triplet vérifiant  $(S)$  et  $(E)$

$$\iff \exists! t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \vdots$$

$$\iff \exists! t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -3 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\iff (\exists! t \in \mathbb{R}, t = 3) \text{ et } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}.$$

**Application 79.** On munit l'espace d'un repère orthonormé. Étudier la position relative du plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $5x + y - z + 3 = 0$  et de la droite  $\mathcal{D}$  dont une représentation paramétrique est donnée par le système :

$$(S) \begin{cases} x = s \\ y = 1 - 6s \\ z = 3 - s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

### 12.3.3 Déterminer l'intersection de deux plans

*Exemple.* On se propose d'étudier la position relative des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  d'équations cartésiennes respectives :

$$(E) \quad x + y - z + 2 = 0 \quad \text{et} \quad (E') \quad 3x + y + z + 4 = 0.$$

—  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$  et  $\vec{n}' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}'$ . Les coordonnées des vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  n'étant pas proportionnelles, ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont sécants selon une droite.

— Notons  $\Delta$  la droite d'intersection des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ , et soit  $I(x; y; z)$  un point appartenant à  $\Delta$ .

$$\begin{aligned} I \in \Delta &\iff (x; y; z) \text{ vérifie } (E) \text{ et } (E') \\ &\iff \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 & (1) \\ 3x + y + z + 4 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

On exprime deux variables (par exemple  $y$  et  $z$ ) en fonction de la troisième (c'est-à-dire  $x$ ) par substitution.

$$(1) \quad x + y - z + 2 = 0 \iff y = -x + z - 2$$

$$(2) \quad 3x + y + z + 4 = 0 \stackrel{(1)}{\iff} 3x + (-x + z - 2) + z + 4 = 0 \iff 2x + 2z + 2 = 0 \\ \iff x + z + 1 = 0 \iff z = -x - 1$$

$$(1) \quad y \stackrel{(2)}{=} -x + (-x - 1) - 2 = -2x - 3$$

On obtient donc l'équivalence ci-dessous :

$$I \in \Delta \iff \begin{cases} x = 0 + 1x \\ y = -2x - 3 \\ z = -x - 1 \end{cases}$$

On peut choisir la variable  $x$  comme paramètre en posant  $x = t$ . On obtient alors une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t - 3 \\ z = -t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notons qu'en choisissant la variable  $y$  (ou la variable  $z$ ) comme paramètre, on obtient une autre représentation paramétrique de  $\Delta$ .

**Application 80.** L'espace est muni d'un repère orthonormé. On note  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  les plans dont une équation cartésienne est respectivement :

$$(E_1) \ x + y - 3z + 3 = 0 \quad \text{et} \quad (E_2) \ x - 2y + 6z = 0.$$

1. Démontrer que  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants selon une droite  $d$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Démontrer que la droite  $d$  et le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $2x - y + 2z + 2 = 0$  sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

### 12.3.4 Déterminer le projeté orthogonal d'un point

*Exemple.* Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points  $A(1; 0; 2)$ ,  $B(-1; 2; 1)$  et  $C(0; 1; -2)$ , et on souhaite déterminer les coordonnées du point  $H$ , projeté orthogonale du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ .

- La droite  $(AB)$  passe par le point  $A(1; 0; 2)$ , et le vecteur  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite  $(AB)$ , donc une représentation paramétrique de  $(AB)$  est donnée par le système  $(S)$  ci-dessous :

$$(S) \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Le point  $H$  appartient à la droite  $(AB)$ , donc ses coordonnées vérifient le système  $(S)$ . Autrement dit, il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $H(1 - 2t; 2t; 2 - t)$ .

$$\text{On obtient alors : } \overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} 1 - 2t - 0 \\ 2t - 1 \\ 2 - t - (-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ -1 + 2t \\ 4 - t \end{pmatrix}.$$

- Mais puisque les vecteurs  $\overrightarrow{CH}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont orthogonaux, il vient que  $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ . Par équivalences successives, on obtient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ -1 + 2t \\ 4 - t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff -2(1 - 2t) + 2(-1 + 2t) - 1(4 - t) = 0 \end{aligned}$$

$$\iff -2 + 4t - 2 + 4t - 4 + t = 0$$

$$\iff 9t - 8 = 0$$

$$\iff t = \frac{8}{9}.$$

Dans les coordonnées de  $H$ , on remplace  $t$  par  $8/9$  et on obtient finalement :

$$H\left(-\frac{7}{9}; \frac{16}{9}; \frac{10}{9}\right).$$

**Application 81.** Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point  $B(2; 0; 7)$  et on note  $d$  la droite qui passe par le point  $A(1; 3; 0)$  et dont  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

est un vecteur directeur.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  passant par  $B$  et orthogonal à  $d$ .
2. En déduire les coordonnées du point  $K$ , projeté orthogonal de  $B$  sur  $d$ .

*Exemple.* Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $(E) x - 2y + 3z - 17 = 0$  et le point  $A(2; 5; -1)$ , et on souhaite déterminer les coordonnées du point  $H$ , projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

— On introduit la droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $A$  et orthogonale au plan  $\mathcal{P}$ .

Le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  étant un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ , il est aussi un vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}$ . Une représentation paramétrique de  $\mathcal{D}$  est donc donnée par le système  $(S)$  ci-dessous :

$$(S) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

— Le projeté orthogonal  $H$  du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$  est donc le point d'intersection de la droite  $\mathcal{D}$  et du plan  $\mathcal{P}$ . Ses coordonnées  $(x; y; z)$  vérifient donc le système  $(S)$  et l'équation  $(E)$ . Il existe donc un réel  $t$  tel que :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -1 + 3t \\ x - 2y + 3z - 17 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel que (après calculs) : } \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 5 \\ t = 2 \end{cases}.$$

Les coordonnées du point  $H$  sont donc  $H(4; 1; 5)$ .

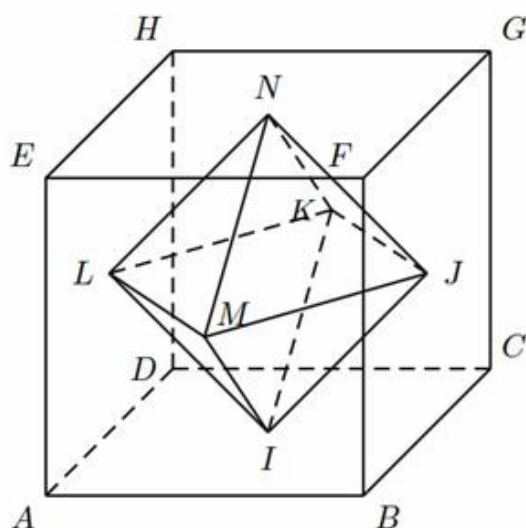
**Application 82.** On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $4x + y + z - 3 = 0$  et le point  $A(3; 2; 0)$ .

L'objectif de cet exercice est de déterminer les coordonnées du projeté orthogonal  $K$  du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite orthogonale à  $\mathcal{P}$  passant par  $A$ , notée  $\Delta$ .
2. Dédire une représentation paramétrique de  $\Delta$ .
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre  $\Delta$  et  $\mathcal{P}$ .
4. Dédire les coordonnées du point  $K$ .

## 12.4 Exercices

**Exercice 12.1 (Sujet bac, Am. du Nord, 2019).** On relie les centres de chaque face d'un cube  $ABCDEFGH$  pour former un solide  $IJKLMN$  comme sur la figure ci-dessous.



Plus précisément, les points  $I, J, K, L, M$  et  $N$  sont les centres respectifs des faces carrées  $ABCD, BCGF, CDHG, ADHE, ABFE$  et  $EFGH$  (donc les milieux des diagonales de ces carrés).

1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées) dans le raisonnement mené, justifier que les droites  $(IN)$  et  $(ML)$  sont orthogonales.

Dans la suite, on considère le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$  dans lequel,

par exemple, le point  $N$  a pour coordonnées  $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$ .

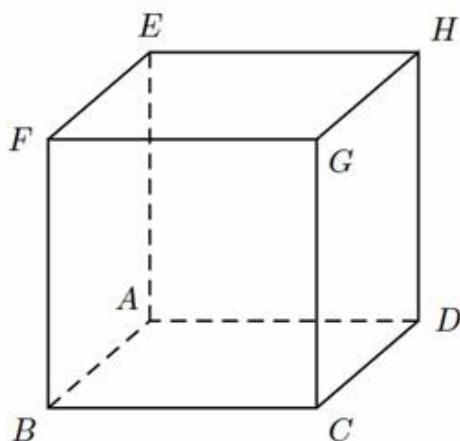
2. (a) Donner les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{NC}$  et  $\overrightarrow{ML}$ .  
 (b) En déduire que les droites  $(NC)$  et  $(ML)$  sont orthogonales.  
 (c) Dédire des questions précédentes une équation cartésienne du plan  $(NCI)$ .

3. (a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan  $(NJM)$  est :  $x - y + z = 1$ .
- (b) La droite  $(DF)$  est-elle orthogonale au plan  $(NJM)$ ? Justifier.
- (c) Montrer que l'intersection des plans  $(NJM)$  et  $(NCI)$  est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur. Nommer la droite ainsi obtenue en utilisant deux points de la figure.

**Exercice 12.2 (Sujet bac, Centres étrangers, 2012).** On considère un cube  $ABCDEFGH$  d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .

On considère les points  $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$ ,  $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$ ,  $K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$  et  $L(a; 1; 0)$  avec  $a$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ .



Les parties A et B sont indépendantes.

#### Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(IJ)$ .
2. Démontrer que la droite  $(KL)$  a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t' \left( a - \frac{3}{4} \right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

3. Démontrer que les droites  $(IJ)$  et  $(KL)$  sont sécantes si, et seulement si,  $a = \frac{1}{4}$ .

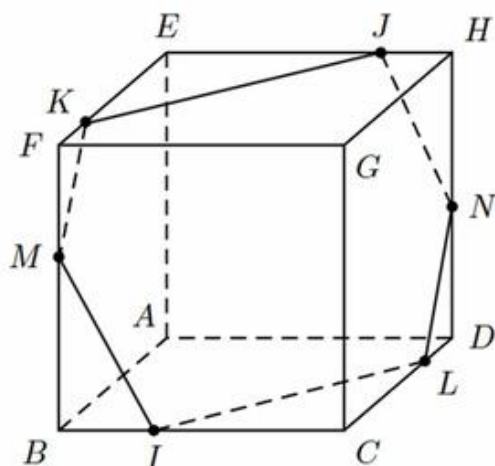
#### Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose  $a = \frac{1}{4}$ .

Le point  $L$  a donc pour coordonnées  $\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$ .

1. Démontrer que le quadrilatère  $IKJL$  est un parallélogramme.
2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan  $(IJK)$  avec les faces du cube  $ABCDEFGH$ .

On note  $M$  le point d'intersection du plan  $(IJK)$  et de la droite  $(BF)$  et on note  $N$  le point d'intersection du plan  $(IJK)$  et de la droite  $(DH)$ .



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points  $M$  et  $N$ .

- (a) Prouver que le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $(8; 9; 5)$  est un vecteur normal au plan  $(IJK)$ .
- (b) En déduire que le plan  $(IJK)$  a pour équation cartésienne  $8x + 9y + 5z - 11 = 0$ .
- (c) En déduire les coordonnées des points  $M$  et  $N$ .

**Exercice 12.3 (Sujet bac, Métropole, 2023).** Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère :

- le plan  $\mathcal{P}_1$  dont une équation cartésienne est  $2x + y - z + 2 = 0$ ;
- le plan  $\mathcal{P}_2$  passant par le point  $B(1; 1; 2)$  et dont un vecteur normal est

$$\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Donner les coordonnées d'un vecteur  $\vec{n}_1$  normal au plan  $\mathcal{P}_1$ .  
(b) Montrer que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont perpendiculaires.
2. (a) Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}_2$ .  
(b) On note  $\Delta$  la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la droite  $\Delta$  est l'intersection des plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .

On considère le point  $A(1; 1; 1)$  et on admet que le point  $A$  n'appartient ni à  $\mathcal{P}_1$  ni à  $\mathcal{P}_2$ .

On note  $H$  le projeté orthogonal du point  $A$  sur la droite  $\Delta$ .

3. On rappelle que, d'après la question 2.(b), la droite  $\Delta$  est l'ensemble des points de coordonnées  $(0; -2 + t; t)$ , où  $t$  est un réel quelconque.

Dans la suite de cette question, on considère pour tout réel  $t$  le point  $M_t$  de coordonnées  $(0; -2 + t; t)$ .

(a) Montrer que, pour tout réel  $t$ ,  $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$ .

(b) En déduire que  $AH = \sqrt{3}$ .

4. On note  $\mathcal{D}_1$  la droite orthogonale au plan  $\mathcal{P}_1$  passant par le point  $A$  et  $H_1$  le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}_1$ .

(a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}_1$ .

(b) En déduire que le point  $H_1$  a pour coordonnées  $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .

5. Notons  $H_2$  le projeté orthogonal de  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}_2$ .

On admet que  $H_2$  a pour coordonnées  $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$  et que  $H$  a pour coordonnées  $(0; 0; 2)$ .

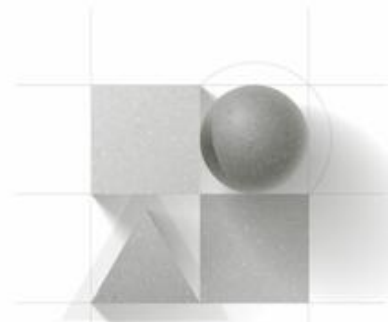
Montrer que  $AH_1HH_2$  est un rectangle.

**Exercice 12.4 (Distance d'un point à un plan).** Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- un plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$  où  $a, b, c$  et  $d$  sont quatre réels tels que  $a, b$  et  $c$  sont non tous nuls;
- un vecteur normal  $\vec{n}$  à  $\mathcal{P}$ ;
- un point  $A(x_A; y_A; z_A)$  n'appartenant pas au plan  $\mathcal{P}$ ;
- le projeté orthogonal  $H$  de  $A$  sur  $\mathcal{P}$ .

Démontrer que la distance du point  $A$  au plan  $\mathcal{P}$ , notée  $d(A, \mathcal{P})$ , est donnée par :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



# Sommes de variables aléatoires

Dans tout ce chapitre, on considère une expérience aléatoire donc l'univers des possibles est noté  $\Omega$ . On supposera cet univers fini.

## 13.1 Rappels

### 13.1.1 Variable aléatoire et loi de probabilité

**Définition 13.1.** Une variable aléatoire réelle  $X$  définie sur l'univers  $\Omega$  est une fonction définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega). \end{aligned}$$

*Exemple.* Un jeu consiste à lancer un dé équilibré à quatre faces et à regarder le numéro obtenu sur la face supérieure.

Michael, le responsable du jeu, fixe les règles suivantes :

- si le nombre obtenu est 1, 3 ou 4, on perd 6 euros ;
- si le nombre obtenu est 2, on gagne 12 euros.

On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au gain (éventuellement négatif) obtenu. En posant  $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$ ,  $X$  est alors une fonction définie pour tout  $\omega \in \Omega$  par :

$$X(\omega) = \begin{cases} -6 & \text{si } \omega \in \{1; 3; 4\} \\ 12 & \text{si } \omega = 2 \end{cases}.$$

La variable aléatoire  $X$  prend donc deux valeurs :  $-6$  et  $12$ . Autrement dit, pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a  $X(\omega) \in \{-6; 12\}$ . Pour alléger les écritures, on peut écrire plus simplement  $X \in \{-6; 12\}$ .

**Définition 13.2.** Soit un entier  $n \geq 1$  et soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans l'ensemble  $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ . Définir la loi de probabilité de  $X$  sur  $\Omega$ , c'est associer à chaque valeur  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) prise par  $X$  la probabilité de l'événement  $\{X = x_i\}$ <sup>1</sup>, notée  $P(\{X = x_i\})$  ou plus simplement  $P(X = x_i)$ .

*Remarque.* On présente souvent la loi de probabilité de  $X$  sous la forme d'un tableau comme présenté ci-dessous.

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$P(X = x_i)$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

Les probabilités obtenues  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sont telles que  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ .

*Exemple.* On reprend le jeu de Michael et on détermine la loi de probabilité de  $X$ . La loi de probabilité étant équirépartie sur  $\Omega$ , on a<sup>2</sup> :

$$P(X = -6) = P(\{1; 3; 4\}) = \frac{3}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{4};$$

$$P(X = 12) = P(\{2\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{4}.$$

On peut résumer la loi de probabilité de  $X$  à l'aide du tableau ci-dessous.

$x$	-6	12
$P(X = x)$	3/4	1/4

### 13.1.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire

**Définition 13.3.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, notons  $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$  l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .

1. L'espérance de  $X$  est le réel, noté  $E(X)$ , donné par :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k).$$

2. La variance de  $X$  est le réel positif, noté  $V(X)$ , donné par :

$$V(X) = \sum_{k=1}^n (x_k - E(X))^2 P(X = x_k).$$

1. La notation  $\{X = x_i\}$  est un abus d'écriture car, formellement, l'événement  $\{X = x_i\}$  fait référence à l'événement  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$ . Cette dernière écriture, réservée aux classes supérieures, ne sera pas utilisée en classe de Terminale.

2. En écho à la note précédente, on devrait plutôt écrire :  $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 6\})$  au lieu de  $P(X = 6)$ .

3. L'écart-type de  $X$  est le réel positif, noté  $\sigma(X)$ , donné par  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

*Remarque.* 1.  $E(X)$  peut s'interpréter comme la valeur moyenne des valeurs prises par  $X$  lorsque l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois<sup>3</sup>.

2.  $V(X)$  permet de caractériser la dispersion des valeurs de  $X$  par rapport au nombre  $E(X)$  : plus  $V(X)$  est grand, plus les valeurs de  $X$  sont dispersées autour de  $E(X)$ <sup>4</sup>. La valeur d'une variance ne peut être interprétée que par comparaison à la valeur d'une autre variance.

*Exemple.* On reprend le jeu de Michael. L'ensemble des valeurs prises par  $X$  est l'ensemble  $X(\Omega) = \{-6; 12\}$ .

— On calcule  $E(X)$  :

$$E(X) = -6 \times P(X = -6) + 12 \times P(X = 12) = -6 \times \frac{3}{4} + 12 \times \frac{1}{4} = -1,5.$$

Sur un très grand nombre de jeux, le « gain » moyen du joueur est de  $-1,5$  euro.

— On calcule  $V(X)$  :

$$\begin{aligned} V(X) &= (-6 - E(X))^2 P(X = -6) + (12 - E(X))^2 P(X = 12) \\ &= (-6 + 1,5)^2 \times \frac{3}{4} + (12 + 1,5)^2 \times \frac{1}{4} \\ &= 60,75. \end{aligned}$$

*Remarque.* Si la variable aléatoire  $X$  est constante, c'est-à-dire s'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\omega) = a$ , alors on a :

$$E(X) = E(a) = a \quad \text{et} \quad V(X) = V(a) = 0.$$

### Attention !

La réciproque est vraie pour la variance : si  $V(X) = 0$ , alors  $X$  est une variable aléatoire constante, mais elle n'est pas vraie pour l'espérance : si  $E(X) = 0$ , cela n'implique pas forcément que la variable aléatoire  $X$  est constante !

**Application 83.** Un Rubik's cube est constitué de 27 petits cubes sur lesquels sont collées des étiquettes de couleur. On détache les petits cubes, indiscernables au toucher, et on les place dans une urne. On en tire un au hasard.

Notons  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de faces colorées sur le petit cube tiré.

1. Déterminer la loi de probabilités de  $X$ .
2. Calculer  $E(X)$  et interpréter le résultat.
3. Calculer  $V(X)$ .

---

3. Cette interprétation provient de la loi des grands nombres qui sera étudiée au chapitre 15.  
4. Cette interprétation peut se déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (théorème 15.4) qui sera étudiée au chapitre 15.

### 13.1.3 Variable aléatoire $aX + b$

**Définition 13.4.** Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$ .

1. Pour tout réel  $a$ , la variable aléatoire  $aX$  est la fonction définie pour tout  $\omega \in \Omega$  par  $(aX)(\omega) = aX(\omega)$ .
2. Pour tout réel  $b$ , la variable aléatoire  $X + b$  est la fonction définie pour tout  $\omega \in \Omega$  par  $(X + b)(\omega) = X(\omega) + b$ .

*Remarque.* Soit un entier  $n \geq 1$ . Si la variable aléatoire  $X$  prend pour valeurs les réels  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , alors pour tous réels  $a$  et  $b$ , la variable aléatoire  $aX + b$  prend pour valeurs les réels  $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ .

- Remarque.*
1. Dans le cas où  $a = 0$ , la variable aléatoire  $aX + b$  est la variable aléatoire toujours égale à  $b$  : pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $(aX + b)(\omega) = aX(\omega) + b = 0 \times X(\omega) + b = b$ .
  2. Dans le cas où  $a = b = 0$ , la variable aléatoire  $aX + b$  est la variable aléatoire toujours égale à  $0$  : pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $(aX + b)(\omega) = aX(\omega) + b = 0 \times X(\omega) + 0 = 0$ .

*Exemple.* Michael conserve les mêmes règles de jeu mais décide de doubler chacun des gains (remportés ou perdus).

La variable aléatoire  $T$  correspondant au gain algébrique obtenu avec ces nouvelles règles est donc la variable aléatoire  $2X$ . On notera  $T = 2X$ .

En posant  $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$ , la variable aléatoire  $T$  est alors la fonction définie pour tout  $\omega \in \Omega$  par :

$$T(\omega) = (2X)(\omega) = 2X(\omega) = \begin{cases} -12 & \text{si } \omega \in \{1; 3; 4\} \\ 24 & \text{si } \omega = 2 \end{cases}.$$

Le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité de  $T$ , identique à celle de  $X$ .

$t$	-12	24
$P(T = t)$	3/4	1/4

**Propriété 13.5.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur  $\Omega$  et soient  $a$  et  $b$  deux réels. On a :

1.  $E(aX + b) = aE(X) + b$
2.  $V(aX + b) = a^2V(X)$

*Démonstration.* Soit un entier  $n \geq 1$  et soient  $a$  et  $b$  deux réel. On note  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les valeurs prises par  $X$ . Alors la variable aléatoire  $aX + b$  prend les valeurs  $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ .

### 13.1. Rappels

1. Si  $a = 0$ , on a bien l'égalité souhaitée :  $E(b) = b = 0 \times E(X) + b$ .

On suppose donc  $a \neq 0$ . Par définition de l'espérance, on a :

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b)P(aX + b = ax_i + b)$$

Pour tout  $i \in \{1; \dots; n\}$ , les événements  $\{aX + b = ax_i + b\}$  et  $\{X = x_i\}$  sont identiques, donc on obtient l'égalité :  $P(aX + b = ax_i + b) = P(X = x_i)$ .

Par conséquent :

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b)P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n ax_i P(X = x_i) + \sum_{i=1}^n bP(X = x_i) \\ &= aE(X) + b. \end{aligned}$$

2. Si  $a = 0$ , on a bien l'égalité souhaitée :  $V(b) = 0 = 0^2 \times V(X)$ .

On suppose donc  $a \neq 0$ . Par définition de la variance, on a :

$$V(aX + b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - E(aX + b))^2 P(aX + b = ax_i + b).$$

On a :  $E(aX + b) = aE(X) + b$  et, pour tout  $i \in \{1; \dots; n\}$ ,  $P(aX + b = ax_i + b) = P(X = x_i)$  (voir l'item 1), donc :

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b - aE(X) - b)^2 P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a^2 (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

□

*Exemple.* On reprend le jeu de Michael.

— On calcule  $E(T)$  :

$$E(T) = -12 \times P(X = -12) + 24 \times P(X = 24) = -12 \times \frac{3}{4} + 24 \times \frac{1}{4} = -3.$$

Par conséquent, on a bien  $E(2X) = 2E(X)$ .

— On calcule  $V(T)$  :

$$\begin{aligned} V(T) &= (-12 - E(T))^2 P(X = -12) + (24 - E(T))^2 P(X = 24) \\ &= (-12 + 3)^2 \times \frac{3}{4} + (24 + 3)^2 \times \frac{1}{4} \\ &= 243. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien  $V(2X) = 2^2 V(X) = 4V(X)$ .

## 13.2 Somme de variables aléatoires

### 13.2.1 Définition

**Définition 13.6.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $\Omega$ . La variable aléatoire  $X + Y$  est la fonction définie pour tout  $\omega \in \Omega$  par  $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ .

*Remarque.* 1. Soient deux entiers  $n \geq 1$  et  $p \geq 1$ . Si les variables aléatoire  $X$  et  $Y$  prennent pour valeurs respectivement les réels  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $y_1, y_2, \dots, y_p$ , alors la variable aléatoire  $X + Y$  prend pour valeurs tous les réels  $x_i + y_j$  avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ .

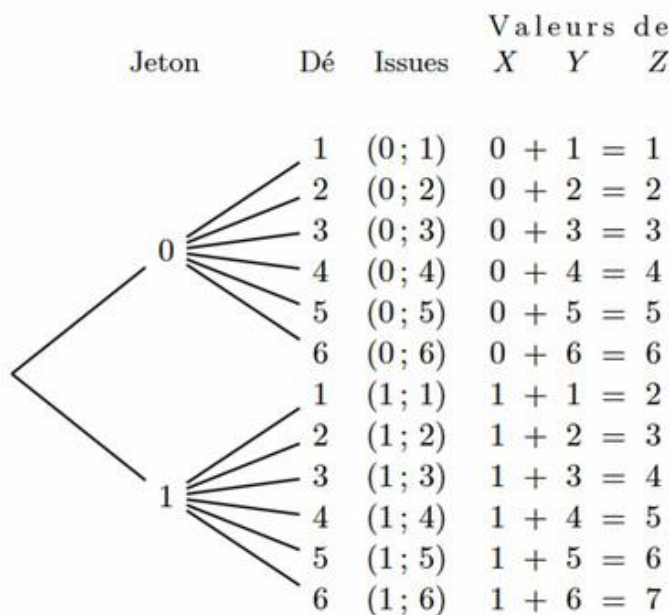
2. On définit de même la somme de plusieurs variables aléatoires.
3. On pourrait de même définir la variable aléatoire  $X - Y$ .

*Exemple.* Simon lance un jeton portant les numéros 0 et 1, puis lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Notons  $X$  la variable aléatoire donnant le numéro de la face extérieure du jeton et  $Y$  la variable aléatoire donnant le numéro de la face extérieure du dé. Les valeurs prises par  $X$  sont donc 0 et 1 et les valeurs prises par  $Y$  sont les entiers compris entre 1 et 6.

La variable aléatoire  $Z$  donnant la somme des deux numéros obtenus est alors donnée par :  $Z = X + Y$ .

On représente la situation à l'aide d'un arbre.



Les valeurs prises par la variable aléatoire  $Z$  sont donc les entiers compris entre 1 et 7.

En notant  $\Omega = \{0; 1\}$  et  $\Omega' = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ , la variable aléatoire  $Z$  est la

fonction définie pour tout  $\omega \in \Omega \times \Omega'$  par<sup>5</sup> :

$$Z(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = (0; 1) \\ 2 & \text{si } \omega \in \{(0; 2); (1; 1)\} \\ 3 & \text{si } \omega \in \{(0; 3); (1; 2)\} \\ 4 & \text{si } \omega \in \{(0; 4); (1; 3)\} \\ 5 & \text{si } \omega \in \{(0; 5); (1; 4)\} \\ 6 & \text{si } \omega \in \{(0; 6); (1; 5)\} \\ 7 & \text{si } \omega = (1; 6) \end{cases}.$$

La loi de probabilité étant équirépartie sur  $\Omega \times \Omega'$ , on a par exemple :

$$P(Z = 2) = P(\{(0; 2); (1; 1)\}) = \frac{2}{\text{Card}(\Omega \times \Omega')} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Pour calculer  $P(Z = 2)$ , on peut également utiliser l'égalité d'événements :

$$\{Z = 2\} = (\{X = 0\} \cap \{Y = 2\}) \cup (\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}).$$

Les événements  $\{X = 0\} \cap \{Y = 2\}$  et  $\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}$  étant incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} P(Z = 2) &= P(\{X = 0\} \cap \{Y = 2\}) + P(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) \\ &= P(X = 0) \times P_{\{X=0\}}(Y = 2) + P(X = 1) \times P_{\{X=1\}}(Y = 1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi la loi de probabilité de  $Z$  dans le tableau ci-dessous.

$z$	1	2	3	4	5	6	7
$P(Z = z)$	1/12	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/12

**Application 84.** On dispose de deux sacs opaques. L'un contient trois papiers portant les numéros 0, 2 et 4, l'autre contient 5 papiers : deux portant le numéro 1 et trois portant le numéro 3.

On tire un papier de chaque sac et on additionne les numéros obtenus. Les papiers sont indiscernables au toucher.

On note  $Z$  la variable aléatoire donnant le résultat.

1. Définir deux variables aléatoire  $X$  et  $Y$  telles que  $Z = X + Y$ .
2. Déterminer la loi de probabilité de  $Z$ .

5. Il est important de noter, par souci de cohérence avec la définition 13.6, que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont également des fonctions définies sur le produit cartésien  $\Omega \times \Omega'$ . Plus précisément,  $X$  et  $Y$  sont définies pour tout  $(a; b) \in \Omega \times \Omega'$  par  $X((a; b)) = a$  et  $Y((a; b)) = b$ .

### 13.2.2 Espérance d'une somme de variables aléatoires

**Propriété 13.7. Linéarité de l'espérance**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $\Omega$  et soit  $a$  un réel. Alors :

$$E(aX + Y) = aE(X) + E(Y).$$

*Démonstration* ♠. Soit un entier  $n \geq 1$  et soit  $\Omega = \{\omega_1; \dots; \omega_n\}$ . Considérons  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $\Omega$ .

Nous allons utiliser dans cette démonstration l'écriture de l'espérance de  $X$  ci-dessous<sup>6</sup> :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n X(\omega_k)P(\{\omega_k\}).$$

On a alors, pour tout réel  $a$  :

$$\begin{aligned} E(aX + Y) &= \sum_{k=1}^n (aX + Y)(\omega_k)P(\{\omega_k\}) \\ &= \sum_{k=1}^n ((aX)(\omega_k) + Y(\omega_k))P(\{\omega_k\}) \\ &= \sum_{k=1}^n (aX(\omega_k) + Y(\omega_k))P(\{\omega_k\}) \\ &= \sum_{k=1}^n aX(\omega_k)P(\{\omega_k\}) + \sum_{k=1}^n Y(\omega_k)P(\{\omega_k\}) \\ &= a \sum_{k=1}^n X(\omega_k)P(\{\omega_k\}) + \sum_{k=1}^n Y(\omega_k)P(\{\omega_k\}) \\ &= aE(X) + E(Y). \end{aligned}$$

□

*Remarque.* 1. Pour  $a = 1$ , on a  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .

2. Plus généralement, pour tout entier  $n \geq 1$ , si  $X_1, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires de  $\Omega$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont  $n$  réels, alors :

$$E(\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n) = \alpha_1 E(X_1) + \dots + \alpha_n E(X_n).$$

*Exemple.* On reprend l'expérience de Simon.

— On calcule  $E(X)$  :

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

6. Dans cette démonstration, il est délicat d'utiliser la définition de l'espérance utilisant l'espace d'arrivée  $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_p\} : E(X) = \sum_{k=1}^p x_k P(X = x_k)$ , car les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne prennent pas forcément des valeurs identiques. Il est donc plus commode d'utiliser une autre écriture de l'espérance de  $X$  utilisant uniquement l'espace de départ  $\Omega = \{\omega_1; \dots; \omega_n\}$  de  $X$ .

— On calcule  $E(Y)$  :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^6 kP(Y = k) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6}k = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{1}{6} \times \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{2}.$$

— On calcule  $E(Z)$  :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=1}^7 kP(Z = k) \\ &= 1 \times P(Z = 1) + \sum_{k=2}^6 kP(Z = k) + 7 \times P(Z = 7) \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \sum_{k=2}^6 k + 7 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \times \frac{5(2+6)}{2} + \frac{7}{12} \\ &= \frac{48}{12} = 4. \end{aligned}$$

On retrouve bien :  $E(Z) = E(X) + E(Y)$ , c'est-à-dire :  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ .

**Application 85.** On joue à un jeu se déroulant en deux étapes.

- Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 9 points. Sinon, on perd 6 points.
- Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face, on gagne 6 points. Sinon, on perd 2 points.

Notons  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus.

1. Écrire  $X$  comme somme de deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  à définir.
2. Déterminer la loi de probabilité de  $X_1$  et  $X_2$ .
3. Dédurre  $E(X)$ .

### 13.2.3 Variables aléatoires indépendantes

**Définition 13.8.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles définies sur  $\Omega$  et à valeurs respectivement dans les ensembles  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$ . On dit que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si, pour tout  $x \in X(\Omega)$  et pour tout  $y \in Y(\Omega)$ , on a :

$$P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

*Remarque.* D'après la formule des probabilités conditionnelles, si  $P(X = x) \neq 0$ , on a :

$$P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x) \times P_{\{X=x\}}(Y = y).$$

Par conséquent, les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si, et seulement si, pour tout  $x \in X(\Omega)$  tel que  $P(X = x) \neq 0$ , et pour tout  $y \in Y(\Omega)$ , on a :

$$P_{\{X=x\}}(Y = y) = P(Y = y).$$

L'indépendance de  $X$  et  $Y$  indique donc que l'issue de la variable  $Y$  n'est pas influencée par l'issue de la variable  $X$ .

*Exemple.* Reprenons l'expérience de Simon. Les variables aléatoire  $X$  et  $Y$  sont logiquement indépendantes puisque les deux lancers (le lancer du jeton et le lancer du dé) sont indépendants.

Par le calcul, on peut vérifier que pour tous  $x \in \{0; 1\}$  et  $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ , on a bien l'égalité :

$$P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x)P(Y = y).$$

Par exemple, on a d'une part :  $P(\{X = 0\} \cap \{Y = 3\}) = P(\{(0; 3)\}) = \frac{1}{12}$ , et d'autre part :  $P(X = 0)P(Y = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ , donc :  $P(\{X = 0\} \cap \{Y = 3\}) = P(X = 0)P(Y = 3)$ .

*Remarque.* Plus généralement, si  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2 et  $X_1, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires à valeurs respectivement dans les ensembles  $E_1, \dots, E_n$ , on dira que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes ou **mutuellement indépendantes** lorsque pour tous  $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$  :

$$P(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}) = P(X_1 = x_1) \times \dots \times P(X_n = x_n).$$

### 13.2.4 Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes

**Propriété 13.9. (admise)** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes définies sur  $\Omega$ . Alors :

$$V(aX + Y) = a^2V(X) + V(Y).$$

*Remarque.* 1. Pour  $a = 1$ , on a  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

2. Plus généralement, pour tout entier  $n \geq 1$ , si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires indépendantes de  $\Omega$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont  $n$  réels, alors :

$$V(\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n) = \alpha_1^2 V(X_1) + \dots + \alpha_n^2 V(X_n).$$

**⚠ Attention !**

En toute généralité,  $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$  ! On obtient l'égalité uniquement dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

*Exemple.* On reprend l'exemple de Simon.

— On calcule  $V(X)$  :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{k=0}^1 (k - E(X))^2 P(X = k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

— On calcule  $V(Y)$  :

$$\begin{aligned} V(Y) &= \sum_{k=1}^6 (k - E(Y))^2 P(Y = k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \left(k - \frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{6} \left( (1 - 7/2)^2 + (2 - 7/2)^2 + (3 - 7/2)^2 + (4 - 7/2)^2 \right. \\ &\quad \left. + (5 - 7/2)^2 + (6 - 7/2)^2 \right) \\ &= \frac{1}{6} (25/4 + 9/4 + 1/4 + 1/4 + 9/4 + 25/4) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{70}{4} = \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

— On calcule  $V(Z)$  :

$$\begin{aligned} V(Z) &= \sum_{k=1}^7 (k - E(Z))^2 P(Z = k) = \sum_{k=1}^7 (k - 4)^2 P(Z = k) \\ &= (1 - 4)^2 P(Z = 1) + \sum_{k=2}^6 (k - 4)^2 P(Z = k) + (7 - 4)^2 P(Z = 7) \\ &= 9 \times \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \sum_{k=2}^6 (k - 4)^2 + 9 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{18}{12} + \frac{1}{6} (4 + 1 + 0 + 1 + 4) = \frac{38}{12}. \end{aligned}$$

Les variables  $X$  et  $Y$  étant indépendantes, on retrouve bien l'égalité  $V(Z) = V(X) + V(Y)$ , c'est-à-dire :  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

**Application 86.** On reprend le jeu et la variable aléatoire  $X$  de l'application 85. Calculer  $V(X)$ .

### 13.3 Variables aléatoires i.i.d.

Dans cette section,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $X_1, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires définies sur  $\Omega$  supposées mutuellement indépendantes et suivant la même loi. On dira dans ce cas que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont **indépendantes et identiquement distribuées** (en abrégé **i.i.d.**).

On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^n X_k$  la variable aléatoire donnant la somme de ces  $n$  variables aléatoires, et on pose  $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \frac{1}{n} S_n$  la variable aléatoire donnant la moyenne de ces  $n$  variables aléatoires.

**Propriété 13.10.** 1.  $E(S_n) = nE(X_1)$

2.  $V(S_n) = nV(X_1)$

3.  $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X_1)$

*Démonstration.*

1. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S_n) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n).$$

Mais puisque les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont identiquement distribuées, elles ont la même espérance, en particulier égale à  $E(X_1)$ . On obtient donc :

$$E(S_n) = \underbrace{E(X_1) + \dots + E(X_1)}_{n \text{ fois}} = nE(X_1).$$

2. Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  étant indépendantes, d'après la propriété 13.9, on a :

$$V(S_n) = V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

Mais puisque les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont identiquement distribuées, elles ont la même variance, en particulier égale à  $V(X_1)$ . On obtient donc :

$$V(S_n) = \underbrace{V(X_1) + \dots + V(X_1)}_{n \text{ fois}} = nV(X_1).$$

3. On a :  $\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{nV(X_1)} = \sqrt{n}\sqrt{V(X_1)} = \sqrt{n}\sigma(X_1)$ .

□

**Propriété 13.11.** 1.  $E(M_n) = E(X_1)$

$$2. V(M_n) = \frac{1}{n}V(X_1)$$

$$3. \sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X_1)$$

*Démonstration.*

1. On a  $E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$  d'après la propriété 13.5 (ou par linéarité de l'espérance).

Mais puisque  $E(S_n) = nE(X_1)$  d'après la propriété 13.10, il vient que :

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times nE(X_1) = E(X_1).$$

2. On a  $V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n)$  d'après la propriété 13.5 (ou d'après la propriété 13.9).

Mais puisque  $V(S_n) = nV(X_1)$  d'après la propriété 13.10, il vient que :

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X_1) = \frac{1}{n}V(X_1).$$

3. On a :  $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\frac{1}{n}V(X_1)} = \sqrt{\frac{1}{n}}\sqrt{V(X_1)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X_1)$ .

□

*Exemple.* On lance cinq fois de suite un dé équilibré à six faces dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Pour tout  $k \in \{1; \dots; 5\}$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire correspondant au résultat du dé lors du  $k$ -ième lancer. Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_5$  sont i.i.d. et la loi de probabilité de chacune d'entre elles est la suivante :

$x$	1	2	3	4	5	6
$P(X_k = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

On note  $S_5$  la variable aléatoire donnant la somme des résultats obtenus à l'issue des cinq lancers, et on note  $M_5$  la variable aléatoire donnant la moyenne des résultats obtenus à l'issue des cinq lancers. On a donc :

$$S_5 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \quad \text{et} \quad M_5 = \frac{S_5}{5}.$$

— On a  $E(X_1) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5$ .

Par conséquent :  $E(S_5) = 5E(X_1) = 5 \times 3,5 = 17,5$ .

On a aussi :  $E(M_5) = E\left(\frac{S_5}{5}\right) = \frac{1}{5}E(S_5) = 3,5 = E(X_1)$ .

Ainsi, en jetant un très grand nombre de fois cinq dés, et en calculant à chaque fois la moyenne des résultats, la valeur moyenne de ces moyennes, donnée par  $E(M_5)$ , est égale à  $E(X_1)$ .

— On a  $V(X_1) = \frac{1}{6}((1 - 3,5)^2 + (2 - 3,5)^2 + \dots + (6 - 3,5)^2) = \frac{35}{12}$ .

Par conséquent :  $V(S_5) = 5V(X_1) = \frac{175}{12}$ .

Par propriété, on obtient :  $V(M_5) = \frac{1}{5}V(S_5) = \frac{7}{12}$ .

**Application 87.** On considère dix variables aléatoires  $X_1, \dots, X_{10}$  définies sur un même univers  $\Omega$ . On suppose que ces variables aléatoires sont i.i.d.

On donne ci-dessous la loi de probabilité de  $X_7$ .

$x$	-5	0	1	3
$P(X_7 = x)$	0,4	0,3	0,2	0,1

On note  $S$  la variable aléatoire définie par  $S = \sum_{i=1}^{10} X_i$  et on note  $M$  la variable

aléatoire définie par  $M = \frac{1}{10}S$ .

1. Calculer  $E(S)$  et  $V(S)$ .
2. Calculer  $E(M)$  et  $V(M)$ .
3. Déduire une valeur approchée de  $\sigma(M)$  à  $10^{-4}$  près.

## 13.4 Exercices

**Exercice 13.1 (Type bac).** Soit un entier  $n \geq 1$ . On considère  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n$ . Pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ , la  $i$ -ième urne contient 1 boule noire et  $i$  boules blanches. On tire au hasard une boule dans chaque urne. Quel est en moyenne le nombre de boules noires tirées ?

**Exercice 13.2.** Soit  $n$  un entier naturel non nul. On lance  $n$  fois une pièce équilibrée et on joue à un jeu. Pour tout  $k \in \{1; \dots; n\}$ , si la pièce tombe sur pile au  $k$ -ième lancer, on gagne  $k$  euros, sinon on ne gagne rien.

Pour tout  $k \in \{1; \dots; n\}$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire correspondant au gain obtenu lors du  $k$ -ième tirage et on note  $Y_k$  la variable aléatoire donnant le total des gains obtenus à l'issue du  $k$ -ième lancer.

1. Dans cette question,  $k$  désigne un entier compris entre 1 et  $n$ .
  - (a) Déterminer la loi de probabilité de  $X_k$ .
  - (b) En déduire l'espérance de  $X_k$ .

- (c) Montrer que :  $V(X_k) = \frac{k^2}{4}$ .
2. (a) Pour tout  $k \in \{1; \dots; n\}$ , exprimer  $Y_k$  en fonction de  $X_k$ .
- (b) Pour tout  $k \in \{1; \dots; n\}$ , déterminer  $E(Y_k)$ . Déterminer le nombre théorique de lancers nécessaires afin que le gain moyen total dépasse 280 euros.
- (c) Pour tout entier  $m \geq 1$ , montrer que :

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

- (d) En déduire, pour tout  $k \in \{1; \dots; n\}$ ,  $V(Y_k)$  en fonction de  $k$ .



# Loi binomiale

## 14.1 Schéma de Bernoulli

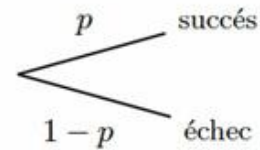
### 14.1.1 Épreuve et loi de Bernoulli

**Définition 14.1.** Soit  $p \in [0; 1]$ . Une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  est une expérience aléatoire n'admettant que deux issues : l'une appelée « succès » et de probabilité  $p$ , l'autre appelée « échec » et de probabilité  $1 - p$ .

*Remarque.* Une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  est une expérience aléatoire dont l'univers associé est l'ensemble  $\Omega = \{\text{succès}; \text{échec}\}$  et telle que  $P(\{\text{succès}\}) = p$  et  $P(\{\text{échec}\}) = 1 - p$ .

L'événement {succès} est souvent noté  $S$ . On a donc  $P(S) = p$  et  $P(\bar{S}) = 1 - p$ .

On peut représenter la situation par un arbre pondéré à deux branches dont les noeuds sont les issues.



*Exemple.* 1. Lancer une pièce de monnaie équilibrée est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,5 en considérant par exemple que le succès est l'événement  $S$  : « Le côté découvert est pile ».

2. Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : 5 bleues, 2 jaunes et 3 rouges. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à sa couleur.

Cette expérience aléatoire comporte trois issues, mais l'on peut considérer que le succès est, par exemple, l'obtention d'une boule rouge, et l'échec l'obtention d'une boule jaune ou bleue.

En notant  $S$  l'événement : « Tirer une boule rouge » et  $\bar{S}$  l'événement : « Tirer une boule jaune ou bleue », on obtient :

$$P(S) = \frac{3}{10} = 0,3 \quad \text{et} \quad P(\bar{S}) = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Cette expérience aléatoire est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = 0,3$ .

**Définition 14.2.** On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p \in [0; 1]$  et on note  $X$  la variable aléatoire valant 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. On dit que  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , et on note  $X \sim \mathcal{B}(p)$ .

*Remarque.* Autrement dit, on a  $X \sim \mathcal{B}(p)$  si  $X$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{0; 1\}$  et si  $P(X = 1) = p$  et  $P(X = 0) = 1 - p$ .

*Remarque.* Formellement, si l'on considère une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  dont l'univers associé est  $\Omega = \{\text{succès}; \text{échec}\}$ , une variable aléatoire  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  si  $X$  est définie pour tout  $\omega \in \Omega$  par :

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = \text{succès} \\ 0 & \text{si } \omega = \text{échec} \end{cases} .$$

*Exemple.* 1. On reprend l'exemple de la pièce de monnaie. La variable aléatoire  $X$  valant 1 si le côté découvert de la pièce est pile et 0 sinon suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p = 0,5$ .

2. On reprend l'exemple de l'urne. La variable aléatoire  $X$  qui prend la valeur 1 si la boule rouge est tirée et 0 sinon suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p = 0,3$ .

### 14.1.2 Espérance et variance d'une loi de Bernoulli

**Propriété 14.3. Espérance et variance d'une loi de Bernoulli**

Soit un réel  $p \in [0; 1]$ . Notons  $X$  la variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Alors :

1.  $E(X) = p$ .
2.  $V(X) = p(1 - p)$ .

*Démonstration.* Soit un réel  $p \in [0; 1]$ . Puisque  $X \sim \mathcal{B}(p)$ , alors  $X$  prend ses valeurs dans  $\{0; 1\}$  et  $P(X = 1) = p$  et  $P(X = 0) = 1 - p$ .

1. Par définition de l'espérance, on a :

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = P(X = 1) = p.$$

2. Par définition de la variance, on a :

$$\begin{aligned} V(X) &= P(X = 0)(0 - E(X))^2 + P(X = 1)(1 - E(X))^2 \\ &= (1 - p)E(X)^2 + p(1 - E(X))^2 = (1 - p)p^2 + p(1 - p)^2 \\ &= (1 - p)p[p + (1 - p)] \\ &= p(1 - p). \end{aligned}$$

□

*Exemple.* On reprend l'exemple de l'urne dans lequel  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p = 0,3$ .

On a alors  $E(X) = 0,3$ . Cela signifie que la valeur moyenne des valeurs prises par  $X$  (en d'autres termes la proportion de boules rouges) est égale à  $0,3$  si l'on procède à un très grand nombre de tirages avec remise.

On a également  $V(X) = p(1 - p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$ .

**Application 88.** On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on appelle  $S$  l'événement : « Obtenir un Coeur ».

Notons  $X$  la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'événement  $S$  est réalisé et la valeur 0 sinon.

1. Justifier que  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p = 0,25$ .
2. Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

### 14.1.3 Schéma de Bernoulli

**Définition 14.4.** Soient un entier  $n \geq 1$  et un réel  $p \in [0; 1]$ . Un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$  est la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli de paramètre  $p$  identiques et indépendantes.

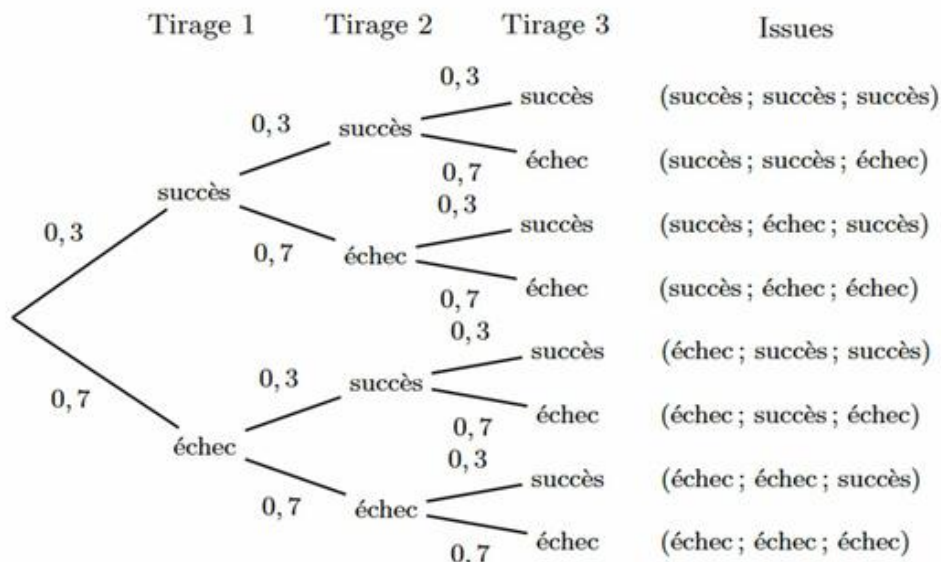
*Remarque.* L'univers associé à un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$  est le produit cartésien  $\Omega^n$  (où  $\Omega = \{\text{succès; échec}\}$ ) de cardinal  $\text{card}(\Omega)^n = 2^n$ . Une issue est donc un  $n$ -uplet de  $\Omega$  et il en existe  $2^n$ .

*Exemple.* On reprend l'exemple de l'urne. On tire cette fois-ci trois boules de l'urne au hasard avec remise.

Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de paramètre  $0,3$ .

Les trois tirages étant identiques et indépendants (tirages avec remise), on obtient un schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 3$  et  $p = 0,3$ .

On résume la situation avec l'arbre pondéré ci-dessous.



L'univers des possibles associé à ce schéma de Bernoulli de paramètres 3 et 0,3 est le produit cartésien  $\Omega^3$ , de cardinal  $2^3 = 8$ .

## 14.2 Loi binomiale

### 14.2.1 Définition et propriété

**Définition 14.5.** Soient un entier  $n \geq 1$  et un réel  $p \in [0; 1]$ . Notons  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus lors d'un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$ . On dit que  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  et on note  $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ .

*Remarque.* La variable aléatoire  $X$  suivant la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  est définie sur le produit cartésien  $\Omega^n$ , où  $\Omega = \{\text{succès; échec}\}$ .

*Exemple.* On reprend l'exemple précédent et on note  $Y$  la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges à l'issue des trois tirages, c'est-à-dire le nombre de succès.

Par exemple, on a :  $Y(\text{succès; succès; succès}) = 3$  et  $Y(\text{échec; succès; échec}) = 1$ .

Alors  $Y$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 3$  et  $p = 0,3$ .

Notons que l'on a donc :  $Y \in \{0; 1; 2; 3\}$ .

#### Propriété 14.6. Loi binomiale

Soit un entier  $n \geq 1$  et soit un réel  $p \in [0; 1]$ . Notons  $X$  la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Alors pour tout entier  $k \in \{0; 1; \dots; n\}$ , on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

*Démonstration.* Les  $n$  épreuves répétées sont identiques et indépendantes, donc<sup>1</sup> un chemin permettant d'obtenir  $k$  succès (et donc aussi  $n - k$  échecs) conduit à une issue dont la probabilité est donnée par  $p^k \times (1-p)^{n-k}$ .

Mais puisque le nombre de chemins menant à  $k$  succès est égal au nombre de parties à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments, c'est-à-dire à  $\binom{n}{k}$  d'après la

propriété 9.14, il vient que  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ .

□

*Remarque.* 1. On a en particulier :  $P(X = n) = \binom{n}{n} p^n (1-p)^{n-n} = p^n$ . Il y a en effet un seul chemin menant à exactement  $n$  succès et dont l'issue est de probabilité  $p^n$ .

1. On utilise ici le résultat (admis) stipulant que dans une succession de  $n$  épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue  $(x_1; x_2; \dots; x_n)$  est égale à  $P(\{x_1\}) \times P(\{x_2\}) \times \dots \times P(\{x_n\})$ .

2. On a aussi :  $P(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$ . Il y a en effet un seul chemin menant à exactement  $n$  échecs et dont l'issue est de probabilité  $(1-p)^n$ .

### ⚠ Attention !

En toute généralité, dans un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$ , la loi de probabilité sur le produit cartésien {succès ; échec}<sup>n</sup> n'est pas équirépartie<sup>a</sup> ! En conséquence, la formule suivante est totalement fautive :

$$P(X = k) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } \{X = k\}}{\text{nombre d'issues total}} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

a. Elle est équirépartie uniquement si  $p = 1 - p$ , c'est-à-dire  $p = 0,5$ .

*Exemple.* On reprend l'exemple de l'urne. On souhaite calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges lors des trois tirages, soit la probabilité de l'événement  $\{Y = 2\}$ . Par propriété, on a :

$$P(Y = 2) = \binom{3}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^{3-2} = 3 \times 0,3^2 \times 0,7 = 0,189.$$

On peut vérifier dans l'arbre pondéré ci-dessus qu'il y a  $\binom{3}{2} = 3$  chemins permettant d'obtenir deux succès (chacun d'eux correspondant à une probabilité égale à  $0,3^2 \times (1-0,3)$ ).

On a également :

$$P(Y = 3) = \binom{3}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^{3-3} = 1 \times 0,3^3 \times 1 = 0,027.$$

**Application 89.** On lance quatre fois de suite un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

On note  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre de 6 obtenus.

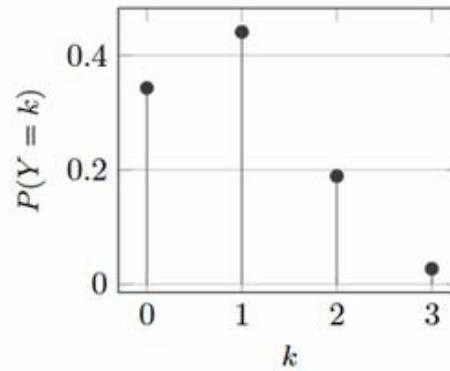
1. Justifier que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres  $n$  et  $p$ .
2. Calculer  $P(X = 3)$ . Interpréter ce résultat.
3. Calculer  $P(X \leq 1)$ . Interpréter ce résultat.

### 14.2.2 Représentation graphique d'une loi binomiale

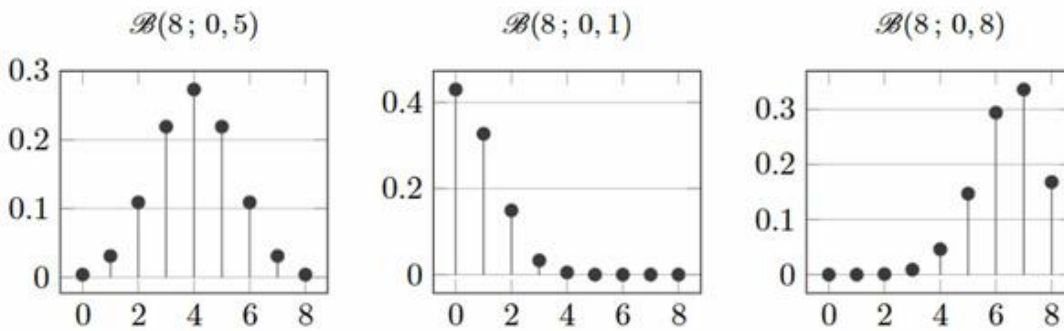
La loi de probabilité de la variable aléatoire  $Y$  est donnée, après calculs, dans le tableau ci-dessous :

$k$	0	1	2	3
$P(Y = k)$	0,343	0,441	0,189	0,027

On donne ci-contre le diagramme en bâtons représentant graphiquement la distribution de la loi binomiale  $\mathcal{B}(3; 0,3)$ .



La représentation de la distribution correspondant à une loi binomiale dépend du paramètre  $p$  : plus  $p$  est proche de 0 et plus la probabilité d'obtenir un grand nombre de succès sera faible, et plus  $p$  se rapproche de 1, plus la probabilité d'obtenir un grand nombre de succès est élevée. Ci-dessous, on voit ce qu'il se passe avec  $n = 8$  et différentes valeurs de  $p$ .



### 14.2.3 Espérance et variance d'une loi binomiale

**Propriété 14.7. Caractérisation de la loi binomiale (admise)**  
 Soient un entier  $n \geq 1$  et un réel  $p \in [0; 1]$ . Une variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  si, et seulement si on peut écrire  $X = X_1 + \dots + X_n$  où  $X_1, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

*Remarque.* Autrement dit, toute variable aléatoire est binomiale si, et seulement si, elle peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

*Exemple.* On reprend l'exemple de l'urne. On peut donc écrire :  $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$  où  $Y_1, Y_2$  et  $Y_3$  sont trois variables aléatoires i.i.d suivant une loi de Bernoulli de

paramètre 0,3.

Par exemple, on a les égalités d'événements ci-dessous :

$$\{Y = 3\} = \{Y_1 + Y_2 + Y_3 = 3\} = \{Y_1 = 1\} \cap \{Y_2 = 1\} \cap \{Y_3 = 1\}.$$

Par conséquent, les variables  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Y_3$  étant (mutuellement) indépendantes, on obtient :

$$\begin{aligned} P(Y = 3) &= P(\{Y_1 = 1\} \cap \{Y_2 = 1\} \cap \{Y_3 = 1\}) \\ &= P(Y_1 = 1) \times P(Y_2 = 1) \times P(Y_3 = 1) \\ &= 0,3 \times 0,3 \times 0,3 = 0,027. \end{aligned}$$

**Propriété 14.8. Espérance et variance d'une loi binomiale**

Soit un entier  $n \geq 1$  et soit un réel  $p \in [0; 1]$ . Notons  $X$  la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

1.  $E(X) = np$
2.  $V(X) = np(1 - p)$

*Démonstration.* Puisque  $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ , d'après la propriété 14.7 on peut écrire  $X = X_1 + \dots + X_n$  où  $X_1, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

1. On a :

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + \dots + X_n) \\ &= E(X_1) + \dots + E(X_n) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= p + \dots + p \quad \text{(propriété 14.3)} \\ &= np. \end{aligned}$$

2. Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  étant indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1 + \dots + X_n) \\ &= V(X_1) + \dots + V(X_n) \quad \text{(propriété 13.9)} \\ &= p(1 - p) + \dots + p(1 - p) \quad \text{(propriété 14.3)} \\ &= np(1 - p). \end{aligned}$$

□

**⚠ Attention !**

Ces formules de l'espérance et la variance sont valables uniquement pour une variable aléatoire qui suit une loi binomiale ! Avant de les utiliser, il est donc impératif de vérifier que la variable aléatoire suit bien une loi binomiale.

*Exemple.* On reprend l'exemple de l'urne dans lequel la variable aléatoire  $Y$  comptant le nombre de boules rouges à l'issue des trois tirages suit la loi binomiale de paramètres  $n = 3$  et  $p = 0,3$ .

On a alors  $E(Y) = 3 \times 0,3 = 0,9$ . Cela signifie que si l'on répète un très grand nombre de fois cette expérience de trois tirages, on aura en moyenne 0,9 boule rouge par lot de trois tirages.

On a également  $V(Y) = 3 \times 0,3 \times (1 - 0,3) = 0,63$ .

**Application 90.** On reprend la variable aléatoire  $X$  de l'application 2.

1. Calculer  $E(X)$  puis interpréter le résultat.
2. Calculer  $V(X)$ .

### 14.3 Exercices

**Exercice 14.1 (Sujet bac, Liban, 2019).** Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

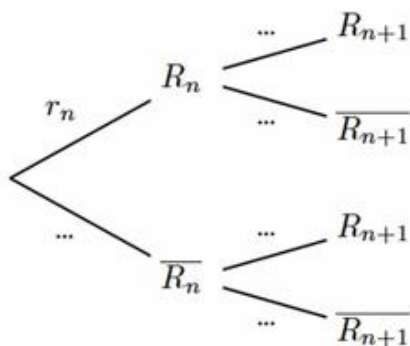
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- A l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $R_n$  l'événement « Le client rapporte la bouteille de son panier de la  $n$ -ième semaine ».

1. (a) Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les événements  $R_1$  et  $R_2$ .  
 (b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.  
 (c) Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.  
 (d) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?  
 On arrondira le résultat à  $10^{-3}$ .
2. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $r_n$  la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la  $n$ -ième semaine.

- (a) Soit  $n$  un entier naturel non nul. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous (aucune justification n'est attendue).



- (b) Justifier que pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2.$$

- (c) Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :  $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$ .  
 (d) Calculer la limite de la suite  $(r_n)$ . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**Exercice 14.2 (Sujet bac, Asie, 2012).** Soit  $k$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient  $k$  boules noires et 3 boules blanches. Ces  $k + 3$  boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

### Partie A

Dans cette partie A, on pose  $k = 7$ . Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note  $p$  la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.  
Démontrer que  $p = 0,42$ .
2. Soit un entier  $n > 2$ . Un joueur joue  $n$  parties identiques et indépendantes. On note  $X$  la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur, et  $p_n$  la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des  $n$  parties.
  - (a) Expliquer pourquoi la variable  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

(b) Exprimer  $p_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $p_{10}$  en arrondissant au millième.

3. Après exécution, le programme Python ci-dessous affiche la valeur 9.

```

1 n = 3
2 while (1 - 0.58**n < 0.99):
3     n = n + 1
4 print(n)

```

(a) Interpréter cette valeur.

(b) Retrouver cette valeur par le calcul.

### Partie B

Dans cette partie, le nombre  $k$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note  $Y_k$  la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

- (a) Justifier l'égalité :  $P(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$ .

(b) Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire  $Y_k$ .
- On note  $E(Y_k)$  l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $Y_k$ .  
On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance  $E(Y_k)$  est strictement positive.  
Déterminer les valeurs de  $k$  pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

**Exercice 14.3 (Sujet 0 bac, 2021).** Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation avec *conduite accompagnée* ;
- la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée* ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle* ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.

On considère les événements suivants :

- $A$  : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* » ;
- $R_1$  : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;

- $R_2$  : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;
- $R_3$  : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.

Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.

2. (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation.
  - (b) Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à  $\frac{1}{3}$ .
  - (c) La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* ?
3. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.

Ainsi, l'évènement  $\{X = 1\}$  correspond à l'évènement  $R_1$ .

- (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .
  - (b) Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On choisit, successivement et de façon indépendante,  $n$  personnes parmi les 300 du groupe étudié, où  $n$  est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de  $n$  personnes parmi les 300 personnes du groupe.

On admet que la probabilité de l'évènement  $R_3$  est égale à  $\frac{1}{6}$ .

- (a) Dans le contexte de cette question, préciser un évènement dont la probabilité est égale à  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ .
- (b) On considère la fonction Python `seuil` ci-dessous, où  $p$  est un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0; 1[$ .

```

1 def seuil(p):
2     n = 1
3     while (1 - (5/6)**n <= p):
4         n = n + 1
5     return n

```

Quelle est la valeur renvoyée par la commande `seuil(0.9)` ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

**Exercice 14.4 ♠ (Loi géométrique).** Soit un réel  $p \in ]0; 1[$ . On répète une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  de manière identique et indépendante jusqu'à l'obtention du premier succès.

Notons  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre d'épreuves nécessaires afin d'obtenir le premier succès. On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ , et on note :  $X \sim \mathcal{G}(p)$ .

1. Quelles sont les valeurs prises par  $X$  ?
2. (a) Pour tout entier  $k \geq 1$ , en considérant l'événement  $S_k$  : « Un succès est obtenu lors de la  $k$ -ième épreuve », exprimer  $P(X = k)$  en fonction de  $p$  et  $k$ .

(b) Vérifier que : 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n P(X = k) = 1.$$

3. Établir que  $X$  est une loi sans mémoire, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'égalité ci-dessous :

$$\forall (k; \ell) \in \mathbb{N}^{*2}, P_{\{X > k\}}(X > k + \ell) = P(X > \ell).$$

4. **Application.** On lance un dé continuellement jusqu'à l'obtention d'un 6. Notons  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires avant l'obtention du premier 6.

- (a) Quelle est la probabilité d'obtenir un premier 6 au troisième lancer ?
- (b) Quelle est la probabilité qu'il faille plus de 8 lancers pour obtenir un 6 ?
- (c) Si aucun 6 n'a été obtenu lors des 58 premiers lancers, quelle est la probabilité qu'au moins deux autres lancers soient nécessaires ?

**Exercice 14.5 ♠ (Loi hypergéométrique).** On cherche dans cet exercice à introduire une nouvelle loi discrète de probabilité, appelée loi hypergéométrique.

#### Partie A. Définition

Soient  $N$ ,  $n$  et  $m$  trois entiers naturels tels que  $n \leq N$  et  $m \leq N$ .

Une urne contient  $N$  boules blanches et noires :  $m$  boules blanches, et  $N - m$  boules noires. On tire simultanément  $n$  boules dans l'urne.

Notons  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans l'échantillon de  $n$  boules.

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi hypergéométrique de paramètres  $N$ ,  $n$  et  $m$ , et on note :  $X \sim \mathcal{H}(N; n; m)$ .

1. (a) Montrer que l'ensemble  $E$  des valeurs possible de  $X$  est donné par<sup>2</sup> :

$$E = \{\max(0; n - (N - m)); \dots; \min(m; n)\}.$$

- (b) A quelles conditions sur  $n$  a-t-on  $E = \{0; \dots; n\}$  ?

---

2. On vérifiera aisément par disjonction que l'on a toujours  $\max(0; n - (N - m)) \leq \min(m; n)$ .

2. Dénombrer les manières de tirer simultanément  $n$  boules dans l'urne.
3. Pour tout  $k \in E$ , dénombrer les tirages simultanés de  $n$  boules contenant  $k$  boules blanches.
4. En déduire alors que pour tout  $k \in E$ , on a :

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

A partir de cette égalité, retrouver l'identité de Vandermonde (voir l'exercice 4.9).

5. Reprendre les questions précédentes dans le cas où les  $n$  boules sont tirées l'une après l'autre sans remise.

Plus généralement, lorsque dans une population de référence de taille  $N$  dont  $m$  éléments possèdent une certaine caractéristique, on tire aléatoirement  $n$  individus (simultanément ou l'un après l'autre sans remise), on dira que la variable aléatoire  $X$  comptant le nombre d'individus possédant la caractéristique en question parmi les  $n$  individus suit la loi hypergéométrique de paramètres  $N$ ,  $n$  et  $m$ .

### Partie B. Exemple

Un enfant joue avec 13 billes, 10 rouges et 3 vertes, qu'il met dans une boîte. Il choisit dans la boîte trois billes au hasard, l'une après l'autre et sans remise, et il regarde combien de billes rouges il a choisies.

On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

1. (a) Représenter la situation du jeu décrit à l'aide d'un arbre pondéré.  
(b) En déduire la loi de probabilité de  $X$ .
2. Vérifier les résultats obtenus à l'aide de la partie A.



# Loi des grands nombres

Dans ce chapitre, toutes les variables aléatoires sont définies sur un univers fini  $\Omega$ . Par souci de simplification, on suppose également que leur espace d'arrivée est un ensemble fini.

## 15.1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

### 15.1.1 Inégalité de Markov

**Définition 15.1.** Une variable aléatoire réelle  $X$  est dite positive si elle est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

*Remarque.* Autrement dit, une variable aléatoire  $X$  est positive si  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ , c'est-à-dire : pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\omega) \geq 0$ .

**Théorème 15.2. Inégalité de Markov**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle positive. Pour tout réel  $a$  strictement positif, on a :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

*Démonstration.* Soit  $X$  une variable aléatoire réelle positive. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, notons  $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$  l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .

Par définition de l'espérance, on a :  $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$ .

Séparons cette somme en deux sommes en considérant les valeurs de  $X(\Omega)$  supérieures ou égales à  $a$  et celles strictement inférieures à  $a$  :

$$E(X) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ x_k \geq a}} x_k P(X = x_k) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ x_k < a}} x_k P(X = x_k).$$

Pour tout  $k \in \{1; \dots; n\}$ , on a  $P(X = x_k) \geq 0$  (par définition d'une probabilité) et  $x_k \geq 0$  (par hypothèse), donc :  $\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ x_k < a}} x_k P(X = x_k) \geq 0$ .

On en déduit :

$$E(X) \geq \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ x_k \geq a}} x_k P(X = x_k) \geq \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ x_k \geq a}} a P(X = x_k) = a \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ x_k \geq a}} P(X = x_k).$$

Or :  $\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ x_k \geq a}} P(X = x_k) = P(X \geq a)$ , donc :  $E(X) \geq aP(X \geq a)$ , d'où l'inégalité souhaitée. □

*Remarque.* L'inégalité de Markov peut s'interpréter de la manière suivante : la probabilité que  $X$  prenne des valeurs plus grandes que  $a$  est d'autant plus petite que  $a$  est grand<sup>1</sup>.

### Attention !

Dans l'inégalité de Markov, l'hypothèse selon laquelle la variable aléatoire est positive est indispensable !

*Exemple.* Une usine produit en moyenne 35 pièces par semaine. On note  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de pièces produites par semaine. La variable aléatoire  $X$  est donc positive.

D'après l'inégalité de Markov, la probabilité que l'usine produise plus de 70 pièces par semaine est inférieure à 0,5 :

$$P(X \geq 70) \leq \frac{E(X)}{70} = \frac{35}{70} = 0,5.$$

Toujours d'après l'inégalité de Markov, la probabilité que l'usine produise plus de 400 pièces par semaine est inférieure à 0,0875.

*Exemple.* On lance une pièce de monnaie équilibrée 100 fois de suite.

Notons  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre de piles obtenus à l'issue des 100 lancers. La variable aléatoire  $X$  suit alors une loi binomiale de paramètres  $n = 100$  et  $p = 0,5$ , d'espérance  $E(X) = 100 \times 0,5 = 50$ .

En appliquant l'inégalité de Markov, nous obtenons par exemple :

$$P(X \geq 75) \leq \frac{E(X)}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}.$$

Cette majoration est assez « grossière » car, à l'aide de la calculatrice, on sait que :

$$P(X \geq 75) = 1 - P(X \leq 74) \approx 0,3 \times 10^{-7}.$$

1. L'inégalité de Markov peut également s'interpréter de la manière suivante : plus l'espérance de  $X$  est petite, moins il est probable que  $X$  prenne des grandes valeurs. Il est facile d'appréhender cette interprétation avec Marcel, un élève de Terminale : plus la moyenne de mathématiques de Marcel est faible, moins il est probable que Marcel ait obtenu des notes élevées.

Cet exemple motive la remarque suivante.

*Remarque.* L'inégalité de Markov permet d'obtenir un majorant, mais il n'est pas le plus petit possible. On peut même affirmer que la majoration est assez grossière (la probabilité peut être bien moins inférieure au majorant).

**Application 91.** Dans un immeuble, l'ascenseur reste en moyenne deux minutes au rez-de-chaussée avant d'être sollicité à nouveau.

Majorer la probabilité que l'ascenseur reste au rez-de-chaussée plus de cinq minutes.

### 15.1.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

**Lemme 15.3. Formule de König-Huyghens (admis)**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

**Théorème 15.4. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Pour tout réel  $a$  strictement positif, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

*Démonstration.* Les événements  $\{|X - E(X)| \geq a\}$  et  $\{|X - E(X)|^2 \geq a^2\}$  sont identiques puisque  $a > 0$ . Ainsi :  $P(|X - E(X)| \geq a) = P(|X - E(X)|^2 \geq a^2)$ .

D'après l'inégalité de Markov, on obtient :

$$P(|X - E(X)|^2 \geq a^2) \leq \frac{E(|X - E(X)|^2)}{a^2}.$$

Puisque  $E(|X - E(X)|^2) = E((X - E(X))^2)$ , nous obtenons l'inégalité souhaitée d'après la formule de König-Huyghens.

□

*Remarque.* L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut s'interpréter de la manière suivante : plus l'écart entre  $X$  et  $E(X)$  est grand, moins cet écart est probable<sup>2</sup>.

*Exemple.* Lors de la ligue des champions de football, le nombre moyen de buts par match est de 2,5 avec une variance de 1,1.

Notons  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de buts par match. On a alors  $E(X) = 2,5$  et  $V(X) = 1,1$ .

On souhaite calculer la probabilité que le match suivant ne se termine pas avec

2. Une autre interprétation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est possible : plus la variance de  $X$  est petite, moins il est probable que l'écart entre  $X$  et  $E(X)$  soit grand.

deux ou trois buts, c'est-à-dire à calculer la probabilité  $P(\{X \leq 1\} \cup \{X \geq 4\})$ .  
On a les égalités d'événements suivants :

$$\begin{aligned} \{X \leq 1\} \cup \{X \geq 4\} &= \{X \leq 2,5 - 1,5\} \cup \{X \geq 2,5 + 1,5\} \\ &= \{X \leq E(X) - 1,5\} \cup \{X \geq E(X) + 1,5\} \\ &= \{|X - E(X)| \geq 1,5\}. \end{aligned}$$

Il vient alors :  $P(\{X \leq 1\} \cup \{X \geq 4\}) = P(\{|X - E(X)| \geq 1,5\})$ .  
En vertu de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient :

$$P(\{|X - E(X)| \geq 1,5\}) \leq \frac{1,1}{1,5^2} = 0,49.$$

Ainsi, la probabilité que le match ne se termine pas par deux ou trois buts est inférieure à 0,49.

*Exemple.* On reprend l'exemple dans lequel  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 100$  et  $p = 0,5$ .

On a alors :  $V(X) = 100 \times 0,5 \times 0,5 = 25$ .

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient :

$$P(|X - 50| \geq 25) \leq \frac{25}{25^2} = \frac{1}{25}.$$

On a :  $\{|X - 50| \geq 25\} = \{X \leq 50 - 25\} \cup \{X \geq 50 - 25\} = \{X \leq 25\} \cup \{X \geq 75\}$ ,  
donc :  $P(|X - 50| \geq 25) = P(\{X \leq 25\} \cup \{X \geq 75\})$ .

Mais puisque les événements  $\{X \leq 25\}$  et  $\{X \geq 75\}$  sont incompatibles, on a :

$$P(\{X \leq 25\} \cup \{X \geq 75\}) = P(X \leq 25) + P(X \geq 75) \leq \frac{1}{25}.$$

Par conséquent :  $P(X \geq 75) \leq \frac{1}{25} - P(X \leq 25) \leq \frac{1}{25}$ .

Nous remarquons que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit une majoration de la probabilité  $P(X \geq 75)$  plus précise que celle obtenue avec l'inégalité de Markov. Cette majoration reste toutefois encore grossière.

*Remarque.* L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut être également écrite de la manière suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, P(|X - E(X)| < a) \geq 1 - \frac{V(X)}{a^2}.$$

**Corollaire 15.5.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle non constante d'écart-type  $\sigma$ . Pour tout réel  $a$  strictement positif, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}.$$

*Démonstration.* Puisque la variable aléatoire  $X$  n'est pas constante, on a  $V(X) \neq 0$ , et donc :  $\sigma = \sqrt{V(X)} \neq 0$ .

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a pour tout réel  $a > 0$  :

$$P(|X - E(X)| \geq a\sigma) \leq \frac{V(X)}{a^2\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{a^2\sigma^2} = \frac{1}{a^2}.$$

□

*Remarque.* En particulier, pour  $a = 2$ , nous obtenons l'inégalité :

$$P(|X - E(X)| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}.$$

Cela signifie que la probabilité que les valeurs prises par  $X$  restent distantes de  $E(X)$  de plus de  $2\sigma$  est inférieure à 0,25.

Pour  $a = 4$ , nous obtenons l'inégalité :

$$P(|X - E(X)| \geq 4\sigma) \leq \frac{1}{16} = 0,0625.$$

Cela signifie qu'obtenir un écart de  $X$  à  $E(X)$  supérieur ou égal à  $4\sigma$  est un événement improbable.

**Application 92.** Une urne contient trois boules noires et sept boules blanches. On tire des boules successivement et sans remise jusqu'à l'obtention de la première boule blanche.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la première boule blanche.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .
3. Minorer la probabilité de l'événement  $\{|X - E(X)| < 1,625\}$ .
4. (a) Calculer la probabilité de l'événement  $\{|X - E(X)| < 1,625\}$ .  
(b) Comparer le résultat obtenu avec la minoration de la question 3.

## 15.2 Loi des grands nombres

Dans cette section,  $X$  est une variable aléatoire réelle d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ ,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et  $X_1, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires réelles i.i.d. de loi de probabilité celle de  $X$ . On dit que les variables  $X_1, \dots, X_n$  constituent un **échantillon de taille  $n$**  de la variable aléatoire  $X$ .

On pose  $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  la variable aléatoire moyenne de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$  de  $X$ .

### 15.2.1 Inégalité de concentration

**Théorème 15.6. Inégalité de concentration**

Pour tout réel  $a$  strictement positif, on a :

$$P(|M_n - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{na^2}.$$

*Démonstration.* Soit un réel  $a > 0$ . D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|M_n - \mu| \geq a) \leq \frac{V(M_n)}{a^2}.$$

Or  $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$  d'après la propriété 13.11, donc on obtient bien l'inégalité souhaitée :

$$P(|M_n - \mu| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2} = \frac{\sigma^2}{na^2}.$$

□

- Remarque.*
1. Une interprétation de l'inégalité de concentration est la suivante : plus l'écart entre  $M_n$  et  $\mu$  est grand, moins cet écart est probable. A l'inverse, plus les valeurs de  $M_n$  sont « concentrées » autour de  $\mu$ , plus c'est probable.
  2. Notons également le rôle du paramètre  $n$  dans la concentration des valeurs de  $M_n$  autour de  $\mu$  : plus la taille  $n$  de l'échantillon est grande, plus il est probable que les valeurs de  $M_n$  soient concentrées autour de  $\mu$ .

*Remarque.* L'inégalité de concentration peut être également écrite de la manière suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, P(|M_n - \mu| < a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{na^2}.$$

*Exemple.* On effectue  $n$  lancers successifs ( $n \geq 2$ ) supposés indépendants d'une pièce équilibrée.

On associe à chaque lancer  $i \in \{1; \dots; n\}$  la variable aléatoire  $X_i$  prenant comme valeur 0 si on obtient face et 1 si on obtient pile. Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre 0,5.

On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  la variable aléatoire donnant le nombre de piles obtenus à l'issue des  $n$  lancers, et on pose  $M_n = \frac{1}{n}S_n$  la variable aléatoire donnant la proportion de piles obtenus à l'issue des  $n$  lancers.

On a pour tout  $i \in \{1; \dots; n\}$ ,  $E(X_i) = 0,5$  et  $V(X_i) = 0,25$ .

— Pour  $n = 10000$ , l'inégalité de concentration donne :

$$P(|M_n - 0,5| \geq 0,01) \leq \frac{0,25}{10000 \times 0,01^2} = 0,25.$$

Ainsi, pour 10000 lancers, la probabilité que la proportion de piles obtenus s'écarte de plus de 0,01 de  $\frac{1}{2}$  est inférieure à  $\frac{1}{4}$ .

On dit que  $M_n$  est une **estimation** de la valeur de  $\mu = 0,5$  avec un **précision** de  $0,01$  et un **risque** de  $0,25$ .

- On souhaite déterminer une taille minimale  $n$  d'échantillon afin que  $M_n$  estime  $\mu = 0,5$  avec une précision de  $0,01$  et un risque de  $0,1$ , c'est-à-dire telle que :

$$P(|M_n - 0,5| \geq 0,01) \leq 0,1.$$

L'inégalité de concentration donne :  $P(|M_n - 0,5| \geq 0,01) \leq \frac{0,25}{0,01^2 n} = \frac{2500}{n}$ .

Il s'agit donc de résoudre dans  $\mathbb{N}^*$  l'inéquation  $\frac{2500}{n} \leq 0,1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\frac{2500}{n} \leq 0,1 \iff 0,1n \geq 2500 \iff n \geq \frac{2500}{0,1} = 25000.$$

A partir de  $25000$  lancers,  $M_n$  estime  $\mu$  avec une précision de  $0,01$  et une risque de  $0,1$ .

### 15.2.2 Loi faible des grands nombres

**Théorème 15.7. Loi faible des grands nombres**

Pour tout réel  $a$  strictement positif, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq a) = 0.$$

*Démonstration.* Soit un réel  $a > 0$ . On sait que  $P(|M_n - \mu| \geq a) \geq 0$ , et d'après l'inégalité de concentration, on a  $P(|M_n - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{na^2}$ , donc on obtient :

$$0 \leq P(|M_n - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{na^2}.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , il vient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{na^2} = 0$ , d'où le résultat d'après le théorème des gendarmes.

□

*Remarque.* La loi faible des grands nombres signifie que la probabilité qu'il y ait un écart, aussi petit soit-il, entre  $M_n$  et  $\mu$ , tend vers 0 quand la taille  $n$  de l'échantillon tend vers l'infini<sup>3</sup>.

*Remarque.* Dans le cas où  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0; 1]$ , la loi faible des grands nombres devient :

$$\forall a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - p| \geq a) = 0.$$

3. En d'autres termes, la variable aléatoire  $M_n$  est une très bonne estimation de l'espérance  $\mu$  lorsque  $n$  est très grand. C'est exactement l'interprétation de l'espérance que l'on propose communément (voir définition 13.3).

Autrement dit, en répétant un grand nombre  $n$  de fois l'expérience de Bernoulli de manière identique indépendante, la variable aléatoire  $M_n$ , appelée aussi dans ce cas **fréquence d'apparition du succès**, est une très bonne estimation de la probabilité du succès  $p$ <sup>4</sup>.

*Exemple.* On reprend l'exemple précédent. La loi faible des grands nombres permet d'écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - 0,5| \geq 0,01) = 0.$$

Ainsi, pour un très grand nombre de lancers, la probabilité que la proportion de piles obtenus s'écarte de plus de 0,01 de 0,5 est nulle.

**Application 93.** Une urne contient huit boules indiscernables au toucher : 4 sont rouges, 3 sont vertes et une est bleue. On tire au hasard une boule de cette urne et on note sa couleur. Si la boule tirée est bleue, on gagne 10 points, si elle est verte, 2 points et on perd un point si la boule est rouge.

Notons  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de points obtenus.

1. (a) Donner la loi de probabilité de  $X$ .  
(b) Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .
2. On réalise  $n$  tirages avec remise, où  $n \geq 2$ . Pour tout  $i \in \{1; \dots; n\}$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire donnant le nombre de points au  $i$ -ième tirage. On note  $M_n$  la variable aléatoire donnant le nombre moyen de points obtenus lors des  $n$  tirages.  
(a) Démontrer l'inégalité suivante :

$$P(|M_n - 1,5| < 0,1) \geq 1 - \frac{1225}{n}.$$

- (b) Dédurre que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - 1,5| < 0,1) = 1$ . Interpréter cette égalité.
3. Déterminer un entier naturel  $k$  tel que :

$$P(|M_k - 1,5| < 0,1) \geq 0,9.$$

## 15.3 Exercices

**Exercice 15.1 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev améliorée).** Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $\mu \in \mathbb{R}$  et de d'écart-type  $\sigma \in \mathbb{R}_+$ , et soit  $a$  un réel strictement positif.

1. Pour tout réel  $\lambda \geq 0$ , on pose  $Y = X - \mu + \lambda$ .  
(a) Établir l'inégalité suivante :

$$P(X - \mu \geq a) \leq P(Y^2 \geq (a + \lambda)^2).$$

---

4. Cette remarque définit la notion de probabilité d'un événement par l'approche « fréquentiste » vue en classe de seconde : la fréquence d'apparition d'un événement se stabilise autour de la probabilité théorique de cet événement lorsque l'expérience est répétée de manière identique et indépendante un grand nombre de fois.

- (b) Montrer que :  $E(Y^2) = \sigma^2 + \lambda^2$ .  
 (c) Dédurre l'inégalité ci-dessous valable pour tous les réels  $\lambda \geq 0$  :

$$P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}.$$

2. Notons  $\varphi$  la fonction définie pour tout réel  $x$  positif par :

$$\varphi(x) = \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}.$$

- (a) Étudier le sens de variation de la fonction  $\varphi$  sur  $[0; +\infty[$ .  
 (b) Démontrer que  $\varphi$  admet un minimum sur  $[0; +\infty[$  atteint en  $\frac{\sigma^2}{a}$ . Préciser sa valeur.  
 (c) Dédurre que :  $P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$ .  
 3. (a) Démontrer que :

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} \quad (\text{B.-T. améliorée})$$

- (b) Démontrer que :  $\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} = \frac{\sigma^2(\sigma^2 + a^2)}{a^2(\sigma^2 + a^2)}$ .  
 (c) Expliquer, en argumentant, la raison pour laquelle l'inégalité de la question 3.(a) est nommée « inégalité de Bienaymé-Tchebychev améliorée ».

**Exercice 15.2 (Paradoxe des anniversaires).** Combien de personnes faut-il réunir pour qu'au moins deux d'entre elles soient nées le même jour ? Intuitivement, on pourrait penser qu'il en faut un très grand nombre. Pourtant, il est possible de montrer qu'il suffit d'en réunir 23 pour que la probabilité de cet évènement soit d'environ 50%.

On se propose dans cet exercice de démontrer ce résultat.

Par souci de simplification, on suppose dans la suite qu'une année contient 365 jours et que la natalité de chaque jour de l'année est équiprobable.

- On assimile un groupe quelconque de 23 personnes à un 23-uplets de l'ensemble  $E = \{1; \dots; 365\}$ , les éléments de  $E$  étant les jours de l'année. Calculer  $\text{Card}(\Omega)$  où  $\Omega$  est l'ensemble des 23-uplets de  $E$ .
- On tire aléatoirement un groupe quelconque de 23 personnes et on considère l'évènement  $A$  suivant : « Deux personnes au moins sont nées le même jour ».
  - Expliciter l'évènement  $\bar{A}$  et montrer que :

$$P(\bar{A}) = \frac{A_{365}^{23}}{365^{23}}.$$

- (b) Dédurre  $P(A)$ .

3. Dans cette question, on souhaite vérifier expérimentalement le résultat précédent à l'aide d'un programme Python.
- (a) Compléter la fonction Python `meme_anniv(nb)` qui vérifie si au moins deux personnes d'un même échantillon de taille `nb` ont le même anniversaire.

```

1 import random
2
3 def meme_anniv(nb):
4     liste_anniv = []
5     for i in range(.....):
6         anniv = random.....
7         liste_anniv.append(anniv)
8     if len(set(liste_anniv)) == .....:
9         return False
10    else:
11        return True

```

- (b) D'après la loi faible des grands nombres, en sélectionnant un grand nombre de fois un groupe quelconque de 23 personnes, la fréquence d'apparition du succès (obtenir deux personnes au moins étant nées le même jour) est d'environ 0,5.
- Compléter la fonction Python `main(nb_essai)` qui renvoie la fréquence d'apparition du succès lorsque l'expérience est répétée `nb_essai` fois.

```

1 def main(nb_essai):
2     nb_pers = 23
3     x = 0
4     for i in range(.....):
5         if meme_anniv(nb_pers):
6             x = .....
7     frequence = .....
8     return frequence

```

4. En supposant que rejoignez un groupe quelconque de 23 personnes, quelle est la probabilité qu'au moins une autre personne de l'échantillon ait le même jour de naissance que vous ?<sup>5</sup>

**Exercice 15.3 ♠ (Marche aléatoire).** Une puce se déplace par sauts successifs sur une droite graduée munie d'un repère d'origine  $O$ . Au départ, la puce se trouve à l'origine et elle se déplace de façon aléatoire, soit d'un saut vers la droite (+1), soit d'un saut vers la gauche (-1).

Pour tout entier  $n \geq 0$ , on note :

5. Nous avons vu qu'il suffit de réunir 23 personnes afin que la probabilité de l'événement  $A$  soit égale à 0,5. Pourtant, il est nécessaire de réunir 253 personnes afin que la probabilité qu'au moins une d'entre elles soit née le même jour que vous est égale à 0,5. Ce paradoxe apparent porte le nom de « paradoxe des anniversaires ».

- $Y_n$  le nombre de déplacements à droite de la puce après  $n$  déplacements ;
- $X_n$  l'abscisse de la puce après  $n$  déplacements.

1. Pour tout entier  $n \geq 0$ , déterminer la loi de probabilité de  $Y_n$ .
2. (a) Pour tout entier  $n \geq 1$ , exprimer  $X_n$  en fonction de  $Y_n$ .  
(b) Dédurre que pour tout entier  $n \geq 0$ , on a :

$$E(X_n) = 0 \quad \text{et} \quad V(X_n) = n.$$

3. Pour tout entier  $n \geq 0$ , déterminer la probabilité que la puce revienne en  $O$  après  $n$  sauts.
4. Dans cette question,  $n$  est un entier naturel.
  - (a) Compléter la fonction Python `X(n)` ci-dessous afin qu'elle simule la variable aléatoire  $X_n$ , c'est-à-dire afin qu'elle renvoie l'abscisse de la puce après  $n$  déplacements.

```

1 import random
2
3 def X(n):
4     x = 0
5     for i in range(n):
6         a = random.random()
7         if .....:
8             x = .....
9         else:
10            x = .....
11    return x

```

- (b) Pour tout entier  $N \geq 2$ , on considère  $X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(N)}$  un échantillon de taille  $N$  de  $X_n$ , et on pose :  $M_N = \frac{X_n^{(1)} + \dots + X_n^{(N)}}{N}$ .  
Compléter la fonction `moyenne(N, n)` ci-dessous afin qu'elle simule la variable aléatoire  $M_N$ .

```

1 def moyenne(N, n):
2     som = 0
3     for i in range(N):
4         som = .....
5     moy = .....
6     return moy

```

Que peut-on prédire concernant l'appel `moyenne(N, n)` ?

# Correction des applications

## Application 1.

1. On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \sqrt{0,5u_n^2 + 8}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$  ».

— Initialisation. On a  $u_0 = 0$  et  $u_1 = \sqrt{0,5u_0^2 + 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ , donc on a bien :  $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$ , et ainsi  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

— Hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$ .

On a :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$  par hypothèse de récurrence, donc :  $0 \leq u_n^2 \leq u_{n+1}^2 \leq 16$  car la fonction carré est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , donc :  $0 \leq 0,5u_n^2 \leq 0,5u_{n+1}^2 \leq 8$ , donc :  $8 \leq 0,5u_n^2 + 8 \leq 0,5u_{n+1}^2 + 8 \leq 16$ , donc :  $\sqrt{8} \leq \sqrt{0,5u_n^2 + 8} \leq \sqrt{0,5u_{n+1}^2 + 8} \leq \sqrt{16}$  car la fonction racine carrée est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , soit :  $\sqrt{8} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$ , donc :  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$ .

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

— Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

2. Pour tout entier  $n \geq 1$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $n! \geq 2^{n-1}$  ».

— Initialisation. On a  $1! = 1$  et  $2^{1-1} = 2^0 = 1$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

— Hérédité. Soit un entier  $n \geq 1$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $(n+1)! \geq 2^n$ .

On a :

$$\begin{aligned}(n+1)! &= n! \times (n+1) \\ &\geq 2^{n-1}(n+1) \text{ par H.R.} \\ &= 2^n \times \frac{n+1}{2} \\ &\geq 2^n \text{ car } \frac{n+1}{2} \geq 1.\end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(1)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  non nul.

**Application 2.** On note  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :  $u_n = 3n + 6$ . Soit un réel  $A > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_n \geq A \iff n \geq \frac{A-6}{3}$ .

Ainsi, en posant  $n_0 = \left\lceil \frac{A-6}{3} \right\rceil + 1$ , on a bien, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \geq A$ .

Par définition, on a montré :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Application 3.** On note  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $u_n = 5 + \frac{1}{n}$ . Soit un réel  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$|u_n - 5| < \varepsilon \iff \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ainsi, en posant  $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ , on a bien, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n - 5| < \varepsilon$ .

Par définition, on a montré :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$ .

**Application 4.**

1. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2n - \frac{1}{n} \right) = +\infty$  par somme de limites.

2. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n\sqrt{n} = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{n^2} = 0$ , donc par somme de limites, on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 3n\sqrt{n} - 5 + \frac{\sqrt{2}}{n^2} \right) = +\infty$ .

3. D'une part, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{3}}{n^2\sqrt{n}} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 5 - \frac{2\sqrt{3}}{n^2\sqrt{n}} \right) = 5$  par somme et produit de limites.

D'autre part, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - e^n) = -\infty$ .

Par conséquent, on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 5 - \frac{2\sqrt{3}}{n^2\sqrt{n}} \right) (2 - e^n) = -\infty$  par produit de limites.

4. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 + n) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -2 + \frac{1}{n} \right) = -2$ , donc par quotient de

limites  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4+n}{-2+\frac{1}{n}} = -\infty$ , et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{4+n}{-2+\frac{1}{n}} - e^4 \right) = -\infty$  par somme de limites.

**Application 5.**

1. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$-7n^3 + 5n + 3 = n^3 \left( -7 + \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right).$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^3} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -7 + \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right) = -7$  par somme de limites.

Par ailleurs, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ .

Par conséquent :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left( -7 + \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right) = -\infty$  par produit de limites.

Finalement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-7n^3 + 5n + 3) = -\infty$ .

2. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\frac{5n^2 + n}{n^3 + 4n} = \frac{n^2 \left( 5 + \frac{1}{n} \right)}{n^3 \left( 1 + \frac{4}{n^2} \right)} = \frac{1}{n} \times \frac{5 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{4}{n^2}}.$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 5 + \frac{1}{n} \right) = 5$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{4}{n^2} \right) = 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{4}{n^2}} = 5$

par quotient de limites.

Par ailleurs, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Par conséquent :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{5 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{4}{n^2}} = 0$  par produit de limites.

Finalement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + n}{n^3 + 4n} = 0$ .

3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$n\sqrt{n} - n^2 = n^2 \left( \frac{n\sqrt{n}}{n^2} - 1 \right) = n^2 \left( \frac{\sqrt{n}}{n} - 1 \right) = n^2 \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right).$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right) = -1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right) = -\infty$  par produit de limites.

Finalement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n\sqrt{n} - n^2) = -\infty$ .

4. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} = \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{2n+1}^2 - \sqrt{2n-1}^2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} \\
 &= \frac{2n+1 - (2n-1)}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}.
 \end{aligned}$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n-1} = +\infty^6$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}{2} = +\infty$  par somme de limites, et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = 0$  par quotient de limites.

Enfin :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) = 0$ .

5. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} &= \frac{n}{\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} + \sqrt{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}} \\
 &= \frac{n}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \\
 &= \frac{n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)} \\
 &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}}} \quad \text{car } \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.
 \end{aligned}$$

D'une part, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n}} = 1^7$ , donc par somme de

limites, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}}\right) = 2$ .

D'autre part, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ .

Par conséquent, on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}}} = +\infty$  par quotient

de limites, soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = +\infty$ .

6. Ces limites sont obtenues ici uniquement par intuition. Plus rigoureusement, on utilise la propriété de composition de limites (voir exercice 2.3.).

7. Ces limites sont obtenues ici uniquement par intuition. Plus rigoureusement, on utilise judicieusement le théorème des gendarmes (voir application 8 question 2 pour mener à bien un tel raisonnement) ou on applique la propriété 3.7.

6. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2 + 2n} - (n + 1) &= \frac{[\sqrt{n^2 + 2n} - (n + 1)][\sqrt{n^2 + 2n} + (n + 1)]}{\sqrt{n^2 + 2n} + n + 1} \\ &= \frac{(\sqrt{n^2 + 2n})^2 - (n + 1)^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n + 1} \\ &= \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n + 1} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{n^2 + 2n} + n + 1}.\end{aligned}$$

D'une part, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$ .

D'autre part, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 2n} = +\infty$ . En effet, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\sqrt{n^2 + 2n} = \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{2}{n}} = n \sqrt{1 + \frac{2}{n}}.$$

Puisque :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n}} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , il vient par produit de

limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sqrt{1 + \frac{2}{n}} = +\infty$ .

Donc par somme de limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} + n + 1) = +\infty$ , et donc par

quotient de limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n^2 + 2n} + n + 1} = 0$ , soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - (n + 1)) = 0$ .

**Application 6.** Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned}(-1)^n \leq 1 &\iff -(-1)^n \geq -1 \\ &\iff n^2 - (-1)^n \geq n^2 - 1.\end{aligned}$$

Or :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - (-1)^n) = +\infty$  par comparaison.

**Application 7.**

1. Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned}-1 \leq (-1)^n \leq 1 &\iff 1 \leq 2 + (-1)^n \leq 3 \\ &\iff \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1} \leq \frac{3}{n^2 + 1} \quad \text{car } n^2 + 1 > 0 \\ &\iff 1 + \frac{1}{n^2 + 1} \leq 1 + \frac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1} \leq 1 + \frac{3}{n^2 + 1}.\end{aligned}$$

8. Voir note précédente.

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2 + 1} = 0$ , il vient par somme de limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2 + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{3}{n^2 + 1} \right) = 1.$$

D'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1} \right) = 1$ .

2. Pour tout entier  $n \geq 1$ , puisque :  $-1 \leq \cos(n) \leq 1$  et  $-2 \leq 2 \sin(n) \leq 2$ , alors  $-3 \leq \cos(n) + 2 \sin(n) \leq 3$  et donc  $-\frac{3}{n^2} \leq \frac{\cos(n) + 2 \sin(n)}{n^2} \leq \frac{3}{n^2}$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{3}{n^2} \right) = 0$ , donc d'après le théorème des gendarmes, on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n) + 2 \sin(n)}{n^2} = 0$ .

**Application 8.** On note  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_n = 3n - \sqrt{n^2 + 1}.$$

1. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} n \left( 3 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right) &= 3n - n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = 3n - \sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \\ &= 3n - \sqrt{n^2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)} = 3n - \sqrt{n^2 + 1} = u_n. \end{aligned}$$

2. (a) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On a  $1 + \frac{1}{n^2} > 1$ , donc  $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} > \sqrt{1}$  car la fonction racine carrée est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , soit :  $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} > 1$ .

De plus, puisque pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ ,  $\sqrt{x} < x$ , il vient  $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} < 1 + \frac{1}{n^2}$  puisque  $1 + \frac{1}{n^2} > 1$ .

Nous avons donc montré la double inégalité ci-dessous :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} < 1 + \frac{1}{n^2}.$$

- (b) On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) = 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$  d'après le théorème des gendarmes.

3. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 3 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right) = 2$  par produit et somme de limites, donc
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 3 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right) = +\infty \text{ par produit de limites.}$$
- Finalement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Application 9.** On note  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases} .$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $0 \leq u_n \leq 4$  ».

- Initialisation. On a  $u_0 = 2$  et  $0 \leq 2 \leq 4$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $0 \leq u_{n+1} \leq 4$ .  
On a :  $0 \leq u_n \leq 4$  par hypothèse de récurrence, donc :  $0 \leq \frac{1}{2}u_n \leq 2$ , donc :  
 $2 \leq \frac{1}{2}u_n + 2 \leq 4$ , c'est-à-dire :  $2 \leq u_{n+1} \leq 4$ , et donc :  $0 \leq u_{n+1} \leq 4$ .  
Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.
- Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**Application 10.** Notons  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}.$$

1. On note  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{5x + 4}{x + 2}$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .  
La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$ .

Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a :  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 5x + 4; & v(x) &= x + 2; \\ u'(x) &= 5; & v'(x) &= 1, \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{5(x+2) - (5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2} > 0.$$

Par conséquent, la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

2. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$  ».
- Initialisation. On a  $u_0 = 1$  et  $u_1 = \frac{5u_0 + 4}{u_0 + 2} = \frac{9}{3} = 3$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
  - Hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$ .  
On a :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$  par hypothèse de récurrence, donc :  $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$  car la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ , soit :  $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$ , donc :  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$ .  
Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.
  - Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .
- (b) En vertu de la question précédente, la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 4, donc elle est convergente d'après le théorème de convergence monotone. Notons  $\ell$  sa limite.  
Puisque  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , est minorée par 0 et est majorée par 4, sa limite  $\ell$  vérifie par propriété :  $0 \leq \ell \leq 4$ .

**Application 11.** Soit  $(u_n)$  une suite croissante qui converge vers un réel  $\ell$ .  
Raisonnons par l'absurde et supposons que  $(u_n)$  n'est pas majorée par  $\ell$  : il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $u_p > \ell$ . On peut donc écrire :  $u_p = \ell + \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est un réel strictement positif.

La suite  $(u_n)$  est croissante, donc pour tout entier  $n > p$ , on a :  $u_n \geq u_p$ .

La suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , donc il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ , soit :  $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon = u_p$ .

En posant  $N = \max(p, n_0)$ , il vient d'une part que pour tout entier  $n > N$ ,  $u_n \geq u_p$  et d'autre part que  $u_n < u_p$ , ce qui est absurde!

Ainsi,  $(u_n)$  est majorée par  $\ell$ .

On montre de même que si une suite est décroissante et converge vers un réel  $\ell$ , alors la suite est minorée par  $\ell$ .

### Application 12.

1. La suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,5$  et de premier terme  $u_0 = -2$ , donc pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n = u_0 \times q^n = -2 \times 0,5^n.$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$  car  $-1 < 0,5 < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2 \times 0,5^n) = 0$  par produit de limites.

2. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$  car  $-1 < \frac{1}{4} < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$  par produit de limites, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 6\right) = 6$  par somme de limites.

**Application 13.** Notons  $(S_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , le nombre  $S_n$  est la somme des  $n + 1$  premiers termes d'une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$  et de premier terme 1, donc on obtient :

$$S_n = 1 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  car  $-1 < \frac{1}{2} < 1$  et par produit de limites, donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 1$  par somme de limites, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 \text{ par produit de limites, soit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2.$$

**Application 14.** Voici le tableau des variations d'une fonction  $f$ .

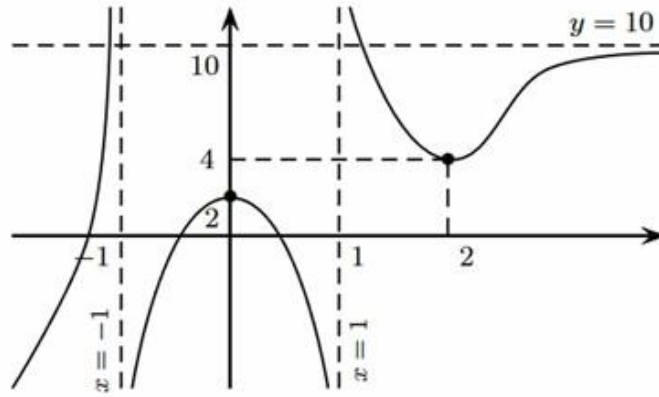
$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$f$	$-\infty$	$+\infty$	$2$	$-\infty$	$4$	$10$

$\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

1. Le domaine de définition  $D_f$  de la fonction  $f$  est :  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .
2. Les limites de  $f$  indiquées dans ce tableau sont :

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; & \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty; & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty; & \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty; & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10. \end{array}$$

3. On peut déduire que la courbe  $\mathcal{C}$  admet pour asymptotes verticales les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 1$ , et admet pour asymptote horizontale en  $+\infty$  la droite d'équation  $y = 10$ .
4. Voici une allure possible de la courbe  $\mathcal{C}$  dans un repère orthogonal.

**Application 15.**

1. On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x) = +\infty$  par somme de limites.

2. D'une part, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ .

D'autre part, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + 5 \right) = 5$  par somme de limites.

Par conséquent, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + 5 \right) = +\infty$  par produit de limites.

3. D'une part, on a  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 3x) = 4$ .

D'autre part, on a  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0^+$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty$  par quotient de limites.

Par conséquent, on obtient  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( x^2 + 3x + \frac{1}{x - 1} \right) = +\infty$  par somme de limites.

De manière analogue, on démontre que :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( x^2 + 3x + \frac{1}{x - 1} \right) = -\infty$ .

4. On a  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (\sqrt{x} - 3) = \sqrt{2} - 3 < 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - 4) = 0^-$ , donc par produit de limites, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x} - 3}{2x - 4} = +\infty$ .

**Application 16.**

1. Pour tout réel  $x \neq 0$  et tel que  $-5x^2 + x - 2 \neq 0$ , on a :

$$\frac{-3x - 1}{-5x^2 + x - 2} = \frac{x \left( -3 - \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left( -5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} = \frac{1}{x} \times \frac{-3 - \frac{1}{x}}{-5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ , donc par somme de limites, on obtient

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -3 - \frac{1}{x} \right) = -3$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = -5$ , il vient donc par

quotient de limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 - \frac{1}{x}}{-5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{3}{5}$ , et donc par produit de limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \times \frac{-3 - \frac{1}{x}}{-5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 0, \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x - 1}{-5x^2 + x - 2} = 0.$$

2. Pour tout réel  $x > 0$ , on a :

$$\frac{x^3 - 3}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x^3 \left(1 - \frac{3}{x^3}\right)}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = x^2 \sqrt{x} \times \frac{1 - \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

D'une part, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x} = +\infty$ .

D'autre part, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ , donc par somme de limites, on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x^3}\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$ , et donc par quotient

de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$ .

Finalement, on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x} \times \frac{1 - \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = +\infty$  par produit de limites,

soit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3}{\sqrt{x} + 1} = +\infty$ .

3. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (1/2)} \frac{4x^2 - 4x + 1}{(2x - 1)(x + 3)} &= \lim_{x \rightarrow (1/2)} \frac{(2x - 1)^2}{(2x - 1)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow (1/2)} \frac{2x - 1}{x + 3} \\ &= \frac{2 \times \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 3} = 0. \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4 - 16}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2)^2 - 4^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2)(x^2 + 4) \\ &= (2 + 2)(2^2 + 4) = 32. \end{aligned}$$

5. La fonction  $g : x \mapsto \sqrt{x+5}$  est dérivable en 0, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0+5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

**Application 17.** Pour tout réel  $x \geq 0$ , on a  $x^2 + 2 \geq x^2$ , donc  $\sqrt{x^2 + 2} \geq \sqrt{x^2}$ , soit :  $\sqrt{x^2 + 2} \geq x$ .

Or :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} = +\infty$  par le théorème de comparaison.

**Application 18.** Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(x) \leq 1 &\iff -2 \leq 2 \cos(x) \leq 2 \\ &\iff -1 \leq 2 \cos(x) + 1 \leq 3 \\ &\iff -\frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{2 \cos(x) + 1}{x^2 + 1} \leq \frac{3}{x^2 + 1} \quad \text{car } x^2 + 1 > 0. \end{aligned}$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2 + 1} = 0$ , il vient d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cos(x) + 1}{x^2 + 1} = 0.$$

**Application 19.**

- On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 2x + 3) = -\infty$ , donc par somme de limites :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x^2 + 2x + 3) = -\infty$ .  
— Pour tout réel  $x$ , on a :

$$e^x - x^2 + 2x + 3 = e^x \left( 1 - \frac{x^2}{e^x} + 2\frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} \right).$$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$  et on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\frac{x^2}{e^x} = 0$  par croissances comparées, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{e^x} + 2\frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} \right) = 1$  par somme de limites, et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left( 1 - \frac{x^2}{e^x} + 2\frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} \right) = +\infty$  par produit de limites, soit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 + 2x + 3) = +\infty$ .

2. Pour tout réel  $x$ , on a :  $x^2 e^{-x} + x - 1 = \frac{x^2}{e^x} + x - 1$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$  par croissances comparées, et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ , donc par somme de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{e^x} + x - 1 \right) = +\infty$ .

3. D'une part :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  par croissances comparées, et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + 2e^x - 5) = -5$  par somme de limites.

D'autre part :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x e^x = 0$  par produit de limites, donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 3) = -3$  par somme de limites.

Finalement, on obtient  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x + 2e^x - 5}{e^{2x} - 3} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$  par quotient de limites.

4. Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\frac{e^{2x} - x^3 e^x}{e^x + x} = \frac{e^{2x} \left(1 - \frac{x^3}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)} = e^x \times \frac{1 - \frac{x^3}{e^x}}{1 + \frac{x}{e^x}}.$$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissances comparées, donc par somme de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^3}{e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = 1$ , donc par quotient de

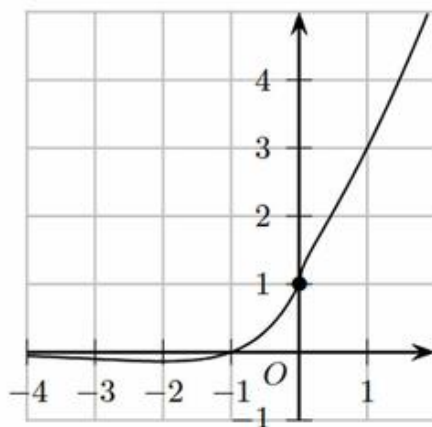
limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{x^3}{e^x}}{1 + \frac{x}{e^x}} = 1$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \times \frac{1 - \frac{x^3}{e^x}}{1 + \frac{x}{e^x}} = +\infty$  par produit de

limites, soit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - x^3 e^x}{e^x + x} = +\infty$ .

**Application 20.** On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x}(x+1) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On donne ci-contre la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  dans un repère du plan.



1. Graphiquement, la fonction  $f$  semble continue sur  $\mathbb{R}$  car la courbe  $\mathcal{C}_f$  est « en un seul morceau » sur  $\mathbb{R}$ .

2. Dans cette question, on valide la conjecture faite à la question précédente.
- (a) — La fonction  $x \mapsto (x+1)e^x$  est continue sur l'intervalle  $] -\infty; 0[$  comme produit de fonctions continues sur  $] -\infty; 0[$ . La fonction  $f$  est donc continue sur  $] -\infty; 0[$ .
- La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}(x+1) + 1$  est continue sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  comme produit et somme de fonctions continues sur  $]0; +\infty[$ . La fonction  $f$  est donc continue sur  $]0; +\infty[$ .
- (b) On a :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1)e^x = (0+1)e^0 = 1$ .
- On a aussi :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x}(x+1) + 1) = \sqrt{0}(0+1) + 1 = 1$ .
- Donc on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0), \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

La fonction  $f$  est donc continue en 0. La fonction  $f$  étant également continue sur les intervalles  $] -\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$ , elle est donc continue sur  $\mathbb{R}$ .

### Application 21.

1. On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires à trois reprises.
- Sur l'intervalle  $] -\infty; -1]$ , la fonction  $f$  est continue et strictement croissante. De plus, on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $f(-1) = 3 > 0$ , donc la fonction  $f$  change de signe sur l'intervalle  $] -\infty; -1]$ . D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ] -\infty; -1]$ .
- Sur l'intervalle  $[-1; 1]$ , la fonction  $f$  est continue et strictement décroissante. De plus, on a  $f(-1) = 3 > 0$  et  $f(1) = -1 < 0$ , donc la fonction  $f$  change de signe sur l'intervalle  $[-1; 1]$ . D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\beta \in [-1; 1]$ .
- Sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ , la fonction  $f$  est continue et strictement croissante. De plus, on a  $f(1) = -1 < 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , donc la fonction  $f$  change de signe sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ . D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\gamma \in [1; +\infty[$ .

Finalement, l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement trois solutions  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. On peut compléter le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  avec les informations précédentes.

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$-1$	$\beta$	$1$	$\gamma$	$+\infty$
$f$			3				$+\infty$
	$-\infty$	↗ 0		↘ 0	$-1$	↗ 0	

On déduit alors le tableau de signe de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$+\infty$			
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+

Par conséquent, pour tout  $x \in \mathbb{R} : f(x) > 0 \iff x \in ]\alpha; \beta[ \cup ]\gamma; +\infty[$ .

**Application 22.** On note  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 - \frac{u_n + 1}{e^{u_n}} \end{cases} .$$

1. La fonction  $f : x \mapsto 3 - \frac{x + 1}{e^x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  comme somme et quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ .

Pour tout réel  $x \geq 0$ , on a  $f(x) = 3 - \frac{u(x)}{v(x)}$  avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= x + 1; & v(x) &= e^x; \\ u'(x) &= 1; & v'(x) &= e^x, \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 - \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{e^x - e^x(x + 1)}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^x(x + 1) - e^x}{(e^x)^2} = \frac{xe^x + e^x - e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{xe^x}{(e^x)^2} = \frac{x}{e^x}. \end{aligned}$$

On a  $f'(0) = 0$  et pour tout réel  $x > 0$ ,  $f'(x) > 0$ , donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

$x$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$f$			3
	2	↗ $\alpha$	

— On a :  $f(0) = 3 - \frac{0+1}{e^0} = 3 - 1 = 2$ .

— Pour tout réel  $x \geq 0$ , on a :  $f(x) = 3 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissances comparées, il vient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  par somme de limites.

2. (a) Notons  $g$  la fonction  $x \mapsto f(x) - x$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ .  
Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{x}{e^x} - 1 = \frac{x - e^x}{e^x}.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $e^x > 0$  et  $x - e^x < 0$ , donc  $g'(x) < 0$  et ainsi, la fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

$x$	0	$+\infty$
$g$	2	$-\infty$

— On a :  $g(0) = f(0) - 0 = 2$ .

— On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} x = -\infty$   
par somme de limites car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  d'après la question 1 et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .

La fonction  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus,  $g(0) = 2 > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , donc la fonction  $g$  change de signe sur  $\mathbb{R}_+$ . D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$ , c'est-à-dire l'équation  $f(x) = x$ , admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

(b) A l'aide de la calculatrice, on trouve :  $2,76 < \alpha < 2,77$ .

3. Soit  $x \in [0; \alpha]$ , c'est-à-dire tel que  $0 \leq x \leq \alpha$ . Alors  $f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha)$  car la fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , soit :  $2 \leq f(x) \leq \alpha$ , soit :  $f(x) \in [2; \alpha]$ . Mais puisque  $[2; \alpha] \subset [0; \alpha]$ , alors :  $f(x) \in [0; \alpha]$ .
4. Montrons que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$  ».

— Initialisation. On a  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = f(u_0) = f(1) = 3 - \frac{1+1}{e^1} = 3 - 2e^{-1} \approx 2,26$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

- Hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ .  
On a :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$  par hypothèse de récurrence, donc :  $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$  car la fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , soit :  $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ , donc :  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ .  
Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.
- Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

5. Récapitulons les hypothèses nécessaires à l'application du théorème du point fixe.

- La fonction  $f$  est continue sur  $[0; \alpha]$  car elle est dérivable sur cet intervalle (question 1).
- L'intervalle  $[0; \alpha]$  est stable par la fonction  $f$  (question 3).
- La suite  $(u_n)$  est à valeurs dans l'intervalle  $[0; \alpha]$  (question 4).
- La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par  $\alpha$  (question 4), elle converge donc vers un réel  $\ell$  d'après le théorème de convergence monotone. Par ailleurs, puisque  $(u_n)$  est bornée par 0 et  $\alpha$ , alors  $\ell \in [0; \alpha]$ .

Enfin, d'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution sur  $[0; \alpha]$  de l'équation  $f(x) = x$ .

D'après la question 2.(a), on obtient  $\ell = \alpha$ .

**Application 23.** Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto e^{\frac{x}{x-1}}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Notons  $u$  la fonction  $x \mapsto \frac{x}{x-1}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et notons  $v$  la fonction  $x \mapsto e^x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Alors la fonction  $v \circ u$  est définie pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v\left(\frac{x}{x-1}\right) = e^{\frac{x}{x-1}} = f(x).$$

**Application 24.** Notons  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = x\sqrt{2x^2 + 1}.$$

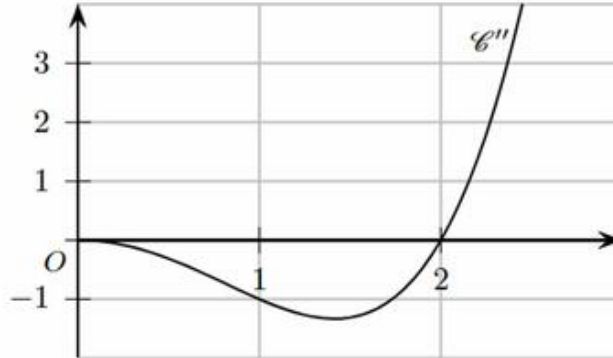
Pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) = x\sqrt{u(x)}$  où  $u(x) = 2x^2 + 1 > 0$ .

La fonction  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc la fonction  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par composition, et donc la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \sqrt{2x^2 + 1} + x \times \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \sqrt{2x^2 + 1} + \frac{4x^2}{2\sqrt{2x^2 + 1}} \\ &= \sqrt{2x^2 + 1} + \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{(\sqrt{2x^2 + 1})^2 + 2x^2}{\sqrt{2x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2x^2 + 1 + 2x^2}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{4x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

**Application 25.** On a tracé ci-dessous la représentation graphique  $\mathcal{C}''$  de la dérivée seconde  $f''$  d'une fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$ .



Dressons le tableau de signe de la fonction  $f''$  sur  $[0; +\infty[$ .

$x$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$		-	+

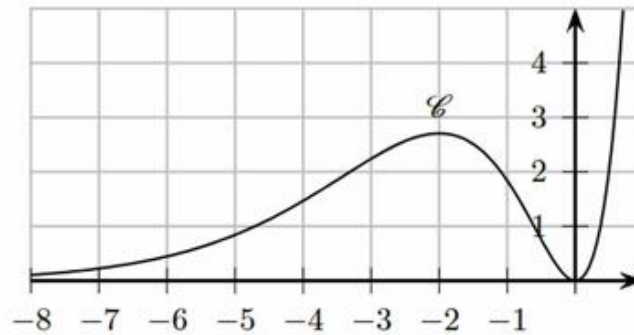
On déduit du signe de  $f''$  sur  $[0; +\infty[$  que la fonction  $f$  est concave sur l'intervalle  $[0; 2]$  et convexe sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ .

Par conséquent,  $f$  est concave sur l'intervalle  $[1; 2]$ . **Réponse 1**

**Application 26.** Notons  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = 5x^2 e^x.$$

La courbe représentative  $\mathcal{C}$  de  $f$  est proposée dans le repère orthogonal du plan ci-dessous.



1. La fonction  $f$  semble :

- convexe sur les intervalles  $] -\infty; -3,5]$  et  $[-0,5; +\infty[$  car, sur ces intervalles, la courbe  $\mathcal{C}$  se situe au-dessus de toutes ses tangentes ;

— concave sur l'intervalle  $[-3, 5; -0, 5]$  car, sur cet intervalle, la courbe  $\mathcal{C}$  se situe en-dessous de toutes ses tangentes.

Il semblerait également que la courbe  $\mathcal{C}$  admette les deux points d'inflexion suivants :  $A(-3, 5; f(-3, 5))$  et  $B(-0, 5; f(-0, 5))$ .

2. — On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$  par croissances comparées, donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  par produit de limites.

— On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  par produit de limites.

3. (a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) = u(x)v(x)$  avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 5x^2; & v(x) &= e^x; \\ u'(x) &= 10x; & v'(x) &= e^x, \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 10xe^x + 5x^2e^x \\ &= (10x + 5x^2)e^x = 5x(2 + x)e^x. \end{aligned}$$

(b) Pour tout réel  $x$ , on a  $e^x > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $5x(2 + x)$ .

On dresse le tableau de signe de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$		
$5x$		-	0	+		
$x + 2$		-	0	+		
$f'(x)$		+	0	-	0	+

(c) On déduit de la question précédente le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$f$		$20e^{-2}$		$+\infty$
	0		0	

$$f(-2) = 5(-2)^2 e^{-2} = 20e^{-2}$$

$$f(0) = 5 \times 0^2 e^0 = 0$$

4. (a) La fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a  $f'(x) = t(x)w(x)$  avec :

$$\begin{aligned} t(x) &= 5x^2 + 10x; & w(x) &= e^x; \\ t'(x) &= 10x + 10; & w'(x) &= e^x, \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} f''(x) &= t'(x)w(x) + t(x)w'(x) = (10x + 10)e^x + (5x^2 + 10x)e^x \\ &= 5(2x + 2)e^x + 5(x^2 + 2x)e^x = 5(x^2 + 4x + 2)e^x. \end{aligned}$$

- (b) Pour tout réel  $x$ , on a  $5e^x > 0$ , donc le signe de  $f''(x)$  est le signe de  $x^2 + 4x + 2$ .

L'équation  $x^2 + 4x + 2 = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  a pour discriminant 8 strictement positif, donc possède deux solutions, à savoir  $-2 - \sqrt{2} \approx -3,4$  et  $-2 + \sqrt{2} \approx -0,59$ .

On dresse le tableau de signe de  $f''$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$-2 - \sqrt{2}$	$-2 + \sqrt{2}$	$+\infty$		
$f''(x)$		+	0	-	0	+

- (c) D'après la question précédente, on déduit que la fonction  $f$  est convexe sur les intervalles  $]-\infty; -2 - \sqrt{2}]$  et  $[-2 + \sqrt{2}; +\infty[$ , et concave sur l'intervalle  $[-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}]$ .

Puisque  $f''(-2 - \sqrt{2}) = f''(-2 + \sqrt{2}) = 0$  et que la fonction  $f''$  change de signe en ces deux réels, il vient que les points de coordonnées  $(-2 - \sqrt{2}; f(-2 - \sqrt{2}))$  et  $(-2 + \sqrt{2}; f(-2 + \sqrt{2}))$  sont deux points d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}$  (ils sont même les seuls points d'inflexion de  $\mathcal{C}$ ).

### Application 27.

- $3 \ln(2) + \ln(5) - 2 \ln(3) = \ln(2^3) + \ln(5) - \ln(3^2) = \ln(8) + \ln(5) - \ln(9) = \ln(8 \times 5) - \ln(9) = \ln(40) - \ln(9) = \ln\left(\frac{40}{9}\right)$
  - $\ln(e^2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right) = 2 \ln(e) - (\ln(2) - \ln(e)) = 2 \ln(e) - \ln(2) + \ln(e) = 2 - \ln(2) + 1 = 3 - \ln(2)$
- Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} \ln(e^x + 1) - x &= \ln(e^x + 1) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) \\ &= \ln(e^{-x}(e^x + 1)) = \ln(e^{-x}e^x + e^{-x}) \\ &= \ln(e^{-x+x} + e^{-x}) = \ln(e^0 + e^{-x}) \\ &= \ln(1 + e^{-x}). \end{aligned}$$

- (b) Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + \ln(\sqrt{1 + x^2} - x)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln[(x + \sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2} - x)] \\
&= \ln(x\sqrt{1+x^2} - x^2 + \sqrt{1+x^2}^2 - x\sqrt{1+x^2}) \\
&= \ln(-x^2 + 1 + x^2) \\
&= \ln(1) = 0
\end{aligned}$$

$$\text{donc : } \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -\ln(\sqrt{1+x^2} - x).$$

**Application 28.**

- On résout l'équation  $\ln(1+3x) = \ln(x+1)$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .
  - Il est nécessaire que  $1+3x > 0$  et  $x+1 > 0$ , i.e.  $x > -1/3$  et  $x > -1$ , i.e.  $x > -1/3$ .  
L'ensemble de définition de l'équation est donc  $E = ]-1/3; +\infty[$ .
  - Pour tout  $x \in E$ , on a :

$$\begin{aligned}
\ln(1+3x) = \ln(x+1) &\iff 1+3x = x+1 \iff 2x = 0 \\
&\iff x = 0 \in E.
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation est  $\mathcal{S} = \{0\}$ .

- On résout l'équation  $\ln(1-x) = \ln(x-2)$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .  
Il est nécessaire que  $1-x > 0$  et  $x-2 > 0$ , i.e.  $x < 1$  et  $x > 2$ , ce qui est impossible.  
L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation est donc  $\mathcal{S} = \emptyset$ .
- On résout l'inéquation  $\ln(6x-1) \geq 2$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .
  - Il est nécessaire que  $6x-1 > 0$ , i.e.  $x > 1/6$ .  
L'ensemble de définition de l'équation est donc  $E = ]1/6; +\infty[$ .
  - Pour tout  $x \in E$ , on a :

$$\begin{aligned}
\ln(6x-1) \geq 2 &\iff \ln(6x-1) \geq \ln(e^2) \iff 6x-1 \geq e^2 \\
&\iff 6x \geq e^2 + 1 \iff x \geq \frac{e^2 + 1}{6}.
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'inéquation est  $\mathcal{S} = \left[ \frac{e^2 + 1}{6}; +\infty \right[$   
(notons que  $\mathcal{S} \subset E$ ).

- On résout l'inéquation  $e^{2x} + e^x - 6 > 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .  
Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned}
e^{2x} + e^x - 6 > 0 &\iff (e^x)^2 + e^x - 6 > 0 \\
&\iff X^2 + X - 6 > 0 \text{ en posant } X = e^x \\
&\iff X < -3 \text{ ou } X > 2 \text{ (après calculs)} \\
&\iff e^x < -3 \text{ ou } e^x > 2 \text{ car } X = e^x \\
&\iff e^x > 2 \text{ car } e^x > 0
\end{aligned}$$

$$\iff \ln(e^x) > \ln(2)$$

$$\iff x > \ln(2).$$

Finalement, l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'inéquation est  $\mathcal{S} = ]\ln(2); +\infty[$ .

5. On résout l'inéquation  $(2-x)\ln(x+3) > 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

— Il est nécessaire que  $x+3 > 0$ , i.e.  $x > -3$ .

L'ensemble de définition de l'équation est donc  $E = ]-3; +\infty[$ .

— Dressons le tableau de signe sur l'intervalle  $E$  de la fonction  $f : x \mapsto (2-x)\ln(x+3)$  à partir des tableaux de signe des fonctions  $x \mapsto 2-x$  et  $x \mapsto \ln(x+3)$ .

$x$	-3	-2	2	$+\infty$	
$2-x$		+	0	-	
$\ln(x+3)$	-	0	+		
$f(x)$	-	0	+	0	-

Notons que la deuxième ligne du tableau de signe est obtenue en résolvant l'inéquation  $\ln(x+3) \geq 0$  sur l'intervalle  $E$ . Pour tout  $x \in E$  :

$$\ln(x+3) \geq 0 \iff x+3 \geq 1 \iff x \geq -2.$$

Ainsi, pour tout  $x \in E$ , on a :  $(2-x)\ln(x+3) > 0 \iff x \in ]-2; 2[$ .

Finalement, l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'inéquation est  $\mathcal{S} = ]-2; 2[$ .

### Application 29.

1. On résout l'équation  $6^x = 2$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$6^x = 2 \iff \ln(6^x) = \ln(2) \iff x \ln(6) = \ln(2) \iff x = \frac{\ln(2)}{\ln(6)}.$$

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation est  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln(2)}{\ln(6)} \right\}$ .

2. On résout l'équation  $e^x e^{2x+1} = 2$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} e^x e^{2x+1} = 2 &\iff e^{x+2x+1} = 2 \iff e^{3x+1} = 2 \iff \ln(e^{3x+1}) = \ln(2) \\ &\iff 3x+1 = \ln(2) \iff x = \frac{\ln(2)-1}{3}. \end{aligned}$$

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation est  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln(2)-1}{3} \right\}$ .

**Application 30.**

- On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)^2 = +\infty$  par produit de limites, donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x)^2 - \ln(x)) = +\infty$  par somme de limites.
- Pour tout réel  $x > 0$ , on a  $\ln(x)^2 - \ln(x) = \ln(x)(\ln(x) - 1)$ .  
On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - 1) = +\infty$  par somme de limites, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)(\ln(x) - 1) = +\infty$  par produit de limites.  
Finalement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x)^2 - \ln(x)) = +\infty$ .
- Pour tout réel  $x > 0$ , on a  $\frac{3 + \ln(x)}{\ln(x)} = \frac{3}{\ln(x)} + 1$ .  
On a  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = 0^+$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{\ln(x)} = +\infty$  par quotient de limites, donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{3}{\ln(x)} + 1 \right) = +\infty$  par somme de limites.  
Finalement :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3 + \ln(x)}{\ln(x)} = +\infty$ .
- Pour tout réel  $x > 1$ , on a  $\ln(x)^2 - 2\ln(x) + 1 = \ln(x) \left( \ln(x) - 2 + \frac{1}{\ln(x)} \right)$ .  
On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$  par quotient de limites, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln(x) - 2 + \frac{1}{\ln(x)} \right) = +\infty$  par somme de limites, donc par produit de limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) \left( \ln(x) - 2 + \frac{1}{\ln(x)} \right) = +\infty$ .  
Finalement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x)^2 - 2\ln(x) + 1) = +\infty$ .

**Application 31.**

- Pour tout réel  $x > 0$ , on a  $x^2 - 3x - \ln(x) = x^2 \left( 1 - \frac{3}{x} - \frac{\ln(x)}{x^2} \right)$ .  
On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$  par croissances comparées et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{3}{x} - \frac{\ln(x)}{x^2} \right) = 1$  par somme de limites. Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ , il vient par produit de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 - \frac{3}{x} - \frac{\ln(x)}{x^2} \right) = +\infty$ .  
Finalement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x - \ln(x)) = +\infty$ .
- Pour tout réel  $x > 0$ , on a :  $\frac{\ln(x)}{x+1} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{x+1} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ .  
On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  par croissances comparées et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$  par

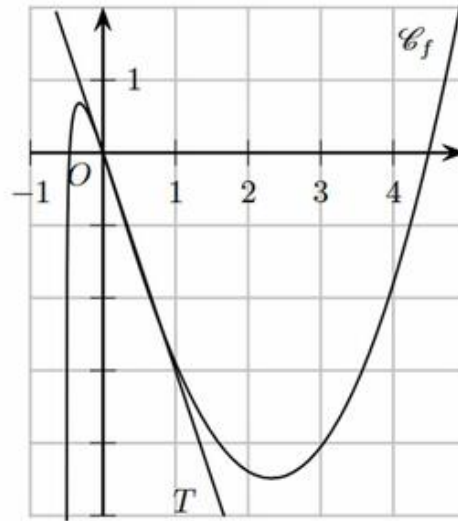
somme et quotient de limites, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 0$  par produit de limites.

Finalement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x+1} = 0$ .

**Application 32.** Notons  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in ]-1/2; +\infty[$  par :

$$f(x) = x^2 - 5x + \ln(2x + 1).$$

On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé, la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$ , ainsi que la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.



1. (a) On peut conjecturer que  $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .  
 (b) Il apparaît graphiquement que la fonction  $f$  est :  
 — croissante sur les intervalles  $] -0,5; -0,3]$  et  $[2, 3; +\infty[$ ;  
 — décroissante sur l'intervalle  $[-0,3; 2, 3]$ .  
 (c) La droite  $T$  passe par l'origine du repère et son coefficient directeur est égal à  $-3$ , donc son équation réduite est  $y = -3x$ .
2. Cette question vise à démontrer par le calcul les résultats précédents.
  - (a) — On a  $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} (x^2 - 5x) = \frac{11}{4}$ .  
 De plus  $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} (2x + 1) = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ , donc par composition de limites (voir exercice 2.3) :  $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \ln(2x + 1) = -\infty$ .  
 Finalement, par somme de limites :  $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x) = -\infty$ .  
 — Pour tout réel  $x \neq 0$ , on a  $x^2 - 5x = x^2 \left(1 - \frac{5}{x}\right)$ .  
 On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ .

De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right) = 1$  par somme de limites. Par produit de limites, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x) = +\infty$ .

Enfin :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ , donc par composition de limites (voir exercice 2.3.) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x + 1) = +\infty$ .

Finalement, par somme de limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

- (b) La fonction  $u : x \mapsto 2x + 1$  est dérivable sur  $] -1/2; +\infty[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  et la fonction  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , donc la fonction  $x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $] -1/2; +\infty[$  par composition.

Ainsi, la fonction  $f$  est dérivable sur  $] -1/2; +\infty[$  par somme de fonctions dérivables sur  $] -1/2; +\infty[$  et, pour tout  $x \in ] -1/2; +\infty[$ , on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 5 + \frac{u'(x)}{u(x)} = 2x - 5 + \frac{2}{2x + 1} \\ &= \frac{(2x - 5)(2x + 1) + 2}{2x + 1} = \frac{4x^2 + 2x - 10x - 5 + 2}{2x + 1} \\ &= \frac{4x^2 - 8x - 3}{2x + 1}. \end{aligned}$$

- (c) Pour tout  $x \in ] -1/2; +\infty[$ , on a  $2x + 1 > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $4x^2 - 8x - 3$ .

L'équation  $4x^2 - 8x - 3 = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  a pour discriminant 112 strictement positif, donc admet deux solutions  $x_1$  et  $x_2$  données par :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{7}}{2} \approx 0,3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{7}}{2} \approx -2,3.$$

On déduit le tableau de signe de  $f'$  sur  $] -1/2; +\infty[$  ainsi que le tableau des variations de  $f$  sur l'intervalle  $] -1/2; +\infty[$ .

$x$	$-\frac{1}{2}$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f$			$f(x_1)$		$f(x_2)$	$-\infty$
		$-\infty$				

- (d) L'équation réduite de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0, c'est-à-dire de la droite  $T$ , est donnée par :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

$$\text{Or : } f'(0) = \frac{4 \times 0^2 - 8 \times 0 - 3}{2 \times 0 + 1} = \frac{-3}{1} = -3, \text{ et } f(0) = 0^2 - 5 \times 0 + \ln(2 \times 0 + 1) = \ln(1) = 0, \text{ donc :}$$

$$y = -3(x - 0) + 0 = -3x.$$

**Application 33.**

1. On résout l'équation  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$  d'inconnue  $x \in [-\pi; \pi]$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 &\iff \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\quad \text{ou } \exists k' \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k'\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ &\quad \text{ou } \exists k' \in \mathbb{Z}, x = \frac{11\pi}{6} + 2k'\pi. \end{aligned}$$

L'ensemble  $S$  des solutions de l'équation sur  $[-\pi; \pi]$  est donc :  $S = \left\{-\frac{\pi}{6}\right\}$ .

2. On résout l'équation  $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) - \sqrt{3} = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) - \sqrt{3} = 0 &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ &\quad \text{ou } \exists k' \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{11\pi}{30} + 2k\pi \\ &\quad \text{ou } \exists k' \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{30} + 2k'\pi. \end{aligned}$$

L'ensemble  $S$  des solutions de l'équation sur  $\mathbb{R}$  est :

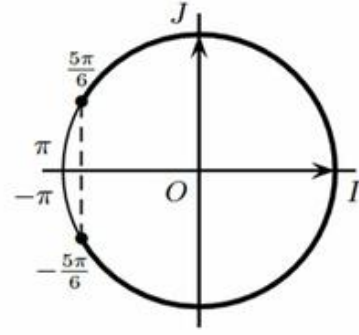
$$S = \left\{ \frac{11\pi}{30} + 2k\pi; \frac{\pi}{30} + 2k'\pi \mid (k; k') \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

3. On résout l'inéquation  $\cos(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$  d'inconnue  $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ .

Si  $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ , alors  $3x \in [-\pi; \pi]$ .

Ainsi, pour tout  $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ , on a :

$$\begin{aligned} \cos(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} &\iff 3x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \\ &\iff x \in \left[-\frac{5\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}\right]. \end{aligned}$$



L'ensemble  $S$  des solutions de l'inéquation est  $S = \left[-\frac{5\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}\right]$ .

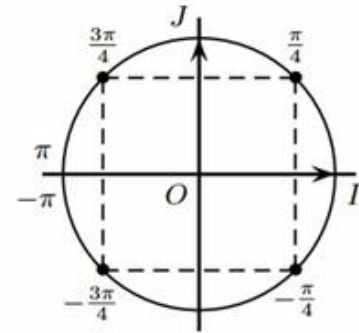
4. On résout l'équation  $\cos(x)^2 = \frac{1}{2}$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} \cos(x)^2 = \frac{1}{2} &\iff \cos(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } \cos(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ &\iff \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ ou } \cos(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \exists k' \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi \\ &\quad \text{ou } \exists k'' \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{4} + 2k''\pi \\ &\quad \text{ou } \exists k''' \in \mathbb{Z}, x = -\frac{3\pi}{4} + 2k'''\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble  $S$  des solutions de l'équation sur  $\mathbb{R}$  est :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



**Application 34.** On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = e^{-x} \sin(x).$$

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) = u(x)v(x)$  avec :

$$\begin{aligned}u(x) &= e^{-x}; \\u'(x) &= -e^{-x};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(x) &= \sin(x); \\v'(x) &= \cos(x),\end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x) \\&= e^{-x}(\cos(x) - \sin(x)).\end{aligned}$$

Or, pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x),\end{aligned}$$

$$\text{donc : } \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) - \sin(x).$$

$$\text{Finalement, pour tout réel } x : f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

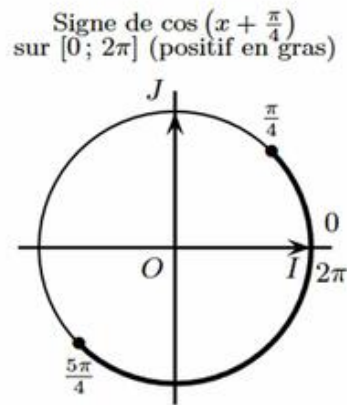
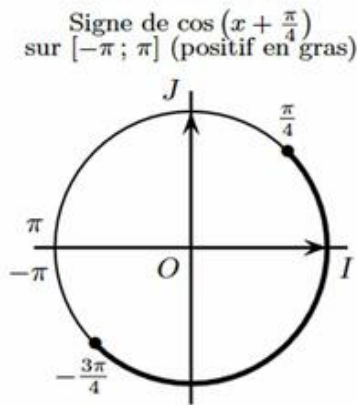
2. Pour tout  $x \in [0; 2\pi]$ , on a  $\sqrt{2}e^{-x} > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

— On résout d'abord l'inéquation  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a d'après la remarque suivant la propriété 6.7 :

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 &\iff x + \frac{\pi}{4} \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\&\iff x \in \left] -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[ + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

— On déduit ensuite le signe de  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$  à l'aide du cercle trigonométrique.



On dresse le tableau de signe de  $f'$  sur  $[0; 2\pi]$  puis on déduit le tableau des variations de  $f$  sur  $[0; 2\pi]$ .

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$2\pi$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f$	0	$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	0		

$$f(0) = e^{-0} \sin(0) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{-\frac{5\pi}{4}} \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5\pi}{4}}$$

$$f(2\pi) = e^{-2\pi} \sin(2\pi) = 0$$

**Application 35.** Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto 3x^2 - 2x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

- La fonction  $F : x \mapsto x^3 - x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ , on a :  $F'(x) = 3x^2 - 2x = f(x)$ , donc  $F$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle (E) :  $y' = f$ .

On peut également affirmer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

- On raisonne par équivalences successives :

$G$  primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $G(1) = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, G(x) = x^3 - x^2 + C \\ G(1) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, G(x) = x^3 - x^2 + C \\ 1^3 - 1^2 + C = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, G(x) = x^3 - x^2 + C \\ C = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, G(x) = x^3 - x^2 + 2.$$

Ainsi, la fonction  $G : x \mapsto x^3 - x^2 + 2$  est l'unique primitive de  $f$  telle que  $G(1) = 2$ .

**Application 36.** Dans cet exercice, chaque fonction  $f$  est continue sur  $I$ , elle admet donc des primitives sur  $I$ . On note  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

- $f : x \mapsto x^6 + 3x^2 + x - 4$ ,  $I = \mathbb{R}$

La fonction  $F$  est définie pour tout réel  $x$  par :

$$F(x) = \frac{x^7}{7} + 3\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x = \frac{1}{7}x^7 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x.$$

2.  $f : x \mapsto \frac{3}{2x^5} - \frac{6}{x^4}$ ,  $I = ]0; +\infty[$

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a :  $f(x) = \frac{3}{2}x^{-5} - 6x^{-4}$ .

La fonction  $F$  est définie pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  par :

$$F(x) = \frac{3}{2} \times \frac{x^{-4}}{-4} - 6 \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{3}{8x^4} + \frac{2}{x^3}.$$

3.  $f : x \mapsto xe^{x^2+1}$ ,  $I = \mathbb{R}$

Pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2+1} = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$  où  $u(x) = x^2 + 1$ .

La fonction  $F$  est définie pour tout réel  $x$  par :

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} = \frac{1}{2}e^{x^2+1}.$$

4.  $f : x \mapsto \frac{x+1}{x^2+2x}$ ,  $I = ]0; +\infty[$

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a :  $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x+2}{x^2+2x} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$  où  $u(x) = x^2 + 2x > 0$ .

La fonction  $F$  est définie pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  par :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(u(x)) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x).$$

5.  $f : x \mapsto \sin(2x) - \cos(x)$ ,  $I = \mathbb{R}$

Pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \sin(2x) - \cos(x) = \frac{1}{2}u'(x) \sin(u(x)) - \cos(x)$  où  $u(x) = 2x$ .

La fonction  $F$  est définie pour tout réel  $x$  par :

$$F(x) = -\frac{1}{2} \cos(u(x)) - \sin(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) - \sin(x).$$

6.  $f : x \mapsto \frac{-1}{2(x-2)^3}$ ,  $I = ]2; +\infty[$

Pour tout  $x \in ]2; +\infty[$ , on a :  $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^{-3} = -\frac{1}{2}u'(x)u(x)^{-3}$  où  $u(x) = x - 2$ .

La fonction  $F$  est définie pour tout  $x \in ]2; +\infty[$  par :

$$F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{u(x)^{-2}}{-2} = \frac{1}{4u(x)^2} = \frac{1}{4(x-2)^2}.$$

**Application 37.** On cherche à résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle (E) :  $y' = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ .

La fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi, la fonction  $f$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ .

En posant  $u(x) = x^2 + 1$  et  $v(x) = \sqrt{x}$ , on a  $u'(x) = 2x$  et  $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , et donc on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2}u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{2}u'(x)v'(u(x)).$$

Par conséquent, une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$F(x) = \frac{1}{2}v(u(x)) = \frac{1}{2}\sqrt{u(x)} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}.$$

Autrement dit,  $F$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $(E) : y' = f$ . Par conséquent, les solutions de  $(E)$  sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \mapsto F(x) + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

**Application 38.**  $(E)$  est l'équation différentielle  $2y' + 3y = 0$ .

1. On a :  $(E) \iff 2y' + 3y = 0 \iff y' + \frac{3}{2}y = 0$ .

Les solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  sont toutes les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{-\frac{3}{2}x}$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

2. On raisonne par équivalences successives :

$f$  solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(4) = 1$

$$\iff \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x} \\ f(4) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x} \\ Ce^{-\frac{3}{2} \times 4} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x} \\ C = e^6 \end{cases}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^6 e^{-\frac{3}{2}x} = e^{6-\frac{3}{2}x}.$$

Ainsi, la fonction  $f : x \mapsto e^{6-\frac{3}{2}x}$  est l'unique solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(4) = 1$ .

3. Par le point de coordonnées  $(4; 1)$  ne passe qu'une seule courbe intégrale de  $(E)$  : la courbe représentative de  $f$ .

**Application 39.**  $(E)$  est l'équation différentielle  $y' - 4y = -5$ .

1. Les solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  sont toutes les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{4x} + \frac{5}{4}$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

2. On raisonne par équivalences successives :

$$\begin{aligned}
 & f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telle que } f(2) = 1/4 \\
 & \iff \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{4x} + \frac{5}{4} \\ f(2) = 1/4 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{4x} + \frac{5}{4} \\ Ce^{4 \times 2} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{4x} + \frac{5}{4} \\ C = -e^{-8} \end{cases} \\
 & \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -e^{-8}e^{4x} + \frac{5}{4} = -e^{4x-8} + \frac{5}{4}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $f : x \mapsto -e^{4x-8} + \frac{5}{4}$  est l'unique solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(2) = 1/4$ .

3. Par le point de coordonnées  $\left(2; \frac{1}{4}\right)$  ne passe qu'une seule courbe intégrale de  $(E)$  : la courbe représentative de  $f$ .

**Application 40.** Soit  $(E)$  l'équation différentielle  $2y' + 3y = 6x + 1$ .

1. Considérons la fonction  $\varphi : x \mapsto mx + p$  où  $m$  et  $p$  sont deux réels, définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
 \varphi \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} & \iff \forall x \in \mathbb{R}, 2\varphi'(x) + 3\varphi(x) = 6x + 1 \\
 & \iff \forall x \in \mathbb{R}, 2m + 3(mx + p) = 6x + 1 \\
 & \iff \forall x \in \mathbb{R}, 2m + 3mx + 3p = 6x + 1 \\
 & \iff \forall x \in \mathbb{R}, (3m)x + (2m + 3p) = 6x + 1 \\
 & \iff \begin{cases} 3m = 6 \\ 2m + 3p = 1 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} m = 2 \\ 4 + 3p = 1 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} m = 2 \\ p = -1 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Finalement, la fonction  $\varphi : x \mapsto 2x - 1$  est une solution particulière de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. On a :  $(E) \iff 2y' + 3y = 6x + 1 \iff y' + \frac{3}{2}y = 3x + \frac{1}{2}$ .

Par conséquent, les solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  sont toutes les fonctions de la forme

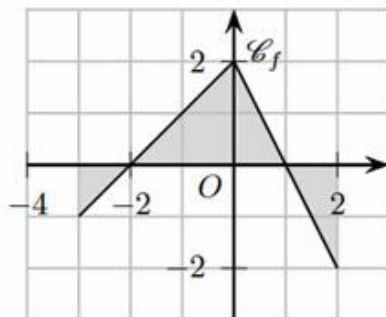
$$x \mapsto Ce^{-\frac{3}{2}x} + \varphi(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

3. On raisonne par équivalences successives :

$$\begin{aligned}
 & h \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telle que } h(0) = 1 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1 \\ h(0) = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1 \\ Ce^{-\frac{3}{2} \times 0} + 2 \times 0 - 1 = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1 \\ C = 2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 2e^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1.
 \end{aligned}$$

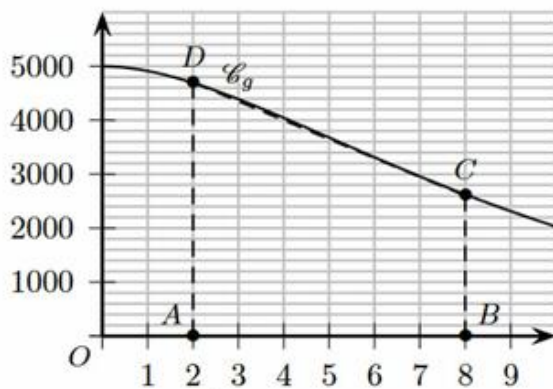
Ainsi, la fonction  $h : x \mapsto 2e^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1$  est l'unique solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $h(0) = 1$ .

**Application 41.** On note  $f$  la fonction dont la représentation graphique est donnée dans le repère orthogonal ci-dessous.



Par lecture graphique, on a :  $\int_{-3}^2 f(x) dx = -0,5 + 3 - 1 = 1,5$  u.a.

**Application 42.** On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction  $g$ .



On peut approcher l'intégrale  $\int_2^8 g(t) dt$  par l'aire du trapèze  $ABCD$  avec  $A(2; 0)$ ,  $B(8; 0)$ ,  $C(8; 2600)$  et  $D(2; 4700)$ .

L'aire  $\mathcal{A}_{ABCD}$  du trapèze  $ABCD$  est donnée par :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(AD + BC)AB}{2} = \frac{6(4700 + 2600)}{2} = 3 \times 7300 = 21900.$$

Finalement :  $\int_2^8 g(t) dt \approx 21900$  u.a.

**Application 43.**

1. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^2 (e^x - 2x - 1) dx &= [e^x - x^2 - x]_0^2 = e^2 - 2^2 - 2 - (e^0 - 0^2 - 0) \\ &= e^2 - 4 - 2 - 1 = e^2 - 7. \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{2x}{x^2 + 1} dx &= [\ln(x^2 + 1)]_1^3 = \ln(3^2 + 1) - \ln(1^2 + 1) = \ln(10) - \ln(2) \\ &= \ln\left(\frac{10}{2}\right) = \ln(5). \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx &= \int_{-2}^3 \frac{3}{4} \times \frac{4x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \left[ \frac{3}{4} \times 2\sqrt{2x^2 + 1} \right]_{-2}^3 \\ &= \left[ \frac{3}{2} \sqrt{2x^2 + 1} \right]_{-2}^3 = \frac{3}{2} \sqrt{2 \times 3^2 + 1} - \frac{3}{2} \sqrt{2 \times (-2)^2 + 1} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{19} - \frac{3}{2} \sqrt{9} = \frac{3}{2} \sqrt{19} - \frac{9}{2} = \frac{3\sqrt{19} - 9}{2}. \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx &= \int_1^2 - \left( -\frac{1}{x^2} \right) e^{1/x} dx = \left[ -e^{\frac{1}{x}} \right]_1^2 \\ &= -e^{\frac{1}{2}} - (-e^1) = e - e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

**Application 44.** On souhaite calculer l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$ .

1. On a :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln(e^x + 1)]_0^1 = \ln(e^1 + 1) - \ln(e^0 + 1) \\ &= \ln(e + 1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right). \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

3. Puisque  $I + J = 1$ , alors  $I = 1 - J = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = \ln(e) - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = \ln\left(\frac{e}{\frac{e+1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$ .

**Application 45.**

1. Pour tout  $t \in [1/2; 3/4]$ , on a  $t > 0$  et  $\ln(t) < 0$ , donc  $t \ln(t) < 0$ , donc

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} t \ln(t) dt < 0 \quad \text{par positivité de l'intégrale, soit : } J < 0.$$

2. Pour tout  $x \in [-3; -2]$ , on a  $x < 0$  et  $e^{x-2} > 0$ , donc  $\frac{e^{x-2}}{x} < 0$ , donc

$$\int_{-3}^{-2} \frac{e^{x-2}}{x} dx < 0 \quad \text{par positivité de l'intégrale, soit : } K < 0.$$

**Application 46.** Notons  $f$  la fonction définie pour tout  $t \in ]0; +\infty[$  par :

$$f(t) = \frac{1}{te^t}.$$

On note  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier  $n \geq 1$  par  $u_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$ .

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme quotient de deux fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ .

Pour tout  $t \in ]0; +\infty[$ , on a  $f(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$  avec :

$$\begin{aligned} u(t) &= 1; & v(t) &= te^t; \\ u'(t) &= 0; & v'(t) &= 1e^t + te^t = e^t(1+t), \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$f'(t) = \frac{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}{v(t)^2} = -\frac{e^t(1+t)}{(te^t)^2}.$$

Pour tout réel  $t > 0$ , on a  $f'(t) < 0$ , donc la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

Soit un entier  $n \geq 1$  et soit un réel  $t$  tel que  $n \leq t \leq n+1$ . Puisque la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ , alors :

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) \quad (1)$$

2. Pour tout entier  $n \geq 1$ , en passant à l'intégrale sur  $[n; n+1]$  dans les inégalités (1) on obtient :

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(n) dt$$

$$\text{soit : } f(n+1) \int_n^{n+1} 1 dt \leq u_n \leq f(n) \int_n^{n+1} 1 dt$$

$$\text{soit : } f(n+1)[t]_n^{n+1} \leq u_n \leq f(n)[t]_n^{n+1}$$

$$\text{soit : } f(n+1)(n+1-n) \leq u_n \leq f(n)(n+1-n)$$

$$\text{soit : } f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

3. On a montré à la question précédente que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$\frac{1}{(n+1)e^{n+1}} \leq u_n \leq \frac{1}{ne^n}.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)e^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{ne^n} = 0$ , il vient d'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

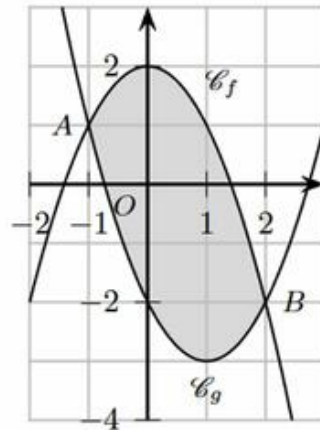
La suite  $(u_n)$  est donc convergente et sa limite est égale à 0.

**Application 47.** Notons  $f$  et  $g$  les fonctions définies pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = -x^2 + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2x - 2.$$

On donne ci-contre dans un repère orthonormé les représentations graphiques  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  des fonctions  $f$  et  $g$ .

Les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  se coupent aux points  $A(-1; 1)$  et  $B(2; -2)$ .



Il apparaît graphiquement que pour tout  $x \in [-1; 2]$ ,  $f(x) \geq g(x)$ . Par conséquent, l'aire  $\mathcal{A}$ , en unités d'aires, du domaine grisé est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 = -\frac{2}{3} \times 8 + 4 + 8 - \left( -\frac{2}{3} \times (-1) + 1 - 4 \right) \\
&= -\frac{16}{3} + 12 - \frac{2}{3} - 1 - 4 = 9.
\end{aligned}$$

**Application 48.**

1. Pour tout  $x \in [1; e]$ , on pose  $u(x) = \ln(x)$  et  $v(x) = x^2 - x$ .  
 Les fonction  $u : x \mapsto u(x)$  et  $v : x \mapsto v(x)$  sont dérivables sur  $[1; e]$  et pour tout  $x \in [1; e]$ , on a  $u'(x) = \frac{1}{x}$  et  $v'(x) = 2x - 1$ .  
 De plus, les fonctions  $u' : x \mapsto u'(x)$  et  $v' : x \mapsto v'(x)$  sont continues sur  $[1; e]$ .  
 D'après la formule d'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_1^e (2x - 1) \ln(x) \, dx &= \int_1^e u(x)v'(x) \, dx \\
&= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x) \, dx \\
&= [(x^2 - x) \ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}(x^2 - x) \, dx \\
&= [(x^2 - x) \ln(x)]_1^e - \int_1^e (x - 1) \, dx \\
&= e^2 - e - \left[ \frac{x^2}{2} - x \right]_1^e \\
&= e^2 - e - \left( \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{e^2 - 1}{2}.
\end{aligned}$$

2. On a :  $\int_0^2 4(2x + 1)^3 e^{x^2+x-1} \, dx = \int_0^2 4(2x + 1)^2 \times (2x + 1)e^{x^2+x-1} \, dx$ .

Pour tout  $x \in [0; 2]$ , on pose  $u(x) = 4(2x + 1)^2$  et  $v(x) = e^{x^2+x-1}$ .  
 Les fonction  $u : x \mapsto u(x)$  et  $v : x \mapsto v(x)$  sont dérivables sur  $[0; 2]$  et pour tout  $x \in [0; 2]$ , on a  $u'(x) = 4 \times 2 \times 2(2x + 1) = 16(2x + 1)$  et  $v'(x) = (2x + 1)e^{x^2+x-1}$ .  
 De plus, les fonctions  $u' : x \mapsto u'(x)$  et  $v' : x \mapsto v'(x)$  sont continues sur  $[0; 2]$ .

D'après la formule d'intégration par parties, on a :

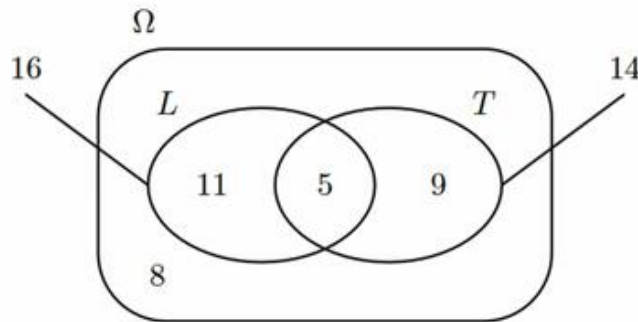
$$\begin{aligned}
\int_0^2 4(2x + 1)^3 e^{x^2+x-1} \, dx &= \int_0^2 u(x)v'(x) \, dx \\
&= [u(x)v(x)]_0^2 - \int_0^2 u'(x)v(x) \, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [4(2x+1)^2 e^{x^2+x-1}]_0^2 - 16 \int_0^2 (2x+1) e^{x^2+x-1} dx \\
&= 100e^5 - 4e^{-1} - 16 [e^{x^2+x-1}]_0^2 \\
&= 100e^5 - 4e^{-1} - 16(e^5 - e^{-1}) \\
&= 84e^5 + 12e^{-1}.
\end{aligned}$$

**Application 49.** Dans une classe de terminale, les options latin et théâtre sont proposées. On sait que 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune. On note :

- $L$  l'ensemble des élèves pratiquant le latin ;
- $T$  l'ensemble des élèves pratiquant le théâtre ;
- $\Omega$  l'ensemble de tous les élèves de cette classe.

1. Ci-dessous le diagramme de Venn schématisant la situation.



2. Les ensembles  $L \setminus T$ ,  $L \cap T$ ,  $T \setminus L$  et  $\Omega \setminus (L \cup T)$  étant deux à deux disjoints, on a d'après le principe additif :

$$\begin{aligned}
\text{Card}(\Omega) &= \text{Card}[(L \setminus T) \cup (L \cap T) \cup (T \setminus L) \cup (\Omega \setminus (L \cup T))] \\
&= \text{Card}(L \setminus T) + \text{Card}(L \cap T) + \text{Card}(T \setminus L) + \text{Card}(\Omega \setminus (L \cup T)) \\
&= 11 + 5 + 9 + 8 = 33.
\end{aligned}$$

**Application 50.**

1. On note  $C$  l'ensemble ci-dessous :

$$C = \{(6; 2); (6; 4); (5; 2); (5; 4); (10; 2); (10; 4); (3; 2); (3; 4)\}.$$

En posant  $A = \{3; 5; 6; 10\}$  et  $B = \{2; 4\}$ , on a :  $C = A \times B$ .

2. On pose  $E = \{a\}$ ,  $F = \{b; d\}$  et  $G = \{a; b; c\}$ , où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont quatre réels distincts. On a :

$$E \times F = \{(a; b); (a; d)\}$$

$$F^2 = F \times F = \{(b; b); (b; d); (d; b); (d; d)\}$$

$$E^2 = E \times E = \{(a; a)\}$$

$$E \times F \times G = \{(a; b; a); (a; b; b); (a; b; c); (a; d; a); (a; d; b); (a; d; c)\}$$

**Application 51.** Un immeuble est protégé par un digicode. Ce code peut être composé de quatre, cinq ou six chiffres allant de 0 à 9, puis d'une lettre sélectionnée parmi les lettres  $A$  ou  $B$ . On note :

- $A_4$  l'ensemble des mots de passes composés de 4 chiffres puis d'une lettre ;
- $A_5$  l'ensemble des mots de passes composés de 5 chiffres puis d'une lettre ;
- $A_6$  l'ensemble des mots de passes composés de 6 chiffres puis d'une lettre.

1. Les ensembles  $A_4$ ,  $A_5$  et  $A_6$  sont donnés par :

- $A_4 = \{0; \dots; 9\}^4 \times \{A; B\}$  ;
- $A_5 = \{0; \dots; 9\}^5 \times \{A; B\}$  ;
- $A_6 = \{0; \dots; 9\}^6 \times \{A; B\}$ ,

En vertu du principe multiplicatif, on obtient :  $\text{Card}(A_4) = 10^4 \times 2 = 20000$ ,  $\text{Card}(A_5) = 10^5 \times 2 = 200000$  et  $\text{Card}(A_6) = 10^6 \times 2 = 2000000$ .

2. Les ensembles  $A_4$ ,  $A_5$  et  $A_6$  étant deux à deux disjoints, on a d'après le principe additif :

$$\begin{aligned} \text{Card}(A_4 \cup A_5 \cup A_6) &= \text{Card}(A_4) + \text{Card}(A_5) + \text{Card}(A_6) \\ &= 20000 + 200000 + 2000000 = 2220000. \end{aligned}$$

On dénombre donc 2220000 codes possibles.

**Application 52.** Une compétition de jeux vidéos en ligne oppose six joueurs. A la fin, un classement des trois meilleurs joueurs est établi et il n'y a pas d'ex aequo. Afin de construire un podium dans lequel il n'y a pas d'ex aequo, il y a 6 choix pour la première place, 5 choix pour la deuxième place et enfin 4 choix pour la troisième place, il y a donc  $6 \times 5 \times 4 = 120$  podiums possibles d'après le principe multiplicatif.

Autrement dit, le nombre de podiums possibles est donné par le nombre de 3-arrangements de l'ensemble constitué des 6 joueurs, soit le nombre :

$$\mathcal{A}_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 120.$$

**Application 53.** Sur une étagère se trouvent 12 livres différents : 5 de mathématiques, 4 de physique-chimie et 3 de sciences économiques.

1. Afin de ranger ces livres dans l'étagère, il y a 12 choix pour la première place, 11 choix pour la deuxième place etc. et enfin un unique choix pour la dernière place, il y a donc  $12 \times 11 \times 10 \times \dots \times 1 = 479001600$  rangements possibles d'après le principe multiplicatif.

Autrement dit, le nombre de façons de ranger ces livres sur l'étagère est donné par le nombre de permutations de l'ensemble des 12 livres, c'est-à-dire  $12! = 479001600$ .

2. Afin de ranger les livres dans l'étagère en ayant les livres de mathématiques côte à côte, on peut :

- d'abord construire un « bloc » de maths ( $5!$  possibilités) ;
- puis ranger le bloc et les 7 livres restants ( $8!$  possibilités).

Il y a donc  $5! \times 8! = 4838400$  manières différentes de ranger les livres sur l'étagère en ayant les livres de mathématiques côte à côte.

**Application 54.** Dans un jeu de 32 cartes, une « main » est composée de cinq cartes.

1. Il y a  $\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!(32-5)!} = 201376$  mains possibles.
2. Pour construire une main contenant le valet de pique, on peut :
  - commencer par choisir le valet de pique (1 possibilité) ;
  - puis choisir les 4 autres cartes parmi les 31 restantes ( $\binom{31}{4}$  possibilités).

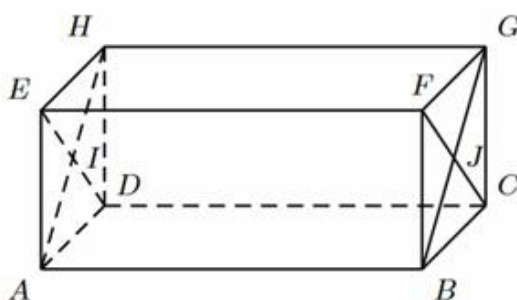
Il y a donc  $1 \times \binom{31}{4} = \frac{31!}{4!(31-4)!} = 8435$  mains possibles.

3. Pour construire une main contenant exactement quatre carreaux, on peut :
  - commencer par choisir quatre carreaux ( $\binom{8}{4}$  possibilités) ;
  - puis choisir la dernière carte parmi les 24 restantes (24 possibilités).

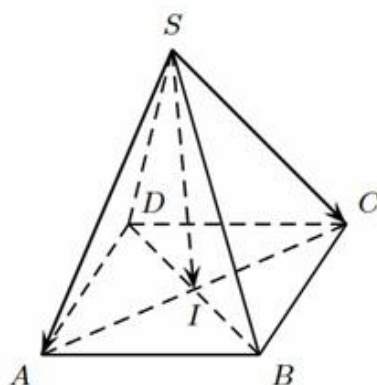
Il y a donc  $24 \times \binom{8}{4} = 1680$  mains possibles.

**Application 55.**  $ABCDEFGH$  est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.  $I$  et  $J$  sont les centres respectifs des faces  $ADHE$  et  $BCGF$ .

1. Les vecteurs  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{EH}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont des représentants du vecteur  $\overrightarrow{FG}$ .
2. L'image du point  $I$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{FJ}$  est le point  $D$ .
3. On a :  $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC}$ .



**Application 56.**  $ABCD S$  est une pyramide de sommet  $S$  dont la base est le parallélogramme  $ABCD$  de centre  $I$ .



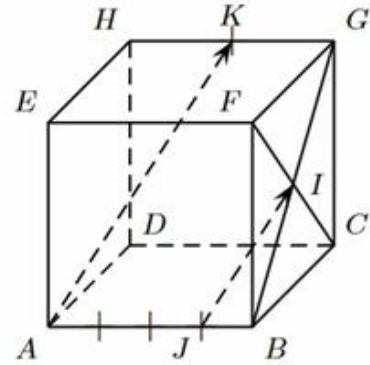
1. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} &= \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} \\ &= 2\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{ID} \text{ car } I \text{ milieu de } [BD] \\ &= 2\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{DD} = 2\overrightarrow{SI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{SI}.\end{aligned}$$

2. On a :

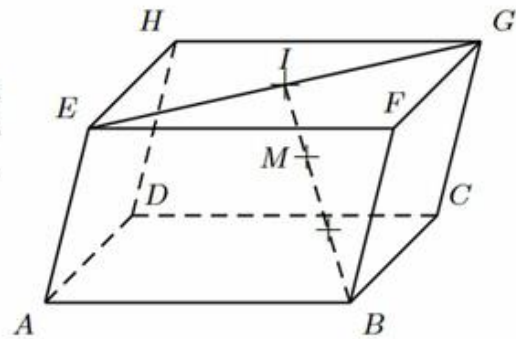
$$\begin{aligned}\overrightarrow{SI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} \text{ d'après la question précédente} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BS} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CD}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BS} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{BA}) \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BS} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BS} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BS}\end{aligned}$$

**Application 57.**  $ABCDEFGH$  est le cube représenté ci-dessous.  $I$  est le centre de la face  $BCGF$ ,  $K$  est le milieu de  $[HG]$  et  $J$  le point tel que  $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ .



- $$\begin{aligned}- \overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ - \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB}) - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$
- D'après la question précédente, on remarque que  $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$ , donc les vecteurs  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{AK}$  sont colinéaires, donc les droites  $(IJ)$  et  $(AK)$  sont parallèles.

**Application 58.**  $ABCDEFGH$  est un parallélépipède.  $I$  est le milieu du segment  $[EG]$ ,  $M$  est le point tel que  $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0}$ .



1. (a) On a  $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IG}$ .  
Or  $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{GI}$  car  $I$  est le milieu du segment  $[EG]$ , donc  $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IG} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{GG} = 2\overrightarrow{MI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MI}$ .
- (b) D'après l'énoncé, on a  $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0}$ , donc  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MG} = \vec{0}$  d'après la question précédente.
2. Il s'agit de montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{DF}$  et  $\overrightarrow{DM}$  sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DF}$ .  
Dans un premier temps, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MG} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DG} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MD} &= -\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DG} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}.\end{aligned}$$

Dans un deuxième temps, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} &= \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FG} \\ &= 3\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} \\ &= 3\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\ &= 3\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FD} = 3\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{DF}.\end{aligned}$$

Il vient donc que  $3\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DF}$ , soit  $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$ .

Finalement, les points  $D$ ,  $M$  et  $F$  sont bien alignés.

**Application 59.** Soient  $M$ ,  $N$  et  $P$  trois points de l'espace non alignés. On note  $I$  et  $J$  les points définis par  $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{NJ} = 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}$ .

1. (a) On a :  $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{PM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ .
- (b) On a :  $\overrightarrow{PJ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PM} - 3\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MN}$ .
2. D'après la question précédente, on obtient :  $\overrightarrow{PJ} = -2\overrightarrow{PI}$ , donc les vecteurs  $\overrightarrow{PI}$  et  $\overrightarrow{PJ}$  sont colinéaires, donc le point  $P$  appartient à la droite  $(IJ)$ .

**Application 60.** On considère un tétraèdre  $ABCD$ . Notons  $M$  le point de l'espace tel que  $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC}$ .

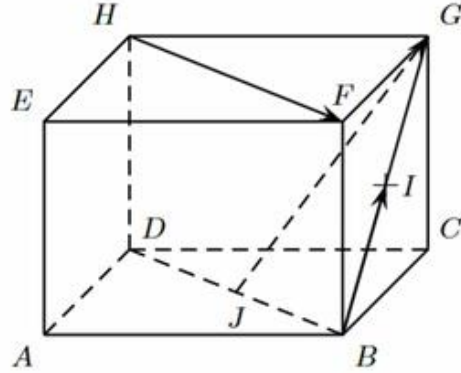
Montrer que le point  $M$  appartient au plan  $(ABC)$ , c'est montrer qu'il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que :  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ .

On a :

$$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC} = -(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC},$$

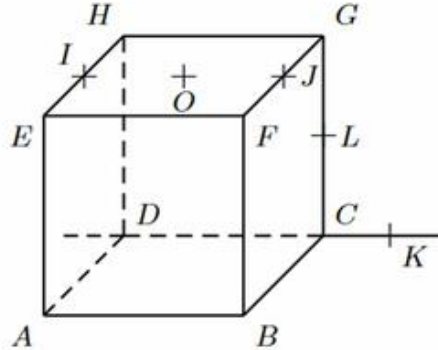
soit  $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ , soit  $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ , soit encore  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .



**Application 61.** On considère un parallélépipède rectangle  $ABCDEFGH$  représenté ci-contre. On note  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des côtés  $[BG]$  et  $[DB]$ .

Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{BI}$ ,  $\overrightarrow{JG}$  et  $\overrightarrow{HF}$  sont coplanaires, c'est montrer qu'il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que :  $\overrightarrow{JG} = x\overrightarrow{BI} + y\overrightarrow{HF}$ .

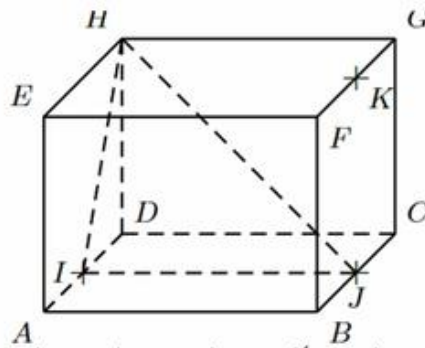
On a :  $\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + 2\overrightarrow{BI}$ .



**Application 62.** On considère un cube  $ABCDEFGH$ . Les points  $I$ ,  $J$  et  $L$  sont les milieux respectifs des arêtes  $[EH]$ ,  $[FG]$  et  $[GC]$ .  $O$  et  $K$  sont deux points tels que  $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$ .

1. On a  $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{2} \times 2\overrightarrow{IO} = 2\overrightarrow{IO}$ , donc les vecteurs  $\overrightarrow{DK}$  et  $\overrightarrow{IO}$  sont colinéaires et donc les droites  $(IO)$  et  $(DK)$  sont parallèles.
2. Les points  $B$ ,  $J$ ,  $E$  et  $F$  ne sont pas coplanaires (par exemple  $E$  n'appartient pas au plan  $(BJF)$ ), donc les droites  $(BJ)$  et  $(EF)$  ne sont pas coplanaires, donc les droites  $(BJ)$  et  $(EF)$  ne sont ni sécantes ni parallèles.
3. Les points  $J$ ,  $L$ ,  $B$  et  $C$  sont coplanaires (ils appartiennent tous à une seule face du cube), donc les droites  $(JL)$  et  $(BC)$  sont coplanaires, elles sont donc parallèles ou sécantes. Il apparaît clairement que les droites  $(JL)$  et  $(BC)$  sont sécantes (si elles étaient parallèles, les points  $L$  et  $G$  seraient confondus, ce qui n'est pas le cas).

**Application 63.**  $ABCDEFGH$  est un parallélépipède rectangle.  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont les milieux respectifs des arêtes  $[AD]$ ,  $[BC]$  et  $[FG]$ . Dans cet exercice, on souhaite démontrer de deux manières que la droite  $(AK)$  est parallèle au plan  $(IJH)$ .

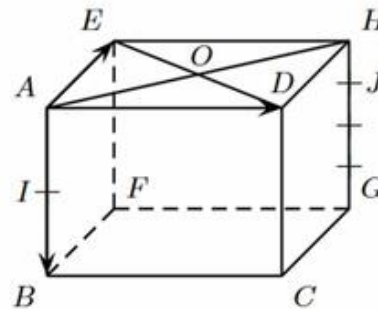


1. (a) On a  $\vec{AK} = \vec{AI} + \vec{IG} + \vec{GK} = \vec{AI} + \vec{IG} + \vec{KA} = \vec{IG}$ .
- (b) On a  $\vec{AK} = \vec{IG} = \vec{IH} + \vec{HG} = \vec{IH} + \vec{IJ}$ , donc les vecteurs  $\vec{AK}$ ,  $\vec{IH}$  et  $\vec{IJ}$  sont coplanaires.  $\vec{AK}$  étant un vecteur directeur de la droite  $(AK)$ , et  $\vec{IJ}$  et  $\vec{IH}$  étant deux vecteurs directeurs du plan  $(IJH)$ , il vient que la droite  $(AK)$  est parallèle au plan  $(IJH)$ .
2. (a) D'après la question 1.(a), les vecteurs  $\vec{AK}$  et  $\vec{IG}$  sont colinéaires, donc les droites  $(AK)$  et  $(IG)$  sont parallèles.
- (b) D'après la question 1.(b), on a  $\vec{IG} = \vec{IH} + \vec{IJ}$ , donc le point  $G$  appartient au plan  $(IJH)$ , et donc la droite  $(IG)$  est contenue dans le plan  $(IJH)$ . Puisque les droites  $(AK)$  et  $(IG)$  sont parallèles, la droite  $(AK)$  est parallèle au plan  $(IJH)$  par définition.

**Application 64.** Soit  $ABCD S$  une pyramide régulière de sommet  $S$  et de base carrée de centre  $O$ .

1. D'une part,  $S$  appartient au plan  $(SBO)$  et  $S$  appartient au plan  $(SAC)$ , donc :  $S \in (SBO) \cap (SAC)$ .  
D'autre part,  $O$  appartient au plan  $(SBO)$  et  $O$  appartient au segment  $[AC]$  puisque  $O$  en est le milieu, donc  $O$  appartient au plan  $(SAC)$ . Il vient par conséquent :  $O \in (SBO) \cap (SAC)$ .  
Les plans  $(SBO)$  et  $(SAC)$  sont sécants, et l'intersection de ces deux plans est une droite contenant les points  $S$  et  $O$ , donc l'intersection recherchée est la droite  $(SO)$ .
2. La droite  $(AB)$  est incluse dans le plan  $(SAB)$  et la droite  $(DC)$  est incluse dans le plan  $(SDC)$ . Puisque les droites  $(AB)$  et  $(DC)$  sont parallèles, l'intersection des plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$  est une droite parallèle aux droites  $(AB)$  et  $(DC)$ .  
Par ailleurs, on a :  $S \in (SAB) \cap (SDC)$ , donc l'intersection des plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$  est la droite parallèle aux droites  $(AB)$  et  $(DC)$  passant par  $S$ .

**Application 65.**  $ABCDEFGH$  est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous. On note  $I$  le milieu de  $[AB]$ ,  $O$  le centre de la face  $ADHE$  et  $J$  le point défini par  $\vec{HJ} = \frac{1}{4}\vec{HG}$ .



1. Les points  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et  $E$  ne sont pas coplanaires (par exemple le point  $E$  n'appartient pas au plan  $(ABD)$ ), donc les vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$  ne sont pas coplanaires, donc le triplet  $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  forme bien une base de l'espace.

2. — Écrivons le vecteur  $\vec{OI}$  en fonction des vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$  :

$$\begin{aligned}\vec{OI} &= \vec{OA} + \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{HA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{HE} + \vec{EA}) + \frac{1}{2}\vec{AB} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{EA}) + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AE}.\end{aligned}$$

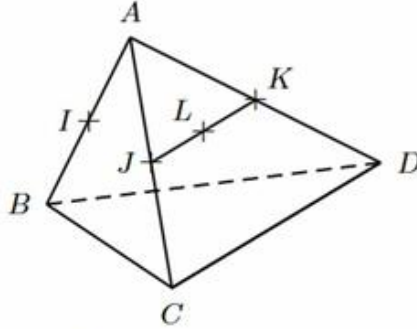
Dans la base  $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ , les coordonnées du vecteur  $\vec{OI}$  sont données par  $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ .

— Écrivons le vecteur  $\vec{BJ}$  en fonction des vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$  :

$$\begin{aligned}\vec{BJ} &= \vec{BC} + \vec{CG} + \vec{GJ} = \vec{AD} + \vec{AE} + \frac{3}{4}\vec{GH} = \vec{AD} + \vec{AE} - \frac{3}{4}\vec{AB} \\ &= -\frac{3}{4}\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}.\end{aligned}$$

Dans la base  $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ , les coordonnées du vecteur  $\vec{BJ}$  sont données par  $\begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Application 66.**  $ABCD$  est un tétraèdre. Les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont les milieux respectifs des arêtes  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[AD]$ . Le point  $L$  est le milieu du segment  $[JK]$ .



1. Les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires (par exemple le point  $D$  n'appartient pas au plan  $(ABC)$ ), donc les vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  et  $\vec{AD}$  ne sont pas coplanaires, donc le triplet  $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$  est une base de l'espace, donc  $(A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$  forme bien un repère de l'espace.

2. — On a  $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB} + 0\vec{AC} + 0\vec{AD}$ , donc les coordonnées de  $I$  sont  $(1/2; 0; 0)$ .

- On a  $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 0\overrightarrow{AD}$ , donc les coordonnées de  $J$  sont  $(0; 1/2; 0)$ .
- On a  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ , donc les coordonnées de  $K$  sont  $(0; 0; 1/2)$ .
- On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL} &= \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KD}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\end{aligned}$$

donc les coordonnées de  $L$  sont  $(0; 1/4; 1/4)$ .

**Application 67.** Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne les points  $E(-1; 3; 2)$ ,  $F(2; -1; 3)$  et  $G(-1; 0; 1)$ .

On cherche les coordonnées du point  $M$  tels que  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{EG}$ .

Notons  $(x; y; z)$  les coordonnées du point  $M$ .

On a  $\overrightarrow{EM} \begin{pmatrix} x - (-1) \\ y - 3 \\ z - 2 \end{pmatrix}$ , soit  $\overrightarrow{EM} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 3 \\ z - 2 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ -1 - 3 \\ 3 - 2 \end{pmatrix}$ , soit  $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  et

$\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} -1 - (-1) \\ 0 - 3 \\ 1 - 2 \end{pmatrix}$ , soit  $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

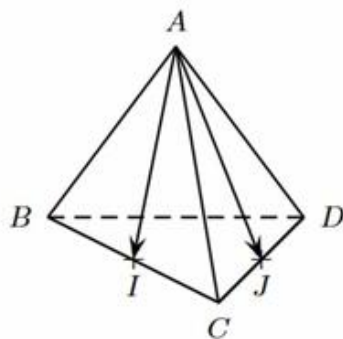
On obtient donc  $(\overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{EG}) \begin{pmatrix} 3 + 2 \times 0 \\ -4 + 2 \times (-3) \\ 1 + 2 \times (-1) \end{pmatrix}$ , soit  $(\overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{EG}) \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Par conséquent :

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{EG} \iff \begin{cases} x + 1 = 3 \\ y - 3 = -10 \\ z - 2 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -7 \\ z = 1 \end{cases},$$

Finalement, les coordonnées du point  $M$  sont  $(2; -7; 1)$ .

**Application 68.** On a représenté ci-contre un tétraèdre régulier  $ABCD$  (chaque face est un triangle équilatéral) d'arête 6.  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs des arêtes  $[BC]$  et  $[CD]$ .



- On a  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 6 \times 6 \times \cos(60^\circ) = 36 \times \frac{1}{2} = 18$ .  
En procédant de façon analogue, on trouve  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 18$  et  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 18$ .
- Le triangle  $ABC$  étant équilatéral, la médiane ( $AI$ ) issue du sommet  $A$  est aussi la médiatrice du segment  $[BC]$ , donc le triangle  $ABI$  est rectangle en  $I$ . D'après le théorème de Pythagore, on obtient  $AB^2 = BI^2 + AI^2$ , soit  $AI^2 = AB^2 - BI^2 = 6^2 - 3^2 = 27$ , donc  $AI = \sqrt{27}$  puisque  $AI \geq 0$ .  
En procédant de façon analogue, on trouve :  $AJ = \sqrt{27}$ .
- On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}}_{=AC^2} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{4}(18 + 18 + 18^2 + 18) = 22,5. \end{aligned}$$

- On a  $\begin{cases} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = 22,5 \\ \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = AI \times AJ \times \cos(\widehat{IAJ}) \end{cases}$ , donc  $AI \times AJ \times \cos(\widehat{IAJ}) = 22,5$ ,  
donc  $\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{22,5}{AI \times AJ} = \frac{22,5}{AI^2} = \frac{22,5}{27}$  car  $AI = AJ = \sqrt{27}$ . A l'aide de la calculatrice, on trouve :  $\widehat{IAJ} \approx 34^\circ$ .

**Application 69.** Pour une meilleure compréhension, il est conseillé de s'aider d'une figure.

$ABCDEFGH$  est un cube d'arête un nombre réel  $a > 0$ .

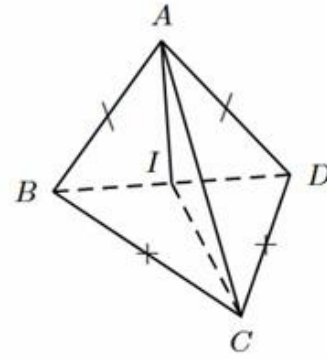
- On a  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BG} = (-\overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG} = -BC \times BG \times \cos(\widehat{CBG}) = -a \times a\sqrt{2} \times \cos(45^\circ) = -a^2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$ .  
— On a  $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BG} = (-\overrightarrow{GC}) \cdot (-\overrightarrow{GB}) = \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GB} = GC \times GB \times \cos(\widehat{CGB}) = a \times a\sqrt{2} \times \cos(45^\circ) = a^2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$ .
- On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG} &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}) \cdot \overrightarrow{BG} \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{BG} \end{aligned}$$

On a vu que  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BG} = -a^2$  et  $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{BG} = a^2$ . De plus :  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$  car  $\widehat{CGB} = 90^\circ$ , donc finalement :  $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$ .

- Puisque  $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$ , on peut affirmer que les droites  $(DF)$  et  $(BG)$  sont orthogonales.

**Application 70.**  $ABCD$  est un tétraèdre tel que le triangle  $ABD$  est isocèle en  $A$  et le triangle  $BCD$  est isocèle en  $C$ .  $I$  est le milieu du segment  $[BD]$ .



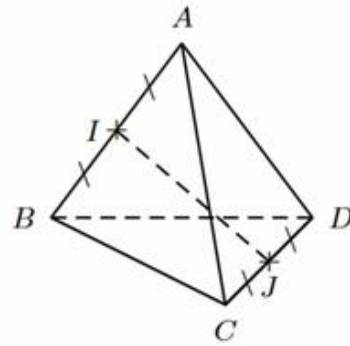
1. Le triangle  $ABD$  est isocèle en  $A$ , donc la médiane  $(AI)$  issue du sommet  $A$  est aussi la médiatrice du segment  $[BD]$ . De même,  $(IC)$  est la médiatrice du segment  $[BD]$ .  
Par conséquent, les droites  $(BD)$  et  $(IA)$  sont orthogonales, et les droites  $(BD)$  et  $(IC)$  sont orthogonales, donc  $(BD)$  est orthogonale à deux droites sécantes incluses dans le plan  $(AIC)$ , donc  $(BD)$  est orthogonale au plan  $(AIC)$ .
2. La droite  $(BD)$  est orthogonale au plan  $(AIC)$ , donc  $(BD)$  est orthogonale à toute droite contenue dans  $(AIC)$  par définition, en particulier à la droite  $(AC)$ .

**Application 71.** Pour une meilleure compréhension, il est conseillé de s'aider d'une figure.

$ABCDEFGH$  est un cube.

1. On a  $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GF} = 0$  (les droites  $(CG)$  et  $(GF)$  sont orthogonales) et  $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GH} = 0$  (les droites  $(CG)$  et  $(GH)$  sont orthogonales), donc  $\overrightarrow{CG}$  est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan  $(FGH)$ , donc  $\overrightarrow{CG}$  est normal au plan  $(FGH)$ .
2. On a  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  (les droites  $(AH)$  et  $(AB)$  sont orthogonales) et  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$  (les droites  $(AH)$  et  $(DE)$  sont orthogonales), donc  $\overrightarrow{AH}$  est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan  $(EDC)$ , donc  $\overrightarrow{AH}$  est normal au plan  $(EDC)$ .

**Application 72.**  $ABCD$  est un tétraèdre régulier d'arête 1.  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[CD]$ .



1. Le triangle  $ICD$  est isocèle en  $I$ , donc la médiane  $(IJ)$  issue du sommet  $I$  est aussi la médiatrice du segment  $[CD]$ . Ainsi, les droites  $(IJ)$  et  $(CD)$  sont orthogonales.

2. La distance du point  $I$  à la droite  $(CD)$  est  $IJ$  car  $J$  est le projeté orthogonal de  $I$  sur la droite  $(CD)$ .

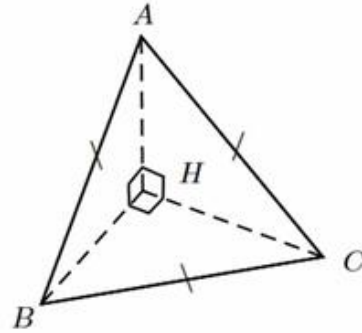
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle  $IJC$  :  $IC^2 = IJ^2 + JC^2$ , soit :  $IJ^2 = IC^2 - JC^2$ .

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle  $IAC$  :  $AC^2 = IC^2 + IA^2$ , soit :  $IC^2 = AC^2 - IA^2$ .

Par conséquent  $IJ^2 = IC^2 - JC^2 = AC^2 - IA^2 - JC^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ,

donc  $IJ = \frac{1}{\sqrt{2}}$  car  $IJ \geq 0$ .

**Application 73.**  $ABCH$  est une tétraèdre tel que  $ABC$  est un triangle équilatéral d'arête un réel  $a > 0$  et les autres faces sont des triangles rectangles en  $H$ .



- On a  $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$  car les droites  $(HB)$  et  $(HC)$  sont orthogonales.
- On a  $(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) = HA^2 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  avec :

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AH}) = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH \times \cos(\widehat{BAH}) = -AB \times AH \times \frac{AH}{AB} \text{ car le triangle } BAH \text{ est rectangle en } H, \text{ donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} = -AH^2$$

$$- \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = -AH \times AC \times \cos(\widehat{HAC}) = -AH \times AC \times \frac{AH}{AC} \text{ car le triangle } CAH \text{ est rectangle en } H, \text{ donc } \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AC} = -AH^2$$

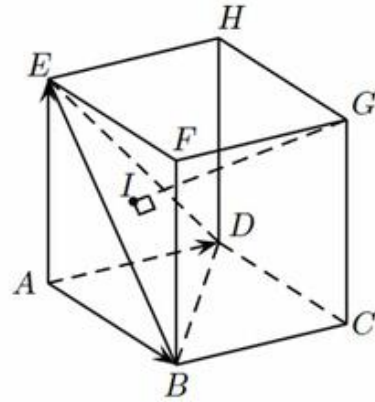
$$\text{Ainsi : } (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) = HA^2 - HA^2 - HA^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} - HA^2.$$

- On obtient des question 1 et 2 :

$$\begin{cases} \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0 \\ (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \frac{a^2}{2} - HA^2 \end{cases}$$

donc  $\frac{a^2}{2} - HA^2 = 0$ , soit  $HA^2 = \frac{a^2}{2}$ , soit  $HA = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$  car  $HA \geq 0$ , soit  $HA = \frac{a}{\sqrt{2}}$  car  $a > 0$ .

**Application 74.** On considère le cube  $ABCDEFGH$  représenté ci-dessous et on se place dans le repère orthonormé  $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ . Soit  $I(x; y; z)$  le projeté orthogonal du point  $G$  sur le plan  $(BDE)$ .



- On a  $B(1; 0; 0)$ ,  $D(0; 1; 0)$ ,  $E(0; 0; 1)$  et  $G(1; 1; 1)$ , donc on obtient  $\vec{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{EB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{BI} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{GI} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$ .
- La droite  $(GI)$  est orthogonale au plan  $(EBD)$ . En particulier, la droite  $(GI)$  est orthogonale aux droites  $(BD)$  et  $(EB)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{GI} \cdot \vec{BD} = 0 \\ \vec{GI} \cdot \vec{EB} = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} -1 \times (x-1) + 1 \times (y-1) + 0 \times (z-1) = 0 \\ 1 \times (x-1) + 0 \times (y-1) - 1 \times (z-1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + 1 + y - 1 = 0 \\ x - 1 - z + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases} \iff x = y = z. \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} \vec{GI} \cdot \vec{BI} = 0 &\iff (x-1)^2 + y(y-1) + z(z-1) = 0 \\ &\iff (x-1)^2 + x(x-1) + x(x-1) = 0 \quad \text{car } x = y = z \\ &\iff (x-1)^2 + 2x(x-1) = 0 \\ &\iff (x-1)(x-1+2x) \\ &\iff (x-1)(3x-1) = 0 \quad (\text{la question s'arrête ici}) \\ &\iff x-1 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x-1 = 0 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Or  $x \neq 1$  car si  $x = 1$ , les points  $I$  et  $G$  sont confondus, ce qui n'est pas le cas puisque le point  $G$  n'appartient pas au plan  $(BDE)$ , donc finalement :

$$\vec{GI} \cdot \vec{BI} = 0 \iff x = \frac{1}{3}.$$

- La distance du point  $G$  au plan  $(BDE)$  est  $GI$  car  $I$  est le projeté orthogonal de  $G$  sur le plan  $(BDE)$ .

D'après la question précédente, on a  $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ , donc on obtient :

$$GI = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{3\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{3} \frac{2}{3}.$$

**Application 75.** Notons  $\Delta$  la droite de l'espace dont une représentation paramétrique est donnée par le système suivant :

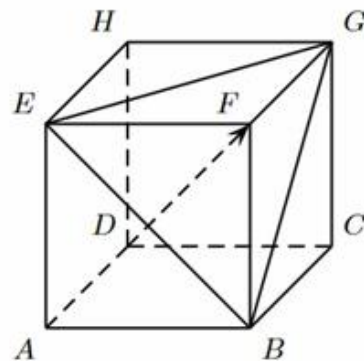
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 8 - 2t \\ z = 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. En choisissant  $t = 0$  dans la représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ , on obtient un point appartenant à la droite  $\Delta$  : le point  $A(1; 8; 0)$ .

Le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite  $\Delta$ .

2. La droite  $\Delta$  n'est pas parallèle à la droite  $\mathcal{D}$  dirigée par le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  car les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires (les coordonnées de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  ne sont pas proportionnelles).

**Application 76.**  $ABCDEFGH$  est un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère ortho-normé  $(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$ .



1. On a  $B(1; 1; 0)$ ,  $D(0; 0; 0)$ ,  $E(1; 0; 1)$ ,  $F(1; 1; 1)$  et  $G(0; 1; 1)$ .

Ainsi  $\vec{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{EG} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{BG} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , donc on obtient :  $\vec{DF} \cdot \vec{EG} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 0$  et  $\vec{DF} \cdot \vec{BG} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0$ .

2. (a) D'après la question précédente, le vecteur  $\vec{DF}$  est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan  $(EBG)$  (les vecteurs  $\vec{EG}$  et  $\vec{BG}$ ), donc  $\vec{DF}$  est normal au plan  $(EBG)$ .

(b) Le vecteur  $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $(EBG)$ , donc une équation cartésienne de  $(EBG)$  est de la forme :  $x + y + z + d = 0$ , où  $d$  est un réel.

De plus, le point  $E(1; 0; 1)$  appartient au plan  $(EBG)$ , donc  $1 + 0 + 1 + d = 0$ , c'est-à-dire  $d = -2$ .

Finalement, une équation cartésienne de  $(EBG)$  est :

$$x + y + z - 2 = 0.$$

**Application 77.** Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points  $A(1; -2; 4)$ ,  $B(-2; -6; 5)$  et  $C(-4; 0; -3)$ .

1. On a :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ .

Les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires, donc les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés. Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  forment donc le plan  $(ABC)$ .

2. (a) Soit un vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois réels.

$$\begin{aligned} \vec{n} \text{ normal à } (ABC) &\iff \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3a - 4b + c = 0 \\ -5a + 2b - 7c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = 3a + 4b \\ -5a + 2b - 7(3a + 4b) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = 3a + 4b \\ -26a - 26b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 3a + 4b \\ a + b = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = 3a + 4b \\ a = -b \end{cases} \iff \begin{cases} c = 3(-b) + 4b \\ a = -b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = b \\ a = -b \end{cases} \end{aligned}$$

En choisissant arbitrairement  $b = 1$ , on obtient  $a = -1$ ,  $b = 1$  et  $c = 1$ ,

et donc  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $(ABC)$ .

(b) Puisque  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $(ABC)$ , une équation cartésienne de  $(ABC)$  est de la forme :  $-x + y + z + d = 0$ , où  $d$  est un réel.

De plus, le point  $A(1; -2; 4)$  appartient au plan  $(ABC)$ , donc :  $-1 + (-2) + 4 + d = 0$ , c'est-à-dire :  $d = -1$ .

Finalement, une équation cartésienne de  $(ABC)$  est :

$$-x + y + z - 1 = 0.$$

**Application 78.** Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1; -1; 2)$  et  $B(-1; 3; 4)$ , et on note  $\Delta$  la droite de représentation paramétrique :

$$(S) \begin{cases} x = -t \\ y = 5 - 2t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le vecteur  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite  $(AB)$  et le point  $A(1; -1; 2)$  appartient à la droite  $(AB)$ , donc une représentation paramétrique de  $(AB)$  est :

$$(S') \begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = -1 + 4t' \\ z = 2 + 2t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$$

— Le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite  $\Delta$ .

Les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\vec{u}$  ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\vec{u}$  ne sont pas colinéaires, donc les droites  $(AB)$  et  $\Delta$  ne sont pas parallèles.

— Soit  $I$  un point quelconque de coordonnées  $(x; y; z)$ .

$$I \in \Delta \cap (AB) \iff (x; y; z) \text{ vérifie les systèmes } (S) \text{ et } (S')$$

$$\iff \text{il existe } (t; t') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = -t \\ y = 5 - 2t \\ z = 5 - t \\ x = 1 - 2t' \\ y = -1 + 4t' \\ z = 2 + 2t' \end{cases}$$

$$\iff \text{il existe } (t; t') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} -t = 1 - 2t' \\ 5 - 2t = -1 + 4t' \\ 5 - t = 2 + 2t' \end{cases}$$

$$\iff \text{il existe } (t; t') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} t = 2t' - 1 & (1) \\ 2t = 6 - 4t' & (2) \\ t = 3 - 2t' & (3) \end{cases}$$

On résout ce dernier système d'inconnu  $(t; t') \in \mathbb{R}^2$  par méthode de substitution.

$$(2) \quad 2t = 6 - 4t' \stackrel{(1)}{\iff} 2(2t' - 1) = 6 - 4t' \iff t' = 1$$

$$(1) \quad t = 2t' - 1 \stackrel{(2)}{=} t = 2 - 1 = 1$$

$$(3) \quad 1 = 3 - 2 \times 1, \text{ donc le couple } (1; 1) \text{ est bien solution de l'équation (3).}$$

On obtient donc l'équivalence suivante :

$$I \text{ appartient à } \Delta \text{ et } (AB) \iff \text{il existe } (t; t') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} t = 1 \\ t' = 1 \end{cases}$$

Cette dernière proposition étant vraie, il vient que le point  $I$  appartient aux droites  $\Delta$  et  $(AB)$ . Les droites  $\Delta$  et  $(AB)$  n'étant pas parallèles, on déduit qu'elles sont sécantes en  $I$ .

Pour obtenir les coordonnées  $(x; y; z)$  du point  $I$ , on remplace  $t$  par 1 dans le système  $(S)$  (ou  $t'$  par 1 dans le système  $(S')$ ). On obtient  $I(-1; 3; 4)$ .

**Application 79.** On munit l'espace d'un repère orthonormé. On étudie la position relative du plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $(E) \quad 5x + y - z + 3 = 0$  et de la droite  $\mathcal{D}$  dont une représentation paramétrique est donnée par le système :

$$(S) \quad \begin{cases} x = s \\ y = 1 - 6s \\ z = 3 - s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

— Le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $\mathcal{P}$  et le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}$ .

On a  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 5 \times 1 + 1 \times (-6) + (-1) \times (-1) = 0$ , donc le plan  $\mathcal{P}$  est parallèle à la droite  $\mathcal{D}$ .

— Soit  $I$  un point quelconque de coordonnées  $(x; y; z)$ .

$$I \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \iff (x; y; z) \text{ vérifie } (S) \text{ et } (E)$$

$$\iff \text{il existe } s \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = s \\ y = 1 - 6s \\ z = 3 - s \\ 5x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \text{il existe } s \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = s \\ y = 1 - 6s \\ z = 3 - s \\ 5s + (1 - 6s) - (3 - s) + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } s \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = s \\ y = 1 - 6s \\ z = 3 - s \\ 1 = 0 \end{cases}.$$

La dernière proposition étant fautive, la première l'est aussi, donc il n'existe pas de point appartenant à  $\mathcal{D}$  et à  $\mathcal{P}$ .

Finalement, la droite  $\mathcal{D}$  est strictement parallèle au plan  $\mathcal{P}$ .

**Application 80.** L'espace est muni d'un repère orthonormé. On note  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  les plans dont une équation cartésienne est respectivement :

$$(E_1) \ x + y - 3z + 3 = 0 \quad \text{et} \quad (E_2) \ x - 2y + 6z = 0.$$

1. Considérons la droite  $d$  de représentation paramétrique :

$$(S) \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

— Montrons que la droite  $d$  est incluse dans les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .  
Soit un point  $I$  de coordonnées  $(x; y; z)$  appartenant à la droite  $d$ . Alors il existe un réel  $t$  tel que les coordonnées de  $I$  sont  $(-2; -1 + 3t; t)$ . On remarque alors que les coordonnées de  $I$  vérifient les équations  $(E_1)$  et  $(E_2)$  puisque :  $-2 + (-1 + 3t) - 3t + 3 = 0$  et  $-2 - 2(-1 + 3t) + 6t = 0$ , donc  $I$  appartient aux plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .

Finalement, nous avons montré que  $d \subset \mathcal{P}_1$  et  $d \subset \mathcal{P}_2$ .

— Le vecteur  $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $\mathcal{P}_1$  et le vecteur  $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $\mathcal{P}_2$ .

Puisque les coordonnées de  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  ne sont pas proportionnelles, ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants selon une unique droite : la droite  $d$  d'après le premier tiret.

Finalement, les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants selon la droite  $d$ .

2. Notons  $\mathcal{P}$  le plan d'équation cartésienne  $(E) \ 2x - y + 2z + 2 = 0$ .

— Le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $\mathcal{P}$  et le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite  $d$ .

On a  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \times 2 + 3 \times (-1) + 1 \times 2 = -1 \neq 0$ , donc la droite  $d$  est sécante avec le plan  $\mathcal{P}$ .

— Notons  $(x; y; z)$  les coordonnées du point d'intersection  $I$  de la droite  $d$  avec le plan  $\mathcal{P}$ . Alors  $(x; y; z)$  vérifie  $(S)$  et  $(E)$ . Il existe donc  $t \in \mathbb{R}$  tel

$$\text{que : } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel que : } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \\ -4 - (-1 + 3t) + 2t + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{i.e. tel que : } \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \\ z = -1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Finalement  $d$  et  $\mathcal{P}$  sont sécants en le point  $I(-2; -4; -1)$ .

**Application 81.** Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point  $B(2; 0; 7)$  et on note  $d$  la droite qui passe par le point  $A(1; 3; 0)$  et dont  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur.

- La droite  $d$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}$ , donc le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  est normal à  $\mathcal{P}$ , donc une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  est de la forme :  $-2x + y + 5z + d = 0$ , où  $d \in \mathbb{R}$ .  
De plus, le point  $B(2; 0; 7)$  appartient au plan  $\mathcal{P}$ , donc  $(-2) \times 2 + 0 + 5 \times 7 + d = 0$ , c'est-à-dire  $d = -31$ .  
Finalement, une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  est :

$$-2x + y + 5z - 31 = 0 \quad (E)$$

- On donne ci-dessous une représentation paramétrique de la droite  $d$  :

$$(S) \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notons  $(x; y; z)$  les coordonnées du point  $K$ , projeté orthogonal de  $B$  sur  $d$ . Le point  $K$  appartient à la droite  $d$  et au plan  $\mathcal{P}$ , donc  $(x; y; z)$  vérifie

$$(S) \text{ et } (E). \text{ Il existe donc } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5t \\ -2x + y + 5z - 31 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel}$$

$$\text{que : } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5t \\ -2(1 - 2t) + 3 + t + 5(5t) - 31 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel que : } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5t \\ t = 1 \end{cases},$$

$$\text{i.e. tel que : } \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 5 \\ t = 1 \end{cases} .$$

Finalement, les coordonnées du point  $K$  sont  $(-1; 4; 5)$ .

**Application 82.** On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $4x + y + z - 3 = 0$  et le point  $A(3; 2; 0)$ .

L'objectif de cet exercice est de déterminer les coordonnées du projeté orthogonal  $K$  du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

1. La droite  $\Delta$  étant orthogonale à  $\mathcal{P}$ , le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite  $\Delta$  puisque  $\vec{n}$  est normal à  $\mathcal{P}$ .
2. D'après la question 1 et sachant que  $A(3; 2; 0)$  appartient à la droite  $\Delta$ , une représentation paramétrique de  $\Delta$  est :

$$(S) \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Notons  $L$  le point d'intersection de  $\Delta$  et  $\mathcal{P}$ . Notons  $(x; y; z)$  les coordonnées du point  $L$ , et  $(E)$  l'équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  donnée dans l'énoncé. Le point  $L$  appartient à la droite  $\Delta$  et au plan  $\mathcal{P}$ , donc  $(x; y; z)$  vérifie  $(S)$

$$\text{et } (E). \text{ Il existe donc } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = t \\ 4x + y + z - 3 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel que :}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = t \\ 4(3 + 4t) + 2 + t + t - 3 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel que : } \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = t \\ t = -\frac{11}{18} \end{cases}, \text{ i.e. tel que :}$$

$$\begin{cases} x = 5/3 \\ y = 25/18 \\ z = -11/18 \\ t = -11/18 \end{cases} .$$

Finalement, les coordonnées du point  $L$  sont  $\left(\frac{5}{3}; \frac{25}{18}; -\frac{11}{18}\right)$ .

4. Le point  $L$  est le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ , donc d'après la question précédente :  $K \left(\frac{5}{3}; \frac{25}{18}; -\frac{11}{18}\right)$ .

**Application 83.** Un Rubik's cube est constitué de 27 petits cubes sur lesquels sont collées des étiquettes de couleur. On détache les petits cubes, indiscernables au toucher, et on les place dans une urne. On en tire un au hasard.

Notons  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de faces colorées sur le petit cube tiré.

Dans la suite,  $\Omega$  désigne l'ensemble des 27 cubes, c'est-à-dire l'univers associé à l'expérience aléatoire décrite ci-dessus.

- La variable aléatoire  $X$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{0; 1; 2; 3\}$ .  
Dans le Rubik's cube, on dénombre 1 cube sans couleur, 6 cubes ayant 1 face colorée, 12 cubes ayant 2 faces colorées et 8 cubes ayant 3 faces colorées.  
La loi de probabilité étant équirépartie sur  $\Omega$ , on déduit la loi de probabilité de  $X$  dans le tableau ci-dessous.

$k$	0	1	2	3
$P(X = k)$	$1/27$	$6/27$	$12/27$	$8/27$

$$2. E(X) = \sum_{k=0}^3 kP(X = k) = 1 \times \frac{6}{27} + 2 \times \frac{12}{27} + 3 \times \frac{8}{27} = \frac{54}{27} = 2$$

Si l'on effectue un très grand nombre de tirages avec remise d'un cube dans l'urne, la valeur moyenne des nombres de faces colorées obtenues est égale à 2.

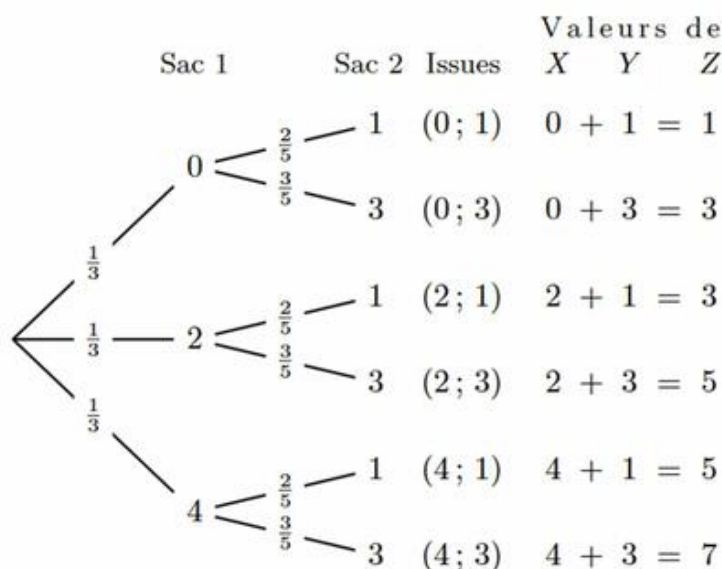
$$3. V(X) = \sum_{k=0}^3 (k - E(X))^2 P(X = k) = (-2)^2 \times \frac{1}{27} + (-1)^2 \times \frac{6}{27} + 0^2 \times \frac{12}{27} + 1^2 \times \frac{8}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

**Application 84.** On dispose de deux sacs opaques. L'un contient trois papiers portant les numéros 0, 2 et 4, l'autre contient 5 papiers : deux portant le numéro 1 et trois portant le numéro 3.

On tire un papier de chaque sac et on additionne les numéros obtenus. Les papiers sont indiscernables au toucher.

On note  $Z$  la variable aléatoire donnant le résultat.

- Notons  $X$  la variable aléatoire donnant le numéro du papier du premier sac et  $Y$  la variable aléatoire donnant le numéro du papier du deuxième sac. Les valeurs prises par  $X$  sont donc 0, 2 et 4, et les valeurs prises par  $Y$  sont 1 et 3.  
La variable aléatoire  $Z$  donnant la somme des deux numéros obtenus est donc donnée par :  $Z = X + Y$ .
- On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



Les valeurs prises par la variable aléatoire  $Z$  sont donc 1, 3, 5 et 7.  
En notant  $\Omega = \{0; 2; 4\}$  et  $\Omega' = \{1; 3\}$ , la variable aléatoire  $Z$  est la fonction définie pour tout  $\omega \in \Omega \times \Omega'$  par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = (0; 1) \\ 3 & \text{si } \omega \in \{(0; 3); (2; 1)\} \\ 5 & \text{si } \omega \in \{(2; 3); (4; 1)\} \\ 7 & \text{si } \omega = (4; 3) \end{cases}$$

Notons que la loi de probabilité sur  $\Omega \times \Omega'$  n'est pas équirépartie.  
Déterminons par exemple  $P(Z = 3)$ . On a :

$$\{Z = 3\} = (\{X = 0\} \cap \{Y = 3\}) \cup (\{X = 2\} \cap \{Y = 1\}).$$

Les événements  $\{X = 0\} \cap \{Y = 3\}$  et  $\{X = 2\} \cap \{Y = 1\}$  étant incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} P(Z = 3) &= P(\{X = 0\} \cap \{Y = 3\}) + P(\{X = 2\} \cap \{Y = 1\}) \\ &= P(X = 0) \times P_{\{X=0\}}(Y = 3) + P(X = 2) \times P_{\{X=2\}}(Y = 1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On calcule de même les probabilités  $P(Z = 1)$ ,  $P(Z = 5)$  et  $P(Z = 7)$ . On obtient ainsi la loi de probabilité de  $Z$  dans le tableau ci-dessous.

$z$	1	3	5	7
$P(Z = z)$	2/15	1/3	1/3	1/5

**Application 85<sup>9</sup>.** On joue à un jeu se déroulant en deux étapes.

- Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 9 points. Sinon, on perd 6 points.
- Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face, on gagne 6 points. Sinon, on perd 2 points.

Notons  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus.

1. Notons  $X_1$  la variable aléatoire donnant le nombre algébrique de points à l'issue de la phase 1 et  $X_2$  la variable aléatoire donnant le nombre algébrique de points à l'issue de la phase 2. Les valeurs prises par  $X_1$  sont donc 9 et  $-6$ , et les valeurs prises par  $X_2$  sont 6 et  $-2$ .

La variable aléatoire  $X$  donnant le nombre total de points obtenus est donc donnée par :  $X = X_1 + X_2$ .

2. On donne ci-dessous la loi de probabilité de  $X_1$  et  $X_2$ .

$k$	9	-6
$P(X_1 = k)$	2/6	4/6

$k$	6	-2
$P(X_2 = k)$	1/2	1/2

3. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

où  $E(X_1) = 9 \times \frac{2}{6} + (-6) \times \frac{4}{6} = -1$  et  $E(X_2) = 6 \times \frac{1}{2} + (-2) \times \frac{1}{2} = 2$ , donc on obtient :  $E(X) = -1 + 2 = 1$ .

**Application 86.** Les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  étant logiquement indépendantes (l'issue de la phase 2 n'est pas influencée par l'issue de la phase 1), on a :

$$V(X) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$$

avec  $V(X_1) = \frac{2}{6}(9 - E(X_1))^2 + \frac{4}{6}(-6 - E(X_1))^2 = \frac{1}{3} \times 10^2 + \frac{2}{3} \times (-5)^2 = \frac{150}{3} = 50$   
 et  $V(X_2) = \frac{1}{2}(6 - E(X_2))^2 + \frac{1}{2}(-2 - E(X_2))^2 = \frac{1}{2} \times 4^2 + \frac{1}{2} \times (-4)^2 = 16$ , donc on obtient :  $V(X) = 50 + 16 = 66$ .

**Application 87.** On considère dix variables aléatoires  $X_1, \dots, X_{10}$  définies sur un même univers  $\Omega$ . On suppose que ces variables aléatoires sont i.i.d. On donne ci-dessous la loi de probabilité de  $X_7$ .

$x$	-5	0	1	3
$P(X_7 = x)$	0,4	0,3	0,2	0,1

9. Afin de simplifier la correction de cette application, on s'intéresse uniquement aux ensembles des valeurs prises par  $X_1, X_2$  et  $X$  et on ignore leur domaine de définition (le produit cartésien  $\Omega \times \Omega'$  avec  $\Omega = \{1; \dots; 6\}$  et  $\Omega' = \{\text{pile; face}\}$ ). Pour une correction définissant proprement  $X_1, X_2$  et  $X$  sur  $\Omega \times \Omega'$ , on pourra se référer à la correction de l'application 84.

On note  $S$  la variable aléatoire définie par  $S = \sum_{i=1}^{10} X_i$  et on note  $M$  la variable aléatoire définie par  $M = \frac{1}{10}S$ .

Notons que :

- $E(X_7) = -5 \times 0,4 + 0 \times 0,3 + 1 \times 0,2 + 3 \times 0,1 = -1,5$ ;
  - $V(X_7) = 0,4(-5 - E(X_7))^2 + 0,3(0 - E(X_7))^2 + 0,2(1 - E(X_7))^2 + 0,1(3 - E(X_7))^2 = 8,85$ .
1. Par propriété :  $E(S) = 10E(X_7) = -15$  et  $V(S) = 10V(X_7) = 88,5$ .
  2. Par propriété :  $E(M) = E(X_7) = -1,5$  et  $V(M) = \frac{1}{10}V(X_7) = 0,885$ .
  3. On déduit :  $\sigma(M) = \sqrt{V(M)} = \sqrt{0,885} \approx 0,9407$ .

**Application 88.** On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on appelle  $S$  l'événement : « Obtenir un Coeur ».

Notons  $X$  la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'événement  $S$  est réalisé et la valeur 0 sinon.

1. Tirer une carte dans un jeu de 32 cartes est une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = 0,25$  en considérant que le succès est l'obtention d'un Coeur. La variable aléatoire  $X$  prend donc la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec dans l'épreuve de Bernoulli, donc  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p = 0,25$ .
2.  $E(X) = p = 0,25$  et  $V(X) = p(1 - p) = 0,25 \times 0,75 = 0,1875$ .

**Application 89.** On lance quatre fois de suite un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

On note  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre de 6 obtenus.

1. — Lancer un dé est une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = 1/6$  en considérant que le succès est l'obtention du 6.
  - Lancer quatre fois de suite un dé constitue quatre répétitions identiques et indépendantes de l'épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = 1/6$  précisé ci-dessus, donc constitue un schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 4$  et  $p = 1/6$ .
  - La variable aléatoire  $X$  compte le nombre de 6 obtenus à l'issue des quatre lancers, c'est-à-dire que  $X$  compte le nombre de succès dans le schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 4$  et  $p = 1/6$  précisé ci-dessus, donc :  $X \sim \mathcal{B}\left(4; \frac{1}{6}\right)$ .
2. On a  $P(X = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^1 = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \frac{5}{6} \approx 0,015$  (à l'aide de la calculatrice, arrondi à  $10^{-3}$  près).  
La probabilité d'obtenir à trois reprises le 6 à l'issue des quatre lancers est d'environ 0,015.

3. On a  $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0,868$  (à l'aide de la calculatrice, arrondi à  $10^{-3}$  près).  
La probabilité d'obtenir au plus un 6 à l'issue des quatre lancers est d'environ 0,868.

**Application 90.** On reprend la variable aléatoire  $X$  de l'application 2.

On rappelle que :  $X \sim \mathcal{B}\left(4; \frac{1}{6}\right)$ .

1.  $E(X) = np = 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \approx 0,67$

Ce résultat signifie que si l'on répète un très grand nombre de fois l'expérience des quatre lancers de dé, on obtiendra en moyenne 0,67 fois la face 6 par lot de quatre lancers.

2.  $V(X) = 4 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{9}$

**Application 91.** Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le temps d'attente (en minutes entières) de l'ascenseur.

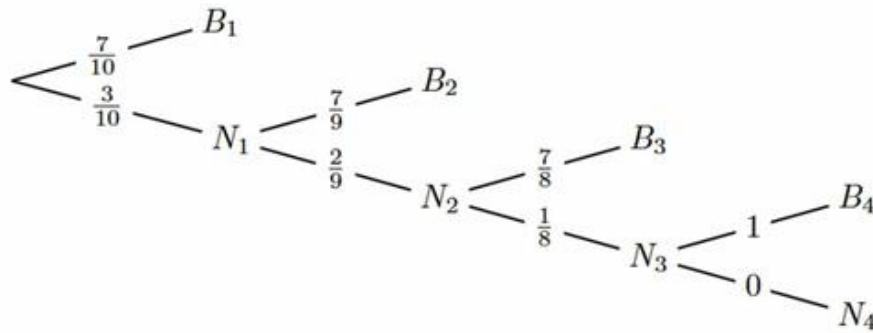
Cette variable aléatoire étant positive, on peut appliquer l'inégalité de Markov :

$$P(X \geq 5) \leq \frac{E(X)}{5} = \frac{2}{5}.$$

**Application 92.** Une urne contient trois boules noires et sept boules blanches. On tire des boules successivement et sans remise jusqu'à l'obtention de la première boule blanche.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la première boule blanche.

1. La variable aléatoire  $X$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{1; 2; 3; 4\}$ .  
Pour tout  $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ , notons :
- $B_k$  l'événement : « obtenir une boule blanche au  $k$ -ième tirage » ;
  - $N_k$  l'événement : « obtenir une boule noire au  $k$ -ième tirage ».



$$P(X = 1) = P(B_1) = \frac{7}{10}$$

$$P(X = 2) = P(N_1 \cap B_2) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$$

$$P(X = 3) = P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{120}$$

$$P(X = 4) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap B_4) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \times 1 = \frac{1}{120}$$

$$2. E(X) = \sum_{k=1}^4 kP(X = k) = \frac{7}{10} + 2 \times \frac{7}{30} + 3 \times \frac{7}{120} + 4 \times \frac{1}{120} = \frac{11}{8} = 1,375$$

$$V(X) = \sum_{k=1}^4 (k - E(X))^2 P(X = k) = \frac{7}{10} \left(1 - \frac{11}{8}\right)^2 + \frac{7}{30} \left(2 - \frac{11}{8}\right)^2 + \frac{7}{120} \left(3 - \frac{11}{8}\right)^2 + \frac{1}{120} \left(4 - \frac{11}{8}\right)^2 = \frac{77}{192}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|X - E(X)| < 1,625) \geq 1 - \frac{V(X)}{1,625^2} \geq 0,85.$$

4. (a) On a :

$$\begin{aligned} \{|X - E(X)| < 1,625\} &= \{-1,625 < X - E(X) < 1,625\} \\ &= \{E(X) - 1,625 < X < 1,625 + E(X)\} \\ &= \{-0,25 < X < 3\} \\ &= \{1 \leq X < 3\} \text{ car } X \in \{1; \dots; 4\}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } P(|X - E(X)| < 1,625) = P(1 \leq X < 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{7}{10} + \frac{7}{30} \approx 0,93.$$

(b) La minoration obtenue à la question 3 n'est pas très précise. En règle générale, la majoration ou minoration fournie par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est grossière.

**Application 93.** Une urne contient huit boules indiscernables au toucher : 4 sont rouges, 3 sont vertes et une est bleue. On tire au hasard une boule de cette urne et on note sa couleur. Si la boule tirée est bleue, on gagne 10 points, si elle est verte, 2 points et on perd un point si la boule est rouge.

Notons  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de points obtenus.

1. (a) On donne la loi de probabilité de  $X$  dans le tableau ci-dessous.

$x$	10	2	-1
$P(X = x)$	1/8	3/8	1/2

$$(b) E(X) = 10 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + (-1) \times \frac{1}{2} = 1,5$$

$$V(X) = \frac{1}{8}(10 - 1,5)^2 + \frac{3}{8}(2 - 1,5)^2 + \frac{1}{2}(-1 - 1,5)^2 = 12,25$$

2. On réalise  $n$  tirages avec remise, où  $n \geq 2$ . Pour tout  $i \in \{1; \dots; n\}$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire donnant le nombre de points au  $i$ -ième tirage. On note  $M_n$  la variable aléatoire donnant le nombre moyen de points obtenus lors des  $n$  tirages.

(a) D'après l'inégalité de concentration, on a :

$$P(|M_n - 1,5| < 0,1) \geq 1 - \frac{V(X)}{n \times 0,1^2} = 1 - \frac{1225}{n}.$$

(b) On dispose de la double inégalité suivante :

$$1 - \frac{1225}{n} \leq P(|M_n - 1,5| < 0,1) \leq 1.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1225}{n}\right) = 0$ , il vient d'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - 1,5| < 0,1) = 1$ .

Cette dernière égalité peut également s'écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - 1,5| \geq 0,1) = 0.$$

Cette égalité est la loi faible des grands nombres. Elle indique que la probabilité que l'écart entre  $M_n$  et 1,5 soit supérieur à 0,1 est très proche de 0 dès lors que le nombre  $n$  de tirages (avec remise) est grand.

3. Il s'agit de résoudre l'inéquation  $1 - \frac{1225}{n} \geq 0,9$  d'inconnue  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$1 - \frac{1225}{n} \geq 0,9 \iff \frac{1225}{n} \leq 0,1 \iff 0,1n \geq 1225 \iff n \geq 12250.$$

Ainsi, pour tout entier  $n \geq 12250$ ,  $P(|M_n - 1,5| < 0,1) \geq 0,9$ .

## Correction des exercices

**Exercice 1.1.** Un loueur de voitures dispose au 1<sup>er</sup> mars 2022 d'un total de 10000 voitures pour l'Europe. Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1<sup>er</sup> mars de chaque année, 25% de son parc automobile et d'acheter 3000 voitures neuves. On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite  $(u_n)$  où, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1<sup>er</sup> mars de l'année 2022 +  $n$ .

On a donc  $u_0 = 10000$ .

1. Pour tout entier naturel  $n$ , le nombre  $u_{n+1}$  de voitures au 1<sup>er</sup> mars de l'année 2022 +  $(n + 1)$  est obtenue en retirant 25% du nombre  $u_n$  de voitures au 1<sup>er</sup> mars de l'année 2022 +  $n$  (c'est-à-dire en multipliant  $u_n$  par 0,75), puis en ajoutant 3000 voitures, soit :

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 3000.$$

2. On note  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$v_n = u_n - 12000.$$

- (a) Il s'agit de montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = 0,75v_n$ .  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 12000 \\ &= 0,75u_n + 3000 - 12000 \\ &= 0,75u_n - 9000 \\ &= 0,75(v_n + 12000) - 9000 \quad \text{car } u_n = v_n + 12000 \\ &= 0,75v_n + 0,75 \times 12000 - 9000 \\ &= 0,75v_n + 9000 - 9000 \\ &= 0,75v_n.\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,75$ . Son premier terme est :  $v_0 = u_0 - 12000 = 10000 - 12000 = -2000$ .

- (b) En vertu de la question précédente, on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_n = v_0 \times q^n = -2000 \times 0,75^n.$$

On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$  car  $-1 < 0,75 < 1$ , donc par produit de limites :  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2000 \times 0,75^n) = 0$ , soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

- (c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , puisque  $u_n = 12000 + v_n$ , il vient d'après la question précédente :

$$u_n = 12000 + v_n = 12000 - 2000 \times 0,75^n.$$

- (d) Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 12000 + v_n$ , il vient par unicité de la limite de  $(u_n)$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (12000 + v_n)$ , soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12000 + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  par somme de limites, soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12000$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  d'après la question 2.(b).

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, le parc automobile de ce loueur comptera 12000 voitures.

3. Il s'agit de montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0,75u_n + 3000 - u_n \\ &= 3000 - 0,25u_n \\ &= 3000 - 0,25(12000 - 2000 \times 0,75^n) \\ &= 0,25 \times 2000 \times 0,75 \\ &= 500 \times 0,75^n > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite  $(u_n)$  est (strictement) croissante.

4. (a) Le programme ci-dessous affiche l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11950 voitures.

```

1 U = 10000
2 N = 0
3 while U < 11950:
4     N = N + 1
5     U = 0.75*U + 3000
6 print(N)

```

- (b) Le programme affiche 13, donc le parc automobile comptera au moins 11950 voitures à partir du 1<sup>er</sup> mars de 2035.

**Exercice 1.2.** On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$ ,  $u_1 = 6$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$ .

### Partie A. Conjectures

1. La fonction Python ci-dessous nommée `u` prend en argument un entier naturel  $n$  et renvoie la valeur de  $u_n$ .

```

1 def u(n):
2     if n == 0:
3         return 3
4     elif n == 1:
5         return 6
6     else:
7         a = 3 #valeur de u_0
8         b = 6 #valeur de u_1
9         for i in range(2, n+1):
10            u = (5/4)*b - (1/4)*a #valeur de u_n
11            a = b
12            b = u
13     return(u)

```

2. On fait appel à la fonction  $u$  pour quelques valeurs de la variable  $n$ . On présente les résultats dans le tableau ci-dessous, tronqués au millièm.

$n$	4	5	6	...	21	22	23
$u_n$	6,984	6,996	6,999	...	6,999	6,999	6,999

On peut conjecturer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$ .

### Partie B. Étude de la suite

On note  $(v_n)$  et  $(w_n)$  les suites définies pour tout entier naturel  $n$  par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

1. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_{n+1} \\
 &= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = v_n.
 \end{aligned}$$

La suite  $(v_n)$  est donc constante. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a en particulier :

$$v_n = v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = 6 - \frac{3}{4} = \frac{21}{4}.$$

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + v_n = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$ .

2. (a) Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $u_n < u_{n+1} < 15$  ».

— Initialisation. On a  $u_0 = 3$  et  $u_1 = 6$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

- Hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire tel que  $u_n < u_{n+1} < 15$ . Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire :  $u_{n+1} < u_{n+2} < 15$ .

Par hypothèse de récurrence, on a :  $u_n < u_{n+1} < 15$ , donc :  $\frac{1}{4}u_n < \frac{1}{4}u_{n+1} < \frac{15}{4}$ , donc :  $\frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} < \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{21}{4} < \frac{15}{4} + \frac{21}{4}$ , soit :  $u_{n+1} < u_{n+2} < 9 < 15$ .

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

- (b) D'après la question précédente, la suite  $(u_n)$  est strictement croissante et majorée par 15. En vertu du théorème de convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.

Puisque  $(u_n)$  est strictement croissante, on a pour tout  $n \in \mathbb{N} : u_n \geq u_0 = 3$ . Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on obtient :

$$3 \leq u_n < u_{n+1} < 15.$$

La suite  $(u_n)$  est minorée par 3, majorée par 15 et converge vers  $\ell$ , donc par propriété, on peut affirmer :  $3 \leq \ell \leq 15$ .

3. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 7 = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7 = \frac{1}{4}u_n - \frac{7}{4} \\ &= \frac{1}{4}(u_n + 7) - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}u_n + \frac{7}{4} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}u_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison  $q = \frac{1}{4}$  et de premier terme  $w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$ .

- (b) En vertu de la question précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$w_n = w_0 \times q^n = -4 \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on obtient :

$$u_n = 7 + w_n = 7 - 4 \left(\frac{1}{4}\right)^n = 7 - \frac{4}{4^n} = 7 - 4^{1-n} = 7 - \frac{1}{4^{n-1}} = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

- (c) On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$  car  $-1 < \frac{1}{4} < 1$ , donc par produit et somme

de limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) = 7$ .

Finalement, on obtient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$ . Ce résultat confirme la conjecture émise dans la partie A.

**Exercice 1.3.** Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier  $n \geq 1$ , la somme des  $n$  premiers termes consécutifs est égale au produit des  $n$  premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note  $(u_n)$ . Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$ ,
- pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n \geq 0$ ,
- pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$ .

1. On choisit  $u_0 = 3$ .

$$\text{On a : } u_0 + u_1 = u_0 \times u_1 \iff 3 + u_1 = 3u_1 \iff 2u_1 = 3 \iff u_1 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{On a aussi : } u_0 + u_1 + u_2 = u_0 \times u_1 \times u_2 \iff \frac{9}{2} + u_2 = \frac{9}{2}u_2 \iff u_2 = \frac{9}{7}.$$

2. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$ .

On a en particulier :  $s_1 = u_0$ .

(a) — Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$s_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = s_n + u_n.$$

— Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n \geq 0$ , donc :  $u_1 + \cdots + u_{n-1} \geq 0$ , il vient donc :  $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} \geq u_0 > 1$ , soit :  $s_n > 1$ .

(b) Soit un entier  $n \geq 1$ . On a montré l'égalité :  $s_{n+1} = s_n + u_n$ . On peut également montrer que  $s_{n+1} = s_n \times u_n$ . Par conséquent, on obtient :  $s_n + u_n = s_n \times u_n$ .

Il vient donc :

$$\begin{aligned} s_n + u_n = s_n \times u_n &\iff s_n \times u_n - u_n = s_n \\ &\iff u_n(s_n - 1) = s_n \\ &\iff u_n = \frac{s_n}{s_n - 1} \text{ car } s_n \neq 1. \end{aligned}$$

(c) On a déjà :  $u_0 = 3 > 1$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $s_n > s_n - 1$ , donc :  $\frac{s_n}{s_n - 1} > 1$  car  $s_n - 1 > 0$ , soit :  $u_n > 1$ .

Finalement, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 1$ .

3. (a) Le programme Python ci-dessous affiche, pour une valeur entière positive de  $n$  donnée, le terme  $u_n$ .

```

1 n = int(input("Entrer une valeur entière positive n
  : "))
2 u = 3
3 s = u
4 for i in range(1, n+1):
5     u = s / (s - 1)
6     s = s + u
7 print(u)

```

- (b) Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de  $u_n$  pour différentes valeurs de l'entier  $n$  :

$n$	0	5	10	20	30	40
$u_n$	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

On peut conjecturer que la suite  $(u_n)$  converge vers 1.

4. (a) Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n > 1$ , donc pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$s_n = \underbrace{u_0}_{>1} + \underbrace{u_1}_{>1} + \cdots + \underbrace{u_{n-1}}_{>1} > n.$$

- (b) Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a montré que  $s_n > n$ . Mais puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , il vient par comparaison :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1} = \frac{s_n}{s_n \left(1 - \frac{1}{s_n}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{s_n}},$$

Puisque :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{s_n} = 0$  par quotient de limites, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{s_n}\right) = 1$  par produit et somme de limites, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{s_n}} = 1$  par quotient de limites, c'est-à-dire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

**Exercice 1.4.** Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites adjacentes si  $(u_n)$  est croissante,  $(v_n)$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ .

### Partie A. Premiers exemples

Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

1. — Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $v_n - u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  car  $-1 < \frac{1}{2} < 1$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$  par produit de limites.

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0,$$

donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

— Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,$$

donc la suite  $(v_n)$  est décroissante.

Finalement les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

2. — Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $v_n - u_n = u_n + \frac{1}{n} - u_n = \frac{1}{n}$ .  
Ainsi :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ .

— Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0,$$

donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

— Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leq 0, \end{aligned}$$

donc la suite  $(v_n)$  est décroissante.

Finalement les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

### Partie B. Propriétés

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites adjacentes.

1. On note  $(w_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :  $w_n = v_n - u_n$ .  
(a) Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= v_{n+1} - u_{n+1} - (v_n - u_n) \\ &= v_{n+1} - v_n + u_n - u_{n+1} \end{aligned}$$

La suite  $(u_n)$  est croissante, donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n \leq u_{n+1}$ , soit :  $u_n - u_{n+1} \leq 0$ .

La suite  $(v_n)$  est décroissante, donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_{n+1} \leq v_n$ , soit :  $u_{n+1} - v_n \leq 0$ .

Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on obtient :  $w_{n+1} - w_n \leq 0$  et la suite  $(w_n)$  est décroissante.

- (b) La suite  $(w_n)$  est décroissante et converge vers 0 (car par hypothèse :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ ), donc d'après l'application 11, la suite  $(w_n)$  est minorée par 0, c'est-à-dire :  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geq 0$ .

2. (a) Soit  $n$  un entier naturel. On a :  $w_n \geq 0$ , soit :  $v_n - u_n \geq 0$ , soit encore :  $v_n \geq u_n$ .
- La suite  $(u_n)$  est croissante, donc :  $u_n \geq u_0$ . Or :  $v_n \geq u_n$ , donc :  $v_n \geq u_0$ .
  - La suite  $(v_n)$  est décroissante, donc :  $v_n \leq v_0$ . Or :  $u_n \leq v_n$ , donc :  $u_n \leq v_0$ .
- (b) La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par  $v_0$ , elle converge donc d'après le théorème de convergence monotone.  
La suite  $(v_n)$  est décroissante et minorée par  $u_0$ , elle converge donc d'après le théorème de convergence monotone.
3. On note  $\ell$  la limite de  $(u_n)$  et  $\ell'$  la limite de  $(v_n)$ .  
D'une part, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ .  
D'autre part, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell - \ell'$ .  
Par unicité de la limite de  $(w_n)$ , on obtient :  $\ell - \ell' = 0$ , soit :  $\ell = \ell'$ .  
Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont donc la même limite  $\ell$ .
4. La suite  $(u_n)$  est croissante et converge vers  $\ell$ , donc  $(u_n)$  est majorée par  $\ell$  d'après l'application 11 : pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on a  $u_m \leq \ell$ .  
La suite  $(v_n)$  est décroissante et converge vers  $\ell$ , donc  $(v_n)$  est minorée par  $\ell$  d'après l'application 11 : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\ell \leq v_n$ .

### Partie C. Application

Notons  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies par  $u_0 = 2$  et  $v_0 = 10$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. Notons  $(w_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $w_n = v_n - u_n$ .
- (a) Il s'agit de montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $w_{n+1} = \frac{5}{12}w_n$ .  
Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} \\ &= \frac{3(u_n + 3v_n) - 4(2u_n + v_n)}{12} = \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} \\ &= \frac{5v_n - 5u_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n) = \frac{5}{12}w_n. \end{aligned}$$

Donc la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison  $q = \frac{5}{12}$  et de premier terme  $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$ .

- (b) En vertu de la question précédente, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$w_n = w_0 \times q^n = 8 \left( \frac{5}{12} \right)^n.$$

(c) On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$  car  $-1 < \frac{5}{12} < 1$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8 \left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$   
 par produit de limites, soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ , soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ .

2. Nous pouvons déjà affirmer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $w_n > 0$  puisque  $\left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$  et  $8 > 0$ .

— Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{w_n}{3} > 0,$$

donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

— Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4} < 0,$$

donc la suite  $(v_n)$  est décroissante.

3. La suite  $(u_n)$  est croissante, la suite  $(v_n)$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ , donc par définition, les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

Ainsi, les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et convergent vers la même limite  $\ell$  (question 3 partie B).

4. On note  $(t_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$t_n = 3u_n + 4v_n.$$

(a) Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} \\ &= 2u_n + v_n + u_n + 3v_n = 3u_n + 4v_n = t_n, \end{aligned}$$

donc la suite  $(t_n)$  est constante. En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$t_n = t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 6 + 40 = 46.$$

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $t_n = 3u_n + 4v_n$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3u_n + 4v_n)$  par unicité de la limite de  $(t_n)$ .

D'une part, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 46$  d'après 4.(a).

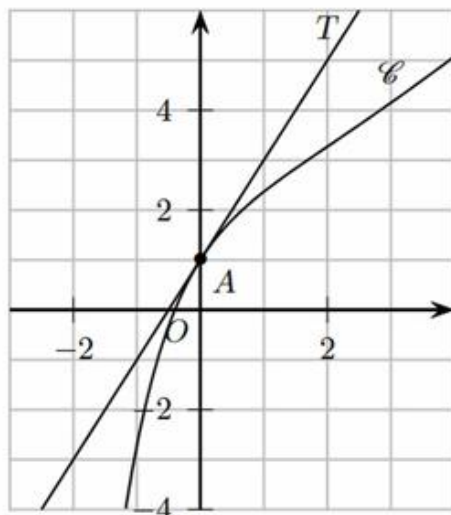
D'autre part, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3u_n + 4v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} 4v_n = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + 4 \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3\ell + 4\ell = 7\ell$ .

Par conséquent :  $46 = 7\ell$ , soit :  $\ell = \frac{46}{7}$ .

**Exercice 2.1.** On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On donne dans le repère orthonormé ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  ainsi que la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $A$ .



### Partie A. Lecture graphique

Dans cette partie, on répondra aux questions uniquement par lecture graphique.

1. Par lecture graphique, on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
2. Il semble que la courbe  $\mathcal{C}$  se situe en dessous la droite  $T$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. L'équation de la droite  $T$  est donnée par :  $y = ax + b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels.

Graphiquement, le coefficient directeur de la droite  $T$  est égal à 2, donc  $a = 2$ , et l'ordonnée à l'origine est égale à 1, donc  $b = 1$ .

Finalement, l'équation de la droite  $T$  est :  $y = 2x + 1$ .

### Partie B. Démonstration

1. Notons  $g$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :  $g(x) = 1 - x + e^x$ .
  - (a) — On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$  par somme de limites.

— Pour tout réel  $x$ , on a :  $g(x) = 1 - x + e^x = e^x \left( \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} + 1 \right)$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissances comparées,

donc par somme de limites, on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} + 1 \right) = 1$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , il vient que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  par produit de limites.

- (b) La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$  on a :  $g'(x) = -1 + e^x$ .  
Déterminons le signe de la fonction  $g'$  sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout réel  $x$ , on a :

$$g'(x) > 0 \iff -1 + e^x > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0.$$

On dresse le tableau de signe de  $g'$  ainsi que le tableau des variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		-    0    +	
$g$	$+\infty$	↘ 2 ↗	$+\infty$

$$g(0) = 1 - 0 + e^0 = 1 + 1 = 2$$

- (c) D'après le tableau des variations de  $g$  ci-dessus, le minimum de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  est égal à 2, donc pour tout réel  $x$ , on a  $g(x) \geq 2 > 0$ .  
Ainsi, la fonction  $g$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	+	

2. — Pour tout réel  $x$  :  $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$ .  
On a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$ .  
Par ailleurs :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ , donc par produit de limites :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$ .  
Par somme de limites, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
- On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$  et :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissances comparées, donc par somme de limites, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
3. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .  
Pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) = x + 1 + \frac{u(x)}{v(x)}$  avec :

$$u(x) = x;$$

$$u'(x) = 1;$$

$$v(x) = e^x;$$

$$v'(x) = e^x,$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = 1 + \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = 1 + \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} \\ &= 1 + \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x + 1 - x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x} = g(x)e^{-x}. \end{aligned}$$

4. Pour tout réel  $x$ , on a  $g(x) > 0$  d'après la question 1.(c) et  $e^{-x} > 0$ , donc  $f'(x) > 0$ . Par conséquent la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f$	$-\infty$	$+\infty$

5. (a) L'équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0 (c'est-à-dire de la droite  $T$ ) est donnée par  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ .  
Or  $f'(0) = g(0)e^{-0} = g(0) = 2$  et  $f(0) = 0 + 1 + \frac{0}{e^0} = 1$ , donc on obtient :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2(x - 0) + 1 = 2x + 1.$$

- (b) Pour étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $T$  sur  $\mathbb{R}$ , on étudie le signe de la fonction  $d$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$d(x) = f(x) - (2x + 1).$$

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$d(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x} - 2x - 1 = -x + \frac{x}{e^x} = \frac{-xe^x + x}{e^x} = \frac{x(1 - e^x)}{e^x}.$$

Pour tout réel  $x$ , on a :  $e^x > 0$ , donc le signe de  $d(x)$  est le signe de  $x(1 - e^x)$ .

On déduit le tableau de signe de la fonction  $d$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$x$	-	0	+
$1 - e^x$	+	0	-
$d(x)$	-	0	-

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $d(x) \leq 0$ , soit :  $f(x) - (2x + 1) \leq 0$ , soit encore :  $f(x) \leq 2x + 1$ .

Ainsi, la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de  $f$  est en-dessous de la droite  $T$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 2.2.

#### Partie A

Notons  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :  $f(x) = (x + 1)e^x$ .

1. — On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  par produit de limites.

— Pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) = xe^x + e^x$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  par croissances comparées et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , donc par somme de limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$  on a :

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x + 1)e^x = e^x(1 + x + 1) = e^x(x + 2).$$

3. Pour tout réel  $x$ , on a :  $e^x > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $x + 2$ . On dresse alors le tableau de signe de  $f'$  et on déduit le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	
$f$	$0$		$-e^{-2}$		$+\infty$

$$f(-2) = (-2 + 1)e^{-2} = -e^{-2}$$

#### Partie B

Soit  $m$  un réel quelconque. On note  $g_m$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x}.$$

On note  $\mathcal{C}_m$  la courbe représentative de la fonction  $g_m$  dans un repère orthogonal du plan.

1. (a) Pour tout réel  $x$ , on a :

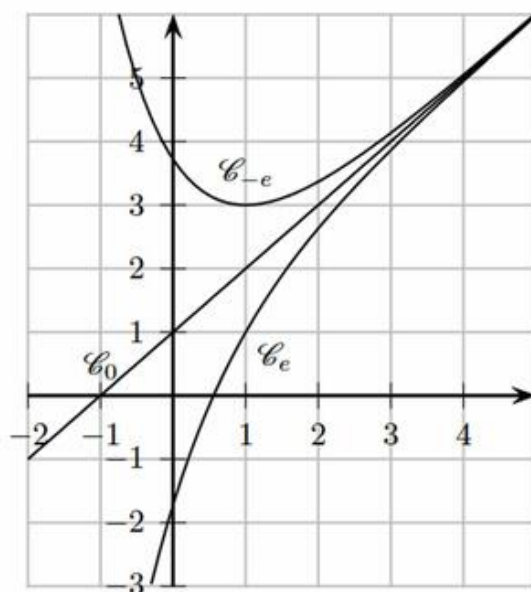
$$\begin{aligned}
 g_m(x) = 0 &\iff x + 1 - me^{-x} = 0 \\
 &\iff e^x(x + 1 - me^{-x}) = 0 \text{ car } e^x \neq 0 \\
 &\iff xe^x + e^x - me^xe^{-x} = 0 \\
 &\iff xe^x + e^x - m = 0 \\
 &\iff (x + 1)e^x = m \\
 &\iff f(x) = m.
 \end{aligned}$$

(b) Le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}_m$  avec l'axe des abscisses s'obtient en résolvant l'équation  $g_m(x) = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire en résolvant l'équation  $f(x) = m$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

En s'aidant du tableau des variations de  $f$  ci-dessus, nous pouvons distinguer trois cas :

- si  $m \in ]-\infty; -e^{-2}[$ , l'équation  $f(x) = m$  n'admet pas de solution réelle, donc la courbe  $\mathcal{C}_m$  ne coupe pas l'axe des abscisses ;
- si  $m \in \{-e^{-2}\} \cup [0; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = m$  admet une unique solution réelle, donc la courbe  $\mathcal{C}_m$  coupe l'axe des abscisses à une seule reprise ;
- si  $m \in ]-e^{-2}; 0[$ , l'équation  $f(x) = m$  admet deux solutions réelles, donc la courbe  $\mathcal{C}_m$  coupe l'axe des abscisses à deux reprises.

2. On a représenté ci-dessous les courbes  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_e$  et  $\mathcal{C}_{-e}$ .



- Pour tout réel  $x$ , on a :  $g_0(x) = x + 1$ , donc  $g_0$  est une fonction affine ; sa courbe représentative  $\mathcal{C}_0$  est donc une droite.
- Puisque  $-e \in ]-\infty; -e^{-2}[$ , la courbe  $\mathcal{C}_{-e}$  ne coupe pas l'axe des abscisses d'après la question 1.(b).
- Puisque  $e \in [0; +\infty[$ , la courbe  $\mathcal{C}_e$  coupe l'axe des abscisses une seule fois d'après la question 1.(b).

3. Pour tout réel  $x$ , on a :

$$g_m(x) > x + 1 \iff x + 1 - me^{-x} > x + 1 \iff -me^{-x} > 0 \\ \iff me^{-x} < 0 \iff m < 0 \text{ car } e^{-x} > 0$$

$$g_m(x) = x + 1 \iff -me^{-x} = 0 \iff m = 0 \text{ car } e^{-x} \neq 0$$

Par conséquent :

- la courbe  $\mathcal{C}_m$  est strictement au-dessus de la droite  $\mathcal{D}$  lorsque  $m < 0$  et strictement en-dessous de la droite  $\mathcal{D}$  lorsque  $m > 0$ ;
- la courbe  $\mathcal{C}_m$  est confondue avec la droite  $\mathcal{D}$  lorsque  $m = 0$ .

### Exercice 2.3.

#### Partie A. Démonstration

1. Soit un réel  $A > 0$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$ , alors il existe un réel  $B > 0$ , tel que pour  $x \in J$ , si  $x > B$ , alors  $v(x) > A$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ , alors il existe  $B' > 0$ , tel que pour tout  $x \in I$ , si  $x > B'$ , alors  $u(x) > B$ .

Mais comme  $u(x) \in J$  pour tout  $x \in I$ , si  $x > B'$ , alors  $u(x) > B$  et donc  $v(u(x)) > A$ .

On a montré finalement que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(u(x)) = +\infty$ .

2. Soit un réel  $\varepsilon > 0$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \ell'$ , alors il existe un réel  $B > 0$ , tel que pour  $x \in J$ , si  $x > B$ , alors  $|v(x) - \ell'| < \varepsilon$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ , alors il existe  $B' > 0$ , tel que pour tout  $x \in I$ , si  $x > B'$ , alors  $u(x) > B$ .

Mais comme  $u(x) \in J$  pour tout  $x \in I$ , si  $x > B'$ , alors  $u(x) > B$  et donc  $|v(u(x)) - \ell'| < \varepsilon$ .

On a montré finalement que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(u(x)) = \ell'$ .

3. Soit un réel  $A > 0$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$ , alors il existe un réel  $B > 0$ , tel que pour  $x \in J$ , si  $x > B$ , alors  $v(x) > A$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$ , alors il existe  $\alpha > 0$ , tel que pour tout  $x \in I$ , si  $|x - a| < \alpha$ , alors  $u(x) > B$ .

Mais comme  $u(x) \in J$  pour tout  $x \in I$ , si  $|x - a| < \alpha$ , alors  $u(x) > B$  et donc  $v(u(x)) > A$ .

On a montré finalement que :  $\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = +\infty$ .

## Partie B. Exemples

- On souhaite calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+2x-1}$ .  
On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x - 1) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , donc par composition de limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+2x-1} = +\infty$ .
- On souhaite calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$ .  
On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 1) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ , donc par composition de limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} = 0$ .
- On souhaite calculer :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{2}{x-1}} + 2$ .  
On a  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{2}{x-1} + 2 \right) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , donc par composition de limites :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{2}{x-1}} + 2 = +\infty$ .

## Exercice 3.1.

## Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

Notons  $g$  la fonction définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :  $g(x) = e^x - xe^x + 1$ .

- Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a :  $g(x) = e^x \left( 1 - x + \frac{1}{e^x} \right)$ .  
D'une part on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ , donc par somme de limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - x + \frac{1}{e^x} \right) = -\infty$ .  
D'autre part, on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  par produit de limites.
- La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme somme et produit de fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$ .  
Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a  $g(x) = e^x - u(x)v(x) + 1$  avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= x; & v(x) &= e^x; \\ u'(x) &= 1; & v'(x) &= e^x, \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$g'(x) = e^x - (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) + 0 = e^x - e^x - xe^x = -xe^x.$$

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $e^x > 0$  et  $-x < 0$ , donc  $g'(x) < 0$ . Par conséquent, la fonction  $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$g'(x)$	0	-	
$g$	2	0	$-\infty$

$$g(0) = e^0 - 0 \times e^0 + 1 = 1 - 0 + 1 = 2$$

$$g'(0) = -0 \times e^0 = 0$$

3. (a) La fonction  $g$  est continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ . De plus, on a  $g(0) = 2 > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , donc  $g$  change de signe sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .  
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; +\infty[$  (voir le tableau des variations de  $g$  ci-dessus).
- (b) A l'aide de la calculatrice, on trouve  $\alpha \approx 1,27$ .
- (c) Par définition de  $\alpha$ , on a  $g(\alpha) = 0$  et :

$$g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0 \iff e^\alpha(1 - \alpha) + 1 = 0$$

$$\iff e^\alpha(1 - \alpha) = -1 \iff e^\alpha = \frac{-1}{1 - \alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

4. D'après le tableau des variations de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ , on obtient le tableau de signe de la fonction  $g$  sur  $[0; +\infty[$  :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$		0	

### Partie B. Étude des variations d'une fonction

Notons  $A$  la fonction définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :  $A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$ .

1. La fonction  $A$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout  $x \in [0; +\infty[$  on a :

$$A'(x) = \frac{4(e^x + 1) - 4xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{4(e^x + 1 - xe^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}.$$

2. On a  $4 > 0$  et pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a  $(e^x + 1)^2 > 0$ , donc le signe de  $A'(x)$  ne dépend que du signe de  $g(x)$ .  
On déduit donc le tableau de signe de  $A'$  ainsi que le tableau des variations de  $A$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$A'(x)$		+	-
$A$		$A(\alpha)$	
	0		0

On a  $A(0) = \frac{4 \times 0}{e^0 + 1} = 0$ .

Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a :  $A(x) = \frac{4x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{x}{e^x} \times \frac{4}{1 + \frac{1}{e^x}}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissance comparée et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 + \frac{1}{e^x}} = 4$ , il vient

par produit de limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 0$ .

3. D'après le tableau des variations de la fonction  $A$ , on peut affirmer que le maximum de  $A$  sur  $[0; +\infty[$  est égal à  $A(\alpha)$ .

Il s'agit donc de montrer que  $A(\alpha) = 4(\alpha - 1)$ .

En sachant que  $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$ , on a :

$$A(\alpha) = \frac{4\alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{4\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} = \frac{4\alpha}{\frac{1 + \alpha - 1}{\alpha - 1}} = \frac{4\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} = 4\alpha \times \frac{\alpha - 1}{\alpha} = 4(\alpha - 1).$$

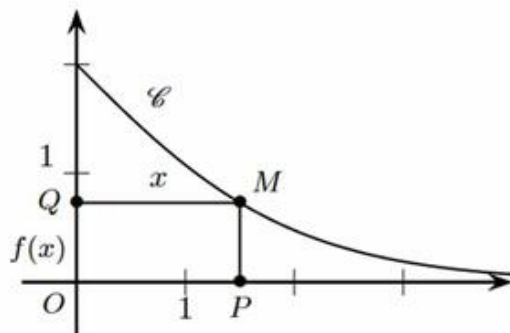
### Partie C. Étude de la position d'un point sur une courbe

On note  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Pour tout réel  $x$  positif ou nul, on appelle  $M$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $x$ ,  $P$  le point de coordonnées  $(x; 0)$  et  $Q$  le point de coordonnées  $(0; f(x))$ .

$\alpha$  désigne le réel obtenu dans la partie A.



1. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Notons  $\mathcal{A}_{OPMQ}$  l'aire du rectangle  $OPMQ$ . On a alors :

$$\mathcal{A}_{OPMQ} = OP \times PM = x \times f(x) = x \times \frac{4}{e^x + 1} = \frac{4x}{e^x + 1} = A(x).$$

2. Le maximum de la fonction  $A$  sur  $[0; +\infty[$  est atteint en  $\alpha$  et vaut  $A(\alpha) = 4(\alpha - 1)$ , donc l'aire du rectangle  $OPMQ$  est maximale lorsque  $x = \alpha$  et vaut  $4(\alpha - 1)$ .
3. La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme quotient de deux fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout  $x \in [0; +\infty[$  on a :

$$f'(x) = \frac{0(e^x + 1) - 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{-4e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

4. (a) Le coefficient directeur de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $\alpha$  est donné par :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{-4e^\alpha}{(e^\alpha + 1)^2} = \frac{-4\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha-1} + 1\right)^2} \quad \text{car } e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1} \\ &= \frac{\frac{-4}{\alpha-1}}{\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2} = \frac{\frac{-4}{\alpha-1}}{\frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}} = \frac{-4}{\alpha-1} \times \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2} = \frac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

- (b) En sachant que  $\alpha \times f(\alpha) = A(\alpha)$  (question 1, partie C), il vient que le coefficient directeur de la droite  $(PQ)$  est :

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(\alpha) - 0}{0 - \alpha} = \frac{f(\alpha)}{-\alpha} = \frac{\frac{A(\alpha)}{\alpha}}{-\alpha} = -\frac{A(\alpha)}{\alpha^2} = \frac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}.$$

Par conséquent,  $\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = f'(\alpha)$ . Les coefficients directeurs des droites  $\mathcal{T}$  et  $(PQ)$  étant égaux, les deux droites sont parallèles.

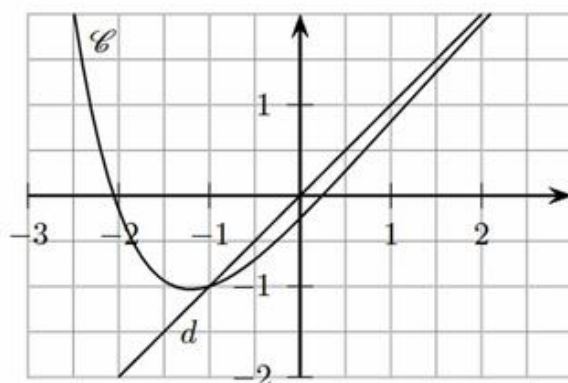
### Exercice 3.2.

#### Partie A. Étude d'une fonction

On donne ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = x - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x},$$

ainsi que la droite  $d$  d'équation  $y = x$ .



1. (a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .  
Pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) = x - u(x)v(x)$  avec

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{4}(x+1); & v(x) &= e^{-x}; \\ u'(x) &= \frac{1}{4}; & v'(x) &= -e^{-x}, \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) = 1 - u'(x)v(x) - u(x)v'(x) \\ &= 1 - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-x}(x+1) = 1 + \frac{1}{4}e^{-x}(x+1-1) \\ &= 1 + \frac{1}{4}xe^{-x}. \end{aligned}$$

La fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :  $f'(x) = 1 + t(x)w(x)$  avec

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{1}{4}x; & w(x) &= e^{-x}; \\ t'(x) &= \frac{1}{4}; & w'(x) &= -e^{-x}, \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$f''(x) = t'(x)w(x) + t(x)w'(x) = \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{4}xe^{-x} = \frac{1}{4}e^{-x}(1-x).$$

- (b) Pour tout réel  $x$ ,  $\frac{1}{4}e^{-x} > 0$ , donc le signe de  $f''(x)$  est le signe de  $1-x$ .  
On dresse alors le tableau de signe de  $f''$  sur  $\mathbb{R}$  et on déduit le tableau des variations de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$1$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$0$	$-$
$f'$	$-\infty$		$f'(1)$	$1$

— On a  $f'(1) = 1 + \frac{1}{4} \times 1 \times e^{-1} = 1 + \frac{1}{4e}$ .

— On a aussi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$ . En effet  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissances comparées, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$  par produit et somme de limites.

— On a enfin  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ . En effet  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$  par produit de limites, donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$  par produit et somme de limites.

(c) — La fonction  $f'$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $] -\infty ; 1]$ . De plus, on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$  et  $f'(1) > 0$ , donc  $f'$  change de signe sur l'intervalle  $] -\infty ; 1]$ .

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f'(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $] -\infty ; 1]$  (voir le tableau des variations de  $g$  ci-dessus).

— Pour tout  $x \in [1 ; +\infty[$ ,  $f'(x) > 1$ , donc l'équation  $f'(x) = 0$  n'admet pas de solution sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .

Finalement, l'équation  $f'(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $] -\infty ; 1]$ .

On vérifie à la calculatrice que  $f'(-1,21) < 0$  et  $f'(-1,20) > 0$ , ce qui démontre que :  $-1,21 < \alpha < -1,20$ .

2. (a) Du tableau des variations de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$  (question 1.(b)), on déduit le tableau de signe de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ , donc le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

— Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $f(x) = x - \frac{1}{4} \left( \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right)$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , il vient par produit et somme de limites que :  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

— Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f(x) = x - \frac{1}{4} x e^{-x} - \frac{1}{4} e^{-x} = e^{-x} \left( x e^x - \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \right).$$

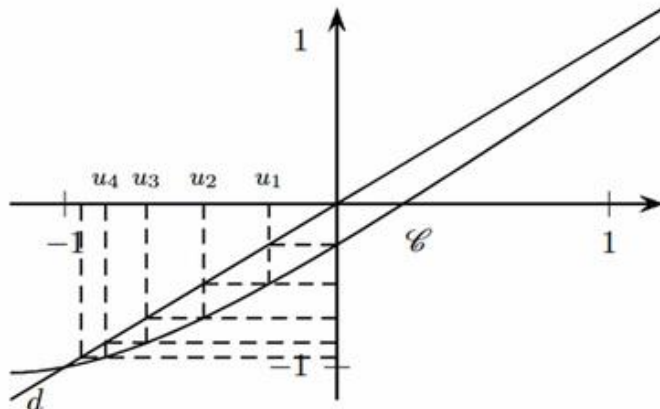
Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \right) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$  par croissances comparées et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ , il vient par somme et produit de limites que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

- (b) Soit  $x$  un réel de  $I = [-1; 0]$ , alors  $-1 \leq x \leq 0$ , donc  $f(-1) \leq f(x) \leq f(0)$  car la fonction  $f$  est croissante sur  $[\alpha; +\infty[$ , soit  $-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{4}$ , donc  $-1 \leq f(x) \leq 0$ , c'est-à-dire  $f(x) \in I$ .

### Partie B. Étude d'une suite

On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Plaçons les premiers termes de la suite  $(u_n)$  sur l'axe des abscisses à l'aide de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite d'équation  $y = x$ .



Il semblerait donc que la suite  $(u_n)$  est décroissante et qu'elle converge vers  $-1$ .

2. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $-1 < u_n < 0$  ».

— Initialisation. On a :  $u_1 = f(u_0) = f(0) = -\frac{1}{4}$  et  $-1 < -\frac{1}{4} < 0$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

- Hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.  
Par hypothèse de récurrence :  $-1 < u_n < 0$ , donc  $f(-1) < f(u_n) < f(0)$  car  $f$  est strictement croissante sur  $[\alpha; +\infty[$ , soit  $-1 < u_{n+1} < -\frac{1}{4}$ , donc  $-1 < u_{n+1} < 0$ .  
Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.
- Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(1)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  non nul.

(b) Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n - \frac{1}{4}(u_n + 1)e^{-u_n} - u_n = -\frac{1}{4}(u_n + 1)e^{-u_n}.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $e^{-u_n} > 0$  et  $u_n + 1 > 0$  puisque  $u_n > -1$  (question 2.(a) partie B), donc :  $u_{n+1} - u_n < 0$ , donc la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.

(c) La suite  $(u_n)$  est décroissante (question précédente) et minorée par  $-1$  (question 2.(a) partie B), elle est donc convergente d'après le théorème de convergence monotone. Notons  $\ell$  sa limite.

Récapitulons les hypothèses nécessaires à l'application du théorème du point fixe.

- La fonction  $f$  est continue sur  $[-1; 0]$  car elle est dérivable sur cet intervalle (question 1.(a) partie A).
- L'intervalle  $[-1; 0]$  est stable par la fonction  $f$  (question 2.(b) partie A).
- La suite  $(u_n)$  est à valeurs dans l'intervalle  $[-1; 0]$  (question 2.(a) partie B).
- La suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ . Par ailleurs, puisque  $(u_n)$  est bornée par  $-1$  et  $0$ , alors  $\ell \in [-1; 0]$ .

Finalement, d'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution sur  $[-1; 0]$  de l'équation  $f(x) = x$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x} = x \\ &\iff -\frac{1}{4}(x+1)e^{-x} = 0 \\ &\iff (x+1)e^{-x} = 0 \\ &\iff x+1 = 0 \text{ car } e^{-x} > 0 \\ &\iff x = -1. \end{aligned}$$

Finalement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$ .

## Exercice 3.3.

## Partie A. Un résultat préliminaire

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$  telle que  $f(a) \times f(b) \leq 0$ .

On souhaite montrer dans cette partie qu'il existe alors  $\alpha \in [a; b]$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

1. Si  $f(a) = 0$  (resp.  $f(b) = 0$ ), alors  $\alpha = a$  (resp.  $\alpha = b$ ) convient.

On suppose donc dans la suite que  $f(a) \times f(b) < 0$ , par exemple  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$  (le cas  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$  se traite de la même manière).

On note  $(a_n)$  et  $(b_n)$  les suites définies par  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ b_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

2. Soit  $n$  un entier naturel.

— Si  $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0$ , alors :

$$a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{2a_n - a_n - b_n}{2} = \frac{a_n - b_n}{2}.$$

— Si  $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ , alors :

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n + b_n - 2b_n}{2} = \frac{a_n - b_n}{2}.$$

Finalement, pour tout entier naturel  $n$ , on a établi l'égalité suivante :

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}.$$

3. Notons  $(w_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :  $w_n = a_n - b_n$ .

(a) D'après la question précédente, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$ , donc la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison  $q = 1/2$  et de premier terme  $w_0 = a_0 - b_0 = a - b$ .

Par conséquent, on a pour tout entier naturel  $n$  :

$$w_n = w_0 \times q^n = (a - b) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{a - b}{2^n}.$$

(b) On a  $a - b < 0$  car  $a < b$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2^n > 0$ , donc  $\frac{a - b}{2^n} < 0 \leq 0$ , c'est-à-dire  $w_n = a_n - b_n \leq 0$ , d'où :  $a_n \leq b_n$ .

4. Soit un  $n$  un entier naturel.

Variations de  $(a_n)$ .

— Si  $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0$ , alors :  $a_{n+1} - a_n = a_n - a_n = 0 \geq 0$ .

— Si  $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ , alors :  $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \stackrel{3.(b)}{\geq} 0$ .

Finalement, la suite  $(a_n)$  est croissante.

Variations de  $(b_n)$ .

— Si  $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0$ , alors :  $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \stackrel{3.(b)}{\leq} 0$ .

— Si  $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ , alors :  $b_{n+1} - b_n = b_n - b_n = 0 \leq 0$ .

Finalement, la suite  $(b_n)$  est décroissante.

5. (a) On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a - b}{2^n} = 0$ .

De plus, on a montré que la suite  $(a_n)$  est croissante et que la suite  $(b_n)$  est décroissante.

Par définition, les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes.

Par propriété, les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont convergentes et convergent vers la même limite. Notons  $\alpha$  cette limite.

(b) La suite  $(a_n)$  est croissante et la suite  $(b_n)$  est décroissante, donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \geq a_0 = a$  et  $b_n \leq b_0 = b$ .

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \leq b_n$ , il vient :

$$a \leq a_n \leq b_n \leq b, \text{ donc : } a_n \in [a; b] \text{ et } b_n \in [a; b].$$

La suite  $(a_n)$  est minorée par  $a$ , majorée par  $b$  et converge vers  $\alpha$ , donc  $a \leq \alpha \leq b$  par propriété (ce raisonnement est aussi valable pour  $(b_n)$ ).

(c) La fonction  $f$  est continue sur  $[a; b]$ , la suite  $(a_n)$  est à valeurs dans  $[a; b]$  et converge vers  $\alpha \in [a; b]$ , donc d'après la propriété 3.7, on peut affirmer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n\right), \text{ soit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(\alpha).$$

On montre de manière analogue que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(\alpha)$ .

Finalement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(\alpha)$ .

6. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on montre que  $f(a_n) \leq 0$ .

— Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0$ , alors  $a_{n+1} = a_n$ , donc  $f(a_{n+1}) = f(a_n)$ .

Dans ce cas, la suite  $(f(a_n))$  est constante. En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $f(a_n) = f(a_0) = f(a) < 0$ , donc  $f(a_n) \leq 0$ .

— Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ , alors  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ , donc

$$f(a_{n+1}) = f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0, \text{ donc } f(a_{n+1}) \leq 0.$$

Mais puisque  $f(a_0) \leq 0$ , il vient que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(a_n) \leq 0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on montre de manière analogue que  $f(b_n) \geq 0$ .

7. La suite  $(f(a_n))$  est majorée par 0 et converge vers  $f(\alpha)$ , donc  $f(\alpha) \leq 0$ .

La suite  $(f(b_n))$  est minorée par 0 et converge vers  $f(\alpha)$ , donc  $f(\alpha) \geq 0$ .

On déduit que  $f(\alpha) = 0$ .

Nous avons bien montré l'existence d'un réel  $\alpha \in [a; b]$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

### Partie B. Le théorème

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$  et soit un réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

On souhaite montrer dans cette partie qu'il existe alors  $\alpha \in [a; b]$  tel que  $f(\alpha) = k$ .

1. Si  $f(a) = k$  (resp.  $f(b) = k$ ), alors  $\alpha = a$  (resp.  $\alpha = b$ ) convient.

On suppose donc dans la suite que  $f(a) < k < f(b)$  (le cas  $f(b) < k < f(a)$  se traite de la même manière).

2. Notons  $g$  la fonction  $x \mapsto f(x) - k$  définie sur  $[a; b]$ .

(a) La fonction  $g$  est continue sur  $[a; b]$  comme somme de fonctions continues sur  $[a; b]$ .

(b) On a  $g(a) \times g(b) = (f(a) - k)(f(b) - k)$  avec  $f(a) - k < 0$  et  $f(b) - k > 0$ , donc  $g(a) \times g(b) < 0$ .

(c) La fonction  $g$  vérifie les hypothèses du résultat préliminaire démontré à la partie A, donc il existe  $\alpha \in [a; b]$  tel que  $g(\alpha) = 0$ , c'est-à-dire tel que  $f(\alpha) = k$ .

### Partie C. Algorithme de dichotomie

1. La fonction `dichotomie(f, a, b, p)` ci-dessous renvoie une approximation de  $\alpha$  à  $10^{-p}$  près,  $p$  étant un entier naturel non nul.

```

1 def dichotomie(f, a, b, p):
2     while b - a > 10**(-p):
3         m = (a + b) / 2
4         if f(m) == 0:
5             return m
6         elif f(a) * f(m) > 0:
7             a = m
8         else:
9             b = m
10    return (a + b) / 2

```

2. On fait appel à la fonction `dichotomie` pour déterminer une approximation à 0,001 près de la racine de la fonction  $f : x \mapsto e^{0,5x} + x^2 - 4$  sur  $[0; 2]$ .

```

1 import numpy as np #importation du package numpy
2 def f(x):
3     return np.exp(0.5*x) + x**2 - 4
4 dichotomie(f, 0, 2, 3)

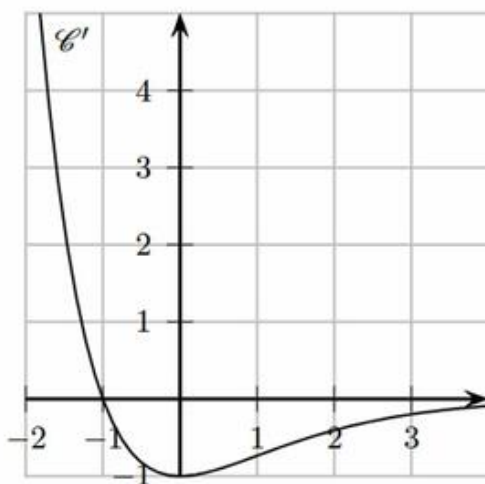
```

L'appel `dichotomie(f, 0, 2, 3)` renvoie 1.40673828125

#### Exercice 4.1.

##### Partie A

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe  $\mathcal{C}'$  représentant la fonction dérivée  $f'$  d'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ .



1. — La fonction  $f'$  semble positive sur l'intervalle  $] -\infty; -1]$ , donc  $f$  est croissante sur cet intervalle.  
 — La fonction  $f'$  semble négative sur l'intervalle  $[-1; +\infty[$ , donc  $f$  est décroissante sur cet intervalle.
2. — La fonction  $f'$  semble décroissante sur l'intervalle  $] -\infty; 0]$ , donc  $f''$  est négative sur cet intervalle et donc  $f$  est concave sur  $] -\infty; 0]$ .  
 — La fonction  $f'$  semble croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , donc  $f''$  est positive sur cet intervalle et donc  $f$  est convexe sur  $[0; +\infty[$ .

##### Partie B

On admet que la fonction  $f$  mentionnée dans la partie 1 est définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

1. On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  par produit de limites.

2. (a) Pour tout réel  $x$ , on a :

$$f(x) = (x+2)e^{-x} = \frac{x+2}{e^x} = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}.$$

(b) D'une part, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissances comparées.

D'autre part, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x} = 0$  par produit de limites.

Par conséquent :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  par somme de limites.

(c) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , la droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote horizontale à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

3. (a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x) = u(x)v(x)$  avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= x+2; & v(x) &= e^{-x}; \\ u'(x) &= 1; & v'(x) &= -e^{-x}, \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = e^{-x} - (x+2)e^{-x} \\ &= e^{-x}(1 - (x+2)) = e^{-x}(-x-1). \end{aligned}$$

(b) Pour tout réel  $x$ , on a  $e^{-x} > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $-x-1$ .

On dresse alors le tableau de signe de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$  et on déduit le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$\alpha$	$-1$	$+\infty$	
$f'(x)$			+	0	-	
$f$	$-\infty$	↗	↗	$e$	↘	0

$$f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = e$$

(c) Sur l'intervalle  $[-2; -1]$ , la fonction  $f$  est continue et strictement croissante. De plus, on a  $f(-2) = (-2+2)e^{-(-2)} = 0 < 2$  et  $f(-1) = e > 2$ , donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[-2; -1]$ .

4. (a) La fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f'(x) = t(x)w(x)$  avec :

$$\begin{aligned} t(x) &= -x - 1; & w(x) &= e^{-x}; \\ t'(x) &= -1; & w'(x) &= -e^{-x}, \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} f''(x) &= t'(x)w(x) + t(x)w'(x) = -e^{-x} - (-x - 1)e^{-x} \\ &= e^{-x}(-1 - (-x - 1)) = xe^{-x}. \end{aligned}$$

Pour tout réel  $x$ , on a  $e^{-x} > 0$ , donc le signe de  $f''(x)$  est le signe de  $x$ .  
On déduit le tableau de signe de  $f''$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

- La fonction  $f''$  est négative sur l'intervalle  $] -\infty; 0]$ , donc  $f$  est concave sur cet intervalle.
- La fonction  $f''$  est positive sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , donc  $f$  est convexe sur cet intervalle.

- (b) On a  $f''(0) = 0$  et la fonction  $f''$  change de signe en 0, donc le point  $A(0; f(0))$  est un point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}$  (le point  $A$  est même l'unique point d'inflexion de  $\mathcal{C}$ ).

**Exercice 4.2.** On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}.$$

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

**Question préliminaire.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $A(x) = xe^x + 1$ .

La fonction  $A$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit et somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$A'(x) = 1 \times e^x + xe^x = e^x(x + 1).$$

Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$ , donc le signe de  $A'(x)$  est le signe de  $1 + x$ .

On dresse le tableau de signe de  $A'$  sur  $\mathbb{R}$  et on déduit le tableau des variations de  $A$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$A'(x)$	-	0	+
$A$	1	$A(-1)$	$+\infty$

- On a  $A(-1) = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$ .
- On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = +\infty$  par somme de limites.
- On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  par croissances comparées, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 1$  par somme de limites.

D'après le tableau des variations de  $A$ , il apparaît que le minimum de  $A$  sur  $\mathbb{R}$  est  $A(-1) > 0$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A(x) > 0$ .

### Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

Notons  $g$  la fonction définie pour tout réel par :

$$g(x) = x + 2 - e^x.$$

1. — On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  par somme de limites.

$$\text{— Pour tout réel } x, g(x) = e^x \left( \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} - 1 \right).$$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissances comparées et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ , donc

$$\text{par somme de limites : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} - 1 \right) = -1.$$

Par conséquent  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  par produit de limites.

2. La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ , on a :  $g'(x) = 1 - e^x$ .

Pour tout réel  $x$  :

$$g'(x) > 0 \iff 1 - e^x > 0 \iff e^x < 1 \iff e^x < e^0 \iff x < 0.$$

On déduit le tableau de signe de  $g'$  sur  $\mathbb{R}$  ainsi que le tableau des variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$0$	$\beta$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$ 1 $\searrow$ 0 $\searrow$		$-\infty$	$-\infty$

$$g(0) = 0 + 2 - e^0 = 2 - 1 = 1$$

3. (a) — Sur l'intervalle  $] -\infty ; 0]$ , la fonction  $g$  est continue et strictement croissante. De plus  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  et  $g(0) = 1 > 0$ , donc  $g$  change de signe sur  $] -\infty ; 0]$ . D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ] -\infty ; 0]$ .

- Sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , la fonction  $g$  est continue et strictement décroissante. De plus  $g(0) = 1 > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , donc  $g$  change de signe sur  $[0; +\infty[$ . D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\beta \in [0; +\infty[$ .

Finalement, l'équation  $g(x) = 0$  admet exactement deux solutions réelles  $\alpha$  et  $\beta$ .

- (b) A l'aide de la calculatrice, on trouve  $1,14 < \beta < 1,15$ .

4. A partir du tableau des variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  on déduit le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$\beta$	$+\infty$
$g(x)$		0	0	
	-	+	-	

### Partie B. Étude de la fonction $f$

1. (a) — On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$ .  
De plus  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  par croissances comparées, donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + 1) = 1$  par somme de limites.  
Ainsi  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  par quotient de limites.

— Pour tout réel  $x$ , 
$$f(x) = \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(x + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{x + \frac{1}{e^x}}.$$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$ , donc par quotient de limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

- (b) Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation  $y = -1$  est asymptote horizontale de  $\mathcal{C}$  en  $-\infty$ , et la droite d'équation  $y = 0$  (c'est-à-dire l'axe des abscisses du repère) est asymptote horizontale de  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .
2. (a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  avec :

$$u(x) = e^x - 1;$$

$$u'(x) = e^x;$$

$$v(x) = xe^x + 1;$$

$$v'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x,$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x - 1)(x + 1)e^x}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(xe^x + 1) - (xe^x + e^x - x - 1)e^x}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(xe^x + 1 - xe^x - e^x + x + 1)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}. \end{aligned}$$

- (b) Pour tout réel  $x$ , on a  $(xe^x + 1)^2 > 0$  et  $e^x > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $g(x)$ .

On dresse donc le tableau de signe de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$  et on déduit le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$\beta$	$+\infty$				
$f'(x)$		-	0	+	0	-		
$f$	-1	↘ ↗		$f(\alpha)$	↗ ↘		$f(\beta)$	0

3. (a) On a  $f(\beta) = \frac{e^\beta - 1}{\beta e^\beta + 1}$ .

Mais puisque :  $g(\beta) = 0 \iff \beta + 2 - e^\beta = 0 \iff e^\beta = \beta + 2$ , alors :

$$f(\beta) = \frac{\beta + 2 - 1}{\beta(\beta + 2) + 1} = \frac{\beta + 1}{\beta^2 + 2\beta + 1} = \frac{\beta + 1}{(\beta + 1)^2} = \frac{1}{\beta + 1}.$$

- (b) On a  $1,14 < \beta < 1,15$ , donc  $2,14 < \beta + 1 < 2,15$ , donc  $\frac{1}{2,15} < \frac{1}{\beta + 1} < \frac{1}{2,14}$  car la fonction inverse est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ , c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2,15} < f(\beta) < \frac{1}{2,14}.$$

Or  $\frac{1}{2,15} \approx 0,465$  et  $\frac{1}{2,14} \approx 0,467$ , donc un encadrement de  $f(\beta)$  d'amplitude  $10^{-3}$  est  $0,465 < f(\beta) < 0,467$ .

4. L'équation réduite de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad \text{soit : } y = f'(0)x + f(0).$$

Or  $f'(0) = \frac{e^0 g(0)}{(0 \times e^0 + 1)^2} = g(0) = 1$  et  $f(0) = \frac{e^0 - 1}{0 \times e^0 + 1} = 0$ , donc l'équation réduite de  $T$  est  $y = x$ .

5. (a) Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1 - x(xe^x + 1)}{xe^x + 1} = \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1} \\ &= \frac{e^x(1 - x^2) - (1 + x)}{xe^x + 1} = \frac{e^x(1 - x)(1 + x) - (1 + x)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 + x)[e^x(1 - x) - 1]}{xe^x + 1} = \frac{(1 + x)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 + x)w(x)}{xe^x + 1} \quad \text{où } w(x) = e^x - xe^x - 1. \end{aligned}$$

(b) La fonction  $w$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout réel  $x$ , on a :

$$w'(x) = e^x - (x + 1)e^x = -xe^x.$$

Pour tout réel  $x$ , on a  $e^x > 0$ , donc le signe de  $w'(x)$  est le signe de  $-x$ . On dresse le tableau de signe de  $w'$  sur  $\mathbb{R}$  et on déduit le tableau des variations de  $w$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$w'(x)$	$+$	$0$	$-$
$w$	$-1$	$0$	$-\infty$

— On a  $w(0) = e^0 - 0 \times e^0 - 1 = 0$ .

— On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) = -1$  par croissances comparées et somme de limites.

— Pour tout réel  $x$ ,  $w(x) = e^x \left(1 - x - \frac{1}{e^x}\right)$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x - \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , alors par produit de limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = -\infty$ .

(c) D'après la question précédente, le maximum de la fonction  $w$  sur  $\mathbb{R}$  est égal à 0, donc pour tout réel  $x$ ,  $w(x) \leq 0$ .

(d) Pour tout réel  $x$ , on a  $xe^x + 1 > 0$  (d'après la question préliminaire), donc le signe de  $f(x) - x$  est le signe de  $(1 + x)w(x)$ . On dresse donc le tableau de signe de la fonction  $x \mapsto f(x) - x$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$1+x$		-	0	+
$w(x)$			-	0
$f(x)-x$		+	0	-

On déduit donc que :

- la courbe  $\mathcal{C}$  est strictement au-dessus de la droite  $T$  sur l'intervalle  $] -\infty; -1[$ ;
- la courbe  $\mathcal{C}$  est strictement en-dessous de la droite  $T$  sur les intervalles  $] -1; 0[$  et  $]0; +\infty[$ ;
- la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $T$  se croisent en les points  $A(-1; -1)$  et  $B(0; 0)$ .

6. On dresse le tableau de signe de  $f''$  sur  $\mathbb{R}$  à l'aide du graphique.

$x$	$-\infty$	$-2.6$	$-0.4$	$2$	$+\infty$			
$f''(x)$		-	0	+	0	-	0	+

On déduit donc que la fonction  $f$  est :

- convexe sur les intervalles  $[-2, 6; -0, 4]$  et  $[2; +\infty[$ ;
- concave sur les intervalles  $] -\infty; -2, 6]$  et  $[-0, 4; 2]$ .

**Exercice 4.3.** Soit  $n$  un entier naturel. On note  $f_n$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx.$$

On note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthonormé.

1. La fonction  $f_n$  est dérivable comme quotient et somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ , on a :

$$f'_n(x) = \frac{0(1+e^x) - 1 \times e^x}{(1+e^x)^2} + n = n - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

La fonction  $f'_n$  est dérivable comme quotient et somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a  $f'_n(x) = \frac{u(x)}{v(x)} + n$  avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= -e^x; \\ u'(x) &= -e^x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x) &= (1 + e^x)^2; \\ v'(x) &= 2e^x(1 + e^x), \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} f''_n(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{-e^x(1 + e^x)^2 + 2e^xe^x(1 + e^x)}{(1 + e^x)^4} \\ &= \frac{e^x(1 + e^x)[-(1 + e^x) + 2e^x]}{(1 + e^x)^4} = \frac{e^x(1 + e^x)(e^x - 1)}{(1 + e^x)^4} \\ &= \frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}. \end{aligned}$$

2. Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$  et  $(1 + e^x)^3 > 0$ , donc le signe de  $f''_n(x)$  est le signe de  $e^x - 1$ .

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0.$$

On dresse alors le tableau de signe de  $f''_n$  sur  $\mathbb{R}$  et l'on déduit le tableau des variations de  $f'_n$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''_n(x)$		- 0 +	
$f'_n$	$n$	$n - \frac{1}{4}$	$n$

- On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x)^2 = 1$  par composition de limite (voir exercice 2.3.), donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} = 0$  par quotient de limites, donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'_n(x) = n$  par somme de limite.

- Pour tout réel  $x$ , on a :

$$f'_n(x) = n - \frac{e^x}{1 + 2e^x + e^{2x}} = n - \frac{1}{\frac{1 + 2e^x + e^{2x}}{e^x}} = n - \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 2 + e^x}.$$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^x} + 2 + e^x \right) = +\infty$  par somme de limites, donc par quotient et somme de limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'_n(x) = n$ .

Il apparaît que le minimum de la fonction  $f'_n$  sur  $\mathbb{R}$  est  $n - 1/4$ .

Si  $n \geq 1$ , alors  $n - 1/4 > 0$ , donc pour tout réel  $x$ ,  $f'_n(x) > 0$  et donc la fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

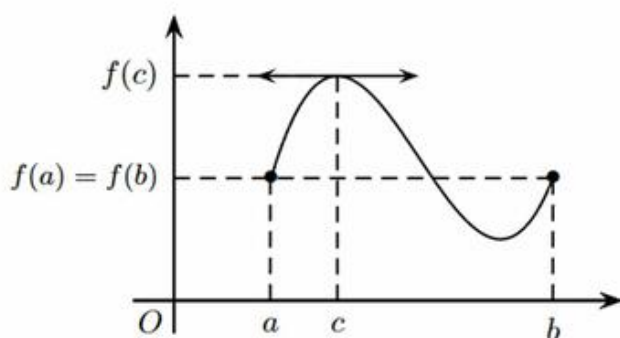
3. En utilisant le tableau de signe de  $f''_n$  sur  $\mathbb{R}$  (question précédente), l'unique réel  $x$  tel que  $f''_n(x) = 0$  et tel que la fonction  $f''_n$  change de signe en  $x$  est  $x = 0$ , donc le point  $A(0; f(0))$  est l'unique point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_n$ .

#### Exercice 4.4.

##### Partie A. Théorème de Rolle

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ , dérivable sur  $]a; b[$  et telle que  $f(a) = f(b)$ .

On souhaite démontrer dans cette partie qu'il existe  $c \in ]a; b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .



1. Si  $f$  est constante sur  $[a; b]$ , alors pour tout  $c \in [a; b]$ ,  $f'(c) = 0$ . Le théorème de Rolle est donc établi.
2. On suppose dans cette question que  $f$  n'est pas constante sur  $[a; b]$ . Il existe donc  $t_0 \in [a; b]$  tel que  $f(t_0) \neq f(a)$ , c'est-à-dire tel que  $f(t_0) > f(a)$  ou  $f(t_0) < f(a)$ .

On supposera dans la suite que  $f(t_0) > f(a)$  (l'autre cas se traite de manière analogue).

- (a) Puisque  $f$  est continue sur  $[a; b]$ , le théorème des bornes atteintes affirme que  $f$  admet un maximum sur  $[a; b]$  : il existe donc  $c \in [a; b]$  tel que pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) \leq f(c)$ .
- (b) En particulier, pour  $x = t_0$  on obtient  $f(t_0) \leq f(c)$ . Mais puisque par hypothèse  $f(a) < f(t_0)$ , il vient que  $f(a) < f(c)$ .  
Puisque  $f(a) < f(c)$ , alors  $a \neq c$ , et puisque  $f(a) = f(b)$ , alors  $b \neq c$ .  
Finalement :  $c \in ]a; b[$ .
- (c) Nous avons montré qu'il existe  $c \in ]a; b[$  tel que pour tout  $x \in ]a; b[$ ,  $f(x) \leq f(c)$  :  $f(c)$  est donc un maximum local de  $f$  par définition.  
En vertu de la condition nécessaire d'existence d'un extremum local énoncé en début d'exercice, puisque  $f$  est dérivable sur  $]a; b[$  et que  $c \in ]a; b[$ , il vient que  $f'(c) = 0$ .

**Application.** La fonction  $g$  est continue sur  $[0; 1]$  comme somme de fonctions continues sur  $[0; 1]$ . Puisque  $g(0) = 0 \leq 1$  et  $g(1) = 3 \geq 1$ , alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $a \in [0; 1]$  tel que  $g(a) = 1$ .

La fonction  $g$  est continue sur  $[-1; a]$ , dérivable sur  $] -1; a[$  comme somme de fonctions dérivables sur  $] -1; a[$ , et  $g(-1) = g(a)$ , donc d'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ] -1; a[$  tel que  $g'(c) = 0$ .

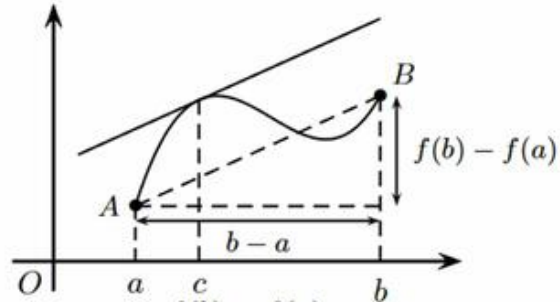
### Partie B. Théorème des accroissements finis

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$ .

On souhaite démontrer dans cette partie qu'il existe  $c \in ]a; b[$  tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dans un repère orthogonal du plan, le théorème des accroissements finis affirme qu'il existe au moins une tangente à la courbe représentative de  $f$  dans l'intervalle  $]a; b[$  qui est parallèle à la droite  $(AB)$  où  $A(a; f(a))$  et  $B(b; f(b))$ .



Pour ce faire, on note  $g$  la fonction  $x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$  définie sur  $[a; b]$ .

- La fonction  $g$  est continue sur  $[a; b]$  comme somme de fonctions continues sur  $[a; b]$ .  
— La fonction  $g$  est dérivable sur  $]a; b[$  comme somme de fonctions dérivables sur  $]a; b[$  et, pour tout  $x \in ]a; b[$  :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$\begin{aligned} - g(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a) \\ g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) \end{aligned}$$

Par conséquent :  $g(a) = g(b)$ .

- D'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a; b[$  tel que  $g'(c) = 0$ , c'est-à-dire :

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \quad \text{soit : } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Application.** Soit  $f$  vérifiant les hypothèses, soit  $x \in I \setminus \{a\}$ . Supposons par exemple que  $x < a$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $[x; a]$  (par la première hypothèse) et est dérivable

sur  $]x; a[$  (par la seconde hypothèse). D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c_x \in ]x; a[$  tel que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \quad (1)$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow a^-} c_x = a$  par le théorème des gendarmes et  $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = \ell$  (par la troisième hypothèse), il vient  $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(c_x) = \ell$  par composition de limites (voir exercice 2.3).

On fait tendre  $x$  vers  $a$  dans (1), on obtient :  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ .

On montre de manière strictement analogue que  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ .

Ainsi, puisque  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ , on a montré que  $f$  est bien dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$  par définition.

#### Exercice 4.5.

##### Partie A. Définition formelle

1. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  et soient  $x$  et  $y$  deux réels de  $I$ .

$$\begin{aligned} \text{(a) Posons } \mathcal{S} &= \{a \in \mathbb{R} \mid \exists \lambda \in [0; 1], a = (1 - \lambda)x + \lambda y\} \\ &= \{(1 - \lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in [0; 1]\} \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que le segment d'extrémités  $x$  et  $y$  est égal à l'ensemble  $\mathcal{S}$ .

— Si  $x = y$ , alors  $[x; y] = \{x\}$  et  $\mathcal{S} = \{x\}$ , donc  $[x; y] = \mathcal{S}$ .

— Supposons que  $x < y$ . Procédons par double inclusion.

— Montrons que  $\mathcal{S} \subset [x; y]$ . Soit  $a \in \mathcal{S}$ . Alors il existe  $\lambda \in [0; 1]$  tel que  $a = (1 - \lambda)x + \lambda y$ .

Puisque  $0 \leq \lambda \leq 1$ , alors  $0 \leq \lambda(y - x) \leq y - x$  car  $y - x > 0$ , donc  $x \leq x + \lambda(y - x) \leq y$ , c'est-à-dire  $x \leq a \leq y$ , soit  $a \in [x; y]$ .

— Montrons que  $[x; y] \subset \mathcal{S}$ . Soit  $a \in [x; y]$ . Posons  $\lambda = \frac{a - x}{y - x}$ .

Puisque  $x \leq a \leq y$ , alors  $0 \leq a - x \leq y - x$ , donc  $0 \leq \frac{a - x}{y - x} \leq 1$  car  $y - x > 0$ , c'est-à-dire  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

De plus, on a :

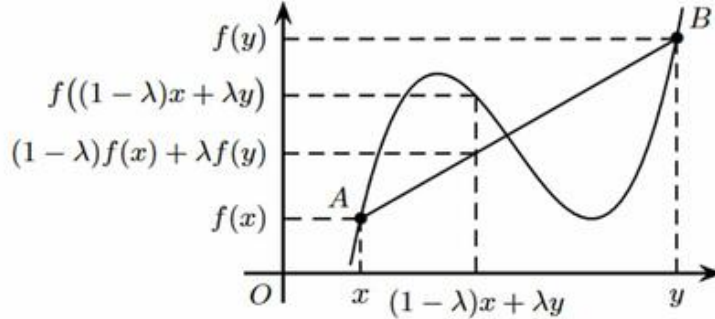
$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x + \lambda y &= \left(1 - \frac{a - x}{y - x}\right)x + \frac{a - x}{y - x}y = \frac{y - a}{y - x}x + \frac{a - x}{y - x}y \\ &= \frac{(y - a)x + (a - x)y}{y - x} = \frac{(y - x)a}{y - x} = a. \end{aligned}$$

On a donc montré que  $a \in \mathcal{S}$ .

— Si  $y < x$ , on montre de même que  $[y; x] = \mathcal{S}$ .

On montre de manière strictement analogue que le segment d'extrémités  $f(x)$  et  $f(y)$  est l'ensemble des réels de la forme  $(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$ , où  $\lambda \in [0; 1]$ .

- (b) Notons  $A$  et  $B$  les points de coordonnées respectivement  $(x; f(x))$  et  $(y; f(y))$ .



Soit  $M$  un point de coordonnées  $(a; b)$ . On a :

$$M \in [AB] \iff \begin{cases} a \text{ est un réel du segment d'extrémités } x \text{ et } y \\ b \text{ est un réel du segment d'extrémités } f(x) \text{ et } f(y) \end{cases}$$

$$\iff \exists \lambda \in [0; 1], \begin{cases} a = (1 - \lambda)x + \lambda y \\ b = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \end{cases} \quad (\text{question 1})$$

Finalement, le segment  $[AB]$  est l'ensemble des points dont les coordonnées sont de la forme  $((1 - \lambda)x + \lambda y; (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y))$  où  $\lambda \in [0; 1]$ .

2. Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Notons  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère du plan. Par définition :

—  $f$  est convexe sur  $I$  si  $\mathcal{C}$  est en-dessous de toutes ses cordes sur  $I$ , c'est-à-dire, d'après la question 1, si :

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0; 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y);$$

—  $f$  est concave sur  $I$  si  $\mathcal{C}$  est au-dessus de toutes ses cordes sur  $I$ , c'est-à-dire, d'après la question 1, si :

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0; 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

- (a) Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  et pour tout  $\lambda \in [0; 1]$ , on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$|(1 - \lambda)x + \lambda y| \leq |(1 - \lambda)x| + |\lambda y| = (1 - \lambda)|x| + \lambda|y|,$$

donc la fonction  $x \mapsto |x|$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  par définition.

- (b) Soient  $x, y \in ]0; +\infty[$  et  $\lambda \in [0; 1]$ . Par définition, il s'agit de montrer que :

$$\frac{1}{(1 - \lambda)x + \lambda y} \leq \frac{1 - \lambda}{x} + \frac{\lambda}{y}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1-\lambda}{x} + \frac{\lambda}{y} - \frac{1}{(1-\lambda)x + \lambda y} \\
 &= \frac{(1-\lambda)y[(1-\lambda)x + \lambda y] + \lambda x[(1-\lambda)x + \lambda y] - xy}{xy[(1-\lambda)x + \lambda y]} \\
 &= \frac{(1-\lambda)^2 \lambda xy + (1-\lambda)\lambda y^2 + (1-\lambda)\lambda x^2 + \lambda^2 xy - xy}{xy[(1-\lambda)x + \lambda y]} \\
 &= \frac{xy[(1-\lambda)^2 + \lambda^2 - 1] + (1-\lambda)\lambda(x^2 + y^2)}{xy[(1-\lambda)x + \lambda y]} \\
 &= \frac{2(\lambda-1)\lambda xy + (1-\lambda)\lambda(x^2 + y^2)}{xy[(1-\lambda)x + \lambda y]} \\
 &= \frac{(1-\lambda)\lambda(x^2 + y^2 - 2xy)}{xy[(1-\lambda)x + \lambda y]} \\
 &= \frac{(1-\lambda)\lambda(x-y)^2}{xy[(1-\lambda)x + \lambda y]} \geq 0,
 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité souhaitée.

Nous avons montré que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est convexe sur  $]0; +\infty[$ .

### Partie B. Première caractérisation des fonctions convexes dérivables

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Notons  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

Supposons que  $\mathcal{C}$  est située au-dessus de toutes ses tangentes sur  $I$ , et montrons que  $f$  est convexe sur  $I$ .

Soient  $x, y \in I$  et  $\lambda \in [0; 1]$ . Posons  $a = (1-\lambda)x + \lambda y \in I$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  est située au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier au dessus de sa tangente en  $a$ , donc pour tout  $t \in I$  :  $f(t) \geq f'(a)(t-a) + f(a)$ .

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 & (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \\
 & \geq (1-\lambda)[f'(a)(x-a) + f(a)] + \lambda[f'(a)(y-a) + f(a)] \\
 & = (1-\lambda)f'(a)(x-a) + (1-\lambda)f(a) + \lambda f'(a)(y-a) + \lambda f(a) \\
 & = f'(a)[(1-\lambda)(x-a) + \lambda(y-a)] + f(a)(1-\lambda + \lambda) \\
 & = f'(a)[(1-\lambda)x + \lambda y - a(1-\lambda) - \lambda a] + f(a) \\
 & = f'(a)\underbrace{[(1-\lambda)x + \lambda y - a]}_{=a} + f(a) \\
 & = f(a) \\
 & = f((1-\lambda)x + \lambda y).
 \end{aligned}$$

Par définition, la fonction  $f$  est convexe sur  $I$ .

## Partie C. Inégalité de Jensen

1. Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : « Pour tous  $x_1, \dots, x_n \in I$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0; 1]$  tels que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ ,  $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$  ».

— Initialisation. Il est clair que  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

— Hérité. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire tel que : pour tous  $x_1, \dots, x_n \in I$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0; 1]$  tels que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ ,  $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$ . Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

Soient  $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0; 1]$  tels que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$ .

Si  $\lambda_{n+1} = 0$ , l'inégalité est établie par l'hypothèse de récurrence.

Supposons donc que  $\lambda_{n+1} > 0$ .

Posons  $\lambda'_n = \lambda_n + \lambda_{n+1} \in ]0; 1]$  et  $x'_n = \frac{\lambda_n}{\lambda'_n} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda'_n} x_{n+1} \in I$ .

La fonction  $f$  étant convexe sur  $I$ , on a par définition :

$$f(x'_n) = f\left(\frac{\lambda_n}{\lambda'_n} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda'_n} x_{n+1}\right) \leq \frac{\lambda_n}{\lambda'_n} f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda'_n} f(x_{n+1}) \quad (1)$$

De plus, en appliquant l'hypothèse de récurrence aux  $n$  réels  $x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n$  et aux  $n$  coefficients  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda'_n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda'_n x'_n) \\ &\stackrel{\text{H.R.}}{\leq} \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + \lambda'_n f(x'_n) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \quad \text{d'après (1).} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

— Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(1)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  non nul.

2. Application.

(a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n \in ]0; 1]$  tels que  $a_1 + \dots + a_n = 1$ .  
On note  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in ]0; 1]$  par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}.$$

La fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; 1]$  et, pour tout  $x \in ]0; 1]$  :  
 $f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} \geq 0$ , donc  $f$  est convexe sur  $]0; 1]$ .

D'après l'inégalité de Jensen appliquée aux réels  $a_1, \dots, a_n$  et aux coefficients  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$  qui sont bien dans l'intervalle  $[0; 1]$  et de somme 1 :

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i),$$

c'est-à-dire :

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i) \quad \text{car} \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1 \quad \text{par hypothèse,}$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{1}{n} + n\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2,$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geq \frac{(n^2 + 1)^2}{n}.$$

(b) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \in ]0; +\infty[$  et  $b \in [0; +\infty[$ .

On note  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{a+x}.$$

La fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout  $x \in [0; +\infty[$  :  $f''(x) = \frac{2}{(a+x)^3} \geq 0$ , donc  $f$  est convexe sur  $[0; +\infty[$ .

D'après l'inégalité de Jensen appliquée aux réels  $(kb)_{0 \leq k \leq n}$  et aux coefficients  $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n+1}$  qui sont bien dans l'intervalle  $[0; 1]$  et de somme 1 :

$$f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n kb\right) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(kb).$$

D'une part :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n kb\right) &= f\left(\frac{b}{n+1} \sum_{k=0}^n k\right) = f\left(\frac{b}{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{n}{2}b\right) = \frac{1}{a + \frac{n}{2}b} \end{aligned}$$

$$\text{et d'autre part : } \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(kb) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{a+kb}.$$

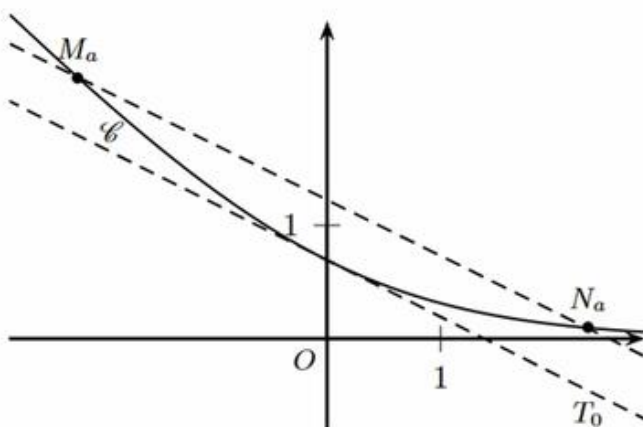
On conclut donc :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{a+kb} \geq (n+1) \frac{1}{a + \frac{n}{2}b}.$$

**Exercice 5.1.** On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}).$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. La courbe  $\mathcal{C}$  est tracée ci-dessous.



1. (a) On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^{-x}) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  donc par composition de limites (voir exercice 2.3.) :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{-x}) = +\infty$ .
- (b) On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$  par continuité de la fonction  $\ln$  en 1, donc par composition de limites (voir exercice 2.3.) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$ .
- (c) La fonction  $u : x \mapsto 1 + e^{-x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et la fonction  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc la fonction  $f : x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par composition de fonctions et, pour tout réel  $x$ , on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{-e^{-x} \times e^x}{(1 + e^{-x}) \times e^x} = \frac{-1}{1 + e^x}.$$

- (d) Pour tout réel  $x$ ,  $1 + e^x > 0$ , donc  $f'(x) < 0$  et donc la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f$	$+\infty$	$0$

2. On note  $T_0$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en son point d'abscisse 0.

(a) L'équation réduite de la droite  $T_0$  est donnée par :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = \frac{-1}{1 + e^0}x + \ln(1 + e^{-0}) = -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

(b) La fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$  :

$$f''(x) = \frac{0(1 + e^x) - (-1)e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0.$$

Par conséquent, la fonction  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

(c) Puisque  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ , la courbe  $\mathcal{C}$  se situe au dessus de toutes ses tangentes. En particulier,  $\mathcal{C}$  se situe au dessus de  $T_0$ , donc pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$ .

3. Pour tout nombre réel  $a$  différent de 0, on note  $M_a$  et  $N_a$  les points de la courbe  $\mathcal{C}$  d'abscisses respectives  $-a$  et  $a$ . On a donc :  $M_a(-a; f(-a))$  et  $N_a(a; f(a))$ .

(a) Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} f(x) - f(-x) &= \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^x) = \ln\left(\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^{-x}(e^x + 1)}{1 + e^x}\right) = \ln(e^{-x}) = -x. \end{aligned}$$

(b) La droite  $(M_aN_a)$  a pour coefficient directeur :

$$\frac{y_{N_a} - y_{M_a}}{x_{N_a} - x_{M_a}} = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}.$$

La droite  $T_0$  a pour coefficient directeur  $-\frac{1}{2}$ .

Les droites  $T_0$  et  $(M_aN_a)$  ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles.

**Exercice 5.2.** On note  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in ]-1; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal du plan.

## Partie A

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $] - 1; +\infty[$  comme somme et quotient de fonctions dérivables sur  $] - 1; +\infty[$ .

Pour tout  $x \in ] - 1; +\infty[$ , on a :  $f(x) = x - \frac{u(x)}{v(x)}$  avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(x+1); & v(x) &= x+1; \\ u'(x) &= \frac{1}{x+1}; & v'(x) &= 1, \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = 1 - \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - (1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{x^2 + 2x + 1}. \end{aligned}$$

2. Notons  $N$  la fonction définie pour tout  $x \in ] - 1; +\infty[$  par :

$$N(x) = \ln(x+1) + x^2 + 2x.$$

- (a) — On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ , donc par composition de limite (voir exercice 2.3.) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ .

$$\text{De plus : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x) = +\infty.$$

$$\text{Donc par somme de limites : } \lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = +\infty.$$

- On a  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1) = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ , donc par composition de limite (voir exercice 2.3.) :  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \ln(x+1) = -\infty$ .

$$\text{De plus : } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 + 2x) = -1.$$

$$\text{Donc par somme de limites : } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} N(x) = -\infty.$$

- (b) La fonction  $N$  est dérivable sur  $] - 1; +\infty[$  comme somme de fonctions dérivables et, pour tout  $x \in ] - 1; +\infty[$ , on a :

$$N'(x) = \frac{1}{x+1} + 2x + 2 = \frac{1 + (2x+2)(x+1)}{x+1} = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1}.$$

Pour tout  $x \in ] - 1; +\infty[$ ,  $x+1 > 0$  et  $1 + 2(x+1)^2 > 0$ , donc  $N'(x) > 0$ . Par conséquent, la fonction  $N$  est strictement croissante sur  $] - 1; +\infty[$ .

$x$	-1	0	$+\infty$
$N'(x)$		+	
$N$			$+\infty$

- (c) On a  $N(0) = \ln(0+1) + 0^2 + 2 \times 0 = \ln(1) = 0$ .  
On déduit du tableau des variations de  $N$  le signe de  $N$  sur  $] -1; +\infty[$ .

$x$	-1	0	$+\infty$
$N(x)$		-	+

- (d) Pour tout  $x \in ] -1; +\infty[$ , on a  $(x+1)^2 > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est du signe uniquement de  $\ln(x+1) + x^2 + 2x$ , c'est-à-dire de  $N(x)$ .  
On déduit donc le tableau de signe de  $f'$  sur  $] -1; +\infty[$  puis le tableau des variations de  $f$  sur  $] -1; +\infty[$ .

$x$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f$	$+\infty$		$+\infty$

$$- f(0) = 0 - \frac{\ln(1+0)}{1+0} = -\frac{\ln(1)}{1} = 0$$

- On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  par croissance comparée, donc par composition de limites (voir exercice 2.3.) :
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0, \text{ et donc par produit et somme de limites :}$$
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

On a :  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1) = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$ , donc par com-

position de limites :  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = -\infty$ , et donc par produit et somme de limites :  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$ .

3. On résout l'équation  $f(x) = x$  d'inconnue  $x \in ] -1; +\infty[$ .

Pour tout  $x \in ]-1; +\infty[$ , on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x - \frac{\ln(1+x)}{1+x} = x \\ &\iff \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \\ &\iff \ln(1+x) = 0 \text{ car } 1+x \neq 0 \\ &\iff \ln(1+x) = \ln(1) \\ &\iff 1+x = 1 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, le point d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite d'équation  $y = x$  est le point  $O(0; 0)$ .

Autrement dit, l'unique point fixe de la fonction  $f$  sur  $] - 1 ; +\infty[$  est 0.

### Partie B

- Soit  $x \in [0; 4]$ . Alors  $0 \leq x \leq 4$ , donc  $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$  puisque la fonction  $f$  est croissante sur  $[0; 4]$ , c'est-à-dire  $0 \leq f(x) \leq 4 - \frac{\ln(5)}{5}$ .  
Or  $4 - \frac{\ln(5)}{5} \leq 4$ , donc  $0 \leq f(x) \leq 4$ , c'est-à-dire  $f(x) \in [0; 4]$ .
- On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 4$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$  ».
    - Initialisation. On a  $u_0 = 4$ ,  $u_1 = f(u_0) = f(4) = 4 - \frac{\ln(5)}{5} \leq 4$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
    - Hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$ .  
Par hypothèse de récurrence, on a :  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ , donc :  $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(4)$  car la fonction  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ , donc :  $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4 - \frac{\ln(5)}{5} \leq 4$ .  
On a donc montré que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.
    - Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .
  - D'après la question précédente, la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente. On désigne par  $\ell$  sa limite.
  - Récapitulons les hypothèses nécessaires à l'application du théorème du point fixe.
    - La fonction  $f$  est continue sur  $[0; 4]$  car elle est dérivable sur cet intervalle (question A.1).

- L'intervalle  $[0; 4]$  est stable par la fonction  $f$  (question B.1).
- La suite  $(u_n)$  est à valeurs dans l'intervalle  $[0; 4]$  (question B.2.(a)).
- La suite  $(u_n)$  est convergente vers un réel  $\ell$  (question B.2.(b)). Par ailleurs, puisque  $(u_n)$  est bornée par 0 et 4, alors  $\ell \in [0; 4]$ .

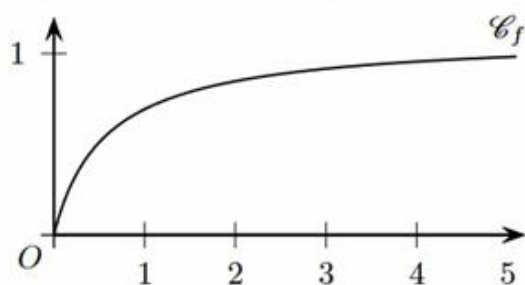
Finalement, d'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution sur  $[0; 4]$  de l'équation  $f(x) = x$ .

D'après la question A.3, on obtient  $\ell = 0$ .

**Exercice 5.3.** On note  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln \left( \frac{3x+1}{x+1} \right).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal.



#### Partie A

1. Pour tout réel  $x > 0$ , on a :  $\frac{3x+1}{x+1} = \frac{x \left( 3 + \frac{1}{x} \right)}{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , il vient que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{1}{x} \right) = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 1$  par somme de limites, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x+1} = 3$  par quotient de limites.

De plus, on a  $\lim_{x \rightarrow 3} \ln(x) = \ln(3)$  par continuité de la fonction  $\ln$  en 3, donc par composition de limites (voir exercices 2.3.), on obtient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ .

2. (a) La fonction  $u : x \mapsto \frac{3x+1}{x+1}$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme quotient de fonction dérivables sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout  $x \in [0; +\infty[$  on a :

$$u'(x) = \frac{3(x+1) - (3x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

De plus, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a  $u(x) > 0$ .

Donc la fonction  $f : x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  par composition et pour tout  $x \in [0; +\infty[$  :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{3x+1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{3x+1} = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}.$$

- (b) Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a  $x+1 > 0$  et  $3x+1 > 0$ , donc  $(x+1)(3x+1) > 0$  et donc  $f'(x) > 0$ .  
Par conséquent, la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

### Partie B

Notons  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout entier naturel :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété «  $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$  ».

— Initialisation. On a  $u_0 = 3$  et  $u_1 = f(u_0) = \ln\left(\frac{3u_0+1}{u_0+1}\right) = \ln\left(\frac{10}{4}\right) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0,92$ , donc  $\frac{1}{2} \leq u_1 \leq u_0$ , et ainsi  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

— Hérédité. Soit  $n$  un entier naturel tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire tel que  $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ . Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $\frac{1}{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$ .

Par hypothèse de récurrence, on a  $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ . La fonction  $f$  étant strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ , on a :  $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ .

Puisque  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3 \times 1/2 + 1}{1/2 + 1}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0,51 > \frac{1}{2}$ , il vient finalement :  $\frac{1}{2} \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ , donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

— Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

2. (a) D'après la question précédente, la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par  $1/2$ , donc la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$  d'après le théorème de convergence monotone.

- (b) Récapitulons les hypothèses nécessaires à l'application du théorème du point fixe.

— La fonction  $f$  est continue sur  $[1/2; +\infty[$  car elle est dérivable sur cet intervalle (question A.2.(a)).

— L'intervalle  $[1/2; +\infty[$  est stable par la fonction  $f$ .

En effet, si  $x$  est un réel tel que  $\frac{1}{2} \leq x$ , alors  $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x)$  car  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$  (question A.2.(b)), c'est-à-dire  $\ln\left(\frac{5}{3}\right) \leq f(x)$ , donc  $\frac{1}{2} \leq f(x)$  car  $\frac{1}{2} \leq \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ , soit  $f(x) \in [1/2; +\infty[$ .

— La suite  $(u_n)$  est à valeurs dans l'intervalle  $[1/2; +\infty[$  (question B.1).

- La suite  $(u_n)$  est convergente vers un réel  $\ell$  (question B.2.(a)). Par ailleurs, puisque  $(u_n)$  est minorée par  $1/2$ , alors  $\ell \in [1/2; +\infty[$ .  
Finalement, d'après le théorème du point fixe,  $\ell$  est solution de l'équation  $f(x) = x$  sur l'intervalle  $[1/2; +\infty[$ .

### Partie C

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de  $\ell$ .  
On introduit pour cela la fonction  $g$  définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

On donne ci-dessous le tableau des variations de la fonction  $g$  sur  $[0; +\infty[$  où  $x_0 = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \approx 0,215$  et  $g(x_0) \approx 0,088$ , en arrondissant à  $10^{-3}$ .

$x$	0	$x_0$	$\alpha$	$+\infty$
$g$	0	$g(x_0)$	0	$-\infty$

- Sur l'intervalle  $[0; x_0]$ , la fonction  $g$  est strictement croissante. Puisque  $g(0) = 0$ , il vient que l'unique solution sur  $[0; x_0]$  de l'équation  $g(x) = 0$  est 0.  
— Sur l'intervalle  $[x_0; +\infty[$ , la fonction  $g$  est continue et strictement décroissante. De plus,  $g(x_0) > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , donc la fonction  $g$  change de signe sur l'intervalle  $[x_0; +\infty[$ . D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[x_0; +\infty[$ . Puisque  $x_0 > 0$ ,  $\alpha$  est bien strictement positif.  
Finalement, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  strictement positive.
- (a) La fonction Python ci-dessous nommée **f** renvoie la valeur  $f(x)$  pour un réel  $x$  positif donné en argument.

```
1 def f(x):
2     return np.log((3 * x + 1) / (x + 1))
```

- (b) Le programme Python ci-dessous affiche une valeur approchée de  $\alpha$  par excès à 0,01 près.

```
1 x = 0.22
2 while f(x) - x > 0:
3     x = x + 0.01
4 print(x)
```

- (c) La valeur affichée par le programme ci-dessus est environ égale à 0,53.  
 3. La limite  $\ell$  vérifie l'égalité  $f(\ell) - \ell = 0$ . Sa valeur approchée à 0,01 près est donc égale à 0,53.

**Exercice 5.4.** L'objectif de cet exercice est de montrer que la série harmonique, c'est-à-dire la suite  $(h_n)$  définie pour tout entier  $n \geq 1$  par :  $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , est divergente.

1. On note  $f$  et  $g$  les fonctions définies pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

- (a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme somme de fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout réel  $x$  positif :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1 - (1+x)}{1+x} = -\frac{x}{1+x}.$$

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a  $f'(x) < 0$ , donc la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	-
$f$	0	$-\infty$

$$f(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln(1) = 0$$

- (b) La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme somme de fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout réel  $x$  positif :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - (1+x) + x(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}.$$

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a  $g'(x) > 0$ , donc la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
$g$	0	$+\infty$

$$g(0) = \ln(1+0) - 0 + \frac{0^2}{2} = \ln(1) = 0$$

- (c) Le maximum de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$  est égal à 0, donc pour tout réel  $x \geq 0$ , on a :  $f(x) \leq 0$ , soit :  $\ln(1+x) - x \leq 0$ , soit :  $\ln(1+x) \leq x$ .  
Le minimum de la fonction  $g$  sur  $[0; +\infty[$  est égal à 0, donc pour tout réel  $x \geq 0$ , on a :  $g(x) \geq 0$ , soit :  $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$ , soit :  
 $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ .

On obtient finalement pour tout réel  $x \geq 0$  :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad (1)$$

2. (a) Soit un entier  $k \geq 1$ . En prenant  $x = \frac{1}{k}$  dans la double inégalité (1), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} &\leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \\ \text{soit : } \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} &\leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \\ \text{soit : } \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} &\leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k+1} = \frac{2k(k+1) - (k+1) - 2k^2}{2k^2(k+1)} = \frac{k-1}{2k^2(k+1)} \geq 0,$$

donc :  $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}$ , et il vient ensuite que :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \quad (2)$$

- (b) Soit un entier  $n \geq 2$ . En passant à la somme quand  $k$  varie de 1 à  $n-1$  dans (2), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Exprimons chacun des trois termes en fonction de  $n$ .

D'une part, on a :  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = h_n - 1$ , et d'autre part

on a :  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} = h_n - \frac{1}{n}$ .

On a de plus :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k)$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln(2) + \cdots + \ln(n) - (\ln(1) + \cdots + \ln(n-1)) \\
 &= \ln(n) - \ln(1) = \ln(n).
 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$h_n - 1 \leq \ln(n) \leq h_n - \frac{1}{n} \quad (3)$$

Dans (3), l'inégalité de droite implique :  $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq h_n$  et l'inégalité de gauche implique :  $h_n \leq \ln(n) + 1$ , donc finalement :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq h_n \leq \ln(n) + 1.$$

On vérifie aisément que cette dernière double inégalité reste valable pour  $n = 1$ , donc pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq h_n \leq \ln(n) + 1 \quad (4)$$

(c) Pour tout entier  $n \geq 1$ , il vient de (4) que :  $h_n \geq \ln(n) + \frac{1}{n}$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \ln(n) + \frac{1}{n} \right) = +\infty$ , il vient que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = +\infty$  par théorème de comparaison.

3. Soit un entier  $n \geq 2$ . Dans (4), on divise par  $\ln(n) > 0$  :

$$1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{h_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Puisque :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n \ln(n)} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{\ln(n)} \right) = 1$ , il vient d'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1$ .

**Exercice 6.1.** On note  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right[$  par :

$$f(x) = \frac{7}{2} + 2 \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{4}{\cos(x)}.$$

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right[$  comme somme de fonctions dérivables sur  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right[$  et, pour tout  $x \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right[$ , on a :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2 \frac{\cos(x) \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} - \frac{0 \cos(x) - 4(-\sin(x))}{\cos(x)^2} \\
 &= 2 \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} - \frac{4 \sin(x)}{\cos(x)^2} \\
 &= \frac{2 - 4 \sin(x)}{\cos(x)^2} \quad \text{car } \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.
 \end{aligned}$$

2. Pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , on a  $\cos(x)^2 > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $2 - 4\sin(x)$ .

Pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  :

$$2 - 4\sin(x) > 0 \iff 4\sin(x) < 2 \iff \sin(x) < \frac{1}{2} \iff x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right].$$

On dresse le tableau de signe de  $f'$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	0	-

3. (a) Pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  :  $f(x) = \frac{7}{2} + 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{4}{\cos(x)} = \frac{7}{2} + \frac{2\sin(x) - 4}{\cos(x)}$ .

- (b) Pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , on a  $0 \leq \sin(x) < 1$ , donc  $0 \leq 2\sin(x) < 2$ , donc  $-4 \leq 2\sin(x) - 4 < -2$ , donc  $\frac{2\sin(x) - 4}{\cos(x)} < -\frac{2}{\cos(x)}$  car  $\cos(x) > 0$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \cos(x) = 0^+$ , alors  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{2}{\cos(x)} = +\infty$  par quotient

de limites, donc  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \left(-\frac{2}{\cos(x)}\right) = -\infty$  par produit de limites, et

donc d'après le théorème de comparaison :  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{2\sin(x) - 4}{\cos(x)} = -\infty$ .

Finalement :  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \left(\frac{7}{2} + \frac{2\sin(x) - 4}{\cos(x)}\right) = -\infty$  par somme de limites.

4. On dresse le tableau des variations complet de  $f$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

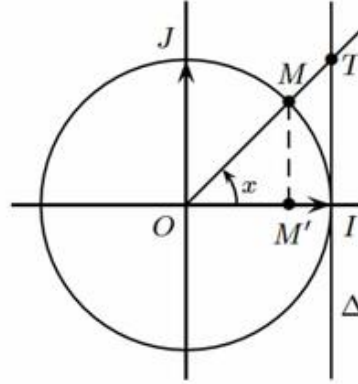
$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
$f$	$-\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$-\infty$

$$f(0) = \frac{7}{2} + 2\frac{\sin(0)}{\cos(0)} - \frac{4}{\cos(0)} = \frac{7}{2} - 4 = -\frac{1}{2}$$

## Exercice 6.2.

## Partie A. Introduction

On munit le plan d'un repère orthonormé  $(O; I, J)$ . Soit  $x$  un réel distinct de  $\pi/2$ . On note  $M$  le point image de  $x$  sur le cercle trigonométrique de centre  $O$ ,  $\Delta$  la droite d'équation  $x = 1$  et  $T$  le point d'intersection des droites  $(OM)$  et  $\Delta$ .



Notons  $M'$  le projet orthogonal de  $M$  sur la droite  $(OI)$ . Les droites  $(MM')$  et  $(TI)$  étant parallèles, on obtient en vertu du théorème de Thalès :

$$\frac{OI}{OM'} = \frac{TI}{MM'}, \text{ soit : } \frac{1}{\cos(x)} = \frac{TI}{\sin(x)}, \text{ soit : } TI = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Par conséquent, les coordonnées du point  $T$  sont :  $\left(1; \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)$ .

Partie B. Étude sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ 

On appelle fonction tangente, notée  $\tan$ , la fonction ci-dessous :

$$\tan : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

1. En notant  $D_{\cos}$  le domaine de définition de la fonction  $\cos$ , il est clair que :

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus D_{\cos}, \text{ soit : } D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. (a) Pour tout  $x \in D_{\tan}$  :  $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(-x)} = -\tan(x)$ .

La fonction  $\tan$  est donc impaire sur  $D_{\tan}$ .

- (b) Pour tout  $x \in D_{\tan}$  :  $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$ .

La fonction  $\tan$  est donc  $\pi$ -périodique.

(c) La fonction  $\tan$  étant  $\pi$ -périodique, on peut restreindre l'étude à un intervalle de longueur  $\pi$ , par exemple l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .

Mais puisque la fonction  $\tan$  est impaire sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ , on peut par symétrie limiter l'étude à l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}[$ .

3. On a  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sin(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \cos(x) = 0^+$ , donc par quotient de

$$\text{limites : } \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan(x) = +\infty.$$

La courbe représentative de la fonction  $\tan$  dans un repère orthogonal du plan admet une asymptote verticale d'équation réduite  $x = \frac{\pi}{2}$ .

4. (a) La fonction  $\tan$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}[$  comme quotient de deux fonctions dérivables sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$  et, pour tout  $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$  on a :

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2} \text{ car } \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1. \end{aligned}$$

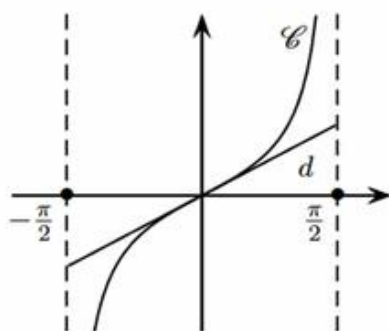
(b) Pour tout  $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$ , puisque  $\cos(x)^2 > 0$ , alors  $\tan'(x) > 0$ .

La fonction  $\tan$  est donc strictement croissante sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$ .

On déduit le tableau des variations de  $\tan$  sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  :

$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

5. La droite  $d$  représentative de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0 a pour équation réduite :  $y = \tan'(0)(x - 0) + \tan(0)$ , soit :  $y = \frac{1}{\cos(0)^2}x + \frac{\sin(0)}{\cos(0)}$ , soit encore :  $y = x$ .



Notons  $\varphi$  la fonction  $x \mapsto \tan(x) - x$  définie sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .

La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  comme somme de deux fonctions dérivables sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  et, pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  on a :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} - 1 = \frac{1 - \cos(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \tan(x)^2.$$

On a  $\varphi'(0) = 0$  et pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \setminus \{0\}$ ,  $\varphi'(x) > 0$ , donc la fonction  $\varphi$  est strictement croissante sur les intervalles  $]-\frac{\pi}{2}; 0[$  et  $]0; \frac{\pi}{2}[$ .

$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi'(x)$		+	
$\varphi$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

—  $\varphi(0) = \tan(0) - 0 = 0$

— On a  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan(x) - x) = +\infty$  par somme de limites.

— On a  $\lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} (\tan(x) - x) = -\infty$  par somme de limites.

Ainsi pour tout  $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , on a  $\varphi(x) > 0$ , soit  $\tan(x) > x$ . Graphiquement, cela signifie que la courbe  $\mathcal{C}$  est strictement au dessus de la droite  $d$  sur l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ .

De même, pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}; 0[$ , on a  $\varphi(x) < 0$ , soit  $\tan(x) < x$ . Graphiquement, cela signifie que la courbe  $\mathcal{C}$  est strictement en-dessous de la droite  $d$  sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}; 0[$ .

Enfin, la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $d$  admettent un point d'intersection : l'origine du repère.

### Partie C. Quelques propriétés

1. Pour tous réels  $x$  et  $y$  de l'ensemble  $D_{\tan}$ , on a :

$$\begin{aligned} \tan(x) = \tan(y) &\iff \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \\ &\iff \sin(x) \cos(y) = \cos(x) \sin(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(x - y) = 0 \quad (\text{deuxième formule d'addition}) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k\pi. \end{aligned}$$

2. Pour tout réels  $x$  et  $y$  pour lesquels chacun des termes suivants est bien défini, on a :

$$\begin{aligned} \tan(x + y) &= \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)}{\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)} \\ &= \frac{\cos(x) \cos(y) \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \right)}{\cos(x) \cos(y) \left( 1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \times \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \right)} \\ &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}. \end{aligned}$$

### Exercice 6.3.

1. Par propriété, on a :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x} \quad \text{et} \quad \tan(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{EB}{ET} = \frac{30,6}{x}.$$

2. L'angle  $\widehat{ATB}$  admet une mesure  $\gamma$  appartenant à l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ , résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On a  $\widehat{ATB} = \widehat{ETB} - \widehat{ETA}$ , soit  $\gamma = \beta - \alpha$ , donc d'après les questions C.2 et B.2.(a) de l'exercice 1.6, on a :

$$\begin{aligned} \tan(\gamma) &= \tan(\beta - \alpha) = \tan((- \alpha) + \beta) = \frac{\tan(-\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(-\alpha) \tan(\beta)} \\ &= \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\alpha) \tan(\beta)} = \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6}{x} \times \frac{25}{x}} = \frac{\frac{5,6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}} \\ &= \frac{\frac{5,6}{x}}{\frac{x^2 + 765}{x^2}} = \frac{5,6}{x} \times \frac{x^2}{x^2 + 765} = \frac{5,6x}{x^2 + 765}. \end{aligned}$$

3. On note  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{5,6x}{x^2 + 765}$  définie sur  $]0; 50]$ .

- (a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; 50]$  comme quotient de deux fonctions dérivables sur  $]0; 50]$  et, pour tout  $x \in ]0; 50]$ , on a :

$$f'(x) = \frac{5,6(x^2 + 765) - 5,6x \times 2x}{(x^2 + 765)^2} = \frac{-5,6x^2 + 4284}{(x^2 + 765)^2}.$$

Pour tout  $x \in ]0; 50]$ , on a  $(x^2 + 765)^2 > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $-5,6x^2 + 4284$ .

Pour tout  $x \in ]0; 50]$ , on a :

$$\begin{aligned} -5,6x^2 + 4284 = 0 &\iff 5,6x^2 = 4284 \\ &\iff x^2 = \frac{4284}{5,6} = 765 \\ &\iff x = \sqrt{765} \text{ car } x > 0 \end{aligned}$$

On dresse ensuite le tableau de signe de  $f'$  sur  $]0; 50]$  et on déduit le tableau des variations de  $f$  sur  $]0; 50]$ .

$x$	0	$\sqrt{765}$	50	
$f'(x)$		+	0	-
$f$		$f(\sqrt{765})$		$f(50)$

Il apparaît donc que le maximum de la fonction  $f$  sur  $]0; 50]$  est atteint en  $\sqrt{765}$  et est égal à  $f(\sqrt{765}) \approx 0,101$ .

- (b) L'angle  $\widehat{ATB}$  est maximal si, et seulement si sa mesure  $\gamma$  est maximale. Puisque  $\gamma$  appartient à l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$  et que la fonction tangente est strictement croissante sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  (question B.4.(b) exercice 1.6), il vient que  $\gamma$  est maximal si, et seulement si  $\tan(\gamma)$  est maximal.

Le réel  $x$  étant fixé dans l'intervalle  $]0; 50]$ , puisque  $\tan(\gamma) = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$ , il vient que  $\tan(\gamma)$  est maximal lorsque  $\frac{5,6x}{x^2 + 765}$  est maximal, c'est-à-dire lorsque  $x = \sqrt{765} \approx 28$  d'après la question précédente.

Une valeur approchée de l'angle maximal  $\widehat{ATB}$  à 0,01 radian près est alors 0,1, soit environ  $5,78^\circ$ .

**Exercice 7.1.** On souhaite résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle suivante :

$$y' + y = (3 - 2x)e^x \quad (E)$$

- Considérons la fonction  $\varphi : x \mapsto (ax + b)e^x$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels, définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$\varphi$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) + \varphi(x) = (3 - 2x)e^x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, ae^x + 2(ax + b)e^x = (3 - 2x)e^x$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, (2ax + a + 2b)e^x = (3 - 2x)e^x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, 2ax + a + 2b = 3 - 2x \text{ car } e^x \neq 0 \\
&\iff \begin{cases} 2a = -2 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ -1 + 2b = 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Finalement, la fonction  $\varphi : x \mapsto (-x + 2)e^x$  est une solution particulière de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

— Les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$  sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ce^{-x} + \varphi(x) = Ce^{-x} + (-x + 2)e^x, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 7.2.** On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = y^2 \tag{E}$$

1. Considérons la fonction  $f : x \mapsto 0$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Alors pour tout réel  $x$ , on a  $f'(x) = 0$  et  $f(x)^2 = 0^2 = 0$ , donc  $f'(x) = f(x)^2$  et  $f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de (E).
2. Soit  $g$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout réel  $x$ ,  $g(x) \neq 0$ .  
Raisonnons par équivalences successives.

$$\begin{aligned}
g \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R} &\iff \forall x \in \mathbb{R} : g'(x) = g(x)^2 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R} : \frac{g'(x)}{g(x)^2} = 1 \text{ car } g(x)^2 \neq 0 \\
&\iff g \text{ solution de } \frac{y'}{y^2} = 1 \text{ sur } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

3. Notons que :  $\frac{y'}{y^2} = 1 \iff \left(-\frac{1}{y}\right)' = 1$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned}
g \text{ solution de } \frac{y'}{y^2} = 1 \text{ sur } \mathbb{R} &\iff g \text{ solution de } \left(-\frac{1}{y}\right)' = 1 \text{ sur } \mathbb{R} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-k\}, -\frac{1}{g(x)} = x + k \\
&\iff \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-k\}, g(x) = -\frac{1}{x + k}
\end{aligned}$$

Finalement, les solutions de (E) ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$  sont toutes les fonctions de la forme  $x \mapsto -\frac{1}{x + k}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-k\}$ , où  $k \in \mathbb{R}$ .

4. Notons  $h$  la solution de (E) sur  $\mathbb{R}$  telle que  $h(0) = 1$ .

Puisque  $h$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de (E), il existe un réel  $k$  tel que pour tout réel  $x \neq -k$ ,  $h(x) = -\frac{1}{x+k}$ .

Par ailleurs :  $h(0) = 1 \iff -\frac{1}{k} = 1 \iff k = -1$ .

Par conséquent, la fonction  $h : x \mapsto -\frac{1}{x-1}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  est l'unique solution de (E) qui vaut 1 en 0.

**Exercice 7.3.** On désigne par  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On suppose que la fonction  $f$  vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y'^2 - y^2 = 1$
- (2)  $f'(0) = 1$

1. (a) Par l'absurde, supposons qu'il existe un réel  $a$  tel que  $f'(a) = 0$ .  
Puisque  $f$  satisfait à la condition (1), on a en particulier :  $f'(a)^2 - f(a)^2 = 1$ , donc :  $f(a)^2 = -1$ , ce qui est absurde.  
Par conséquent, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) \neq 0$ .
- (b) Puisque  $f$  satisfait à la condition (1), on a en particulier :  $f'(0)^2 - f(0)^2 = 1$ .  
Mais puisque  $f$  satisfait à la condition (2), on a :  $f'(0) = 1$ , donc :  $1 - f(0)^2 = 1$ , soit :  $f(0)^2 = 0$ , soit encore :  $f(0) = 0$ .
2. Soit un réel  $x$ . La fonction  $f$  satisfait à la condition (1), donc :  $f'(x)^2 - f(x)^2 = 1$ , donc en dérivant les deux membres :  $2f''(x)f'(x) - 2f'(x)f(x) = 0$ , soit :

$$2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0.$$

Mais puisque  $f'(x) \neq 0$  d'après 1.(a), on obtient :  $f''(x) - f(x) = 0$ , soit :  $f''(x) = f(x)$ , ce qui prouve que  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

$$y'' = y \tag{E}$$

3. Pour tout réel  $x$ , on pose  $u(x) = f'(x) + f(x)$  et  $v(x) = f'(x) - f(x)$ .
  - (a) Puisque  $f'(0) = 1$  et  $f(0) = 0$ , on obtient :  
 $u(0) = f'(0) + f(0) = f'(0) = 1$  et  $v(0) = f'(0) - f(0) = f'(0) = 1$ .
  - (b) La fonction  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , on a :  
 $u'(x) = f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x)$  car  $f$  est solution de (E)  
 $= u(x)$

La fonction  $v$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , on a :

$$v'(x) = f''(x) - f'(x) = f(x) - f'(x) \text{ car } f \text{ est solution de (E)} \\ = -v(x)$$

- (c) La fonction  $u$  est l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' - y = 0$  avec la condition  $y(0) = 1$ , donc pour tout réel  $x : u(x) = e^x$ . La fonction  $v$  est l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' + y = 0$  avec la condition  $y(0) = 1$ , donc pour tout réel  $x : v(x) = e^{-x}$ . Par ailleurs, pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{cases} f'(x) + f(x) = u(x) \\ f'(x) - f(x) = v(x) \end{cases},$$

donc par soustraction :  $2f(x) = u(x) - v(x)$ , soit :  $f(x) = \frac{u(x) - v(x)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

Nous avons montré jusqu'à présent que si  $f$  est une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et satisfaisant aux conditions (1) et (2), alors pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

Réciproquement, on vérifie aisément que la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et satisfait aux conditions (1) et (2).

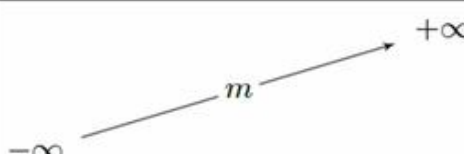
Finalement, la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  est bien l'unique fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  satisfaisant aux propriétés (1) et (2).

La fonction  $f$  se nomme la fonction **sinus-hyperbolique** et se note **sinh**.

4. (a) On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(x) = +\infty$  par somme et quotient de limites.  
On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty$  par somme et quotient de limites.
- (b) La fonction  $\sinh$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , on a :

$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

donc la fonction  $\sinh$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$\sinh$	$-\infty$		

5. (a) Soit  $m$  un nombre réel. La fonction  $\sinh$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $m \in ]\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(x)[$ , donc

d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $\sinh(x) = m$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \sinh(x) = 3 &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3 \\
 &\iff e^x - e^{-x} = 6 \\
 &\iff e^x - e^{-x} - 6 = 0 \\
 &\iff (e^x)^2 - 6e^x - 1 = 0 \text{ car } e^x \neq 0 \\
 &\iff X^2 - 6X - 1 = 0 \text{ en posant } X = e^x \\
 &\iff (X - 3)^2 - 10 = 0 \\
 &\iff (X - 3)^2 - \sqrt{10}^2 = 0 \\
 &\iff (X - 3 - \sqrt{10})(X - 3 + \sqrt{10}) = 0 \\
 &\iff X - 3 - \sqrt{10} = 0 \text{ ou } X - 3 + \sqrt{10} = 0 \\
 &\iff X = 3 + \sqrt{10} \text{ ou } X = 3 - \sqrt{10} \\
 &\iff e^x = 3 + \sqrt{10} \text{ ou } e^x = 3 - \sqrt{10} \text{ car } X = e^x \\
 &\iff e^x = 3 + \sqrt{10} \text{ car } e^x > 0 \\
 &\iff x = \ln(3 + \sqrt{10})
 \end{aligned}$$

L'ensemble  $S$  des solutions de l'équation  $\sinh(x) = 3$  est  $S = \{\ln(3 + \sqrt{10})\}$ .

**Exercice 7.4.** Soit  $\alpha$  un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' = \alpha^2 y \quad (E)$$

1. Les fonctions  $f_1 : x \mapsto e^{-\alpha x}$  et  $f_2 : x \mapsto e^{\alpha x}$  sont deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , on a :

$$f_1'(x) = -\alpha e^{-\alpha x} \text{ et } f_1''(x) = (-\alpha)(-\alpha)e^{-\alpha x} = \alpha^2 e^{-\alpha x} = \alpha^2 f_1(x);$$

$$f_2'(x) = \alpha e^{\alpha x} \text{ et } f_2''(x) = \alpha \times \alpha e^{\alpha x} = \alpha^2 e^{\alpha x} = \alpha^2 f_2(x).$$

Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont donc deux solutions particulières de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

On considère dans la suite une fonction  $f$  définie et deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

2. — Supposons que  $f$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $g : x \mapsto f'(x) - \alpha f(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned}
 g'(x) + \alpha g(x) &= f''(x) - \alpha f'(x) + \alpha(f'(x) - \alpha f(x)) \\
 &= f''(x) - \alpha^2 f(x)
 \end{aligned}$$

$$= \alpha^2 f(x) - \alpha^2 f(x) \text{ car } f \text{ solution de } (E) \\ = 0.$$

Ainsi, la fonction  $g$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

$$y' + \alpha y = 0 \quad (F)$$

- Supposons que  $g$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(F)$ . Alors pour tout réel  $x$ , on a :  $g'(x) + \alpha g(x) = 0$ , soit :  $f''(x) - \alpha f'(x) + \alpha(f'(x) - \alpha f(x)) = 0$ , soit :  $f''(x) - \alpha^2 f(x) = 0$ , soit encore :  $f''(x) = \alpha^2 f(x)$ , donc  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

Finale­ment,  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si,  $g$  est solution de  $(F)$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. On procède par équivalences successives :

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \iff g \text{ solution de } (F) \text{ sur } \mathbb{R} \\ \iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = Ce^{-\alpha x} \\ \iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \alpha f(x) = Ce^{-\alpha x}.$$

4. On note  $h$  la fonction  $x \mapsto e^{-\alpha x} f(x)$ .

On raisonne par équivalences successives :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = Ce^{-2\alpha x} \\ \iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, -\alpha e^{-\alpha x} f(x) + e^{-\alpha x} f'(x) = Ce^{-2\alpha x} \\ \iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, e^{-\alpha x} (f'(x) - \alpha f(x)) = Ce^{-2\alpha x} \\ \iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \alpha f(x) = Ce^{-\alpha x} \\ \iff f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ (d'après la question 3)}$$

5. — Supposons que  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . D'après la question 4, il existe un réel  $C$  tel que pour tout réel  $x$  :  $h'(x) = Ce^{-2\alpha x}$ .

Il existe donc un réel  $a$  tel que pour tout réel  $x$  :  $h(x) = -\frac{C}{2\alpha} e^{-2\alpha x} + a$ ,

soit :  $e^{-\alpha x} f(x) = -\frac{C}{2\alpha} e^{-2\alpha x} + a$ , soit encore :  $f(x) = -\frac{C}{2\alpha} e^{-\alpha x} + ae^{\alpha x}$ .

En posant  $b = -\frac{C}{2\alpha}$ , on obtient pour tout réel  $x$  :  $f(x) = be^{-\alpha x} + ae^{\alpha x}$ .

- Supposons qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}$ . La fonction  $f$  est deux fois dérivable et pour tout réel  $x$ , on a :

$$f'(x) = \alpha ae^{\alpha x} - \alpha be^{-\alpha x} \text{ et } f''(x) = \alpha^2 ae^{\alpha x} + \alpha^2 be^{-\alpha x} = \alpha^2 f(x),$$

donc la fonction  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

Finale­ment,  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}$ .

En conclusion, les solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \mapsto ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}, \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 7.5.**

1. — Supposons que  $p$  est solution sur  $[0; +\infty[$  de l'équation différentielle

$$y' = ay(m-y) \quad (1)$$

La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme quotient de deux fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout réel  $t \geq 0$ , on a :

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{p'(t)}{p(t)^2} \\ &= -\frac{ap(t)(m-p(t))}{p(t)^2} \text{ car } p \text{ est solution de (1)} \\ &= -\frac{a(m-p(t))}{p(t)} = \frac{-am+ap(t)}{p(t)} \\ &= -am \times \frac{1}{p(t)} + a = -amg(t) + a \\ &= \alpha g(t) + \beta \text{ en posant } \alpha = -am \text{ et } \beta = a \end{aligned}$$

Ainsi  $g$  est solution sur  $[0; +\infty[$  de l'équation différentielle

$$y' = -amy + a \quad (2)$$

- Supposons que  $g$  est solution sur  $[0; +\infty[$  de l'équation différentielle (2). La fonction  $g$  est donc dérivable sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout réel  $t \geq 0$ , on a :

$$\begin{aligned} p'(t) &= -g'(t)p(t)^2 \\ &= -(-amg(t) + a)p(t)^2 \text{ car } g \text{ est solution de (2)} \\ &= amg(t)p(t)^2 - ap(t)^2 \\ &= amg(t) \left(\frac{1}{g(t)}\right)^2 - ap(t)^2 \text{ car } g(t) > 0 \\ &= am \times \frac{1}{g(t)} - ap(t)^2 \\ &= amp(t) - ap(t)^2 \\ &= ap(t)(m-p(t)). \end{aligned}$$

Ainsi  $p$  est solution sur  $[0; +\infty[$  de l'équation différentielle (1).

Finalement,  $p$  est solution de (1) sur  $[0; +\infty[$  si, et seulement si,  $g$  est solution de (2) sur  $[0; +\infty[$ .

2. On raisonne par équivalences successives :

$$\begin{aligned} &p \text{ solution de (1) sur } [0; +\infty[ \\ &\iff g \text{ solution de } y' + amy = a \text{ sur } [0; +\infty[ \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0; +\infty[, g(t) = Ce^{-amt} + \frac{a}{am} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0; +\infty[, g(t) &= \frac{mCe^{-amt} + 1}{m} \\ \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0; +\infty[, p(t) &= \frac{m}{mCe^{-amt} + 1} \\ \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0; +\infty[, p(t) &= \frac{m}{\lambda e^{-amt} + 1} \quad (\lambda := mC) \end{aligned}$$

Finalement, les solutions strictement positives de l'équation différentielle (1) sont toutes les fonctions définies sur  $[0; +\infty[$  de la forme :

$$t \mapsto \frac{m}{1 + \lambda e^{-amt}}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

3. (a) D'après la question précédente, on a pour tout réel  $t \geq 0$  :

$$p(t) = \frac{m}{1 + \lambda e^{-amt}}.$$

La fonction  $p$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et pour tout réel  $t \geq 0$ , on a :

$$p'(t) = \frac{0(1 + \lambda e^{-amt}) - m(-am\lambda e^{-amt})}{(1 + \lambda e^{-amt})^2} = \frac{am^2\lambda e^{-amt}}{(1 + \lambda e^{-amt})^2}.$$

Puisque pour tout réel  $t \geq 0$ ,  $p'(t) > 0$ , il vient que la fonction  $p$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

- (b) On a :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-amt} = 0$  car  $-am < 0$ , donc par produit, somme et quotient de limites, on obtient :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = m$ .

#### 4. Application.

- (a) D'après la question 2 (en prenant  $a = 1/12$  et  $m = 3$ ), la fonction  $u$  définie sur  $[0; +\infty[$  est de la forme :

$$u : t \mapsto \frac{3}{3Ce^{-\frac{1}{4}t} + 1}, \text{ où } C \in \mathbb{R}_+.$$

- (b) On a :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 3$ , donc au bout d'un grand nombre d'années, le secteur étudié comptera trois rongeurs.

#### Exercice 8.1.

1. Notons  $f$  et  $H$  les fonctions définies pour tout  $x \in [1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad H(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

- (a) Pour tout réel  $x \geq 1$ , on a  $e^x \geq e$  par croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ . Or  $e > 1$ , donc pour tout réel  $x \geq 1$ ,  $e^x > 1$ , c'est-à-dire  $e^x - 1 > 0$ . La fonction  $f$  est donc bien définie sur  $[1; +\infty[$ .  
La fonction  $f$  est continue sur  $[1; +\infty[$  comme quotient de deux fonctions continues sur  $[1; +\infty[$ , donc la fonction  $H$  est bien définie sur  $[1; +\infty[$ .

(b) D'après le théorème fondamental de l'analyse, puisque  $f$  est continue sur  $[1; +\infty[$ , la fonction  $H$  est dérivable sur  $[1; +\infty[$  et pour tout  $x \in [1; +\infty[$ ,  $H'(x) = f(x)$ .

(c) Notons  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé du plan.

On a :  $H(3) = \int_1^3 f(x) dx$ . Pour tout réel  $x \geq 1$ , on a  $f(x) > 0$ , donc  $H(3)$  désigne l'aire, en unité d'aire, de la zone du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 3$ .

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement de  $H(3)$ .

(a) Pour tout réel  $x > 0$  :  $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x \times e^{-x}}{e^{-x}(e^x - 1)} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ .

(b) On calcule  $H(3)$  à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} H(3) &= \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \\ &= [x \ln(1 - e^{-x})]_1^3 - \int_1^3 1 \times \ln(1 - e^{-x}) dx \\ &= 3 \ln(1 - e^{-3}) - \ln(1 - e^{-1}) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \end{aligned}$$

(c) Soit  $x$  un réel tel que  $1 \leq x \leq 3$ . Alors  $-3 \leq -x \leq -1$ , donc  $e^{-3} \leq e^{-x} \leq e^{-1}$  car la fonction exponentielle est croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc  $-e^{-1} \leq -e^{-x} \leq -e^{-3}$ , donc  $1 - e^{-1} \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - e^{-3}$ , donc  $\ln(1 - e^{-1}) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln(1 - e^{-3})$  car la fonction  $\ln$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ , soit :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \quad (1)$$

(d) A partir des inégalités (1) et par croissance de l'intégrale on obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^3 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) dx &\leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq \int_1^3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) dx \\ \text{soit : } \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \int_1^3 1 dx &\leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \int_1^3 1 dx \\ \text{soit : } \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) [x]_1^3 &\leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) [x]_1^3 \\ \text{soit : } 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) &\leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \\ \text{soit : } -2 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) &\leq -\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq -2 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \\ \text{soit : } -2 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) &\leq -\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq -2\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \\
 \text{soit : } & -2\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) + 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \\
 & \leq -\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) + 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \\
 & \leq -2\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) + 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \\
 \text{soit : } & \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq H(3) \\
 & \leq 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - 3\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right).
 \end{aligned}$$

**Exercice 8.2.****Partie A**

On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x > 0$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal du plan.

1. (a) D'une part, on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ .  
 D'autre part, on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$  par composition de limites (voir exercice 2.3).  
 Par produit de limites on obtient :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ .
- (b) D'une part, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ .  
 D'autre part, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$  par continuité de la fonction exponentielle en 0, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$  par composition de limites (voir exercice 2.3).  
 Par produit de limites on obtient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
- (c) Graphiquement, on peut déduire que :
  - la droite d'équation  $x = 0$  (c'est-à-dire l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à  $\mathcal{C}$  ;
  - la droite d'équation  $y = 0$  (c'est-à-dire l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .
2. (a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme produit de deux fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ .

Pour tout réel  $x > 0$ , on a  $f(x) = u(x)v(x)$  avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{x^2}; & v(x) &= e^{\frac{1}{x}}; \\ u'(x) &= -\frac{2}{x^3}; & v'(x) &= -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}} = -e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) = -e^{\frac{1}{x}} \frac{2x+1}{x^4} \\ &= -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1). \end{aligned}$$

- (b) Pour tout réel  $x > 0$ , on a  $2x+1 > 0$ ,  $e^{\frac{1}{x}} > 0$  et  $\frac{1}{x^4} > 0$ , donc  $f'(x) < 0$ , donc la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

$x$	0	$\alpha \approx 1,11$	$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f$		$+\infty$	0

- (c) La fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  (car elle y est dérivable sur d'après la question 2.(a)) et est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$  (question 2.(b)). De plus  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 < 2$ , donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 2$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}_+^*$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]0; +\infty[$ .

A l'aide de la calculatrice, on trouve  $\alpha \approx 1,11$ .

### Partie B. Étude d'une suite d'intégrales

On note  $(I_n)$  la suite d'intégrales définie pour tout entier  $n \geq 2$  par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx.$$

1. On a :

$$I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 -\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e = e - \sqrt{e}.$$

2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, on a pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{x^n}}_{v'(x)} \times \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{u(x)} dx \\
 &= \left[ e^{\frac{1}{x}} \frac{x^{-n+1}}{-n+1} \right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \frac{x^{-n+1}}{-n+1} dx \\
 &= \frac{1}{1-n} \left[ e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^{n-1}} \right]_1^2 + \frac{1}{1-n} \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} dx \\
 &= \frac{1}{1-n} \left( \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - e \right) + \frac{1}{1-n} I_{n+1} \\
 &= \frac{1}{1-n} \left( \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - e + I_{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

donc :  $(1-n)I_n = \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - e + I_{n+1}$ , c'est-à-dire :

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.$$

- (b) D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
 I_3 &= e - \frac{\sqrt{e}}{2^{2-1}} + (1-2)I_2 = e - \frac{\sqrt{e}}{2} - I_2 \stackrel{1.}{=} e - \frac{\sqrt{e}}{2} - (e - \sqrt{e}) \\
 &= \sqrt{e} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

3. (a) Soit un entier  $n \geq 2$ . Soit  $x$  un réel tel que  $1 \leq x \leq 2$ , alors  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$  par décroissance de la fonction inverse sur  $]0; +\infty[$ , donc  $e^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{x}} \leq e$  par croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ , donc  $0 \leq e^{\frac{1}{x}} \leq e$ , et puisque  $\frac{1}{x^n} > 0$ , alors on obtient :

$$0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n} \quad (1)$$

- (b) Par croissance de l'intégrale dans (1), on obtient pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 0 dx &\leq \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx \leq \int_1^2 \frac{e}{x^n} dx \\
 \text{soit : } 0 &\leq I_n \leq e \int_1^2 \frac{1}{x^n} dx \\
 \text{soit : } 0 &\leq I_n \leq e \left[ \frac{x^{-n+1}}{-n+1} \right]_1^2
 \end{aligned}$$

$$\text{soit : } 0 \leq I_n \leq \frac{e}{1-n} \left[ \frac{1}{x^{n-1}} \right]_1^2$$

$$\text{soit : } 0 \leq I_n \leq \frac{e}{1-n} \left( \frac{1}{2^{n-1}} - 1 \right).$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{1-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ , alors par somme et produit de limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{1-n} \left( \frac{1}{2^{n-1}} - 1 \right) = 0$ , donc d'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

**Exercice 8.3.** L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

1. Notons  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in [0; 1]$  par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

(a) La fonction  $u : x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$  est dérivable sur  $[0; 1]$  comme somme de fonctions dérivables sur  $[0; 1]$  et, pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a :

$$u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

De plus, pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a  $u(x) > 0$ .

Donc la fonction  $f : x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $[0; 1]$  par composition de fonctions et, pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 \\ &= \ln(1 + \sqrt{1+1^2}) - \ln(0 + \sqrt{1+0^2}) = \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} [2\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}) = \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

2. (a) Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx \text{ (linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} dx. \end{aligned}$$

Or, pour tout  $x \in [0; 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $x-1 \leq 0$ ,  $x^n \geq 0$  et  $\sqrt{1+x^2} > 0$ , donc  $\frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} \leq 0$  et donc  $\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq 0$  par positivité de l'intégrale, soit :  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est décroissante.

De plus, pour tout  $x \in [0; 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ , donc  $u_n \geq 0$  par positivité de l'intégrale, donc la suite  $(u_n)$  est minorée par 0.

Finalement, la suite  $(u_n)$  est convergente d'après le théorème de convergence monotone.

(b) Soit un réel  $x$  tel que  $0 \leq x \leq 1$ . Alors  $0 \leq x^2 \leq 1$  par croissance de la fonction carré sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $1 \leq 1+x^2 \leq 2$ , donc  $\sqrt{1} \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$  par croissance de la fonction racine carrée sur  $\mathbb{R}_+$ , soit :

$$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}.$$

(c) Pour tout  $x \in [0; 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2} &\iff \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \text{ par décroissance de} \\ &\qquad\qquad\qquad x \mapsto 1/x \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff \frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n \text{ car } x^n \geq 0. \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}} dx &\leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \int_0^1 x^n dx \\ \text{soit : } \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 &\leq u_n \leq \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ \text{soit : } \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{n+1} &\leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \end{aligned} \tag{1}$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , il vient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  d'après le théorème des gendarmes.

3. Pour tout entier  $n \geq 3$ , on pose  $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$ .

(a) Pour tout entier  $n \geq 3$ , on a :

$$\begin{aligned} u_n + u_{n-2} &= \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx \quad (\text{linéarité de l'intégrale}) \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-2}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx = I_n. \end{aligned}$$

(b) Pour tout entier  $n \geq 3$ , on calcule  $I_n$  à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx \\ &= \left[ \sqrt{1+x^2} \times \frac{x^{n-1}}{n-1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{x^{n-1}}{n-1} dx \\ &= \sqrt{2} \times \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1} u_n = \frac{1}{n-1} (\sqrt{2} - u_n). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier  $n \geq 3$ , on a :

$$\begin{aligned} (n-1)I_n = \sqrt{2} - u_n &\stackrel{3.(a)}{\iff} (n-1)(u_n + u_{n-2}) = \sqrt{2} - u_n \\ &\iff nu_n - u_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2} - u_n \\ &\iff nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(c) Soit un entier  $n \geq 3$ . La suite  $(u_n)$  est décroissante, donc :  $u_n \leq u_{n-2}$ ,

$$\text{donc : } (n-1)u_n \leq (n-1)u_{n-2} \quad \text{car } n-1 > 0$$

$$\text{donc : } nu_n - u_n \leq nu_{n-2} - u_{n-2}$$

$$\text{donc : } nu_n + nu_n - u_n \leq nu_n + nu_{n-2} - u_{n-2}$$

$$\text{donc : } (2n-1)u_n \leq nu_n + (n-1)u_{n-2}$$

$$\text{donc : } (2n-1)u_n \leq \sqrt{2} \quad \text{d'après 3.(b)} \quad (2)$$

(d) Soit un entier  $n \geq 3$ .

$$\begin{aligned} \text{— D'après (2), on a } (2n-1)u_n &\leq \sqrt{2}, \text{ donc } 2nu_n \leq \sqrt{2} + u_n. \text{ Or} \\ u_n &\leq \frac{1}{n+1} \text{ d'après (1), donc } \sqrt{2} + u_n \leq \sqrt{2} + \frac{1}{n+1}, \text{ donc } 2nu_n \leq \\ &\sqrt{2} + \frac{1}{n+1}, \text{ donc } nu_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

— D'après (1), on a  $u_n \geq \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}$ , donc  $nu_n \geq \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}}$ .

Donc on obtient la double inégalité suivante :

$$\frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nu_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2(n+1)}$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2(n+1)} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
par somme de limites.

Par ailleurs :  $\frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} = \frac{n}{\sqrt{2}n + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{n}}$ , donc par somme

et quotient de limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

D'après le théorème des gendarmes, on conclut :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Exercice 8.4.** On note  $(W_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt.$$

1. (a) Pour tout  $t \in [0; \pi/2]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $0 \leq \sin(t) \leq 1$ , donc  $0 \leq \sin(t)^{n+1} \leq \sin(t)^n$ , donc par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n+1} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt, \text{ soit : } 0 \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Montrons désormais que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n > 0$ . Par l'absurde, supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $W_n = 0$ , c'est-à-dire tel que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt = 0.$$

Puisque la fonction  $t \mapsto \sin(t)^n$  est continue et positive sur  $[0; \pi/2]$ , il vient que pour tout  $t \in [0; \pi/2]$ ,  $\sin(t)^n = 0$ , ce qui est absurde.

Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n > 0$ .

- (b) Nous avons montré dans la question précédente que la suite  $(W_n)$  est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente d'après le théorème de convergence monotone.

2. Soit  $n$  un entier naturel. Calculons  $W_{n+2}$  à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n+1} \sin(t) dt \\
 &= \underbrace{\left[ -\cos(t) \sin(t)^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \cos(t) \sin(t)^n \cos(t) dt \\
 &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \cos(t)^2 \sin(t)^n dt \\
 &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin(t)^2) \sin(t)^n dt \\
 &= (n+1) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n+2} dt \right) \\
 &= (n+1)(W_n - W_{n+2}).
 \end{aligned}$$

On obtient par conséquent  $W_{n+2} + (n+1)W_{n+2} = (n+1)W_n$ , soit  $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ , soit encore  $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$ .

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a d'après la question précédente  $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ , donc

$$(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_nW_{n+1}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en posant  $u_n = (n+1)W_nW_{n+1}$ , il vient que  $u_n = u_{n+1}$ , donc la suite  $(u_n)$  est constante. Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = u_0$ , c'est-à-dire  $(n+1)W_nW_{n+1} = W_0W_1$  où :

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

donc  $(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ , soit :  $W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$ .

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , puisque la suite  $(W_n)$  est décroissante, on a  $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ , donc  $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$  car  $W_n > 0$  d'après 1.(a), donc :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1 \quad \text{d'après 2.}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$  d'après le théorème des gendarmes.

5. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$  d'après 3, donc  $W_n = \frac{\pi}{2(n+1)W_{n+1}}$  car  $W_{n+1} > 0$ , donc  $W_n^2 = \frac{W_n\pi}{2(n+1)W_{n+1}}$ , donc :

$$\frac{W_n^2}{\frac{\pi}{2n}} = W_n^2 \times \frac{2n}{\pi} = \frac{W_n\pi}{2(n+1)W_{n+1}} \times \frac{2n}{\pi} = \frac{n}{n+1} \times \frac{W_n}{W_{n+1}}.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ , il vient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n^2}{2n} = 1$ .

Par conséquent :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{W_n^2}{2n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n^2}{2n}}$  par continuité de la fonction

racine carrée sur  $\mathbb{R}_+$  (propriété 3.7), soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = \sqrt{1} = 1$ .

### Exercice 8.5.

1. Soit  $k \in \{0, \dots, n\}$  et soit  $x$  un réel tel que  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ . Puisque la fonction  $f$  est croissante sur  $[a; b]$  (et que  $x_k \in [a; b]$  et  $x_{k+1} \in [a; b]$ ), on obtient :

$$f(x_k) \leq f(x) \leq f(x_{k+1}).$$

2. Par croissance de l'intégrale, on obtient pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dx \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+1}) dx$$

$$\text{soit : } f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} 1 dx \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq f(x_{k+1}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} 1 dx$$

$$\text{soit : } f(x_k)[x]_{x_k}^{x_{k+1}} \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq f(x_{k+1})[x]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$\text{soit : } f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k)$$

Or, pour tout  $k \in \{0; \dots; n\}$ , on a :

$$x_{k+1} - x_k = a + (k+1) \frac{b-a}{n} - a - k \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} = h,$$

donc on obtient la double inégalité suivante :

$$hf(x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq hf(x_{k+1}) \quad (1)$$

En passant à la somme quand  $k$  varie de 0 à  $n-1$  dans (1), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} hf(x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} hf(x_{k+1}).$$

Par définition :  $\sum_{k=0}^{n-1} hf(x_k) = S_n(f)$  et  $\sum_{k=0}^{n-1} hf(x_{k+1}) = S'_n(f)$  et, d'après la

relation de Chasles :  $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ , il vient donc :

$$S_n(f) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S'_n(f) \quad (2)$$

3. (a) On a :

$$\begin{aligned}
 S'_n(f) - S_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} hf(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} hf(x_k) \\
 &= h \left( \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right) \\
 &= h \left( \sum_{k'=1}^n f(x_{k'}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right) \\
 &= h \left( \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right) \\
 &= h(f(x_n) - f(x_0)) \\
 &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \quad \text{car } x_n = b \text{ et } x_0 = a
 \end{aligned}$$

(b) De (2) il vient :  $0 \leq \int_a^b f(x) dx - S_n(f) \leq S'_n(f) - S_n(f)$ , soit :

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - S_n(f) \leq \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) = 0$ , il vient d'après le théorème des

gendarmes  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f(x) dx - S_n(f) \right) = 0$ , soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

On a de plus  $S'_n(f) = S_n(f) + \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$  d'après la question 3.(a), donc par somme de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

4. **Application.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left( \frac{k}{n} \right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left( \frac{k}{n} \right)^p + \frac{1}{n} = S_n(f) + \frac{1}{n}$$

où  $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left( \frac{k}{n} \right)^p = \frac{1-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( 0 + \frac{k(1-0)}{n} \right)^p$  est la somme de Riemann associée à la subdivision  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  définie pour tout  $k \in \{0; \dots; n\}$

par  $x_k = \frac{k}{n}$ , et à la fonction  $f : x \mapsto x^p$  définie, continue et croissante sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

Par conséquent, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^p dx = \left[ \frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

Finalement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( S_n(f) + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{p+1}$  par somme de limites.

5. (a) La fonction Python `rect(f, a, b, n)` ci-dessous renvoie, pour une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $[a; b]$  et un entier  $n \geq 1$  donnés, une approximation  $S_n(f)$  de l'intégrale  $I = \int_a^b f(x) dx$ .

```

1 def rect(f, a, b, n):
2     h = (b - a) / n
3     s = 0
4     x = a
5     for i in range(n):
6         s = s + h * f(x)
7         x = x + h
8     return s

```

- (b) On fait appel à la fonction `rect` pour trouver une approximation de l'intégrale  $\int_0^1 \ln(x+1) dx$ .

```

1 import numpy as np #importation du package numpy
2 def f(x):
3     return np.log(x + 1)
4 rect(f, 0, 1, 1000) #appel de la fonction rect

```

L'appel `rect(f, 0, 1, 1000)` renvoie : 0.3859477458629461

### Exercice 9.1.

1. Un code est un élément de l'ensemble  $C_1$  suivant :

$$C_1 = \{A; B\} \times \{0; \dots; 9\}^4.$$

D'après le principe multiplicatif, on obtient :

$$\text{Card}(C_1) = \text{Card}(\{A; B\}) \times \text{Card}(\{0; \dots; 9\}^4) = 2 \times 10^4 = 20000.$$

On dénombre donc 20000 codes.

2. Un code sans le chiffre 0 est un élément de l'ensemble  $C_2$  suivant :

$$C_2 = \{A; B\} \times \{1; \dots; 9\}^4.$$

D'après le principe multiplicatif, on obtient :

$$\text{Card}(C_2) = \text{Card}(\{A; B\}) \times \text{Card}(\{1; \dots; 9\}^4) = 2 \times 9^4 = 13122.$$

On dénombre donc 13122 codes ne comportant pas le chiffre 0.

3. Notons  $C_3$  l'ensemble des codes comportant au moins une fois le chiffre 0. Il est alors clair que :

$$\text{Card}(C_3) = \text{Card}(C_1) - \text{Card}(C_2) = 20000 - 13122 = 6878.$$

On dénombre donc 6878 codes comportant au moins une fois le chiffre 0.

4. Pour obtenir un code comportant des chiffres distincts, on peut :
- choisir une lettre parmi les deux lettres (2 possibilités) ;
  - choisir un 4-arrangements de l'ensemble  $\{0; \dots; 9\}$  ( $\mathcal{A}_{10}^4$  possibilités).

On dénombre donc  $2 \times \mathcal{A}_{10}^4 = 10080$  codes comportant des chiffres distincts.

5. Le nombre de codes comportant au moins deux chiffres identiques est le nombre de codes possibles auquel on soustrait le nombre de codes comportant uniquement des chiffres distincts.

D'après les question 1 et 4, on dénombre donc  $20000 - 10080 = 9920$  codes comportant au moins deux chiffres identiques.

6. Un code dont la lettre peut être placée en première ou seconde position est un élément de l'ensemble  $C_4$  suivant :

$$\begin{aligned} C_4 &= (\{A; B\} \times \{0; \dots; 9\}^4) \cup (\{0; \dots; 9\} \times \{A; B\} \times \{0; \dots; 9\}^3) \\ &= C_1 \cup (\{0; \dots; 9\} \times \{A; B\} \times \{0; \dots; 9\}^3). \end{aligned}$$

D'après les principes additif et multiplicatif, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Card}(C_4) &= \text{Card}(C_1) + \text{Card}(\{0; \dots; 9\} \times \{A; B\} \times \{0; \dots; 9\}^3) \\ &= \text{Card}(C_1) + \text{Card}(\{0; \dots; 9\}) \times \text{Card}(\{A; B\}) \times \text{Card}(\{0; \dots; 9\}^3) \\ &= 20000 + 10 \times 2 \times 10^3 \\ &= 40000. \end{aligned}$$

On dénombre donc 40000 codes dont la lettre peut être placée en première ou seconde position.

### Exercice 9.2.

1. Le nombre de mains possibles est le nombre de façons de choisir 5 cartes parmi les 52 cartes du jeu, il y a donc  $\binom{52}{5} = 2598960$  mains possibles.

2. Pour obtenir un Carré, on peut :
- choisir une valeur parmi les 13 valeurs (13 possibilités) ;
  - choisir les quatre cartes de cette valeur parmi les 52 cartes (1 possibilité) ;
  - puis choisir une carte parmi les 48 restantes (48 possibilités).

On dénombre donc  $13 \times 1 \times 48 = 624$  Carrés.

3. Pour obtenir un Full, on peut :
- choisir une valeur parmi les 13 valeurs (13 possibilités) puis choisir 3 cartes parmi les 4 cartes de cette valeur ( $\binom{4}{3}$  possibilités) ;
  - choisir ensuite une valeur parmi les 12 valeurs restantes (12 possibilités) puis choisir 2 cartes parmi les 4 cartes de cette valeur ( $\binom{4}{2}$  possibilités).

On dénombre donc  $13 \times \binom{4}{3} \times 12 \times \binom{4}{2} = 3744$  Fulls.

4. On commence par dénombrer les mains contenant 3 cartes de même valeur. Pour obtenir une telle main, on peut :
- choisir une valeur parmi les 13 valeurs (13 possibilités) ;
  - choisir 3 cartes parmi les 4 cartes de cette valeur ( $\binom{4}{3}$  possibilités) ;
  - choisir ensuite 2 cartes parmi les 48 restantes ( $\binom{48}{2}$  possibilités).

On dénombre donc  $13 \times \binom{4}{3} \times \binom{48}{2} = 58656$  mains contenant 3 cartes de même valeur.

Pour obtenir le nombre de Brelans, on doit soustraire au dernier nombre le nombre de mains contenant 3 cartes de même valeur et 2 autres cartes de même valeur, c'est-à-dire soustraire le nombre de Fulls. On obtient donc  $58656 - 3744 = 54912$  Brelans.

5. Pour obtenir une Quinte flush, on peut :
- choisir la couleur (4 possibilités) ;
  - choisir un nombre parmi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 (9 possibilités) ;
  - choisir ensuite une main commençant par le nombre et la couleur précédemment choisies (1 possibilité).

On dénombre donc  $4 \times 9 \times 1 = 36$  Quintes flush.

6. Pour obtenir une Quinte, on peut :
- choisir un nombre parmi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 (9 possibilités) ;
  - choisir une main commençant par le nombre précédemment choisie ( $4^5$  possibilités).

On dénombre donc  $9 \times 4^5 = 9216$  Quintes.

**Exercice 9.3.** Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à  $n$  lignes et  $p$  colonnes (et donc constitué de  $n \times p$  cases), où  $n$  et  $p$  sont deux entiers supérieurs à 2, parmi lesquelles un certain nombre  $k$  (inférieur ou égal à  $np$ ) sont noircies (et les autres blanches).

1. Il y a  $k$  cases à noircir parmi  $np$  cases, on dénombre donc  $\binom{np}{k}$  grilles.
2. Notons que dans le cas où les quatre coins sont noirs, on a forcément  $k \geq 4$ . Une fois les quatre coins noircis, il reste  $k - 4$  cases à noircir parmi  $np - 4$  cases, on dénombre donc  $\binom{np - 4}{k - 4}$  grilles dont les quatre coins sont noirs.
3. Pour obtenir une grille comportant exactement deux coins noirs, on peut :
  - noircir deux coins parmi les quatre coins ( $\binom{4}{2}$  possibilités) ;
  - noircir ensuite  $k - 2$  cases parmi les  $np - 4$  cases qui ne sont pas des coins ( $\binom{np - 4}{k - 2}$  possibilités).

On dénombre donc  $\binom{4}{2} \times \binom{np - 4}{k - 2}$  grilles comportant exactement deux coins noirs.

4. Notons que dans le cas où chaque ligne contient au plus une case noire, on a forcément  $k \leq n$ . Pour obtenir une grille comportant au plus une case noire sur chaque ligne, on peut :
  - choisir  $k$  lignes parmi les  $n$  lignes sur lesquelles on souhaite noircir une seule case ( $\binom{n}{k}$  possibilités) ;
  - choisir la case à noircir pour les  $k$  lignes sélectionnées ( $p$  choix pour chaque ligne, donc  $p^k$  possibilités au total).

On dénombre donc  $\binom{n}{k} \times p^k$  grilles comportant au plus une case noire sur chaque ligne.

5. On dispose d'une grille de  $n$  lignes et  $n$  colonnes et on souhaite noircir sur chaque ligne et sur chaque colonne une seule case. Pour ce faire, il y a  $n$  choix pour la première ligne,  $n - 1$  choix pour la deuxième ligne (on ne peut pas noircir la case se situant en-dessous de la première case noire car, dans ce cas, la colonne correspondante contient deux cases noires),  $n - 2$  choix pour la troisième ligne etc. Arrivée à la dernière ligne, il y a un seul choix car il reste une seule colonne vierge. Finalement, on dénombre  $n!$  grilles de taille  $n \times n$  comportant exactement une case noire sur chaque ligne et sur chaque colonne.
6. On dispose d'une grille de 9 lignes et 9 colonnes et on souhaite placer les neuf chiffres 1 en respectant les règles du Sudoku. Pour ce faire, on dispose de :
  - 9 choix pour le 1 de la première ligne ;

- 6 choix pour le 1 de la deuxième ligne (les trois cases de la ligne figurant dans le même carré de taille  $3 \times 3$  que le 1 précédent sont condamnées) ;
- 3 choix pour le 1 de la troisième ligne (six cases condamnées pour la même raison que précédemment) ;
- 6 choix pour le 1 de la quatrième ligne (trois colonnes condamnées) ;
- 4 choix pour le 1 de la cinquième ligne (un carré de taille  $3 \times 3$  et deux colonnes condamnées) ;
- 2 choix pour le 1 de la sixième ligne (deux carrés de taille  $3 \times 3$  et une colonne condamnées) ;
- 3 choix pour le 1 de la septième ligne (une colonne libre pour chaque carré de taille  $3 \times 3$ ) ;
- 2 et 1 choix pour le 1 des deux dernières lignes.

On dénombre donc  $9 \times 6 \times 3 \times 6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 46656$  façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille de Sudoku vierge.

7. On dénombre  $\binom{81}{9} = 260887834350$  façons de placer neuf chiffres 1 dans une grille vierge de taille  $9 \times 9$ , tandis que l'on dénombre seulement 46656 façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille de Sudoku vierge.

**Exercice 9.4.** Soient  $p, q$  et  $\ell$  trois entiers naturels tels que  $\ell \leq p + q$ . On souhaite établir l'identité de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{p}{k} \binom{q}{\ell-k} = \binom{p+q}{\ell} \quad (1)$$

- Déterminons au préalable les termes nuls dans la somme de l'identité de Vandermonde afin de les y retirer<sup>10</sup>.

Pour tout  $k \in \{0; \dots; \ell\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \binom{p}{k} \binom{q}{\ell-k} \neq 0 &\iff \begin{cases} k \leq p \\ \ell - k \leq q \end{cases} \iff \begin{cases} k \leq p \\ k \geq \ell - q \end{cases} \\ &\iff_{k \in \{0; \dots; \ell\}} \begin{cases} k \leq p \\ k \leq \ell \\ k \geq \ell - q \\ k \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k \leq \min(\ell; p) \\ k \geq \max(0; \ell - q) \end{cases} \\ &\iff \max(0; \ell - q) \leq k \leq \min(\ell; p). \end{aligned}$$

Il est par ailleurs facile de vérifier que l'inégalité  $\max(0; \ell - q) \leq \min(\ell; p)$  est toujours vérifiée.

Finalement, il s'agit d'établir l'égalité suivante :

$$\sum_{k=\max(0; \ell-q)}^{\min(\ell; p)} \binom{p}{k} \binom{q}{\ell-k} = \binom{p+q}{\ell}.$$

10. Non nécessaire, cette étape fait toutefois écho à la note figurant en bas de page dans l'énoncé de l'exercice. Pour une première lecture, elle peut être allégrement ignorée par le lecteur.

- Revenons à l'identité (1) et introduisons le contexte suivant : une urne contient  $p+q$  boules,  $p$  rouges et  $q$  blanches. On tire simultanément  $\ell$  boules dans l'urne.

On dénombre  $\binom{p+q}{\ell}$  façons de tirer simultanément  $\ell$  boules dans l'urne.

Par ailleurs, tirer simultanément  $\ell$  boules dans l'urne, c'est :

- tirer 0 boule rouge ET  $\ell$  boules blanches ( $\binom{p}{0} \times \binom{q}{\ell}$  possibilités),  
OU
- tirer 1 boule rouge ET  $\ell-1$  boules blanches ( $\binom{p}{1} \times \binom{q}{\ell-1}$  possibilités),  
OU
- tirer 2 boules rouges ET  $\ell-2$  boules blanches ( $\binom{p}{2} \times \binom{q}{\ell-2}$  possibilités),  
OU
- $\vdots$   
OU
- tirer  $\ell$  boules rouges ET 0 boule blanche ( $\binom{p}{\ell} \times \binom{q}{0}$  possibilités),

ce qui donne, d'après le principe additif, un total de tirages égal à :

$$\binom{p}{0} \times \binom{q}{\ell} + \binom{p}{1} \times \binom{q}{\ell-1} + \dots + \binom{p}{\ell} \times \binom{q}{0} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{p}{k} \binom{q}{\ell-k}.$$

On obtient donc l'égalité souhaitée, à savoir :  $\sum_{k=0}^{\ell} \binom{p}{k} \binom{q}{\ell-k} = \binom{p+q}{\ell}$ .

**Exercice 9.5.** On s'intéresse aux mots (concaténation de lettres) qu'il est possible de former avec l'alphabet  $\{a; b; c\}$  et obéissant aux contraintes suivantes :

- le mot est de longueur  $n$  (il contient  $n$  lettres),  $n$  étant un entier supérieur ou égal à 1 ;
- il commence et finit par la lettre a ;
- deux lettres adjacentes sont toujours différentes.

Un tel mot sera dit *terne*.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on désigne par  $t_n$  le nombre de mots ternes de longueur  $n$ .

1. —  $n = 1$  : a
- $n = 2$  : aucun mot terne
- $n = 3$  : aba, aca
- $n = 4$  : abca, acba
- $n = 5$  : ababa, abaca, abcba, acaba, acaca, acbca
- $n = 6$  : ababca, abacba, abcaba, abcaca, abcba, acabca, acacba, acbaba, acbaca, acbcba

On obtient :  $t_1 = 1, t_2 = 0, t_3 = 2, t_4 = 2, t_5 = 6$  et  $t_6 = 10$ .

2. Soit un entier  $n \geq 3$ . Parmi tous les mots ternes de taille  $n$ , on peut distinguer deux catégories de mots :

- Catégorie 1. Les mots dont la lettre en position  $n - 2$  est a.
- Catégorie 2. Les mots dont la lettre en position  $n - 2$  n'est pas a (lettres b ou c).

Pour construire un mot de la catégorie 1, on peut :

- construire un mot terne de taille  $n - 2$  ( $t_{n-2}$  possibilités) ;
- placer un a en position  $n$  (1 possibilité) ;
- placer b ou c en position  $n - 1$  (2 possibilités).

D'où un total de  $2t_{n-2}$  mots de catégorie 1.

Pour construire un mot de la catégorie 2, on peut :

- choisir  $n - 2$  lettres dont la première est a, la dernière n'est pas a et telles que deux lettres adjacentes ne sont pas identiques ;
- placer un a en position  $n$  ;
- placer la lettre qu'on est forcé de mettre à la place  $n - 1$  (si la lettre  $n - 2$  est b alors la lettre  $n - 1$  est obligatoirement c et vice-versa, donc 1 possibilité).

On remarque alors que les deux premières étapes correspondent précisément à une manière de construire un mot terne de taille  $n - 1$ .

D'où un total de  $t_{n-1}$  mots de catégorie 2.

Finalement, on dénombre  $t_{n-1} + 2t_{n-2}$  mots ternes de taille  $n$ .

Nous avons ainsi montré que pour tout entier  $n \geq 3$  :

$$t_n = t_{n-1} + 2t_{n-2}.$$

3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $t_n = \frac{1}{6}2^n - \frac{2}{3}(-1)^n$  ».

- Initialisation. On a  $t_1 = 1$  et  $\frac{1}{6} \times 2^1 - \frac{2}{3}(-1)^1 = \frac{2}{6} + \frac{2}{3} = 1$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie. De plus,  $t_2 = 0$  et  $\frac{1}{6} \times 2^2 - \frac{2}{3}(-1)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$ , donc  $\mathcal{P}(2)$  est vraie.
- Hérité. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n + 1)$  sont vraies. Montrons que  $\mathcal{P}(n + 2)$  est vraie.  
On a :

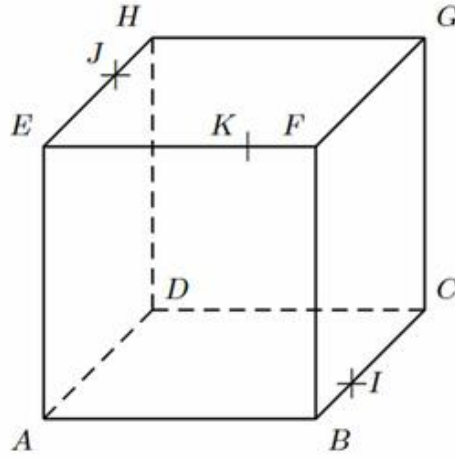
$$\begin{aligned} t_{n+2} &= t_{n+1} + 2t_n \\ &= \frac{1}{6}2^{n+1} - \frac{2}{3}(-1)^{n+1} + 2 \left( \frac{1}{6}2^n - \frac{2}{3}(-1)^n \right) \text{ par H.R.} \\ &= \frac{1}{6}2^{n+1} + \frac{1}{6}2^{n+1} - \frac{2}{3}(-1)^{n+1} - \frac{2}{3} \times 2(-1)^n \\ &= \frac{1}{6}2^{n+2} - \frac{2}{3}((-1)^{n+1} + 2(-1)^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}2^{n+2} - \frac{2}{3}(-1)^n(-1+2) \\
&= \frac{1}{6}2^{n+2} - \frac{2}{3}(-1)^n \\
&= \frac{1}{6}2^{n+2} - \frac{2}{3}(-1)^{n+2} \text{ car } (-1)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie.

- Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(1)$  et  $\mathcal{P}(2)$  sont vraies et que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \implies \mathcal{P}(n+2))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  non nul.

**Exercice 10.1.**  $ABCDEFGH$  est le cube représenté ci-dessous.



On se place dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

### Partie A

1. (a) Voir dans la figure ci-dessus les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}.$$

(b) On a  $I \left( 1; \frac{1}{3}; 0 \right)$  car  $\overrightarrow{AI} = 1 \times \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \times \overrightarrow{AD} + 0 \times \overrightarrow{AE}$ .

On a  $J \left( 0; \frac{2}{3}; 1 \right)$  car  $\overrightarrow{AJ} = 0 \times \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AE}$ .

On a  $K \left( \frac{3}{4}; 0; 1 \right)$  car  $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4} \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AE}$ .

(c)  $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite  $(IJ)$  et  $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite  $(IK)$ .

2.  $L$  est un point de l'arête  $[CD]$ . Donc les coordonnées de  $L$  sont de la forme  $(a; 1; 0)$  où  $a$  est un réel de l'intervalle  $[0; 1]$ .

On raisonne par équivalences successives.

$$\begin{aligned}
 L \in (IJK) &\iff \exists(x; y) \in \mathbb{R}^2, \vec{IL} = x\vec{IJ} + y\vec{IK} \\
 &\iff \exists(x; y) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} a-1 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\iff \exists(x; y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a-1 = -x - \frac{1}{4}y \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \\ 0 = x + y \end{cases} \\
 &\iff \exists(x; y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a-1 = y - \frac{1}{4}y \\ \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}y \\ x = -y \end{cases} \\
 &\iff \exists(x; y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a-1 = \frac{3}{4}y \\ \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}y \\ x = -y \end{cases} \\
 &\iff \exists(x; y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a-1 = -\frac{3}{4} \\ y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \\
 &\iff \exists(x; y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \\
 &\iff a = 1/4
 \end{aligned}$$

### Partie B

Dans cette partie, on pose  $a = \frac{1}{4}$  et le point  $L$  a pour coordonnées  $(\frac{1}{4}; 1; 0)$ .

1. (a) Pour montrer que le quadrilatère  $IKJL$  est un parallélogramme, il suffit de montrer que  $\vec{IL} = \vec{KJ}$ .

$$\text{On a } \vec{IL} \begin{pmatrix} 1/4 - 1 \\ 1 - 1/3 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \vec{IL} \begin{pmatrix} -3/4 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{KJ} \begin{pmatrix} 0 - 3/4 \\ 2/3 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \vec{KJ} \begin{pmatrix} -3/4 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc on a bien  $\vec{IL} = \vec{KJ}$ .

- (b) Les diagonales  $[IJ]$  et  $[KL]$  du parallélogramme  $IKJL$  se coupent en leur milieu  $M$ , qui est le centre de  $IKJL$ . Le point  $M$  a donc pour coordonnées :

$$M \left( \frac{x_I + x_J}{2}; \frac{y_I + y_J}{2}; \frac{z_I + z_J}{2} \right) \text{ soit : } M \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

- (c) D'après la question précédente, on peut affirmer que les droites  $(IJ)$  et  $(KL)$  sont sécantes en  $M$  (elle sont donc coplanaires).

2. (a) Les vecteurs  $\vec{IJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ne sont pas colinéaires car leurs

coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les droites  $(IJ)$  et  $(BH)$  ne sont pas parallèles.

De plus, les droites  $(IJ)$  et  $(BH)$  sont coplanaires puisque les points  $I, J, B$  et  $H$  sont coplanaires (ces quatre points appartiennent au plan  $(BCH)$ ).

Les droites  $(IJ)$  et  $(BH)$  sont donc coplanaires et non parallèles, elles sont donc sécantes.

- (b) Toutes les diagonales du cube se coupent en un unique point, le centre du cube. Notons  $O$  le centre du cube.

En particulier,  $O$  est le milieu du segment  $[AG]$ . Les coordonnées de  $O$  sont donc données par :

$$O \left( \frac{x_A + x_G}{2}; \frac{y_A + y_G}{2}; \frac{z_A + z_G}{2} \right) \text{ soit : } O \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

On a  $\vec{IO} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/6 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ , donc  $\vec{IO} = \frac{1}{2}\vec{IJ}$ . Puisque  $\vec{IO} = \frac{1}{2}\vec{IJ} + 0\vec{IK}$ , le point

$O$  appartient au plan  $(IJK)$ .

3. (a) Soit  $M$  un point de la droite  $(HG)$ . Alors les coordonnées de  $M$  sont de la forme  $(b; 1; 1)$  où  $b$  est un réel.

Procédons par équivalences successives.

$$(MF) // (IL) \iff \vec{MF} \begin{pmatrix} 1-b \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{IL} \begin{pmatrix} -3/4 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ colinéaires}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R}, \vec{IL} = k\vec{MF}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} -\frac{3}{4} = k(1-b) \\ \frac{2}{3} = -k \end{cases}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} -\frac{3}{4} = -\frac{2}{3}(1-b) \\ k = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} b = -\frac{1}{8} \\ k = -\frac{2}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow b = -1/8 \end{aligned}$$

Finalement, le point  $M(-1/8; 1; 1)$  est tel que les droites  $(MF)$  et  $(IL)$  sont parallèles.

- (b) Pour montrer que la droite  $(MF)$  est parallèle au plan  $(IJK)$ , il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de la droite  $(MF)$  (le vecteur  $\overrightarrow{MF}$  par exemple) est coplanaire avec deux vecteurs directeurs du plan  $(IJK)$  (les vecteurs  $\overrightarrow{IL}$  et  $\overrightarrow{IK}$  par exemple, le point  $L$  appartenant au plan  $(IJK)$  d'après la question 2 partie A).

Puisque  $\overrightarrow{MF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{IL} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{IL} + 0\overrightarrow{IK}$  (question précédente), on peut affirmer que les vecteurs  $\overrightarrow{MF}$ ,  $\overrightarrow{IL}$  et  $\overrightarrow{IK}$  sont coplanaires. La droite  $(MF)$  est donc bien parallèle au plan  $(IJK)$ .

### Exercice 10.2.

#### Partie A. Définition

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2, soient  $n$  points de l'espace  $A_1, \dots, A_n$  et soient  $n$  réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$ .

1. Soit  $M$  un point quelconque de l'espace. On a :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \alpha_k (\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1A_k}) \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_1} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{A_1A_k} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k \right) \overrightarrow{MA_1} + \sum_{k=2}^n \alpha_k \overrightarrow{A_1A_k} = \vec{0} \quad \text{car } \alpha_1 \overrightarrow{A_1A_1} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k \right) \overrightarrow{A_1M} = \sum_{k=2}^n \alpha_k \overrightarrow{A_1A_k} \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{A_1M} = \alpha_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_1A_n} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1M} = \underbrace{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{A_1A_n}}_{:=\vec{u}}. \end{aligned}$$

2. Le point  $A_1$  et le vecteur  $\vec{u}$  étant donnés, il existe un unique point  $G$  tel que  $\overrightarrow{A_1G} = \vec{u}$ , donc d'après l'équivalence de la question 1, il existe un unique point  $G$  tel que :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}.$$

Un tel point  $G$  s'appelle le **barycentre** des points pondérés  $(A_1; \alpha_1), \dots, (A_n; \alpha_n)$  et on note  $G = \text{bar}(\{(A_1; \alpha_1), \dots, (A_n; \alpha_n)\})$ .

### Partie B. Deux points particuliers

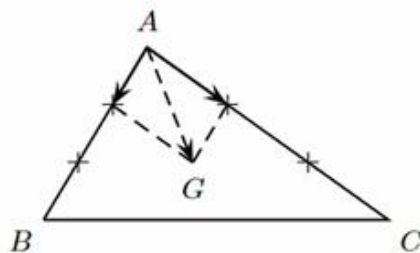
1. Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace.

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, G = \text{bar}(\{(A; \alpha), (B; \alpha)\}) &\iff \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \alpha \overrightarrow{GA} + \alpha \overrightarrow{GB} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \\ &\iff G \text{ milieu de } [AB] \end{aligned}$$

2. Soient  $A, B$  et  $C$  trois points de l'espace non alignés.

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, G = \text{bar}(\{(A; \alpha), (B; \alpha), (C; \alpha)\}) \\ &\iff \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \alpha \overrightarrow{GA} + \alpha \overrightarrow{GB} + \alpha \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \\ &\iff 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ &\iff 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &\iff \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Le point  $G$  est appelé **centre de gravité** du triangle  $ABC$ .



### Partie C. Propriétés

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2, soient  $n$  points de l'espace  $A_1, \dots, A_n$  et soient  $n$  réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$ .

1. On a :

$$G = \text{bar}(\{(A_1; \alpha_1), \dots, (A_n; \alpha_n)\})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$$

$$\stackrel{A.1}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{A_1G} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{A_1A_n}$$

$$\Leftrightarrow \forall \mu \in \mathbb{R}^*, \mu \overrightarrow{A_1G} = \frac{\mu\alpha_2}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \frac{\mu\alpha_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{A_1A_n}$$

$$\stackrel{A.1}{\Leftrightarrow} \forall \mu \in \mathbb{R}^*, \sum_{k=1}^n \mu\alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \forall \mu \in \mathbb{R}^*, G = \text{bar}(\{(A_1; \mu\alpha_1), \dots, (A_n; \mu\alpha_n)\})$$

2. **Propriété de réduction.** Supposons que  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A_1; \alpha_1), \dots, (A_n; \alpha_n)$ . Alors :  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$ .

Pour tout point  $M$  de l'espace, on a :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \sum_{k=1}^n \alpha_k (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA_k}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GM} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k},$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k} = - \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GM}, \text{ soit } \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k \right) \overrightarrow{MG} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k}.$$

3. **Propriété d'associativité.** Supposons que  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A_1; \alpha_1), \dots, (A_n; \alpha_n)$ . Alors :  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$ . Supposons aussi que  $K$  est le barycentre des points pondérés  $(A_1; \alpha_1), \dots, (A_{n-1}; \alpha_{n-1})$  avec  $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \neq 0$ . Alors :  $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \overrightarrow{KA_k} = \vec{0}$ .

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GA_k} &= \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \overrightarrow{GA_k} + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KA_k}) + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} \\ &= \left( \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \right) \overrightarrow{GK} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \overrightarrow{KA_k} + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} \\ &= \left( \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \right) \overrightarrow{GK} + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} \quad \text{car } \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \overrightarrow{KA_k} = \vec{0}, \end{aligned}$$

donc  $\left( \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \right) \overrightarrow{GK} + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ , donc  $G$  est le barycentre des points pondérés  $\left( K; \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \right)$  et  $(A_n; \alpha_n)$ .

## Partie D. Applications

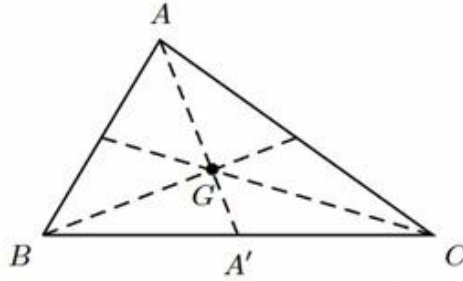
1. Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan. Notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = AB$ .

(a) Posons  $G = \text{bar}(\{(A; 3), (B; -2)\})$  et soit  $M$  un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\iff \|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = AB \\ &\iff \|(3-2)\overrightarrow{MG}\| = AB \text{ par propriété de réduction} \\ &\iff \|\overrightarrow{MG}\| = AB \\ &\iff MG = AB. \end{aligned}$$

(b) On déduit que l'ensemble  $\mathcal{E}$  est le cercle de centre  $G$  et de rayon  $AB$ .

2. Soit  $ABC$  un triangle. Notons  $G$  son centre de gravité et notons  $A'$  le milieu de  $[BC]$ .



- (a) D'après la question B.1, puisque  $A'$  est le milieu du segment  $[BC]$ , alors  $A' = \text{bar}(\{(B; 1), (C; 1)\})$ .

D'après la question B.2, puisque  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ , alors  $G = \text{bar}(\{(A; 1), (B; 1), (C; 1)\})$ .

D'après la propriété d'associativité,  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A'; 1+1)$  et  $(A; 1)$ , c'est-à-dire :  $G = \text{bar}(\{(A; 1), (A'; 2)\})$ .

- (b) Puisque  $G = \text{bar}(\{(A; 1), (A'; 2)\})$ , alors  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{1+2}\overrightarrow{AA'}$  d'après la question A.1, soit  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ , donc  $G$  appartient à la droite  $(AA')$ .

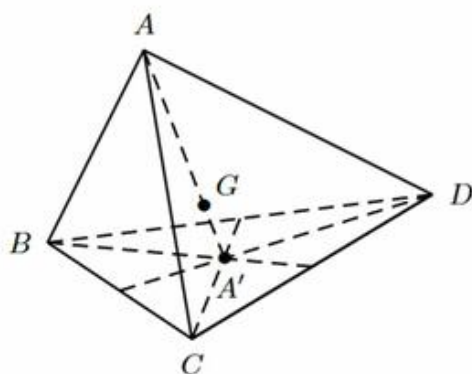
- (c) En notant  $B'$  et  $C'$  les milieux respectifs des segments  $[AC]$  et  $[AB]$ , on peut montrer de manière analogue que :

$$G = \text{bar}(\{(B; 1), (B'; 2)\}) \text{ et } G = \text{bar}(\{(C; 1), (C'; 2)\}),$$

donc  $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$  et  $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ , donc  $G$  appartient aux droites  $(BB')$  et  $(CC')$ .

Finalement, le point  $G$  appartient aux trois médianes  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  du triangle  $ABC$ , ce qui montre bien que les médianes du triangle  $ABC$  sont concourantes en  $G$ .

3. Soit  $ABCD$  un tétraèdre. Posons  $G = \text{bar}(\{(A; 1), (B; 1), (C; 1), (D; 1)\})$ . Les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  sont respectivement les centres de gravité des triangles  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  et  $ABC$ .



D'après la question B.2, on a  $A' = \text{bar}(\{(B; 1), (C; 1), (D; 1)\})$  puisque  $A'$  est le centre de gravité du triangle  $BCD$ .

Puisque  $G = \text{bar}(\{(A; 1), (B; 1), (C; 1), (D; 1)\})$ , alors par propriété d'associativité :  $G = \text{bar}(\{(A; 1), (A'; 3)\})$ , donc  $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{1+3}\overrightarrow{AA'}$  d'après la

question A.1, soit  $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$ , donc  $G \in [AA']$ .

On peut montrer de manière analogue que  $G \in [BB']$ ,  $G \in [CC']$  et  $G \in [DD']$ .

Par conséquent, les segments  $[AA']$ ,  $[BB']$ ,  $[CC']$  et  $[DD']$  sont concourants en  $G$ .

**Exercice 11.1.** L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormé.

On considère les points  $A(3; -2; 2)$ ,  $B(6; 1; 5)$ ,  $C(6; -2; -1)$  et  $D(0; 4; -1)$ .

1. On a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires, donc les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés. Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent donc un plan : le plan  $(ABC)$ .

2. (a) On a  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3 + 3 \times 0 + 3 \times (-3) = 0$ , donc les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  sont perpendiculaires en  $A$ , donc le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

- (b) On a  $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3 \times 3 + 6 \times 3 + (-3) \times 3 = 0$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 3 + 6 \times 0 + (-3) \times (-3) = 0$$

Par conséquent, le vecteur  $\overrightarrow{AD}$  est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan  $(ABC)$ , donc la droite  $(AD)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .

3. (a) En notant  $\mathcal{V}_{ABCD}$  le volume du tétraèdre  $ABCD$  et  $\mathcal{A}_{ABC}$  l'aire du triangle  $ABC$ , on a :

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times AD, \quad \text{avec : } \mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$$

$$= \frac{AB \times AC \times AD}{6}.$$

On a  $AB = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27}$ ,  $AC = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$  et  $AD = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{54}$ , donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ABCD} &= \frac{\sqrt{27} \times \sqrt{18} \times \sqrt{54}}{6} = \frac{3\sqrt{3} \times \sqrt{18} \times \sqrt{3}\sqrt{18}}{6} \\ &= \frac{9 \times 18}{6} = 27. \end{aligned}$$

(b) D'une part, on a  $\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc :

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 6 \times 6 + (-3) \times (-6) + 6 \times 0 = 54 \quad (1)$$

D'autre part, on a  $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = DB \times DC \times \cos(\widehat{BDC})$  avec  $DB = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9$  et  $DC = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 0^2} = 6\sqrt{2}$ , donc :

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 9 \times 6\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BDC}) \quad (2)$$

De l'égalité entre (1) et (2), il vient :  $9 \times 6\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BDC}) = 54$ , soit :

$$\cos(\widehat{BDC}) = \frac{54}{9 \times 6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par conséquent :  $\widehat{BDC} = \frac{\pi}{4}$  rad.

4. (a) Dans le triangle  $BDC$ , notons  $H$  le pied de la hauteur issue de  $B$ .

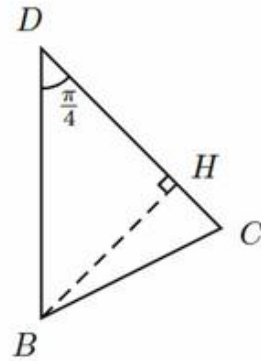
L'aire  $\mathcal{A}$  du triangle  $BDC$  est alors égale

$$\text{à : } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \times BH \times DC.$$

Le triangle  $BHD$  étant rectangle en  $H$ , il

vient que  $\sin(\widehat{BDH}) = \frac{BH}{DB}$ , soit :

$$BH = DB \sin(\widehat{BDH}).$$



Puisque  $\sin(\widehat{BDH}) = \sin(\widehat{BDC})$ , il vient d'après la question 3.(b) :

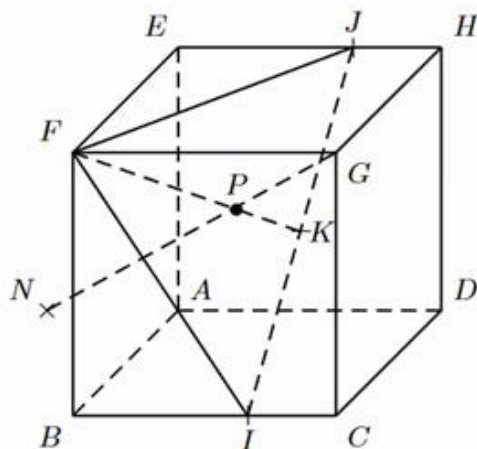
$$BH = DB \sin(\widehat{BDC}) = DB \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ et donc :}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times DB \times DC \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

On obtient :  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27.$

- (b) Nous avons déjà montré que  $\mathcal{V}_{ABCD} = 27$ .  
 On a également :  $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$  où  $h$  est la distance du point  $A$   
 au plan  $(BDC)$ , soit d'après 4.(a) :  $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times 27 \times h = 9h$ .  
 On obtient donc  $9h = 27$ , soit :  $h = 3$ .

**Exercice 11.2.** Sur la figure ci-dessous, on a représenté le cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1.



On a placé les points  $I$  et  $J$  tels que  $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$ , et le milieu  $K$  de  $[IJ]$ .  
 On note  $P$  le projeté orthogonal de  $G$  sur le plan  $(FIJ)$ .

### Partie A

1. (a) Il s'agit de montrer que  $FJ^2 = FI^2$ .  
 On applique le théorème de Pythagore au triangle  $FEJ$  rectangle en  $E$  :

$$FJ^2 = FE^2 + EJ^2 = 1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9}.$$

On applique le théorème de Pythagore au triangle  $BFI$  rectangle en  $B$  :

$$FI^2 = BI^2 + BF^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2 = \frac{13}{9}.$$

Finalement :  $FJ^2 = FI^2$ , donc  $FJ = FI$ , donc le triangle  $FIJ$  est isocèle en  $F$ .

- (b) Le triangle  $FIJ$  étant isocèle en  $F$ , la médiane  $(FK)$  issue de  $F$  dans le triangle  $FIJ$  est également la médiatrice du segment  $[IJ]$ . Ainsi les droites  $(FK)$  et  $(IJ)$  sont orthogonales.

On admet dans la suite que les droites  $(GK)$  et  $(IJ)$  sont orthogonales.

2. Les droites  $(IJ)$  et  $(FK)$  sont orthogonales d'après la question 1.(b), et les droites  $(IJ)$  et  $(GK)$  sont orthogonales d'après l'énoncé, donc la droite  $(IJ)$  est orthogonale à deux droites sécantes incluses dans le plan  $(FGK)$ , donc la droite  $(IJ)$  est orthogonale au plan  $(FGK)$ .
3. La droite  $(IJ)$  est orthogonale au plan  $(FGK)$  d'après la question 2, donc la droite  $(IJ)$  est orthogonale à la droite  $(FG)$ .  
La droite  $(GP)$  est orthogonale au plan  $(FIJ)$  puisque  $P$  est le projeté orthogonal de  $G$  sur  $(FIJ)$ , donc la droite  $(GP)$  est orthogonale à la droite  $(IJ)$ .  
Par conséquent, la droite  $(IJ)$  est orthogonale à deux droites sécantes incluses dans le plan  $(FGP)$ , donc la droite  $(IJ)$  est orthogonale au plan  $(FGP)$ .
4. (a) Les plans  $(FGK)$  et  $(FGP)$  sont tous deux orthogonaux à la droite  $(IJ)$ , ils sont donc parallèles.  
Mais puisque le point  $G$  (ou  $F$ ) appartient à ces deux plans, ces derniers sont confondus.  
On déduit donc que les points  $F, G, K$  et  $P$  sont coplanaires.
- (b) Les points  $F, P$  et  $K$  appartiennent tous trois aux plans  $(FIJ)$  et  $(FGP)$ . Puisque les plans  $(FIJ)$  et  $(FGP)$  sont sécants selon une droite, les points  $F, P$  et  $K$  appartiennent forcément à cette droite, ils sont donc alignés.

### Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

On note  $N$  le point d'intersection de la droite  $(GP)$  et du plan  $(ADB)$ .

On note  $(x; y; 0)$  les coordonnées du point  $N$ , où  $x$  et  $y$  sont deux réels.

1.  $F(1; 0; 1)$ ,  $G(1; 1; 1)$ ,  $I\left(1; \frac{2}{3}; 0\right)$  et  $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$ .
2. (a) La droite  $(GP)$  est orthogonale au plan  $(FIJ)$ . Or le point  $N$  appartient à la droite  $(GP)$ , donc les droites  $(GP)$  et  $(GN)$  sont confondues. Par conséquent, la droite  $(GN)$  est orthogonale au plan  $(FIJ)$ .  
On déduit que la droite  $(GN)$  est orthogonale aux droites  $(FI)$  et  $(FJ)$ .

(b) On a  $\overrightarrow{GN} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{FI} \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc :

$$\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FI} = 0(x-1) + \frac{2}{3}(y-1) + 1 = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$$

ainsi que :

$$\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FJ} = -(x-1) + \frac{2}{3}(y-1) + 0 = -x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}.$$

(c) La droite  $(GN)$  étant orthogonale aux droites  $(FI)$  et  $(FJ)$ , on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FI} = 0 \\ \overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FJ} = 0 \end{cases} \stackrel{2.(b)}{\iff} \begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0 \\ -x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases} .$$

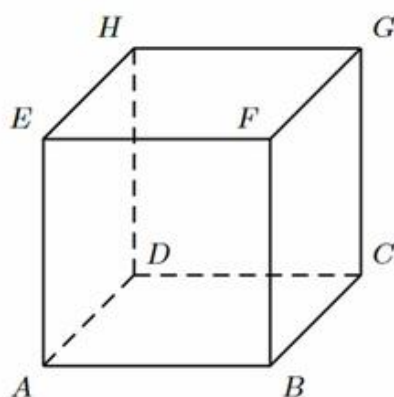
$$\text{Ainsi : } N \left( 0; -\frac{1}{2}; 0 \right).$$

3. Dans la figure donnée en début de correction, on trace les droites  $(GN)$  et  $(FG)$  puis l'on déduit la position du point  $P$ .

### Exercice 11.3.

#### Partie A. Étude de cas particuliers

On considère un cube  $ABCDEFGH$ .



On admet que les droites  $(AG)$ ,  $(BH)$ ,  $(CE)$  et  $(DF)$ , appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre  $ABCE$ .
  - (a) — Puisque la droite  $(EA)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ , la droite  $(EA)$  est la hauteur issue de  $E$  dans le tétraèdre  $ABCE$ .  
— Puisque la droite  $(CB)$  est orthogonale au plan  $(ABE)$ , la droite  $(CB)$  est la hauteur issue de  $C$  dans le tétraèdre  $ABCE$ .
  - (b) Les hauteurs  $(EA)$  et  $(CB)$  du tétraèdre  $ABCE$  ne sont pas coplanaires, elles ne sont donc pas sécantes. Par conséquent, les quatre hauteurs du tétraèdre  $ABCE$  ne sont pas concourantes.
2. On se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  et on considère le tétraèdre  $ACHF$ .
  - (a) On a  $A(0; 0; 0)$ ,  $C(1; 1; 0)$ ,  $D(0; 1; 0)$ ,  $F(1; 0; 1)$  et  $H(0; 1; 1)$ .  
Par conséquent, on obtient :

$$\overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Il vient donc  $\vec{FD} \cdot \vec{AC} = -1 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times 0 = 0$  et  $\vec{FD} \cdot \vec{AH} = -1 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$ .

- (b)  $\vec{FD}$  est un vecteur directeur de la droite  $(FD)$  et les vecteurs  $\vec{AC}$  et  $\vec{FH}$  sont deux vecteurs directeurs du plan  $(ACH)$ .

Puisque  $\vec{FD} \cdot \vec{AC} = 0$  et  $\vec{FD} \cdot \vec{AH} = 0$ , il vient que la droite  $(FD)$  est orthogonale au plan  $(ACH)$ .

Par conséquent, la droite  $(FD)$  est bien la hauteur issue de  $F$  dans le tétraèdre  $ACHF$ .

- (c) Par analogie avec le résultat précédent :

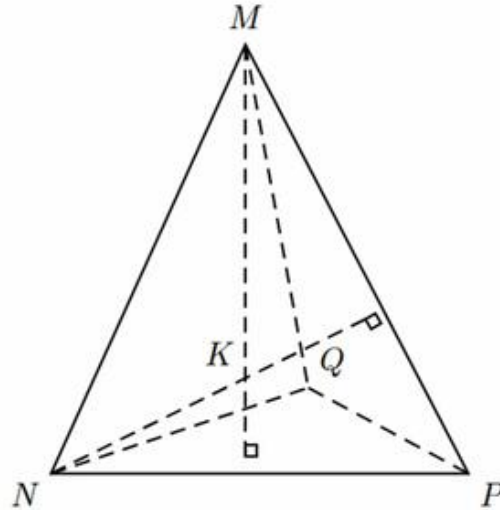
- la droite  $(AG)$  est la hauteur issue de  $A$  dans le tétraèdre  $ACHF$  ;
- la droite  $(CE)$  est la hauteur issue de  $C$  dans le tétraèdre  $ACHF$  ;
- la droite  $(HB)$  est la hauteur issue de  $H$  dans le tétraèdre  $ACHF$ .

Les quatre hauteurs du tétraèdre  $ACHF$  correspondent aux grandes diagonales du cube  $ABCDEFGH$  qui, selon l'énoncé, sont concourantes.

Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un tétraèdre orthocentrique.

### Partie B. Une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre  $MNPQ$  dont les hauteurs issues des sommets  $M$  et  $N$  sont sécantes en un point  $K$ . Les droites  $(MK)$  et  $(NK)$  sont donc orthogonales aux plans  $(NPQ)$  et  $(MPQ)$  respectivement.



1. (a) La droite  $(MK)$  est orthogonale au plan  $(NPQ)$ . Par définition, elle est orthogonale à toute droite contenue dans ce plan, en particulier à la droite  $(PQ)$ .  
On admet de même que les droites  $(PQ)$  et  $(NK)$  sont orthogonales.
- (b) La droite  $(PQ)$  est orthogonale aux droites  $(MK)$  et  $(NK)$  qui sont deux droites sécantes contenues dans le plan  $(MKN)$ , donc la droite  $(PQ)$  est orthogonale au plan  $(MKN)$ .

2. La droite  $(PQ)$  est orthogonale au plan  $(MNK)$ . Par définition, elle est orthogonale à toute droite contenue dans ce plan, en particulier à la droite  $(MN)$ .

Ainsi, on obtient la propriété suivante :

*Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux (on dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont « opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun).*

### Partie C. Application

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$R(-3; 5; 2), S(1; 4; -2), T(4; -1; 5) \text{ et } U(4; 7; 3).$$

D'après la propriété ci-dessus, s'il existe dans le tétraèdre  $RSTU$  deux arêtes opposées non orthogonales, le tétraèdre  $RSTU$  n'est pas orthocentrique.

Dans le tétraèdre  $RSTU$ , les arêtes  $[RT]$  et  $[SU]$  sont opposées.

Les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{RT}$  et  $\overrightarrow{SU}$  sont  $\overrightarrow{RT} \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{SU} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

Mais puisque  $\overrightarrow{RT} \cdot \overrightarrow{SU} = 7 \times 3 + (-6) \times 3 + 3 \times 5 = 18 \neq 0$ , il vient que les droites  $(RT)$  et  $(SU)$  ne sont pas orthogonales. Par conséquent, le tétraèdre  $RSTU$  n'est pas orthocentrique.

**Exercice 11.4.** On souhaite démontrer dans cet exercice que pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace, on a :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

Soient  $A, B, C, D$  et  $E$  quatre points de l'espace et soient  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$  et  $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AE}$ .

On cherche donc à démontrer l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

1. D'après une formule de polarisation, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(AB^2 + AD^2 - BD^2).$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) + \frac{1}{2}(AB^2 + AD^2 - BD^2) \\ &= AB^2 + \frac{1}{2}(AC^2 + AD^2) - \frac{1}{2}(BC^2 + BD^2). \end{aligned}$$

2. On note  $I$  le milieu du segment  $[CD]$ .

En appliquant le théorème de la médiane au triangle  $ACD$ , on a :

$$AC^2 + AD^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}CD^2 \quad (1)$$

En appliquant le théorème de la médiane au triangle  $BCD$ , on a :

$$BC^2 + BD^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}CD^2 \quad (2)$$

On obtient alors de la question précédente et des égalités (1) et (2) :

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= AB^2 + \frac{1}{2} \left( 2AI^2 + \frac{1}{2}CD^2 \right) - \frac{1}{2} \left( 2BI^2 + \frac{1}{2}CD^2 \right) \\ &= AB^2 + AI^2 - BI^2. \end{aligned}$$

3. Le quadrilatère  $ADEC$  étant un parallélogramme par construction, ses diagonales  $[CD]$  et  $[AE]$  se coupent en leur milieu. Or  $I$  est le milieu de  $[CD]$ , donc  $I$  est aussi le milieu de  $[AE]$ , donc  $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AI}$ .

Il vient donc :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{AI}) = 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI})$ .

Mais d'après une formule de polarisation :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(AB^2 + AI^2 - BI^2)$ , donc finalement :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB^2 + AI^2 - BI^2 \stackrel{\text{question 2}}{=} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

### Exercice 11.5.

#### Partie A. Une projection vectorielle

1. Dans une base orthonormée de l'espace  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le vecteur

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) On a :  $p_{\vec{i}}(\vec{v}) = \frac{\vec{i} \cdot \vec{v}}{\|\vec{i}\|^2} \vec{i} = \frac{x}{1} \vec{i} = x\vec{i}$ .

(b) De même, on obtient :  $p_{\vec{j}}(\vec{v}) = y\vec{j}$  et  $p_{\vec{k}}(\vec{v}) = z\vec{k}$ .

2. Pour tous vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace et pour tout réel  $\alpha$ , on a :

$$\begin{aligned} p_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) &= \frac{\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\|^2} \right) \vec{u} \\ &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = p_{\vec{u}}(\vec{v}) + p_{\vec{u}}(\vec{w}) \end{aligned}$$

ainsi que :

$$p_{\vec{u}}(\alpha\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \frac{\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \alpha \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \alpha p_{\vec{u}}(\vec{v}).$$

3. Soit  $\vec{v}$  un vecteur de l'espace.

— Supposons que  $p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{v}$ . Alors  $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \vec{v}$ , c'est-à-dire  $\lambda \vec{u} = \vec{v}$  avec

$$\lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}, \text{ donc } \vec{v} \text{ est colinéaire à } \vec{u}.$$

— Supposons que  $\vec{v}$  est colinéaire à  $\vec{u}$ . Alors il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ .

$$\text{On obtient alors : } p_{\vec{u}}(\vec{v}) = p_{\vec{u}}(\lambda \vec{u}) \stackrel{2.}{=} \lambda p_{\vec{u}}(\vec{u}) = \lambda \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \lambda \vec{u} = \vec{v}.$$

On a montré l'équivalence suivante :  $p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{v} \iff \vec{v}$  est colinéaire à  $\vec{u}$ .

4. Soit  $\vec{v}$  un vecteur de l'espace. On a :

$$p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{0} \iff \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \vec{0} \stackrel{\vec{u} \neq \vec{0}}{\iff} \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} = 0 \stackrel{\|\vec{u}\| \neq 0}{\iff} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

### Partie B. Procédé de Gram-Schmidt

Soit  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  une base quelconque de l'espace.

1. On pose  $\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ .

$$\text{On a } \|\vec{u}_1\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{u}\|} \right| \times \|\vec{u}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 1.$$

2. Considérons le vecteur  $\vec{v}' = \vec{v} - p_{\vec{u}_1}(\vec{v}) = \vec{v} - \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 = \vec{v} - (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) \vec{u}_1$ .

— Montrons que  $\vec{v}' \neq \vec{0}$ . Par l'absurde, supposons que  $\vec{v}' = \vec{0}$ .

Alors  $\vec{v} = (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) \vec{u}_1 = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ , donc les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, donc les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires, ce qui est absurde puisque  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base. Donc  $\vec{v}' \neq \vec{0}$ .

— Montrons que les vecteurs  $\vec{v}'$  et  $\vec{u}_1$  sont orthogonaux. On a :

$$\begin{aligned} \vec{v}' \cdot \vec{u}_1 &= (\vec{v} - (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 = \vec{v} \cdot \vec{u}_1 - ((\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 \\ &= \vec{v} \cdot \vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{v})(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) = \vec{v} \cdot \vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) \|\vec{u}_1\|^2 \\ &\stackrel{\|\vec{u}_1\|=1}{=} \vec{v} \cdot \vec{u}_1 - \vec{u}_1 \cdot \vec{v} = 0. \end{aligned}$$

3. On pose  $\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \vec{v}'$ .

$$(a) \text{ On a : } \|\vec{v}_1\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \vec{v}' \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \right| \times \|\vec{v}'\| = \frac{\|\vec{v}'\|}{\|\vec{v}'\|} = 1.$$

(b) Sachant que  $\vec{v}' \cdot \vec{u}_1 = 0$ , on a :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_1 = \left( \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \vec{v}' \right) \cdot \vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} (\vec{v}' \cdot \vec{u}_1) = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \times 0 = 0.$$

Les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{u}_1$  sont donc orthogonaux.

4. Considérons le vecteur  $\vec{w}' = \vec{w} - p_{\vec{u}_1}(\vec{w}) - p_{\vec{v}_1}(\vec{w}) = \vec{w} - \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 = \vec{w} - (\vec{u}_1 \cdot \vec{w})\vec{u}_1 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{w})\vec{v}_1$ .

— Montrons que  $\vec{w}' \neq \vec{0}$ . Par l'absurde, supposons que  $\vec{w}' = \vec{0}$ .

Alors  $\vec{w} = (\vec{u}_1 \cdot \vec{w})\vec{u}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{w})\vec{v}_1$ .

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \vec{v}' = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} (\vec{v} - (\vec{u}_1 \cdot \vec{v})\vec{u}_1) = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \vec{v} - \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}'\|} \vec{u}_1 \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \vec{v} - \frac{\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}\right) \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}'\|} \times \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \vec{v} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}'\|} \vec{u} \\ &= \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \quad \text{avec : } \begin{cases} \alpha = -\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}'\|} \\ \beta = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \end{cases} . \end{aligned}$$

Il vient par conséquent :

$$\begin{aligned} \vec{w} &= (\vec{u}_1 \cdot \vec{w})\vec{u}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{w})\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\|} \vec{u} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{w})(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \\ &= \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\|} \vec{u} + \alpha (\vec{v}_1 \cdot \vec{w}) \vec{u} + \beta (\vec{v}_1 \cdot \vec{w}) \vec{v} \\ &= \left( \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\|} + \alpha (\vec{v}_1 \cdot \vec{w}) \right) \vec{u} + \beta (\vec{v}_1 \cdot \vec{w}) \vec{v} \\ &= \alpha' \vec{u} + \beta' \vec{v} \quad \text{avec : } \begin{cases} \alpha' = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\|} + \alpha (\vec{v}_1 \cdot \vec{w}) \\ \beta' = \beta (\vec{v}_1 \cdot \vec{w}) \end{cases} , \end{aligned}$$

donc les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires, ce qui est absurde puisque  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base. Donc  $\vec{w}' \neq \vec{0}$ .

— Montrons que les vecteurs  $\vec{w}'$  et  $\vec{u}_1$  sont orthogonaux. On a :

$$\begin{aligned} \vec{w}' \cdot \vec{u}_1 &= (\vec{w} - (\vec{u}_1 \cdot \vec{w})\vec{u}_1 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{w})\vec{v}_1) \cdot \vec{u}_1 \\ &= \vec{w} \cdot \vec{u}_1 - ((\vec{u}_1 \cdot \vec{w})\vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 - ((\vec{v}_1 \cdot \vec{w})\vec{v}_1) \cdot \vec{u}_1 \\ &= \vec{w} \cdot \vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{w})\|\vec{u}_1\|^2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{w})(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_1) \\ &= \vec{w} \cdot \vec{u}_1 - \vec{u}_1 \cdot \vec{w} \quad \text{car } \|\vec{u}_1\| = 1 \text{ et } \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

— Montrons que les vecteurs  $\vec{w}'$  et  $\vec{v}_1$  sont orthogonaux. On a :

$$\begin{aligned} \vec{w}' \cdot \vec{v}_1 &= (\vec{w} - (\vec{u}_1 \cdot \vec{w})\vec{u}_1 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{w})\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1 \\ &= \vec{w} \cdot \vec{v}_1 - ((\vec{u}_1 \cdot \vec{w})\vec{u}_1) \cdot \vec{v}_1 - ((\vec{v}_1 \cdot \vec{w})\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1 \\ &= \vec{w} \cdot \vec{v}_1 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{w})(\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1) - (\vec{v}_1 \cdot \vec{w})\|\vec{v}_1\|^2 \end{aligned}$$

$$= \vec{w} \cdot \vec{v}_1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{w} \text{ car } \|\vec{v}_1\| = 1 \text{ et } \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ = 0.$$

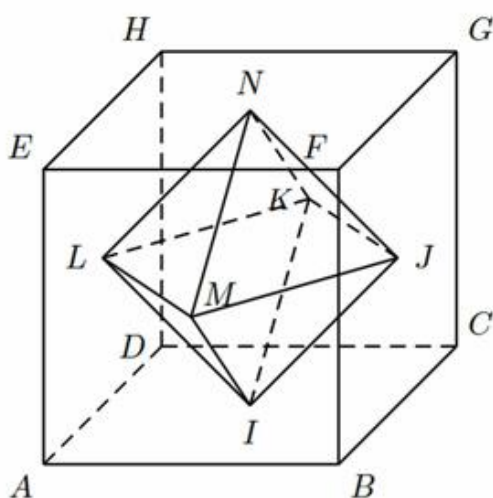
5. On pose  $\vec{w}_1 = \frac{1}{\|\vec{w}'\|} \vec{w}'$ .

On peut montrer comme précédemment que :

$$\|\vec{w}_1\| = 1 \text{ et } \vec{w}_1 \cdot \vec{u}_1 = \vec{w}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0.$$

Finalement, les vecteurs  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{v}_1$  et  $\vec{w}_1$  sont unitaires et deux à deux orthogonaux, donc la base  $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$  est orthonormée.

**Exercice 12.1.** On relie les centres de chaque face d'un cube  $ABCDEFGH$  pour former un solide  $IJKLMN$  comme sur la figure ci-dessous.



Plus précisément, les points  $I, J, K, L, M$  et  $N$  sont les centres respectifs des faces carrées  $ABCD, BCGF, CDHG, ADHE, ABFE$  et  $EFGH$  (donc les milieux des diagonales de ces carrés).

1. Les points  $L$  et  $M$  sont les milieux respectifs des segments  $[AH]$  et  $[AF]$ , donc d'après le théorème des milieux dans le triangle  $AHF$ , la droite  $(LM)$  est parallèle à la droite  $(FH)$ .  
De plus, la droite  $(BF)$  est orthogonale au plan  $(EFG)$ , elle est donc en particulier orthogonale à la droite  $(FH)$ .  
On déduit que la droite  $(BF)$  est orthogonale à la droite  $(LM)$ .  
De plus, puisque le quadrilatère  $BFNI$  est un rectangle, les droites  $(IN)$  et  $(BF)$  sont parallèles.  
Il vient donc que la droite  $(IN)$  est orthogonale à la droite  $(ML)$ .

Dans la suite, on considère le repère orthonormé  $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$  dans lequel, par exemple, le point  $N$  a pour coordonnées  $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$ .

2. (a) On a  $C(1; 1; 0)$ ,  $M\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$  et  $L\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ , donc  $\overrightarrow{NC} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{ML} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(b) On a  $\overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + (-1) \times 0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$ , donc les droites  $(NC)$  et  $(ML)$  sont orthogonales.

(c) Le vecteur  $\overrightarrow{ML}$  est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan  $(NCI)$  (les vecteurs  $\overrightarrow{IN}$  et  $\overrightarrow{NC}$ ), donc  $\overrightarrow{ML}$  est normal au plan  $(NCI)$ , donc une équation cartésienne de  $(NCI)$  est de la forme :  $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + d = 0$ , où  $d \in \mathbb{R}$ .

Mais puisque le point  $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$  appartient au plan  $(NCI)$ , alors :

$$-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + d = 0, \text{ c'est-à-dire : } d = 0.$$

Finalement, une équation cartésienne de  $(NCI)$  est :

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \quad (E)$$

3. (a) On a  $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ ,  $J\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  et  $M\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$ .

On vérifie alors aisément que  $x_N - y_N + z_N - 1 = 0$ ,  $x_J - y_J + z_J - 1 = 0$  et  $x_M - y_M + z_M - 1 = 0$ , donc une équation cartésienne du plan  $(NJM)$  est :

$$x - y + z - 1 = 0 \quad (E')$$

(b) Le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est normal à  $(NJM)$  d'après l'équation cartésienne  $(E')$  et on a  $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Par conséquent, les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\overrightarrow{DF}$  étant égaux (et donc colinéaires), on peut déduire que la droite  $(DF)$  est orthogonale au plan  $(NJM)$ .

(c) Le point  $N$  appartient aux plans  $(NJM)$  et  $(NCI)$ , donc l'intersection de ces deux plans est une droite passant par  $N$ .

Cette droite est, par définition, orthogonale à toute droite orthogonale aux plans  $(NJM)$  et  $(NCI)$ .

En notant  $\vec{w} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  un vecteur directeur de cette droite, il vient que  $\vec{w}$

est orthogonal aux vecteurs  $\overrightarrow{ML}$  et  $\overrightarrow{DF}$ . On a donc :

$$\begin{cases} \vec{w} \cdot \overrightarrow{ML} = 0 \\ \vec{w} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases}.$$

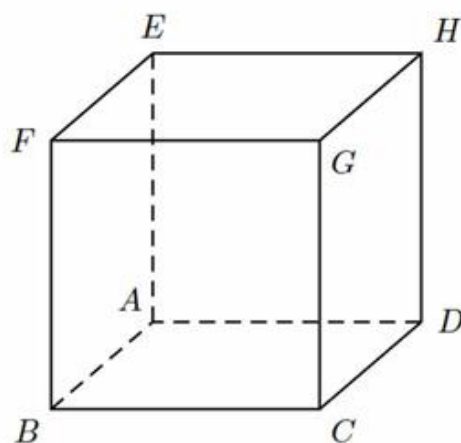
En posant  $a = b = 1$ , on déduit que l'intersection des plans  $(NCI)$  et  $(NJM)$  est la droite passant par  $N$  et de vecteur directeur  $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Il s'agit de la droite  $(EG)$  car  $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $N \in [EG]$ .

**Exercice 12.2.** On considère un cube  $ABCDEFGH$  d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .

On considère les points  $I \left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$ ,  $J \left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$ ,  $K \left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$  et  $L(a; 1; 0)$  avec  $a$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ .



Partie A

1. La droite  $(IJ)$  passe par le point  $I \left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$  et a  $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$  pour vecteur directeur, donc une représentation paramétrique de cette droite est le système  $(S)$  suivant :

$$(S) \begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

2. La droite  $(KL)$  passe par le point  $K \left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$  et a  $\overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} a - 3/4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  pour vecteur directeur, donc une représentation paramétrique de cette droite est

le système  $(S')$  suivant :

$$(S') \begin{cases} x &= \frac{3}{4} + t' \left( a - \frac{3}{4} \right) \\ y &= t' \\ z &= 1 - t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

3. Soit  $M$  un point de coordonnées  $(x; y; z)$ .

Les droites  $(IJ)$  et  $(KL)$  sont sécantes en  $M$  si, et seulement si  $(x; y; z)$  est l'unique triplet vérifiant  $(S)$  et  $(S')$ , i.e. si, et seulement s'il existe un unique

$$\text{couple } (t; t') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } \begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z &= t \\ x &= \frac{3}{4} + t' \left( a - \frac{3}{4} \right) \\ y &= t' \\ z &= 1 - t' \end{cases} \text{ i.e. si, et seulement s'il}$$

$$\text{existe un unique couple } (t; t') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } \begin{cases} 1 - t &= \frac{3}{4} + t' \left( a - \frac{3}{4} \right) & (1) \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t &= t' & (2) \\ t &= 1 - t' & (3) \end{cases}$$

On résout ce dernier système d'inconnue  $(t; t') \in \mathbb{R}^2$  par méthode de substitution.

$$(3) \quad t = 1 - t' \iff t' = 1 - t$$

$$(2) \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t = t' \stackrel{(3)}{\iff} \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t = 1 - t \iff t = \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad t' = 1 - t \stackrel{(2)}{\iff} t' = 1 - \frac{1}{2} \iff t' = \frac{1}{2}$$

$$(1) \quad 1 - t = \frac{3}{4} + t' \left( a - \frac{3}{4} \right) \stackrel{(2) \& (3)}{\iff} \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left( a - \frac{3}{4} \right) \iff a = \frac{1}{4}$$

Nous obtenons finalement :

$$(IJ) \text{ et } (KL) \text{ sécantes en } M \iff \exists! (t; t') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} t = t' = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \\ \iff a = \frac{1}{4}.$$

Notons que l'on obtient les coordonnées de  $M$  :  $M \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$ .

## Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose  $a = \frac{1}{4}$ .

Le point  $L$  a donc pour coordonnées  $\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$ .

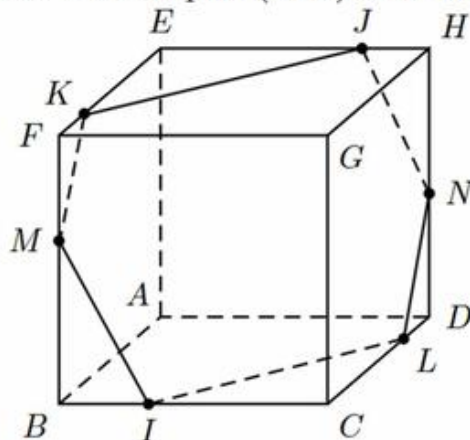
1. Le quadrilatère  $IKJL$  est un parallélogramme si, et seulement si  $\vec{IK} = \vec{LJ}$ .

On a  $\vec{IK} \begin{pmatrix} 3/4 - 1 \\ 0 - 1/3 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \vec{IK} \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{LJ} \begin{pmatrix} 0 - 1/4 \\ 2/3 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \vec{LJ} \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , d'où

le résultat.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan  $(IJK)$  avec les faces du cube  $ABCDEFGH$ .

On note  $M$  le point d'intersection du plan  $(IJK)$  et de la droite  $(BF)$  et par  $N$  le point d'intersection du plan  $(IJK)$  et de la droite  $(DH)$ .



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points  $M$  et  $N$ .

$$(a) \vec{n} \cdot \vec{IJ} = 8 \times (-1) + 9 \times \frac{1}{3} + 5 \times 1 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{IK} = 8 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 5 \times 1 = 0$$

Ainsi  $\vec{n} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$  est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan  $(IJK)$ , il est donc normal à ce plan.

- (b) Le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $(IJK)$ , donc une équation cartésienne de  $(IJK)$  est de la forme :  $8x + 9y + 5z + d = 0$ , où  $d$  est un réel.

Mais puisque  $I \left(1; \frac{1}{3}; 0\right) \in (IJK)$ , alors :  $8 \times 1 + 9 \times \frac{1}{3} + 5 \times 0 + d = 0$ , soit :  $d = -11$ .

Finalement, une équation cartésienne du plan  $(IJK)$  est :

$$8x + 9y + 5z - 11 = 0 \quad (E)$$

(c) — Une représentation paramétrique de  $(BF)$  est :  $(S) \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Puisque  $M$  est le point d'intersection du plan  $(IJK)$  et de la droite  $(BF)$ , ses coordonnées  $(x; y; z)$  vérifient  $(S)$  et  $(E)$ , il existe

donc un réel  $t$  tel que :  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \\ 8x + 9y + 5z - 11 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel que :}$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \\ 8 \times 1 + 9 \times 0 + 5t - 11 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel que : } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3/5 \\ t = 3/5 \end{cases}.$$

Les coordonnées de  $M$  sont  $\left(1; 0; \frac{3}{5}\right)$ .

— Une représentation paramétrique de  $(DH)$  est :  $(S') \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Puisque  $N$  est le point d'intersection du plan  $(IJK)$  et de la droite  $(DH)$ , ses coordonnées  $(x; y; z)$  vérifient  $(S')$  et  $(E)$ , il existe

donc un réel  $t$  tel que :  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \\ 8x + 9y + 5z - 11 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel que :}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \\ 8 \times 0 + 9 \times 1 + 5t - 11 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel que : } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2/5 \\ t = 2/5 \end{cases}.$$

Les coordonnées de  $N$  sont  $\left(0; 1; \frac{2}{5}\right)$ .

**Exercice 12.3.** Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère :

- le plan  $\mathcal{P}_1$  dont une équation cartésienne est  $2x + y - z + 2 = 0$ ;
- le plan  $\mathcal{P}_2$  passant par le point  $B(1; 1; 2)$  et dont un vecteur normal est

$$\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Le vecteur  $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $\mathcal{P}_1$  dont une équation cartésienne est :

$$2x + y - z + 2 = 0 \quad (E_1)$$

- (b) On a  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$ , donc les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont orthogonaux.

On en déduit que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont perpendiculaires.

2. (a) Le vecteur  $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $\mathcal{P}_2$ , donc une équation cartésienne de  $\mathcal{P}_2$  est de la forme :  $x - y + z + d = 0$ , où  $d$  est un réel.

Mais puisque  $B(1; 1; 2) \in \mathcal{P}_2$ , alors :  $1 - 1 + 2 + d = 0$ , soit :  $d = -2$ .

Finalement, une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}_2$  est :

$$x - y + z - 2 = 0 \quad (E_2)$$

- (b) On note  $\Delta$  la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrons que  $\Delta \subset \mathcal{P}_1$  et  $\Delta \subset \mathcal{P}_2$ .

Soit un point  $I$  appartenant à la droite  $\Delta$ . Alors il existe un réel  $t$  tel que les coordonnées de  $I$  sont  $(0; -2 + t; 2 + t)$ . On remarque alors que les coordonnées de  $I$  vérifient les équations  $(E_1)$  et  $(E_2)$  puisque :  $2 \times 0 + (-2 + t) - t + 2 = 0$  et  $0 - (-2 + t) + t - 2 = 0$ , donc le point  $I$  appartient aux plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .

Nous avons donc montré que la droite  $\Delta$  est contenue dans les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .

Puisque les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants d'après la question 1.(b), il vient que l'intersection de ces deux plans est la droite  $\Delta$ .

On considère le point  $A(1; 1; 1)$  et on admet que le point  $A$  n'appartient ni à  $\mathcal{P}_1$  ni à  $\mathcal{P}_2$ .

On note  $H$  le projeté orthogonal du point  $A$  sur la droite  $\Delta$ .

3. On rappelle que, d'après la question 2.(b), la droite  $\Delta$  est l'ensemble des points de coordonnées  $(0; -2 + t; t)$ , où  $t$  est un réel quelconque.

Dans la suite de cette question, on considère pour tout réel  $t$  le point  $M_t$  de coordonnées  $(0; -2 + t; t)$ .

- (a) Pour tout réel  $t$ , on a :

$$\begin{aligned} AM_t &= \sqrt{(0-1)^2 + (-2+t-1)^2 + (t-1)^2} \\ &= \sqrt{1 + (t-3)^2 + (t-1)^2} \\ &= \sqrt{1 + t^2 - 6t + 9 + t^2 - 2t + 1} \\ &= \sqrt{2t^2 - 8t + 11}. \end{aligned}$$

- (b) Le point  $H$  est le point appartenant à la droite  $\Delta$  le plus proche du point  $A$ , donc le minimum sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $t \mapsto AM_t$  est la longueur  $AH$ .

Notons  $f$  la fonction  $t \mapsto AM_t^2 = 2t^2 - 8t + 11$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Par propriété, le minimum de la fonction  $f$  est atteint pour  $t = -\frac{-8}{2 \times 2} = 2$  et est égal à  $f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 11 = 3$ .

Ainsi, le minimum la fonction  $t \mapsto AM_t$  est atteint pour  $t = 2$  et est égal à  $AM_2 = AH = \sqrt{3}$ .

4. On note  $\mathcal{D}_1$  la droite orthogonale au plan  $\mathcal{P}_1$  passant par le point  $A$  et  $H_1$  le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}_1$ .

- (a) La droite  $\mathcal{D}_1$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}_1$ , donc le vecteur  $\vec{n}_1$ , normal au plan  $\mathcal{P}_1$ , est un vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}_1$ . De plus le point  $A(1; 1; 1)$  appartient à la droite  $\mathcal{D}_1$ , donc une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}_1$  est :

$$(S_1) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Puisque le projeté orthogonal  $H_1$  de  $A$  sur  $\mathcal{P}_1$  est le point d'intersection de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{P}_1$ , ses coordonnées  $(x; y; z)$  vérifient  $(S_1)$  et  $(E_1)$ . Il

existe donc un réel  $t$  tel que : 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel que :}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \\ 2(1 + 2t) + (1 + t) - (1 - t) = 0 \end{cases}, \text{ i.e. tel que : } \begin{cases} x = -1/3 \\ y = 1/3 \\ z = 5/3 \\ t = -2/3 \end{cases}.$$

Le point  $H_1$  a donc pour coordonnées  $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .

5. Notons  $H_2$  le projeté orthogonal de  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}_2$ .

On admet que  $H_2$  a pour coordonnées  $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$  et que  $H$  a pour coordonnées  $(0; 0; 2)$ .

$$\text{On a : } \overrightarrow{AH_1} \begin{pmatrix} -1/3 - 1 \\ 1/3 - 1 \\ 5/3 - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AH_1} \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a également : } \overrightarrow{H_2H} \begin{pmatrix} 0 - 4/3 \\ 0 - 2/3 \\ 2 - 4/3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{H_2H} \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{H_2H}$ , le quadrilatère  $AH_1HH_2$  est un parallélogramme.

La droite  $(AH_1)$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}_1$ , elle est donc orthogonale à

toutes les droites contenues dans ce plan. En particulier, puisque les points  $H_1$  et  $H$  appartiennent au plan  $\mathcal{P}_1$ , la droite  $(AH_1)$  est perpendiculaire à la droite  $(HH_1)$ .

Finalement, le quadrilatère  $AH_1HH_2$  est un parallélogramme contenant un angle droit, il est donc un rectangle.

**Exercice 12.4.** Soient  $(x; y; z)$  les coordonnées d'un point  $M$  appartenant au plan  $\mathcal{P}$ .

On a alors l'égalité  $ax + by + cz + d = 0$ , soit l'égalité :

$$d = -(ax + by + cz) \quad (1)$$

On a :  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$ . Puisque  $H$  et  $M$  sont deux points du plan  $\mathcal{P}$  et que  $\vec{n}$  est un vecteur orthogonal à ce plan, on en déduit que  $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = 0$  et donc :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} \quad (2)$$

Les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\overrightarrow{AH}$  étant colinéaires, on a :  $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$ .

Il vient donc d'après (2) :  $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$ , donc :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad \text{car } \vec{n} \neq \vec{0} \quad (3)$$

Comme  $\vec{n}$  est normal à  $\mathcal{P}$ , ses coordonnées sont  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , et puisque  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$ ,

on obtient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b + (z - z_A) \times c \\ &= ax + bc + cz - ax_A - by_A - cz_A \\ &= -d - ax_A - by_A - cz_A \quad \text{d'après (1)} \\ &= -(ax_A + by_A + cz_A + d). \end{aligned}$$

Il vient donc :  $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = |ax_A + by_A + cz_A + d|$ .

On déduit d'après (3) l'égalité souhaitée, à savoir :

$$d(A, \mathcal{P}) = AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Exercice 13.1.** Soit un entier  $n \geq 1$ . Pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire définie par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la boule tirée dans la } i\text{-ième urne est noire} \\ 0 & \text{si la boule tirée dans la } i\text{-ième urne est blanche} \end{cases}.$$

Pour tout  $i \in \{1; \dots; n\}$ , la loi de probabilité de  $X_i$  est donnée dans le tableau ci-dessous :

$x$	0	1
$P(X_i = x)$	$\frac{i}{1+i}$	$\frac{1}{1+i}$

et on a :  $E(X_i) = 0 \times \frac{i}{1+i} + 1 \times \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i}$ .

En posant  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  la variable aléatoire comptant le nombre de boules noires obtenues à l'issue des  $n$  tirages, on a :

$$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i}.$$

En effectuant un grand nombre de  $n$  tirages, le nombre moyen de boules noires tirées est égal à  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ .

**Exercice 13.2.** Soit  $n$  un entier naturel non nul. On lance  $n$  fois une pièce équilibrée et on joue à un jeu. Pour tout  $k \in \{1; \dots; n\}$ , si la pièce tombe sur pile au  $k$ -ième lancer, on gagne  $k$  euros, sinon on ne gagne rien.

Pour tout  $k \in \{1; \dots; n\}$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire correspondant au gain obtenu lors du  $k$ -ième tirage et on note  $Y_k$  la variable aléatoire donnant le total des gains obtenus à l'issue du  $k$ -ième lancer.

1. Dans cette question,  $k$  désigne un entier compris entre 1 et  $n$ .

(a) La loi de probabilité de  $X_k$  est donnée dans le tableau ci-dessous :

$x$	0	$k$
$P(X_k = x)$	0,5	0,5

(b)  $E(X_k) = 0 \times 0,5 + k \times 0,5 = \frac{k}{2}$

(c)  $V(X_k) = 0,5 \left(0 - \frac{k}{2}\right)^2 + 0,5 \left(k - \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{8} + \frac{k^2}{8} = \frac{k^2}{4}$

2. (a) Pour tout  $k \in \{1; \dots; n\}$ , on a :  $Y_k = X_1 + \dots + X_k$ .

(b) Pour tout  $k \in \{1; \dots; n\}$ , on a :

$$\begin{aligned} E(Y_k) &= E(X_1 + \dots + X_k) = E(X_1) + \dots + E(X_k) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \dots + k) = \frac{1}{2} \times \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{4}. \end{aligned}$$

On cherche à résoudre l'inéquation  $E(Y_n) > 280$  d'inconnue  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$\begin{aligned} E(Y_n) > 280 &\iff \frac{n(n+1)}{4} > 280 \iff n(n+1) > 1120 \\ &\iff n^2 + n - 1120 > 0. \end{aligned}$$

L'équation  $x^2 + x - 1120 = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  a pour discriminant 4481 strictement positif, donc possède deux solutions  $x_1$  et  $x_2$ , à savoir  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{4481}}{2} \approx -33,97$  et  $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{4481}}{2} \approx 32,97$ .

On obtient le tableau de signe sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto x^2 + x - 1120$  :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$x^2 + x - 1120$	+	0	-	0	+

Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $E(Y_n) > 280 \iff n \geq 33$ .

Il faut donc au moins 33 lancers pour que le gain moyen dépasse 280 euros.

(c) Pour tout entier  $m \geq 1$ , notons  $\mathcal{P}(m)$  la propriété :

$$\ll \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \gg.$$

— Initialisation. On a  $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^1 = 1$  et  $\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = 1$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

— Hérité. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathcal{P}(m)$  est vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(m+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$ .

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k^2 &= \sum_{k=1}^m k^2 + (m+1)^2 \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \text{ par H.R.} \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} \\ &= \frac{(m+1)[m(2m+1) + 6(m+1)]}{6} \\ &= \frac{(m+1)(2m^2 + 7m + 6)}{6}. \end{aligned}$$

Or  $(m+2)(2m+3) = 2m^2 + 3m + 4m + 6 = 2m^2 + 7m + 6$ , donc  $\mathcal{P}(m+1)$  est vraie.

— Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(1)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq 1$ .

(d) Les variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  étant indépendantes (les résultats obtenus lors des lancers précédents n'ont pas d'influence sur les lancers futurs), on a pour tout  $k \in \{1; \dots; n\}$  :  $V(Y_k) = V(X_1) + \dots + V(X_k)$ .

Or, pour tout  $k \in \{1; \dots; n\}$ ,  $V(X_k) = \frac{k^2}{4}$ , donc :

$$V(Y_k) = \frac{1^2}{4} + \dots + \frac{k^2}{4} = \frac{1}{4}(1^2 + \dots + k^2) \stackrel{2.(c)}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{24}.$$

**Exercice 14.1.** Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

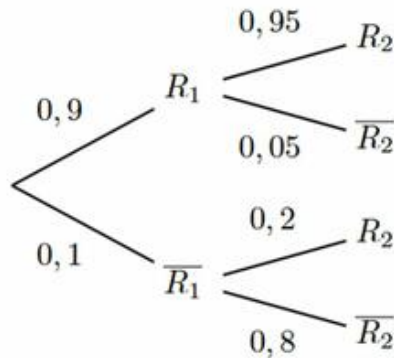
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- A l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $R_n$  l'événement « Le client rapporte la bouteille de son panier de la  $n$ -ième semaine ».

1. (a) Ci-dessous l'arbre modélisant la situation pour les deux premières semaines.



- (b) La probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine est donnée par  $P(R_1 \cap R_2)$  :

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = 0,9 \times 0,95 = 0,855.$$

- (c) La probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est donnée par  $P(R_2)$ . D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(\overline{R_1} \cap R_2)$$

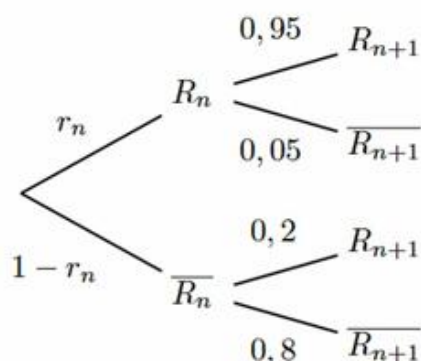
$$\begin{aligned}
 &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(R_2) \\
 &= 0,855 + 0,1 \times 0,2 \\
 &= 0,855 + 0,02 \\
 &= 0,875.
 \end{aligned}$$

(d) Il s'agit de calculer  $P_{R_2}(\overline{R_1})$ . On a :

$$P_{R_2}(\overline{R_1}) = \frac{P(\overline{R_1} \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{0,02}{0,875} \approx 0,023.$$

2. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $r_n$  la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la  $n$ -ième semaine.

(a) Soit  $n$  un entier naturel non nul. Ci-dessous l'arbre pondéré complété.



(b) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 r_{n+1} &= P(R_{n+1}) \\
 &= P(R_n \cap R_{n+1}) + P(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) \\
 &= P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \\
 &= 0,95r_n + 0,2(1 - r_n) \\
 &= 0,95r_n + 0,2 - 0,2r_n \\
 &= 0,75r_n + 0,2.
 \end{aligned}$$

(c) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$  ».

— Initialisation. On a  $r_1 = P(R_1) = 0,9$  et  $0,1 \times 0,75^{1-1} + 0,8 = 0,1 + 0,8 = 0,9$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

— Hérité. Soit  $n$  un entier naturel non nul tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire tel que  $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$ . Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $r_{n+1} = 0,1 \times 0,75^n + 0,8$ .

On a :

$$r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$$

$$\begin{aligned}
 &= 0,75(0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8) + 0,2 \text{ par H.R.} \\
 &= 0,1 \times 0,75^n + 0,6 + 0,2 \\
 &= 0,1 \times 0,75^n + 0,8.
 \end{aligned}$$

Finalement,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

— Conclusion. On a montré que  $\mathcal{P}(1)$  est vraie et que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ , donc  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  non nul.

(d) On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^{n-1} = 0$  car  $-1 < 0,75 < 1$ , donc par produit de limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1 \times 0,75^{n-1} = 0$ , et donc par somme de limites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0,8$ .

A très long terme, la probabilité qu'un client rende la bouteille se stabilise autour de 0,8.

## Exercice 14.2.

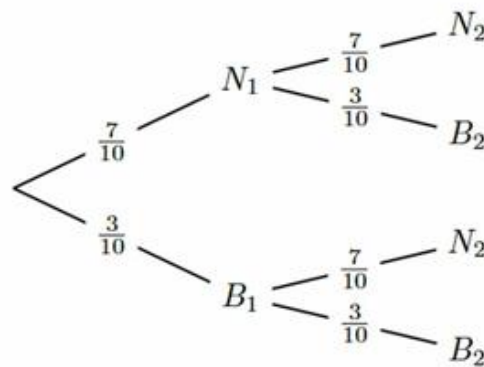
### Partie A

Dans cette partie A, on pose  $k = 7$ . Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note  $p$  la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.

Sachant que les tirages sont indépendants, on peut représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessous dans lequel :

- $N_1$  est l'événement : « la première boule tirée est noire » ;
- $N_2$  est l'événement : « la deuxième boule tirée est noire » ;
- $B_1$  est l'événement : « la première boule tirée est blanche » ;
- $B_2$  est l'événement : « la deuxième boule tirée est blanche ».



Il s'agit de déterminer la probabilité de l'événement  $(N_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap N_2)$ . Les événements  $N_1 \cap B_2$  et  $B_1 \cap N_2$  étant incompatibles, on obtient :

$$p := P((N_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap N_2)) = P(N_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap N_2).$$

Mais puisque les événements  $N_1$  et  $B_2$  sont indépendants, ainsi que les événements  $B_1$  et  $N_2$ , alors :  $P(N_1 \cap B_2) = P(N_1) \times P(B_2)$  et  $P(B_1 \cap N_2) = P(N_2) \times P(B_1)$ .

Par conséquent :

$$\begin{aligned} P((N_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap N_2)) &= P(N_1) \times P(B_2) + P(B_1) \times P(N_2) \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \\ &= \frac{21}{100} + \frac{21}{100} \\ &= \frac{42}{100} = 0,42. \end{aligned}$$

2. Soit un entier  $n > 2$ . Un joueur joue  $n$  parties identiques et indépendantes. On note  $X$  la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur, et  $p_n$  la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des  $n$  parties.

Notons que  $X \in \{0; \dots; n\}$ .

- (a) — Jouer une partie est une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = 0,42$  en considérant que le succès est l'obtention de deux boules de couleurs différentes.  
 — Jouer  $n$  parties identiques et indépendantes est donc un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p = 0,42$ .  
 — La variable aléatoire  $X$  compte le nombre de parties gagnées par le joueur à l'issue des  $n$  parties, donc  $X$  compte le nombre de succès dans le schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p = 0,42$  décrit ci-dessus.

Ainsi,  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = 0,42$ .

- (b) On a  $p_n = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$  avec :

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} 0,42^0 (1 - 0,42)^{n-0} = (1 - 0,42)^n = 0,58^n,$$

donc :  $p_n = 1 - 0,58^n$ .

A l'aide de la calculatrice, on trouve :  $p_{10} \approx 0,996$ .

3. Après exécution, le programme Python ci-dessous affiche la valeur 9.

```

1 n = 3
2 while (1 - 0.58**n < 0.99):
3     n = n + 1
4 print(n)

```

- (a) Le joueur doit jouer au minimum 9 parties afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.
- (b) Il s'agit de résoudre l'inéquation  $p_n \geq 0,99$  d'inconnue l'entier  $n \geq 3$ .  
Pour tout entier  $n \geq 3$ , on a :

$$\begin{aligned}
 p_n \geq 0,99 &\iff 1 - 0,58^n \geq 0,99 \\
 &\iff 0,58^n \leq 1 - 0,99 \\
 &\iff 0,58^n \leq 0,01 \\
 &\iff \ln(0,58^n) \leq \ln(0,01) \\
 &\iff n \ln(0,58) \leq \ln(0,01) \\
 &\iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)} \quad \text{car } \ln(0,58) < 0 \\
 &\iff n \geq 9.
 \end{aligned}$$

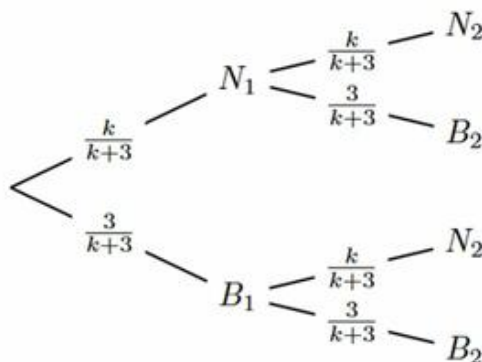
### Partie B

Dans cette partie, le nombre  $k$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note  $Y_k$  la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. (a) On réalise un arbre de probabilités résumant la situation identique à celui de la partie A.



L'événement  $\{Y_k = 5\}$  est réalisé lorsque le joueur gagne la partie, c'est-à-dire lorsque le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, donc :  $\{Y_k = 5\} = (N_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap N_2)$ .

En utilisant les justifications de la question 1 de la partie A, on obtient :

$$\begin{aligned}
 P(Y_k = 5) &= P(N_1) \times P(B_2) + P(B_1) \times P(N_2) \\
 &= \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{k+3} + \frac{3}{k+3} \times \frac{k}{k+3} \\
 &= \frac{3k}{(k+3)^2} + \frac{3k}{(k+3)^2} = \frac{6k}{(k+3)^2}.
 \end{aligned}$$

(b) La variable aléatoire  $Y_k$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{-9; -1; 5\}$ .

— On a :  $\{Y_k = -9\} = B_1 \cap B_2$ . Les événements  $B_1$  et  $B_2$  étant indépendants, on obtient :

$$\begin{aligned} P(Y_k = -9) &= P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2) \\ &= \frac{3}{k+3} \times \frac{3}{k+3} = \frac{9}{(k+3)^2}. \end{aligned}$$

— On a :  $\{Y_k = -1\} = N_1 \cap N_2$ . Les événements  $N_1$  et  $N_2$  étant indépendants, on obtient :

$$\begin{aligned} P(Y_k = -1) &= P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P(N_2) \\ &= \frac{k}{k+3} \times \frac{k}{k+3} = \frac{k^2}{(k+3)^2}. \end{aligned}$$

— On a déjà montré que  $P(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$ .

On résume donc la loi de probabilité de  $Y_k$  dans le tableau ci-dessous.

$y$	-9	-1	5
$P(Y_k = y)$	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$

2. On note  $E(Y_k)$  l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $Y_k$ .  
On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance  $E(Y_k)$  est strictement positive. On a :

$$\begin{aligned} E(Y_k) &= -9 \times P(Y_k = -9) + (-1) \times P(Y_k = -1) + 5 \times P(Y_k = 5) \\ &= -\frac{81}{(k+3)^2} - \frac{k^2}{(k+3)^2} + \frac{30k}{(k+3)^2} \\ &= \frac{-k^2 + 30k - 81}{(k+3)^2}. \end{aligned}$$

Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{-x^2 + 30x - 81}{(x+3)^2}$  définie sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ .

Pour tout  $x \in [2; +\infty[$ , on a  $(x+3)^2 > 0$ , donc le signe de  $f(x)$  est le signe de  $-x^2 + 30x - 81$ .

L'équation  $-x^2 + 30x - 81 = 0$  d'inconnue  $x \in [2; +\infty[$  a pour discriminant  $24^2$  strictement positif, donc possède deux solutions, à savoir 3 et 27.

On dresse alors le tableau de signe de la fonction  $f$  sur  $[2; +\infty[$ .

$x$	2	3	27	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

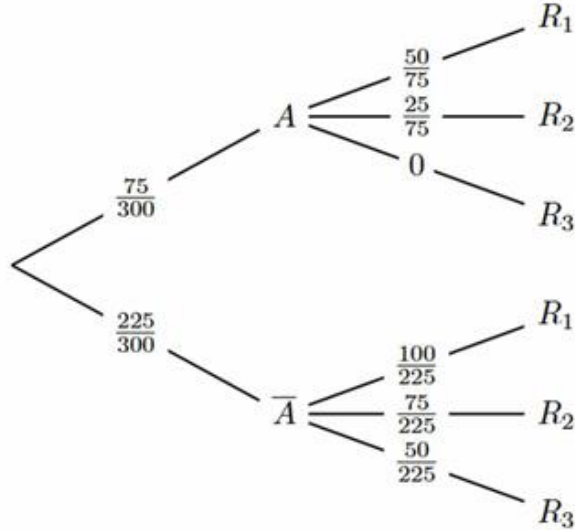
Ainsi, pour tout  $x \in [2; +\infty[$ , on a :  $f(x) > 0 \iff x \in ]3; 27[$ .  
Par conséquent, pour tout entier  $k \geq 2$ , on a :

$$E(Y_k) > 0 \iff k \in \{4; 5; \dots; 26\}.$$

Le jeu est favorable au joueur si l'urne contient entre 4 et 26 boules noires.

### Exercice 14.3.

1. On modélise la situation par l'arbre de probabilité ci-dessous.



2. (a) La probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation est :

$$P(A \cap R_2) = P(A) \times P_A(R_2) = \frac{75}{300} \times \frac{25}{75} = \frac{25}{300} = \frac{1}{12}.$$

- (b) La probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est donnée par  $P(R_2)$ .

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(A \cap R_2) + P(\bar{A} \cap R_2) \\ &= P(A) \times P_A(R_2) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(R_2) \\ &= \frac{25}{300} + \frac{125}{300} \times \frac{75}{125} \\ &= \frac{25}{300} + \frac{75}{300} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- (c) La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation, donc la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* est donnée par  $P_{R_2}(A)$  :

$$P_{R_2}(A) = \frac{P(A \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{1/12}{1/3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

3. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.

Ainsi, l'évènement  $\{X = 1\}$  correspond à l'évènement  $R_1$ .

- (a) La variable aléatoire  $X$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{1; 2; 3\}$ .

— On a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(R_1) \\ &= P(A \cap R_1) + P(\bar{A} \cap R_1) \\ &= P(A) \times P_A(R_1) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(R_1) \\ &= \frac{75}{300} \times \frac{50}{75} + \frac{225}{300} \times \frac{100}{225} \\ &= \frac{50}{300} + \frac{100}{300} = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

— On a  $P(X = 2) = P(R_2) = \frac{1}{3}$  d'après la question 2.(b).

— Enfin :  $P(X = 3) = P(R_3) = 1 - P(R_2) - P(R_1) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ .

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  est :

$x$	1	2	3
$P(X = x)$	1/2	1/3	1/6

- (b) L'espérance de cette variable aléatoire  $X$  est :

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{3} \approx 1,67. \end{aligned}$$

Cela signifie que le nombre de passages pour réussir l'examen est, en moyenne, de 1,67.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante,  $n$  personnes parmi les 300 du groupe étudié, où  $n$  est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de  $n$  personnes parmi les 300 personnes du groupe.

On admet que la probabilité de l'évènement  $R_3$  est égale à  $\frac{1}{6}$ .

- (a) Notons  $Y$  la variable aléatoire comptant le nombre de personnes ayant réussi l'examen du permis de conduire à la première ou deuxième tentative parmi les  $n$  personnes choisies du groupe de 300 personnes.

Alors  $Y$  suit la binomiale de paramètres  $n$  et  $p = P(\bar{R}_3) = \frac{5}{6}$ .

La probabilité qu'exactement  $n$  personnes interrogés réussissent l'examen à la première ou deuxième tentative est donc :

$$P(Y = n) = \binom{n}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(1 - \frac{5}{6}\right)^0 = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Il vient donc que l'événement contraire du précédent, c'est-à-dire l'événement « au moins une personne n'a pas réussi l'examen à la première ou à la deuxième tentative », est de probabilité  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ .

- (b) On considère la fonction Python `seuil` ci-dessous, où  $p$  est un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0; 1[$ .

```

1 def seuil(p):
2     n = 1
3     while (1 - (5/6)**n <= p):
4         n = n + 1
5     return n

```

La commande `seuil(0.9)` renvoie le plus petit entier non nul  $n$  tel que  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$ .

On résout donc l'inéquation  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$  d'inconnue  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9 &\iff 0,1 > \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ &\iff \ln(0,1) > \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \\ &\iff \ln(0,1) > n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \\ &\iff \frac{\ln(0,1)}{\ln(5/6)} < n \text{ car } \ln(5/6) < 0 \end{aligned}$$

On a  $\frac{\ln(0,1)}{\ln(5/6)} \approx 12,6$  donc la commande `seuil(0.9)` renvoie la valeur 13.

Cela signifie qu'il faut choisir 13 personnes au minimum sur les 300 afin que la probabilité d'en avoir au moins une qui a réussi l'examen à sa troisième tentative soit supérieure à 0,9.

**Exercice 14.4.** Soit un réel  $p \in ]0; 1[$ . On répète une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  de manière identique et indépendante jusqu'à l'obtention du premier succès.

Notons  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre d'épreuves nécessaires afin d'obtenir le premier succès. On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ , et on note :  $X \sim \mathcal{G}(p)$ .

1. La variable aléatoire  $X$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{N}^*$ .
2. (a) Soit un entier  $k \geq 1$ . On considère l'événement  $S_k$  : « Un succès est obtenu lors de la  $k$ -ième épreuve ».  
Alors :  $\{X = k\} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k$ .  
Les événements  $S_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) étant (mutuellement) indépendants, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k) \\ &= P(\overline{S_1}) \times P(\overline{S_2}) \times \dots \times P(\overline{S_{k-1}}) \times P(S_k) \\ &= \underbrace{(1-p)(1-p) \dots (1-p)}_{k-1 \text{ fois}} p \\ &= (1-p)^{k-1} p. \end{aligned}$$

- (b) Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P(X = k) &= \sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1} \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^n (1-p)^k \\ &= \frac{p}{1-p} \times (1-p) \times \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{1 - (1-p)} \\ &= 1 - (1-p)^{n+1}. \end{aligned}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-p)^n = 0$  car  $0 < 1-p < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - (1-p)^{n+1}) = 1$

par produit et somme de limites, soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n P(X = k) = 1$ .

3. Soit  $(k; \ell) \in \mathbb{N}^*$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} P_{\{X > k\}}(X > k + \ell) &= \frac{P(\{X > k + \ell\} \cap \{X > k\})}{P(X > k)} = \frac{P(X > k + \ell)}{P(X > k)} \\ &= \frac{1 - P(X \leq k + \ell)}{1 - P(X \leq k)} = \frac{1 - \sum_{i=1}^{k+\ell} P(X = i)}{1 - \sum_{i=1}^k P(X = i)} \\ &= \frac{1 - (1 - (1-p)^{k+\ell})}{1 - (1 - (1-p)^k)} \text{ d'après 2.(b)} \\ &= \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^k} = (1-p)^\ell = 1 - (1 - (1-p)^\ell) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{\ell} P(X = i) \text{ d'après 2.(b)} \\ &= 1 - P(X \leq \ell) = P(X > \ell). \end{aligned}$$

4. **Application.** On lance un dé continuellement jusqu'à l'obtention d'un 6. Notons  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires avant l'obtention du premier 6.

Alors :  $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$ .

- (a) La probabilité d'obtenir un premier 6 au troisième lancer est :

$$P(X = 3) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{36}.$$

- (b) La probabilité qu'il faille plus de 8 lancers pour obtenir un 6 est :

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= 1 - P(X \leq 7) = 1 - \sum_{k=1}^7 P(X = k) \\ &= 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^7\right) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^7 \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,28. \end{aligned}$$

- (c) Il s'agit de calculer  $P_{\{X > 58\}}(X > 60)$ .

Puisque  $X$  est une loi sans mémoire, on a :

$$\begin{aligned} P_{\{X > 58\}}(X > 60) &= P_{\{X > 58\}}(X > 58 + 2) = P(X > 2) \\ &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2)) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{25}{36} \approx 0,69. \end{aligned}$$

Après 58 lancers de dé sans succès, la probabilité que le 6 apparaisse au moins au 61-ième lancer est d'environ 0,69.

**Exercice 14.5.** On cherche dans cet exercice à introduire une nouvelle loi discrète de probabilité, appelée loi hypergéométrique.

### Partie A. Définition

Soient  $N$ ,  $n$  et  $m$  trois entiers naturels tels que  $n \leq N$  et  $m \leq N$ .

Une urne contient  $N$  boules blanches et noires :  $m$  boules blanches, et  $N - m$  boules noires. On tire simultanément  $n$  boules dans l'urne.

Notons  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans l'échantillon de  $n$  boules.

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi hypergéométrique de paramètres  $N$ ,  $n$  et  $m$ , et on note :  $X \sim \mathcal{H}(N; n; m)$ .

1. (a) — Intéressons-nous au nombre maximal  $M$  de boules blanches que l'on peut obtenir.  
 Si le nombre de boules blanches  $m$  est inférieur au nombre de boules tirées  $n$ , alors  $M = m$ .  
 Si le nombre de boules tirées  $n$  est inférieur au nombre de boules blanches  $m$ , alors  $M = n$ .  
 Autrement dit :  $M = \min(m; n)$ .
- Intéressons-nous au nombre minimal  $M'$  de boules blanches que l'on peut obtenir.  
 Si le nombre de boules noires  $N - m$  est supérieur au nombre de boules tirées  $n$ , alors  $M' = 0$ .  
 Si le nombre de boules tirées  $n$  est supérieur au nombre de boules noires  $N - m$ , alors  $M' = n - (N - m)$ .  
 Autrement dit :  $M' = \max(0; n - (N - m))$ .
- Ainsi, le nombre possible de boules blanches que l'on peut obtenir à l'issue du tirage des  $n$  boules est un entier compris entre  $M'$  et  $M$ .  
 Il vient donc que l'ensemble  $E$  est donné par :

$$E = \{\max(0; n - (N - m)); \dots; \min(m; n)\}.$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \max(0; n - (N - m)) = 0 \\ \min(m; n) = n \end{cases} &\iff \begin{cases} n - (N - m) \leq 0 \\ n \leq m \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} n \leq N - m \\ n \leq m \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a  $E = \{0; \dots; n\}$  dans le cas où le nombre de boules tirées est inférieur à la fois au nombre de boules blanches et au nombre de boules noires présentes dans l'urne.

2. On dénombre  $\binom{N}{n}$  façons de tirer simultanément  $n$  boules dans l'urne.
3. Pour tout  $k \in E$ , tirer simultanément  $n$  boules contenant  $k$  boules blanches, c'est tirer simultanément  $k$  boules blanches parmi les  $m$  boules blanches de l'urne ( $\binom{m}{k}$  possibilités) ET tirer simultanément  $n - k$  boules noires parmi les  $N - m$  boules noires de l'urne ( $\binom{N - m}{n - k}$  possibilités).
- On dénombre donc, pour tout  $k \in E$ ,  $\binom{m}{k} \times \binom{N - m}{n - k}$  façons de tirer simultanément  $n$  boules contenant  $k$  boules blanches (d'après le principe multiplicatif).
4. Notons  $\Omega$  l'univers associé à l'expérience aléatoire consistant à tirer simultanément  $n$  boules dans l'urne de  $N$  boules, et pour tout  $k \in E$ , notons  $A_k$  l'événement  $\{X = k\}$ .

D'après la question 2, on a  $\text{Card}(\Omega) = \binom{N}{n}$  et d'après la question 3, on a pour tout  $k \in E$ ,  $\text{Card}(A_k) = \binom{m}{k} \times \binom{N-m}{n-k}$ .

La loi de probabilité sur  $\Omega$  étant équirépartie, on obtient pour tout  $k \in E$  :

$$P(X = k) = \frac{\text{Card}(A_k)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (1)$$

Puisque  $\sum_{k=\max(0; n-(N-m))}^{\min(m; n)} P(X = k) = 1$ , il vient :

$$\sum_{k=\max(0; n-(N-m))}^{\min(m; n)} \binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k} = \binom{N}{n} \quad (\text{Id. Vandermonde})$$

5. Dans le cas où les  $n$  boules sont tirées l'une après l'autre sans remise, notons :
- $X'$  la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans l'échantillon de  $n$  boules ;
  - $E'$  l'ensemble des valeurs possibles de  $X$  ;
  - $\Omega'$  l'univers associé à l'expérience aléatoire ;
  - $A'_k$  l'événement  $\{X' = k\}$  pour tout  $k \in E'$ .

On a toujours  $E' = E$ , mais par contre  $\text{Card}(\Omega') = \mathcal{A}_N^n$ , et pour tout  $k \in E'$ ,

$$\text{Card}(A'_k) = \mathcal{A}_m^k \times \mathcal{A}_{N-m}^{n-k} \times \binom{n}{k}.$$

Par conséquent, on obtient pour tout  $k \in E'$  :

$$P(X' = k) = \frac{\text{Card}(A'_k)}{\text{Card}(\Omega')} = \frac{\mathcal{A}_m^k \times \mathcal{A}_{N-m}^{n-k} \times \binom{n}{k}}{\mathcal{A}_N^n} \quad (2)$$

Pour tout  $k \in E$ , on peut vérifier aisément que  $P(X = k) = P(X' = k)$ . Par conséquent la variable  $X'$  suit également la loi hypergéométrique de paramètres  $N$ ,  $n$  et  $m$ .

Ainsi, que les  $n$  boules soient tirées simultanément ou l'une après l'autre sans remise, la loi de probabilité de la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches reste inchangée, et on peut toujours choisir la formule (1) plutôt que la (2).

### Partie B. Exemple

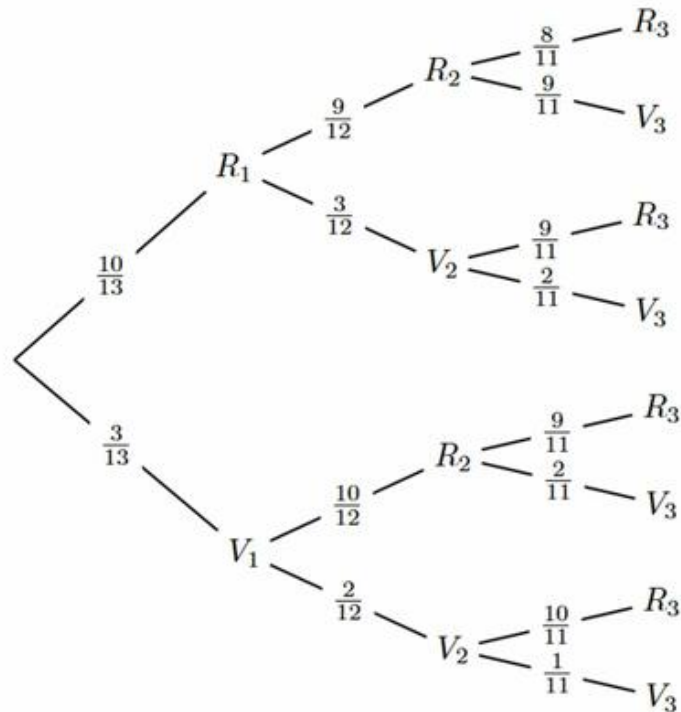
Un enfant joue avec 13 billes, 10 rouges et 3 vertes, qu'il met dans une boîte. Il choisit dans la boîte trois billes au hasard, l'une après l'autre et sans remise, et il regarde combien de billes rouges il a choisies.

On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

1. (a) Pour tout  $i \in \{1; 2; 3\}$ , on note :

- $R_i$  l'événement : « Obtenir une bille rouge au  $i$ -ième tirage » ;
- $V_i$  l'événement : « Obtenir une bille verte au  $i$ -ième tirage ».

On modélise la situation par l'arbre de probabilité ci-dessous.



(b) La variable aléatoire  $X$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{0; \dots; 3\}$ .  
On a par exemple :

$$P(X = 0) = P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \frac{3}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{286}.$$

On a également :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(R_1 \cap V_2 \cap V_3) + P(V_1 \cap R_2 \cap V_3) + P(V_1 \cap V_2 \cap R_3) \\ &= \frac{10}{13} \times \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} + \frac{3}{13} \times \frac{10}{12} \times \frac{2}{11} + \frac{3}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{10}{11} \\ &= \frac{30}{286}. \end{aligned}$$

$$\text{De même : } P(X = 2) = \frac{135}{286} \text{ et } P(X = 3) = \frac{120}{286}.$$

2. On a  $X \sim \mathcal{H}(13; 3; 10)$ , donc pour tout  $k \in \{0; \dots; 3\}$ , on a :

$$P(X = k) = \frac{\binom{10}{k} \binom{3}{3-k}}{\binom{13}{3}}.$$

$$\text{Par exemple : } P(X = 0) = \frac{\binom{10}{0} \binom{3}{3}}{\binom{13}{3}} = \frac{1}{286}.$$

$$\text{On a aussi : } P(X = 1) = \frac{\binom{10}{1} \binom{3}{2}}{\binom{13}{3}} = \frac{30}{286}.$$

$$\text{On trouve de même } P(X = 2) = \frac{135}{286} \text{ et } P(X = 3) = \frac{120}{286}.$$

**Exercice 15.1.** Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $\mu \in \mathbb{R}$  et de d'écart-type  $\sigma \in \mathbb{R}_+$ , et soit  $a$  un réel strictement positif.

1. Pour tout réel  $\lambda \geq 0$ , on pose  $Y = X - \mu + \lambda$ .

(a) Soit  $\lambda$  un réel positif. On a  $X - \mu = Y - \lambda$ , donc :

$$P(X - \mu \geq a) = P(Y - \lambda \geq a) = P(Y \geq a + \lambda).$$

Puisque  $\{Y \geq a + \lambda\} \subset \{Y^2 \geq (a + \lambda)^2\}$ , il vient par propriété<sup>11</sup> :  $P(Y \geq a + \lambda) \leq P(Y^2 \geq (a + \lambda)^2)$ , donc on obtient :

$$P(X - \mu \geq a) \leq P(Y^2 \geq (a + \lambda)^2) \quad (1)$$

(b) Soit  $\lambda$  un réel positif. D'après la formule de König-Huyghens, on a  $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$ , soit :

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= V(Y) + E(Y)^2 = V(X - \mu + \lambda) + E(X - \mu + \lambda)^2 \\ &= V(X) + (E(X) - \mu + \lambda)^2 = \sigma^2 + (\mu - \mu + \lambda)^2 \\ &= \sigma^2 + \lambda^2. \end{aligned}$$

(c) D'après l'inégalité de Markov, on a pour tout réel  $\lambda \geq 0$  :

$$P(Y^2 \geq (a + \lambda)^2) \leq \frac{E(Y^2)}{(a + \lambda)^2}.$$

On obtient d'après (1) l'inégalité souhaitée valable pour tout réel  $\lambda \geq 0$  :

$$P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2} \quad (2)$$

2. Notons  $\varphi$  la fonction définie pour tout réel  $x$  positif par :

$$\varphi(x) = \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}.$$

11. On rappelle une propriété fondamentale : si  $A$  et  $B$  sont deux événements quelconques tels que  $A \subset B$ , alors  $P(A) \leq P(B)$ .

- (a) La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme quotient de deux fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout réel  $x$  positif on a :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{2x(a+x)^2 - (\sigma^2 + x^2)2(a+x)}{(a+x)^4} \\ &= \frac{2(a+x)[x(a+x) - (\sigma^2 + x^2)]}{(a+x)^4} \\ &= \frac{2(a+x)(ax + x^2 - \sigma^2 - x^2)}{(a+x)^4} \\ &= \frac{2(a+x)(ax - \sigma^2)}{(a+x)^4}.\end{aligned}$$

Pour tout réel  $x$  positif, on a  $a+x > 0$  car  $a > 0$ , donc le signe de  $\varphi'(x)$  est le signe de  $ax - \sigma^2$ .

On dresse donc le tableau de signe de  $\varphi'$  sur  $[0; +\infty[$  et on déduit le tableau des variations de  $\varphi$  sur  $[0; +\infty[$ .

$x$	0	$\sigma^2/a$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	+
$\varphi$	$\frac{\sigma^2}{a^2}$	$\varphi\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)$	1

$$\varphi(0) = \frac{\sigma^2 + 0^2}{(a+0)^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Pour tout réel  $x > 0$ , on a : 
$$\varphi(x) = \frac{\sigma^2 + x^2}{a^2 + 2ax + x^2} = \frac{\frac{\sigma^2}{x^2} + 1}{\frac{a^2}{x^2} + \frac{2a}{x} + 1}.$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2a}{x} = 0$ , il vient par sommes et produits de limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$ .

- (b) D'après la question précédente, le minimum de la fonction  $\varphi$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  est atteint en  $\frac{\sigma^2}{a}$  et est égal à :

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{\sigma^2}{a}\right) &= \frac{\sigma^2 + \left(\frac{\sigma^2}{a}\right)^2}{\left(a + \frac{\sigma^2}{a}\right)^2} = \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{a^2}}{a^2 + 2\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{a^2}} = \frac{a^2\sigma^2 + \sigma^4}{a^4 + 2a^2\sigma^2 + \sigma^4} \\ &= \frac{\sigma^2(a^2 + \sigma^2)}{(a^2 + \sigma^2)^2} = \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $\varphi(x) \geq \varphi\left(\frac{\sigma^2}{a}\right) = \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}$ .

- (c) D'après l'inégalité (2), on a pour tout réel  $\lambda \geq 0$  :  $P(X - \mu \geq a) \leq \varphi(\lambda)$ , donc en particulier pour  $\lambda = \frac{\sigma^2}{a}$ , on obtient :

$$P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} \quad (3)$$

3. (a) On a les égalités d'événements suivants :

$$\begin{aligned} \{|X - \mu| \geq a\} &= \{X - \mu \geq a\} \cup \{X - \mu \leq -a\} \\ &= \{X - \mu \geq a\} \cup \{\mu - X \geq a\}. \end{aligned}$$

On obtient :  $P(|X - \mu| \geq a) = P(X - \mu \geq a) + P(\mu - X \geq a)$  car les événements  $\{X - \mu \geq a\}$  et  $\{\mu - X \geq a\}$  sont disjoints.

On peut, comme précédemment, établir l'inégalité suivante :

$$P(\mu - X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} \quad (4)$$

On déduit donc de (3) et (4) l'inégalité souhaitée :

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} \quad (\text{B.-T. améliorée})$$

- (b) On a :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} &= \frac{\sigma^2(\sigma^2 + a^2) - 2\sigma^2 a^2}{a^2(\sigma^2 + a^2)} = \frac{\sigma^4 + \sigma^2 a^2 - 2\sigma^2 a^2}{a^2(\sigma^2 + a^2)} \\ &= \frac{\sigma^4 - \sigma^2 a^2}{a^2(\sigma^2 + a^2)} = \frac{\sigma^2(\sigma^2 - a^2)}{a^2(\sigma^2 + a^2)}. \end{aligned}$$

- (c) On pose dans la suite  $d = \frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$ .

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \quad (\text{B.-T.})$$

Par conséquent, dans le cas où  $\frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$ , l'inégalité de B.-T. améliorée est meilleure que l'inégalité de B.-T. dans le sens où elle fournit un majorant de  $P(|X - \mu| \geq a)$  plus petit que celui de son homologue.

Or :  $\frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \iff d \geq 0 \stackrel{3.(b)}{\iff} \sigma^2 - a^2 \geq 0 \iff \sigma^2 \geq a^2 \iff \sigma \geq a$ , donc l'inégalité de B.-T. améliorée est meilleure que l'inégalité de B.-T. lorsque  $a \leq \sigma$ .

## Exercice 15.2.

- Le nombre de 23-uplets de l'ensemble  $E = \{1; \dots; 365\}$  est égal à  $365^{23}$ .  
En notant  $\Omega$  l'ensemble des 23-uplets de  $E$ , on a :  $\text{Card}(\Omega) = 365^{23}$ .
- On tire aléatoirement un groupe quelconque de 23 personnes et on considère l'événement  $A$  suivant : « Deux personnes au moins sont nées le même jour ».
  - Notons que l'univers associé à l'expérience aléatoire consistant à tirer aléatoirement 23 personnes est l'ensemble  $\Omega$ .  
Par hypothèse, la loi de probabilité sur  $\Omega$  est équirépartie.  
L'événement  $\bar{A}$  est : « Aucune personne n'est née le même jour que les autres » et  $\text{Card}(\bar{A}) = 365 \times 364 \times \dots \times (365 - 23 + 1)$ , donc :

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{Card}(\bar{A})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - 23 + 1)}{365^{23}} = \frac{\mathcal{A}_{365}^{23}}{365^{23}}.$$

- Ainsi :  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\mathcal{A}_{365}^{23}}{365^{23}} \approx 0,507$ .
- (a) La fonction Python `meme_anniv(nb)` vérifie si au moins deux personnes d'un même échantillon de taille `nb` ont le même anniversaire.

```

1 import random
2
3 def meme_anniv(nb):
4     liste_anniv = []
5     for i in range(nb):
6         anniv = random.randint(1, 361)
7         liste_anniv.append(anniv)
8     if len(set(liste_anniv)) == len(liste_anniv):
9         return False
10    else:
11        return True

```

- La fonction Python `main(nb_essai)` ci-dessous renvoie la fréquence d'apparition du succès lorsque l'expérience est répétée `nb_essai` fois.

```

1 def main(nb_essai):
2     nb_pers = 23
3     x = 0
4     for i in range(nb_essai):
5         if meme_anniv(nb_pers):
6             x = x + 1
7     frequence = x / nb_essai
8     return frequence

```

- La probabilité qu'une personne choisie au hasard ne soit pas née le même jour que vous est de  $364/365$ , car il y a 364 autres jours qui ne correspondent pas à votre jour de naissance, divisé par 365 jours au total.

Par conséquent, la probabilité qu'aucune des 23 personnes du groupe n'ait la même date de naissance que vous est :

$$\underbrace{\frac{364}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{364}{365}}_{23 \text{ fois}} = \left(\frac{364}{365}\right)^{23}.$$

On déduit que la probabilité de l'événement « Au moins une personne a le même jour de naissance que vous » est égale à :  $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{23} \approx 0,061$ .

**Exercice 15.3.** Une puce se déplace par sauts successifs sur une droite graduée munie d'un repère d'origine  $O$ . Au départ, la puce se trouve à l'origine et elle se déplace de façon aléatoire, soit d'un saut vers la droite (+1), soit d'un saut vers la gauche (-1).

Pour tout entier  $n \geq 0$ , on note :

- $Y_n$  le nombre de déplacements à droite de la puce après  $n$  déplacements ;
- $X_n$  l'abscisse de la puce après  $n$  déplacements.

1. Soit  $n$  un entier naturel.

- Un déplacement de la puce est une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = 0,5$  en considérant que le succès est l'obtention d'un déplacement à droite.
- $n$  déplacements de la puce réalisés de façon identique et indépendante est donc un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p = 0,5$ .
- La variable aléatoire  $Y_n$  compte le nombre de déplacements à droite à l'issue des  $n$  déplacements de la puce, donc  $X_n$  compte le nombre de succès dans le schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p = 0,5$  décrit ci-dessus.

Par conséquent,  $Y_n$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = 0,5$ .

2. (a) Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} X_n &= \underbrace{Y_n}_{\text{nombre de sauts à droite}} - \underbrace{(n - Y_n)}_{\text{nombre de sauts à gauche}} \\ &= 2Y_n - n \end{aligned}$$

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $E(Y_n) = np = \frac{n}{2}$  et  $V(Y_n) = np(1-p) = \frac{n}{4}$ , donc :

$$\begin{cases} E(X_n) = E(2Y_n - n) = 2E(Y_n) - n = n - n = 0 \\ V(X_n) = V(2Y_n - n) = 4V(Y_n) = n \end{cases}.$$

3. Soit  $n$  un entier naturel. On a :

$$P(X_n = 0) = P(2Y_n - n = 0) = P(2Y_n = n).$$

- Si  $n$  est impair, l'événement  $\{2Y_n = n\}$  est impossible, il vient donc :  $P(X_n = 0) = 0$ .
- Si  $n$  est pair, puisque  $\frac{n}{2}$  est un entier naturel, il vient :

$$P(X_n = 0) = P\left(Y_n = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n}{2}} 0,5^{\frac{n}{2}} 0,5^{\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}} 0,25^{\frac{n}{2}}.$$

4. Dans cette question,  $n$  est un entier naturel.

(a) La fonction Python `X(n)` ci-dessous simule la variable aléatoire  $X_n$ .

```

1 import random
2
3 def X(n):
4     x = 0
5     for i in range(n):
6         a = random.random()
7         if a < 0.5:
8             x = x + 1
9         else:
10            x = x - 1
11    return x

```

(b) Pour tout entier  $N \geq 2$ , on considère  $X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(N)}$  un échantillon de taille  $N$  de  $X_n$ , et on pose :  $M_N = \frac{X_n^{(1)} + \dots + X_n^{(N)}}{N}$ .  
La fonction `moyenne(N, n)` ci-dessous simule la variable aléatoire  $M_N$ .

```

1 def moyenne(N, n):
2     som = 0
3     for i in range(N):
4         som = som + X(n)
5     moy = som / N
6     return moy

```

D'après la loi faible des grands nombres, la variable aléatoire  $M_N$  est une très bonne estimation de l'espérance  $E(X_n) = 0$  lorsque  $N$  est très grand, on s'attend donc à ce que l'appel `moyenne(N, n)` se stabilise autour de 0 à mesure que  $N$  est grand.

# Annexe A.

## Précis de rédaction

Bien rédiger en mathématique signifie deux choses :

- respecter scrupuleusement les conventions de notation utilisées de manière courante par la communauté mathématique ;
- présenter son raisonnement de manière claire, c'est-à-dire en suivant un ordre logique, en veillant à la rigueur, et si possible, en ajoutant une touche d'élégance.

Notez que les règles de rédaction mathématique ne sont pas immuables : elles peuvent différer selon les époques, les livres et les mathématiciens. Cependant, les règles proposées dans ce chapitre sont largement utilisées et acceptées par les mathématiciens contemporains. Ce sont d'ailleurs ces règles qui m'ont été naguère enseignées à la faculté par mes illustres professeurs. A mon tour de vous les transmettre le plus fidèlement possible.

Notez encore que le ton adopté dans la suite de ce chapitre sera volontairement impératif, parfois musclé, mais toujours teinté de bonne humeur.

Il est clair que votre copie du bac sortira nettement du lot si vous mettez en pratique les règles de rédaction de ce chapitre.

Ce précis de rédaction doit être lu tout au long de l'année et les règles qui y sont dictées doivent être appliquées religieusement ! Au bout d'un certain temps de pratique, ce manuel de rédaction devra couler dans vos veines...

Dans la suite, les exemples de rédactions correctes sont marqués des symboles 👍👍 et les exemples de rédaction incorrectes, très souvent tirées des copies de mes propres élèves, des symboles ✖✖.

## A.1 Introduire tout ce dont on parle

### Règle 1

Tout objet mathématique doit être introduit.

#### A.1.1 Introduire une variable

On souhaite établir l'identité suivante :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n}$ .

$$\times \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

$$\text{👍👍} \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

$$\text{👍👍} \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ On a } \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

La première rédaction est incorrecte car la variable  $n$  n'a pas été introduite. Quelle rédaction privilégier entre la deuxième et la troisième ? Les deux se valent, mais la troisième rédaction est plutôt utilisée pour les démonstrations longues, comprendre qui nécessitent d'être écrites en plusieurs phrases. Pour mieux comprendre, étudions les rédactions ci-dessous.

$$\times \times \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}. \text{ Or } : \sqrt{n} \times \sqrt{n} = (\sqrt{n})^2 = n, \text{ donc } : \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

$$\text{👍👍} \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}. \text{ Or, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n} \times \sqrt{n} = (\sqrt{n})^2 = n, \text{ donc } : \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

$$\text{👍👍} \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ On a } : \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}. \text{ Or } : \sqrt{n} \times \sqrt{n} = (\sqrt{n})^2 = n, \text{ donc } : \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

L'expression « Pour tout... » est un acte de naissance pour la variable  $n$ . Sa durée de vie est très courte : à la fin de la phrase, cette dernière meurt. Par conséquent, il est nécessaire de donner de nouveau naissance à la variable  $n$  par le « Pour tout... » au début de chaque nouvelle phrase dans laquelle figure la variable  $n$ . La première rédaction est donc incorrecte car la variable  $n$  n'a pas été introduite au début de la deuxième phrase.

## A.1. Introduire tout ce dont on parle

La deuxième rédaction est correcte car elle corrige l'erreur de la précédente. Dans la dernière rédaction, l'introduction de la variable  $n$  par l'expression « Soit... » est aussi un acte de naissance pour  $n$ , mais cette fois-ci, sa durée de vie est longue : la variable  $n$  survie aux multiples phrases de la démonstration qui suit, elle ne meurt pas ! Jusqu'à quand vit-elle ? Jusqu'à la fin de la démonstration.

Étudions un autre exemple très courant. On souhaite résoudre l'équation du second degré  $3x^2 + 2x - 6 = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

✘ ✘ On a  $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 76 > 0$ , donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{79}}{6} = \frac{-1 - \sqrt{19}}{3}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{79}}{6} = \frac{-1 + \sqrt{19}}{3}$ .

Cette rédaction est insipide ! Qui sont les nombres  $\Delta$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $x_1$  et  $x_2$  ? A quel moment ont-ils été introduits ? Et si par malheur, dans un même exercice, vous devez résoudre trois équations du second degré, vous allez utiliser à nouveau ces mêmes lettres ? Voici une rédaction rigoureuse.

👍 👍 On souhaite résoudre l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  où  $a = 3$ ,  $b = 2$  et  $c = -6$ . Le discriminant  $\Delta$  de cette équation est alors  $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 76$  qui est strictement positif, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes que l'on notera  $x_1$  et  $x_2$ , données par  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{79}}{6} = \frac{-1 - \sqrt{19}}{3}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{79}}{6} = \frac{-1 + \sqrt{19}}{3}$ .

Cette rédaction est certes rigoureuse, mais vous conviendrez qu'elle est longue pour pas grand chose... Après tout, est-il vraiment nécessaire de s'encombrer de toutes ces lettres ? Voici donc une rédaction rigoureuse et sans lourdeur :

👍 👍 L'équation  $3x^2 + 2x - 6 = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  a pour discriminant  $76 > 0$ , donc cette équation admet deux solutions réelles, à savoir  $\frac{-1 - \sqrt{19}}{3}$  et  $\frac{-1 + \sqrt{19}}{3}$ .

En passant, je vous propose ci-dessous une liste de rédactions erronées que je rencontre souvent dans des copies. Compte tenu de ce qui a été dit avant, je suis conscient que ces rédactions sont probablement écrites par des élèves ayant de très bonnes intentions...

✘✘ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $(u_n)$  ...

✘✘ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$

✘✘ Pour tout réel  $x$ , l'équation  $x^2 + 3x - 2 = 0$  ...

Ces rédactions sont infâmes car, pour une fois dans cette section, il ne faut surtout pas introduire de variable!

### A.1.2 Nommer un objet

Au cours d'une démonstration, il arrive qu'une certaine quantité longue ou compliquée à écrire revienne souvent, par exemple la quantité  $\frac{\ln(e^{2\alpha} + \alpha^2) + 3}{\alpha^2 + e^\alpha + 5}$  où  $\alpha$  est un réel déjà introduit. Au lieu de réécrire  $\frac{\ln(e^{2\alpha} + \alpha^2) + 3}{\alpha^2 + e^\alpha + 5}$  maintes fois, il est plus commode de nommer cette quantité par une lettre, par exemple  $K$ .

👍👍 On pose  $K = \frac{\ln(e^{2\alpha} + \alpha^2) + 3}{\alpha^2 + e^\alpha + 5}$ .

👍👍 On note  $K$  le réel  $\frac{\ln(e^{2\alpha} + \alpha^2) + 3}{\alpha^2 + e^\alpha + 5}$ .

Notons que dans la première rédaction, la nouvelle lettre  $K$  doit être écrite à gauche du symbole d'égalité tandis que la quantité connue  $\frac{\ln(e^{2\alpha} + \alpha^2) + 3}{\alpha^2 + e^\alpha + 5}$  doit être écrite à sa droite.

#### ⚠ Attention!

Dans les deux rédactions ci-dessus, on doit évidemment s'assurer que :

- la lettre  $K$  n'ait pas déjà été utilisée dans le raisonnement ;
- la lettre  $\alpha$  ait été introduite proprement au préalable.

#### ⚠ Attention!

On ne mélange pas les verbes « poser » et « noter » dans les deux rédactions ci-dessus !

✘✘ On note  $K = \frac{\ln(e^{2\alpha} + \alpha^2) + 3}{\alpha^2 + e^\alpha + 5}$ .

✖✖ On pose  $K$  le réel  $\frac{\ln(e^{2\alpha} + \alpha^2) + 3}{\alpha^2 + e^\alpha + 5}$ .

Pour donner le nom  $K$  à la quantité  $\frac{\ln(e^{2\alpha} + \alpha^2) + 3}{\alpha^2 + e^\alpha + 5}$ , il est aussi possible de placer une accolade sous cette dernière en écrivant «  $:= K$  », sans oublier les deux points avant le symbole d'égalité.

$$\text{👍👍} \quad \dots \underbrace{\frac{\ln(e^{2\alpha} + \alpha^2) + 3}{\alpha^2 + e^\alpha + 5}}_{:=K} \dots$$

Également, les verbes « poser » et « noter » sont souvent utilisés dans les démonstrations s'évertuant à montrer l'existence d'un objet vérifiant une certaine propriété. On souhaite montrer, par exemple, l'existence d'un nombre décimal dont l'inverse n'est pas un nombre décimal, autrement dit montrer la propriété suivante :  $\exists a \in \mathbb{D}, \frac{1}{a} \notin \mathbb{D}$ . On réfléchit deux secondes, puis on écrit :

👍👍 On pose  $a = 3$ . On a  $a \in \mathbb{D}$  puisque  $a = \frac{3}{10^0}$ , mais son inverse  $\frac{1}{3}$  n'est pas un nombre décimal.

## A.2 Les mélanges douteux

### Règle 2

On écrit tout en français ou tout en mathématique, mais pas les deux à la fois.

### A.2.1 Concernant les quantificateurs

Si l'on note  $(u_n)$  une suite de réels, l'énoncé *La suite  $(u_n)$  est majorée* peut soit s'écrire sous forme littérale, soit à l'aide des quantificateurs  $\exists$  et  $\forall$  :

👍👍 Il existe un réel  $M$  tel que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est inférieur à  $M$ .

👍👍  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$

De même, si l'on dispose d'une fonction  $f$ , l'énoncé *La fonction  $f$  est affine sur  $\mathbb{R}$*  peut s'écrire :

👍👍 Il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel  $x$ ,  $f(x)$  est égal à  $ax + b$ .

👍👍  $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$

### ⚠ Attention !

Dans une phrase en français, on ne remplace pas l'expression « il existe » par le symbole  $\exists$ , ni l'expression « pour tout » par le symbole  $\forall$ .

✖✖ Il existe un réel  $M$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  est inférieur à  $M$ .

✖✖  $\exists$  un réel  $M$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  est inférieur à  $M$ .

En revanche, les mélanges autorisés concernent les symboles  $\in, =, \leq, \geq, <$  et  $>$ . Il est donc toléré d'écrire (et c'est heureux!) :

👍👍 Il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .

👍👍 Il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ .

## A.2.2 Concernant l'implication et l'équivalence

Le mélange des genres concerne aussi les symboles d'implication  $\implies$  et d'équivalence  $\iff$ .

### ⚠ Attention !

Une bonne fois pour toutes : la flèche d'implication  $\implies$  ne signifie pas « donc », « alors », « ainsi »... et la flèche d'équivalence  $\iff$  ne signifie pas « c'est-à-dire », « soit », « i.e. »... ! Par conséquent, dans une rédaction, on n'utilise jamais de flèches à la place de ces mots !

Pour éviter tout mésusage des symboles d'implication et d'équivalence, une bonne pratique est :

- de NE JAMAIS utiliser le symbole  $\implies$  dans une rédaction ;
- d'utiliser le symbole  $\iff$  uniquement dans la résolution d'équations/inéquations et lorsque l'on souhaite montrer une égalité d'ensembles.

On souhaite par exemple montrer que tout entier naturel divisible par 4 est divisible par 2.

👍👍 Soit  $n$  entier naturel. Supposons que  $n$  est divisible par 4. Alors il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 4k$ . On peut aussi écrire  $n = 2(2k)$ , donc  $n = 2k'$  en posant  $k' = 2k \in \mathbb{N}$ . Par conséquent,  $n$  est divisible par 2.

✖✖ Soit  $n$  entier naturel. Supposons que  $n$  est divisible par 4  
 $\implies$  il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 4k$ .  
 On peut aussi écrire  $n = 2(2k)$   
 $\implies n = 2k'$  en posant  $k' = 2k \in \mathbb{N}$   
 $\implies n$  est divisible par 2.

Pour résoudre par exemple l'équation  $x^2 + 2x - 8 = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ , on utilisera le symbole d'équivalence comme suit :

👍👍 Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 8 = 0 &\iff x^2 + 2x + 4 - 12 = 0 \\ &\iff (x + 2)^2 - 12 = 0 \\ &\iff (x + 2)^2 = 12 \\ &\iff x + 2 = -\sqrt{12} \quad \text{ou} \quad x + 2 = \sqrt{12} \\ &\iff x = -2 - \sqrt{12} \quad \text{ou} \quad x = -2 + \sqrt{12} \end{aligned}$$

L'ensemble  $S$  des solutions est  $S = \{-2 - \sqrt{12}; -2 + \sqrt{12}\}$ .

Si l'on vous demande maintenant d'établir la propriété suivante :

$$\forall x \in [0; 2], \quad \sqrt{4 - x^2} \in [0; 2] \quad (\text{A})$$

👍👍 Soit  $x$  un réel tel que  $0 \leq x \leq 2$ . Alors  $0 \leq x^2 \leq 4$  par croissance de la fonction carré sur  $\mathbb{R}_+$ , soit  $0 \leq 4 - x^2 \leq 4$ . Mais puisque la fonction racine carrée est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , on a  $0 \leq \sqrt{4 - x^2} \leq 2$ , c'est-à-dire  $\sqrt{4 - x^2} \in [0; 2]$ .

$$\times \times \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$0 \leq x^2 \leq 4 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+$$

$$-4 \leq -x^2 \leq 0$$

$$0 \leq 4 - x^2 \leq 4$$

$$0 \leq \sqrt{4 - x^2} \leq 2 \quad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+$$

Je ne veux plus jamais voir la deuxième rédaction ci-dessus ! A-t-on des équivalences ? Peut-on ainsi la lire en partant du bas ou doit-on la lire uniquement en partant du haut ? Cette rédaction (que vous affectionnez particulièrement, soyons honnêtes) est à proscrire car elle ne fait pas apparaître explicitement les rapports logiques entre les propositions. Bref, elle est trop floue car elle laisse libre cours à trop d'interprétations. Attention cependant, car si la rédaction qui suit fait bien apparaître des équivalences, elle en n'est pas moins fausse...

$$\times \times \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\iff 0 \leq x^2 \leq 4 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+$$

$$\iff -4 \leq -x^2 \leq 0$$

$$\iff 0 \leq 4 - x^2 \leq 4$$

$$\iff 0 \leq \sqrt{4 - x^2} \leq 2 \quad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+$$

En effet, pour tout réel  $x$ , si  $0 \leq x^2 \leq 4$ , alors  $-2 \leq x \leq 2$ , donc la première équivalence est fautive ! En terme ensembliste, montrer la propriété (A), c'est montrer uniquement l'inclusion suivante :

$$[0; 2] \subset \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \sqrt{4 - x^2} \leq 2 \right\}$$

et non l'inclusion inverse car elle est fautive. Si l'on voulait absolument écrire une égalité d'ensembles, ce serait celle-ci (l'inclusion réciproque étant évidente) :

$$[0; 2] = \left\{ x \in [0; 2] \mid 0 \leq \sqrt{4 - x^2} \leq 2 \right\}.$$

Bref, vous avez compris que l'utilisation du symbole d'équivalence est souvent délicate. Il me paraît donc très utile de vous mettre explicitement en garde :

### Attention !

Vous ne devez pas utiliser la flèche d'équivalence à tort et à travers ! Avant de l'utiliser, assurez-vous systématiquement que les sens direct et réciproque sont vérifiés. « Vigilance constante ! » aurait vociféré le brave Maugrey Fol Oeil.

## A.3 Annoncer la couleur

### Règle 3

Avant d'entamer un raisonnement ou une démonstration, on annonce la manière dont on souhaite procéder.

Afin que votre démonstration soit accessible et lisible, il est important de prendre par la main le lecteur afin de lui éviter de devoir se casser la tête pour interpréter vos intentions. Il est donc essentiel que vous lui annonciez la couleur avant d'entamer une démonstration. Pour ce faire, rien de tel que de jaloner votre rédaction par des expressions telles que « Prouvons que... », « Il s'agit alors de montrer que... », « A présent, démontrons que... », « Il nous reste à prouver que... », « Il suffit désormais de prouver que... » etc.

Ainsi, si l'on vous demande au sein d'un exercice de montrer qu'une certaine suite  $(u_n)$  est convergente, voici une manière de rédiger qui va sûrement satisfaire le lecteur :

👍👍 Nous avons déjà montré dans la question ... que la suite  $(u_n)$  est majorée par ... , donc en vertu du théorème de convergence monotone, il nous reste à prouver que la suite  $(u_n)$  est croissante.  
 Montrons donc que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

Attention, n'en faites pas trop non plus car vous pouvez vite tomber dans la lourdeur ! Par exemple, si l'on vous demande de démontrer qu'une certaine fonction  $f$  est croissante sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , vous serez tenté de commencer votre rédaction par une phrase du type : « On détermine l'expression algébrique de  $f'$ , puis l'on étudie son signe sur  $I$ , puis l'on déduit par propriété les variations de  $f$  sur  $I$  ». Dieu que c'est long ! Cette phrase n'apporte pas un éclairage particulier au lecteur car :

- d'une part, la phrase évoque un résultat ultra-connu d'une classe antérieure ; le mentionner n'est pas forcément utile ;
- d'autre part, vos intentions sont totalement prévisibles ; vous ne risquez pas de perdre votre lecteur en cours de route !

Cette phrase n'a donc finalement que très peu d'intérêt. Une telle phrase introductrice devient utile si le raisonnement que vous souhaitez mener est un peu élaboré (à vous de juger le caractère élaboré d'un raisonnement !) ou si elle sert à rappeler un résultat important de l'année en cours.

## A.4 Citer une définition ou une propriété

### Règle 4

Avant d'utiliser une définition ou une propriété pour justifier un résultat, expliciter clairement toutes les hypothèses.

Cette année, vous allez régulièrement appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, si l'on vous demande de montrer que l'équation  $f(x) = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ , une bonne rédaction est la suivante :

👍👍 La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  d'après la question ...) et est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  d'après la question ... De plus, puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 < 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , la fonction  $f$  change de signe sur  $\mathbb{R}$ . D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

La rédaction minimaliste suivante n'est pas satisfaisante car elle n'exhibe pas explicitement chacune des hypothèses du corollaire.

✖✖ D'après les questions précédentes, on peut appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

## A.5 Définir une fonction

Si l'on souhaite introduire proprement une fonction notée  $f$  qui, à tout réel  $x > -1$ , associe le réel  $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ , on peut écrire au choix :

👍👍 On note  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  définie sur  $] -1; +\infty[$ .

👍👍 On note  $f$  la fonction 
$$\begin{array}{ccc} ] -1; +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x+1}} \end{array}$$

👍👍 On note  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x > -1$  par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

👍👍 Posons  $f : ]-1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$

### ⚠ Attention !

Les flèches  $\mapsto$  et  $\rightarrow$  ne sont pas interchangeables à souhait ! La flèche  $\rightarrow$  est utilisée par exemple dans les limites ou pour relier l'ensemble de départ d'une fonction à son ensemble d'arrivée (comme dans la deuxième rédaction ci-dessus), tandis que la flèche d'association  $\mapsto$  est utilisée uniquement pour définir les fonctions.

✖✖ On note  $f$  la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  définie sur  $] -1; +\infty[.$

✖✖  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$

Les deux rédactions qui suivent, fréquentes dans les copies d'élèves, sont prohibées : la première car la variable  $x$  n'a pas été introduite, la deuxième car  $f(x)$  n'est PAS une FONCTION mais un NOMBRE réel (c'est l'image par  $f$  d'une variable  $x$  qui n'a même pas été introduite...)

✖✖ On note  $f$  la fonction définie sur  $] -1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$

✖✖ La fonction  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  est décroissante sur  $] -1; +\infty[.$

Finissons cette section par une rédaction qui, sans être abominable, n'est pas conseillée.

✖✖ Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in ] -1; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Vous ne voyez pas le problème ? Le problème c'est l'expression « Soit... » qui n'est pas très adaptée. Ici, la fonction  $f$  est totalement connue alors que l'expression « Soit... » suppose l'introduction d'une variable quelconque. Il vaut donc mieux ici privilégier le verbe « noter ». Dans un tout autre registre, remplacez l'expression « Soit... » par l'expression « Notons... » dans les rédactions maladroites suivantes :

- ✖✖ Soient  $A$  et  $B$  les points de coordonnées respectivement  $(1; -2)$  et  $(3; 5)$ .
- ✖✖ Soit  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges à l'issue des 10 tirages.

## A.6 Dériver une fonction

Il est indispensable que vous sachiez rédiger proprement une dérivation de fonction car, cette année, vous allez devoir dériver un sacré paquet de fonctions.

Commençons par dériver la fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$  définie sur  $\mathbb{R}$ . La première rédaction est, j'en conviens, un peu lourde et peu élégante. Son seul mérite est de vous éviter des erreurs de calculs. C'est cette première rédaction que l'on va privilégier (à contrecœur) cette année. La deuxième rédaction est plus expéditive, mais elle doit être utilisée avec vigilance car une erreur de calcul est vite venue !

👍👍 La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x) = u(x)v(x)$  avec :

$$u(x) = x; \quad v(x) = e^x;$$

$$u'(x) = 1; \quad v'(x) = e^x,$$

donc on obtient :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}.$$

👍👍 La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}.$$

### ⚠ Attention !

Avant de dériver une fonction, on précise systématiquement la raison pour laquelle la fonction est dérivable sur l'intervalle considéré,

et ce même si la justification n'est pas explicitement demandée dans l'énoncé de l'exercice!

Continuons cette section avec une rédaction dont vous allez devoir vous débarrasser au plus vite et à tout jamais. En effet, cette rédaction suppose que la notation  $(f(x))'$  est licite, ce qui n'est bien sûr pas le cas!

✘ ✘ La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = \frac{(x)' \times e^x - x \times (e^x)'}{e^{2x}} = \frac{1e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}.$$

### ⚠ Attention !

La notation  $(f(x))'$  est totalement interdite! On n'écrira donc jamais  $(x)' = 1$ ! On pourra éventuellement écrire  $\frac{d}{dx}(x) = 1$ .

On peut également écrire  $(x \mapsto x)'(x) = 1$ , mais cette notation, compliquée et peu lisible, est très peu utilisée. Il est donc préférable de noter d'abord  $f$  la fonction  $x \mapsto x$ , puis d'écrire classiquement  $f'(x) = 1$ .

Dans le même esprit que l'exemple précédent, étudions la rédaction de certains élèves voulant probablement gagner un peu de temps. Cette rédaction, de premier abord similaire à celle proposée en début de section, est inacceptable car elle fait la confusion entre deux objets mathématiques bien distincts : une FONCTION et un NOMBRE.

✘ ✘ La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) = u(x) \times v(x)$  avec :

$$u = x ; \quad v = e^x ;$$

$$u' = 1 ; \quad v' = e^x,$$

donc on obtient :

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}.$$

Horreur!  $f'(x)$  est un NOMBRE (c'est l'image de  $x$  par la fonction  $f'$ ) alors que  $\frac{u'v - uv'}{v^2}$  est une FONCTION (c'est la fonction  $x \mapsto \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ ), donc

l'égalité  $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  est formellement interdite! Il en est de même pour les égalités illicites  $u = x$ ,  $u' = 1$ ,  $v = e^x$  et  $v' = e^x$ .

Considérons enfin un exemple un peu délicat. On note  $f$  la fonction  $x \mapsto \ln(e^{-x} + 1)$  définie sur  $\mathbb{R}$  et on souhaite déterminer l'expression de sa dérivée.

✘✘ La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = \frac{-e^x}{e^{-x} + 1}.$$

La première phrase, certes louable dans l'intention, est malheureuse car elle dit explicitement que la fonction  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , ce qui est évidemment monstrueux! Pour contourner ce problème, on peut soit rester un peu plus vague sur les intervalles en jeux (première rédaction ci-dessous), soit prendre son courage à deux mains et préciser convenablement les intervalles de départ et d'arrivée concernés (deuxième rédaction).

👍👍 La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par composition et, pour tout réel  $x$  on a :

$$f'(x) = \frac{-e^x}{e^{-x} + 1}.$$

👍👍 La fonction  $u : x \mapsto e^{-x} + 1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  et la fonction  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , donc la fonction  $f : x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par composition et pour tout réel  $x$  on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-e^x}{e^{-x} + 1}.$$

# Annexe B.

## Questions exigibles et lettres grecques

### B.1 Liste des questions de cours exigibles

Conformément au bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019<sup>1</sup>, les résultats (théorèmes, propriétés, propositions, corollaires ...) ci-dessous sont exigibles en tant que questions de cours aux examens et à l'épreuve du baccalauréat<sup>2</sup>. On attend de vous d'en connaître l'énoncé précis (notamment hypothèses et conclusions) ainsi que d'en connaître leur démonstration<sup>3</sup>.

1. L'inégalité de Bernoulli (propriété 1.2).
2. Théorème de comparaison (théorème 1.13).
3. Toute suite croissante et non majorée tend vers  $+\infty$  (propriété 1.16).
4. Limite de la suite  $(q^n)$  (propriété 1.19).
5. Limite en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction exponentielle (propriété 2.17).
6. Croissance comparée de  $x \mapsto x^n$  et  $x \mapsto e^x$  en  $+\infty$  (propriété 2.18).
7. Si  $f''$  est positive, alors la fonction  $f$  est convexe (propriété 4.7).
8. Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise (propriété 5.9).
9. Limite en 0 de  $x \mapsto x \ln(x)$  (propriété 5.13).
10. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle différent d'une constante (théorème 7.4, item 2).
11. Résolution de l'équation différentielle  $y' = ay$  où  $a$  est un réel (propriété 7.11).

---

1. <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm>

2. Ils peuvent figurer sous la forme, par exemple, d'un exercice.

3. Notez que cette liste ne doit pas être un prétexte pour ignorer les autres démonstrations figurant dans ce cours. En toute généralité, il est de très bonne discipline d'étudier toutes les démonstrations d'un cours de mathématiques.

12. Pour une fonction positive croissante  $f$  sur  $[a; b]$ , la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  définie sur  $[a; b]$  est une primitive de  $f$  (théorème 8.4).
13. Relation  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  (propriété 8.6).
14. Formule d'intégration par partie (propriété 8.14).
15. Démonstration par le calcul et par une méthode de combinatoire de la relation de Pascal (propriété 9.16).
16. Démonstration de la relation  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  (propriété 9.18).
17. Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur un plan  $\mathcal{P}$  est le point de  $\mathcal{P}$  le plus proche de  $M$  (propriété 11.20).
18. Équation cartésienne du plan normal au vecteur  $\vec{n}$  et passant par le point  $A$  (propriété 12.3).
19. Expression de la probabilité de  $k$  succès dans le schéma de Bernoulli (propriété 14.6).
20. Espérance et variance de la loi binomiale (propriété 14.8).

## B.2 Table des lettres grecques

L'alphabet grec, utilisé régulièrement dans ce cours (et très régulièrement dans toute la suite de vos études scientifiques!), est rappelé ci-dessous.

Lettre	Minuscule	Majuscule
alpha	$\alpha$	$A$
beta	$\beta$	$B$
gamma	$\gamma$	$\Gamma$
delta	$\delta$	$\Delta$
epsilon	$\varepsilon$	$E$
zeta	$\zeta$	$Z$
eta	$\eta$	$H$
theta	$\theta$	$\Theta$
iota	$\iota$	$I$
kappa	$\kappa$	$K$
lambda	$\lambda$	$\Lambda$
mu	$\mu$	$M$
nu	$\nu$	$N$
xi	$\xi$	$\Xi$
omicron	$o$	$O$
pi	$\pi$	$\Pi$
rho	$\rho$	$P$
sigma	$\sigma$	$\Sigma$
tau	$\tau$	$T$
upsilon	$\upsilon$	$Y$
phi	$\phi$	$\Phi$
khi (ou chi)	$\chi$	$X$
psi	$\psi$	$\Psi$
omega	$\omega$	$\Omega$

# Remerciements

Mes sincères remerciements à Eric Billault pour sa minutieuse relecture et ses inestimables conseils. Tout au long de nos innombrables échanges, il a été d'une immense patience et a su, avec tact et finesse, me partager son vaste savoir mathématique.

Je remercie évidemment la totalité de mes élèves pour la confiance qu'ils m'accordent. Je remercie en particulier ceux de mes (brillants) élèves qui ont relu assidûment cet ouvrage et qui ont pris un malin plaisir à y dénicher la moindre erreur — pour une fois, c'était à leur tour de corriger la copie de leur professeur, c'est de bonne guerre!

# PRÉCIS DE MATHÉMATIQUES

Cours rigoureux avec démonstrations et exercices corrigés



Ce livre de mathématiques s'adresse à toute personne concernée par l'enseignement de la **spécialité mathématiques** en **Terminale**. Il est un gage de réussite à l'épreuve du baccalauréat et prépare sérieusement aux études supérieures à majeur mathématiques.

Ce livre comprend un cours clair, construit et complet contenant :

- **des remarques** visant à éclaircir, nuancer ou vulgariser les notions ;
- **de nombreux exemples** illustrant les définitions et les propriétés pour une assimilation plus aisée de la théorie ;
- **des rubriques de mise en garde** afin d'éviter les erreurs classiques ;
- **des démonstrations détaillées** pour une compréhension profonde du cours ;
- **une centaine d'applications de cours corrigées** afin de mettre en pratique les notions et acquérir des automatismes.

Il inclut aussi une large sélection d'exercices corrigés de difficultés variées dont :

- **une trentaine d'annales** classiques et moins classiques pour s'entraîner sur les différents types d'exercices susceptibles de tomber le jour J, mais aussi pour améliorer sa capacité d'adaptation à la nouveauté ;
- **des exercices d'approfondissement** exigeants visant à travailler le raisonnement et la logique mathématique par la découverte de notions incontournables du supérieur ;
- **des corrections claires et détaillées** pour une compréhension aisée.

Il s'accompagne aussi d'une annexe des règles fondamentales de rédaction illustrées par des exemples tirés de copies d'élèves : un indispensable pour proposer une copie de bac irréprochable qui sortira du lot !

