2BSM A&B

Résumés des cours

8 Séries d'exercices et problèmes

8 Devoirs libres corrigés

Extraits du bac

Examen blanc

Astuces pour les concours

2025/2026

Préparé par **Aissa HIYAB** professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Version, 11/06/2025

Table des matières

Livre des corrections des devoirs libres :

https://drive.google.com/file/d/1HcZHAD76En_w8Uf8J5JzQJA05956hc0_/view?usp=sharing

1

Limites, continuité et fonctions réciproques

La Continuité

Définitions

Soient f une fonction numérique définie sur un ouvert $I \ni a$.

❶ On dit f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) : |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon}$$

❷ On dit que f est continue à droite en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

❸ On dit que f est continue à gauche en b si $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

$$\boxed{f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow f \text{ est continue à droite et à gauche en } a}$$

❹ On dit que f est une fonction continue sur un intervalle ouvert I s'elle est continue en tout point de I.

❺ On dit que f est continue sur un intervelle $[a, b]$ s'elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

❻ Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles, les fonctions : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur chaque intervalle de son domaine de définition.

Les opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

❶ les fonctions $f + g$, λf et fg sont continues sur I.

❷ Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.

❸ Si f et g sont deux fonctions continues sur I et J respectivement avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

❹ soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une fonction définie sur I avec $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et g est une fonction continue sur J avec $f(I) \subset J$ alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(l)$.

L'image d'un intervalle par une fonction continue

❶ l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

❷ l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

I	$f(I)$ si f est continue et str $\nearrow$	$f(I)$ si f est continue et str $\searrow$
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f(a)f(b)<0$. Alors :
L'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$.
Si de plus f est strictement monotone, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]a,b[$.

La Dichotomie

Le but de cette méthode est d'approcher la solution d'une équation de type $f(x)=0$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ telle que $f(a)f(b)<0$, alors $\exists!\alpha\in]a,b[/f(\alpha)=0$. On a deux cas :

$$\hookrightarrow \text{ si } f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b)<0 \text{ alors } \alpha\in\left]\frac{a+b}{2},b\right[.$$
$$\hookrightarrow \text{ si } f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(a)<0 \text{ alors } \alpha\in\left]a,\frac{a+b}{2}\right[$$

On continue de cette manière jusqu'à l'encadrement demandé de α.

La fonction réciproque

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $J = f(I)$ La fonction qui lie chaque élèment y de J avec l'unique élèment x de I tel que $f(x) = y$ s'appelle la fonction réciproque de f notée f^{-1}. On a donc :

$\hookrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$,

$\hookrightarrow \forall x \in I : \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x, \forall x \in J : \left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x.$

$\hookrightarrow$ f^{-1} est continue sur $f(I)$

$\hookrightarrow$ f et f^{-1} ont la même monotonie.

$\hookrightarrow$ $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétrique par rapport à $y = x$ dans un repère orthonormé.

La fonction racine n^{me}

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Alors elle admet une fonction réciproque sera noté $\sqrt[n]{}$. On a :

$\hookrightarrow \sqrt[n]{} : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & [0, +\infty[\\ & & x \mapsto \sqrt[n]{x} \end{array}$

$\hookrightarrow (\forall x, y \in [0, +\infty[) \ : \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

$\hookrightarrow (\forall x \in [0, +\infty[) : \quad (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$

$\hookrightarrow$ Si $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose $(\forall x \in]0, +\infty[) : x^r = \sqrt[q]{x^p}$

$\hookrightarrow$ La fonction $x \mapsto x^r$ est continue sur $]0, +\infty[$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

$\hookrightarrow$ pour tout $r, r' \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x, y \in]\,0, +\infty[$ on a :

$$x^{r+r'} = x^r x^{r'}; \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}; x^{rr'} = (x^r)^{r'}; \frac{1}{x^r} = x^{-r}; \frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}; \quad (xy)^r = x^r y^r,$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}; \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})\left(\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{y^2}\right)}$$

La fonction arctan

La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue et strictement croissante sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$. Alors elle admet une fonction réciproque noté arctan.

$\hookrightarrow$ La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\hookrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : \quad \tan(\arctan(x)) = x; (\forall x \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[) : \quad \arctan(\tan(x)) = x$

$\hookrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}); (\forall y \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[) : \quad \arctan(x) = y \Longleftrightarrow x = \tan(y)$

$\hookrightarrow \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$

Exercice 1 :

On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} (\forall x \in [0;4[\cup]4;+\infty[) \quad g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-6} \\ g(4) = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

Montrer que la fonction g est continue en 4 et déduire qu'elle est continue sur $[0;+\infty[$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2 - x + a}{x-1} & ; \quad x > 1 \\ f(x) = 2 + b\sqrt{x} & ; \quad x \leq 1 \end{cases}$

1) Déterminer D_f

2) Déterminer a et b pour que f soit continue sur D_f

Exercice 3 :

On considère la fonction u définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad u(x) = \dfrac{\sqrt{1+\cos(x)} - \sqrt{2}}{x}$

Montrer que la fonction u admet un prolongement par continuité en 0 et préciser ce prolongement.

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}{x-1}$

1) Vérifier que $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

2) Montrer que $\exists! \alpha \in]1;2[\quad \dfrac{1}{\alpha - 1} = \sqrt{\alpha}$

3) Montrer que $\alpha^2(\alpha - 2) = 1 - \alpha$

Exercice 5 :

Soit u une fonction définie et continue sur $[0;1]$

1) On pose $v(x) = \dfrac{1}{1+u^2(x)} - x$

a) Etudier la continuité de v sur $[0;1]$

b) Montrer que l'équation $v(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0;1]$

2) En déduire qu' $\exists c \in]0;1[\quad 1 - c = c \times u^2(c)$

Exercice 6 :

a et b deux nombres réels tels que : $a < b$

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$

On considère la fonction g définie par : $(\forall x \in]a;b[) \quad g(x) = f(x) - \dfrac{1}{a-x} + \dfrac{1}{b-x}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to a^+} g(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to b^-} g(x)$

2) En déduire que : $(\exists \alpha \in]a;b[) \quad f(\alpha) = \dfrac{1}{a-\alpha} - \dfrac{1}{b-\alpha}$ **(Utiliser le résultat de la question 1 de l'exercice 27)**

Exercice 7 :

a et b deux nombres réels tels que : $a<b$

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$

$x_1\,;x_2\,;\cdots\cdots$ et x_n sont des éléments de l'intervalle $[a;b]$ (n est un entier naturel non nul)

Montrer que : $(\exists c\in[a;b])\quad f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right)$

Exercice 8 :

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sqrt[n]{x^2}}-\sqrt{1-\sqrt[n]{x^2}}}{\sqrt[n]{x}} \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) Vérifier que $D_f=[0;1]$

2) Montrer que f est continue à droite en 0.

Exercice 9 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$

1) Montrer que la fonction f est continue sur tout intervalle de la forme $[n;n+1[$ où n est un entier relatif.

2) Montrer que la fonction f est continue sur $]-\infty;+\infty[$

Exercice 10 :

On considère la fonction g définie par : $g(x)=E\left(\frac{1}{x}\right)sin(x)$ et $g(0)=1$

Montrer que la fonction g est continue en 0

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{sin(\pi\sqrt{cos(x)})}{x}$ et la fonction h définie par : $\begin{cases} h(x)=\dfrac{sin(x)}{x-\pi} \\ h(\pi)=-1 \end{cases}$

1) Montrer que h est continue en π

2) Montrer que $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}\qquad f(x)=-\dfrac{\pi\left(1-\sqrt{cos(x)}\right)}{x}\times h\left(\pi\sqrt{cos(x)}\right)$

3) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

4) f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Exercice 12 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$. On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^{n+1}-2x^n+1$

1) Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{2n}{n+1}\right]$

2) En déduire que $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)<0$ (on pourra remarquer que $\frac{2n}{n+1}>1$)

3) Montrer que $\exists!\alpha\in\left[\frac{2n}{n+1};2\right]\quad f(\alpha)=0$

4) Vérifier que $\alpha^n=\dfrac{1}{2-\alpha}$

Exercice 13 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x-\sqrt{x}$

1) Montrer que f est une bijection de $I=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$ (on pourra remarquer que $t-\sqrt{t}=\left(\sqrt{t}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$)

Exercice 14 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x)=\sqrt{1-\sqrt[n]{x}}$

1) Déterminer D_{f_n}

2) Montrer que f_n est strictement décroissante sur $[0;1]$

3) Montrer que f_n est une bijection de $[0;1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

4) Déterminer $f_n^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

Exercice 15 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x-3\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}$

1) Déterminer D_f

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $f(x)=x$

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

c) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

Exercice 16 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$

2) a) Montrer que f est une bijection de $]-\infty;+\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que : $(\forall x\in J)\quad g^{-1}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 17 :

1) Démontrer que :

a) $Arctan(\frac{1}{3})+Arctan(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}$

b) $Arctan(\frac{1}{2})+Arctan(\frac{1}{5})+Arctan(\frac{1}{8})=\frac{\pi}{4}$

c) $(\forall x\in\mathbb{R})\quad Arctan(x+1)-Arctan(x)=Arctan(\dfrac{1}{x^2+x+1})$

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$

a) $cos(Arctan(x))=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; b) $sin(Arctan(x))=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 18 :

Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$ $Arctan(\sqrt{1+x^2}-x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}Arctan(x)$ (Indication : poser $x=tan(\alpha)$ tel que $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$)

Exercice 19 :

1) **Montrer que** $\forall a;b\in\mathbb{R}^{+}\quad Arctan(a)-Arctan(b)=Arctan(\frac{a-b}{1+ab})$

2) **Calculer la limite :** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\times\left[Arctan(\frac{x}{x+1})-\frac{\pi}{4}\right]$

3) a) **Montrer que** $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)\quad Arctan(x)+Arctan(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}$ **et** $\left(\forall x\in\left]-\infty;0\right[\right)\quad Arctan(x)+Arctan(\frac{1}{x})=-\frac{\pi}{2}$

b) **Calculer la limite :** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\times\left[Arctan(\frac{x^2+1}{x})-\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 20 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ **les équations suivantes :**

$Arctan(4x)=\frac{\pi}{8}$; $Arctan(x^2-x)=\frac{3\pi}{4}$; $Arctan(x)+Arctan(3x)=-\frac{\pi}{3}$

Exercice 21 :

1) a) **Montrer que** $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)\quad 0<\frac{\pi}{4}-Arctan(\frac{x}{x+1})<\frac{\pi}{4}$

b) **Résoudre dans** $\left]0;+\infty\right[$ **l'équation** $\frac{\pi}{4}-Arctan(\frac{x}{x+1})=Arctan(\frac{x-1}{2x+1})$

2) **Calculer** $Arctan(\frac{1}{3})+Arctan(\frac{1}{2})$

3) **Résoudre dans** $\mathbb{R}$ **les équations suivantes :**

a) $Arctan(x)+Arctan(\frac{3}{2}x)=\frac{\pi}{4}$; b) $Arctan^2(x)-\frac{\pi+1}{2}Arctan(\frac{3}{2}x)+\frac{\pi}{4}=0$

Exercice 22 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ **les équations suivantes :**

$x^3=7$; $x^8=12$

$\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}+6=0$

$\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(1-x)^2}=\sqrt[3]{1-x^2}$

$\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[6]{1-x^2}$

$\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{x+4}=\sqrt[3]{4}$

$\sqrt[4]{x}-3\sqrt[6]{x}+2\sqrt[12]{x}=0$

$\sqrt{x^3-1}+\sqrt[3]{x^3-1}=2$

$\sqrt{x^3-1}+\sqrt[3]{x^3-1}=12$

$\sqrt{x^3-1}+\sqrt[3]{x^3-1}=2\left(\sqrt{2}+1\right)$

Exercice 23 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+3x+1}-\sqrt[3]{x^2+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^4+3x+1}-\sqrt[4]{x^4+2}$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{2x+6}}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}-1\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x+\sqrt[3]{1-x^3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}+x+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$; $(a;b\in\mathbb{R})$

Exercice 24 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\times Arctan(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}\times Arctan(x)-\frac{\pi}{2}x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x}\left(\pi-2Arctan(\sqrt[4]{x})\right)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(1-\sqrt{cos(x)}\right)\times Arctan(x)}{x\times sin^2(x)}$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2Arctan(\frac{1}{\sqrt{1-x}})-\pi}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}Arctan(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-mx)$; $m\in\mathbb{R}$

Exercice 25 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = Arctan\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 0

2) a) Etudier la parité de f

b) Etudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$ puis déduire sa monotonie sur $\mathbb{R}$

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

4) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

5) En déduire une autre expression de $f(x)$

Exercice 26 :

Soit g un fonction définie et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

On suppose que h est décroissante sur $]0;+\infty[$

1) Soit $a \in]0;+\infty[$ Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[\setminus \{a\}$ $\quad \dfrac{h(x)-h(a)}{x-a} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) - \dfrac{g(a)}{ax}$

2) a) Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[\setminus \{a\}$ $\quad |g(x)-g(a)| \leq \dfrac{g(a)}{a}|x-a|$

b) En déduire que g est continue sur $]0;+\infty[$

Exercice 27 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a;b[$ tels que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$

1) a) Montrer que $\exists (\alpha;\beta) \in]a;b[^2 \ / \ f(\alpha)f(\beta) < 0$

b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a;b[$

2) Soit g une fonction continue sur $[a;b]$

Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet au moins une solution dans $]a;b[$

3) Montrer que $\exists c \in]a;b[\ / \ \sqrt{\dfrac{b-c}{c-a}} = \sqrt{(b-c)(c-a)} + \sqrt{\dfrac{c-a}{b-c}}$

Exercice 28 :

Soit f une fonction continue et positif sur $[0;+\infty[$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l < 1$

Montrer que $\exists c \in [0;+\infty[\ / \ f(c) = c$

Exercice 29 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tel que $\exists a \in \mathbb{R} \ / \ f \circ f(a) = a$

Montrer que $\exists c \in \mathbb{R} \ / \ f(c) = c$

Exercice 30 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I tel que $\forall x \in I \quad f(x) \neq 0$

Montrer que $\forall x \in I \quad f(x) > 0$ ou $\forall x \in I \quad f(x) < 0$

Exercice 31 :

Soit $f : [a;b] \to [a;b]$ une fonction continue. Montrer que $\exists c \in \mathbb{R} \ / \ f(c) = c$

Exercice 32 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=Arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la continuité de f sur D_f

3) Montrer que $\begin{cases} f(x)=-Arctan(x)+\frac{\pi}{4} & ; \quad x>-1 \\ f(x)=-Arctan(x)-\frac{3\pi}{4} & ; \quad x<-1 \end{cases}$

Exercice 33 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Arctan\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=1$ et $x+\sqrt{x^2+1}>0$

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

3) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

4) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$

b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-f(-x)=Arctan(x)$

c) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}Arctan(x)$

5) Calculer $Arctan\left(1+\sqrt{2}\right)$ et $Arctan\left(2-\sqrt{3}\right)$

Exercice 34 :

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{\left|1-x^2\right|}-1}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ f(x)=x(2x+1)sin\left(\dfrac{1}{6x+3}\right) & ; \quad x\leq 0 \\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0 & \end{cases}$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que $\forall x\in\left]0;1\right[\quad \left|f(x)\right|\leq x$

3) Montrer que f est continue sur $\left]0;+\infty\right[$ et déduire qu'elle est continue à droite en 0.

4) Montrer que f est continue en $-\frac{1}{2}$

Exercice 35 : Soit $n;p\in\mathbb{N}^*$. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4Arctan(2x-1)-\pi}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{Arctan\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)-\sqrt[3]{x^2+x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{cos(x)}\right)}-\dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{cos(x)}\right)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[p]{x}}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+sin(2x)-2sin(x)}{Arctan(x^3)-\left(Arctan(x)\right)^3}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos(x)cos(2x)\times\ldots\times cos(nx)}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos(x)cos^2(2x)\times\ldots\times cos^n(nx)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sqrt{1+x}\times\sqrt[3]{1-x}\times\sqrt[4]{1+x}\times\sqrt[5]{1-x}\times\ldots\times\sqrt[2n]{1+x}\times\sqrt[2n+1]{1-x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}-\sqrt[p]{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{x}+\sqrt[p]{x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[p]{x}}{\sqrt[np]{x}}$

DL1

Exercice 1

1) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[7]{x+1}}{\sqrt[5]{x+1}-1}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[7]{x}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x+3}+1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[6]{x+1}-\sqrt{x+1}}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}\times\sqrt[6]{x}}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arctan2x-Arctanx}{x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Arctan\left(x^2-x\right)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Arctan\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}Arctan\left(x^2+x\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} xArctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{Arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-\dfrac{\pi}{4}}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2Arctanx-\pi}{x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Arctanx-\dfrac{\pi}{4}}{4x-4}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\sqrt[4]{x}-3\sqrt[6]{x}+2\sqrt[12]{x}=0$; $\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{2}\sqrt{x-1}$

3) a) Montrer que $Arctan(\frac{1}{5})+Arctan(\frac{2}{3})=\frac{\pi}{4}$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Arctan(3x)+Arctan(10x)=\frac{\pi}{4}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

1) Montrer que $\exists\alpha\in\left[\frac{5}{4};2\right]/\quad f(\alpha)=\alpha$

2) Soit g la restriction de f sur $I=\left]1;+\infty\right[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

Correction

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}-\sqrt[6]{x}$

1) Déterminer D_f

2) Résoudre dans D_f les équations suivantes : $\left(E_1\right)$: $f(x)=0$ **et** $\left(E_1\right)$: $f(x)=\sqrt[3]{1-2\sqrt{x}}$

3) Montrer que $\left(\exists c\in\left]0;1\right[\right)/\quad \sqrt[3]{1-\sqrt{c}}=\sqrt[6]{c}+\sqrt{c}$

4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

5) Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)-\dfrac{1}{4}}{x}$

Exercice 4

1) Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}^+\quad Arctan(t)\le t$

2) On considère la fonction f définie par $f(x)=tan^2(x)-2\sqrt{3}tan(x)$

a) Montrer que la restriction g de f sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

Exercice 5

1) On considère la fonction f définie par $f(x)=x^3-\frac{1}{x}-7$

a) Vérifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1;2[$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$

c) Vérifier que $\alpha=\sqrt[4]{7\alpha+1}$

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction g_n définie par $g_n(x)=\sum_{k=1}^{n}cos(kx)$

a) Montrer que $\exists\alpha_n\in[0;\pi]\quad g_n(\alpha_n)=0$

b) Vérifier que $g_{n+1}(\alpha_n)=cos((n+1)\alpha_n)$ et $g_n(\alpha_{n+1})=-cos((n+1)\alpha_{n+1})$

Exercice 6

1) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=Arctan\left(\sqrt{3}\times\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}\right)$

a) Montrer que f admet un prolongement par continuité à droite en 0.

b) Déterminer ce prolongement.

2) Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ tel que $g(a)<0$

Montrer que $\exists\alpha\in]a;b[\quad g(\alpha)=\frac{a-\alpha}{b-\alpha}$

Exercice 7

Partie 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ par $f(x)=\frac{x^3-3x}{3x^2-1}$

1) a) Etudié la continuité de f sur $I=\left]-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$

b) Calculer les limites de f aux bornes de I

c) Montrer que $\forall x\in I\quad f'(x)=3\left(\frac{x^2+1}{3x^2-1}\right)^2$

2) a) Montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

b) Vérifier que $\forall x\in I\quad f(x)=tan(3Arctan(x))$ (on pourra utiliser que $tan(3\alpha)=\frac{tan^3(\alpha)-3tan(\alpha)}{3tan^2(\alpha)-1}$)

c) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

Partie 2 :

1) On considère la fonction g définie par $g(x)=Arctan(f(x))$

a) Déterminer D_g

b) Montrer que g est impaire.

c) g admet-elle un prolongement par continuité en $\frac{1}{\sqrt{3}}$?

2) On considère la fonction h définie par $\begin{cases} h(x)=g(x)\ ;\ x\in[0;+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \\ h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Montrer que $\begin{cases} h(x)=3Arctan(x)\ ;\ x\in\left[0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right[\\ h(x)=\pi+3Arctan(x)\ ;\ x\in\left]\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right[\end{cases}$

2

Dérivation, TAF, étude de fonctions et suites numériques

Les suites numériques

La suite majorée, minorée et bornée

❶ Une suite $(U_n)_{n\geq n_0}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que $(\forall n \geq n_0) : U_n \leq M$

❷ Une suite $(U_n)_{n\geq n_0}$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que $(\forall n \geq n_0) : U_n \geq m$.

❸ Une suite $(U_n)_{n\geq n_0}$ est **bornée** s'il existe un réel positif C tel que $(\forall n \geq n_0)$: $|U_n| \leq C$. (ie. la suite est majorée et minorée à la fois)

➘ Toute suite positive est minoré par 0. ➘ Toute suite négative est majorée par 0.

La monotonie d'une suite

❶ $(U_n)_{n\geq n_0}$ est croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n \geq 0$

❷ $(U_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n > 0$

❸ $(U_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n \leq 0$.

❹ $(U_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n < 0$.

❺ $(U_n)_{n\geq n_0}$ est constante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geq n_0) : U_{n+1} = U_n$

➘ Une suite croissante est minorée par son premier terme. (ie. $(\forall n \geq n_0) : U_n \geq U_{n_0}$)

➘ Une suite décroissante est majorée par son premier terme. (ie. $(\forall n \geq n_0) : U_n \leq U_{n_0}$)

La suite arithmétique/géométrique

une suite	Arithmétique	Géométrique
La définition $(\forall n \geq n_0)$	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = qU_n$
Terme général $(\forall n \geq n_0)$	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = U_p q^{n-p}$
la somme $S_n = U_p + ..U_n$	$S_n = \left(\dfrac{n-p+1}{2}\right)(U_p + U_n)$	$S_n = \left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)U_p$

Limite d'une suite

❶ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geq n_0}$ est convergente s'elle existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geq N \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon}$$

❷ On dit qu'une suite $(V_n)_{n\geq n_0}$ est divergente s'elle n'est pas convergente.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists N > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geq N \Rightarrow U_n > A}$$

❸ Toute suite croissante et majorée est convergente.

❹ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

❺

$$\begin{cases} (\forall n \geq n_0) : |U_n - l| \leq V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0 \end{cases} \Longrightarrow (U_n)_{n\geq n_0} \text{ est convergente et } \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$$

$$\begin{cases} (\forall n \geq n_0) : W_n \leq U_n \leq V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l \end{cases} \Longrightarrow (U_n)_{n\geq n_0} \text{ est convergente et } \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$$

$$\begin{cases} (\forall n \geq n_0) : W_n \leq U_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \text{ et } (U_n)_{n\geq n_0} \text{ est divergente}$$

$$\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : U_n > 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \end{cases} \Rightarrow l \geqslant 0 \qquad \begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l' \end{cases} \Rightarrow l \leqslant l'$$

❻ Soit $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ et soit $q \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \nexists & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

❼ $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \\ f \text{est continue en} l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = f(l)$$

❽ $$\left\{ \begin{array}{l} (i)\ f \text{ est continue sur} I \\ (ii)\ U_{n+1} = f(U_n) \\ (iii) U_0 \in I \\ (iv) f(I) \subset I \\ (v)\ (U_n) \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{la limite de } (U_n) \text{ est une sol de } f(x) = x \text{ sur } I$$

Les suites adjacentes

Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes lorsque :

❶ $(u_n)_n$ est croissante. ❷ $(v_n)_n$ est décroissante. ❸ $\lim(v_n - u_n) = 0$.

➘ Deux **suites adjecentes** sont convergentes et elles ont la même limite.

Dérivation et étude de fonctions

Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I \ni a$. On dit que :

❶ f est dérivable en a s'il existe un réel l t.q. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ $(:= f'(a))$.

❷ f est dérivable à droite de a s'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ $(:= f'_d(a))$.

❸ f est dérivable à gauche de a s'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ $(:= f'_g(a))$.

❹ f est dérivable sur I s'elle est dérivable en tout point de I.

❺ f est dérivable sur $[a, b]$ s'elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite de a et dérivable à gauche de b.

Interprétation géométrique

❶ Si f est dérivable en a alors (C_f) admet une tangente d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ au point $(a, f(a))$

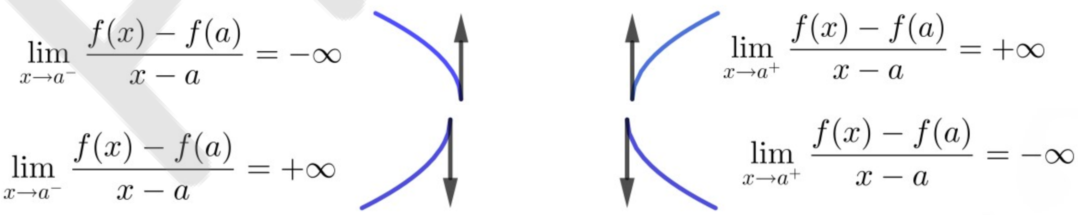
❷ Si f est dérivable à droite au point a alors (C_f) admet une demi-tangente d'équation

$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases} \quad \text{au point } (a, f(a))$$

❸ Si f est dérivable à gauche au point a alors (C_f) admet une demi-tangente d'équation

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases} \quad \text{au point } (a, f(a))$$

❹ **Si** $\lim\limits_{x\to a^\pm} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors (C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = a$.



❺ Si f est dérivable au point a, la fonction g définie par $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ est une approximation affine de f au voisinage de a et on a :

$$x \simeq a \Longrightarrow f(x) \simeq g(x)$$

Tableau des fonctions dérivées et ces opérations

la fonction f	la dérivée f'	intervvalle inclu dans
$x \mapsto k, k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]\,0, +\infty[$
$x \mapsto \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$	$x \mapsto \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto x^r, r \in \mathbb{Q}^*$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$]\,0, +\infty[$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
$x \mapsto \arctan(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

la fonction f définie sur I	la dérivée de f sur I	Conditions
$u + v \;\; ; \; uv$	$u' + v' \;\; ; \; u'v + uv'$	
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$v \neq 0 sur I$
u^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^n$	
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$u \neq 0 sur I$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$\sqrt[n]{u}, n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{u'}{(n\sqrt[n]{u})^{n-1}}$	$u > 0$ sur I
$u^r, r \in \mathbb{Q}^* \backslash \{-1\}$	$ru'u^r$	$u > 0$ sur I
$x \mapsto u(ax + b), a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto au'(ax + b)$	$]0, +\infty[$
$\arctan(u)$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	
$\sin(u) \;\; ; \; \cos(u)$	$u'\cos(u) \;\; ; \; -u'\sin(u)$	
$\tan(u)$	$\dfrac{u'}{\cos^2(u)}$	$u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

La dérivée du composé

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et J respectivement telles que $f(I) \subset J$, alors $f \circ g$ est dérivable et on a : $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) . g'(x)$ $(\forall x \in I)$.

La dérivée de la réciproque

Soit f une fonction bijective et dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur $f(I) = J$ alors sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J et on a : $(\forall x \in J) : \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Théorème des Accroissement Finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On a :

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\end{array}\right. \overset{\text{TAF}}{\Longrightarrow} \quad (\exists c \in]a,b[) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}$$

Inégalité des Accroissement Finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On a :

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ \beta \leq f'(x) \leq \alpha \end{array}\right. \overset{\text{IAF}}{\Longrightarrow} \quad \beta \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \alpha$$

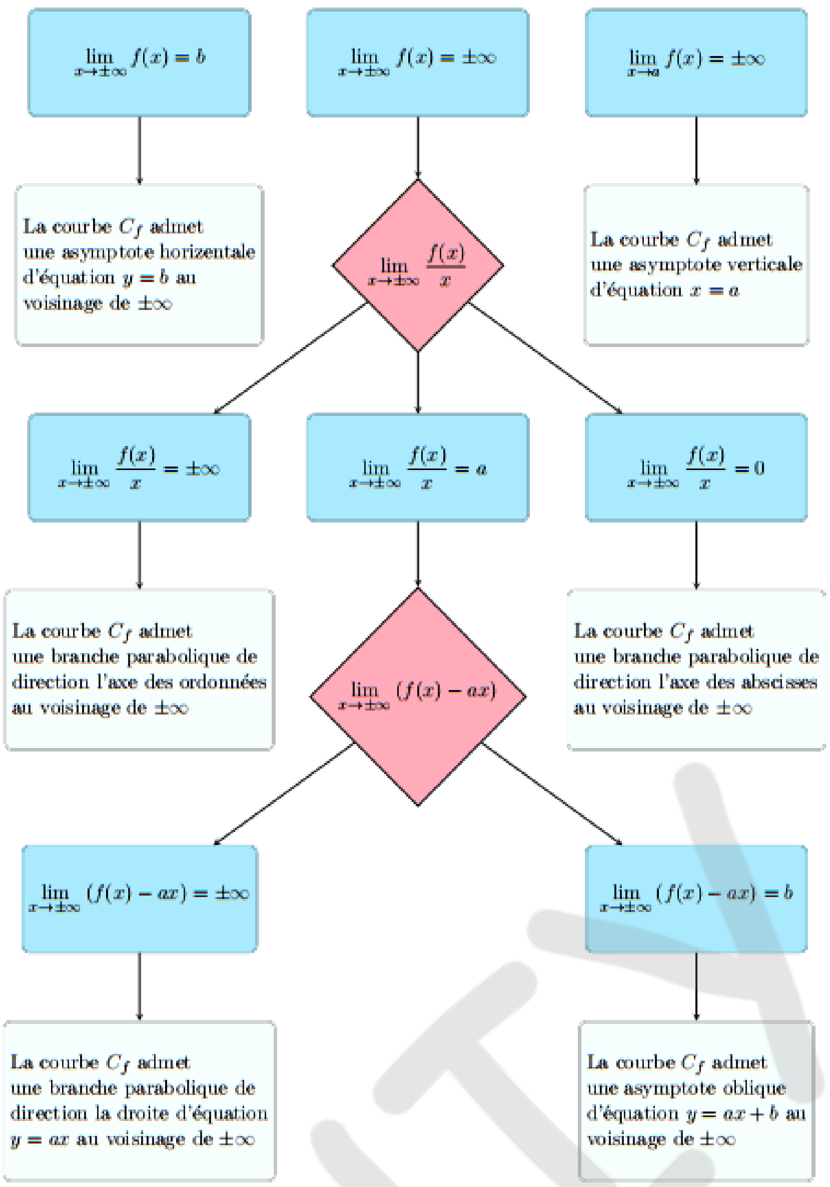
Théorème de Rolle

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On a :

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{array}\right. \overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \quad (\exists c \in]a,b[) : f'(c) = 0$$

Etude de fonctions

Branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$



$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\pm\infty$ si $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$

Concavité de $(\mathcal{C}_f)$

La concavité de $(\mathcal{C}_f)$ se déduit par **l'étude de signe de** $f''(x)$ **:**

- $(\mathcal{C}_f)$ est **convexe** sur $I \Leftrightarrow$ $(\forall x \in I)\ f''(x) \geq 0$
- $(\mathcal{C}_f)$ est **concave** sur $I \Leftrightarrow$ $(\forall x \in I)\ f''(x) \leq 0$
- Si $f''(a) = 0$ et f'' **change de signe au voisinage de** a alors le point $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion** de $(\mathcal{C}_f)$.

Positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et $y = ax + b$

Les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D) : $y = ax + b$ se déduit par **l'étude de signe de** $f(x) - (ax+b)$ **:**

- Si $(\forall x \in I)\ f(x) - (ax+b) > 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est **au-dessus** de (D) sur I.
- Si $(\forall x \in I)\ f(x) - (ax+b) < 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est **au-dessous** de (D) sur I.
- Si $f(x) - (ax+b) = 0$, alors $(\mathcal{C}_f)$ et (D) sont **confondues** aux points d'abscisses x .

Construction de $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$:

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ sur $J = f(I)$ est le symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ sur I par rapport à la droite $y = x$

Eléments de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

$\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \forall x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = 2b - f(x)$	
$x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \forall x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$	

Méthode de construction de $(\mathcal{C}_f)$:

- Construire **les asymptotes** et **les branches paraboliques** ;
- Construire **les tangentes** et **les demi-tangentes** ;
- Construire **les points remarquables de** $(\mathcal{C}_f)$ s'ils existent : **(Points d'inflexion, points d'intersection avec les axes du repère, les extremums et le centre de symétrie)**
- Construire $(\mathcal{C}_f)$ à **partir du tableau de variations de** f

N.B : N'oublier pas de respecter **l'unité de mesure du repère, les positions relatives, la concavité** et tenant compte **le centre ou l'axe de symétrie** (s'il existe).

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 2BSMF	Série 2 Dérivation, TAF, étude de fonctions et suites numériques	Lycée qualifiant : Almajd Matière : mathématique

1) Suites numériques

Exercice 01 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{9u_n - 4}{u_n + 5}$.

1) Montrer que $u_1 = \dfrac{32}{9}$ et $u_2 = \dfrac{252}{77}$

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 2$

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 2)^2}{u_n + 5}$

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n)

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

a) Calculer v_0 puis montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{7}$

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

d) Montrer que : $v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_n = \dfrac{n(n+8)}{14}$

5) Soit $(w_n)_{n \in I}$ une suite arithmétique. Montrer que $(\forall n \in I) \quad w_{n+1} = \dfrac{w_n + w_{n+2}}{2}$

Exercice 02 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 4}{2u_n + 5}$.

1) Montrer que $u_1 = \dfrac{13}{5}$ et $u_2 = \dfrac{37}{17}$

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 2$

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2(u_n + 1)(u_n - 2)}{2u_n + 5}$

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n)

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

a) Calculer v_0 puis montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

d) Montrer que : $v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_n = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)$

5) Soit $(w_n)_{n \in I}$ une suite géométrique. Montrer que $(\forall n \in I) \quad w_{n+1}^2 = w_n \times w_{n+2}$

Exercice 03 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 3}{u_n}$.

→ **Partie 1 :**

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 3$.

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n}$.

4) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

→ **Partie 2 :**

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - 3 \le \dfrac{1}{3}(u_n - 3)$.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n - 3 \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

→ **Partie 3 :**

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 1}$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

3) Retrouver la valeur de la limite de (u_n).

→ **Partie 4 :**

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [3; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{4x - 3}{x}$.

1) Etudier les variations de la fonction f sur I .

2) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

3) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 3$.

4) Vérifier que : $f(I) \subset I$.

5) Retrouver la valeur de la limite de (u_n).

→ **Partie 5 :**

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [3; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{4x - 3}{x}$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans I (sans résoudre l'équation)

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in I$.

3) Montrer que $(\forall x \in I) \quad |f'(x)| \le \dfrac{1}{3}$

4) En utilisant I.A.F déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{3}|u_n - \alpha|$.

5) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$ puis retrouver la valeur de la limite de (u_n).

Exercice 04 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$

1) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

2) Montrer que $\left(\forall x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\right)\quad |f'(x)|\leq\dfrac{1}{8}$

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{8}|u_n-\alpha|$.

b) Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Exercice 05 :

Soit f la fonction numérique définie sur $I=\left[\sqrt{3};+\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{x}+x\right)$

Partie 1 :

1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur I

2) Montrer que : $(\forall x\in I)\quad f(x)\geq\sqrt{3}$

3) Montrer que : $(\forall x\in I)\quad f(x)\leq x$

Partie 2 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=4$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\geq\sqrt{3}$

2) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}-\sqrt{3}\leq\dfrac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{3}\right)$.

b) En déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n-\sqrt{3}\leq\dfrac{1}{2^n}\left(4-\sqrt{3}\right)$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Exercice 06 :

Soit f la fonction numérique définie sur $I=\left[\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{4}\right]$ par $f(x)=1+\dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1) Montrer que f est continue sur I

2) Montrer que $f(I)\subset I$.

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in I$

4) Montrer que $(\forall x\in I)\quad |f'(x)|\leq\dfrac{4}{9}$

5) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans I

6) Donner le tableau de variations de f sur I

7) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=1+\dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\in I$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 07 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3 + \frac{1}{u_n}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3 \leq u_n \leq 4$

2) On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1} \quad / \ n \in \mathbb{N}$

Soit f la fonction numérique définie sur $[3;4]$ par $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$

a) Déterminer $f \circ f$ et montrer que $f \circ f$ est croissante sur $[3;4]$

b) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{n+1} = f \circ f(a_n)$ et $b_{n+1} = f \circ f(b_n)$

3) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

4) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{10^2}(b_n - a_n)$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n)$

c) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et déterminer leurs limites.

5) On pose $\beta = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

a) $(\exists k \in]0;1[) \ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \beta| \leq k|u_n - \beta|$

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \beta$

Exercice 08 :

Soit a et b deux réels tel que $0 < a < b$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \text{ et } u_0 = a \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_0 = b$$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n < v_n$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.

3) En déduire que (u_n) et (v_n) sont convergentes.

4) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{10^2}|u_n - v_n|$

b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

5) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n v_n = ab$

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

Exercice 09 :

Soit $a \in]0;1]$. On considère les suites (α_n) et (s_n) définies par $\alpha_n = (1-a)^n$ et $s_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_n \quad / \ n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que (α_n) et (s_n) sont convergentes et calculer leurs limites.

2) Soit (u_n) une suite numérique définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + \frac{\alpha_n}{u_n}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 0$

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq u_0 + \dfrac{1}{au_0}$

d) En déduire que (u_n) est convergente.

2) Dérivation et étude de fonctions

Exercice 10 :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x\left(\sqrt{x}-2\right)^2$

1) Etudier la continuité de f sur $[0;+\infty[$

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat graphiquement.

3) a) Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[) \qquad f'(x) = 2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Dresser le tableau de signe de f

d) Montrer que l'équation $f(x) = x-2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1;4[$

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[4;+\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Dresser le tableau de variations de g^{-1}

c) Calculer $g(16)$ et déduire $\left(g^{-1}\right)'(64)$

5) a) Montrer que $(\forall x \in J) : \; g^{-1}(x) = \left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^2$

b) Déterminer par deux méthodes l'expression de $\left(g^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x \in J$

6) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat obtenu graphiquement.

7) Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un unique point d'inflexion I à déterminer.

8) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

9) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et la droite $(\Delta): y = x$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on donne $f(9) = 9$

10) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère précédent.

11) Résoudre graphiquement : $f(x) = x$; $f(x) \leq x$ et $g^{-1}(x) = 4$

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = 1+\sqrt[3]{x^3-2x^2} & ; \quad x \geq 2 \\ f(x) = \dfrac{2}{\pi}\times Arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & ; \quad x < 2 \end{cases}$

→ **Partie A :**

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) Etudier la continuité de f en 0

3) Calculer les limites de f aux bornes de D_f, puis étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$

4) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 2.

5) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty;2[$ et pour tout $x \in]2;+\infty[$

b) Dresser le tableau de variations de f

6) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on donne $f(0)\approx 0,4$

7) Soit g la restriction de f sur $]-\infty;2[$

a) Montrer que g est une bijection de $]-\infty;2[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer g^{-1} et tracer sa courbe $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère précèdent.

→ <u>Partie B :</u>

1) a) Montrer que $(\exists k\in]0;1[)\ \ 0<g'(x)<k$ pour tout $x\in[0;1]$

b) En déduire la monotonie de la fonction h définie sur $[0;1]$ par $h(x)=g(x)-x$

2) Montrer que $(\exists!\alpha\in]0;1[)\ \ g(\alpha)=\alpha$

3) On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0=\dfrac{1}{4}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=g(u_n)$.

a) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ 0\le u_n\le 1$.

b) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ |u_{n+1}-\alpha|\le k|u_n-\alpha|$.

c) En déduire que (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

Exercice 12 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=2Arctan\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=2$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ et interpréter le résultat graphiquement.

2) Etudier les variations de f

3) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$

a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

5) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1;2]$

6) On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Montrer que $f(2)>\dfrac{\pi}{3}$

b) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ 1\le u_n\le 2$.

c) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ |u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{4}|u_n-\alpha|$.

d) En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 13 :

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x)=x+2-\sqrt{x^2+2x} & ;\quad x<-2 \\ f(x)=Arctan(\sqrt{x+2}) & ;\quad x\ge-2\end{cases}$

→ <u>Partie A :</u>

1) Montrer que f est continue en -2

2) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -2

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{f(x)}{x+2} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{\tan^2(h)}$ et déduire que f n'est pas dérivable à droite en -2

3) Dresser le tableau de variations de f

4) a) Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$

b) Montrer que $\forall x \in]-\infty;-2[\quad f(x)-(2x+3)>0$ et interpréter le résultat graphiquement.

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$

5) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty;-2[$

a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

→ **Partie B :**

Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[-1;2]$ et (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = h(u_n)$.

1) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad Arctan(x) \le x$

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad -1 \le u_n \le 2$.

c) Montrer que (u_n) est strictement croissante.

2) a) Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution α dans $]-1;2[$

b) Montrer que $(\forall x \in]-1;2[) \quad h'(x) \le \dfrac{1}{4}$

c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1}-\alpha| \le \dfrac{1}{4}|u_n-\alpha|$.

d) En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 14 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Arctan(x) + 2x - 1$

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) > 2$

2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

3) a) Montrer que $(\exists! \alpha \in \mathbb{R}) \quad f(\alpha) = \alpha$

b) Montrer que $\alpha \in]0;1[$

4) Montrer que $(\forall x > \alpha) \quad f(x) > x$ et interpréter le résultat graphiquement.

5) Soit $b \in]\alpha;+\infty[$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$.

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > \alpha$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n) et déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - \alpha \le \dfrac{1}{2}(u_n - \alpha)$.

d) En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 15 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x + x^2 + \dots + x^n - 1$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un nombre réel unique α_n de l'intervalle $]0;1]$ tel que $f_n(\alpha_n)=0$

2) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n)=(\alpha_n)^{n+1}$

3) En déduire la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$

4) En déduire que $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

5) On pose $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$, montrer que $0\leq l<1$ et déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=0$

6) a) Montrer que $f_n(x)=\dfrac{x^{n+1}-2x+1}{x-1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ (Rappel $x^{n+1}-1=(x-1)(x^n+x^{n-1}+......+1)$)

b) En déduire que $(\alpha_n)^{n+1}-2\alpha_n+1=0$ et $l=\dfrac{1}{2}$

Exercice 16 :

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n>2$. On considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x)=x^n-n(x-1)-2$

1) Etudier la monotonie de f_n

2) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions a_n et b_n dans $[0;+\infty[$ et que : $0<a_n<1<b_n$

3) a) Etudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ sur $[0;+\infty[$

b) En déduire la monotonie des suites $(a_n)_{n>2}$ et $(b_n)_{n>2}$

4) Montrer que $\forall n>2 \quad -\dfrac{2}{n}<a_n-1<-\dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

5) a) Montrer que $(\forall x\geq 0)$ $(\forall n>2)$ $(1+x)^n\geq 1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$.

b) En déduire le signe de $f_n\left(1+\frac{2}{n}\right)$

c) Montrer que $(b_n)_{n>2}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$

Exercice 17 :

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction f_a définie par $\begin{cases} f_a(x)=a-1-\sqrt[3]{a^3-x^3} & ; \quad x\leq a \\ f_a(x)=2Arctan\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right) & ; \quad x>a \end{cases}$

1) Déterminer D_{f_a} l'ensemble de définition de f_a puis calculer les limites de f_a aux bornes de D_{f_a}

2) Etudier la continuité de f_a sur D_{f_a}

3) Etudier la dérivabilité de f_a en a et interpréter le résultat graphiquement.

4) Etudier les variations de la fonction f_a

5) Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_{f_a})$ et déterminer ses points d'inflexion.

6) a) Montrer que f_1 est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $f_1^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

c) Tracer les courbes $(\mathcal{C}_{f_a})$ et $(\mathcal{C}_{f_1^{-1}})$ dans le même repère.

3) Théorème de Rolle, T.A.F et I.A.F

Exercice 18 :

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ tel que $f(0)=0$ et $f(1)=1$

Montrer que $(\exists c\in]0;1[)/ \quad f'(c)=2c$

Exercice 19 :

Soit f **une fonction continue sur** $[0;1]$ **et dérivable sur** $]0;1[$ **tel que** $f(0)=0$ **et** $f(1)=1$

Montrer que $(\exists c\in]0;1[)/\quad 2cf'(c)=\sqrt{c}$

Exercice 20 :

Soit f **une fonction continue sur** $[0;1]$ **et dérivable sur** $]0;1[$ **tel que** $f(0)=0$ **et** $(\forall x\in]0;1[)\quad f(x)\neq 0$

Montrer que $(\exists c\in]0;1[)/\quad 2f'(c)\times f(1-c)=3f'(1-c)\times f(c)$

Exercice 21 :

Soit f **une fonction dérivable sur un intervalle** I

$(x_1,x_2,x_3)\in I^3$ **tel que** $\begin{cases} x_3<x_2<x_1 \\ 2f(x_3)=f(x_1)+f(x\ ) \end{cases}$

On considère la fonction g **définie sur** I **par :** $g(x)=f(x)-f(x_3)$

1) Vérifier que $g(x_1)g(x_2)\leq 0$

2) En déduire que $(\exists x_4\in I)/\quad f(x_4)=f(x_3)$

3) En déduire que $(\exists c\in I)/\quad f'(c)=0$

Exercice 22 :

En utilisant le théorème des accroissements finies montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \begin{cases} |cos(x)-cos(y)|\leq |x-y| \\ |sin(x)-sin(y)|\leq |x-y| \\ |Arctan(x)-Arctan(y)|\leq |x-y| \end{cases}$

Exercice 23 :

En utilisant le théorème des accroissement finis montrer que :

1) $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad sin(x)\leq x$

2) $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad Arctan(x)\leq x$

3) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \dfrac{1}{2\sqrt{(n+1)^3}}\leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

4) $(\forall x\in [0;1])\quad 1+\dfrac{x}{5}\leq \sqrt[3]{1+x}\leq 1+\dfrac{x}{3}$

5) $(\forall (x,y)\in]0;10[^2)\quad |xsin(x)-ysin(y)|\leq 11|x-y|$

Exercice 24 :

Soit f **une fonction deux fois dérivable sur** $[-1;1]$ **tel que** $f(1)=f(-1)=0$

1) On considère la fonction g **définie par :** $g(x)=f(x)+f(0)\times(x^2-1)$

Montrer que $(\exists (a,b)\in]-1;1[^2)\quad g'(a)=g'(b)=0$

2) En déduire que l'équation $f''(x)=2f(0)$ **admet au moins une solution dans** $]-1;1[$

Exercice 25 :

Soit f **une fonction dérivable sur** $\mathbb{R}^+$ **tel que** $\begin{cases} f(0)=f'(0)=0 \\ \exists a\in\mathbb{R}_+^*/\quad f(a)=0 \end{cases}$

1) Montrer que $(\exists b\in]0;a[^2)\quad f'(b)=0$

2) On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{f(x)}{x} & ; \quad x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

b) Montrer que g est continue à droite en 0.

c) En déduire $\left(\exists c\in\left]0;a\right[\right)/ \quad f(c)=cf'(c)$

Exercice 26 :

On considère la fonction f définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par : $f(t)=sin(\sqrt[3]{t})-\sqrt[3]{t}$

1) Soit $x\in\left]0;+\infty\right[$, montrer que $\left(\exists c_x\in\left]0;x^3\right[\right)/ \quad \dfrac{sin(x)-x}{x^3}=\dfrac{1}{3}\dfrac{cos\left(\sqrt[3]{c_x}\right)-1}{\sqrt[3]{c_x^2}}$

2) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{sin(x)-x}{x^3}$

Exercice 27 :

1) Montrer que $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right) \quad 0<\dfrac{x-Arctan(x)}{x}\leq\dfrac{x^2}{1+x^2}$

2) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-Arctan(x)}{x^2}$

Exercice 28 :

Montrer que : $\left(\forall x;y\in\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[\right) \quad |x-y|\leq|tan(x)-tan(y)|\leq2|x-y|$

Exercice 29 :

Soient x et y deux nombres réels tels que : $-1<x<y$

En utilisant le théorème des accroissements finies montrer que : $1+x\leq\left|\dfrac{xsin(x)-ysin(y)}{x-y}\right|\leq1+y$

Exercice 30 :

Soit f une fonction définie par : $f(x)=Arctan(x)-\dfrac{1}{Arctan(x)}$

1) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right) \quad f'(x)\geq\dfrac{1}{1+x^2}$

2) Soient x et y deux nombres réels tels que : $0<x<y$. Montrer que : $\dfrac{1}{1+y^2}\leq\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leq\dfrac{1}{1+x^2}$

Exercice 31 :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\left(\exists c_x\in\mathbb{R}_+^*\right) \quad f(x)-f(-x)=x\left(f'(c_x)-f'(-c_x)\right)$

Exercice 1

On considère la fonction f **définie par** $\begin{cases} f(x) = -x+\sqrt{x^2+1} & ; \quad x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{4}{\pi} \times Arctan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) & ; \quad x < 0 \end{cases}$ **et soit** $(\mathcal{C}_f)$ **la courbe représentative de** f **dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$ **tel que** $\|\vec{i}\| = 2$

→ **<u>Partie A :</u>**

1) a) Etudier la continuité de f **en** 0

b) Etudier la dérivabilité de f **en** 0 **et interpréter le résultat graphiquement.**

2) a) Calculer $f'(x)$ **pour tout** $x \in [0;+\infty[$ **et pour tout** $x \in]0;+\infty[$ **puis montrer que** $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) < 0$

b) Dresser le tableau de variations de f **et calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

3) Tracer $(\mathcal{C}_f)$

4) Montrer que $f\left(\left[\dfrac{1}{4};1\right]\right) \subset \left[\dfrac{1}{4};1\right]$

<u>Partie B :</u> On considère la suite numérique (u_n) **définie par** $u_0 = 1$ **et pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que $(\forall x \in \left[\dfrac{1}{4};1\right])$ $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{5}$

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\left|u_n - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right| \leq \dfrac{4}{5}\left|u_{n-1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right|$.

3) Montrer que (u_n) **est convergente et calculer sa limite.**

4) Montrer que $(\forall x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[)$ $f\left(\dfrac{1}{tan(x)}\right) = tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. **On pose** $a_n = \dfrac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$

a) Vérifier que $a_0 = 1$ **et pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **:** $a_n = 2^{n+1} - a_{n+1}$

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n = tan\left(\dfrac{\pi \times a_n}{2^{n+2}}\right)$

Correction

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ **tel que** $n \geq 3$. **On considère la fonction** f_n **définie par** $f_n(x) = x^n + 1 - nx$

1) Montrer que $\exists! \alpha_n \in]0;1[$ $f_n(\alpha_n) = 0$

2) Vérifier que $\forall n \geq 3$ $\alpha_n \neq \dfrac{1}{2}$

3) a) Montrer que $(\forall n \geq 3)$ $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^n(\alpha_n - 1) - \alpha_n$.

b) En déduire le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$

c) Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$

4) Déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ **est convergente.**

5) Montrer que $\forall n \geq 3$ $\dfrac{1}{n} < \alpha_n < \dfrac{2}{n}$ **et déterminer** $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

6) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n\alpha_n = 1$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=\frac{1}{2}$, $u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{u_{n+2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_n}\right)$.

1) Calculer u_2 et u_3

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}=\frac{2u_n}{-1+4u_n}$

Correction

3) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad \frac{1}{2}\leq u_n\leq 1$

4) Soit f la fonction numérique définie sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ par $f(x)=\frac{2x}{-1+4x}$

Vérifier que $\left(\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\right)\quad fof(x)=\frac{4x}{1+4x}$ et que fof est croissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$

5) On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_n=u_{2n}$ et $b_n=u_{2n+1}\quad / \ n\in\mathbb{N}$

a) Montrer par récurrence que la suite (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

b) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et déterminer leurs limites.

6) On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\frac{1}{u_n}-\frac{4}{3}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer v_n en fonction de n

b) Déterminer u_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Exercice 4

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$.

1) a) Montrer par récurrence double que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\geq n$

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_nu_{n+2}+(-1)^{n+1}=(u_{n+1})^2$

2) On considère les suites $(\alpha_n)_{n\geq1}$ et $(\beta_n)_{n\geq1}$ définies par $\alpha_n=\frac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$ et $\beta_n=\frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}\quad / \ n\in\mathbb{N}^*$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \beta_n-\alpha_n=\frac{1}{u_{2n}u_{2n+1}}$

b) En déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 0<\beta_n-\alpha_n<\frac{1}{n}$ et $0<\alpha_n<\beta_n$

3) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_{n+1}-\alpha_n=\frac{1}{u_{2n}u_{2n+2}}$

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_n=\frac{1}{\beta_n}-1$

c) En déduire la monotonie des suites $(\alpha_n)_{n\geq1}$ et $(\beta_n)_{n\geq1}$

4) a) Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\geq1}$ et $(\beta_n)_{n\geq1}$ sont adjacentes.

b) Déterminer la limite des suites $(\alpha_n)_{n\geq1}$ et $(\beta_n)_{n\geq1}$

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exercice 5

1) Soit $(S_n)_{n\geq1}$ la suite définie par $S_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$: $S_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

En utilisant le T.A.F montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad S_n-\frac{1}{n}<\frac{2}{3}-\frac{2}{3n\sqrt{n}}<S_n-\frac{1}{n\sqrt{n}}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

2) Soit $(U_n)_n$ une suite numérique et $l\in\mathbb{R}$. Montrer que :

Les suites $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$ sont convergentes et ils ont la même limite l si et seulement si la suite $(U_n)_n$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l$

3

Fonctions logarithmiques et exponentielles

Les fonctions Ln et Exp

Le logarithme népérien

• *Le logarithme népérien* est la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1. Noté par " $\ln$ ".

• $D_{\ln} =]0,+\infty[$,

• $\ln$ est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : $\quad (\forall x \in]0,+\infty[) : \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

• $\ln$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

• L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution noté e telle que $e = 2,718\ldots$

Propriétés

Pour tout a et b de $]0,+\infty[$ et r de $\mathbb{Q}$:

• $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ $\qquad$ • $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

• $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ $\qquad$ • $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$ $\qquad$ • $\ln(a^r) = r\ln(a)$

• $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b.$ $\qquad$ • $a < b \Longleftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$

• $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \qquad \ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \qquad \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

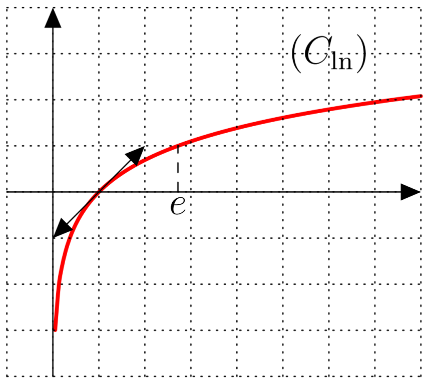
Etude du fonction ln

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ $\qquad$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ $\qquad$ • $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ $\qquad$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \cdot \ln(x) = 0 \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

• *Tableau de variation* du $\ln$ et ça *courbe* :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$+$
$\ln(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$



• Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I. La fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ s'appelle La dérivée logarithmique de u sur I.

• Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I telle qu'elle ne s'annule jamais sur I, alors la fonction $f : x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et sa dérivée est La dérivée logarithmique de u. càd ($\forall x \in I$) : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

• Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I. Les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln(|u(x)|) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Logarithme à la base a

•Soit a un réel strictement positif et différent de 1. Le logarithme à base a est la fonction noté $\log_a$ et définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

• Si $a = 10$ on note $\log_{10} = \log$ et si $a = e$ $\log_e = \ln$.

• $\log_a(1) = 0$, $\quad \log_a(a) = 1, \quad \log_a(e) = \dfrac{1}{\ln(a)}$

Soient $x, y \in]0, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$:

• $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$; $\quad \log_a\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$.

• $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$; $\quad \log_a(x^r) = r\log_a(x), (\forall r \in \mathbb{Q})$

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : \log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

$0 < a < 1$

x	0	$+\infty$
$\log_a'$	‖	$-$
$\log_a$	‖ $+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

$a > 1$

x	0	$+\infty$
$\log_a'$	‖	$+$
$\log_a$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

L'exponentielle népérien

- La réciproque de la fonction $\ln$ s'appelle *La fonction exponentielle népérienne* notée $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$.
- Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $a \in]0,+\infty[$, On a : $\exp(r) = a \Leftrightarrow r = \ln(a) \Leftrightarrow \ln(e^r) = \ln(a) \Leftrightarrow a = e^r$. Donc $\exp(r) = e^r$ pour tout r de $\mathbb{Q}$. On prolonge cette expression à $\mathbb{R}$ et on aura : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp(x) = e^x$
- La fonction $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $e^1 = e; \quad e^0 = 1; \quad e^x > 0, (\forall x \in \mathbb{R})$.

Propriétés

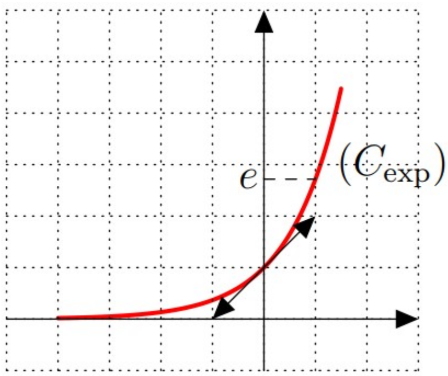
- $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x \quad (\forall x \in]0,+\infty[) : e^{\ln(x)} = x$
- $\begin{cases} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in]0,+\infty[\end{cases}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \quad e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$
- $e^x e^y = e^{x+y}; \quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}; \quad \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}; \quad e^{rx} = (e^x)^r$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0; \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1;$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^x = 0; (\forall n \in \mathbb{N})$
- La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x, (\forall x \in \mathbb{R})$.
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}, (\forall x \in I)$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^x	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$



L'exponentielle à la base a

- Soit a un réel strictement positif et différent de 1 . L'exponentielle à base a est la fonction $\exp_a : x \mapsto e^{x\ln(a)} = a^x$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp_a(x) = e^{x\ln(a)} = a^x$

Soient $\boldsymbol{x, y} \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{\mathbf{1}\}$. On a :

- $\boldsymbol{a^x a^y = a^{x+y}} \quad \boldsymbol{a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}} \quad \boldsymbol{\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}} \quad \boldsymbol{a^{xy} = (a^x)^y} \quad \boldsymbol{a^x = e^y \Leftrightarrow x = y}$
- La fonction $\boldsymbol{x \mapsto a^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R})$: $\boldsymbol{(a^x)' = \ln(a)a^x}$.
- $\begin{cases} \boldsymbol{a^x < a^y \Leftrightarrow x > y} & \boldsymbol{, 0 < a < 1} \\ \boldsymbol{a^x < a^y \Leftrightarrow x < y} & \boldsymbol{, a > 1} \end{cases}$

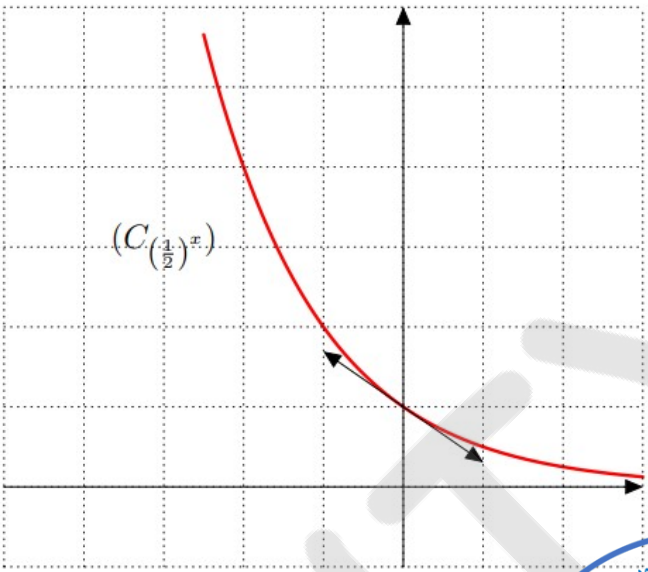
$0 < a < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln(a)a^x$	$-$	
a^x	$+\infty \searrow$	0

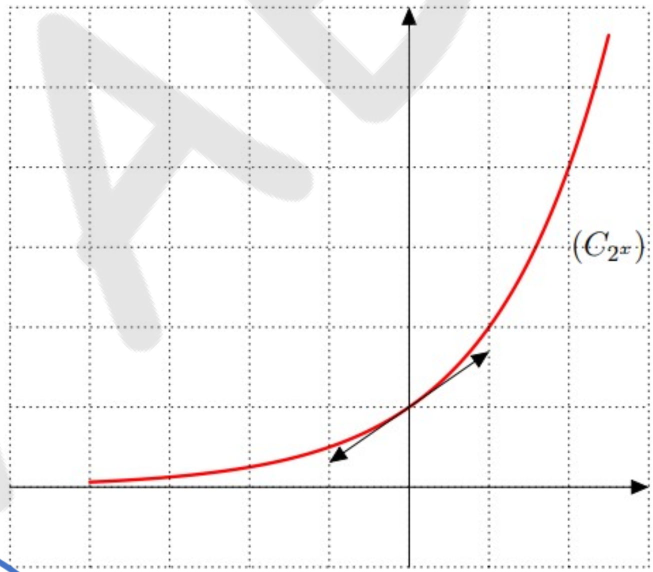
$a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln(a)a^x$	$+$	
a^x	$0 \nearrow$	$+\infty$

$a = \dfrac{1}{2}$



$a = 2$



Prof : Aissa HIYAB Niveau : 2BSMF	Série 3 Fonctions logarithmiques et exponentielles	Lycée qualifiant : Almajd Matière : mathématique

Exercice 1 : **Calculer les limites suivantes :**

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^2-x}$	$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{x}}{x\times sin(x)}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x}\times ln(1+e^{-x})$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x\times(e^{2x}-e^{x})$
$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}\times e^{-x}$	$\lim\limits_{x\to 0^+} sin(x)\times e^{\frac{1}{x}}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} sin(x)\times e^{1-2x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\times(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\times ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$	$\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{x^2}-e^{3x}+x^2$	$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\times e^{\frac{1}{x-1}}$	$\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)^{\frac{1}{x}}$
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}^{x}-1}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{ln(1+x\times 2^{x})}{2x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\sqrt{x}-x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} 2ln(1+x)-ln(1+x^2)$
$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{ln(3x-1)}{\sqrt[3]{x}}$	$\lim\limits_{x\to 1^+}(ln(x))^{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}\times(ln(x))^{4}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} a^{x}-x^{a}\quad / a\in\mathbb{R}_+^*$

Exercice 2 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$ln(x^2-2e^2)=1+ln(x)$; $log_x(x^2-\frac{1}{4})>4$; $log_4(x+1)-log_{16}(2x+1)>0$; $x+ln(e^x-1)-ln(2)=0$

$(ln(|x|))^2+\dfrac{30}{ln(|x|)}<19$; $ln(e^{2x}+e^{x}-2)\leq 0$; $e^{2x}-4me^{x}+2m+2=0 \quad / m\in\mathbb{R}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} ln(x)\times ln(y)+2=ln(x^2) \\ ln(\dfrac{x^2}{y})=3 \end{cases}$

Exercice 3 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. **On considère la fonction** f_n **définie par :** $\begin{cases} f_n(x)=x^n(1-ln(x)) & ; \quad x>0 \\ f_n(x)=0 \end{cases}$ **et soit** $(\mathcal{C}_n)$ **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$ **tel que** $\|\vec{i}\|=4$

→ **Partie A :**

1) a) Montrer que f_n **est continue à droite en** 0

b) Etudier la dérivabilité de f_n **à droite en** 0 **et interpréter le résultat graphiquement.**

2) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x)$

3) a) Etudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$

b) En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ **et** $(\mathcal{C}_{n+1})$

4) Montrer que toutes les courbes passent par trois points à déterminer.

5) Etudier les variations de f_n **et dresser le tableau de variations.**

6) Déterminer les tangentes à $(\mathcal{C}_n)$ **aux points d'abscisses** 1 **et** e

7) Tracer dans le même repère les courbes $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ **et** $(\mathcal{C}_3)$

→ **Partie B :**

1) Soit x_n **un nombre réel non nul tel que** $f_n'(x_n)=0$. **Montrer que** $x_n\in[1;e[$ **et calculer** $\lim\limits_{n\to +\infty} x_n$

2) Montrer que $\exists!\alpha_n\in[x_n;e[\quad f_n(\alpha_n)=1$ **(Rappel** $\forall x>0\quad ln(x)\leq x-1$**)**

3) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n)\geq 1$ **et déduire que la suite** $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **est croissante.** ; **4) Déterminer** $\lim\limits_{n\to +\infty}\alpha_n$

Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = xe^x - nx$ et soit $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 4$

→ **Partie A :**

Soit g_n la fonction définie par $g_n(x) = (1+x)e^x - n$

1) Dresser le tableau de variations de g_n et calculer les limites de g_n aux bornes de D_{g_n}

2) a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique a_n et que $a_n \geq 0$

b) Déterminer la valeur de a_1

3) Montrer que $a_n = ln\left(\dfrac{n}{1+a_n}\right)$ et $0 \leq a_n \leq ln(n)$

4) a) Montrer que $\forall x > 0 \quad ln(x) \leq x - 1$

b) Déterminer le signe de $g_n\left(ln(\sqrt{n})\right)$

c) En déduire que $a_n \geq \dfrac{1}{2}ln(n)$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n}$

→ **Partie B :**

1) a) Dresser le tableau de variations de f_n et calculer les limites de f_n aux bornes de D_{f_n}

b) Montrer que $f_n(a_n) = -\dfrac{na_n^2}{1+a_n}$

2) Montrer que $(\mathcal{C}_n)$ admet une asymptote oblique $(\mathcal{D}_n)$ et déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ avec $(\mathcal{D}_n)$

3) Déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ avec l'axe des abscisses en précisant les points d'intersection.

4) Déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$

5) Montrer que $0,34 \leq a_2 \leq 0,69$ et déduire un encadrement de $f_2(a_2)$

6) Tracer dans le même repère les courbes $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et leurs tangentes en O.

Exercice 5 : Extrait du bac 1

n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x + \dfrac{e^{-x}}{n}$

Soit $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$

2) a) Etudier la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C}_n)$ au voisinage de $-\infty$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_n)$ au voisinage de $+\infty$ et déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ avec (D)

3) Etudier les variations de f_n et dresser le tableau de variations.

4) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_n)$ (On donne $f_3(-1,5) \approx 0$; $f_3(-0,6) \approx 0$; $ln(3) \approx 1,1$

5) a) Montrer que si $n \geq 3$ alors $\dfrac{e}{n} < ln(n)$

b) Montrer que si $n \geq 3$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n tel que :

$x_n < -ln(n)$ et $-\dfrac{e}{n} \leq y_n \leq 0$

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

6) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} g(x)=-1-x\ln(x) \ ; \ x>0 \\ g(0)=-1 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue à droite en 0

b) Vérifier que pour tout $n\geq 3$: $g\left(\dfrac{-1}{x_n}\right)=\dfrac{\ln(n)}{x_n}$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{x_n}$

Exercice 6 : Extrait du bac 2

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=-\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=1\ cm$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter les résultats obtenus.

2) Calculer $f'(x)$ puis déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie sur $]0;1[$ par : $g_n(x)=f(x)-x^n$

a) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur $]0;1[$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un nombre réel unique α_n de l'intervalle $]0;1[$ tel que $f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $g_n(\alpha_{n+1})<0$

d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq1}$ est strictement croissante et déduire qu'elle est convergente.

4) On pose $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

a) Vérifier que $0<\alpha_1\leq l\leq 1$

b) Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $h(\alpha_n)=n$ tel que $h(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(-\ln(x))}{\ln(x)}$

c) Montrer que $l=1$

d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=0$

Exercice 7 : Extrait du bac 3

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=xe^{-x^2}$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

→ **Partie A :**

1) Calculer la limite de f en $+\infty$

2) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations.

3) Déterminer l'équation de la demi-tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ à l'origine du repère puis construire $(\mathcal{C})$ (On prend $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$ et on admet que le point d'abscisse $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$)

→ **Partie B :**

Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$. On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$

1) a) Montrer que $\forall x > 1 \quad e^{-x^2} < e^{-x}$

   b) En déduire la limite de f_n quand x tend vers $+\infty$

2) Etudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis donner son tableau de variations.

3) Montrer qu'il existe un nombre réel unique u_n de l'intervalle $]0;1[$ tel que $f_n(u_n)=1$

4) a) Montrer que $\forall n \geq 2 \quad f_{n+1}(u_n) = u_n$

   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante et déduire qu'elle est convergente.

4) On pose $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

   a) Montrer que $0 < l \leq 1$

   b) Montrer que $\forall n \geq 2 \quad -\dfrac{ln(4)}{n} < ln(u_n) < \dfrac{1}{n} - \dfrac{ln(4)}{n}$

   c) En déduire que $l = 1$

Exercice 8 :

→ **Partie A :**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - e^x$

1) a) Etudier les variations de f' et déduire son signe.

   b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que $\forall x \leq 0 \quad 1 + x \leq e^x$

3) En déduire que $\forall x \leq 0 \quad 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

→ **Partie B :**

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par : $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{-k}{n^2}}$ et $V_n = U_n - n$

1) a) Montrer que $\forall n \geq 1 \quad U_n \geq n e^{-\frac{1}{n}}$

   b) En déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est divergente.

2) En déduire de la partie A-3) que : $\forall n \geq 1 \quad n - \dfrac{n+1}{2n} \leq U_n \leq n - \dfrac{n+1}{2n} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^4}$

3) En déduire un encadrement de V_n

4) Calculer la limite de la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ (On donne $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

DL3

2BACSM
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$ln(x+3)+ln(x-2)\leq ln(6)\ ;\ ln(|x|)+\frac{2}{ln(|x|)}<3\ ;\ ln(x+e)+ln(x-e)\leq 2+ln(3)$$

2) Calculer les limites :

$$\lim_{x\to+\infty} 2ln(1+x)-ln(1+x^2)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} xln(1+\frac{1}{x})\ ;\ \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}-x}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{ln(x+2^{-x})}{2x}\ ;\ \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-ln(x)}{e^x-x}$$

3) Montrer que $\forall t>0\quad ln(t)\leq t-1$ **et déduire** $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{ln(x)}{x}\right)^k\quad / x\in\left]1;+\infty\right[$

Exercice 2

Soit $n\in\mathbb{N}^*$**. On considère la fonction** f_n **définie sur** $\left]0;+\infty\right[$ **par :** $f_n(x)=x-n-n\frac{ln(x)}{x}$ **et soit** $(\mathcal{C}_n)$ **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$ **tel que** $\|\vec{i}\|=2cm$

<u>Partie A :</u>

1) Calculer $f_n^{/}(x)$ **et montrer que le signe de** $f_n^{/}(x)$ **est le signe de** $g_n(x)=x^2-n+nln(x)$ **sur** $\left]0;+\infty\right[$

2) a) Etudier les variations de g_n **et calculer** $\lim_{x\to+\infty} g_n(x)$ **et** $\lim_{x\to0^+} g_n(x)$

b) Montrer que l'équation $g_n(x)=0$ **admet une solution unique** α_n **sur l'intervalle** $\left]0;+\infty\right[$

c) Déterminer le signe de $g_n(x)$ **et les variations de** f_n

3) Calculer les limites de f_n **aux bornes de** D_{f_n}

4) Montrer que la droite (Δ_n) **d'équation** $y=x-n$ **est une asymptote oblique de** $(\mathcal{C}_n)$ **et déterminer la position relative de** $(\mathcal{C}_n)$ **avec** (Δ_n)

Correction

<u>Partie B :</u> On considère la fonction h **définie sur** $\left]0;+\infty\right[$ **par** $h(x)=1+\frac{ln(x)}{x}$

1) a) Etudier les variations de h **et calculer** $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ **et** $\lim_{x\to0^+} h(x)$

b) En déduire que l'équation $h(x)=0$ **admet une solution unique** β **tel que** $\frac{1}{e}\leq\beta\leq1$

c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad f_n(\beta)=\beta$

d) En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ **et** $(\mathcal{C}_{n+1})$

Exercice 3

→ <u>Partie A :</u>

1) On considère la fonction g **définie sur** $\left]1;+\infty\right[$ **par** $g(x)=2x-(x-1)ln(x-1)$

a) Calculer $\lim_{x\to1^+} g(x)$

b) Calculer $g'(x)$ **pour tout** $x\in\left]1;+\infty\right[$

c) Résoudre dans $\left]1;+\infty\right[$ **l'inéquation** $1-ln(x-1)>0$

d) Etudier les variations de g **sur** $\left]1;+\infty\right[$

e) Montrer que l'équation $g(x)=0$ **admet une solution unique** α **dans l'intervalle** $\left[e+1;e^3+1\right]$

f) Etudier le signe de $g(x)$ **sur les intervalles** $\left]1;\alpha\right[$ **et** $\left]\alpha;+\infty\right[$

2) Soit φ la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $\varphi(x)=\dfrac{ln(x^2-1)}{x}$

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$

b) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que le signe de $\varphi'(x)$ est le signe de $g(x^2)$ sur $]1;+\infty[$

c) Montrer que φ est croissante sur $]1;\sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur $]\sqrt{\alpha};+\infty[$

Correction

→ <u>Partie B :</u>

1) Vérifier que $\forall x\in]0;+\infty[\quad \varphi(e^x)=f(x)$ tel que $f(x)=\dfrac{ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

2) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, les variations de f sur $]0;+\infty[$ et que f admet une valeur maximale en $ln(\sqrt{\alpha})$

3) Montrer que $\forall x\in]0;+\infty[\quad f(x)\leq\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

Exercice 4

<u>Partie A</u> : On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=(x+1)e^{\frac{-1}{x}} & ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

c) Calculer $f'(x)$ et montrer que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t)=e^{-t}-1+t-\dfrac{t^2}{2}$

a) Calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ pour tout $t\in[0;+\infty[$

b) Déterminer le signe de $g'(t)$ et $g''(t)$ pour tout $t\in[0;+\infty[$

c) En déduire que $\forall t\in[0;+\infty[\quad 1-t\leq e^{-t}\leq 1-t+\dfrac{t^2}{2}$

3) a) Montrer que $\forall x\in]0;+\infty[\quad -\dfrac{1}{x}\leq f(x)-x\leq\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2x}$

b) En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ) à déterminer son équation.

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

<u>Partie B</u> : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f_n(x)=\left(x+\dfrac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{x}} & ; \quad x>0 \\ f_n(x)=0 \end{cases}$

1) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0.

2) Etudier les variations de f_n sur $[0;+\infty[$

3) a) Montrer que l'équation $f_n(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]0;+\infty[$

b) Montrer que $\forall x\in]0;+\infty[\quad f_{n+1}(x)-\dfrac{1}{n+1}>f_n(x)-\dfrac{1}{n}$

c) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et montrer qu'elle est convergente.

d) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad n\alpha_n=e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1$

e) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$

4

Calcul intégral, primitives et équations différentielles

Calcul Intégral

Définition

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et F sa primitive sur $[a, b]$, on a :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur I et a, b et c de I et $k \in \mathbb{R}$.

❶ $\star \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0.$

❷ Relation de Chasles : $\star \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

❸ La linéarité de l'intégrale : $\star \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$\star \int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

❹ Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

❺ Si $0 \leq g \leq f$ sur $[a, b]$ alors : $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

❻ si $a \leq b$ on a : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

❼ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ avec $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$

❽ Il existe au moins $c \in [a, b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ (la valeur moyenne).

Techniques de calcul intégral

❶ **Calcul direct :** se fait par trouver une primitive de f à intégrer sur l'intervalle I.

❷ **Intégration par partie :**

Soient f et g deux fonctions dérivables et leurs dérivées sont continues sur un intervalle $[a, b]$. Alors on a :

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

Exemple : $\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx = \int_1^e (x)'\ln(x)dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx = e-(e-1) = 1$

❸ Changement de variables :

Soit g une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que g' une continue sur $[a,b]$. Soit f une fonction continue sur $g([a,b])$. Alors : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt}$

Exemple :

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx \overset{t=\sqrt{x}}{=} \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{t^2+1}2tdt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} 1-\frac{1}{t^2+1}dt = \ldots$$

Sommes de Rieman

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$s_n = \displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$ et $S_n = \displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$ alors les suites (s_n) et (S_n) convergent et admettent $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ comme limite commune.

Exemple : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} + ..\frac{1}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} f\left(0+\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \ln(2)$

Calcul des aires et volumes

❶ Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et (C_f) et (C_g) leurs courbes. L'**aire** comprise entre (C_f) (C_g) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est :

$$\boxed{\mathcal{A}(f,g,a,b) = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right) u.a}$$

Remarque 1 : Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'unité de l'aire est $u\cdot a = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$

❷ Soient un solide compris entre deux plans paralèlles d'équations $z=a$ et $z=b$. On note par $S(t)$ l'aire d'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $z=t$ (la section du solide par le plan d'équation $z=t$). Si la fonction $t\mapsto S(t)$ est continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors le volume **V** du solide , en u.v. est donné par : $V = \displaystyle\int_a^b S(t)dt$

$\Rightarrow$ f une fonction continue et D le domaine limité **par** (C_f) , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ Alors le volume **V** du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe (Ox) est : $\boxed{V = \pi\left(\displaystyle\int_a^b (f(t))^2dt\right) u.v}$

Remarque 2 : L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ L'unité de volume est $u.v = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\|\vec{k}\|$

Les primitives

Les primitives des fonctions usuelles

La fonction f	Les primitives de f	Intervalle
$x \mapsto k, k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{x^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto x^r, r \in \mathbb{Q}^* \backslash \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c, c \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Les primitives et les opérations

La fonction f définie sur I	Une primitives de f sur I	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	
$u'v + uv'$	uv	
$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\dfrac{u}{v}$	$v \neq 0 sur I$
$u'u^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u \neq 0 sur I$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{(\sqrt[n]{u})^{n-1}}, n \in \mathbb{N}^*$	$n\sqrt[n]{u}$	$u > 0$ sur I
$u'u^r, r \in \mathbb{Q}^* \backslash \{-1\}$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$u > 0$ sur I
$x \mapsto u'(ax+b), a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}u(ax+b)$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$	
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	
$\dfrac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$	$u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert)$	$u \neq 0$
$u'e^u$	e^u	

Les équations différentielles

L'équation $y' = ay + b$

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

L'équation différentielle	**La solution générale**
$y' = ay$	$y(x) = ce^{ax}; c \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$	$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$
$y' = ay + b$	$y(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a}; c \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$	$y(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

L'équation $y'' + ay' + by = 0$

L'équa. diff. et son equa. cara.	**Si**	**Les Solutions de l'équa. car.**	**Les solutions générale de l'équa. diff.**
$y'' + ay' + by = 0$ et son équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$	$\Delta > 0$	Deux solutions réelles différentes r_1 et r_2	$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ telle que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
	$\Delta = 0$	Une solution réelle double r	$y(x) = (C_1 x + C_2) e^{rx}$ telle que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
	$\Delta < 0$	Deux solutions complexes $r_1 = p + iq$ et $\overline{r_1}$	$y(x) = (C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx)) e^{px}$ telle que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 2BSMF	Série 4 Calcul intégral, primitives et équations différentielles	Lycée qualifiant : Almajd Matière : mathématique

Exercice 1 : Intégration par primitive

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^2 \frac{1}{2}x^5dx$ $\quad\int_0^1 \left(3x^2-x+4\right)dx$ $\quad\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)^2}$ $\quad\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ $\quad\int_{-2}^1 \frac{3-2x}{x^5}dx$ $\quad\int_0^1 (3x-2)^4dx$

$\int_1^4 x\sqrt{x}dx$ $\quad\int_1^4 \left(\frac{1}{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$ $\quad\int_{-2}^3 x\left(x^2+2\right)^7dx$ $\quad\int_{-1}^0 \sqrt{x+3}dx$ $\quad\int_0^2 (x+2)\sqrt{x^2+4x}dx$ $\quad\int_1^2 \frac{4x}{\left(2x^2+5\right)^2}dx$

$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ $\quad\int_0^5 x\sqrt[3]{2+x^2}dx$ $\quad\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos(x)}{1+sin(x)}dx$ $\quad\int_1^e \frac{ln(x)}{x}dx$ $\quad\int_1^e \frac{dx}{xln(x)}dx$ $\quad\int_1^e \frac{\sqrt{ln(x)}}{x}dx$

$\int_e^{e^2} \frac{dx}{xln^2(x)}dx$ $\quad\int_1^e \frac{\sqrt{1+ln(x)}}{x}dx$ $\quad\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{2+ln(x)}}$ $\quad\int_{e^3}^{e^4} \frac{ln(1+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}}dx$ $\quad\int_0^1 \left(e^{4x}-3e^{2x}-1\right)dx$ $\quad\int_0^1 xe^{x^2}dx$

$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ $\quad\int_0^1 \left(2^x+3^x\right)dx$ $\quad\int_0^{ln(2)} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+5}}dx$ $\quad\int_0^1 \frac{2x-1}{e^{x^2-x+2}}dx$ $\quad\int_1^3 \left(e^xln(x)+\frac{e^x}{x}\right)dx$ $\quad\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} tan^2(x)dx$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} tan(x)dx$ $\quad\int_0^{\pi} cos(2x)dx$ $\quad\int_0^{\pi} sin(2x)dx$ $\quad\int_0^{\pi} cos^2(x)dx$ $\quad\int_0^{\pi} sin^2(x)dx$ $\quad\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(tan^3(x)+tan(x)\right)dx$

Exercice 2 : Intégration par parties

En utilisant une intégration par parties calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^1 xe^{3x}dx$ $\quad\int_0^{\pi} xsin(x)dx$ $\quad\int_1^e ln(x)dx$ $\quad\int_1^e xln(x)dx$ $\quad\int_0^1 xe^{-x}dx$ $\quad\int_0^1 x\times 3^xdx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos(2x)dx$ $\quad\int_{-1}^0 (x+1)ln(x+2)dx$ $\quad\int_{-1}^0 (x+3)e^{-4x}dx$ $\quad\int_1^2 (2x+3)ln(x)dx$ $\quad\int_0^2 x\sqrt{3-x}dx$ $\quad\int_1^e \frac{ln(x)}{x^2}dx$

$\int_1^e x^3ln(x)dx$ $\quad\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin^3(x)}{cos^2(x)}dx$ $\quad\int_0^{ln(2)} \frac{e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}dx$ $\quad\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ $\quad\int_0^1 x^2e^{-x}dx$

Exercice 3 : Intégration par changement de variable

En utilisant une intégration par changement de variable calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_e^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+ln(x)}}dx \quad /\left(t=ln(x)\right)$

$I_2 = \int_0^{ln(3)} \frac{e^{3x}-3e^{2x}+2e^x}{1+e^{2x}}dx \quad /\left(t=e^x\right)$

$I_3 = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+ln(x)}}dx \quad /\left(t=ln(x)\right)$

$I_4 = \int_1^3 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx \quad /\left(t=\sqrt{x}\right)$

$I_5 = \int_1^2 \frac{ln(x)}{\sqrt{x}}dx \quad /\left(t=\sqrt{x}\right)$

$I_6 = \int_0^2 \frac{x^2}{x^3+8}dx \quad /\left(t=x^3+8\right)$

$I_7 = \int_1^2 \frac{dx}{x\left(x^3+1\right)}dx \quad /\left(t=x^3\right)$

$I_8 = \int_0^{-ln(3)} \frac{1}{e^x\left(1+e^{2x}\right)}dx \quad /\left(t=e^{-x}\right)$

$I_9 = \int_0^{ln(3)} \sqrt{e^x-1}dx$

$I_{10} = \int_0^{ln(2)} \frac{e^x}{1+e^{-\frac{x}{2}}}dx \quad /\left(t=\sqrt{e^x}\right)$

$I_{11} = \int_2^3 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}dx \quad /\left(t=\sqrt{x-1}\right)$

$I_{12} = \int_0^{\pi} \sqrt{1+sin(x)}dx \quad /\left(t=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

$I_{13} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad /\left(x = sin(t)\right)$

$I_{14} = \int_{4}^{5} \sqrt{x^2 - 12x + 36}\,dx \qquad /\left(t = x-4\right)$

$I_{15} = \int_{1}^{e} \frac{ln(x)}{x + x\left(ln(x)\right)^2}\,dx \qquad /\left(t = ln(x)\right)$

$I_{16} = \int_{-1}^{0} x\sqrt[4]{1+x}\,dx \qquad /\left(u^4 = 1+x\right)$

$I_{17} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^3(x)}{sin^4(x)}\,dx \qquad /\left(t = sin(x)\right)$

$I_{18} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{sin(2x)}\,dx \qquad /\left(t = tan(x)\right)$

$I_{19} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin^3(x)}{1+cos^3(x)}\,dx \qquad /\left(t = cos(x)\right)$

Exercice 4 : Linéarité – relation de Chasles-valeur moyen

1) a) Vérifier que $\frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

b) Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2}\,dx$

c) Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}\,dx$

d) En déduire la valeur moyen μ **de la fonction** $x \mapsto \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}$ **sur l'intervalle** $[0;1]$

2) Calculer $\int_0^2 |x-1|\,dx$

3) On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin(x)}{cos(x)+sin(x)}\,dx$ **et** $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos(x)}{cos(x)+sin(x)}\,dx$

a) Calculer $I+J$ **et** $I-J$

b) En déduire la valeur de I **et de** J

4) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\left|\int_{2x-1}^{x^2} t\sqrt{3+cos(t)}\,dt\right| \leq x^4 + (2x-1)^2$

Exercice 5 : Intégral et ordre

1) a) Montrer que $\left(\forall x \in \left[1;\frac{\pi}{2}\right]\right)$ $0 \leq sin(x) \leq x$

b) En déduire que $0 \leq \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(t)}{t}\,dt \leq \frac{\pi}{2} - 1$

2) a) Soit $t \geq 0$ **vérifier que** $\frac{1}{1+t} \leq 1$

b) En déduire que $(\forall x \geq 0)$ $ln(1+x) \leq x$

c) En déduire que $(\forall x \geq 1)$ $ln(x) \leq x-1$

d) En déduire que $(\forall x \geq 0)$ $x+1 \leq e^x$

Exercice 6 : Calcul d'aires et volumes

1) Soit f **la fonction définie sur** $[-2;0]$ **par :** $\begin{cases} f(x) = -2x-2 & si \quad x \in [-2;-1] \\ f(x) = (x+1)^2 & si \quad x \in]-1;0] \end{cases}$

a) Montrer que f **est continue sur** $[-2;0]$

b) Calculer en cm^2 **, l'aire de la partie du plan délimitée par** (C_f) **et l'axe des abscisses et les droites d'équations** $x=0$ **et** $x=-2$

2) On pose $f(x) = 1+x^2$ **et** $g(x) = sin^2(x)$

Calculer en cm^2 **, l'aire de la partie du plan délimitée par** (C_f)**,** (C_g) **et les droites d'équations** $x=0$ **et** $x = \frac{\pi}{2}$

3) On pose $f(x)=e^{2x}$

a) Calculer, en cm^3 le volume du solide de révolution engendré par la rotation de $(\mathcal{C}_f)$ autour de l'axe des abscisses sur $[0;1]$

b) Calculer, en cm^3 le volume du solide de révolution engendré par la rotation de $(\mathcal{C}_f)$ autour de l'axe des ordonnées sur $[0;1]$

Exercice 7 : Limite d'une suite convergente vers un intégral-Sommes de Riemann

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ dans les cas suivants :

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\quad ;\quad U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\quad ;\quad U_n=n\times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+k^2}\quad ;\quad U_n=n\times\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+3k^2}\quad ;\quad U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$$

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}\quad ;\quad U_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\times\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\quad ;\quad U_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 8 : Suite définie par un intégral

Considérons la suite (I_n) définie par $I_0=\int_1^e x\,dx$ et $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ I_n=\int_1^e x(\ln(x))^n\,dx$

1) Calculer I_0 et I_1

2) a) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ I_n\geq 0$

b) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ 2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$

3) Montrer que (I_n) est une suite décroissante puis déduire qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \dfrac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\dfrac{e^2}{n+2}$ (utiliser 2) b))

b) Déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice 9 : Fonctions définies par un intégral : $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ et $H(x)=\int_a^{u(x)} f(t)dt$

Partie 1 : Soit F la fonction définie par $F(x)=\int_2^x \frac{e^t}{t}dt$

1) Calculer $F(2)$

2) Montrer que F est continue sur $]0;+\infty[$

3) Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer sa dérivée.

4) Calculer $F'(1)$, $F'(2)$ et $F'(3)$

Partie 2 : Soit H la fonction définie par $H(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt$

1) Calculer $H(1)$

2) Montrer que H est continue sur $[1;+\infty[$

3) Montrer que H est dérivable sur $[1;+\infty[$ et calculer sa dérivée.

4) Calculer $H'(1)$ et $H'(2)$

5) Etudier les variations de H sur $[1;+\infty[$

Partie 3 : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt\quad ;\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin(t)}dt\quad ;\quad \lim_{x\to+\infty}\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx\quad ;\quad \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+x}\frac{\ln(1+t)}{t}dt$$

Exercice 10 : Equations différentielles

Partie 1 :

1) **Résoudre les équations différentielles suivantes :** $y''+4y-7=0$; $y'=-9y+2$; $3y'+5y=8$

2) **Déterminer la solution** f **de l'équation** $y'-6y=3$ **tel que** $f\left(\frac{1}{6}\right)=0$

Partie 2 :

1) **Résoudre les équations différentielles suivantes :**

$(E_1):\ y''+y'-2y=0$; $(E_2):\ 4y''-4y'+y=0$; $(E_3):\ y''=-2y+3$

2) **Déterminer la solution** y **de** (E_1) **tels que** $y(0)=1$ **et** $y'(0)=1$

3) **Soit** (E) **l'équation différentielle** $4y''+5y'+y=2e^{-2x}(7x-11)$

a) **Vérifier que la fonction** $u: x\mapsto 2xe^{-2x}$ **est une solution particulière de** (E)

b) **Soit** f **une solution de** (E). **On pose** $f=g+u$

Montrer que g **est une solution l'équation différentielle** $(F):\ 4y''+5y'+y=0$

c) **Trouver toutes les solutions de** (F) **puis résoudre l'équation** (E)

Exercice 11 : Suite définie par un intégral

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, **on considère l'intégrale** $U_n=\int_1^e \frac{1}{x\left(1+(\ln(x))^n\right)}dx$

1) **Calculer** U_1

2) a) **Montrer que** $(\forall t\geq 0)\ \ 1-t^n\leq \frac{1}{1+t^n}\leq 1$

b) **En déduire que** $1-\frac{1}{n+1}\leq U_n\leq 1$

c) **En déduire** $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3) **Montrer que** $U_n=\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}dt$

4) **On considère la suite** $(V_n)_{n\geq 1}$ **définie par** $V_n=\int_0^1 \frac{nt^n}{1+t^n}dt$

a) **En utilisant une intégration par parties montrer que** $V_n=\ln(2)-\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$

b) **Montrer que** $0\leq \int_0^1 \ln(1+t^n)dt\leq \frac{1}{n+1}$ **(Rappel** $(\forall t\geq 0)\ \ 0\leq \ln(1+t)\leq t$ **)**

c) **En déduire** $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

d) **Vérifier que** $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ V_n+nU_n=n$ **puis déduire que** $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-U_n)=\ln(2)$

Exercice 12 : Suite définie par un intégral

Soit $n\in\mathbb{N}$, **on considère l'intégrale** $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\cos(x))^n}$

1) **Soit g la fonction définie sur** $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ **par** $g(x)=\ln\left(\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$

a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et que $g'(x)=\dfrac{1}{cos(x)}$

b) Calculer I_1

2) Calculer I_2

3) On pose $K_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(sin(x))^2}{(cos(x))^n}dx$, vérifier que $(\forall n\geq 2)\ \ I_{n-2}=I_n-K_n$

4) a) Vérifier que $(\forall n\geq 2)\ \ \dfrac{1}{(cos(x))^n}=\dfrac{1}{(cos(x))^{n-2}}\times(tan(x))'$

b) En déduire que $(\forall n\geq 2)\ \ (n-1)I_n=(n-2)I_{n-2}+\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}$

5) Calculer I_3, I_4 et K_5

Exercice 13 : Fonction définie par un intégral

On considère la fonction F définie sur $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^{ln(x)}\frac{e^t}{(1+t)^2}dt$

1) a) Montrer que $\left(\forall x\in\left]\frac{1}{e};1\right[\right)\ \ F(x)\leq x\left(1-\dfrac{1}{1+ln(x)}\right)$

b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+}F(x)$

2) a) Montrer que $\left(\forall x\in\left]\frac{1}{e};+\infty\right[\right)\ \ F(x)=\dfrac{x}{(1+ln(x))^2}-1+2\displaystyle\int_0^{ln(x)}\frac{e^t}{(1+t)^3}dt$

b) En déduire que $(\forall x\in[1;+\infty[)\ \ F(x)\geq\dfrac{x}{(1+ln(x))^2}-1$

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$

3) a) Calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$

b) Montrer que F est une bijection de $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$ vers $\mathbb{R}$

Exercice 14 : Fonction définie par un intégral

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^{x\sqrt{3}}f(t)dt$ tel que $f(t)=\dfrac{2}{\sqrt{4t^2+1}}$

1) a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Montrer que F est une fonction impaire.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$

a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0}f(x)dx$

3) En utilisant une intégration par parties calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{2}{\sqrt{4x^2+8x+5}}dx$ (poser $u=x+1$)

4) En utilisant une intégration par parties calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0}g(x)dx$

Exercice 15 : Fonction définie par un intégral

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=e^{-x}\int_{x}^{x+1}\frac{e^t}{t}dt$

1) a) Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad g(x)=\int_0^1\frac{e^t}{t+x}dt$

b) En déduire que g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

2) a) Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad g(x)\geq\int_0^1\frac{dt}{t+x}$ **et déduire** $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$

b) Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad \frac{e-1}{x+1}\leq g(x)\leq\frac{e-1}{x}$ **et déduire** $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

3) Montrer que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$

Exercice 16 : Intégral des fonctions trigonométrique et décomposition en éléments simple

Rappel : Si $t=tan(\frac{x}{2})$ **alors** $cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$; $tan(x)=\frac{2t}{1-t^2}$

En utilisant des intégrations par changement de variable calculer les intégrales suivantes :

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{cos(x)}$ $\quad/\left(t=tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{sin(x)}{cos^2(x)}dx$ $\quad/\left(t=tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$I_3=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{4x^2-4x+2}dx$ $\quad/\left(t=2x-1\right)$

$I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{t^2+1}dt$ $\quad/\left(t=tan(x)\right)$

$I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2tan(x)}{1+sin^2(x)}dx$ $\quad/\left(t=tan(x)\right)$

$I_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{sin(x)}}{\sqrt{cos(x)}+\sqrt{sin(x)}}dx$ $\quad/\left(t=\frac{\pi}{2}-x\right)$

$I_7=\int_0^{1}\frac{t\times Arctan(t)}{\left(1+t^2\right)^2}dt$ $\quad/\left(t=tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$I_8=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{cos^3(x)}{1-2sin(x)}dx$ $\quad/\left(u=sin(x)\right)$

$I_9=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin(x)}{1+sin(x)}dx$ $\quad/\left(t=tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$I_{10}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{sin^4(x)}$ $\quad/\left(t=tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

Exercice 17 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. **On considère la fonction** f_n **définie sur** $[0;+\infty[$ **par :** $f_n(x)=2x-2+\frac{ln(x^2+1)}{n}$ **et soit** $(\mathcal{C}_n)$ **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$ **tel que** $\|\vec{i}\|=2cm$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_n(x)-2x\right)$ **et interpréter le résultat graphiquement**

2) Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par un point fixe à déterminer.

3) a) Calculer $f_n'(x)$ **pour tout** $x\in[0;+\infty[$ **et dresser le tableau de variations de** f_n **.**

b) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ **admet une solution unique** α_n **dans** $[0;+\infty[$

c) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 0<\alpha_n<1$

4) a) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad f_n(\alpha_{n+1})>0$

b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq1}$ **est strictement croissante et déduire qu'elle est convergente.**

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ (1-\alpha_n)ln(\alpha_n^2+1) \leq A_n \leq (1-\alpha_n)ln(2)$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

b) En utilisant une intégration par parties montrer que $A_n = ln(2) - 2 + 2\alpha_n\left(n(\alpha_n - 1) + 1\right) + \dfrac{\pi}{2} - 2Arctan(\alpha_n)$

c) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\alpha_n - 1)$

6) a) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_1)$ et la droite (Δ) d'équation $y = 2x$

b) Tracer $(\mathcal{C}_1)$ et la tangente (T) à $(\mathcal{C}_1)$ au point $B(0;-2)$

Exercice 18 : Extrait du bac 1

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$

1) *Montrer que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$*

2) a) *Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $\quad F(x) \geq x \quad$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$*

b) *Montrer que F est impaire puis en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$*

c) *Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$*

d) *Montrer que la fonction réciproque G de la fonction F est dérivable en 0 puis calculer $G'(0)$*

Exercice 19 : Extrait du bac 2

On considère la fonction g définie sur $[0;=\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}; & x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

1) *Montrer que g est continue sur $[0;+\infty[$*

2) *Pour tout $x \in [0;+\infty[$ on pose $L(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$*

a) *Montrer que L est continue sur $[0;+\infty[$*

b) *Calculer $L(x)$ pour tout $x > 0$*

c) *Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} L(x)$; en déduire la valeur de $L(0)$*

3) *pour tout entier naturel supérieur ou égale à 1 on pose : $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$*

Montrer que la suite $(S_n)_{x\geq1}$ est convergente puis calculer sa limite

Exercice 20 : Extrait du bac 3

Première partie : *on considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :*

$$(\forall x \in]0,+\infty[) \qquad f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \quad \textit{et} \qquad f(0) = 0$$

et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (On prend $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 2cm$)

1) a) *Montrer que f est continue à droite en 0*

b) *Montrer que f est dérivable à droite on 0*

c) *Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$; puis calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$*

2) a) *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement ce résultat*

b) *dresser le tableau de variation de f*

3) a) *Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion I que l'on déterminera*

b) *Tracer la courbe (C_f) . On prend :($f(1) \simeq 0,7$ et $4e^{-3} \simeq 0,2$)*

Deuxième partie : *On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$*

1) *Montrer que F est continue sur $[0;+\infty[$*

2) a) *En utilisant la méthode de l'intégration par partie , montrer que :*

$$(\forall x \in]\,0;+\infty\,[) \quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t$$

b) *Calculer* $\displaystyle\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t$ *; pour tout $x \in]0;+\infty[$*

c) *Montrer que :* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = e^{-t}$

3) *Calculer en (cm^2) l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) et les droites d'équations $x=0$, $x=2$ et $y=0$*

4) *On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :* $\quad u_n = F(n) - F(n+2)$

a) *En utilisant le théorème des accroissements finis , montrer que pour tout entier naturel n , il existe un nombre réel v_n dans l'intervalle $]n;n+1[$ tel que :*

$$u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$$

b) *Montrer que* $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$

c) *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Troisième partie

1) a) *Montrer que pour tout entier naturel non nul n , il existe un nombre réel unique a_n strictement positif tel que :* $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$

b) *Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante*

c) *Montrer que* $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \dfrac{-1}{a_n} + \ln\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right) = \dfrac{-1}{n}$

2) a) *Montrer que* $(\forall t \in [0;+\infty[) \quad 1-t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$

b) *Montrer que* $(\forall x \in [0;+\infty[) \quad \dfrac{-x^2}{2} \leq -x+\ln(1+x) \leq \dfrac{-x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

3) *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4*

a) *Montrer que $a_4 \geq 1$ puis en déduire que $a_n \geq 1$;* *(On admet que $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$)*

b) *Montrer que :* $1 - \dfrac{2}{3a_n} \leq \dfrac{2a_n^2}{n} \leq 1$ *; (Vous pouvez utiliser les questions 1)c) et 2)b) de la troisième partie)*

c) *Montrer que :* $\sqrt{\dfrac{n}{6}} \leq a_n$ *(vous pouvez utiliser les questions 3)a) et 3)b)) ; puis en déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

d) *Déterminer :* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\dfrac{2}{n}}$

DL4

2BACSM
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1

1) **On pose** $I=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ **et** $J=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{x^3}dx$

a) **En utilisant une intégration par parties montrer que** $J=\frac{2-3\sqrt{3}}{8}+\frac{3}{2}I$

b) **En posant le changement de variable** $x=\frac{1}{cos(t)}$ **tel que** $t\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$ **calculer** I

c) **En déduire la valeur de** J

2) **Soit** $\lambda\in]0;1[$, **on pose** $I_\lambda=\int_0^\lambda\frac{2}{1-x^4}dx$

a) **Vérifier que** $(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\})\quad \frac{2}{1-x^4}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right]$

b) **Calculer en fonction de** λ **l'intégral** I_λ **puis déduire** $\lim\limits_{\lambda\to1^-}I_\lambda$

c) **Calculer en fonction de** λ **l'intégral** $\int_\lambda^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$

d) **En utilisant une intégration par parties calculer** $J_\lambda=\int_\lambda^1 xArctan\left(\frac{1}{x}\right)dx$ **puis déduire** $\lim\limits_{\lambda\to0^+}J_\lambda$

Exercice 2

Soit f **la fonction définie sur** $]1;+\infty[$ **par :** $f(x)=\int_1^{\frac{1}{ln(x)}}\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$

1) **Montrer que** f **est dérivable sur** $]1;+\infty[$ **et calculer** $f'(x)$ **pour tout** $x\in]1;+\infty[$

2) **Calculer** $f(e)$ **et déduire le signe de** $f(x)$ **sur** $]1;+\infty[$

3) a) **Montrer que** $(\forall x\in]1;+\infty[)\quad f(x)=\int_x^e\frac{1}{t^2ln(t)}dt$

b) **Montrer que** $(\forall t\in]1;+\infty[)\quad ln(t)<t-1$

c) **Soit** $x\in]1;e]$ **montrer que** $f(x)\geq\int_x^e\frac{1}{e^2(t-1)}dt$

d) **Calculer** $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

Correction

4) a) **Vérifier que** $(\forall t\in[e;+\infty[)\quad \frac{1}{t^2ln(t)}\leq\frac{1}{t^2}$

b) **En déduire que** f **admet une limite finie** l **en** $+\infty$ **et que** $-\frac{1}{e}\leq l\leq0$

5) a) **Dresser le tableau de variations de** f

b) **Tracer** $(\mathcal{C}_f)$ **dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 3

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^3}{(n^2+k^2)^2}$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2\sqrt[3]{n^3+k^3}}$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$**, on considère l'intégrale** $I_n = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$

1) **Calculer en fonction de** t **les intégrales :** $\int_0^t \frac{x}{1+x}dx$ **et** $\int_0^t \frac{-x^2}{1+x}dx$

2) **En déduire que** $(\forall t \geq 0)\ \ t-\frac{t^2}{2} \leq ln(1+t) \leq t$

3) **En déduire que** $(\forall x \in [0;n])\quad e^{-x}e^{\frac{-x^2}{2n}} \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \leq e^{-x}$

4) **Montrer que** $I_n \leq 1-e^{-n}$

5) a) **Montrer que** $(\forall t \geq 0)\ \ e^{-t} \geq 1-t$

   b) **En déduire que** $(\forall x \in [0;n])\quad e^{-x}e^{\frac{-x^2}{2n}} \geq e^{-x}-\frac{x^2}{2n}e^{-x}$

6) **En utilisant une intégration par parties calculer en fonction de** n **l'intégral** $J_n = \int_0^n x^2e^{-x}dx$

7) **En déduire que** $I_n \geq 1-\frac{1}{n}+e^{-n}\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{2}\right)$ **puis calculer** $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$**. On considère la fonction** f_n **définie sur** $]0;+\infty[$ **par :** $f_n(x) = \frac{1+nln(x)}{x^2}$ **et soit** $(\mathcal{C}_n)$ **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$ **tel que** $\|\vec{i}\| = 5cm$

1) **Montrer que** $(\forall x \in]0;+\infty[)\quad f_n'(x) = \frac{n-2-2nln(x)}{x^3}$

2) **Résoudre l'équation** $f_n'(x) = 0$ **et déduire le signe de** $f_n'(x)$

3) **Calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x)$

4) **Dresser le tableau de variations de** f_n **et calculer la valeur maximale de** f_n **en fonction de** n

5) **Tracer** $(\mathcal{C}_1)$ **et** $(\mathcal{C}_2)$ **dans le même repère** $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) **En utilisant une intégration par parties calculer l'intégral :** $I = \int_1^e \frac{ln(x)}{x^2}dx$

7) **Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par** $(\mathcal{C}_n)$, $(\mathcal{C}_{n+1})$ **et les droites d'équations** $x=1$ **et** $x=e$

8) **On note** A_n **l'aire de la partie du plan délimitée par** $(\mathcal{C}_n)$ **et l'axe des abscisses et les droites d'équations** $x=1$ **et** $x=e$

   a) **Calculer** A_2 **et étudier la monotonie de la suite** $(A_n)_{n\geq2}$

   b) **Déterminer** A_n **en fonction de** n **et déduire** $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

9) **Dans la suite on suppose que** $n \geq 3$

   a) **Vérifier que** $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$ **et** $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$

   b) **Montrer que l'équation** $f_n(x) = 1$ **n'admet pas de solution dans** $\left]1;e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$

   c) **Montrer que l'équation** $f_n(x) = 1$ **admet une solution unique** α_n **dans** $\left]e^{\frac{n-2}{2n}};+\infty\right[$

   d) **Calculer** $f_n(\sqrt{n})$ **et montrer que** $(\forall n \in]e^2;+\infty[)\quad f_n(\sqrt{n}) > 1$

   e) **En déduire que** $(\forall n \geq 8)\quad \alpha_n > \sqrt{n}$ **et déterminer** $lim\,\alpha_n$

Exercice 6

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_{2x}^{3x} \frac{1-e^t}{t^2}\,dt \;\; ; \; x>0 \\ F(0) = -ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$

1) a) En utilisant une intégration par parties montrer que $(\forall x>0)\;\; F(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{3x} - \dfrac{e^{2x}-1}{2x} - \displaystyle\int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t}\,dt$

b) Montrer que $(\forall x>0)\;\; e^{2x} ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \le \displaystyle\int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t}\,dt \le e^{3x} ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

c) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t}\,dt$ **et déduire que F est continue à droite en 0.**

2) a) Vérifier que $2e^{3x} - 3e^{2x} + 1 = \left(e^x - 1\right)^2 \left(2e^x + 1\right)$

b) Montrer que $(\forall x>0)(\exists c_x \in [2x;3x])\;\; \dfrac{e^{c_x}-1}{c_x} = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2x}^{3x} \frac{e^t-1}{t}\,dt$

c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x} = -\frac{1}{2}$

3) a) Montrer que $(\forall x>0)\;\; F(x) \le \dfrac{1-e^{2x}}{6x}$

b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ **et** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$

4) Montrer que $(\forall x \ge 0)\;\; 3e^{2x} - 2e^{3x} \le 1$

5) a) Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ **et que** $(\forall x>0)\;\; F'(x) = \dfrac{3e^{2x}-2e^{3x}-1}{6x^2}$

b) Dresser le tableau de variations de F

c) Tracer $(\mathcal{C}_F)$ **dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$ **tel que** $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

Exercice 7

Correction

Soit l'équation différentielle $(E):\;\; y' - y = \dfrac{e^x}{x^2}$. **On se propose de résoudre** (E) **sur** $]0;+\infty[$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0):\;\; y' - y = 0$

2) Montrer que $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ **est une solution de** (E)

3) a) Montrer que $(g-f)$ **est solution de** (E_0) **sur** $]0;+\infty[$ **si et seulement si** g **est solution de** (E)

b) Déduire les solutions de (E) **sur** $]0;+\infty[$

4) La vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre des bactéries en présence. On note $N(t)$ **le nombre de bactéries (en million) d'individu et** $N'(t)$ **la vitesse d'accroissement.**

On suppose que $N(t)$ **vérifies** (E) **et on pose** $N(0) = N_0$

En combien de temps (t en seconde) le nombre de bactérie sera le double ?

Exercice 8

Soit $f:[0;1] \to \mathbb{R}$ **une fonction continue sur** $[0;1]$ **et dérivable sur** $]0;1[$ **telle que** $f(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$

En utilisant le théorème de la moyenne et le théorème de Rolle, montrer :

Qu'il existe $c \in]0;1[$ **tel que** $f'(c) = 0$

5

Les nombres complexes

Les Nombres complexes

Définitions et Notations

L'ensemble des nombres complexes est : $\mathbb{C} = \{z = a + ib/(a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe **avec**$(a;b) \in \mathbb{R}^2$

- **La forme algébrique** du nombre complexe z est **:** $a + ib$**.**
- **La partie réelle** du nombre complexe z est : $\mathrm{Re}(z) = a$**.**
- **La partie imaginaire** du nombre complexe z est : $\mathrm{Im}(z) = b$**.**
- Le nombre complexe z est **imaginaire pur** si $\mathrm{Re}(z) = 0$**.**
- **Égalité** de deux nombres complexes : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$
- **Le conjugué** du nombre complexe z est : $\bar{z} = a - ib$
- **Le module** du nombre complexe z est : $\lvert z\rvert = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **L'image** du nombre complexe $z = a + ib$ est le point $M(a, b)$, noté $M(z)$
- **L'affixe du point** $M(a, b)$ est le nombre complexe $z_M = a + ib$. - **L'affixe du vecteur** $\vec{u}(a, b)$ est le nombre complexe $z_{\vec{u}} = a + ib$. - **L'affixe du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- **L'argument** de z non nul est une mesure θ de l'angle orienté $\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$ noté $\arg z$. avec $\cos\theta = \dfrac{Re(z)}{\lvert z\rvert}$ $\sin\theta = \dfrac{Im(z)}{\lvert z\rvert}$
- **La forme trigonométrique** du nombre complexe non nul z est : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$ avec $r = \lvert z\rvert$ et $\arg z \equiv \theta[2\pi]$
- **La forme exponentielle** du nombre complexe non nul z est : $z = re^{i\theta}$ avec $r = \lvert z\rvert$ et $\arg z \equiv \theta[2\pi]$

Propriétés

	Conjugué	*Module*	*Argument*
Opposé	$\overline{-z} = -\bar{z}$	$\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$	$\arg(-z) \equiv (\pi + \arg z)[2\pi]$
Conjugué	$\bar{\bar{z}} = z$	$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$	$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z[2\pi]$
Produit	$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$	$\lvert z \times z'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'[2\pi]$
Puissance	$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$\arg(z^n) \equiv n \arg z[2\pi]$
Inverse	$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$	$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z[2\pi]$
Quotient	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$	$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'[2\pi]$
Somme	$\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$	$\lvert z + z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$	$-$

	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
Conjugué	$\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$	$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
Opposé	$-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$	$-re^{i\theta} = re^{\pi + i\theta}$
Produit	$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$	$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
Formule Moivre	$[r, \theta]^n = [r^n; n\theta]$	$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{i(n\theta)}$
Inverse	$\frac{1}{[r; \theta]} = \left[\frac{1}{r}; -\theta\right]$	$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
Quotient	$\frac{[r; \theta]}{[r'; \theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$	$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
Formules d'Euler	$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$	
Somme	$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$	
Différence	$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b+\pi}{2}}$	

$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ $z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$ $\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$	$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z = k\pi / k \in \mathbb{Z}$ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$

Equation du deuxième degré

L'équation	le discriminant	Ensemble de solution
$z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$	$\Delta > 0$	$\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta = 0$	$S = \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta < 0$	$S = \left\{\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$
Formules de viète	$z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a} \quad z_1.z_2 = \dfrac{c}{a}$	

Nombres complexes et géométrie

Formule complexe	Inérprétation géomètrique
$\lvert z_B - z_A \rvert$	la distance AB
$\lvert z - z_A \rvert = r \quad (r > 0)$	M appartient au cercle de centre A et de rayon r
$\lvert z - z_A \rvert = \lvert z - z_B \rvert$	M appartient à la médiatrice de $[AB]$
$z_I = \dfrac{z_A + z_B}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}_A$	I milieu $de[AB]$
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$	A, B et C trois points **alignés**
$\dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D} . \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$	A, B, C et D sont **cocycliques**
$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$	mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

La Condition	Nature du triangle ABC
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$	ABC est un triangle rectangle en **A**
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$	ABC est un triangle isocèle en **A**
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$	**ABC** est un triangle isocèle et rectangle en **A**
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\dfrac{\pi}{3}\right]$	**ABC** est un triangle équilatéral

Transformations usuelles

La Transformation	Ecriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$	$z' = z + z_{\vec{u}}$
Homothétie de centre $\Omega(w)$ et de rapport k	$z' - w = k(z - w)$
Rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle θ	$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$

Reconnaitre une translation, une homothétie ou une rotation à partir de leurs expressions complexes		
$z \mapsto az+b$	$a=1$	F est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}(b)$
	$a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$	F est une homothétie $H\left(\Omega(\frac{b}{1-a}), k=a\right)$
$a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$	$\lvert a\rvert = 1$ et $a \neq 1$	F est une rotation : $R\left(\Omega(\frac{b}{1-a}), \theta \equiv arg(a)[2\pi]\right)$
	$\lvert a\rvert = 1$ et $a \notin \mathbb{R}$	$F = R \circ H = H \circ R$ avec $R\left(\Omega(\frac{b}{1-a}), \theta \equiv arg(a)[2\pi]\right)$ et $H\left(\Omega(\frac{b}{1-a}), k=\lvert a\rvert\right)$

Racines n'ème d'un nombre complexe

Le nbr complx	Condition		La racine carré
$z=a+ib$	$b=0$	$a>0$	$\sqrt{a}$ ou $-\sqrt{a}$
		$a<0$	$i\sqrt{a}$ ou $-i\sqrt{a}$
$a,b \in \mathbb{R}$	$a=0$	$b>0$	$\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$ ou $-\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$
		$b<0$	$\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)$ ou $-\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)$
	$b \neq 0$	$a \neq 0$	$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \text{ signe }(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$

Exemple : Les racines carrées de $Z=-3+4i$, on pose $z=x+iy$ on a donc $z^2=x^2-y^2+2ixy$, $|z^2|=x^2+y^2$ et $|Z|=5$.

donc $z^2=Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2=Z \\ |z|^2=|Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ 2xy=4 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

En fin $z=1+2i$ et $z=1-2i$ sont les deux racines carrés de $Z=-3+4i$

- On appel **racine n'iéme** ou **racine d'ordre** n d'un nombre complexe Z tout nombre complexe z tele que $z^n=Z$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

- Les racines n'iémes de $Z=[r,\theta]$ sont $z_k=[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}]$ (avec $k \in [\![0, n-1]\!]$)

- La somme des racines n'ièmes d'un nombre complexe est nulle $\Sigma_{i=0}^{i=n-1} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} = 0$.

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 2BSMF	Série 5 Les nombres complexes	Lycée qualifiant : Almajd Matière : mathématique

Exercice 1 : Conjugué, norme, argument, forme algébrique, trigonométrique et exponentielle

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

z	$\overline{z}$	$\lvert z\rvert$	$arg(z)$	**Forme trigonométrique**	**Forme exponentielle**
$z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$					
$z_2=-1-i$					
$z_3=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$					
$z_4=(1+i)^{2026}$					
$z_5=(1+i)e^{i\frac{3\pi}{5}}$					
$z_6=-7e^{i\frac{\pi}{6}}$					

2) a) Ecrire z_3 sous la forme algébrique.

b) En déduire la valeur de $cos(\frac{\pi}{12})$ et de $sin(\frac{\pi}{12})$

3) On pose $z_7=\frac{2+3i}{3+2i}$ et $z_8=\frac{2-3i}{3-2i}$. Montrer que z_7+z_8 est un réel et que z_7-z_8 est un imaginaire pur.

Exercice 2 : Points alignés-affixe d'un vecteur

On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectifs $a=-3i$; $b=1-i$; $c=2+i$

Montrer que les points *A*, *B* et *C* sont alignés.

Exercice 3 : Distance entre deux points-mesure d'un angle orienté-orthogonalité de deux droites

On considère les points $A(2+3i)$; $B(-1)$; $C(1+7i)$ **et** $D(2+6i)$. **Montrer que** $(AB)\perp(CD)$

Exercice 4 : Parallélisme de deux droites

On considère les points $A(1+4i)$; $B(i)$; $C(1+i)$ **et** $D(-2-8i)$. **Montrer que** $(AB)\parallel(CD)$

Exercice 5 : Parallélogramme-milieu d'un segment

On considère les points $A(1+2i)$; $B(-1+5i)$; $C(2+i)$ **et** $D(4-2i)$

1) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

2) Déterminer l'affixe du point *H* le centre de $ABCD$

Exercice 6 : Carré-rectangle-losange

On considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectifs $a=\sqrt{3}$; $b=2+i\sqrt{3}$; $c=2-\sqrt{3}+2i$ **et** $d=(2-\sqrt{3})i$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

Exercice 7 : Triangles remarquables

On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectifs $a=9+i$; $b=9-i$; $c=11-i$

Montrer que *ABC* est un triangle rectangle et isocèle en *B*.

Exercice 8 : Cocyclicité de quatre points

On considère les points : $A\left(1+i\sqrt{3}\right)$; $B\left(-1-i\sqrt{3}\right)$; $C\left(2(-1+i\sqrt{3})\right)$ **et** $D\left(-1+i\sqrt{3}\right)$

Montrer que les points *A*, *B*, *C* et *D* sont cocycliques.

Exercice 9 : Barycentre-Centre de gravité

On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectifs $a=3+3i$; $b=5-2i$; $c=7+11i$

Déterminer l'affixe du point *G* le centre de gravité du triangle *ABC*.

Exercice 10 : Applications des formules d'Euler et de Moivre-Linéarisation

1) Linéariser $cos^3(x)$, $sin^3(x)$ **et** $sin(2x)\times cos^3(5x)$

2) A l'aide des formules d'Euler montrer que $cos(a)\times sin(b)=\frac{1}{2}\left[sin(a+b)-sin(a-b)\right]$

3) a) En utilisant les formules d'Euler, montrer que :

$$e^{i\theta}+e^{i\theta'}=2cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)} \quad ; \quad e^{i\theta}-e^{i\theta'}=2i\times sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}$$

b) En déduire la forme exponentielle des nombres suivants $z_9=e^{i\frac{5\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{6}}$ **et** $z_{10}=1-e^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 11 : Applications de l'inégalité triangulaire

En utilisant l'inégalité triangulaire montrer que $\left(\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4\right)$ $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\leq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

Exercice 12 : Translation

Soit A **le point d'affixe** $a=3+5i$ **et** $\vec{u}$ **le vecteur d'affixe** $d=4-2i$

Soit $t_{\vec{u}}$ **la translation de vecteur** $\vec{u}$

1) Donner l'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$

2) Déterminer l'affixe du point B **l'image de** A **par** $t_{\vec{u}}$

Exercice 13 : Homothétie

Soit h **l'homothétie de centre** $\Omega(-2+i)$ **et de rapport** $k=-\frac{1}{2}$

Soit $t_{\vec{u}}$ **la translation de vecteur** $\vec{u}$

1) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h

2) Déterminer l'affixe du point B **l'image du point** $N(-\frac{3}{2}-2i)$ **par l'homothétie** h

Exercice 14 : Rotation

On considère les points A, B **et** C **d'affixes respectifs** $a=4+4i$; $b=3+5i$; $c=3+4i$

Soit $M'(z')$ **l'image du point** $M(z)$ **par la rotation** r **de centre** C **et d'angle** $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que $z'=iz+7+i$

2) Vérifier que B **est l'image de** A **par la rotation** r .

3) En déduire la nature du triangle ABC .

Exercice 15 : Les racines nièmes d'un nombre complexe ($z^n = Z$)

1) Déterminer les racines cubiques de l'unité.

2) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $1-i$

3) Déterminer les racines cinquièmes du nombre complexe $1+i$

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ **. Déterminer les racines** $n^{ème}$ **du nombre** -1

Exercice 16 : Racines carrées d'un nombre complexe - Résolution des équations de 2ième degré

1) Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

-7 ; $-25i$; $9+40i$; $1+2i\sqrt{2}$; $1-i\sqrt{2}$; $1-4i\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ **les équations suivantes**

$(E_1): z^2-2(2+i)z+6+8i=0$; $(E_2): (1+i)z^2+(6+4i)z+9+8i=0$; $(E_3): (3+i)z^2-(8+6i)z+25+5i=0$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$(E_4): z^7-(i-1)z^2-i=0$; $(E_5): z^2-2z\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2(\theta)=0$; $(E_6): z^2-2z\cos(\theta)+1=0 \quad / \theta\in\left]0;\pi\right]$

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_7): z^2-(5-i\sqrt{3})z+6-3i\sqrt{3}=0$ sachant qu'elle admet une racine réelle.

Exercice 17 : Ensembles des points remarquables

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe dans les cas suivants :

$|z-3+2i|=5$; $\frac{z-2i}{z-3}\in\mathbb{R}$; $\frac{z-4+2i}{z+3i}\in i\mathbb{R}$; $|z+2-7i|=|z-4+i|$; $\frac{1-iz}{1+z}\in i\mathbb{R}$; $\frac{z-1}{iz}\in i\mathbb{R}$

Exercice 18 : Détermination de la nature d'une transformation $z'=az+b \quad (a;b\in\mathbb{C}/a\neq 0)$

Soit F une transformation Du plan définie par son écriture complexe.

Pour chacun des cas suivants déterminer la nature et les éléments caractéristiques de F :

$z'=z-1+zi$; $z'=\frac{3}{2}z+1-i$; $z'=\left(\sqrt{3}-i\right)z+1+i\sqrt{3}$; $z'=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-2i$; $z'=\left(2+2\sqrt{3}i\right)z-7-i$

Exercice 19 :

On considère le nombre complexe $\omega=e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $u=\omega+\omega^2+\omega^4$ et $v=\omega^3+\omega^5+\omega^6$

1) Montrer que u et v sont conjugués.

2) Montrer que $Im(u)>0$

3) Calculer $u+v$ et $u\times v$

4) En déduire la valeur de u et v

4) Déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$

Exercice 20 : Extrait du bac 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$

a) Vérifier que le nombre $a=1+i(2-\sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E)

b) En déduire b la deuxième solution de l'équation (E)

2) a) Montrer que $a^2=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) Ecrire a sous forme trigonométrique.

3) On considère les points A, B et C dont les affixes respectifs sont a, b et $c=2i+2e^{i\frac{\pi}{7}}$

Soit (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$.

a) Déterminer w, l'affixe du point Ω centre du cercle (Γ)

b) Montrer que les points O et C appartient au cercle (Γ)

c) Montrer que le nombre complexe $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

Exercice 21 : Extrait du bac 2

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-(5+i\sqrt{3})z+4+4i\sqrt{3}=0$

a) Vérifier que $a^2=\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$ est le discriminant de l'équation (E)

b) Déterminer a et b les deux solutions de l'équation (E) (sachant que $b\in\mathbb{R}$)

c) Vérifier que $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)a$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.

Soit ***A*** le point d'affixe a et ***B*** le point d'affixe b

a) Déterminer b_1, l'affixe du point B_1 image du point ***O*** par la rotation de centre ***A*** et d'angle $\frac{\pi}{2}$

b) Montrer que ***B*** est l'image de B_1 par l'homothétie de centre ***A*** et de rapport $\sqrt{3}$

c) Vérifier que $arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

d) Soit ***C*** un point d'affixe c, appartenant au cercle circonscrit au triangle ***OAB*** et différent de ***O*** et de ***A***

Déterminer un argument du nombre complexe $\dfrac{c}{c-a}$

Exercice 22 : Extrait du bac 3

Partie 1 :

Soit $m \in \mathbb{C}^*$. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

(E_m): $z^2 + \left[(1-i)m-4\right]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$

1) Vérifier que le nombre $z_1 = -m+2$ est une solution de l'équation (E_m)

2) Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m)

a) Vérifier que $z_1z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

b) Déterminer les deux valeurs de m pour lesquelles on a $z_1z_2 = 1$

Partie 2 : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$, on considère l'application S qui au point M, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z'-1 = -(z-1)$ et la rotation R de centre Ω d'affixe $1+i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

Soit z'' l'affixe du point $M'' = R(M)$

1) a) Montrer que l'application S est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1

b) Montrer que $z'' = iz + 2$

2) Soit ***A*** le point d'affixe 2. On suppose que le point ***M*** est distinct du point ***O*** origine du repère.

a) Calculer $\dfrac{z''-2}{z'-2}$, en déduire la nature du triangle $AM'M''$

b) Déterminer l'ensemble des points ***M*** pour lesquels les points A, Ω, M' et M'' sont cocycliques.

Exercice 23 : Extrait du bac 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

Partie 1 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$ ou a est un nombre réel complexe non nul.

1) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E)

2) a) Vérifier que $z_1z_2 = a(i-1)$

b) Montrer que z_1z_2 est un nombre réel $\Leftrightarrow arg(a) \equiv -\dfrac{3\pi}{8}[2\pi]$

Partie 2 : Soit c un nombre réel non nul et z un nombre complexe non nul.

On considère les points ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** et ***M*** d'affixes respectifs 1, $1+i$, c, ic et z

1) a) Montrer que : ***A***, ***D*** et ***M*** sont alignés $\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$ (on pourra remarquer que $c = \bar{c}$)

b) Montrer que $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0$

2) Soit h l'affixe du point ***H***, la projection orthogonale du point ***O*** sur (AD)

a) Montrer que $h - (1+i) = \dfrac{i}{c}(h-c)$

b) En déduire que $(CH)\perp(BH)$

Exercice 24 : Extrait du bac 5

Soit m un nombre complexe non réel $m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

Partie 1 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z définie par (E): $z^2-(1+i)(1+m)z+2im=0$

1) a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E)

2) On suppose dans cette question que $m=e^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$

a) Déterminer le module et un argument de z_1+z_2

b) Montrer que si $z_1\times z_2\in\mathbb{R}$ alors $z_1+z_2=2i$

Partie 2 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

On considère les points suivants :

A le point d'affixe $a=1+i$, ***B*** le point d'affixe $b=(1+i)m$, ***C*** le point d'affixe $c=1-i$, ***D*** l'image du point ***B*** par la rotation de centre ***O*** et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$

1) a) Montrer que l'affixe du point Ω est $w=\frac{(1-i)(1-m)}{2}$

b) Calculer $\frac{b-a}{w}$

c) En déduire que $(O\Omega)\perp(AB)$ et que $AB=2O\Omega$

2) La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point ***H*** d'affixe h

a) Montrer que $\frac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\frac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur.

b) En déduire h en fonction de m

Exercice 25 : Extrait du bac 6

Soit α un nombre complexe non nul.

Partie 1 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : (E_α): $z^2-i\alpha\sqrt{3}z-\alpha^2=0$

1) a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_α) est $\Delta=\alpha^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

2) Sachant que $\alpha=|\alpha|e^{i\lambda}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$, mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous la forme exponentielle.

Partie 2 : On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

On considère les points Ω, M_1 et M_2 d'affixes respectifs $\alpha, z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$, $z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit R la rotation de centre ***O*** et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) a) Montrer que $R(\Omega)=M_1$ et $R(M_1)=M_2$

b) En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$ et OM_1M_2 sont équilatéraux.

2) a) Vérifier que $z_1-z_2=\alpha$

b) Montrer que les droites (ΩM_2) et (OM_1) sont orthogonales.

c) En déduire que $O\Omega M_1M_2$ est un losange.

3) Montrer que pour tout réel θ , le nombre $Z=\frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha}\div\frac{z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{z_1-|\alpha|e^{i\theta}}$ est un réel.

DL5

2BACSM
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1

Soit m **un nombre complexe différent de** i **et de** $-i$

Partie 1 :

On considère dans $\mathbb{C}$ **l'équation d'inconnue** z **;** (E): $z^2-(1+i)(1+m)z+(1+m^2)i=0$

1) a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) **est** $\Delta=(1-i)^2(1-m)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ **l'équation** (E)

Partie 2 : On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

Soit r **la transformation qui au point** M**, d'affixe** z**, fait correspondre le point** M' **d'affixe** z' **tel que** $z'=iz+2$

1) Déterminer la nature de r **et ses éléments caractéristiques.**

2) On considère les points *A* et *B* d'affixes respectifs $z_1=m+i$ **et** $z_2=mi+1$

Montrer que $r(A)=B$

3) On suppose que $|m|=1$

a) Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$

b) Vérifier que $z_1^2=m\left[(m-\overline{m})+2i\right]$

c) En déduire que $arg(z_1)\equiv\dfrac{1}{2}arg(m)+\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

3) Montrer que $|z_1|+|z_2|\geq 2$

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

m **est un nombre complexe.**

Partie 1 :

On considère dans $\mathbb{C}$ **l'équation d'inconnue** z **:** (E): $z^2-\left(m+i(1-m)\right)z+m(1-im)=0$

1) a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) **est** $\Delta=\left((1+i)m+i\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ **l'équation** (E)

2) On pose $z_1=m+i$ **et** $z_2=-mi$

a) Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ **tel que les points** O, $M_1(z_1)$ **et** $M_2(z_2)$ **sont alignés.**

b) On pose $m=e^{i\theta}$ **avec** $0\leq\theta\leq\pi$

Ecrire z_1 **et** z_2 **sous la forme exponentielle.**

Correction

Partie 2 :

On pose $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

1) Montrer que $1+j+j^2=0$

2) On considère l'application r **qui au point** M**, d'affixe** z**, fait correspondre le point** M' **d'affixe** z' **tel que** $z'=e^{i\frac{5\pi}{3}}z-1$ **et l'application** h **qui au point** M**, d'affixe** z**, fait correspondre le point** M'' **d'affixe** z'' **tel que** $z''=2z-j$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r et de h.

b) Montrer que si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par $T = hor$ alors $z' - j = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - j)$

3) On considère les points $\Omega(j)$ et $A(j+i)$

a) Déterminer les affixes des points **B**, **C** et **D** tel que $B = T(A)$, $C = T(B)$ et $D = T(C)$

b) Montrer que $\Omega = bar\{(B;4);(C;-2);(D;1)\}$

Exercice 3

Soit $\theta \in [0;\pi[$

Correction

Partie 1 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z ; (E): $z^2 - 2e^{i\theta}z + 2isin(\theta)e^{i\theta} = 0$

1) a) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) tel que $Re(z_1) > 0$

b) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2) Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{i}{tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$; $n \geq 2$

Partie 2 : On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

Soit g la transformation qui au point M, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{1}{2}z_1 z + 1$

1) a) Déterminer θ pour que g soit une homothétie.

b) Déterminer θ pour que g soit une rotation.

On suppose dans la suite que $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

2) Déterminer la nature de g et ses éléments caractéristiques.

3) On pose $A_0 = O$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A_{n+1} = g(A_n)$

a) Déterminer les affixes des points A_1, A_2 et A_3

b) Placer les A_1, A_2 et A_3 dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$

4) Soit Ω le centre de g . On pose $V_n = \Omega A_n$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique et que $V_n = \sqrt{2} \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle et isocèle en A_{n+1}

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_nA_{n+1}$

Déterminer L_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n$

Exercice 4

1) a) Déterminer de deux façons différentes, les racines carrées du nombre complexe $1+i$

b) En déduire la valeur exacte de $cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

2) Déterminer les racines d'ordre 6 de l'unité et les écrire sous forme trigonométrique puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 - \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^3 = 0$

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Résoudre l'équation $(1+z)^n = e^{2in\theta}$ et déduire que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} sin(n\theta)$

6

Arithmétique dans Z

Arithmétique

Divisibilité-Division Euclidien

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Définition : b *divise* $a \Leftrightarrow b \mid a \Leftrightarrow a$ multiple de $b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = kb$.	
• $a \mid a$	• $a \mid b \Leftrightarrow a^n \mid b^n$
• $\begin{cases} a \mid b \\ b \mid a \end{cases} \Rightarrow \lvert a \rvert = \lvert b \rvert$	• $\begin{cases} a \mid b \\ b \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid c$
• $\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid \alpha b + \beta c \; (\alpha, \beta \in \mathbb{Z})$	• $\begin{cases} a \mid b \\ a' \mid b' \end{cases} \Rightarrow aa' \mid bb'$
D.Euclidienne :Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Alors $\exists!(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tels que $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < \lvert b \rvert \end{cases}$	

Congruence modulo n

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

❶ a *congrue* b *modulo* $n \Leftrightarrow a \equiv b[n] \Leftrightarrow n \mid (a - b) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : a - b = kn$

$\Longleftrightarrow$ a et b ont le même reste de la division euclidienne sur n

❷ la relation "Congruence modulo" est dite **relation d'équivalence** :

(a) La réflexivité : $a \equiv a[n], \forall a \in \mathbb{Z}$.

(b) La symétrique : $a \equiv b[n] \Rightarrow b \equiv a[n], \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

(c) La transitivité : $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n] \Rightarrow a \equiv c[n], \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

❸ $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d[n] \\ ac \equiv bd[n] \end{cases}$, ❹ $ac \equiv bc[n] \Leftrightarrow a \equiv b\left[\dfrac{n}{d}\right] \; (d = c \wedge n)$.

❹ $a \equiv b[n] \Rightarrow a^p \equiv b^p[n]$ $\qquad n \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0[n]$ $\qquad a \equiv a + kn[n]$

❺ **L'ensemble** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{(n-1)}\}$ avec $\bar{r} = \{a \in \mathbb{Z}/a \equiv r[n]\}, \forall r \in [\![0, n-1]\!]$ On a donc $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \ldots \cup \overline{(n-1)}$

PGCD et PPCM

PGCD	PPCM
• *Le plus grand commun diviseur* de a et b est le plus grand diviseur commun strictement positif de a et b $(a \wedge b)$	• *Le plus petit commun multiple* de a et b est le plus petit multiple commun strictement positif de a et b $(a \vee b)$
• $a \wedge 1 = 1$ • $a \wedge a = \|a\|$	• $a \vee 1 = \|a\|$ • $a \vee a = \|a\|$
• $a \wedge b = b \wedge a$ • $a \wedge b = \|a\| \wedge \|b\|$	• $a \vee b = b \vee a$ • $a \vee b = \|a\| \vee \|b\|$
• $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	• $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
• $ab \wedge ac = \|a\|(b \wedge c)$	• $ab \vee ac = \|a\|(b \vee c)$
• $a \wedge b/a$ et $a \wedge b/b$	• $a/a \vee b$ et $b/a \vee b$
• a/b et $a/c \Rightarrow a/b \wedge c$	• a/cet$b/c \Rightarrow a \vee b/c$
• $a/b \Leftrightarrow a \wedge b = \|a\|$	• $a/b \Leftrightarrow a \vee b = \|b\|$
• $a \wedge b = d \Rightarrow (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}) d = \alpha a + \beta b$	• $(a \vee b)(a \wedge b) = \|ab\|$ • $a \wedge b/a \vee b$
• **Algorithme d'Euclide** : Si $a = bq + r \Rightarrow a \wedge b = b \wedge r$ ainsi $a \wedge b$ est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives.	

les nombres premiers entre eux

Définition	On dit que a et b sont *premiers entre eux* si $a \wedge b = 1$.
Théorème de Bezout	$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2) : au + bv = 1.$ $a \wedge b = d \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$
Et ces conséquences	$\begin{cases} a \wedge c = 1 \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1; \; a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1$
Théorème de Gauss	$\begin{cases} a \mid bc \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a \mid c.$
Et ces conséquences	$\begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab \mid c \; ; \; \begin{cases} ab \equiv ac[n] \\ a \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow b \equiv c[n]$
$(E) : ax + by = c$	• (E) admet des solutions $\Leftrightarrow a \wedge b \mid c$. • $S_{(E)} = \left\{ \left(x_0 + \dfrac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \dfrac{ka}{a \wedge b} \right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$ avec (x_0, y_0) est une solution particulière.

Les nombres premiers

Définition :	• p est un nombre premier $\Leftrightarrow D_p = \{-1, 1, -p, p\}$ • Le plus petit diviseur positif de a différent de 1 est un nombre premier • L'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$ est infini.
Propriétés :	❶ a n'est pas premier $\Rightarrow (\exists p \in \mathbb{P}),\ p \mid a$ et $p^2 \leq a$. ❷ $(\forall p, q \in \mathbb{P}) : (\lvert p\rvert \neq \lvert q\rvert \Leftrightarrow p \wedge q = 1)$ ❸ $\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ p \mid a^n \end{cases} \Rightarrow p \mid a$ ❹ $\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ p \nmid a \end{cases} \Rightarrow p \wedge a = 1$ ❺ $\begin{cases} p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq \lvert k\rvert < \lvert p\rvert \end{cases} \Rightarrow p \wedge k = 1$ ❻ $\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ p \mid ab \end{cases} \Rightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$ ❼ $\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ p \mid ab \\ p \nmid a \end{cases} \Rightarrow p \mid b$ ❽ $\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ p \mid a_1 a_2 \ldots a_n \end{cases} \Rightarrow \exists i \in [\![1, n]\!];\ p \mid a_i$ ❾ $\begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!]; p_i \in \mathbb{P} \\ p \in \mathbb{P} \\ p \mid p_1 p_2 \ldots p_n \end{cases} \Rightarrow \exists i \in [\![1, n]\!];\ \lvert p\rvert = \lvert p_i\rvert$
Théorème de Fermat :	$\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{cases} \Rightarrow a^{n-1} \equiv 1[p] \Leftrightarrow p \in \mathbb{P};\ a^p \equiv a[p]$
Pour vérifier qu'un entier $a > 2$ est premier ou non :	On détermine tous les nombres premiers p tels que $p^2 \leq a$ • Si l'un de ces nombres divise a alors a est non premier. • Sinon, a est premier.

Système de numération

une base d'un système de numération est le cardinal de l'ensemble des nombres utilisés pour représenter les nombres entiers naturels. Exemples :

❶ La base du système de numération décimale est 10 et l'ensemble des nombres utilisés est $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

❷ La base du système de numération binaire est 2 et l'ensemble des nombres utilisés est $\{0,1\}$.

$x = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = \overline{a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0}(b)$, avec $0 \leq a_i \leq b-1$

❸ Critères de divisibilités :

Si $x = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}^{(10)}$ alors :

$x \equiv 0[2]$	$\Leftrightarrow a_0 \equiv 0[2]$
$x \equiv 0[3]$	$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0[3]$
$x \equiv 0[4]$	$\Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \equiv 0[4]$
$x \equiv 0[5]$	$\Leftrightarrow a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$
$x \equiv 0[7]$	$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} + 5.a_0 \equiv 0[7]$
$x \equiv 0[9]$	$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0[9]$
$x \equiv 0[11]$	$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv 0[11]$
$x \equiv 0[25]$	$\Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{0, 25, 50, 75\}$

La décomposition en facteurs premiers

● Chaque nombre $a \in \mathbb{Z}^* \backslash \{-1, 1\}$ s'écrit d'une façon unique de la forme $a = \epsilon.p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ telle que $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont des nombres premiers positives différents deux à deux et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des nombres entiers naturels non nuls et $\epsilon = \pm 1$. Cette écriture s'appelle *la Décomposition de* a *en facteurs premiers.*

● *Le nombre de diviseurs de* **a** est $x = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_n)$

● Soient $a = \varepsilon \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ et $b = \varepsilon \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$, alors :

$$a \wedge b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\inf(\alpha_i, \beta_i)}, a \vee b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\sup(\alpha_i, \beta_i)}.$$

Exercice 1 :

On considère le système $(S):\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$ **tel que** $n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que $\exists(u;v) \in \mathbb{Z}^2 \quad 19u + 12v = 1$

b) Vérifier que $N = 6 \times 19u + 13 \times 12v$ **est une solution de** (S)

2) a) Soit S **l'ensemble de solution de système** (S) **et** $n_0 \in S$**. Montrer que** $n \in S \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$

b) Montrer que $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases} \Leftrightarrow n \equiv n_0[12 \times 19]$

3) a) Déterminer un couple $(u;v)$ **solution de l'équation** $19u + 12v = 1$ **et calculer** N

b) Déterminer S **(On pourra utiliser la question 2) b))**

Exercice 2 :

1) Déterminer x **et** y **tel que** $\overline{xy6}_{(7)} = \overline{y0x}_{(5)}$

2) Soit a **un entier naturel premier. Déterminer dans le système de numérotation décimal les deux entiers naturels qui s'écrivent dans le système de numérotation de base** 5 **sous la forme** $\overline{a010a}_{(5)}$

3) Montrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bezout.

Exercice 3 :

Soit p **un entier premier tel que** $p \geq 3$**. On pose** $A_p = \{1;2;3;4....;p-1\}$ **et** a **soit un élément de** A_p

1) a) Vérifier que a^{p-2} **est une solution de l'équation** $ax \equiv 1[p]$ **dans** $\mathbb{Z}$

b) Soit r **le reste de la division euclidienne de** a^{p-2} **sur** p

Montrer que r **est la solution de l'équation** $ax \equiv 1[p]$ **dans** A_p

2) Résoudre dans A_{29} **les équations** $2x \equiv 1[29]$ **et** $3x \equiv 1[29]$

3) a) Montrer que $xy \equiv 0[p] \Leftrightarrow x \equiv 0[p]$ **ou** $y \equiv 0[p]$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ **l'équation** $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[29]$

Exercice 4 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ **définie par** $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n **est un nombre pair.**

2) Calculer u_2, u_3, u_4 , u_5 **et** u_6

3) Montrer que si n **est pair alors** $u_n \equiv 0[4]$

4) On pose $F = \{p \in IP / \exists n \in \mathbb{N}^* \quad p \text{ divise } u_n\}$

Déterminer si les nombres 2, 3, 5 et 7 appartient à F

5) Soit $p \in IP$ **tel que** $p > 3$

a) Montrer que $6 \times 2^{p-2} \equiv 3[p]$ **et** $6 \times 3^{p-2} \equiv 2[p]$

b) En déduire que $6 \times u_{p-2} \equiv 0[p]$

c) A-t-on $p \in F$ **?**

Exercice 5 :

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $11x-9y=2$

a) Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

c) En déduire que l'ensemble de solution du système $\begin{cases} x \equiv -1[9] \\ x \equiv -3[11] \end{cases}$ est $S=\{8+99\alpha \,/\, \alpha \in \mathbb{Z}\}$

2) Soit N un entier naturel tel que $N=\overline{10x009y}$ dans le système de numérotation décimal.
Déterminer tous les couples (x,y) de $\mathbb{N}^2$ tel que $N \equiv 0[99]$

Exercice 6 :

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $20b-9c=2$

a) Montrer que si (b_0,c_0) est une solution de (E) alors c_0 est un multiple de 2

b) Déterminer les valeurs possibles du nombre $d = |b_0| \wedge |c_0|$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

3) Déterminer les couples (b,c) des solutions de (E) tel que $b \wedge c = 2$

4) On pose $P=\overline{ca5}_{(6)}$ et $P=\overline{bbaa}_{(4)}$

Montrer que $a+5$ est un multiple de 4 et déduire les valeurs de a, b et c

5) Donner l'écriture de P dans le système de numérotation décimal.

Exercice 7 :

1) Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x \wedge y = 1$. On pose $z = x^8 + y^8$

2) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

a) a est pair $\Leftrightarrow a^4 \equiv 0[16]$; b) a est impair $\Leftrightarrow a^4 \equiv 1[16]$

3) En déduire que $z \equiv 1[16]$ ou $z \equiv 2[16]$

3) Soit p un nombre premier divise z et $p>2$

a) Montrer que $x \wedge p = 1$

b) En déduire que $\exists k \in \mathbb{Z},\ \ kx \equiv 1[p]$

c) En déduire que $\exists q \in \mathbb{Z},\ \ q^8+1 \equiv 0[p]$

Exercice 8 :

Soit a et b des entiers naturels tel que $a \geq b$

1) Montrer que $a^5 - a \equiv 0[10]$

2) Montrer que $a^5 - b^5 \equiv 0[10] \Rightarrow a^2 - b^2 \equiv 0[20]$

3) Déterminer a et b tel que $a^2 - b^2 = 720$

Exercice 9 :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $ab \equiv 1[m]$

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z})\ \ ax \equiv c[m] \Leftrightarrow x \equiv bc[m]$

2) a) Vérifier que $(1-m)(1+m) \equiv 1[m^2]$

b) Résoudre l'équation $x \in \mathbb{Z},\ \ (m-1)x \equiv m+1[m^2]$

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E): $(m-1)x+m^2y=m+1$

3) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(km^2-(2m+1)) \wedge (k(1-m)+2) = (m+1) \wedge (k+1)$

4) On suppose que $m+1$ est un nombre premier. Déterminer les solutions (x,y) de (E) tel que $x \wedge y \neq 1$

Exercice 10 :

1) Déterminer suivant les puissances $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.

2) Quel est le reste de la division euclidienne par 5 de 1357^{2013}

3) Calculer le PGCD de $2^{445}+7$ et 15.

4) Montrer que $13 / 3^{2020}+5^{2020}-4$.

5) Soient $n, m, k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Montrer que : $n \equiv 0[m] \Leftrightarrow b^n \equiv 1\left[b^m-1\right]$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $5^n \equiv -1[13] \Leftrightarrow n \equiv 2[4]$.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $13 / 5^{2n}+5^n \Leftrightarrow 4 / n-2$.

Exercice 11 :

1) Soient $a, b, q, r \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que : $a = bq + r \Rightarrow a \wedge b = b \wedge r$.

2) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer $(15n^2+8n+6) \wedge (30n^2+21n+13)$.

3) Déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{Z}$ pour les quelles les entiers $9x+4$ et $2x-1$ soient premier entre eux .

4) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système $\begin{cases} x \wedge y = 18 \\ x \vee y = 540 \end{cases}$.

5) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $(x \vee y)+11(x \wedge y)=203$.

Exercice 12 :

Soient $a, m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $a \geq 2$ et $n \geq m$. On note par r le reste de la division euclidienne de n par m.

1) Montrer que : $a^n \equiv a^r\left[a^m-1\right]$.

2) En déduire que : $(a^n-1) \wedge (a^m-1) = (a^m-1) \wedge (a^r-1)$, puis que $(a^n-1) \wedge (a^m-1) = a^{n \wedge m}-1$

3) Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. On pose $M_p = 2^p-1$. (Nombres de Mersenne)

a) Montrer que : M_p / M_{pq}.

b) Montrer que : M_p premier $\Rightarrow p$ premier . Le nombre M_{11} est-il premier ?

4) Montrer que si a^n-1 est premier , alors $a=2$ et n premier.

Exercice 13 :

Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier .

1) Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq k \leq p$. Montrer que : p / C_p^k

2) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{N}$; $(a+1)^p \equiv a^p+1[p]$.

3) En déduire : $\forall a \in \mathbb{N}$; $a^p \equiv a[p]$.

4) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que si p ne divise pas a alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$. (Petit théorème de Fermat)

Exercice 14 :

1) Soit $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1,1\}$. Montrer que : $n^5 \equiv n[30]$.

2) En déduire que : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}$; $30 / a^5+b^5+c^5 \Leftrightarrow 30 / a+b+c$.

Exercice 15 :

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ deux nombres premiers distincts.

1) $a)$ Montrer que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1[pq]$.

$b)$ En déduire que l'équation d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $\left(p^{q-1} + q^{p-1}\right)x + pqy \equiv x[pq]$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

2) $a)$ Soit $a \in \mathbb{Z}$. On suppose que p et q ne divisent pas a. Montrer que $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1[pq]$.

$b)$ En déduire que $27^{4200} - 1$ est divisible par $2^{445} + 7$.

Exercice 16 :

Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$. On pose $N = nm\left(m^{36} - n^{36}\right)$. Montrer que N est divisible par 1995.

Exercice 17 :

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que : $a \equiv 1\left[2^n\right]$. $a \equiv 1\left[5^n\right] \Rightarrow a^n \equiv 1\left[10^n\right]$.

2) Soit $b = (9212)^4$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b^n \equiv 1\left[10^n\right]$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $b_n = b^{5^n} - 1$.

$a)$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1$.

$b)$ En déduire que tout $n \in \mathbb{N}$: $b_{n+1} = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n$

4) $a)$ Montrer que si 5^{n+1} divise b_n alors 5^{n+2} divise b_n^5.

$b)$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n \equiv 0\left[5^{n+1}\right]$.

4) $a)$ Montrer que : $(9217)^{500} \equiv 1[625]$ et $(9217)^{500} \equiv 1[10000]$.

$b)$ Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $x^3 \equiv 9219[10000]$.

Exercice 18 :

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $36x - 25y = 5$.

1) Montrer que si (x, y) est solution de l'équation (E) alors x est un multiple de 5.

2) Déterminer une solution particulière de (E) puis résoudre (E).

3) Soit (x, y) une solution de l'équation (E). On pose $d = x \wedge y$.

$a)$ Déterminer les valeurs possibles pour d.

$b)$ Déterminer les solutions (x, y) de (E) tel que $x \wedge y = 1$.

Exercice 19 :

On considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation (E) : $x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$.

1) Soit (x, y) une solution de l'équation (E). On pose $d = x \wedge y$, $x = ad$ et $y = bd$

$a)$ Vérifier que : $db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$.

$b)$ Déduire que : $b = 1$.

$c)$ Montrer que : $a \neq 1$ et $a - 1$ divise $a + 1$.

$d)$ En déduire que : $a = 2$ ou $a = 3$.

2) Résoudre dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation (E).

Exercice 1

1) a) Montrer que $6^{40} \equiv 1[55]$

b) Montrer que l'équation (E): $65x - 40y = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E'): $17x - 40y = 1$

a) Montrer que l'équation (E') admet au moins une solution.

b) Montrer que l'ensemble de solution de (E') est $S = \{(33+40k\ ;\ 14+17k) / k \in \mathbb{Z}\}$

c) En déduire qu'il existe un unique entier naturel x_1 tel que $x_1 \leq 40$ et $17x_1 \equiv 1[40]$

d) Soit $x \in \mathbb{N}$. Montrer que $\begin{cases} x^{17} \equiv y[41] \\ x^{40} \equiv 1[41] \end{cases} \Rightarrow y^{33} \equiv x[41]$

3) On considère l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 40\}$ et l'application $\begin{array}{l} g: A \to A \\ \quad x \mapsto g(x) \end{array}$ tel que $g(x)$ est le reste de la division euclidienne de x^{17} sur 41

a) Montrer que $(\forall x \in A^*)$ $x^{40} \equiv 1[41]$

b) Montrer que $\forall (x;y) \in A^2$ $g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$

c) En déduire que g est une bijection.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 10u_n + 21$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3

2) a) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $3u_n = 10^{n+1} - 7$

b) En déduire l'écriture de u_n dans le système de numérotation décimal.

3) Montrer que u_2 est un nombre premier.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas divisible ni par 2, ni par 3 et ni par 5.

5) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $3u_n \equiv 4 - (-1)^n [11]$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas divisible par 11

6) a) Montrer que $10^6 \equiv 1[17]$

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, 17 divise u_{16k+8}

Exercice 3

1) Soit n un entier naturel tel que $n > 1$

a) Montrer que $(\forall p \in \mathbb{N})$ $n^{2p} - 1 \equiv 0[n+1]$

b) En déduire que $(\forall p \in \mathbb{N})$ $n^{2p+1} + 1 \equiv 0[n+1]$

2) On pose $A = \overline{xyzt}_{(n)}$

Montrer que $A \equiv 0[n+1] \Leftrightarrow (y+t-x-z = 0$ ou $y+t-x-z = n+1$ ou $y+t-x-z = -(n+1))$

3) Trouver y et z pour que $\overline{2yz5}_{(6)}$ soit divisible par 7

4) En utilisant le Théorème de Fermat montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\quad 10^{6n+4} + 3 \equiv 0[7]$

7

Structures algébriques

Soit $\boldsymbol{E}$ un ensemble.

Loi de composition interne

- On appelle *Loi de composition interne* toute application $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{E}$.
- $\boldsymbol{f(x,y)}$ s'appelle le composé de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ noté par $\boldsymbol{x \; \mathrm{T} y, x \perp y}$ ou $\boldsymbol{x * y \dots}$ et si $\boldsymbol{E}$ est muni d'une *Loi de composition interne* $*$ on note $(\boldsymbol{E}, *)$.
- **Les matrices carrées**

$$\mathbf{M_2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$\mathbf{M_3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} ; (a,b,c,d,e,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^9 \right\}.$$ On admet que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

et de même pour $\mathbf{M_3}(\mathbb{R})$.

- **Partie stable** : Soit $\boldsymbol{H}$ une partie de $\boldsymbol{E}$. $\boldsymbol{H}$ est *une partie stable* pour $*$ si pour tous $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de $\boldsymbol{H}$ on a : $\boldsymbol{x * y \in H}$.
- **Associativité** : $\boldsymbol{(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in E}$.
- **Commutativité** : $\boldsymbol{x * y = y * x, \forall x, y \in E}$.
- **L'élément neutre** : $\boldsymbol{x * e = e * x = x, \forall x \in E}$.
- **Le symétrique d'un élément** : on suppose que $*$ possède un élément neutre $\boldsymbol{e}$ dans $\boldsymbol{E}$. On dit que $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{E}$ a un symétrique dans $(\boldsymbol{E}, *)$ ssi il existe $\boldsymbol{x'}$ de $\boldsymbol{E}$ tel que $\boldsymbol{x * x' = x' * x = e}$.
- **Un élt. simplifiable** : on dit que $\boldsymbol{a}$ est régulier dans $(\boldsymbol{E}, *)$ ssi $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E}^2$:
$$\begin{cases} x * a = y * a \Rightarrow x = y \\ a * x = a * y \Rightarrow x = y \end{cases}.$$
- **Un élt. absorbant** : on dit que $\boldsymbol{a}$ est absorbant dans $(\boldsymbol{E}, *)$ ssi $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} : \boldsymbol{x * a = e}$ et $\boldsymbol{a * x = e}$.

Soient $(E, *)$ et (F, T).

• **Morphisme ou Homomorphisme** : Toute application $f : E \to F$ telle que : $f(x * y) = f(x) T f(y)$ pour tout (x, y) de E^2

$\hookrightarrow$ Si f est un morphisme alors f transmit les propriétés de $*$ dans E à T dans $f(E)$.

$\hookrightarrow$ Si de plus f est surjectif alors $f(E) = F$. Donc f transmit les propriétés de $*$ dans E à T dans F.

Groupe

Soit G un ensemble non vide.

• **Groupe** : Soit $(G, *)$. On dit que $(G, *)$ est un groupe si :

❶ La loi $*$ est associative.

❷ La loi $*$ admet un élément neutre dans G.

❸ Tout élément de G a un symétrique dans $(G, *)$.

Si de plus $*$ est commutative, on dit que $(G, *)$ est un groupe commutatif (ou abélien).

• **Sous Groupe** : Soient $(G, *)$ un groupe et H une partie non vide de G. On dit que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si $(H, *)$ est un groupe.

$$(H, *) \text{ est un sous-groupe de } (G, *) \Leftrightarrow \begin{cases} ❶ & H \neq \emptyset \text{ et } H \subset G \\ ❷ & H \text{ est stable par } * \\ ❸ & H \text{ est stable par passage au symétrique} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ❶ & H \neq \emptyset \text{ et } H \subset G \\ ❷ & x * y \in H, \forall (x, y) \in H^2 \\ ❸ & x' \in H, \forall x \in H \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ❶ & H \neq \emptyset \text{ et } H \subset G \\ ❷ & x * y' \in H, \forall (x, y) \in H^2 \end{cases}$$

• **Morphismes de groupes** :

Soient $(G, *)$ et (K, T) deux groupes et f est un morphisme de $(G, *)$ dans (K, T).

❶ Si e est l'élt neutre de $(G, *)$ alors $f(e) = e'$ est l'élt neutre de (K, T).

❷ $(f(G), T)$ est groupe.

❸ Si de plus $(G, *)$ est un groupe abélien alors $(f(G), T)$ est groupe abélien.

Anneau

Soit A un ensemble non vide muni de deux LCI $*$ et T.

• $(A, *, T)$ est un anneau ssi $\begin{cases} \text{❶ } (A,*) \text{ est une groupe abélien.} \\ \text{❷ } T \text{ est associative dans } A. \\ \text{❸ } T \text{ est distributive sur } * \end{cases}$.

↪ Si de plus T possède un élément neutre alors $(A, *, T)$ est dite Anneau Unitaire.

↪ Si de plus T est commutative alors $(A, *, T)$ est un anneau commutative

• On dit que $x \in A \setminus \{0_A\}$ est un diviseur de zéro dans l'anneau A si il existe $y \in A \setminus \{0_A\}$ tel que : $xTy = 0_A$ ou $yTx = 0_A$.

• Un anneau $(A, *, T)$ n'admet aucun diviseur de zéro veut dire que :

$$\left(\forall (x, y) \in^2 A\right) : \quad xTy = 0_A \Leftrightarrow x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

• On dit qu'un anneau $(A, *, T)$ est intègre s'il n'est pas réduit à zéro et n'admet aucun diviseur de zéro.

• Si x est inversible dans (A, T), alors x n'est pas un diviseur de zéro dans l'anneau $(A, *, T)$.

Corps

• On appelle corps tout anneau unitaire $(K, *, T)$ non réduit à zéro tel que tout élément autre que zéro est inversible pour la loi T.

Un corps est dit commutatif si la deuxième loi est commutative.

• $(K, *, T)$ est un corps ssi $\begin{cases} \text{❶ } (K,*) \text{ est un groupe commutatif.} \\ \text{❷ } (K \setminus \{0_K\}, T) \text{ est un groupe.} \\ \text{❸ La loi } T \text{ est distributive par rapport à la loi } * \end{cases}$.

• Si $(K, *, T)$ est un corps alors :

↪ Tout élément de $K \setminus \{0_K\}$ est régulier pour T.

↪ $(K, *, T)$ est un anneau intègre.

↪ Pour tous $(a, b) \in K \setminus \{0_K\} K$, on a : $aTx = b \Leftrightarrow x = a'Tb$ et $xTa = b \Leftrightarrow x = bTa'$.

Loi de composition externe - Espace vectoriel.

Définition

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble.
Toute application de $\mathbb{K}\times E$ dans E s'appelle une loi de composition externe (L.C.E) de $\mathbb{K}$ sur E.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on note en général l'image de (λ, x) par $\lambda \cdot x$ ou λx.

Remarque

Dans de nombreux cas on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dans la suite on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition

Un espace vectoriel réel (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) e st un triplet $(E, +, \cdot)$ dans le quel E est un ensemble non vide muni :

(1) d'une LCI notée "+", telle que $(E, +)$ est groupe commutatif d'élément neutre 0_E.

(2) d'une L.C.E de $\mathbb{R}$ sur E appelé produit externe ou le produit par un scalaire notée "$\cdot$" et possèdent les propriétés suivantes : $(\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)(\forall(x, y) \in E^2)$

- (a) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
- (b) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
- (c) $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.
- (d) $1 \cdot x = x$.

Notation

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés des vecteurs. En absence d'informations sur la nature de ces éléments, on les note par $\overrightarrow{\cdot}$ ($\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}, \ldots$). Avec cette notation la définition précédante devient :

Définition

Un espace vectoriel réel (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) e st un triplet $(E, +, \cdot)$ dans le quel E est un ensemble non vide muni :

(1) d'une LCI notée "+", telle que $(E, +)$ est groupe commutatif d'élément neutre $\overrightarrow{0_E}$.

(2) d'une L.C.E de $\mathbb{R}$ sur E appelé produit externe ou le produit par un scalaire notée "$\cdot$" et possèdent les propriétés suivantes : $(\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)(\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2)$

- (a) $(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{x} = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{x}$.
- (b) $\lambda \cdot (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \lambda \cdot \overrightarrow{y}$.
- (c) $(\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{x})$.
- (d) $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$.

Proposition

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-e.v. Alors :

(1) Tout vecteur de E est un élément régulier (simplifiable) dans $(E, +)$.

(2) Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, on a : $0 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

(3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

(4) Pour tout $(\lambda, \overrightarrow{x}) \in \mathbb{R}\times E$, on a : $\lambda \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Proposition

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-e.v. Alors :

(1) Pour tout $(\lambda,\overrightarrow{x})\in\mathbb{R}\times E$, on a : $(-\lambda)\cdot\overrightarrow{x}=\lambda\cdot(-\overrightarrow{x})=-(\lambda\cdot\overrightarrow{x})$.

(2) Pour tout $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in E^2$, l'équation $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}$ admet une unique solution qu'est

$$x=\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}.$$

(3) Pour tout $(\lambda,\mu),(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in\mathbb{R}^2\times E^2$, on a

$$\lambda\cdot(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})=\lambda\cdot\overrightarrow{x}-\lambda\cdot\overrightarrow{y}\quad\text{et}\quad(\lambda-\mu)\cdot\overrightarrow{x}=\lambda\cdot\overrightarrow{x}-\mu\cdot\overrightarrow{x}.$$

Sous-Espace vectoriel.

Définition

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-e.v. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

(1) $F\neq\varnothing$ et $F\subset E$.

(2) F est stable par l'addition.

(3) F est stable par le produit externe.

(4) $(F,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-e.v.

Exemples

(1) $\{\overrightarrow{0}\}$ et E sont des sous-espaces de E. $\{\overrightarrow{0}\}$ est appelé le sous-espace nul de E.
(2) Si $\overrightarrow{u}\in E\setminus\{\overrightarrow{0}\}$, alors $\mathbb{R}\overrightarrow{u}=\{\lambda\cdot\overrightarrow{u}/\lambda\in\mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé la droite vectorielle dirigé par $\overrightarrow{u}$.

Proposition

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-e.v. et F une partie de E. On a :

$$(F\text{ est un sous-espace vectoriel de }E)\Leftrightarrow\begin{cases}F\neq\varnothing\\(\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)(\forall(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in E^2)\ :\ \lambda\cdot\overrightarrow{x}+\mu\cdot\overrightarrow{y}\in F.\end{cases}$$

Familles libres ou génératrices - Bases

Combinaisons linéaires.

Définition

Soient $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_n}$ n vecteurs d'un $\mathbb{R}$-e.v. $(E,+,\cdot)$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.
on appelle combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_n}$ (ou combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_n})$ tout vecteur de la forme :

$$\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i\cdot\overrightarrow{x_i}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{x_1}+...+\lambda_n\cdot\overrightarrow{x_n}\quad\text{avec}\quad\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}.$$

Les réels $\lambda_1,...,\lambda_n$ sont appelés les coefficients de cette combinaison linéaire.

Familles libres - Familles liées.

Définition

Soient $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ n vecteurs d'un $\mathbb{R}$-e.v. $(E, +, \cdot)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
(1) On dit que la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n})$ est libre de E si pour tous $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$

Dans ce cas, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ sont linéairement indépendants.

(2) Toute famille, qui n'est pas libre, est dite une famille liée.
Autrement, il existe une combinaison linéaire de cette famille de coefficients non tous nuls qui vaut $\overrightarrow{0}$.
Dans ce cas, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ sont linéairement dépendants.

Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.

(1) La famille $(\overrightarrow{x})$ est libre si et seulement si $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$.

(2) Les éléments d'une famille libre sont deux à deux ditincts.

(3) Toute sous famille d'une famille libre est libre.

(4) Toute famille contenant une sous famille liée est liée.

(5) Une famille est liée si et seulement si l'un de ces vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Familles généreatrices.

Définition

Soient $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ n vecteurs d'un $\mathbb{R}$-e.v. $(E, +, \cdot)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) On dit que $(\overrightarrow{x})$ est engendré par la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n})$ s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire de cette famille.

(2) On dit que la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n})$ est génératrice si :

$$(\forall \overrightarrow{x} \in E)(\exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n) \quad : \quad \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{x_i}.$$

Dans ca cas, on dit que cette famille engendre E.

Bases.

Définition

Soient $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ n vecteurs d'un $\mathbb{R}$-e.v. $(E, +, \cdot)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
La famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n})$ est dite base de E s'elle est libre et génératrice. i.e

$$(\forall \overrightarrow{x} \in E)(\exists ! (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n) \quad : \quad \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{x_i}.$$

Dans ce cas, on note cette famille $\mathscr{B}$ et on écrit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n})$.
$\lambda_1, ..., \lambda_n$ s'appellent les composantes (ou coordonnées) de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}$ et on note $\overrightarrow{x}(\lambda_1, ..., \lambda_n)_{\mathscr{B}}$.

Remarque

Si un $\mathbb{R}$-espace vectoriel admet une base $\mathscr{B}$, alors cette base n'est pas unique ($2\mathscr{B}$ est aussi une base).

Proposition

Soient $\mathbb{R}$-e.v. $(E,+,\cdot)$ et $\mathscr{B}=(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_n})$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ une base de E.

(1) Si $\overrightarrow{x}(\lambda_1,...,\lambda_n)_{\mathscr{B}}$ et $\overrightarrow{y}(\mu_1,...,\mu_n)_{\mathscr{B}}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, alors

$$\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}(\lambda_1+\mu_1,...,\lambda_n+\mu_n)_{\mathscr{B}} \qquad \text{et} \qquad \alpha\cdot\overrightarrow{x}(\alpha\lambda_1,...,\alpha\lambda_n)_{\mathscr{B}}.$$

(2) Toutes les bases de E ont le même cardinal qu'on appelle la dimension de E noté $\dim E$ et on écrit $\dim E=n$.

Proposition

Soit $\mathbb{R}$-e.v. $(E,+,\cdot)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.

(1) Si $\dim E=2$ et $\mathscr{B}=(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$:

Soit $\mathscr{B}'=(\overrightarrow{u}(a,b)_{\mathscr{B}},\overrightarrow{v}(a',b')_{\mathscr{B}})$. Alors on a :

$$\mathscr{B}' \text{ est une base de } E \Leftrightarrow .\mathscr{B}' \text{ est génératrice de } E \Leftrightarrow \mathscr{B}' \text{ est libre de } E \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0.$$

(2) Si $\dim E=3$ et $\mathscr{B}=(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$:

Soit $\mathscr{B}'=(\overrightarrow{u}(a,b,c)_{\mathscr{B}},\overrightarrow{v}(a',b',c')_{\mathscr{B}},\overrightarrow{w}(a'',b'',c'')_{\mathscr{B}})$. Alors on a :

$$\mathscr{B}' \text{ est une base de } E \Leftrightarrow .\mathscr{B}' \text{ est génératrice de } E \Leftrightarrow \mathscr{B}' \text{ est libre de } E \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 2BSMF	Série 7 Structures algébriques	Lycée qualifiant : Almajd Matière : mathématique

EXERCICE 1

·On muni l'ensemble $I=[1;+\infty[$ de la L.C.I $\perp$ définie par :

pour tout a et b de I ; $a\perp b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1\right)^2$

1- Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne dans I

2- Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative.

3- Montrer que $(I,\perp)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

4- Déterminer les éléments qui sont symétrisables dans $(I,\perp)$

EXERCICE 2

- On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\quad x*y=xy-2(x+y)+6$$

1-Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans $\mathbb{R}$

2- Montrer que la loi $*$ admet dans $\mathbb{R}$ un élément neutre e que l'on déterminera.

3- Déterminer les éléments de $\mathbb{R}$ qui admettent un symétrique pour la loi $*$

4- Montrer que le sous-ensemble $I=]2,+\infty[$ est stable dans $(\mathbb{R},*)$

5- On munit le sous-ensemble I de la loi T induite de la loi $*$.

Déterminer l'élément neutre dans (I,T).

EXERCICE 3

- On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne Δ définie par : $x\Delta y=x+y-2$

1- Montrer que la loi Δ est commutative, associative et admet un élément neutre que l'on déterminera.

2- Montrer que tout élément x de $\mathbb{R}$ admet un symétrique x' dans $(\mathbb{R},\Delta)$ que l'on déterminera.

3- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\Delta x=1$

EXERCICE 4

- On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\qquad x*y=x+y-e^{xy}+1$$

1-a) Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$

b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

2- Sachant que l'équation : $3+x-e^{2x}=0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions distinctes α et β .

Montrer que la loi $*$ n'est pas associative dans $\mathbb{R}$

EXERCICE 5

- On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\ x*y=x+y-3xy$$

1) a-Vérifier que : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\ (1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)$

b-Montrer que $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ est un groupe commutatif.

2) Montrer que l'application φ qui à tout nombre réel x associe le nombre réel $\varphi(x)=1-3x$ est un isomorphisme de $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ sur $\left(\mathbb{R}^*,\times\right)$

EXERCICE 6

- Soit $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 munit de la loi produit des matrices. Soit F l'ensemble des matrices $M(x,y)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x}\end{pmatrix}$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

1) a – Montrer que F est une partie stable de $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$.

b - Montrer que $(F,\times)$ est un groupe non commutatif.

2) Soit G l'ensemble des matrices $M(x,0)$ de F où $x\in\mathbb{R}^*$.

Montrer que G est un sous-groupe de $(F,\times)$.

3) Soit $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

On muni l'ensemble E de la loi de composition interne $\perp$ définie par :

$$\forall(x,y)\in E\ ;\ \forall(a,b)\in E\quad (x,y)\perp(a,b)=\left(xa,xb+\frac{y}{a}\right)$$

Et on considère l'application $\begin{array}{rcl}\varphi:(F,\times) & \to & (E,\perp)\\ M(x,y) & \to & \varphi(M(x,y))=(x,y)\end{array}$

a – Calculer $(1,1)\perp(2,3)$ et $(2,3)\perp(1,1)$.

b – Montrer que φ est un isomorphisme de $(F,\times)$ sur $(E,\perp)$

c – En déduire la structure de $(E,\perp)$

EXERCICE 7

- On munit l'ensemble $I=\left]0,+\infty\right[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall(a,b)\in I\times I\right)\quad a*b=e^{\ln(a)\cdot\ln(b)}$$

1) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans I .

2) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε que l'on déterminera.

3) a-Montrer que $\left(I \setminus \{1\}, *\right)$ est un groupe commutatif.

($I \setminus \{1\}$ désigne l'ensemble I privé de 1).

b-Montrer que $]1,+\infty[$ est un sous-groupe de $\left(I \setminus \{1\}, *\right)$.

EXERCICE 8

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} / \ x \in \mathbb{R} \right\}$

1-a) Montrer que E est une partie stable de $\left(M_3(\mathbb{R}), \times\right)$

b) Montrer que l'application φ qui à tout nombre réel x associe la matrice $M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ sur $(E,\times)$.

c) En déduire que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.

d) Pour x un réel, déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de la matrice $M(x)$ dans $(E,\times)$

e) Résoudre dans l'ensemble E l'équation $A^5 X = B$ où $A = M(2)$ et $B = M(12)$ et $A^5 = \underbrace{A \times .. \times A}_{5 \ fois}$

2-Montrer que l'ensemble $F = \left\{ M(\ln(x)) / \ x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ est sous-groupe de $(E,\times)$

EXERCICE 9

· Pour tout x et y de l'intervalle $I =]0,1[$ on pose : $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

1-a)Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I

b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

c) Montrer que $(I,*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

2- Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif.

3- On considère les deux ensembles $H = \left\{ 2^n / \ n \in \mathbb{Z} \right\}$ et $K = \left\{ \dfrac{1}{1+2^n} / \ n \in \mathbb{Z} \right\}$

a)Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$

b) On considère l'application : $\varphi: \; H \to I$

$$x \to \frac{1}{1+x}$$

Montrer que φ est un homomorphisme de $(H,\times)$ dans $(I,*)$

c)En déduire que K est un sous-groupe de $(I,*)$

EXERCICE 10

Pour tout a et b de l'intervalle $I =]1,+\infty[$, on pose: $\quad a*b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$

1) Vérifier que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad ; \quad x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1$

2) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I

3) On rappelle que $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ est un groupe commutatif et on considère l'application :

$$\varphi: \; \mathbb{R}^{*+} \to I$$
$$x \mapsto \sqrt{x+1}$$

a - Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ vers $(I,*)$

b - En déduire la structure de $(I,*)$

c - Montrer que l'ensemble $\Gamma=\left\{\sqrt{1+2^m} \;/\; m\in\mathbb{Z}\right\}$ est un sous-groupe de $(I,*)$

EXERCICE 11

- Soit $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} x & 2(x-1)\\ 0 & 1\end{pmatrix} / \, x\in\mathbb{R}^*\right\}$

1) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

2) On considère l'application $\quad \varphi: \; \mathbb{R}^* \to E$

$$x \mapsto M(x)$$

a – Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

b – En déduire la structure de $(E,\times)$.

c- Montrer que l'ensemble $H=\left\{\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2\\ 0 & 1\end{pmatrix} / \, n\in\mathbb{Z}\right\}$ est un sous groupe de $(E,\times)$

EXERCICE 12 : Extrait du bac

On note par $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

et que $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

On considère le sous-ensemble E de $M_2(\mathbb{R})$ défini par : $E=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix} / \ x\in\mathbb{R} \ et \ y\in\mathbb{R}^*\right\}$.

1- a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

b) Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans E

c) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}^*)$; $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & \frac{-x}{y}\\ 0 & \frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{-x}{y}\\ 0 & \frac{1}{y}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2- Montrer que $(E,\times)$ est un groupe non commutatif.

3- On considère le sous-ensemble F de E défini par : $F=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1 & x-1\\ 0 & x\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}^*\right\}$

a) Montrer que l'application φ définie par : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $\varphi(x)=M(x)$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

b) En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

EXERCICE 13 On rappelle que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif, unitaire et intègre.

1- On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2)$; $x*y=x+y-2$

a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

b) Montrer que $(\mathbb{Z},*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

c) En déduire que $(\mathbb{Z},*)$ est un groupe commutatif.

2- On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne T définie par :

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2) \ ; \ x\mathrm{T}y=xy-2x-2y+6$$

et on considère l'application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par : $(\forall x\in\mathbb{Z})$; $f(x)=x+2$

a) Montrer que l'application f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},\times)$ dans $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$

b) Montrer que : $(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3)$; $(x*y)\mathrm{T}z=(x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)$

3- En déduire de tout ce qui précède que $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ est un anneau commutatif et unitaire.

4-a) Montrer que : $x\mathrm{T}y=2$ si est seulement si ($x=2$ ou $y=2$)

b) En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ est intègre.

c) $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ est-il un corps ? (justifier votre réponse)

<u>EXERCICE14</u> On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont l'élément unité est $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et soit V l'ensemble des matrices $M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ où $(a,b)\in IR^2$.

1-a-Montrer que V est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

b – Montrer que $(V,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

2-a- Calculer $M_{\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)}\times M_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}$

b-Est-ce que l'anneau $(V,+,\times)$ est un corps ?

3-Soit X une matrice de V telle que : $X=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ avec $(a,b)\in IR^2$.

a – Montrer que $X^2-2aX+(a^2-4b^2)I=O$ où O est la matrice nulle.

b – On suppose que $a^2-4b^2\neq 0$. Montrer que X admet une matrice inverse qu'on déterminera.

<u>EXERCICE15</u> On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$,on pose : $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&a-b\\b&a+b\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble :

$$E=\left\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1-Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$

2- Calculer $J^2=J\times J$ sachant que $J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, puis en déduire que E n'est pas stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

3-On définit sur $M_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $*$ par :

$$A*B=A\times N\times B \quad \text{avec } N=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ qui associe à chaque nombre complexe non nul $a+ib$ (a *et* b étant deux nombres réels) la matrice $M(a,b)$.

a)Montrer que φ est un homomorphisme de $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ vers $\left(M_2(\mathbb{R}),*\right)$

b) On pose : $E^* = E - \{O\}$ .Montrer que : $\varphi\left(\mathbb{C}^*\right) = E^*$

c)Montrer que $\left(E^*,*\right)$ est un groupe commutatif.

4-Montrer que : $\left(\forall (A,B,C)\in E^3\right)\quad A*(B+C) = A*B + A*C$

5-En déduire de ce qui précède que $(E,+,*)$ est un corps commutatif.

EXERCICE16 On rappelle que $\left(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire dont l'unité est $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif.

Pour tout nombre réel x, on pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble :

$E = \left\{M(x) \,/\, x\in\mathbb{R}\right\}$ et on munit E de la loi de composition interne $\top$ définie par:

$$\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad M(x)\top M(y) = M(x+y+1)$$

1- Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans E définie par : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad \varphi(x) = M(x-1)$

a)Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\top)$

b) Montrer que $(E,\top)$ est un groupe commutatif.

2- a) Montrer que: $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad M(x)\times M(y) = M(x+y+xy)$

b) En déduire que E est une partie stable de $\left(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$ et que la loi « $\times$ » est commutative dans E

c) Montrer que la loi « $\times$ » est distributive par rapport à la loi « $\top$ » dans E .

d) Vérifier que: $M(-1)$ est l'élément neutre dans $(E,\top)$ et que I est l'élément neutre dans $(E,\times)$.

3- a) Vérifier que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}\right)\qquad M(x)\times M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right) = I$.

b) Montrer que $(E,\top,\times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE17 On rappelle que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif . Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on pose : $M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$ et

$E = \left\{M(x,y)\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1- Montrer que E est un sous-groupe du groupe $\left(M_3(\mathbb{R}),+\right)$

2-Vérifier que : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ \left(\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2\right)$:

$$M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'-yy',xy'+yx')$$

3- On pose : $E^*=E-\{M(0,0)\}$ et on considère l'application $\varphi:\mathbb{C}^*\to E$ qui au nombre complexe $z=x+iy$ associe la matrice $M(x,y)$ de E, avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$

b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(1,0)$.

4- Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

5- On pose : $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

a) Calculer $A\times M(x,y)$ pour $M(x,y)\in E$

b) En déduire qu'aucun élément de E n'admet de symétrique dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

EXERCICE18 On rappelle que $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

Pour tout x et y réels, on pose : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\ \frac{y}{2}&x\end{pmatrix}$ et soit $F=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1- Montrer que F est stable dans $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

2- On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ dans F qui associe à tout nombre complexe $\mathrm{x}+i\mathrm{y}$ (où x et y sont deux réels) la matrice $\mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y})$.

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(F,\times)$

b) On pose : $F^*=F-\{M(0,0)\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*)=F^*$

c) Montrer que $(F^*,\times)$ est un groupe commutatif.

3- Montrer que $(F,+,\times)$ est un corps commutatif.

<u>EXERCICE</u>: 19 Extrait du bac

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 9 et que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire de zéro $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

On considère le sous-ensemble : $E=\left\{M(x,y,z)=\begin{pmatrix}x&-y&-y\\0&z&0\\y&x-z&x\end{pmatrix} / (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$

<u>Première partie</u> :

1- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$

b) Déterminer une base de $(E,+,\cdot)$

2- a) Vérifier que :

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \forall(x',y',z')\in\mathbb{R}^3 \ ; \ M(x,y,z)\times M(x',y',z')=M(xx'-yy',xy'+yx',zz')$$

b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif

<u>Deuxième partie</u> :

On considère le sous-ensemble F de E des matrices de la forme $M(x,y,0)$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

1- Montrer que F est un sous-groupe du groupe $(E,+)$

2- On note φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad ; \quad \varphi(x+iy)=M(x,y,0)$$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$

b) En déduire que $(F^*,\times)$ est un groupe commutatif. (F^* désigne $F-\{O\}$)

c) Montrer que $(F,+,\times)$ est un corps commutatif dont on précisera l'unité.

3- a) Vérifier que : $(\forall M(x,y,0)\in F)$; $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times M(x,y,0)=O$

b) En déduire qu'aucun des éléments du sous-ensemble F n'admet un inverse pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$

EXERCICE : 20 Extrait du bac

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau

unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\quad;\quad(x+yi)*(a+bi)=xa+\left(x^2b+a^2y\right)i$$

1-a) Montrer que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$

b) Montrer que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$

c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e que l'on déterminera.

d) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe $x+yi$ admet le nombre complexe

$\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i$ comme symétrique pour la loi $*$

2-On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ défini par : $E=\left\{x+yi\ /\ x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ y\in\mathbb{R}\right\}$

a) Montrer que E est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$

b) Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

3-On considère le sous-ensemble G de E défini par : $G=\{1+yi\ /\ y\in\mathbb{R}\}$

Montrer que G est un sous-groupe de $(E,*)$

4-On considère l'ensemble $F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}/\ x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ y\in\mathbb{R}\right\}$

a) Montrer que F est stable pour la loi $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$

b) Soit φ l'application de E vers F qui à tout nombre complexe $x+yi$ de E fait correspondre

la matrice $M(x^2,y)=\begin{pmatrix}x^2&y\\0&x^2\end{pmatrix}$ de F

Montrer que φ est un isomorphisme de $(E,*)$ vers $(F,\times)$

c) En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif.

<u>EXERCICE</u> : 21 Extrait du bac

On considère l'espace vectoriel de dimension 2 noté $(V_2,+,.)$.

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base de V_2. On pose : $\vec{e_1}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$ et $\vec{e_2}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur V_2 par :

$$\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4\ \ (x\vec{i}+y\vec{j})*(x'\vec{i}+y'\vec{j})=(xx'+yy')\vec{i}+(xy'+yx')\vec{j}$$

1-a) Montrer que $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ est une base de V_2

b) Vérifier que : $\vec{e_1}*\vec{e_1}=\vec{e_1}$; $\vec{e_2}*\vec{e_2}=\vec{e_2}$ et $\vec{e_1}*\vec{e_2}=\vec{e_2}*\vec{e_1}=\vec{0}$

c) Montrer que : $\forall(X,X',Y,Y')\in\mathbb{R}^4\ \ (X\vec{e_1}+Y\vec{e_2})*(X'\vec{e_1}+Y'\vec{e_2})=XX'\vec{e_1}+YY'\vec{e_2}$

2- a) Montrer que la loi $*$ est commutative.

b) Montrer que la loi $*$ est associative.

c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.

d) Montrer que $(V_2,+,*)$ est un anneau commutatif unitaire.

3- Soit $\vec{u}\in V_2-\{\vec{0}\}$. On note : $E_{\vec{u}}=\{\lambda\vec{u}\,/\,\lambda\in\mathbb{R}\}$

a) Montrer que $(E_{\vec{u}},+)$ est un sous-groupe du groupe $(V_2,+)$

b) Montrer que $(E_{\vec{u}},+,.)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(V_2,+,.)$

c) Montrer que : $E_{\vec{u}}$ stable pour $*\Leftrightarrow$ la famille $(\vec{u}*\vec{u},\vec{u})$ est liée

4- On suppose que : $(\exists\alpha\in\mathbb{R}^*)$; $\vec{u}*\vec{u}=\alpha\vec{u}$

On considère l'application

$$\varphi:\ \mathbb{R}^*\to E_{\vec{u}}$$
$$x\ \mapsto\ \frac{x}{\alpha}\vec{u}$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E_{\vec{u}},*)$

b) En déduire que $(E_{\vec{u}},+,*)$ est un corps commutatif.

EXERCICE: 22 Extrait du bac

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire, de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E=\{M(x,y)\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1- Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$

2- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

b) On pose $J = M(0,1)$. Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel réel $(E,+,.)$

3-a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

4- Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\left(\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\right) \quad ; \quad \varphi(x+iy)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

b) On pose $E^* = E-\{O\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

c) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

5- Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

<u>EXERCICE</u>: <u>2</u>3 Extrait du bac

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel de dimension 4.

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1- Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$

2- a) Montrer que E est un sous-espace de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

b) Montrer que l'espace vectoriel réel $(E,+,.)$ est de dimension 2

3-a) Montrer que E est stable pour la loi "$\times$"

b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif .

4- On définit dans $M_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par : pour tout $M(x,y)$ et $M(x',y')$ de $M_2(\mathbb{R})$,

$$M(x,y)TM(x',y') = M(x,y)\times M(x',y') - M(y,0)\times M(y',0)$$

Et soit φ l' application de $\mathbb{C}^*$ vers E qui à tout nombre complexe $x+iy$ (où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$) fait correspondre la matrice $M(x,y)$ de E

a) Montrer que E est stable pour la loi "T"

b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers (E,T)

c) On pose : $E^* = E - \{O\}$. Montrer que (E^*,T) est un groupe commutatif.

5- a) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi « + » dans E

b) Montrer que $(E,+,T)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 24 Extrait du bac

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

On pose $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ et pour tout (a,b) de $\mathbb{R}^2$, $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

1-Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_3(\mathbb{R}),+)$

2- On définit dans $M_3(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par :

$$\forall (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \qquad M(a,b)\mathrm{T}M(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$$

Vérifier que E est stable dans $\left(M_3(\mathbb{R}),\mathrm{T}\right)$

3- soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ dans E qui à tout nombre complexe non nul $a+ib$ (où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$) fait correspondre la matrice $M(a,b)$ de E

a) Vérifier que φ est un homomorphisme de $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ vers (E,T) et que $\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)=E^*$

où $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$

b)En déduire que $\left(E^*,\mathrm{T}\right)$est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre J

4- a) Montrer que la loi de composition interne "T" est distributive par rapport à la loi de composition interne "$+$"dans E

b) En déduire que $(E,+,\mathrm{T})$ est un corps commutatif .

Exercice 25 Extrait du bac

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif, que $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ est un espace vectoriel réel et que $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire, non commutatif et non intègre.

On pose : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&-3\\1&0\end{pmatrix}$ et $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-3y\\y&x\end{pmatrix}$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et

$$E=\left\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1-Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$, de dimension 2

2-a) Montrer que E est stable dans $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$

b) Montrer que $(\mathrm{E},+,\times)$est un anneau unitaire et commutatif.

3- On pose $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E^* définie par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x+iy)=M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de$\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ sur $\left(E^*,\times\right)$

b) En déduire que $\left(\mathrm{E}^*,\times\right)$ est un groupe commutatif.

c) Montrer que : $J^{2017}=\varphi\left(3^{1008}\sqrt{3}i\right)$,puis déterminer l'inverse de la matrice J^{2017} dans $\left(\mathrm{E}^*,\times\right)$

4- Montrer que $(\mathrm{E},+,\times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE1 : On rappelle que $\left(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$ est un espace vectoriel réel.

Correction

Soit V l'ensemble des matrices $\mathrm{M}_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathrm{IR}^2$.

1- Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$.

2- On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que (I,J) est une famille libre

b) Montrer que (I,J) est une famille génératrice de l'espace vectoriel $(\mathrm{V},+,\bullet)$

c) En déduire la dimension de $(\mathrm{V},+,\bullet)$

3- déterminer les composantes de $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base (I,J)

EXERCICE2 :On rappelle que $\left(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $\left(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,.\right)$ est un espace vectoriel réel et que $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ est un groupe commutatif.

Pour tout x et y réels, on pose : $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$ et soit $F = \left\{M(x,y) / (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

1- a)Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $\left(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,.\right)$

b) Donner une base de l'espace vectoriel $(F,+,.)$ puis préciser sa dimension

2- Montrer que F est stable dans $\left(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$

3- On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ dans F qui associe à tout nombre complexe $\mathrm{x}+i\mathrm{y}$ (où x et y sont deux réels) la matrice $\mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y})$.

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ vers $(F,\times)$

b) On pose : $F^* = F - \{M(0,0)\}$. Montrer que $\varphi\left(\mathbb{C}^*\right) = F^*$

c) Montrer que $\left(F^*,\times\right)$ est un groupe commutatif.

4- Montrer que $(F,+,\times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE3 : -On rappelle que $\left(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire dont le zéro est $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

et l'unité est $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $\left(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ est un espace vectoriel réel et on pose : $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

1-a)Vérifier que : $A^3=O$ et en déduire que A est un diviseur de zéro dans l'anneau $\left(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$

b)Vérifier que : $\left(A^2-A+I\right)\left(A+I\right)=I$ en déduire que la matrice $A+I$ admet un inverse

dans $\left(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ que l'on déterminera.

2-Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a,b)=aI+bA$ et l'on considère l'ensemble

$$E=\left\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Montrer que $\left(E,+,\cdot\right)$ est un espace vectoriel réel dont on déterminera une base et la dimension.

EXERCICE 4: $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

On rappelle que $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$ est un espace vectoriel réel .

On considère l'ensemble suivant $\mathcal{F}=\left\{\mathrm{M}(a,b)=\begin{pmatrix}a+b&-b\\5b&a-3b\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ muni de l'addition

des matrices $(+)$,de la multiplication d'une matrice par un réel $(\bullet)$ et de la multiplication des

matrices $(\times)$

On pose : $\mathrm{I}=\mathrm{M}(1,0)$, $\mathrm{J}=\mathrm{M}(0,1)$ et $\mathrm{O}=\mathrm{M}(0,0)$

1- a) Montrer que $(\mathcal{F},+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel

b- Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel $(\mathcal{F},+,\bullet)$ et donner sa dimension.

2- Soit α un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{R}$.

Montrer que la famille $(1,\alpha)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C},+,\bullet)$.

3- On considère l'application ψ de $\mathbb{C}$ vers $\mathcal{F}$ définie par : $\psi(z) = M(a,b)$ pour tout élément z de $\mathbb{C}$ tel que : $z = a + \alpha b$ où a et b sont des nombres réels .

a)Vérifier que : $J^2 = -2(I+J)$ et que : $\psi(\alpha) = J$

b- Déterminer les deux valeurs de α pour lesquelles l'application ψ est un isomorphisme de $(\mathbb{C},\times)$ sur $(\mathcal{F},\times)$

4- On prend : $\alpha = -1+i$. Ecrire dans la base (I,J) la matrice J^{2022}.

8

Probabilités

1 Vocabulaire

Définition

Une expérience aléatoire est une expérience où on ne peut pas prévoir avec certitude ces résultats avant de l'effectuer comme le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé ... leurs résultats dépendent du **hasard**.

Vocabulaires :

1. Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle **une éventualité**.
2. L'ensemble de toutes les éventualités s'appelle **univers** et souvant noté Ω.
3. Toute partie de Ω s'appelle **un événement**.
4. Les événements formés d'un seul élément sont appelés **événements élémentaires**.
5. Etant donné un univers Ω, l'événement Ω est **l'événement certain**.
6. L'ensemble vide est **l'événement impossible**.
7. Etant donné un univers Ω, soient A et B deux événements.
   (a) L'événement formé des éventualités qui sont dans A **et** dans B est noté $A \cap B$.
   (b) L'événement formé des éventualités qui sont dans A **ou** dans B est noté $A \cup B$.
   (c) L'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A constitue un événement appelé **événement contraire** de A, noté $\overline{A}$.
   (d) A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

2 Espaces probalisés finis

Définitions

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un ensemble non vide et fini.

1. Si on associe à chaque élément a_i de Ω un nombre $p_i \in [0,1]$ pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$ et tel que $\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1$, alors on dit qu'on a définie une probabilité p sur Ω.
2. On dit que la probabilité de l'événement élémentaire $\{a_i\}$ est le nombre p_i pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$ et on note $p(\{a_i\}) = p_i$ ou $p(a_i) = p_i$.
3. Le couple (Ω, p) s'appelle un **espace probabilisé fini**.

Définition

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A un événement.
La probabilité de A est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A notée $p(A)$.

Remarques :

1. Toute probabilité sur Ω est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$.
2. $p(\varnothing) = 0$ et $p(\Omega) = 1$.

Propriétés

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A et B deux événements.

1. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
2. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
3. Si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

1- Equiprobabilité

Définition

On dit qu'il y a **équiprobabilité** quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Remarque

Dans les exercices, l'équiprobabilité peut être déclarée explicitement comme elle peut être déduite des conditions de l'expérience telles que : « dé équilibré ou parfait », « boule tirée de l'urne au hasard », « boules indiscernables »...

Proposition

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini où il y a **équiprobabilité** et A un événement. Alors on :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{le nombre de cas favorables}}{\text{le nombre de cas possibles}}$$

2- Probabilité conditionnelle

Définition

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$.
La probabilité de réalisation de B sachant que A est déjà réalisé est : $p_A(B) = p(B|A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

Proposition

(1) Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A et B deux événements de probabilités non nulles. On a :

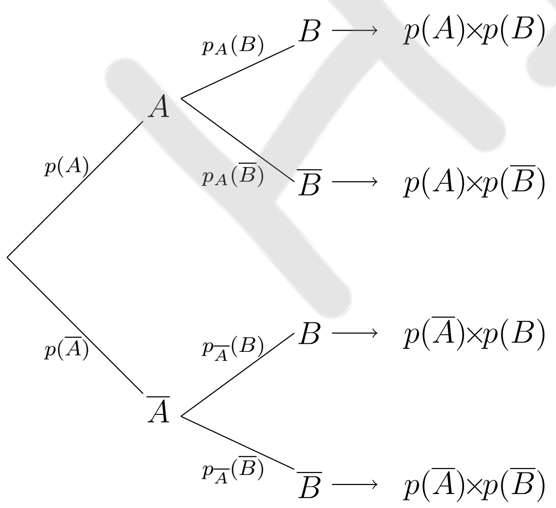
$$p(A\cap B) = p(A)p_A(B) = p(B)p_B(A),$$

c'est **la formule des probabilités composées**.

(2) Si Ω est la réunion de deux événements non nuls et non homogènes A_1 et A_2, alors pour tout événement B on a :

$$p(B) = p(B\cap A_1) + p(B\cap A_2) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B).$$

Arbres pondérés



Règles de construction :

1. La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est 1.
2. La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

3- Indépendance

Définition

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire.
On dit que A et B sont indépendants si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Proposition

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $p(A) \neq 0$
A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B) = p(B)$.

Remarques

(1) Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, alors :

$$p_B(A) = p(B) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B).$$

(2) A et B sont indépendants veut dire que la réalisation de chacun d'eux n'est pas influencée par la réalisation de l'autre.

$\boxed{3}$ Indépendance de deux épreuves.

Exemples

Deux urnes u_1 et u_2 contiennent des boules de certains couleurs.

(1) Si on tire une boule de chaque urne, alors cette expérience contient deux épreuves indépendants. Si $A = A_1$ et A_2 est un événement de cette expérience avec A_1 et A_2 sont deux événements des deux épreuves relatives aux urnes respectivement, alors :

$$p(A) = p(A_1) \times p(A_2).$$

Par exemple si $A =$" obtenir une boule noir de u_1 et obtenir une boule jaune de u_2 ".
Alors $A_1 =$" obtenir une boule noir de u_1 "
et $A_2 =$" obtenir une boule jaune de u_2 ".

(2) On considère une expérience où on tire une boule de l'urne u_1 une boule. Si le résultat est une boule blanche, alors on tire deux boules de l'urne u_2 et sinon on tire trois boules. Les deux épreuves dans cette expérience sont dépendants.

Epreuves répétées :

Proposition

On considère dans une expérience une épreuve où on s'interesse seulement à la réalisation ou pas d'un événement A avec $p = p(A)$.
On répéte cette épreuve indépendamment n fois dans les mêmes conditions. Alors la probabilité que l'événement A soit réalisé k fois exactement, avec $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$ est :

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

4 Variables aléatoires - Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Définitions

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

(1) Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ s'appelle une **variable aléatoire**.

(2) Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$, alors déterminer la **la loi de probabilité de la variable aléatoire X** veut dire calculer, pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$, la probabilité de la réunion de tous les événements d'images x_i par X. Cette réunion sera notée $(X = x_i)$.
On résume cette loi dans la tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

(3) Si $x_1 < x_2 < ... < x_n$, alors :

$$p(X \leqslant \alpha) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \alpha < x_1 \\ p_1 + p_2 + ... + p_i & , \text{ si } x_i \leqslant \alpha < x_{i+1} \\ 1 & , \text{ si } \alpha > x_n \end{cases}$$

5 Espérence mathématique - variance - écart type d'une variable aléatoire.

Définitions

Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω.
On pose $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ et $p_i = p(X = x_i)$ pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$.

(1) L'espérense mathématique de la variable aléatoire X est le nombre réel noté $E(X)$ définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n.$$

(2) La variance de la variable aléatoire X est le nombre réel positif noté $V(X)$ définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 p_i = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + ... + (x_n - E(X))^2 p_n.$$

(3) L'écart type de la variable aléatoire X est le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Proposition

On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ avec $E(X^2) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n$.

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

6 La loi binomiale.

Définition

On considère une expérience aléatoire composée de n épreuves répétées et indépendantes deux à deux. Soit A un événement de probabilté p de cette épreuve.
On appelle une variable aléatoire binomiale X de paramètres p et n la variable aléatoire qu'est égale au nombre de fois la réalisation de A.

Proposition

Sous les mêmes hypothèses de la définition, on a :

(1) $X(\Omega) = \{0; 1; 2; ...; n\}$.

(2) Pour tout $k \in \{0; 1; ...; n\}$, on a $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

(3) $E(X) = np$.

(4) $V(X) = np(1-p)$.

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 2BSMF	Série 8 Probabilités	Lycée qualifiant : Almajd Matière : mathématique

Sauf mention contraire, on se place dans un espace probabilisé (Ω, P).

Généralités

Exercice 1 : 1. Soient A, B et C trois évènements. Montrer que $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C)$ en faisant un diagramme.

2. Conjecturer la *formule de Poincaré* donnant $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ puis la prouver par récurrence.

Exercice 2 : . Soient A et B deux évènements.

1. Montrer rigoureusement que $\overline{A} \cap B = B - A \cap B$ en s'aidant d'un diagramme.
2. Si A et B sont incompatibles, $\overline{A}$ et B le sont-ils également ?
3. Si A et B sont indépendants, $\overline{A}$ et B le sont-ils également ?

Exercice 3 : . Soient A et B deux évènements.

1. Montrer rigoureusement que $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ en s'aidant d'un diagramme.
2. Si A et B sont incompatibles, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont-ils également ?
3. Si A et B sont indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont-ils également ?

Exercice 4 : . On jette trois pièces. Déterminer l'évènement contraire de :

1. « obtenir au moins une fois pile » ;
2. « obtenir pile à chaque fois » ;
3. « obtenir exactement une fois pile ».

Exercice 5 : . Soient A et B deux évènements avec $\mathrm{P}(A) = 0,2$, $\mathrm{P}(B) = 0,5$ et $\mathrm{P}(A \cup B) = 0,6$.

1. A et B sont-ils incompatibles ?
2. Calculer $\mathrm{P}(\overline{A})$, $\mathrm{P}(\overline{B})$ et $\mathrm{P}(A \cap \overline{B})$.

Exercice 6 : Soient A et B deux évènements avec $\mathrm{P}(A) = 0,1$, $\mathrm{P}(B) = 0,6$ et $\mathrm{P}(A \cup B) = 0,65$.

1. Calculer $\mathrm{P}(A \cap B)$, $\mathrm{P}_B(A)$ et $\mathrm{P}_A(B)$.
2. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 7 : . Calculer la probabilité qu'au moins deux élèves aient le même jour d'anniversaire dans une classe de 30.

Exercice 8 : . Dans un atelier, deux machines produisent les mêmes pièces, au nombre total de 1000. La première en fournit les $4/5$. De plus, 5% des pièces produites par la première machine sont défectueuses et 4% pour la seconde.

1. Construire le tableau de Karnaugh des effectifs.
2. On tire une pièce au hasard. Soient A=« la pièce est produite par la première machine », B=« la pièce est produite par la seconde » et C=« la pièce est défectueuse ». Calculer $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(C)$, $\mathrm{P}(A \cap C)$ et $\mathrm{P}(A \cup C)$.

Conditionnement et indépendance

Exercice 9 : . On lance un dé. Calculer la probabilité que la face soit supérieure à 4 sachant qu'elle est supérieure à 3.

Exercice 10 : . On tire une carte d'un jeu de 32.

1. Calculer la probabilité que ce soit un pique sachant que c'est un roi.
2. Calculer la probabilité que ce soit un roi sachant que c'est un pique.
3. Les évènements « tirer un roi » et « tirer un pique » sont-ils indépendants ?

Exercice 11 : . Le lycée général d'Ugine compte 410 élèves dont 15% de filles. Seuls 30% des garçons et 40% des filles savent où se trouve le mont Charvin. On interroge un élève pris au hasard.

1. Calculer la probabilité que cet élève soit une fille qui sait où se trouve le mont Charvin.
2. Calculer la probabilité que cet élève soit une fille qui ne sait pas où se trouve le mont Charvin.
3. Sachant que l'élève interrogé sait où se trouve le mont Charvin, calculer la probabilité que ce soit une fille.

Exercice 12 : . On lance une pièce quatre fois de suite.

1. Calculer la probabilité d'obtenir pile quatre fois.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois pile.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois pile.
4. Calculer la probabilité d'obtenir pile et face en alternance.

Exercice 13 : . Le chevalier de Méré posa la question suivante à Pascal : « Est-il plus probable d'obtenir au moins une fois 6 quand on lance un dé quatre fois de suite, ou d'obtenir au moins un double 6 quand on lance deux dés vingt-quatre fois de suite » ?
Qu'en est-il ? Pourquoi le chevalier n'arrivait-il pas à répondre par l'expérience à son problème ?

Exercice 14 : . Un dixième de la population française a été vacciné contre la grippe saisonnière. On constate qu'il y a 25% de vaccinés parmi les malades. On sait aussi qu'il y a 8% de malades parmi les vaccinés. Calculer la probabilité d'attraper la grippe pour un individu non vacciné.

Exercice 15 : .

1. Trois chasseurs tirent de façon indépendante sur trois canards. Ils sont sûrs d'atteindre leur cible. Calculer les probabilités que les trois canards soient touchés puis qu'un seul canard soit touché.
2. Dix canards, dont un nommé Mario, vaquent à leurs banales occupations de canards. Dix chasseurs tirent, de façon indépendante, sur ce groupe de canards. Chacun d'eux est sûr d'atteindre sa cible. Calculer la probabilité que Mario soit touché.

Exercice 16 : . On dispose d'une urne contenant une boule rouge et deux boules bleues. On tire successivement et sans remise les trois boules.

1. Construire l'arbre de cette expérience.

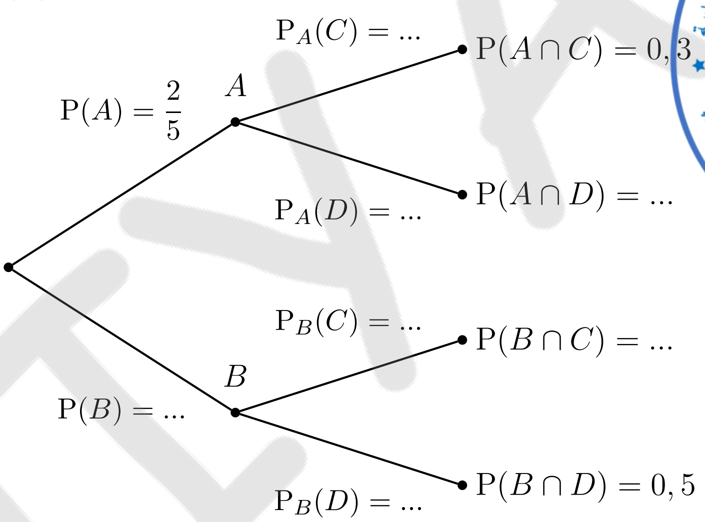
2. Soit X le rang de tirage de la boule rouge. Déterminer la loi de X.
3. Soit Y la couleur de la dernière boule tirée, en comptant 1 pour rouge et 2 pour bleue. Déterminer la loi de Y.
4. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 17 : . On jette simultanément trois dés.
La modélisation est plus aisée si on les suppose discernables.

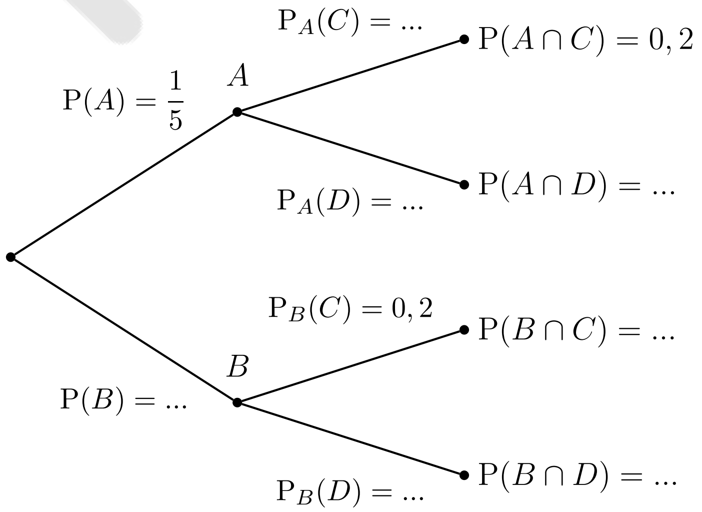
1. Modéliser l'expérience, i.e. donner Ω et P.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un « 1 ».
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux faces portant le même chiffre.
4. Calculer la probabilité que la somme des trois faces soit paire.
5. Les évènements considérés aux deux questions précédentes sont-ils indépendants ?

Probabilités totales

Exercice 18 : . Compléter l'arbre :



Exercice 19 : . Compléter l'arbre :



Exercice 20 :. On dispose de 1000 pièces de monnaie : 999 normales et 1 possédant 2 côtés « pile ».
On tire au hasard une pièce, et on la lance 10 fois de suite.

1. Calculer la probabilité d'obtenir 10 fois « pile ».
2. Sachant qu'on a obtenu 10 fois « pile », quelle est la probabilité qu'on ait tiré la fausse pièce ?

Exercice 21 :. Un candidat doit répondre à une question pour laquelle on lui donne trois réponses possibles dont une seule est bonne. Le candidat connaît les trois quarts des réponses, mais peut aussi répondre au hasard.

1. Quelle est la probabilité que le candidat connaisse la bonne réponse sachant qu'il a bien répondu ?
2. Donner une relation entre les ratios de réponses connues du candidat et de bonnes réponses.

Exercice 22 :. On se donne un carré $ABCD$ de centre O. Un ragondin, nommé Alfred, se déplace aléatoirement d'un point à un autre du carré en suivant les segments formés par $OABCD$. Alfred part du point A. Le point O est muni d'un klaxon qu'Alfred aime faire fonctionner.
On note p_n la probabilité qu'Alfred klaxonne pour la première fois au n-ième déplacement.

1. Calculer p_1.
2. Justifier que $p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}$.
3. Soit K_n l'évènement « Alfred klaxonne au moins une fois au bout de ses n premiers déplacements ».
   (a) On note $S_n = p_1 + \cdots + p_n$. Montrer que $\mathrm{P}(K_n) = S_n$.
   (b) Calculer S_n. Pouvait-on prévoir plus facilement ce résultat ?
   (c) Calculer la limite de S_n et interpréter le résultat.

Extraits du bac

Exetrait du bac 1

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$). On retire, sans remise, l'une après l'autre toutes les boules de cette urne. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1 1- Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?

1 2- Calculer la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) ?

1 3- On considère la variable aléatoire X_n égale au nombre de tirages nécessaire pour obtenir les boules 1, 2 et 3. Déterminer la loi de probabilité de X_n.

Exetrait du bac 2

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

On désigne par X la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de la face « pile ».

(le nombre de fois d'apparition de la face « pile » divisé par 10)

1 1-a) Déterminer les valeurs prise par X

1 b) Déterminer la probabilité de l'événement $\left[X = \frac{1}{2}\right]$

1 2- Quelle est la probabilité que X soit strictement supérieur ou égale à $\frac{9}{10}$

Exetrait du bac 3

Un sac contient 2n boules (n dans $\mathbb{N}^*$) , dont n sont blanches et n sont noires.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
Un jeu consiste à tirer une boule du sac à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boule et à noter aussi sa couleur.

La règle du jeu indique que :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on gagne 20 points .
- Si les deux boules tirées sont noires, on perd 20 points .
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gain est nul .

0.75 1- Calculer la probabilité de gagner 20 points , la probabilité de perdre 20 points et la probabilité de réaliser un gain nul.

2- On répète 5 fois le jeu précédent.

0.5 a) Calculer la probabilité de gagner 100 points.

1 b) Calculer la probabilité de gagner 40 points.

3- Au cours d'un seul jeu ,on considère la variable aléatoire X qui prend uniquement les valeurs -20 si on perd , 0 si le gain est nul et +20 si on gagne.

0.5 a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

0.25 b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Exetrait du bac 4

On a deux boites U et V .La boite U contient 4 boules rouges et 4 boules bleues.

La boite V contient deux boules rouges 4 boules bleues.

On considère l'épreuve suivante : On tire au hasard une boule de la boite U :Si elle est rouge, on la remet dans la boite V puis on tire au hasard une boule de la boite V ;si elle est bleue on la pose de coté puis on tire une boule de la boite V .

Soient les événements suivants : R_U « La boule tirée de la boite U est rouge »

B_U « La boule tirée de la boite U est bleue »

R_V « La boule tirée de la boite V est rouge »

B_V « La boule tirée de la boite V est bleue »

0.5 1- Calculer la probabilité de chacun des deux événements R_U et B_U .

0.5 2- a)Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement R_U est réalisé.

0.5 b) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement B_U est réalisé.

1 3- Montrer que la probabilité de l'événement B_V est : $\dfrac{13}{21}$

0.5 4- En déduire la probabilité de l'événement R_V .

Exetrait du bac 5

0.5 I-1- a étant un entier, montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors $a^{2016} \equiv 1 \quad [13]$

2- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(\mathrm{E}):\ x^{2015} \equiv 2 \quad [13]$ et soit x une solution de l'équation (E).

0.5 a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0.5 b) Montrer que : $x \equiv 7 \quad [13]$

0.5 3- Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{7 + 13k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

II-Une urne contient 50 boules portant les numéros de 1 à 50(les boules sont indiscernables au toucher)

0.5 1- On tire au hasard une boule de l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?

0.5 2- On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro, puis on la remet dans l'urne. On répète l'expérience précédente 3 fois .Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?

Exetrait du bac 6

On considère trois urnes U , V et W.
L'urne W contient une boule noire et deux boules blanches et chacune des deux urnes U et V contient deux boules blanches et deux boules noires.
On effectue l'expérience suivante : On tire une boule de l'urne W. Si cette boule est blanche on la met dans l'urne U puis on y tire deux boules, mais si elle est noire on la met dans l'urne V et on y tire deux boules.

0.25 1-Qu'elle est la probabilité pour que le tirage s'effectue de l'urne U ?

0.75 2- Qu'elle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches à la fin de l'expérience?

3-Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches obtenue à la fin de l'expérience.

1 Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exetrait du bac 7

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

I- On tire au hasard successivement et avec remise quatre boules de l'urne . et on considère l a variable aléatoire X égale au nombre de boules noires tirées.

1 1- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

0.5 2- Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

II-On réalise l'expérience aléatoire suivante en trois étapes :

<u>Etape 1</u> :On tire une boule de l'urne ,on marque sa couleur et on la remet dans l'urne.

<u>Etape 2 :</u>On ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à l'étape 1

<u>Etape 3 :</u> On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne qui contient alors 12 boules après l'étape 2

On considère les évènements suivants :

N "la boule tirée à l'étape 1 est noire"

R "la boule tirée à l'étape 1 est rouge"

E "toutes les boules tirées à l'étape 3 sont noires "

0.5 1) Montrer que : $p(E \cap N) = \dfrac{12}{55}$

0.5 2) Calculer $p(E)$

0.5 3) Calculer la probabilité de l'événement R sachant que E est realisé.

Exetrait du bac 8

Une urne contient 10 boules blanches et deux boules rouges.

On extrait les boules de l'urne l'une après l'autre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, puis on arrête l'expérience.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boule tirée .

0.25 1) a-Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X

0.5 b-calculer la probabilité de l'événement $[X=1]$

0.5 c-Montrer que : $p[X=2]=\dfrac{5}{33}$

0.5 d-calculer la probabilité de l'événement $[X=3]$

0.5 2) a-Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est : $E(X)=\dfrac{13}{11}$

0.75 b-Calculer $E(X^2)$,et en déduire la valeur de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .

Exetrait du bac 9

n est un entier naturel supérieur ou égal à 4 .

On dispose de trois urnes U_1 , U_2 et U_3

L'urne U_1 contient une boule rouge et $(n-1)$ boules noires.

L'urne U_2 contient deux boules rouges et $(n-2)$ boules noires.

L'urne U_3 contient trois boules rouges et $(n-3)$ boules noires.

On considère l'épreuve aléatoire suivante : On choisit au hasard une urne parmi les trois, ensuite on tire simultanément deux boules de l'urne qui a été choisit.

Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules rouges tirées.

0,25 1) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X

0,75 2) a- Montrer que la probabilité de l'événement $(X=2)$ est égale à $\dfrac{8}{3n(n-1)}$.

0,75 b- Montrer que la probabilité de l'événement $(X=1)$ est égale à $\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

0,5 c- En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

0,75 3) Sachant qu'on a obtenu deux boules rouges, quelle est la probabilité que ces deux boules proviennent de l'urne U_3.

Exetrait du bac 10

Une boite contient quatre boules : une boule blanche et trois boules rouges indiscernables au toucher.

On tire une boule de la boite, on note sa couleur puis on la remet dans la boite.

On effectue la même épreuve plusieurs fois jusqu'à l'obtention pour la première fois de deux boules successives de même couleur puis on arrête l'expérience.

Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage où l' on arrête l'expérience.

1 1) Calculer la probabilité de chacun des deux événements suivants :

$$[X=2] \text{ et } [X=3]$$

2) Soit k un entier naturel non nul.

0,75 a-Montrer que la probabilité de l'événement $[X=2k]$ est $p_{2k}=\frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$

0,75 b- Montrer que la probabilité de l'événement $[X=2k+1]$ est $p_{2k+1}=\left(\frac{3}{16}\right)^{k}$

Exetrait du bac 11

Soit n un entier naturel impair tel que : $n \geq 3$

On considère n boites numérotées de 1 à n . La boite n° k ($(1 \leq k \leq n)$) contient k boules blanches et n-k boules noires.

On choisit au hasard une boite et on tire une boule de cette boite .

0.5pt 1- Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

0.75pt 2- Calculer la probabilité pour que le tirage soit fait dans une boite portant un numéro impair.

0.75pt 3- Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche sachant que la boite choisie porte un numéro impair.

Exercice 1

On considère deux urne U et V qui contient chacune des boules blanches et rouges indiscernables au toucher.
On choisit au hasard et de manière équiprobable une des deux urnes et on y tire une boule au hasard.
Soit les évènements :

A « l'urne U a été choisie »
B « l'urne V a été choisie »
R « obtenir une boule rouge »

1) On suppose dans cette question que l'urne U contient une boule rouge et 4 boules blanches ; et que l'urne V contient 4 boules rouges et deux boules blanches.

a) déterminer les probabilités suivantes : $P(A)$, $P_A(R)$ et $P(A\cap R)$

b) Montrer que $P(R)=\dfrac{13}{30}$

c) Sachant qu'on a obtenu une boule rouge, quelle est la probabilité qu'elle soit tiré de l'urne U ?

2) Dans cette question, on suppose que l'urne U contient 4 boules blanches et n boules rouges ; et que l'urne V contient deux boules blanches et $5-n$ boules rouges (avec $n\in\{0;1;2;3;4;5\}$)

a) Exprimer $P_A(R)$ et $P_B(R)$ en fonction de n

b) Montrer que $P(R)=\dfrac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$

c) On sait que n prend six valeurs entières. Déterminer la distribution des cinq boules sur les urnes U et V pour que $P(R)$ soit maximale.

Exercice 2

Un sondage est effectué dans un conservatoire de musique.
60 % des élèves pratiquent un instrument à cordes (C). 45 % des élèves pratiquent un instrument à vent (V)
10 % des élèves pratiquent un instrument à cordes et vent.

1) On choisit un élève au hasard dans le conservatoire.

a) Quelle est la probabilité de l'événement « Cet élève pratique au moins un des instruments considérés »

b) Quelle est la probabilité de l'événement « Cet élève pratique un et un seul des instruments considérés »

2) On choisit au hasard un élève pratiquant un instrument C. Quelle est la probabilité pour que cet élève pratique un instrument V ?

3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard n élèves. On suppose que le nombre d'élèves du conservatoire est suffisamment grand pour que la probabilité de rencontrer un instrumentiste du type donné soit constante au cours du sondage.

a) Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un des élèves choisis pratique un instrument C ?

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n\geq 0,999$

DL8

Exercice 3

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.

Dans les questions 1 et 2 on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.

Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

Correction

1) Soit les évènements suivants :

A **« Les trois boules sont rouges. »**

B **« Les trois boules sont de la même couleur. »**

C **« Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »**

a) Calculer les probabilités $P(A), P(B)$ **et** $P(C)$.

b) On appelle X **la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues**

Déterminer la loi de probabilité de X **et calculer** $E(X)$

2) Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n **boules rouges où** n **est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc** $n+5$ **boules, c'est-à-dire,** n **rouges, 3 jaunes et 2 vertes.**

On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.

Soit les évènements suivants :

D **« Tirer deux boules rouges. »**

E **« Tirer deux boules de la même couleur. »**

a) Montrer que la probabilité de l'événement D **est** $P(D)=\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

b) Calculer la probabilité $P(E)$ **de l'évènement** E **en fonction de** n.

c) Pour quelles valeurs de n **a-t-on** $P(E)\geq\dfrac{1}{2}$,

Examen blanc

Page	Examen National blanc	
1 / 4	$2^{\text{ème}}$ baccalauréat Sciences mathématiques	ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⴰⵍ / المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
	Lycée : Almajd	Prof : Aissa HIYAB

Matière	Mathématique	Durée	4 heures
Filière	Sciences mathématiques : A et B	Coefficient	9

INSTRUCTION GENERALES

- ✓ <u>L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.</u>
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.
- ✓ Ecrire lisiblement et vérifier que le sujet est complet : il comporte 3 pages numérotées de 1 à 4, celle-ci est comprise.
- ✓ Assurez-vous que vous avez traité tous les exercices avant de quitter la salle d'examen.

COMPOSANTS DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et répartie suivant les domaines comme suite :

Exercice 1	Structures algébriques	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3.5 points
Exercice 3	Arithmétique	3.5 points
Exercice 4	Problème d'analyse	10 points

- ✓ ln Désigne la fonction logarithme népérien
- ✓ $\bar{a}$ Désigne le conjugué du nombre complexe a

Correction

Correction

Exercice 1 :

Pour tout $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$, on considère la matrice $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$

Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $E=\left\{M_{(a;b)} \,/\, a^2-2b^2=1\right\}$

0.25pt 1) a) On pose $A=\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A\in E$

0.5pt 2) a) Montrer que E est une partie stable par-rapport à la loi $\times$ et que $\times$ est commutatif dans E

1pt b) Montrer que tous les éléments de E admet un inverse dans E par-rapport à la loi $\times$

0.5pt c) Montrer que $(E;\times)$ est un groupe commutatif.

3) On pose $A^0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $A^{n+1}=A^n\times A$

On considère l'ensemble $G=\left\{A^n \,/\, n\in\mathbb{N}\right\}$

0.25pt a) Vérifier que $G\subset E$

0.5pt b) Soit H l'ensemble des symétries des matrices de G par-rapport à la loi $\times$ dans E

Montrer que $H=\left\{B^n \,/\, n\in\mathbb{N}\right\}$ tel que $B=\begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

Soit m un nombre complexe différent de i et de $-i$

Partie 1 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z ; (E): $z^2-(1+i)(1+m)z+(1+m^2)i=0$

0.25pt 1) a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=(1-i)^2(1-m)^2$

0.25pt b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Partie 2 : On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

Soit r la transformation qui au point M , d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z'=iz+2$

0.5pt 1) Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

0.25pt 2) On considère les points A et B d'affixes respectifs $z_1=m+i$ et $z_2=mi+1$

Montrer que $r(A)=B$

3) On suppose que $|m|=1$

0.75pt a) Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$

0.25pt b) Vérifier que $z_1^2=m\left[(m-\overline{m})+2i\right]$

0.75pt c) En déduire que $arg(z_1)\equiv\dfrac{1}{2}arg(m)+\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

0.5pt 3) Montrer que $|z_1|+|z_2|\geq 2$

Exercice 3 :

I) Soit x et y deux entiers tel que $pgcd(x;y)=1$. On pose $z=x^8+y^8$

1) Soit p un nombre premier divise z et supérieur strictement à 2.

0.5pt a) Montrer que p ne divise ni x ni y et déduire que $pgcd(x;p)=1$

0.25pt b) En déduire que $\exists k\in\mathbb{Z}$, $kx\equiv 1[p]$

0.5pt c) En déduire que $\exists q\in\mathbb{Z}$, $q^8+1\equiv 0[p]$

0.5pt 2) a) Soit $a\in\mathbb{Z}$

-Montrer que si a est pair alors $a^4\equiv 0[8]$

-Montrer que si a est impair alors $a^4\equiv 1[8]$

0.25pt b) En déduire que $z\equiv 1[8]$ ou $z\equiv 2[8]$

0.25pt II) 1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{Z}$ on a : $x^2\equiv x[2]$ et $x^3\equiv x[3]$

0.5pt 2) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{Z}$ on a : $x^5\equiv x[2]$ et $x^5\equiv x[3]$

0.5pt 3) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{Z}$ on a : $x^5\equiv x[5]$ et déduire que $(\forall x\in\mathbb{Z})$ $x^5\equiv x[30]$

0.25pt 4) En déduire que pour tout $a,b,c\in\mathbb{Z}$ on a $30/a^5+b^5+c^5 \Leftrightarrow 30/a+b+c$

Exercice 4 :

Première partie :

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=2x-(1+2x)ln(1+2x)$

0.5pt 1) Montrer que g est décroissante sur $[0;+\infty[$

0.25pt 2) En déduire que $\forall x\in[0;+\infty[$ $g(x)\le 0$

Deuxième partie :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{ln(1+2x)}{x} & ; \quad x>0 \\ f(0)=2 \end{cases}$

Correction

0.25pt 1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0.25pt b) Montrer que f est continue à droite en 0.

0.5pt c) Montrer que $\forall x\in]0;+\infty[$ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(1+2x)}$ et déduire les variations de f

0.5pt 2) a) Montrer que $\forall u\in[0;+\infty[$ $1-2u\le\dfrac{1}{1+2u}\le 1-2u+4u^2$

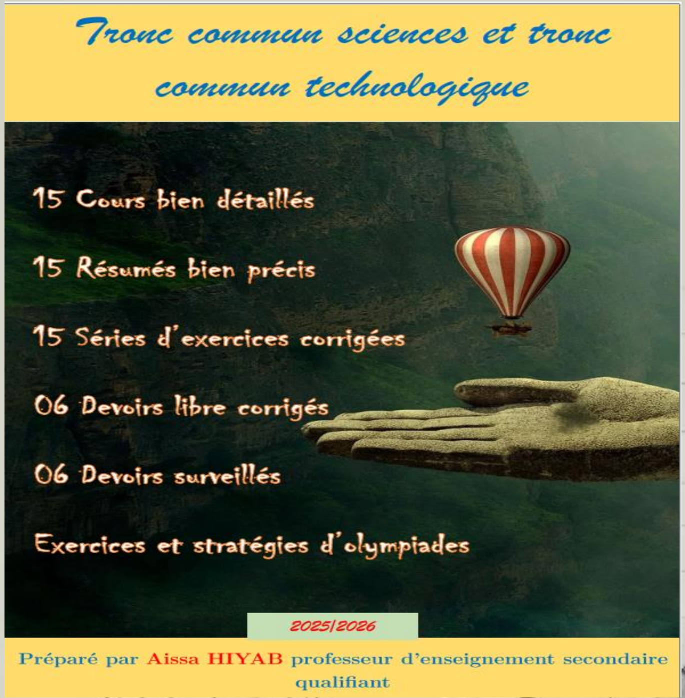
0.25pt b) En déduire que $\forall x\in[0;+\infty[$ $2x-2x^2\le ln(1+2x)\le 2x-2x^2+\dfrac{8x^3}{3}$

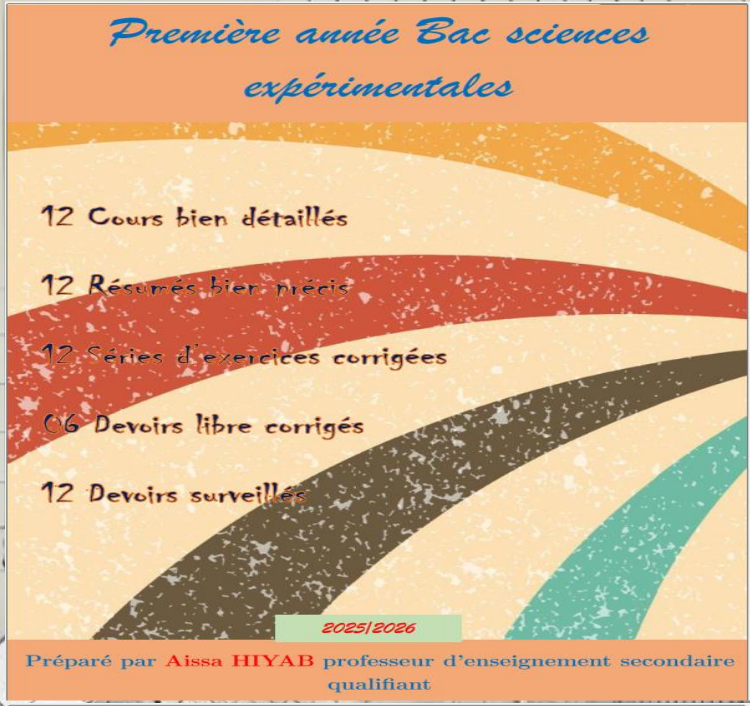
0.25pt c) Montrer que $\forall x\in]0;+\infty[$ $-2\le\dfrac{f(x)-2}{x}\le -2+\dfrac{8x}{3}$

0.25pt d) En déduire que f est dérivable à droite en 0.

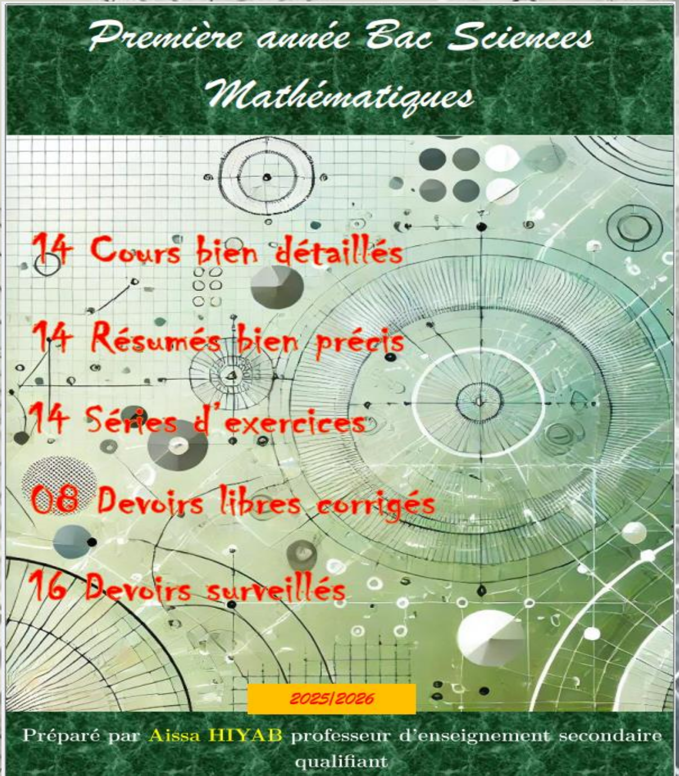
0.5pt 3) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

	Troisième partie :
	On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x)=ln(1+2x)$
0.5pt	1) a) Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet deux solutions : 0 et β tel que $1\le\beta\le 2$
0.75pt	b) En déduire le signe $h(x)-x$ sur $[0;+\infty[$
0.25pt	c) Vérifier que si $x\in]0;\beta[$ alors $h(x)\in]0;\beta[$
0.5pt	d) Montrer que $\forall x\in[1;+\infty[\quad h'(x)\le\dfrac{2}{3}$
	2) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=h(u_n)$.
0.5pt	a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\in]0;\beta[$
0.5pt	b) Montrer que (u_n) est convergente.
0.5pt	c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad \displaystyle\int_{u_n}^{\beta} h'(t)dt\le\frac{2}{3}(\beta-u_n)$
0.5pt	d) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\le\beta-u_n\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n(\beta-1)$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$
	Quatrième partie :
	On considère la fonction F définie par $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}f(t)dt$
0.25pt	1) Montrer que la fonction F est définie sur $[0;+\infty[$
0.5pt	2) a) Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$
0.5pt	b) Montrer que $\forall x\in]0;+\infty[\quad F'(x)=\dfrac{ln(1+4x)-ln(1+2x)}{x}$ et déduire les variations de F
0.5pt	3) a) Montrer que $\forall x\in]0;+\infty[\quad xf(2x)\le F(x)\le xf(x)$
0.25pt	b) En déduire que F est dérivable à droite en 0.
0.25pt	c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$
0.25pt	3) Dresser le tableau de variations de F

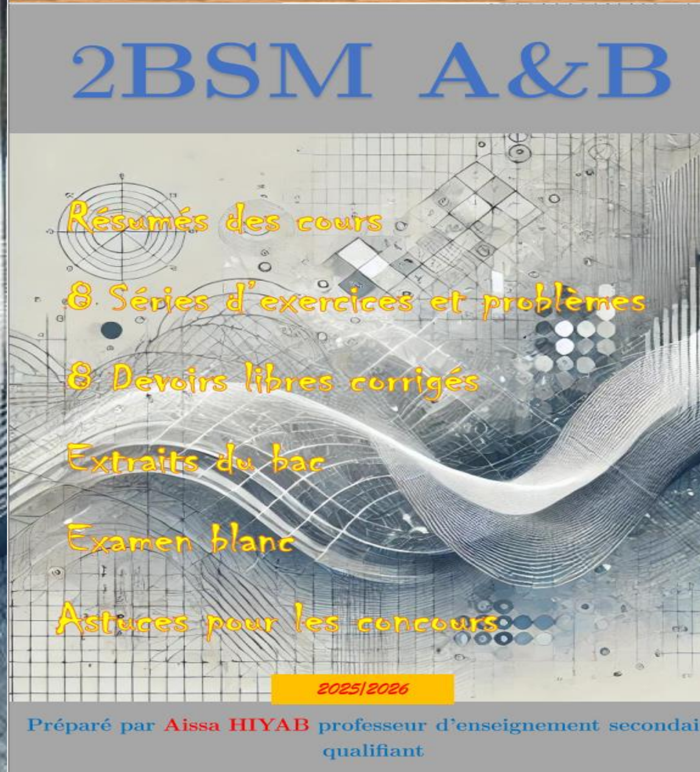

Tronc commun sciences et tronc commun technologique
15 Cours bien détaillés
15 Résumés bien précis
15 Séries d'exercices corrigées
06 Devoirs libre corrigés
06 Devoirs surveillés
Exercices et stratégies d'olympiades
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


Première année Bac sciences expérimentales
12 Cours bien détaillés
12 Résumés bien précis
12 Séries d'exercices corrigées
06 Devoirs libre corrigés
12 Devoirs surveillés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


2BACSPF
&
2BACSVTF
12 Cours bien détaillés
12 Résumés bien précis
12 Séries d'exercices corrigées
06 Devoirs libres corrigés
12 Devoirs surveillés
Extraits du bac
04 Examens blancs corrigés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondai
qualifiant


Première année Bac Sciences Mathématiques
14 Cours bien détaillés
14 Résumés bien précis
14 Séries d'exercices
08 Devoirs libres corrigés
16 Devoirs surveillés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


Première année Bac sciences économiques et la gestion
10 Cours bien détaillés
10 Résumés bien précis
10 Séries d'exercices
6 Devoirs libres corrigés
6 Devoirs surveillés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


2BSM A&B
Résumés des cours
8 Séries d'exercices et problèmes
8 Devoirs libres corrigés
Extraits du bac
Examen blanc
Astuces pour les concours
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondai
qualifiant