Tle S PRÉPA

Nicolas Nguyen

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR BERTRAND HAUCHECORNE

MATHS

de la terminale S à la prépa scientifique

- Résumé de cours clair et précis avec tous les théorèmes essentiels
- Méthodes efficaces de résolution d'exercices ou de problèmes
- Sélection d'exercices classiques avec solution et indications
- Corrections détaillées accompagnées de commentaires
- Conseils du professeur de prépas

ellipses

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques

de la terminale S
à la prépa scientifique

Nicolas Nguyen

Agrégé de mathématiques

Professeur de mathématiques en MPSI

au Lycée François Rabelais de Saint-Brieuc

ellipses

PRÉFACE

Faire des maths en vacances ? Pourquoi pas !

La collection **Prépas Sciences** a pour vocation l'accompagnement des étudiants de classes préparatoires scientifiques de la rentrée de première année jusqu'à l'intégration dans une école ou dans une filière universitaire qualifiante.

Le début d'année en prépa est un passage difficile, parfois décourageant, car le rythme d'acquisition des connaissances y est rapide et l'abstraction est souvent un obstacle pour le néophyte. De plus, soyons clair, la coupure estivale, bien que salutaire, engourdit trop l'esprit pour un redémarrage rapide de l'activité scolaire. Par ailleurs, nombreux sont ceux qui se sont contentés en Terminale d'assurer la réussite au bac sans approfondir les connaissances et les savoir faire.

Ceci explique que nos auteurs, tous enseignants dans ces classes, constatent chaque année les difficultés des nouveaux bacheliers à suivre le rythme soutenu de ce cursus.

Ce premier ouvrage passerelle **de la terminale S à la prépa scientifique**, dévolu aux **mathématiques** a été conçu pour assurer en douceur un redémarrage et pour combler les lacunes.
L'auteur, **Nicolas Nguyen**, est enseignant en classes préparatoires scientifiques en première année. Il a apporté dans la conception de ce livre, toute son expérience de professeur mais aussi d'auteur puisqu'il a rédigé et coordonné divers ouvrages aux éditions Ellipses.

Faire des maths en vacances, pourquoi pas ! En travaillant chaque jour un chapitre, lors de vos trois dernières semaines de congés estival, cet ouvrage vous amènera en douceur vers la rentrée et vous permettra d'aborder sereinement les premières semaines de cours en prépa.

Bertrand Hauchecorne
Directeur de la collection Prépas Sciences

AVANT-PROPOS

En route pour la Prépa !

En septembre, vous allez découvrir l'enseignement supérieur lors de votre rentrée en classe préparatoire aux grandes écoles. Au-delà de l'enthousiasme à l'aube de cette nouvelle étape de votre formation, un soupçon d'inquiétude bien légitime pourrait se faire jour.

Pas de panique ! **Maths de la terminale S à la prépa scientifique** vous permettra d'aborder la rentrée en toute sérénité !

Cet ouvrage n'est en aucun cas un début de cours de première année ; ce serait inutile, voire contre-productif. Au contraire, à travers seize chapitres organisés en quatre thèmes, il reprend uniquement le programme de mathématiques des classes de Première et Terminale S mais le revisite avec un esprit différent, celui de l'enseignement supérieur, en sélectionnant toutes les parties utiles en prépa.

Les objectifs de cet ouvrage

Cette approche nouvelle vous permettra :

- de rafraîchir vos souvenirs ;
- de combler d'éventuelles lacunes ;
- d'avoir une vision synthétique et transversale des connaissances ;
- d'acquérir l'exigence de l'enseignement supérieur ;
- d'être tout de suite opérationnel en début de prépa.

Organisation des chapitres

Afin de donner la plus grande efficacité à vos révisions, vous retrouverez dans chaque chapitre :

- un **résumé de cours** clair et précis reprenant tous les théorèmes essentiels ;
- des **méthodes efficaces** de résolution d'exercices ou de problèmes ;
- des **exercices classiques** avec indications de solution et corrections détaillées.

En complément, des notes culturelles dues à Bertrand Hauchecorne ou des anecdotes plus légères agrémentent les chapitres afin de rendre plus agréables encore vos séances de révisions !

Méthode de travail conseillée

Le rythme suggéré consiste à consacrer un jour – deux maximum – par chapitre. Après avoir relu attentivement, stylo en main, le **résumé de cours**, travaillez la partie **méthodes** en refaisant les exemples qui l'illustrent. Finalement, vous pourrez plonger dans la recherche des **exercices classiques** en vous aidant des indications fournies. Lorsque vous avez terminé un exercice, n'hésitez pas à lire la correction proposée qui se veut aussi un modèle de rédaction !

Ainsi, en trois semaines, ce livre vous permettra d'aborder les classes préparatoires scientifiques avec des bases solides et dans les meilleures conditions, que vous entriez en MPSI, PCSI et PTSI mais aussi en ECS 1, en BCPST ou en BL. Il pourra plus généralement servir à tous ceux qui s'engagent dans une filière du supérieur dans laquelle les mathématiques jouent un rôle important.

Remerciements

Pour conclure, je tiens à remercier très chaleureusement Bertrand Hauchecorne et Corinne Baud pour leur confiance, Marianne et Paul pour leur patience envers moi !

Saint-Brieuc, février 2015

Nicolas Nguyen

SOMMAIRE

Chapitre 1

Nombres réels

Le mathématicien allemand Georg Cantor a montré qu'on ne peut pas numéroter tous les nombres réels, sans en oublier, et en ne donnant pas deux fois le même numéro à deux différents. Ce qui paraît plus étonnant, c'est qu'on peut le faire avec l'ensemble des fractions ; il suffit d'énumérer d'abord celles dont la somme du numérateur et du dénominateur vaut 2, puis 3 et ainsi de suite. On dit que Q est dénombrable mais que R ne l'est pas.

Georg Cantor
1845-1918

OBJECTIFS

L'objectif de ce chapitre est de faire le point sur les différents ensembles de nombres rencontrés au cours de la scolarité et d'en connaître les principales propriétés.

■ les incontournables

- Connaître les différents ensembles de nombres
- Effectuer des calculs dans $\mathbb{R}$:
  - utiliser les règles de calcul
  - connaître les identités remarquables
  - manipuler des valeurs absolues, des racines carrées

■ et plus si affinités

- Raisonner par équivalences
  - pour obtenir des inégalités
  - pour résoudre des équations et des inéquations

Résumé de cours

Les différents ensembles de nombres

$\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels

L'ensemble $\mathbb{N} = \{0,\ 1\ ,2\ ,3\ ,4,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$ est celui des nombres entiers naturels. On peut toujours ajouter et multiplier des entiers naturels, mais la soustraction et la division ne sont pas toujours possibles dans $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs

L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ est celui des nombres relatifs. Tout élément de $\mathbb{Z}$ possède un opposé dans $\mathbb{Z}$: la soustraction est toujours possible entre entiers relatifs. Par contre, la division n'est pas toujours possible dans $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Q}$ ensemble des nombres rationnels

L'ensemble $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^\star\}$ est celui des rationnels. L'addition, la soustraction et la multiplication sont toujours possibles entre rationnels. Tout élément non nul de $\mathbb{Q}$ possède un inverse : la division par un rationnel non nul est toujours possible. Par contre, certains nombres construits de façon naturelle ne sont pas rationnels.

Vocabulaire : *les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont dits* ***irrationnels****.*

$\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels

Les nombres rationnels ne sont pas suffisants pour représenter tous les nombres. Les constructions de l'ensemble des nombres réels ne sont pas au programme, mais on peut très bien se représenter cet ensemble de nombres à l'aide de la droite graduée.
Soit $\mathcal{D}$ une droite munie d'un repère $(O, \vec{\imath})$. À tout réel $x \in \mathbb{R}$, on associe son image sur la droite, le point $M(x)$ d'abscisse x. On pourra retenir la chaîne d'inclusions des ensembles de nombres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathbb{D}$ ensemble des nombres décimaux

Les nombres réels peuvent tous être représentés comme des nombres à virgule. En général, la suite des décimales (les chiffres à droite de la virgule) est infinie. C'est le cas par exemple, pour π dont on connaît aujourd'hui les 10 000 milliards premières décimales !

$$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ \cdots$$

Pour un nombre rationnel,

- ▷ soit la suite des décimales est finie, comme $12,623\ 16$;
- ▷ soit cette suite est périodique, comme par exemple $1,385\ 385\ \cdots$.

L'ensemble $\mathbb{D} = \{\frac{p}{10^n};\ p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est précisément l'ensemble des nombres réels qui ont une partie décimale finie.

Opérations dans $\mathbb{R}$

Somme et produit

Proposition 1.1.— Pour tous réels x, y et z, on a :

- $x + y = y + x$. L'addition est **commutative**.
- $(x + y) + z = x + (y + z)$. L'addition est **associative**.
- $x + 0 = 0 + x = x$. 0 est **élément neutre** de l'addition.
- $x + (-x) = (-x) + x = 0$. Tout réel x a un **opposé** noté $-x$.

Proposition 1.2.— Pour tous réels x, y et z, on a :

- $x \times y = y \times x$. La multiplication est **commutative**.
- $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$. La multiplication est **associative**.
- $x \times 1 = 1 \times x = x$. 1 est **élément neutre** de la multiplication.
- si $x \neq 0$, $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$. Tout réel non nul x a un **inverse**, noté x^{-1}.

De plus, la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

Proposition 1.3.— Pour tous réels x, y, z, on a :

- $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$.
- $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

Équations dans $\mathbb{R}$

L'existence d'inverses pour les nombres réels non nuls est essentielle pour la manipulation d'équations :

Proposition 1.4.— Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un couple de nombres réels, $a \in \mathbb{R}^\star$ un réel non nul. Alors

- $a \times x = a \times y \iff x = y$.
- $x \times y = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0$.

Vocabulaire : *dans $\mathbb{R}$, on dit que tout élément non nul a est* ***simplifiable*** *dans une équation.*

Puissances entières d'un nombre réel

Définition : *Soit $a \in \mathbb{R}^\star$ un réel et $n \in \mathbb{Z}$ un entier relatif :*

- *si $n = 0$, on pose $a^0 = 1$;*
- *si $n > 0$, $a^n = \prod_{k=1}^n a = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$;*
- *si $n < 0$, $a^n = (1/a)^{|n|}$.*

Remarque : Si $a = 0$, on convient que $0^0 = 1$, les puissances d'exposant strictement positif sont nulles, et les puissances d'exposants strictement négatif ne sont pas définies.

Vocabulaire : *dans l'écriture a^n, a s'appelle la* ***base*** *et n l'****exposant****.*

Proposition 1.5.— Règles de calcul avec les puissances d'exposants entiers ❤ —. Soit $a, b \in \mathbb{R}^\star$ des réels non nuls et $n, m \in \mathbb{Z}$ des entiers relatifs :

- $a^0 = 1$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$

Identités remarquables

Proposition 1.6.— Identités remarquables ❤ —. Soit a, b des réels.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2b + 3\,ab^2 - b^3$
- $a^3 - b^3 = (a-b)\,(a^2 + ab + b^2)$

■ Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Propriétés fondamentales de la relation d'ordre

Comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est un ensemble ordonné par $\leq$. Rappelons les propriétés basiques de cette relation d'ordre :

Proposition 1.7.— Propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ —. Pour tous réels x, y, z, on a :

- $x \leq x$. La relation "$\leq$" est **réflexive**.
- Si $(x \leq y$ et $y \leq x)$ alors $x = y$. La relation "$\leq$" est **antisymétrique**.
- Si $(x \leq y$ et $y \leq z)$ alors $x \leq z$. La relation "$\leq$" est **transitive**.
- $x \leq y$ ou $y \leq x$. $\mathbb{R}$ est **totalement ordonné**.

Notation : *la relation $x < y$ signifie $(x \leq y$ et $x \neq y)$. On note $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nul, et $\mathbb{R}^{+\star}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.*

Compatibilité des opérations et de la relation d'ordre

L'addition et la multiplication des réels sont compatibles avec la relation d'ordre au sens suivant :

Théorème 1.8.— Soit $x, y \in \mathbb{R}$ des réels. On suppose[1] que $x < y$. Alors

- pour tout réel $z \in \mathbb{R}$, $\quad x + z < y + z$,
- pour tout réel strictement positif $z \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\quad x \times z < y \times z$.

On en déduit que le passage aux inverses et la multiplication par un réel négatif sont aussi **compatibles** avec la relation d'ordre, mais attention au sens des inégalités !

1. cf. **proposition 1.7**.

Corollaire 1.9.— Pour tous réels $x, y, z \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}$,

- **si** $(0 < x < y)$ **alors** $(0 < y^{-1} < x^{-1})$
- **si** $(x \leq y$ et $z \leq 0)$ **alors** $(x \times z \geq y \times z)$
- **si** $\left\{ \begin{array}{l} x \leq y \\ u \leq v \end{array} \right.$ **alors** $(x + u \leq y + v)$
- **si** $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq u \leq v \end{array} \right.$ **alors** $(x \times u \leq y \times v)$.

Valeur absolue

Définition : *Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle* ***valeur absolue*** *de x le réel positif défini par :*

$$|x| = \max\{x, -x\} = \left\{ \begin{array}{rl} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{array} \right.$$

Interprétation : la valeur absolue de x est la distance entre le point d'abscisse x et l'origine de la droite réelle.

Proposition 1.10.— Inégalités triangulaires —. Pour tous réels x, y, on a :

$$\boxed{|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{et} \quad |x - y| \geq \big||x| - |y|\big|}$$

Racine carrée d'un réel positif

Théorème-Définition 1.11.— Soit a un réel positif. Il existe un réel positif $b \in \mathbb{R}^+$, unique tel que :

$$b^2 = a. \tag{1.1}$$

Cet élément b est noté $\sqrt[2]{a}$ ou $\sqrt{a}$ et est appelé la **racine carrée** de a.

Proposition 1.12.— Règles de calcul avec la racine carrée —. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ des réels.

- **Si** x est de signe quelconque, **alors** $\sqrt{x^2} = |x|$.
- **Si** $x \geq 0$ et $y \geq 0$ **alors** $x \leq y \iff \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.
- **Si** $x \geq 0$ et $y \geq 0$ **alors** $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.
- **Si** $x \geq 0$ et $y > 0$ **alors** $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Le saviez-vous ?

Dans le langage courant *incommensurable* qualifie un objet si grand qu'on ne peut le mesurer. C'est un faux sens. Chez les Anciens, une grandeur était incommensurable si en reportant un nombre n de fois l'unité de mesure, on ne pouvait atteindre exactement un multiple p de cette grandeur. En termes actuels, la mesure de cette grandeur ne peut s'écrire sous la forme de fraction $\frac{n}{p}$; elle est donc *irrationnelle*.

Méthodes

Manipuler les expressions algébriques

Ce chapitre est l'occasion de revoir les techniques algébriques de base : factoriser, développer, travailler avec des puissances, avec des fractions ou encore avec des racines carrées, par exemple en multipliant et divisant par l'expression conjuguée, etc.

Factoriser, développer

Une expression algébrique se présente généralement sous la forme d'une somme ou d'un produit. Il est souvent utile de passer de l'une à l'autre :

- ▷ transformer une somme en un produit, c'est factoriser ;
- ▷ transformer un produit en une somme, c'est développer.

❑ Méthode 1.1.— Comment factoriser une somme

Pour factoriser une somme, on peut :

- ▸ utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition :
  - $\boxed{1}$ on repère un "facteur" c, "commun" à tous les termes de la somme :
    $$S = c \times a_1 + c \times a_2 + \cdots + c \times a_n$$
  - $\boxed{2}$ puis on factorise par c : $S = c \times (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$;
- ▸ utiliser une identité remarquable, notamment $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Remarque : pour développer une expression, on peut utiliser les mêmes pistes : distributivité ou identité remarquable... mais dans l'autre sens !

Exemple : factorisons la fonction polynomiale $f(x) = x^4 + x^2 + 1$. Ici, il n'y a pas de facteur commun évident, nous allons utiliser des identités remarquables ! Observons que $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$. À l'aide d'identités remarquables, il s'ensuit que :

$$f(x) = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

Mise en œuvre : exercice 1.1.

Manipuler les racines carrées

❑ Méthode 1.2.— Comment simplifier une expression avec des racines carrées

Il n'existe pas de méthode directe pour calculer la racine carré d'un nombre positif, sauf pour les dix premiers carrés parfaits ! Pour simplifier une expression mettant en jeu une ou plusieurs racines carrées, plusieurs pistes sont envisageables :

- ▸ On peut utiliser les règles de calcul avec les racines carrées afin de faire apparaître des carrés parfaits.
- ▸ On peut multiplier et diviser par l'expression conjuguée afin d'utiliser une identité remarquable.

Mise en œuvre : exercice 1.5.

■ Manipuler des inégalités : comparer, majorer, minorer, encadrer

❑ Méthode 1.3.— Comment étudier le signe d'une expression $f(x)$

Étudier le signe de $f(x)$ revient à résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$. On pourra

- Utiliser un tableau de signe :

  $\boxed{1}$ Factoriser $f(x)$ sous la forme $f(x) = f_1(x) \times f_2(x) \times \cdots \times f_p(x)$;

  $\boxed{2}$ Étudier le signe de chaque facteur.

  $\boxed{3}$ Conclure à l'aide d'un tableau de signe.

- Étudier les variations de $f(x)$ et en déduire son signe.

❑ Méthode 1.4.— Comment comparer deux nombres

Pour comparer deux nombres on utilise la compatibilité de l'ordre et des opérations.

- On peut étudier le signe de la différence.
- S'il s'agit de nombres positifs, on peut comparer leur quotient à 1.
- S'il s'agit de nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

❑ Méthode 1.5.— Comment encadrer un quotient

Pour encadrer un quotient $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, dont numérateur et dénominateur sont strictement positifs :

$\boxed{1}$ On encadre $N(x)$.

$\boxed{2}$ On encadre $D(x)$ et on en déduit un encadrement de $\frac{1}{D(x)}$.

$\boxed{3}$ On multiplie terme à terme pour obtenir un encadrement de $\frac{N(x)}{D(x)}$.

❑ Méthode 1.6.— Comment encadrer une somme

Pour majorer (respectivement minorer, encadrer) la somme $\sum_{k=0}^{n} x_k$:

$\boxed{1}$ On considère $k \in \{0, \ldots, n\}$, on majore (resp. minore, encadre) x_k. Ainsi, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $x_k \leq M_k$.

$\boxed{2}$ Puis on ajoute terme à terme toutes ces majorations $\sum_{k=0}^{n} x_k \leq \sum_{k=0}^{n} M_k$.

Exemple : montrons que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\star$, $n \leq \sum_{k=1}^{n} k \leq n^2$.

$\boxed{1}$ Si $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, alors $1 \leq k \leq n$.

$\boxed{2}$ En sommant terme à terme ces encadrements, il vient $\sum_{k=1}^{n} 1 \leq \sum_{k=1}^{n} k \leq \sum_{k=1}^{n} n$, soit $n \leq \sum_{k=1}^{n} k \leq n^2$.

Vous montrerez en CPGE que précisément $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2}$ est le milieu entre n et n^2.

Mise en œuvre : exercice 1.8.

■ Résoudre des équations, des inéquations

Résoudre une équation

La résolution des équations est essentielle en mathématiques. Aussi, nous retrouverons des techniques de résolution dans de nombreux chapitres. Nous présentons ici les méthodes générales.
Une équation se présente généralement sous l'une des deux formes suivantes :

$$f(x) = 0 \qquad (1.2) \qquad\qquad g(x) = h(x) \qquad (1.3)$$

Résoudre dans I, l'équation (1.2) d'inconnue x, c'est déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des valeurs de $x \in I$, pour lesquelles $f(x)$ vaut 0.
Deux équations sont dites **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.

❑ Méthode 1.7.— Comment résoudre l'équation $f(x) = 0$

Pour résoudre l'équation (1.2) dans I, la démarche générale consiste à :

$\boxed{1}$ Déterminer le domaine de définition $J \subset I$ de f.

$\boxed{2}$ Raisonner par équivalences successives, jusqu'à obtenir des équations résolues en x :

$$(1.2) \iff \left\{\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ x \in J \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} f_1(x) = 0 \\ x \in J \end{array}\right. \iff \cdots \iff \left\{\begin{array}{l} f_p(x) = 0 \\ x \in J \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = x_1 \text{ ou } x = x_2 \text{ ou } \cdots \text{ ou } x = x_n \\ x \in J \end{array}\right.$$

❑ Méthode 1.8.— Comment obtenir une équation équivalente

On peut obtenir une équation équivalente à (1.2) ou (1.3) :

- en effectuant des opérations algébriques sur les expression en jeu, par exemple
  - en multipliant ou divisant par une quantité non nulle ;
  - en factorisant l'expression de $f(x)$: si $f(x) = f_1(x) \times f_2(x) \times \cdots \times f_p(x)$, alors
  $$(1.2) \iff f_1(x) = 0 \text{ OU } f_2(x) = 0 \text{ OU } \cdots \text{ OU } f_p(x) = 0$$
  - en élevant au carré les deux membres de l'égalité (cf. remarque ci-dessous) ;
- en effectuant un changement d'inconnue, par exemple si $f(x) = g(u(x))$,

  $\boxed{1}$ On pose $u = u(x)$. L'équation (1.2) se décompose en deux équations :
  $$(1.2) \iff \left\{\begin{array}{l} g(u) = 0 \\ u(x) = u \end{array}\right.$$

  $\boxed{2}$ On résout l'équation d'inconnue u, $g(u) = 0$.

  $\boxed{3}$ Pour chacune des solutions u_k, on résout l'équation d'inconnue x, $u(x) = u_k$.
- en utilisant des propriétés des fonctions en jeu, par exemple
  - les formules du second degré pour les fonctions polynomiales de degré 2 ;
  - les symétries des fonctions trigonométriques ;
  - la bijectivité des fonctions logarithmes, exponentielles, etc.

Méthodes

Exemple : résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Pour cela, nous allons effectuer le changement d'inconnue $u = x^2$ afin de nous ramener à une équation du second degré.

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad &\iff \quad \begin{cases} u = x^2 \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u = x^2 \\ (u-1)(u-4) = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} u = x^2 \\ u = 1 \text{ OU } u = 4 \end{cases} \iff x^2 = 1 \text{ OU } x^2 = 4 \iff x = \pm 1 \text{ OU } x = \pm 2 \end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{S} = \{-2, -1, 1, 2\}$.

Remarque : on est souvent amené à élever au carré les deux membres de l'équation (1.3), toutefois on remarquera que $f(x) = g(x) \not\Leftarrow (f(x))^2 = (g(x))^2$. Avant d'élever au carré il faudra noter le signe (commun) des deux quantités !

❑ Méthode 1.9.— Comment résoudre une équation avec une racine carrée

Pour les équations mettant en jeu une racine carrée :

$\boxed{1}$ On détermine le domaine de positivité de la quantité sous le radical.

$\boxed{2}$ On isole la racine carrée au premier membre de l'égalité.

$\boxed{3}$ On note le signe positif du second membre.

$\boxed{4}$ On égalise les carrés.

Exemple : résolvons l'équation $\sqrt{2x+5} = x+1$ dans $\mathbb{R}$. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+5} - x - 1 = 0 \quad &\iff \quad \begin{cases} \sqrt{2x+5} = x+1 \\ 2x+5 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+5 = (x+1)^2 \\ x+1 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x^2 = 4 \\ x \geq -1 \text{ ET } x \geq -\frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 2 \\ x \geq -1 \end{cases} \iff x = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{2\}$.

Mise en œuvre : exercice 1.14.

Résoudre une inéquation

La résolution des inéquations suit la même démarche générale que pour la résolution des équations : on raisonne là encore par équivalences, mais il faut prendre garde au fait qu'une majoration peut être équivalente à une minoration !

❑ Méthode 1.10.— Comment obtenir une inéquation équivalente

Soit a, b, x des réels. On suppose que $b < 0$. Alors

- Si $b > 0$, alors $x < a \iff bx < ba$.
- Si $b < 0$, alors $x < a \iff bx > ba$.
- $x < a \iff \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{a}$.
- $0 < x < a \iff 0 < x^2 < a^2$.

Mise en œuvre : exercice 1.15.

Énoncé des exercices

Calculer avec des fractions

Exercice 1.1 : Sans calculatrice, effectuer les calculs suivants :

1. $(7-\frac{7}{3})\times\left(11-\frac{7}{2}+\frac{2}{5}(2-\frac{1}{2})\right)$;

2. $2-(\frac{3}{4}+\frac{2}{3})-\left(3-(\frac{5}{3}+\frac{1}{4})\right)-\left(2-(\frac{2}{3}+\frac{7}{4})\right)$.

Exercice 1.2 : Sans calculatrice, effectuer les calculs suivants :

1. $\dfrac{9-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{25}{4}}{2+\frac{1}{6}-\frac{5}{12}}\times\dfrac{3-\frac{2}{5}}{\frac{5}{3}-1}$;

2. $\dfrac{2-\frac{1}{8}}{3+\frac{1}{4}}:\dfrac{7-\frac{1}{2}}{5-\frac{3}{4}}$.

Développer, factoriser

Exercice 1.3 : Soit x, y, z des réels.
1. Développer $(x+y+z)(xy+yz+zx)$, $(x+y+z)^2$ et $(x+y+z)^3$.
2. Démontrer que si $x+y+z=0$, alors $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Exercice 1.4 : Soit x, y, z des réels. Développer :

1. $(x+y)^2-(x-y)^2$;
2. $(x+y+z)^2+(z-y)^2+(y-x)^2+(x-z)^2$;
3. $(x+y)^3-(x^3+y^3)$;
4. $(x+y)^2+(x-y)^2$.

Calculer avec puissances et racines

Exercice 1.5 : Sans calculatrice, effectuer les calculs suivants :

1. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$;
2. $(\sqrt{2}-1)^2$;
3. $(\sqrt{8}-\sqrt{18})(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32})$;
4. $(\sqrt{6}+2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$;
5. $\sqrt{5+\sqrt{3}}\times\sqrt{5-\sqrt{3}}$;
6. $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})$.

Exercice 1.6 : Simplifier les écritures suivantes :

1. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;
2. $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$;
3. $\dfrac{\sqrt{125}+\sqrt{45}-\sqrt{20}}{\sqrt{5}-1}$;
4. $(\sqrt{6}+1)^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2$.

Exercice 1.7 : Écrire sans dénominateur les nombres suivants :

1. $\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}$; **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; **3.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; **4.** $\dfrac{22}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Majorer, minorer, encadrer

Exercice 1.8 : Sachant que $x\in]\frac{1}{2};\frac{3}{2}[$, encadrer les quantités suivantes $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+x+3$ et $h(x)=-x^2+x+1$.

Exercice 1.9 : Sachant que $1,83 \leq a \leq 1,84$ et $2,513 \leq b \leq 2,514$, donner un encadrement de $a+b$, $a-b$, $a \times b$, $\frac{a}{b}$.

Exercice 1.10 : Soit x, y des réels tels que $x+y=1$. Montrer que $x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 1.11 : Soit x, y des réels strictement positifs. Montrer que

1. $\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2xy}$; **2.** $\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$.

Exercice 1.12 : Soit x, y des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Exercice 1.13 : Montrer que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{n+1}{n^2}.$$

■ Résoudre des équations, des inéquations

Exercice 1.14 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $|2x-1| = |3x+1|$;
2. $\sqrt{x^2+2x+4} = 3x+2$;
3. $\frac{3x^2-2x+1}{3x-1} = \frac{2x^2+11x+5}{2x-5}$.

Exercice 1.15 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
1. $x+3 \geq \sqrt{x^2+4}$;
2. $|2x-3| \leq 5$;
3. $|2x-3| < |3x+1|$.

Exercice 1.16 : Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :
1. $\left\{\begin{array}{l} 7x+1 \geq x+3 \\ 7x-1 < -x+2 \end{array}\right.$;
2. $\left\{\begin{array}{l} x^2 \leq 4 \\ 3x+5 \geq 2x+4 \\ 4x+1 < 2x \end{array}\right.$.

■■ Indications

Ex. 1.3

1. *Un conseil : organisez vos calculs et présentez vos résultats de façon claire en regroupant les termes analogues.*
2. *On utilisera les résultats de la première question pour chercher une factorisation de la différence* $D = x^3+y^3+z^3-3xyz$ ...

Ex. 1.4

De remarquables calculs !

Ex. 1.5

Pour simplifier les calculs avec des racines carrées, on utilisera les **identités remarquables** *rappelées dans la* **proposition 1.6**.

Ex. 1.6

Pour simplifier des expressions avec des racines carrées, vous pourrez utiliser des identités remarquables, multiplier et diviser par l'expression conjuguée.

Corrigé des exercices

Exercice 1.1

Rassurez-vous, en prépa vous n'aurez pas souvent l'occasion de rencontrer des fractions aussi tordues !

1. $(7-\frac{7}{3}) \times \left(11-\frac{7}{2}+\frac{2}{5}(2-\frac{1}{2})\right) = \frac{189}{5}$.

2. $2-(\frac{3}{4}+\frac{2}{3})-\left(3-(\frac{5}{3}+\frac{1}{4})\right)-\left(2-(\frac{2}{3}+\frac{7}{4})\right) = -\frac{1}{12}$. ▲

Exercice 1.2

1. $\dfrac{9-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{25}{4}}{2+\frac{1}{6}-\frac{5}{12}} \times \dfrac{3-\frac{2}{5}}{\frac{5}{3}-1} = \dfrac{507}{70}$; **2.** $\dfrac{2-\frac{1}{8}}{3+\frac{1}{4}} : \dfrac{7-\frac{1}{2}}{5-\frac{3}{4}} = \dfrac{255}{676}$. ▲

Exercice 1.3

1. On a $(x+y+z)(xy+yz+zx) = x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+3xyz$

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz$

2. Pour prouver que $x^3+y^3+z^3 = 3xyz$ lorsque $x+y+z=0$, nous allons étudier la différence $D = x^3+y^3+z^3-3xyz$. À l'aide de la première question, on peut écrire

$$\begin{aligned} D &= x+y+z)^3 - 3x^2y - 3x^2z - 3y^2x - 3y^2z - 3z^2x - 3z^2y - 9xyz \\ &= x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+yz+zx) \\ &= (x+y+z)\left[(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx)\right] \end{aligned}$$

Ainsi factorisée, il est immédiat de constater que lorsque $x+y+z=0$, la différence $x^3+y^3+z^3-3xyz$ est nulle. ▲

Exercice 1.4

Les égalités remarquables rappelées dans la **proposition 1.6** *doivent être bien connues ! Il ne suffit pas de savoir les retrouver !*

À l'aide des **identités remarquables**, il vient :

1. $(x+y)^2-(x-y)^2 = 4xy$.

2. $(x+y+z)^2+(z-y)^2+(y-x)^2+(x-z)^2 = 3x^2+3y^2+3z^2$.

3. $(x+y)^3-(x^3+y^3) = 3x^2y+3xy^2$.

4. $(x+y)^2+(x-y)^2 = 2x^2+2y^2$. ▲

Exercice 1.5

1. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2 = 5+3+2\sqrt{5}\sqrt{3} = 8+\sqrt{15}$.

2. $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$.

3. $(\sqrt{8}-\sqrt{18})(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32}) = \sqrt{2}\times(\sqrt{4}-\sqrt{9})\times\sqrt{2}(\sqrt{25}+\sqrt{36}-\sqrt{16}) = 2\times(-1)\times 7 = -14$.

4. $(\sqrt{6}+2)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{18}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

5. $\sqrt{5+\sqrt{3}}\times\sqrt{5-\sqrt{3}} = \sqrt{(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})} = \sqrt{5^2-(\sqrt{3})^2} = \sqrt{22}$.

6. $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}) = (3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5})^2 = 18-20 = -2$. ▲

Exercice 1.6

1. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=10.$

2. $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}=|1-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-1.$

3. $\dfrac{\sqrt{125}+\sqrt{45}-\sqrt{20}}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{5\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{6\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=$ $\dfrac{30+6\sqrt{5}}{4}=\dfrac{15+3\sqrt{5}}{2}.$

4. $(\sqrt{6}+1)^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2=(7+2\sqrt{6})-(5+2\sqrt{6})+(11+4\sqrt{6})=$ $13+4\sqrt{6}.$

▲

Exercice 1.7

1. $\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{4(3-\sqrt{5})}{9-5}=3-\sqrt{5}.$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

3. $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=\sqrt{5}+\sqrt{3}.$

4. $\dfrac{22}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=22\dfrac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(2+\sqrt{3})^2-5}=11\dfrac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(7+4\sqrt{3})-5}=11\dfrac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}+1}=$ $11\dfrac{(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-1)}{12-1}=(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-1)=4+3\sqrt{3}-\sqrt{5}+2\sqrt{10}.$

▲

Exercice 1.8

L'appartenance à l'intervalle $]\frac{1}{2};\frac{3}{2}[$ se traduit par

$$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$$

On utilise alors le **corollaire 1.9** ou la **méthode 1.4**. Il vient

D'après la **méthode 1.4** *deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.*

- $(\frac{1}{2})^2<x^2<(\frac{3}{2})^2$, soit
$$\frac{1}{4}<x^2<\frac{9}{4}.$$
- En ajoutant terme à terme les deux encadrements ci-dessus, on en déduit : $\dfrac{3}{4}<x^2+x<\frac{15}{4}$, soit
$$\frac{15}{4}<x^2+x+3<\frac{27}{4}.$$

On peut toujours ajouter terme à terme deux encadrements !

- Commençons par obtenir un encadrement de $-x^2$: $-\dfrac{9}{4}<x^2<-\frac{1}{4}$. Ajoutons ensuite terme à terme cet encadrement de $-x^2$ et un encadrement de $x+1$, il en résulte
$$-\frac{3}{4}<-x^2+x+1<\frac{9}{4}$$

▲

Exercice 1.9

On utilise alors le **corollaire 1.9**. Il vient

- $4,343\leq a+b\leq 4,354$;

Corrigé

- $-0,683 \leq a - b \leq -0,672$;
- $4,598 \leq a \times b \leq 4,626$;
- $0,727 \leq \dfrac{a}{b} \leq 0,733$. ▲

Exercice 1.10

Soit x, y des réels tels que $x+y=1$. Pour vérifier que $x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}$, raisonnons par équivalences :

Astuce de calcul
$1 = (x+y)^2$

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 \geq \frac{1}{2} &\iff 2x^2+2y^2 \geq 1 \iff 2x^2+2y^2 \geq (x+y)^2 \\
&\iff 2x^2+2y^2 \geq x^2+2xy+y^2 \iff x^2-2xy+y^2 \geq 0 \\
&\iff (x-y)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Un nombre réel élevé au carré étant toujours positif, cette dernière inégalité est toujours vérifiée. Par équivalences, il en va de même de la première. ▲

Exercice 1.11

Soit x, y des réels strictement positifs.

1. Raisonnons par équivalences

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2xy} &\iff x^2+y^2 \geq 2xy \iff x^2-2xy+y^2 \geq 0 \\
&\iff (x-y)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Un carré de réel étant toujours positif, l'inégalité proposée est bien vraie.

2. Observons que $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{x+y}{2xy}$. D'après la première question, on sait déjà que $\dfrac{1}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2xy}$. En multipliant les deux membres par le nombre strictement positif $x+y$, il vient

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{x+y}{2xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

▲

Exercice 1.12

En comparant les carrés de ces nombres positifs (**méthode 1.4**), on montre tout d'abord que $2\sqrt{xy} \leq x+y$. On en déduit alors

- en divisant les deux membres de cette inégalité par 2 que $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$;
- en multipliant les membres de cette inégalité par $\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$ que $\dfrac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}$.

▲

Exercice 1.13

Soit $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. De l'encadrement $0 \leq k \leq n$, on tire

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2}$$

En sommant terme à terme ces $n+1$ encadrements, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\dfrac{1}{n^2+n}$ est indépendant de l'indice k de sommation, il s'agit d'un facteur commun, ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^2+n} &= \frac{1}{n^2+n}\sum_{k=0}^{n}1=\frac{n+1}{n^2+n}=\frac{1}{n}\\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^2} &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}1=\frac{n+1}{n^2}.\end{aligned}$$

Finalement, nous avons obtenu $\dfrac{1}{n}\leq\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^2+k}\leq\frac{n+1}{n^2}$. ▲

Exercice 1.14

On applique la **méthode 1.7**.

1. Raisonnons par équivalences

$$\begin{aligned}(1) &\iff |2x-1|=|3x+1| \iff 2x-1=3x+1 \text{ OU } 1-2x=3x+1\\ &\iff x=-2 \text{ OU } x=0\end{aligned}$$

Deux réels ont même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux OU opposés.

Ainsi $\mathcal{S}=\{-2,0\}$.

2. On met en œuvre la **méthode 1.9**.

$$\begin{aligned}(2) &\iff \sqrt{x^2+2x+4}=3x+2 \iff \begin{cases}\sqrt{x^2+2x+4}=3x+2\\ x^2+2x+4\geq 0\\ 3x+2\geq 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x^2+2x+4=9x^2+12x+4\\ 3x+2\geq 0\end{cases} \iff \begin{cases}8x^2+10x=0\\ 3x+2\geq 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x(4x+5)=0\\ x\geq -\frac{2}{3}\end{cases}.\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme sous la racine est strictement négatif, pour tout réel x, $x^2+2x+4>0$.

Comme $-\dfrac{5}{4}<-\dfrac{2}{3}$, 0 est l'unique solution de cette équation : $\mathcal{S}=\{0\}$.

3. Nous allons mettre en œuvre la **méthode 1.7**. On observe tout d'abord que l'équation est bien définie uniquement pour $x\notin\{\frac{1}{3},\frac{5}{2}\}$. Pour un tel réel, nous obtenons une équation équivalente en multipliant les deux membres par le nombre non nul $(3x-1)\times(2x-5)$. Il en résulte les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(3) &\iff \frac{3x^2-2x+1}{3x-1}=\frac{2x^2+11x+5}{2x-5}\\ &\iff 6x^3-19x^2+12x-5=6x^3+31x^2+4x-5\\ &\iff 50x^2-8x=0 \iff x(25x-4)=0\end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{S}=\{0,\frac{4}{25}\}$. ▲

Exercice 1.15

1. On observe que les deux membres sont positifs. Par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, ils sont donc rangés dans le même ordre que leurs carrés :

et on note ce renseignement !

$$\begin{aligned}(1) &\iff x+3\geq\sqrt{x^2+4} \iff \begin{cases}(x+3)^2\geq x^2+4\\ x+3\geq 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x^2+6x+9\geq x^2+4\\ x+3\geq 0\end{cases} \iff \begin{cases}6x+5\geq 0\\ x+3\geq 0\end{cases} \iff x\geq -\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Corrigé

Finalement, l'ensemble solution est $\mathcal{S} = [-\frac{5}{6}, +\infty[$.

2. Par définition de la valeur absolue, on a :

$$\begin{aligned}(2) &\iff |2x-3| \leq 5 \iff -5 < 2x-3 < 5 \iff -2 < 2x < 8 \\ &\iff -1 < x < 4\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{S} =]-1, 4[$.

3. En remarquant que comparer deux valeurs absolues revient à comaprer les carrés, il vient :

$$\begin{aligned}(3) &\iff |2x-3| < |3x+1| \iff (2x-3)^2 < (3x+1)^2 \\ &\iff 4x^2 - 12x + 9 < 9x^2 + 6x + 1 \iff 5x^2 + 18x - 8 > 0\end{aligned}$$

Pour ceux qui auraient oublié comment étudier le signe d'un trinôme pas de panique, ceci vous est rappelé à la **méthode 4.5** *!*

Pour conclure, nous étudions le signe du trinôme $5x^2+18x-8$ Le discriminant est $\Delta = 18^2 - 4 \times (-40) = 484 = 22^2$. Par suite les deux racines réelles du trinôme sont -4 et $\frac{2}{5}$. En conclusion, $\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup]\frac{2}{5}, +\infty[$. ▲

Exercice 1.16

1. Nous raisonnons par équivalences à l'aide de la **méthode 1.10**.

$$(1) \iff \begin{cases} 7x+1 \geq x+3 \\ 7x-1 < -x+2 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x \geq 2 \\ 8x < 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x < \frac{3}{8} \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = [\frac{1}{3}, \frac{3}{8}[$.

2.

$$(2) \iff \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ 3x+5 \geq 2x+4 \\ 4x+1 < 2x \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq -1 \\ 2x+1 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq -1 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Finalement, $\mathcal{S} = [-1, -\frac{1}{2}[$. ▲

Chapitre 2

Trigonométrie

Le mot *trigonométrie* nous vient du grec et signifie *mesure des angles*. On considère souvent le mathématicien et astronome Hipparque de Nicée qui vivait au deuxième siècle avant notre ère, comme le fondateur de la trigonométrie. Ptolémée trois siècles plus tard, affine les connaissances en ce domaine. Il faut ensuite attendre les débuts de la Renaissance au XV^{e} siècle pour voir de nouveaux progrès dans cette discipline.

Claude Ptolémée
II^{e} siècle av. J-.C.

OBJECTIFS

■ les incontournables

- Connaître
  - le cercle trigonométrique
  - la mesure des angles orientés en radians
- Utiliser les règles de calcul et les symétries des fonctions trigonométriques
  - pour développer ou
  - pour factoriser une expression trigonométrique.

■ et plus si affinités

- Linéariser une expression trigonométrique.

Résumé de cours

Le cercle trigonométrique

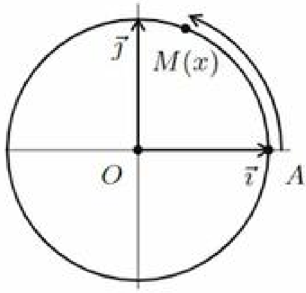
Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

Le plan géométrique usuel $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition : *On appelle* **cercle trigonométrique** *le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon unité, orienté dans le sens direct, c'est-à-dire dans le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre.*

Considérons un point mobile M situé à l'instant initial en $A(1,0)$ et qui évolue sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

À tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on associe le point $M(x)$ du cercle unité de la manière suivante :



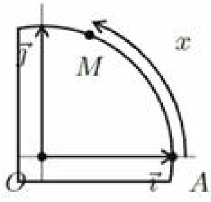
▷ si $x \geq 0$, le point mobile parcourt $\mathcal{C}$ dans le sens direct et s'arrête après avoir parcouru la longueur x ;

▷ si $x < 0$, le point mobile parcourt $\mathcal{C}$ dans le sens indirect et s'arrête après avoir parcouru la longueur $|x|$.

On note $M(x)$ le point d'arrivée. On dit que $M(x)$ est **l'image du réel x sur le cercle trigonométrique**.

Remarque : la longueur du cercle unité est 2π. En conséquence, $M(2\pi) = A$. Plus généralement, si M est l'image d'un réel x, c'est aussi l'image de $x + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, puisque le mobile s'arrête exactement à la même position mais après avoir effectué $|k|$ tours supplémentaires, dans le sens direct ou indirect suivant le signe de k.

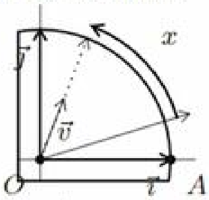
Angle orienté de deux vecteurs non nuls



Inversement, soit M un point du cercle trigonométrique. Le couple (A, M) définit un arc de cercle unité orienté d'origine A et d'extrémité M, noté $\widehat{AM}$. Si $x \in \mathbb{R}$ est un réel tel que M soit l'image de x sur $\mathcal{C}$, on dit que x **est une mesure de l'angle orienté** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

Remarque : l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ a plusieurs mesures réelles. Si x est une mesure de cet angle orienté, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x + 2k\pi$ en est une autre. On dit que x est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ à un multiple entier de 2π près. On note $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) \equiv x\ [2\pi]$ cette relation.

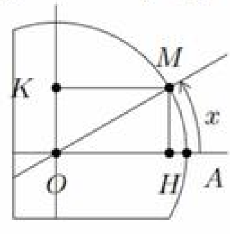
Définition : *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls. On appelle* **mesure en radians** *de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ la mesure de tout arc de cercle unité orienté allant de $\vec{u}$ à $\vec{v}$. On note $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv x\ [2\pi]$.*



Cosinus et sinus d'un réel x

Définition : *Soit x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique. Le point M est déterminé par ses coordonnées dans le repère cartésien $\mathcal{R}$. On note*

- $\cos(x) = \overline{OH}$ *son abscisse ;*
- $\sin(x) = \overline{OK}$ *son ordonnée.*



■ Règles de calcul pour les fonctions cosinus et sinus

Tableau de valeurs

Quelques valeurs de cos et sin doivent être connues. Elles permettent d'en retrouver d'autres à l'aide des règles de calcul rappelées ci-dessous.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Comme M appartient au cercle trigonométrique, on a $\|\overrightarrow{OM}\|^2 = 1$, soit

Théorème 2.1.— Propriété fondamentale de trigonométrie —.

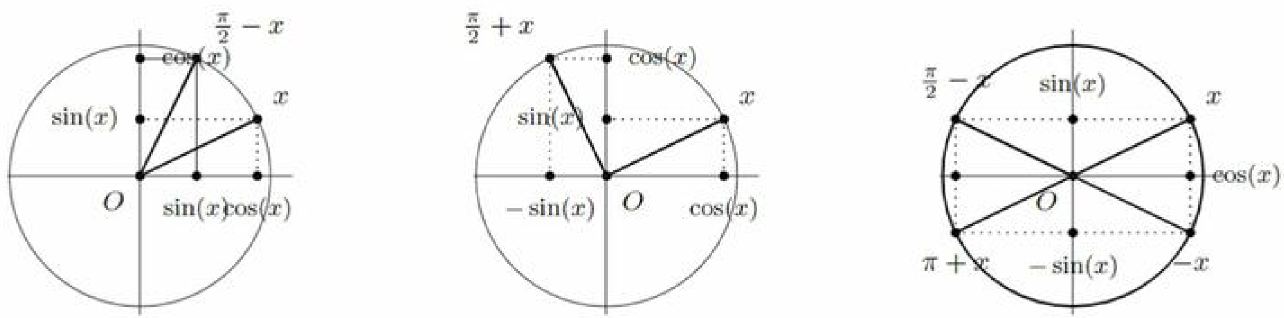
$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$$

Proposition 2.2.— Propriétés de symétries des fonctions sin **et** cos **—.**

- $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Remarque : en particulier, sin est 2π-périodique et impaire, cos est 2π-périodique et paire.

Illustration : on peut visualiser ces symétries sur le cercle trigonométrique.



Proposition 2.3.— Formules d'addition —.

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Proposition 2.4.— Formules de duplication —.

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Méthodes

Manipuler les expressions trigonométriques

Calculer le cosinus ou le sinus d'un angle donné

Méthode 2.1.— Comment calculer un cosinus ou un sinus

- à l'aide des symétries :

  $\boxed{1}$ On connaît le tableau des valeurs usuelles de cosinus et de sinus.

  $\boxed{2}$ À l'aide des règles de calcul pour ces fonctions, on ramène le calcul à celui d'une valeur connue.

- à l'aide des relations métriques dans un triangle.

Exemple : calculons $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour $x = \frac{\pi}{8}$, $x = \frac{\pi}{12}$.

- Pour $x = \frac{\pi}{8}$, on observe que $2x = \frac{\pi}{4}$. On peut alors utiliser les formules de linéarisation :

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}; \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Comme $0 < x < \frac{\pi}{2}$, il s'ensuit que $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont positifs. Par suite,

$$\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

- Pour $x = \frac{\pi}{12}$, on peut noter que $x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Par les formules d'addition, il en résulte directement :

$$\begin{aligned} \cos(\tfrac{\pi}{12}) &= \cos(\pi/3)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/3)\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4} \\ \sin(\tfrac{\pi}{12}) &= \sin(\pi/3)\cos(\pi/4) - \cos(\pi/3)\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}. \end{aligned}$$

Mise en œuvre : exercice 2.1

Démontrer des formules de trigonométrie

Méthode 2.2.— Comment simplifier une expression trigonométrique

Les fonctions trigonométriques possèdent beaucoup de symétries. Grâce à elles, il est souvent possible de simplifier les expressions trigonométriques.

- On utilise les propriétés de périodicité, parité et autres symétries (**proposition 2.2**).
- Il est parfois nécessaire d'utiliser les règles de calcul et le tableau des valeurs usuelles pour conclure. Il s'agit alors de développer (**méthode 2.3**) puis réduire l'expression considérée.

Exemple : simplifions l'expression de $A(x) = \sin(\frac{3\pi}{2} - x) + \cos(\pi + x) + \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x - \frac{\pi}{2})$.

$$\begin{aligned} A(x) &= \sin(\pi + \frac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi + x) + \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x - \frac{\pi}{2}) \\ &= -\cos(x) - \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) = -\sin(x) - 3\cos(x) \end{aligned}$$

❑ Méthode 2.3.— Comment développer une expression trigonométrique

Il s'agit d'exprimer $\cos(nx + my)$ ou $\sin(nx + my)$ comme une expression polynomiale en $\cos(x), \cos(y), \sin(x), \sin(y)$.

$\boxed{1}$ À l'aide des formules d'addition (**proposition 2.3**), on commence par se ramener à des expressions de la forme $\cos(nx), \cos(my), \sin(nx), \sin(my)$.

$\boxed{2}$ Lorsque $n, m \leq 2$, on conclut à l'aide des formules de duplication (**proposition 2.4**) :

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x); \ \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

$\boxed{3}$ Pour $n \geq 3$ ou $m \geq 3$, on se ramène au cas précédent au moyen des formules d'addition ou de duplication :

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(x + 2x) = \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) = \cdots; \\ \sin(3x) &= \sin(x + 2x) = \sin(x)\cos(2x) + \cos(x)\sin(2x) = \cdots \end{aligned}$$

Exemple : exprimons $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ comme des expressions polynomiales en $\cos(x)$, $\sin(x)$.

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(x + 2x) = \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) = (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\ &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x)(1 - \cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \\ \sin(3x) &= \sin(x + 2x) = \sin(x)\cos(2x) + \cos(x)\sin(2x) = \sin(x)(1 - 2\sin^2(x)) + 2\sin(x)\cos^2(x) \\ &= \sin(x) - 2\sin^3(x) + 2\sin(x)(1 - \sin^2(x)) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \end{aligned}$$

❑ Méthode 2.4.— Comment linéariser une expression trigonométrique

Contrairement à l'objectif de la méthode précédente, il s'agit ici de transformer une expression polynomiale en $\sin(x)$ et $\cos(x)$ en une combinaison linéaire de $\sin(nx)$ et $\cos(mx)$. Pour cela, on utilise les **formules de linéarisation** suivantes (déduites des formules d'addition et de duplication) valides pour tous réels x et y :

- $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$, $\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}$,
- $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$, $\sin(x)\sin(y) = \dfrac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$,
- $\cos(x)\sin(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$, $\sin(x)\cos(y) = \dfrac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}$.

Remarque : pour établir ces formules de linéarisation, on pourra appliquer la **méthode 2.2** « développer et réduire » !

Exemple : linéarisons $\cos^3(x)$. On a

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \cos(x)\cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(x)(1+\cos(2x)) = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\cos(x)\\ &= \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{4}(\cos(3x)+\cos(x)) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)\end{aligned}$$

❑ Méthode 2.5.— Comment factoriser une expression trigonométrique

▸ On peut transformer directement une somme de cosinus ou de sinus en produit à l'aide des **formules de factorisation** :

- $\cos(x)+\cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$;
- $\sin(x)+\sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$;
- $\cos(x)-\cos(y) = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$;
- $\sin(x)-\sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$.

▸ Plus généralement, on peut factoriser une expression trigonométrique de la forme $a\cos(x)+b\sin(x)$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$. Pour cela :

$\boxed{1}$ On factorise par $r=\sqrt{a^2+b^2}$:

$$a\cos(x)+b\sin(x) = r\times\left[(\frac{a}{r})\cos(x)+(\frac{b}{r})\sin(x)\right]$$

$\boxed{2}$ Comme $(\frac{a}{r})^2+(\frac{b}{r})^2=1$, on détermine à l'aide du tableau de valeurs usuelles ou du cercle trigonométrique, un angle $\varphi\in\mathbb{R}$ tel que $\cos(\varphi)=\frac{a}{r}$ et $\sin(\varphi)=\frac{b}{r}$. Par conséquent,

$$a\cos(x)+b\sin(x) = r\cos(x-\varphi).$$

Remarque : ces formules de factorisation se déduisent des formules d'addition en posant $p=a+b$, $q=a-b$ de sorte que $a=\frac{p+q}{2}, b=\frac{p-q}{2}$.

Exemple : factorisons les expressions $f(x) = \sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)+\sin(4x)$ et $g(x) = 2\sin(x)\cos(x)+\sqrt{3}\cos(2x)$.

$$\begin{aligned}f(x) &= (\sin(x)+\sin(4x))+(\sin(2x)+\sin(3x)) = 2\sin(\frac{5x}{2})\cos(\frac{3x}{2})+2\sin(\frac{5x}{2})\cos(\frac{x}{2})\\ &= 2\sin(\frac{5x}{2})[\cos(\frac{3x}{2})+\cos(\frac{x}{2})] = 4\sin(\frac{5x}{2})\cos(x)\cos(\frac{x}{2})\\ g(x) &= 2\sin(x)\cos(x)+\sqrt{3}\cos(2x) = \sin(2x)+\sqrt{3}\cos(2x)\\ &= 2\times\left[\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)\right] = 2\times\left[\cos(2x)\cos(\frac{\pi}{6})+\sin(2x)\sin(\frac{\pi}{6})\right]\\ &= 2\cos(2x-\frac{\pi}{6})\end{aligned}$$

Méthodes

Énoncé des exercices

Calculer un cosinus, un sinus

Exercice 2.1 : Pour chaque valeur de x, exprimée en radians, calculer $\cos(x)$ et $\sin(x)$:

1. $x = \dfrac{5\pi}{6}$
2. $x = \dfrac{7\pi}{4}$
3. $x = \dfrac{27\pi}{2}$
4. $x = \dfrac{\pi}{12}$
5. $x = \dfrac{5\pi}{12}$
6. $x = \dfrac{17\pi}{3}$

Exercice 2.2 : Pour chaque valeur de α, exprimée en degrés, calculer $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$:

1. $\alpha = 30^\circ$.
2. $\alpha = 60^\circ$.
3. $\alpha = 120^\circ$.
4. $\alpha = 270^\circ$.
5. $\alpha = -145^\circ$.
6. $\alpha = 405^\circ$.

Exercice 2.3 :
1. Déterminer $\cos(x)$ sachant que $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos(x) < 0$.
2. Déterminer $\sin(x)$ sachant que $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Manipuler les expressions trigonométriques

Exercice 2.4 : Démontrer les égalités suivantes :
1. $\sin^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x) = 1$.
2. $(\cos(x) + \sin(x))^2 = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$.
3. $\sin^6(x) + 3(\sin^4(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)\sin^2(x)) + \cos^6(x) = 1$.
4. $\sin^6(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^6(x) = 1$.

Exercice 2.5 : Simplifier les expressions suivantes :
1. $\sin(17\pi - x) + \sin(28\pi + x) + \sin(14\pi - x) + \sin(25\pi - x)$.
2. $\cos(x + 2\pi) + \cos(x + \pi) + \cos(\pi - x) + \cos(2\pi - x)$.
3. $\sin(x + \pi) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(\pi - x)$.
4. $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) + \cos(\pi + x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(x - \frac{\pi}{2})$.

Exercice 2.6 : Simplifier les expressions suivantes :
1. $\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - 1$.
2. $\sin^2(x) - \sin^4(x)$.
3. $(\cos(x) + \sin(x))^2 - (\cos(x) - \sin(x))^2$.
4. $2(\sin^6(x) + \cos^6(x)) - 3(\sin^4(x) + \cos^4(x))$.

Exercice 2.7 : Démontrer les égalités suivantes :
1. $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$.
2. $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}(\sin(\frac{\pi}{4} - x)$.

Exercice 2.8 : Démontrer les égalités suivantes :
1. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 4\cos(\frac{x}{2})\cos(x)\sin(\frac{5x}{2})$.
2. $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 4\cos(\frac{x}{2})\cos(x)\cos(\frac{5x}{2})$.

Exercice 2.9 :

1. Linéariser $\cos^2(x)\sin^2(x)$.

2. Linéariser $\cos^3(x)\sin(x)$.

3. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

> **Le saviez-vous ?**
>
> Deux mille ans avant notre ère, les Babyloniens se sont intéressés à la mesure des angles. C'est à eux que l'on doit le partage du cercle en 360 degrés, idée reprise par le mathématicien grec Hipparque de Nicée. Les révolutionnaires ont bien tenté d'introduire une nouvelle unité, le grade, qui divise le cercle en 400, mais elle n'est plus utilisée.

Indications

Ex. 2.1

Comme indiqué à la **méthode 2.1**, *on appliquera les règles de calcul, ainsi que les symétries des fonctions* sin *et* cos *afin de se ramener au tableau des valeurs connues de* sin *et* cos.

Ex. 2.4

*Ces formules ressemblent à la propriété fondamentale de trigonométrie (***proposition 2.1***) et aux identités remarquables (***proposition 1.6***).*

Ex. 2.5

On met en œuvre la **méthode 2.2**.

Ex. 2.6

4. *Vous pourrez exprimer* $\sin^6(x)+\cos^6(x)$ *et* $\sin^4(x)+\cos^4(x)$ *en fonction de* $\sin^2(x)\cos^2(x)$ *grâce à l'***exercice 2.5**.

Ex. 2.8

Il s'agit de factoriser les sommes proposées. On pourra pour cela utiliser les **Formules de factorisation** *(***méthode 2.5***).*

Corrigé des exercices

Exercice 2.1

1. $x = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$. Par suite, $\cos(x) = -\cos(\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(x) = \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$.
2. $x = \frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$. D'où l'on tire que $\cos(x) = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x) = -\sin(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $x = \frac{27\pi}{2} = 14\pi - \frac{\pi}{2}$, à l'aide des symétries des fonctions trigonométriques, il vient que $\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = -1$.

Attention aux signes dans la **proposition 2.3** *!*

4. $x = \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. À l'aide des formules d'addition il vient

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos(\pi/3)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/3)\sin(\pi/4) = \tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\ \sin(x) &= \sin(\pi/3)\cos(\pi/4) - \cos(\pi/3)\sin(\pi/4) = \tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

5. $x = \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$. En procédant comme ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos(\pi/4)\cos(\pi/6) - \sin(\pi/4)\sin(\pi/6) = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \sin(x) &= \sin(\pi/4)\cos(\pi/6) + \cos(\pi/4)\sin(\pi/6) = \tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

6. $x = \frac{17\pi}{3} = 6\pi - \dfrac{\pi}{3}$. En utilisant la périodicité et les parités des fonctions sin et cos, on obtient $\cos(x) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$ et $\sin(x) = -\sin(\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

▲

Exercice 2.2

Il s'agit d'exprimer la mesure en radians des angles proposés, pour pouvoir calculer leurs cosinus et sinus.
1. $\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad. On en déduit $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$.
2. $\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad. On en déduit $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $\alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ rad. On en déduit $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. $\alpha = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ rad. On en déduit $\cos(\alpha) = 0$ et $\sin(\alpha) = -1$.
5. $\alpha = -135^\circ = -\frac{3\pi}{4}$ rad. On en déduit $\cos(\alpha) = \sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
6. $\alpha = 405^\circ = \frac{9\pi}{4}$ rad. On en déduit $\cos(\alpha) = \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ▲

Exercice 2.3

1. On sait que $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Par conséquent $\cos 2(x) = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$. Autrement dit, on a $\cos(x) = \pm\dfrac{1}{2}$. Comme la question précise en outre que $\cos(x) < 0$, nous pouvons en déduire que $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$.
2. On sait que $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$. De la **propriété fondamentale de trigonométrie** on en tire d'abord que $\sin^2(x) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Ainsi, $\sin(x) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Comme $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, on sait en outre que $\sin(x)$ est strictement négatif. Par conséquent $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C'est la **proposition 2.1**.

▲

Exercice 2.4

1. On remarque que $\sin^4(x)+2\sin^2(x)\cos^2(x)+\cos^4(x) = \left[(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right]^2$. Comme d'après la **relation fondamentale de trigonométrie**,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1,$$

il s'ensuit que $\sin^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x) = 1^2 = 1$.

2. Développons le carré à l'aide d'une identité remarquable :

$$(\cos(x) + \sin(x))^2 = \cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$$

On peut alors conclure à l'aide de la relation fondamentale de trigonométrie.

3. On reconnaît là encore une identité remarquable :

$$\begin{aligned}1^3 &= \left[(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right]^3\\ &= \sin^{2\times 3}(x) + 3\sin^{2\times 2}(x)\cos^2(x) + 3\cos^{2\times 2}(x)\sin^2(x) + \cos^{2\times 3}(x)\\ &= \sin^6(x) + 3(\sin^4(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)\sin^2(x)) + \cos^6(x)\end{aligned}$$

4. À l'aide de la question précédente et de la relation fondamentale de trigonométrie, on peut écrire

$$\begin{aligned}1 &= \sin^6(x) + 3(\sin^4(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)\sin^2(x)) + \cos^6(x)\\ &= \sin^6(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x)(\underbrace{\sin^2(x) + \cos^2(x)}_{=1}) + \cos^6(x)\\ &= \sin^6(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^6(x)\end{aligned}$$

▲

Exercice 2.5

Comme suggéré en indication, nous allons mettre en œuvre la **méthode 2.2** :

1. $\sin(17\pi - x) + \sin(28\pi + x) + \sin(14\pi - x) + \sin(25\pi - x) = \sin(\pi - x) + \sin(x) + \sin(-x) + \sin(\pi - x) = 2\sin(x)$

2. $\cos(x + 2\pi) + \cos(x + \pi) + \cos(\pi - x) + \cos(2\pi - x) = \cos(x) - \cos(x) - \cos(x) + \cos(x) = 0$

3. $\sin(x + \pi) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(\pi - x) = -\sin(x) + \sin(x) - \sin(x) + \sin(x) = 0$

4. $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) + \cos(\pi + x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - x) - \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) = -3\cos(x) - \sin(x)$ ▲

Exercice 2.6

1. $\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - 1 = 1 + \cos^2(x) - 1 = \cos^2(x)$.

2. $\sin^2(x) - \sin^4(x) = \sin^2(x)\big(1 - \sin^2(x)\big) = \sin^2(x)\cos^2(x)$.

3. $(\cos(x) + \sin(x))^2 - (\cos(x) - \sin(x))^2 = 4\cos(x)\sin(x) = 2\sin(2x)$.

4. Pour simplifier $2(\sin^6(x) + \cos^6(x)) - 3(\sin^4(x) + \cos^4(x))$, remarquons que

$$\sin^4(x)+\cos^4(x) = 1-2\sin^2(x)\cos^2(x) \text{ et } \sin^6(x)+\cos^6(x) = 1-3\sin^2(x)\cos^2(x)$$

Remplaçons alors dans l'expression proposée, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&2(\sin^6(x) + \cos^6(x)) - 3(\sin^4(x) + \cos^4(x))\\ =&2 - 6\sin^2(x)\cos^2(x) - 3 + 6\sin^2(x)\cos^2(x) = -1\end{aligned}$$

▲

Corrigé

Exercice 2.7

On applique ici la **méthode 2.3** :

✎ *On développe ici à l'aide de la* **Formule d'addition** *pour les sinus.*

1. Comme $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, il vient

$$\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(\pi/4)\sin(x) + \sqrt{2}\sin(\pi/4)\cos(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

2. $\sqrt{2}(\sin(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{2}\sin(\pi/4)\cos(x) - \sqrt{2}\cos(\pi/4)\sin(x) = \cos(x) - \sin(x)$

▲

Exercice 2.8

✎ **méthode 2.5**

1. Utilisons les **Formules de factorisation** :

$$\begin{aligned}&\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = \sin(x) + \sin(3x) + \sin(2x) + \sin(4x)\\ &= 2\cos(x)\sin(2x) + 2\cos(x)\sin(3x) = 4\cos(x)\left[\sin(2x) + \sin(3x)\right]\\ &= 4\cos(x)\cos(x/2)\sin(5x/2)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}&\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = \cos(x) + \cos(3x) + \cos(2x) + \cos(4x)\\ &= 2\cos(x)\cos(2x) + 2\cos(x)\cos(3x) = 4\cos(x)\left[\cos(2x) + \cos(3x)\right]\\ &= 4\cos(x)\cos(x/2)\cos(5x/2)\end{aligned}$$

▲

Exercice 2.9

Mettons en œuvre la **méthode 2.4** :

✎ *On utilise les* **Formules de linéarisation**, *énoncées dans la* **méthode 2.4**.

1. On commence par linéariser le produit $\cos\sin$:

$$\cos^2(x)\sin^2(x) = \big(\cos(x)\sin(x)\big)^2 = \big(\frac{1}{2}\sin(2x)\big)^2 = \frac{1}{4}\sin^2(2x)$$

Pour conclure on linéarise le $\sin^2$, il vient $\cos^2(x)\sin^2(x) = \dfrac{1}{8}\big(1 - \cos(4x)\big)$.

2. $$\begin{aligned}\cos^3(x)\sin(x) &= \frac{1}{2}\cos^2(x)\sin(2x) = \frac{1}{4}\big(1 + \cos(2x)\big)\sin(2x)\\ &= \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\cos(2x) = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\sin(4x)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\cos(5x) &= \cos(4x)\cos(x) - \sin(4x)\sin(x)\\ &= \left[2\cos^2(2x) - 1\right]\cos(x) - 2\sin(2x)\cos(2x)\sin(x)\\ &= \left[2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1\right]\cos x - 4\cos x\cos(2x)\sin^2 x\\ &= \left[8\cos^5 x - 8\cos^3 x + \cos x\right] - 4\cos x(2\cos^2 x - 1)(1 - \cos^2 x)\\ &= \left[8\cos^5 x - 8\cos^3 x + \cos x\right] - \left[-8\cos^5 x + 12\cos^3 x - 4\cos x\right]\\ &= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x\end{aligned}$$

▲

Chapitre 3

Nombres complexes

Les équations du troisième et quatrième degré ont été résolues par des mathématiciens italiens au XVI^e siècle comme Tartaglia et Cardan. Cependant, dans certains cas, la formule comportait une racine de –1 qui se simplifiait donnant un nombre réel. Le mathématicien italien Rafaele Bombelli franchit le pas et considère $\sqrt{-1}$ comme un nombre. Les complexes étaient nés. Peu après, René Descartes appellera de tels nombres *imaginaires*.

Jerôme Cardan
1501-1576

OBJECTIFS

■ les incontournables

- Connaître les différentes représentations d'un nombre complexe
  - savoir reconnaître un complexe présenté sous forme algébrique, trigonométrique ou exponentielle ;
  - savoir passer d'une représentation à l'autre.
- Effectuer des calculs en nombres complexes.
- Utiliser les nombres complexes
  - pour établir une formule de trigonométrie ;
  - pour résoudre un problème géométrique.

■ et plus si affinités

- Savoir déterminer le lieu de points définis par leurs affixes.

Résumé de cours

Définition des nombres complexes

Présentation algébrique

Définition : Notation algébrique d'un nombre complexe —. *On appelle nombre complexe toute quantité de la forme $x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.*

- *Le réel x est appelé la **partie réelle** de z et noté $\mathfrak{Re}\, z$.*
- *Le réel y est appelé la **partie imaginaire** de z et noté $\mathfrak{Im}\, z$.*

Théorème 3.1.— Unicité de l'écriture en notation algébrique —. Pour tous complexes $z, z' \in \mathbb{C}$

$$\boxed{z = z' \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}\, z &= \mathfrak{Re}\, z' \\ \mathfrak{Im}\, z &= \mathfrak{Im}\, z' \end{cases}}$$

Définition : Opérations algébriques dans $\mathbb{C}$ —. *Pour tous nombres complexes $z = x + iy, z' = x' + iy'$ présentés en notation algébrique – i.e. les nombres x, x', y, y' sont réels – on définit :*

- $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$;
- $z \times z' = (x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.

Conjugué d'un nombre complexe

Définition : *Le **conjugué** du complexe $z = x + iy$, présenté en notation algébrique est $\overline{z} = x - iy$.*

Proposition 3.2.— Propriétés du conjugué — . Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ des nombres complexes. Alors :

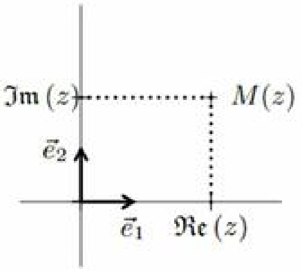
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
- $\overline{\overline{z}} = z$;
- $\mathfrak{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$;
- si $z' \neq 0$, $\overline{z/z'} = \overline{z}/\overline{z'}$;
- $\overline{z.z'} = \overline{z}\overline{z'}$;
- $\mathfrak{Im}\,(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Corollaire 3.3.— Caractérisation des nombres réels, imaginaires purs —. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Alors :

- z est réel $\Leftrightarrow \mathfrak{Im}\,(z) = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$;
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathfrak{Re}\,(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}$.

Le plan complexe

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. À tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on associe le point $M(z)$ du plan de coordonnées $(\mathfrak{Re}\, z, \mathfrak{Im}\, z)$ dans le repère $\mathcal{R}$, appelé l'**image** de z dans $\mathcal{P}$. Réciproquement, à tout point M de coordonnées cartésiennes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on fait correspondre le complexe $z = x + iy$, appelé l'**affixe** de M.



Ce procédé établit une correspondance "*point par point*" entre les nombres complexes d'une part et les points du plan d'autre part. Muni de cette correspondance, $\mathcal{P}$ est appelé le **plan complexe**.

■ Opérations algébriques dans $\mathbb{C}$

Proposition 3.4.— Propriétés de l'addition —. L'addition des complexes prolonge l'addition des réels dans le sens que pour tous réels x et x', on a : $(x+i0)+(x'+i0)=(x+x')+i0$.
De plus, pour tous nombres complexes z, z', z'' , on a :

- $z+z'=z'+z$. L'addition est **commutative**.
- $(z+z')+z''=z+(z'+z'')$. L'addition est **associative**.
- $z+0=z$. 0 est **élément neutre** pour l'addition.

Enfin, tout nombre complexe z possède un **opposé**, noté $-z$. Plus précisément

- si $z=x+iy$ en notation algébrique, $-z=(-x)+i(-y)$.

Proposition 3.5.— Propriétés de la multiplication —. La multiplication des complexes prolonge celle des réels dans le sens que pour tous réels x et x', on a : $(x+i0)\times(x'+i0)=(x\times x')+i0$.
De plus, pour tous nombres complexes z, z', z'', on a :

- $z\times z'=z'\times z$. La multiplication est **commutative**.
- $(z\times z')\times z''=z\times(z'\times z'')$. La multiplication est **associative**.
- $(z\times z')+(z\times z'')=z\times(z'+z'')$. La multiplication est **distributive** sur $+$.
- $z\times 1=z$. 1 est **élément neutre** pour la multiplication.

Enfin, tout nombre complexe non nul z possède un **inverse**, noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}. Plus précisément

- si $z=x+iy$ est un nombre complexe non nul présenté sous forme algébrique, $\frac{1}{z}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$.

Remarque : les propriétés de l'addition et la multiplication des complexes permettent de développer le calcul d'un produit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(x+iy)\times(x'+iy') &= x.x'+i\,xy'+i\,yx'+(i)^2\,yy' \\ &= xx'-yy'+i\,(xy'+x'y)\end{aligned}$$

Il n'est donc pas nécessaire [2] de retenir la formule du produit de complexes en notation algébrique.

■ Notation exponentielle des nombres complexes

Module d'un nombre complexe

Définition : *Le module du nombre complexe $z=x+iy$, où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est le réel positif ou nul défini par $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$.*

Proposition 3.6.— Propriétés du module —. Pour tous $z, z'\in\mathbb{C}$

- $|z.z'|=|z|\,|z'|$;
- $|z/z'|=|z|/|z'|$;
- $|z+z'|\leq|z|+|z'|$;
- $|z-z'|\geq\big||z|-|z'|\big|$.

2. Mais néanmoins utile.

Exponentielle imaginaire pure

Définition : *Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle exponentielle imaginaire d'angle θ, et on note $e^{i\theta}$ le complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.*

Proposition 3.7.— Représentation des nombres complexes de module 1 —. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module égal à 1. Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π-près, tel que $z = e^{i\theta}$.

Théorème 3.8.— Règles de calcul pour l'exponentielle imaginaire —. Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, alors :

- $e^{i0} = 1$;
- $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$;
- $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$;
- $e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta}/e^{i\theta'}$.

Théorème 3.9.— Formules d'Euler et Moivre —. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

Euler

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left[e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right] \qquad \sin(\theta) = \frac{1}{2i}\left[e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right]$$

Moivre

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \qquad \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Formes trigonométrique et exponentielle

Proposition 3.10.— Soit $z \in \mathbb{C}^\star$ un nombre complexe non nul. Il **existe** un couple de réels $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ tel que $z = \rho e^{i\theta} = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$.
Ces écritures sont appelées respectivement **forme exponentielle et trigonométrique** de z.

Définition : *Si $z \in \mathbb{C}^\star$ s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$, alors nécessairement $\rho = |z|$. On appelle **un argument** de z, et on note $\arg(z)$ tout nombre réel tel que $z = |z|e^{i\arg(z)}$.*

Interprétation : soit M l'image dans le plan complexe d'un complexe non nul $z = \rho e^{i\theta}$. Alors $\rho = |z|$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et θ est une mesure modulo 2π de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$.

Théorème 3.11.— Il n'y a pas unicité de l'écriture exponentielle. Pour tous complexes non nuls z, z' :

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z')\,[2\pi] \end{cases}$$

Proposition 3.12.— Propriétés des arguments —. Soit $z, z' \in \mathbb{C}^\star$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

- $\arg(z.z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;
- $\arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$;
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$.

Méthodes

Notations algébrique, trigonométrique et exponentielle

Quand utiliser une représentation plutôt qu'une autre

Lorsque vous devez représenter un nombre complexe, pour effectuer un calcul algébrique ou résoudre un problème, vous avez le choix entre trois types de représentation.

Méthode 3.1.— Comment choisir la bonne représentation

- La notation algébrique est la notation par défaut des nombres complexes. Elle est particulièrement utile
  - pour calculer une somme ;
  - pour simplifier une expression dans laquelle interviennent un complexe z et son conjugué $\overline{z}$;
  - représenter l'image de ce complexe à l'aide de ses coordonnées cartésiennes.
- La notation trigonométrique fait le lien entre nombres complexes et trigonométrie. Elle est donc principalement utile
  - pour établir des formules de trigonométrie ;
  - en géométrie pour exprimer distances et angles.
- La notation exponentielle est très proche de la notation trigonométrique, mais elle est plus concise
  - pour calculer un produit, un quotient ;
  - pour élever rapidement à une puissance à l'aide de la formule de Moivre.

Passer d'une représentation à une autre

Un nombre complexe peut être présenté sous forme algébrique, trigonométrique ou exponentielle. On passe sans problème d'une écriture à l'autre :

Méthode 3.2.— Comment passer de notation algébrique à trigonométrique

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul présenté en notation algébrique.

$\boxed{1}$ On détermine le module $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de z.

$\boxed{2}$ Le nombre complexe $\frac{z}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est un nombre complexe de module 1. Il s'écrit donc $\dfrac{z}{\rho} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

$\boxed{3}$ On détermine θ en identifiant $\left\{\begin{array}{rcl}\cos(\theta) & = & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin(\theta) & = & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right.$.

Exemple : déterminons les représentations trigonométriques de $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \sqrt{3}+i$.

$\boxed{1}$ On a $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$.

$\boxed{2}$ On factorise z_1 et z_2 par leurs modules : $1+i = \sqrt{2}\times(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\sqrt{3}+i = 2\times(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})$.

$\boxed{3}$ Finalement, on trouve des arguments θ_1 et θ_2 de ces complexes par identification :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta_1 = \frac{\pi}{4} \text{ convient. D'autre part } \begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ d'où } \theta_2 = \frac{\pi}{6} \text{ convient.}$$

Finalement, $z_1 = \sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

> **❑ Méthode 3.3.— Comment passer de notation trigonométrique à exponentielle**
> Soit $z = \rho\big(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\big)$ un nombre complexe non nul présenté en notation trigonométrique, *i.e.* $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On utilise simplement la formule $\cos(\theta)+i\sin(\theta) = e^{i\theta}$, de sorte que
> $$z = \rho\big(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\big) = \rho e^{i\theta}$$

> **❑ Méthode 3.4.— Comment passer de notation exponentielle à algébrique**
> Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul présenté en notation exponentielle, *i.e.* $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Par définition, $e^{i\theta} = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$. En développant, on obtient directement
> $$z = \rho e^{i\theta} = \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta)$$

Exemple : déterminons l'écriture algébrique de $\dfrac{(1+i)^3}{(\sqrt{3}+i)^2}$. Pour cela notons qu'il s'agit d'un quotient de nombre complexes dont on connaît des arguments. On passe donc d'abord en écriture exponentielle !

- $(1+i)^3 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- $(\sqrt{3}+i)^2 = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^2 = 4\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

Ainsi, $\dfrac{(1+i)^3}{(\sqrt{3}+i)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{4^{\,i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

■ Calculs algébriques dans $\mathbb{C}$

Identités remarquables

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ suivent les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$. En particulier, nous retrouvons les **Identités remarquables ❤ —.** Soit a, b des complexes.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2b + 3\,ab^2 - b^3$
- $a^3 - b^3 = (a-b)\,(a^2+ab+b^2)$

Méthodes

Parties réelles, imaginaires

> **❑ Méthode 3.5.— Comment déterminer la partie réelle d'un nombre complexe**
> - On peut mettre z sous forme algébrique et identifier sa partie réelle.
> - On peut utiliser son conjugué : $\mathfrak{Re}\, z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$.
> - Si $z = z_1 + z_2$, on a $\mathfrak{Re}\, z = \mathfrak{Re}\, z_1 + \mathfrak{Re}\, z_2$.
> - Si $z = kw$, avec $k \in \mathbb{R}$, alors $\mathfrak{Re}\, z = k\mathfrak{Re}\, w$.

Remarques : • la partie réelle d'un produit n'est pas le produit des parties réelles en général !

- des propriétés analogues existent pour le calcul de la partie imaginaire.

> **❑ Méthode 3.6.— Comment savoir si un nombre est réel, imaginaire pur**
> Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. En fonction du contexte, plusieurs caractérisations du fait que z est réel (imaginaire pur) peuvent être utilisées :
>
> • $z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}\,(z) = 0$ $\quad$ • $z \in i\mathbb{R} \iff \mathfrak{Re}\,(z) = 0$
> $\iff z = \overline{z}$ $\quad$ $\iff z = -\overline{z}$
> $\iff z = 0$ ou $\arg(z) \equiv 0\ [\pi]$ $\quad$ $\iff z = 0$ ou $\arg(z) \equiv \pi/2\ [\pi]$

Mise en œuvre : exercice 3.8

Module, argument, inverse et conjugué

> **❑ Méthode 3.7.— Comment déterminer module ou argument d'un complexe**
> - Lorsqu'on souhaite déterminer module **et** arguments, il s'agit de mettre z sous forme trigonométrique ou exponentielle et d'identifier directement (**méthode 3.2**).
> - Lorsqu'on souhaite seulement déterminer le module **ou** un argument de z, on peut utiliser les compatibilités avec le produit, le quotient et la puissance (**proposition 3.6, proposition 3.12**).

> **❑ Méthode 3.8.— Comment déterminer le conjugué d'un nombre complexe**
> C'est généralement très simple !
> - Si $z = x + iy$ en notation algébrique, alors, $\overline{x+iy} = x - iy$.
> - Si $z = \rho e^{i\theta}$ en notation exponentielle, alors, $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$.
> - Si z est obtenu par opérations algébriques (somme, différence, produit, inverse ou puissance) $\overline{z}$ est obtenu par ces mêmes opérations sur les conjugués d'après la **proposition 3.2**.

❑ **Méthode 3.9.— Comment déterminer l'inverse d'un complexe non nul**
Soit $z \in \mathbb{C}^\star$ un nombre complexe non nul.

- Si $z = x + iy$ en notation algébrique, alors, en multipliant numérateur et dénominateur par son conjugué, on obtient : $\dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$.
- Comme $z\,\overline{z} = |z|^2$, on a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.
- Si $z = \rho e^{i\theta}$ en notation exponentielle, alors, $\dfrac{1}{\rho e^{i\theta}} = \rho^{-1} e^{-i\theta}$.

Mise en œuvre : exercice 3.1.

■ Applications en géométrie

Utilisation des affixes en géométrie

❑ **Méthode 3.10.— Comment interpréter géométriquement les affixes**
Soit $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. Alors

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$.
- La norme de $\overrightarrow{AB}$ est $|b - a|$.
- Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$.
- Le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \mathfrak{Re}\,(b-a).(c-a)$.

❑ **Méthode 3.11.— Comment étudier la nature d'une configuration**
Soit $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan complexe. Alors

- A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Ainsi,

$$\begin{aligned} A, B, C \text{ alignés} \quad &\iff \quad \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0\ [\pi] \end{aligned}$$

- Le triangle (ABC) est rectangle en A si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Ainsi,

$$\begin{aligned} (ABC) \text{ rectangle en } A \quad &\iff \quad \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R} \\ &\iff \quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\iff \quad \mathfrak{Re}\,(b-a).(c-a) = 0 \end{aligned}$$

Déterminer un ensemble de points

Si un nombre complexe peut être représenté par son image dans le plan, l'ensemble des solutions d'une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ est aussi représenté par un ensemble de points du plan.
En raisonnant par équivalences comme pour la résolution de toute équation, on peut se ramener à des ensembles remarquables.

❑ Méthode 3.12.— Comment reconnaître la nature d'un lieu de points
Soit $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan complexe, R un réel positif et M le point d'affixe z. Alors

- M appartient au cercle de centre C de rayon $R \iff |z-a| = R$
- M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et $B \iff \dfrac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}$
- M appartient à la médiatrice de $[AB] \iff |z-a| = |z-b|$
- M appartient à la droite (AB) privée de $A \iff \dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$
- M appartient à la demi-droite $[AB)$ privée de $B \iff \arg\left(\dfrac{z-a}{b-a}\right) \equiv 0\ [2\pi]$

Mise en œuvre : exercice 3.9.

■ Application à la trigonométrie

Retrouver les formules de trigonométrie

La représentation des nombres complexes sous forme trigonométrique permet de retrouver les formules de trigonométrie.

❑ Méthode 3.13.— Formules d'addition et de duplication
Soit a, b des réels,
$\boxed{1}$ On sait que $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$.
$\boxed{2}$ Traduisons cette identité sous forme trigonométrique :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) + i\sin(a+b) &= (\cos a + i\sin a) \times (\cos b + i\sin b)\\ &= \cos a\cos b - \sin a\sin b + i(\sin a\cos b + \sin b\cos a)\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Identifions parties réelles et imaginaires, il vient $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$, $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$.
Les autres formules s'obtiennent de la même manière à partir de $e^{i(a-b)} = e^{ia} \times e^{-ib}$, et $e^{2ia} = e^{ia} \times e^{ia}$.

Mise en œuvre : exercice 3.6.

Calcul de valeurs exactes de certains cosinus et sinus

La calcul en notation algébrique de certains nombres complexes permettent d'obtenir les valeurs exactes de certains cosinus et sinus par identification des parties réelles et imaginaires.
Mise en œuvre : exercice 3.2.

Énoncé des exercices

Notations algébrique, trigonométrique, exponentielle

Exercice 3.1 : Mettre les nombres complexes sous la forme demandée.

1. Sous forme exponentielle $z_1 = \dfrac{3}{1-i}$, $z_2 = \dfrac{(1+i)^3}{1-i} + \dfrac{(1-i)^4}{(1-i)^2}$, $z_3 = \dfrac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{1-i}$.

2. Sous forme algébrique $z_4 = \dfrac{3+6i}{3-4i}$, $z_5 = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 + \dfrac{1-7i}{4+3i}$, $z_6 = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$.

Exercice 3.2 : Soit $u = \frac{1}{2}(\sqrt{6}-i\sqrt{2})$, $v = 1-i$.

1. Présenter u et v sous forme exponentielle.

2. En déduire une présentation exponentielle de u/v, puis les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Calculs algébriques

Exercice 3.3 : Soit $u = -3-3i$ et $v = \sqrt{3}+i$.

1. Déterminer le module et un argument de u et v.

2. En déduire le module et un argument de uv et u/v.

Exercice 3.4 : Démontrer que pour tous u et v dans $\mathbb{C}$, $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2+|v|^2\right)$.

Exercice 3.5 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Simplifier

1. $z_1 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n$; **2.** $z_2 = \Big((\sqrt{3}-1)+i(1+\sqrt{3})\Big)^n + \Big((\sqrt{3}-1)-i(1+\sqrt{3})\Big)^n$.

Applications à la trigonométrie

Exercice 3.6 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour

1. Linéariser $\cos^2(x)\sin^2(x)0$.

2. Exprimer $\cos(3x)$ comme somme de puissances de $\cos(x)$.

Exercice 3.7 : Soit p, q deux nombres réels.

1. Factoriser la somme $e^{ip}+e^{iq}$ et la différence $e^{ip}-e^{iq}$ par $e^{i\frac{p+q}{2}}$.

2. En déduire les formules de factorisation

- $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$;
- $\sin(p)+\sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$;
- $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$;
- $\sin(p)-\sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$.

3. À l'aide de la première question déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $z_1 = 1+e^{i\pi/3}$, $z_2 = e^{4i\pi/3}-1$.

Applications à la géométrie

Exercice 3.8 : Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $(\sqrt{6}+2i\sqrt{2})^n$ est réel.

Exercice 3.9 : Déterminer et représenter les ensembles de points suivants :

1. E_1 est le lieu des points M d'affixe z vérifiant $|z-2i|=2$;

2. E_2 est le lieu des points M d'affixe z vérifiant $|z-i|=|\overline{z}-1|$;

3. E_3 est le lieu des points M d'affixe z vérifiant $\arg(z-1)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$;

4. E_4 est le lieu des points M d'affixe z vérifiant $\dfrac{z-1}{z+2i}$ est réel.

5. E_5 est le lieu des points M d'affixe z vérifiant $z+\overline{z}=|z|$.

> **Le saviez-vous ?**
>
> Le mathématicien danois Carl Wessel propose le premier la représentation géométrique des nombres complexes en les associant à un plan. Cependant, son article se perd et n'est retrouvé que cent ans plus tard. C'est pourquoi on attribue souvent cette idée à Jean-Robert Argand en 1806 qui publie un article non signé. Son texte est retrouvé sept ans plus tard et publié avec la mention « auteur inconnu ». Argand se fait alors connaître.

Indications

Ex. 3.3

On appliquera ici la **méthode 3.7**.

Ex. 3.5

1. *Choisissez la bonne représentation pour le nombre complexe* $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.

2. *On pourra utiliser les formules de factorisation (***méthode 2.5***) :* $\cos(\pi/6)+\cos(2\pi/3)=2\cos(5\pi/12)\cos(\pi/4)$ *et* $\sin(\pi/6)+\sin(2\pi/3)=2\sin(5\pi/12)\cos(\pi/4)$.

Ex. 3.6

2. *On pourra noter que* $\cos(3x)=\mathfrak{Re}\left(e^{3ix}\right)$.

Ex. 3.8

On pourra mettre ce complexe sous forme exponentielle.

Ex. 3.9

On mettra en œuvre la **méthode 3.12**.

Corrigé des exercices

Exercice 3.1

1. La notation exponentielle est bien adaptée au calcul des produits et des quotients (**méthode 3.1**). Par conséquent, nous allons d'abord représenter les différents facteurs sous forme exponentielle.

• À l'aide de la **méthode 3.2**), on obtient aisément que $1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. À l'aide des règles de calcul avec l'exponentielle complexe, il s'ensuit que $z_1=\frac{3}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$.

Faites un petit schéma du cercle trigonométrique, pour retrouver les angles à partir de leur cosinus et sinus.

• Comme $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{(1+i)^3}{1-i}+\frac{(1-i)^4}{(1-i)^2}=2\,\frac{\left(e^{i\pi/4}\right)^3}{e^{-i\pi/4}}+2\left(e^{-i\pi/4}\right)^2 \\ &= 2\,\frac{e^{3i\pi/4}}{e^{-i\pi/4}}+2e^{-2i\pi/4}=2e^{i\pi}+2e^{-i\pi/2}=2(-1-i)=2\sqrt{2}e^{5i\pi/4}. \end{aligned}$$

On se rappelle que $e^{i\pi}=-1, e^{-i\pi/2}=-i$

• Déterminons d'abord l'écriture trigonométrique de $\sqrt{6}-i\sqrt{2}$. On met en œuvre la **méthode 3.2** :

$\boxed{1}$ On a $|\sqrt{6}-i\sqrt{2}|=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

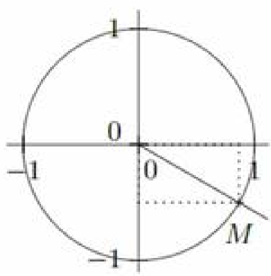
$\boxed{2}$ On factorise $\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ par son module $\sqrt{6}-i\sqrt{2}=2\sqrt{2}\times(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})$.

$\boxed{3}$ Finalement, on trouve un argument de $\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ par identification :

Sur le cercle trigo, on sait placer les points dont l'une des coordonnées est égale à $\pm\frac{1}{2}$ ou à ±1. Même si c'est très peu dans l'absolu, en pratique cela suffit toujours !

Un argument θ de $\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ vérifie

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



L'angle $\theta=-\frac{\pi}{6}$ convient.

On utilise ici les **règles de calcul** *pour les exponentielles imaginaires,* **théorème 3.8**.

Finalement, $z_3=\dfrac{2\sqrt{2}e^{-i\pi/6}\ \sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}=2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. Pour déterminer la notation algébrique d'un quotient complexe, nous multiplions numérateur et dénominateur par son conjugué afin de faire apparaître au dénominateur, un nombre réel : le module au carré du dénominateur. Il vient

$$\begin{aligned} z_4 &= \frac{3+6i}{3-4i}=\frac{(3+6i)(3+4i)}{|3-4i|^2}=\frac{(9-24)+i(12+18)}{9+16}=\frac{-15+30i}{25} \\ &= -\frac{3}{5}+i\frac{6}{5} \\ z_5 &= \frac{2i}{3-4i}+\frac{1-7i}{4+3i}=\frac{-2}{3i+4}+\frac{1-7i}{4+3i}=\frac{-1-7i}{4+3i}=\frac{(-1-7i)(4-3i)}{|4+3i|^2} \\ &= \frac{-25-25i}{25}=-1-i \end{aligned}$$

Corrigé

Pour z_6 on peut observer que les deux termes sont conjugués, ainsi

$$\begin{aligned} z_6 &= \frac{2+5i}{1-i} + \overline{\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)} = 2\mathfrak{Re}\left(\frac{2+5i}{1-i}\right) = 2\mathfrak{Re}\left(\frac{(2+5i)(1+i)}{|1-i|^2}\right) \\ &= 2\mathfrak{Re}\left(\frac{-3+7i}{2}\right) = -3 \end{aligned}$$

▲

Exercice 3.2

1. Nous appliquons la **méthode 3.2** pour présenter u et v en notation trigonométrique, puis exponentielle. Il vient $u = \sqrt{2}e^{-i\pi/6}$ et $v = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

2. D'après les **règles de calcul** pour les exponentielles imaginaires, nous avons

✎ On détermine les expressions trigo et algébrique de $\frac{u}{v}$.

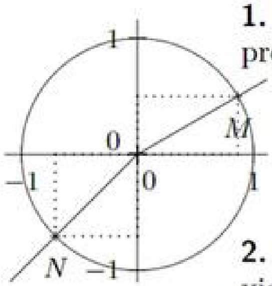
- d'une part $\dfrac{u}{v} = \dfrac{\sqrt{2}e^{-i\pi/6}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)$ et
- d'autre part $\dfrac{u}{v} = \frac{1}{2}\,\dfrac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{1}{4}\big[(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\big]$.

En identifiant parties réelle et imaginaire, il en résulte :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

▲

Exercice 3.3



1. Pour déterminer module et argument de u et v, nous allons en donner une présentation trigonométrique. La **méthode 3.2** s'applique :

$$\begin{aligned} u &= -3-3i = 3\sqrt{2}\,(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 3\sqrt{2}\,e^{5i\pi/4} \\ v &= \sqrt{3}+i = 2\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2e^{i\pi/6}. \end{aligned}$$

2. En appliquant les **règles de calcul** pour les exponentielles imaginaires, il vient :

$$\begin{aligned} uv &= 3\sqrt{2}\,e^{5i\pi/4} \times 2e^{i\pi/6} = 6\sqrt{2}e^{-7i\pi/12}; \\ u/v &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\frac{e^{5i\pi/4}}{e^{i\pi/6}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,e^{13i\pi/12}. \end{aligned}$$

▲

Exercice 3.4

Soit $(u,v) \in \mathbb{C}^2$. Pour exprimer le module au carré de $u+v$ et $u-v$, nous exploitons directement la définition :

✎ Par définition, $|z|^2 = z \times \overline{z}$

$$\begin{aligned} |u+v|^2 + |u-v|^2 &= (u+v)\,\overline{(u+v)} + (u-v)\,\overline{(u-v)} \\ &= (u+v)\,(\overline{u}+\overline{v}) + (u-v)\,(\overline{u}-\overline{v}) \\ &= u\overline{u} + u\overline{v} + v\overline{u} + v\overline{v} + u\overline{u} - u\overline{v} - v\overline{u} + v\overline{v} \\ &= 2(|u|^2+|v|^2) + u\overline{v} + \overline{u}v - u\overline{v} - v\overline{u} \\ &= 2\big(|u|^2+|v|^2\big) \end{aligned}$$

▲

Exercice 3.5

Suivant la **méthode 3.1**, pour simplifier l'expression de la puissance d'un complexe, on va le représenter sous forme exponentielle. On pourra alors facilement calculer sa puissance $n^{\text{ième}}$.

1. $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, $1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$. D'où $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \sqrt{2}e^{7i\pi/12}$. D'après la **formule de Moivre**, il s'ensuit que

$$z_1 = (\sqrt{2})^n\ e^{7in\pi/12}$$

La formule de Moivre **théorème 3.9** *est très naturelle :*

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

2. On remarque que $(\sqrt{3}-1)+i(1+\sqrt{3})$ et $(\sqrt{3}-1)-i(1+\sqrt{3})$ sont conjugués. Par les propriétés de la conjugaison (**proposition 3.2**), il en résulte que leurs puissances $n^{\text{ième}}$ sont elles aussi conjuguées. Ainsi,

$$\begin{aligned} z_2 &= \left((\sqrt{3}-1)+i(1+\sqrt{3})\right)^n + \left((\sqrt{3}-1)-i(1+\sqrt{3})\right)^n \\ &= 2\mathfrak{Re}\left[\left((\sqrt{3}-1)+i(1+\sqrt{3})\right)^n\right] \end{aligned}$$

D'après la **méthode 3.5**, *on a*

$$z+\overline{z} = 2\mathfrak{Re}\,(z)$$

Exprimons $(\sqrt{3}-1)+i(1+\sqrt{3})$ sous forme exponentielle. Pour ce faire, l'indication fournie est précieuse !

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}-1)+i(1+\sqrt{3}) &= \sqrt{3}+i-1+i\sqrt{3} = 2(e^{i\pi/6}+e^{2i\pi/3}) \\ &= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] + 2i\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right] = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}} \end{aligned}$$

*L'***exercice 3.7** *donne une méthode générale pour factoriser les sommes d'exponentielles imaginaires.*

D'après les formules de Moivre, il s'ensuit que

$$z_2 = 2\mathfrak{Re}\left[(2\sqrt{2})^n\ e^{i5n\pi/12}\right] = 2(2\sqrt{2})^n\ \cos\frac{5n\pi}{12}.$$

▲

Exercice 3.6

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. À l'aide des **Formules d'Euler** (**théorème 3.9**), on exprime d'abord $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix}

$$\begin{aligned} \cos^2(x)\sin^2(x) &= \left[\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right]^2\left[\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right]^2 = -\frac{[(e^{ix}+e^{-ix})(e^{ix}-e^{-ix})]^2}{16} \\ &= \frac{-1}{16}[e^{i2x}-e^{-i2x}]^2 = \frac{-1}{16}\left[(e^{2ix})^2 - 2e^{2ix}e^{-2ix} + (e^{-2ix})^2\right] \\ &= \frac{-1}{16}\left[e^{4ix}+e^{-4ix}-2\right] = \frac{1}{8}\left[1-\cos(4x)\right] \end{aligned}$$

2. On observe que $\cos(3x) = \mathfrak{Re}\,(e^{3ix})$. Or d'après les identités remarquables (**proposition 1.6**)

$$\begin{aligned} e^{3ix} &= \left[e^{ix}\right]^3 = \left[\cos(x)+i\sin(x)\right]^3 \\ &= 1\cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x) \\ &= \left[\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)\right] + i\left[3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\right] \end{aligned}$$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+\cdots$

$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i$

Corrigé

Par unicité de l'écriture en notation algébrique,

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$

▲

Exercice 3.7

D'après les **formules d'Euler**
• $e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ *et*
• $e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}} = 2i\ \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

1. À l'aide des règles de calcul pour les exponentielles imaginaires, il est aisé de factoriser une somme ou une différence d'exponentielles par $e^{i\frac{p+q}{2}}$. Il suffit de retrancher $\frac{p+q}{2}$ aux arguments de chaque terme ! Ainsi :

$$\begin{aligned}e^{ip}+e^{iq} &= e^{i\frac{p+q}{2}} \times \left[e^{i\left(p-\frac{p+q}{2}\right)} + e^{i\left(q-\frac{p+q}{2}\right)}\right] = e^{i\frac{p+q}{2}} \times \left[e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}}\right]\\ &= e^{i\frac{p+q}{2}} \times \left[e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right] = 2\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}\\ e^{ip}-e^{iq} &= e^{i\frac{p+q}{2}} \times \left[e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}}\right] = 2i\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}\end{aligned}$$

2. En identifiant parties réelles et imaginaires de la première factorisation $e^{ip}+e^{iq} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$, puis de la deuxième nous obtenons successivement

Voir la **méthode 3.5**.

- $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$;
- $\sin(p)+\sin(q) = 2\cos(\frac{p-q}{2})\sin(\frac{p+q}{2})$;
- $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin(\frac{p-q}{2})\sin(\frac{p+q}{2})$;
- $\sin(p)-\sin(q) = 2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$.

3. Appliquons les formules de factorisation de sommes d'exponentielles obtenues à la question **1**. Il vient

$$\begin{aligned}z_1 &= 1+e^{i\pi/3} = e^{i\pi/6}\left(e^{-i\pi/6}+e^{i\pi/6}\right) = 2\cos(\pi/6)e^{i\pi/6} = \sqrt{3}e^{i\pi/6}\\ z_2 &= e^{4i\pi/3}-1 = e^{2i\pi/3}\left(e^{2i\pi/3}-e^{-2i\pi/3}\right) = 2i\sin(2\pi/3)e^{2i\pi/3} = i\sqrt{3}e^{2i\pi/3}\end{aligned}$$

z_2 n'est pas encore sous forme exponentielle à cause de la présence du facteur i. Pour conclure, il faut l'intégrer à la partie exponentielle. Finalement, $z_2 = \sqrt{3}e^{i\pi/2}e^{2i\pi/3} = \sqrt{3}e^{7i\pi/6}$. ▲

Exercice 3.8

Suivant l'indication fournie, présentons le nombre complexe $a = \sqrt{6}+2i\sqrt{2}$ sous forme exponentielle. La **méthode 3.2** (accompagnée d'un petit schéma représentant le cercle trigonométrique !) permet d'obtenir $\sqrt{6}+2i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a^n = (\sqrt{6}+2i\sqrt{2})^n = \left(2\sqrt{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$$

Pour savoir si a^n est réel, nous mettons en œuvre la **méthode 3.6**.

$$a^n \in \mathbb{R} \iff \arg(a^n) \equiv 0\ [\pi] \iff n\frac{\pi}{6} \equiv 0\ [\pi] \iff \frac{n}{6} \equiv 0\ [1]$$

Ainsi, a^n est-il réel si et seulement si n est multiple de 6. ▲

Exercice 3.9

On considère dans le plan complexe $\mathcal{P}$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $1, i, 2i$ et $-2i$. Étant donné un nombre complexe z, on note M son image dans le plan complexe $\mathcal{P}$.

1. D'après la **méthode 3.12** M appartient à E_1 si et seulement si la distance CM est égale à 2. Par conséquent, E_1 est le cercle de centre C et de rayon 2.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, observons que $z \in E_2 \iff |z-i| = |\overline{z}-1| \iff |z-i| = |z-1|$. Ainsi, d'après la **méthode 3.12**, E_2 est la médiatrice du segment $[AB]$.

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \in E_3$ si et seulement si $\arg(z-1) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, ce qui revient à dire – d'une part que $M \neq A$ et d'autre part – que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est vertical. Ainsi E_3 est la droite verticale issue de A, privée du point A.

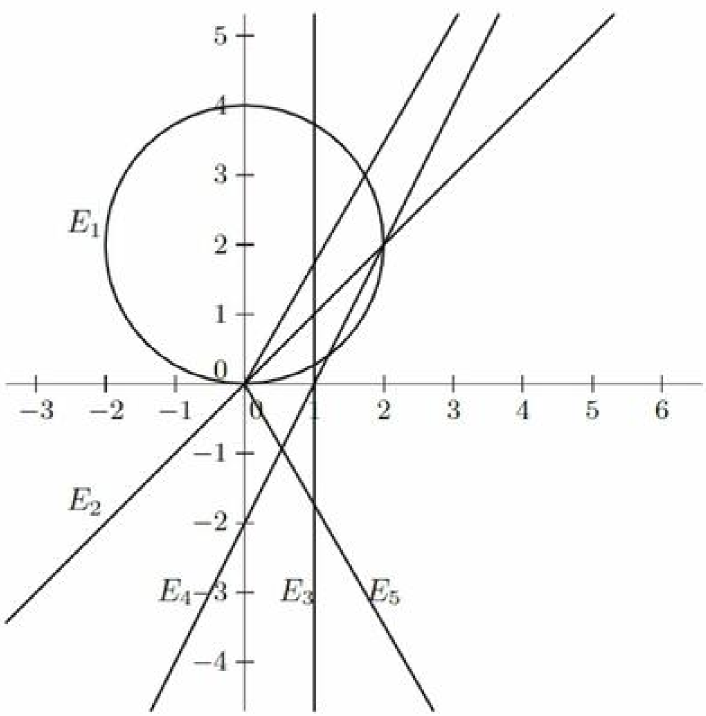
4. D'après la **méthode 3.12** E_4 est la droite (AD) privée de D.

5. Soit $z \in \mathbb{C}$. On passe en notation algébrique $z = x + iy$.

$$z + \overline{z} = |z| \iff \begin{cases} z = x+iy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ 2x = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} z = x+iy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ x \geq 0 \\ 4x^2 = x^2+y^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = x+iy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ x \geq 0 \\ y^2 = 3x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x+iy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ x \geq 0 \\ y = \sqrt{3}x \text{ ou } y = -\sqrt{3}x \end{cases}$$

Ainsi, le lieu décrit par les points $M(z)$ est la réunion des deux demi-droites $\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x \geq 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y = -\sqrt{3}x \\ x \geq 0 \end{cases}$.



▲

Corrigé

Chapitre 4

Polynômes-Équations

Tout polynôme non constant à coefficients complexes se factorise en produit de monômes de degré 1, ou, ce qui revient au même, admet au moins une racine. Ce résultat, connu sous le nom de théorème de D'Alembert-Gauss, est un des atouts des nombres complexes puisqu'il permet des démonstrations parfois plus simples. La preuve de l'encyclopédiste Jean le Rond d'Alembert au XVIIIe siècle est incomplète. Le génial mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss en propose trois démonstrations différentes entre 1799 (il n'a que 22 ans) et 1850.

Jean le Rond d'Alembert
1717-1783

OBJECTIFS

■ les incontournables

- Connaître les trinômes du second degré
  - Connaître les trois formes d'un trinôme : développée, canonique ou factorisée
  - Déterminer les racines réelles ou complexes d'un trinôme du second degré
  - trouver les racines du trinôme,
  - Connaître ses tableaux de variation, de signes et représenter l'allure de son graphe
- résoudre une équation polynomiale
  - de degré 2 dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

■ et plus si affinités

- Savoir factoriser un polynôme ;
- Pouvoir résoudre
  - une équation polynomiale de degré supérieur ou égal à 3 dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
  - une inéquation polynomiale dans $\mathbb{R}$.

Résumé de cours

Généralités sur les polynômes

Fonctions polynômes

Définition : *Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels. La fonction $P : I \to \mathbb{R}$ qui à tout réel $x \in I$ associe $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ est appelée une* ***fonction polynomiale****.*

Vocabulaire : *$a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont les* ***coefficients*** *de la fonction polynomiale P. Si de plus $a_n \neq 0$, on dit que P est de* ***degré*** *n.*

Remarque : les coefficients d'une fonction polynomiale sont uniques. Ainsi, deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients. En particulier, on retiendra :

Proposition 4.1.— Une fonction polynôme est nulle si et seulement si ses coefficients sont tous nuls.

Racines et factorisation d'un polynôme

Définition : *Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale à coefficients réels.*

- *On appelle* ***racine*** *de P – on dit aussi* ***zéro*** *de f – tout réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a) = 0$.*
- *On dit que P est* ***divisible*** *par $x - a$ s'il existe une fonction polynomiale $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - a) \times Q(x)$.*

Les identités remarquables $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$, $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ montrent que les polynômes $P_2(x) = x^2 - a^2, P_3(x) = x^3 - a^3$ sont divisibles par $x - a$. Plus généralement

Théorème 4.2.— Identité géométrique —. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\boxed{x^{n+1} - a^{n+1} = (x - a) \times \left(x^n + ax^{n-1} + a^2 x^{n-2} + \cdots + a^{n-1} x + a^n\right)}$$

Théorème 4.3.— Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale, $a \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{a \text{ est racine de } P \textit{ si et seulement si } P \text{ est divisible par } x - a.}$$

Trinôme du second degré (cadre réel)

Forme développée du trinôme

Soit $a \in \mathbb{R}^\star$, $b, c \in \mathbb{R}$. Dans cette partie, on considère la fonction polynomiale de degré 2 $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, présentée sous forme développée.

Forme canonique du trinôme

Proposition 4.4.— Forme canonique —. Soit $a \in \mathbb{R}^{\star}$, $b, c \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{P(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]}$$

Vocabulaire : *on dit alors que $P(x)$ est mis sous forme canonique.*

Définition : *Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le* **discriminant** *du polynôme P.*

Forme factorisée du trinôme

Théorème 4.5.— Racines et factorisation —. Avec les notations précédentes.

- Si $\Delta > 0$ P a deux racines réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

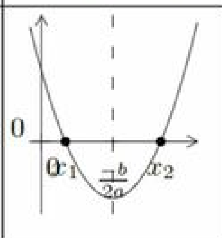
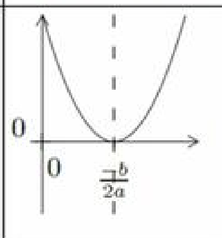
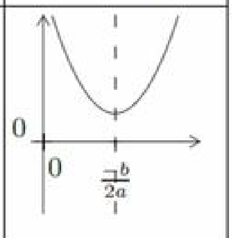
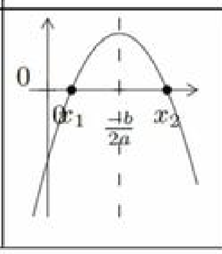
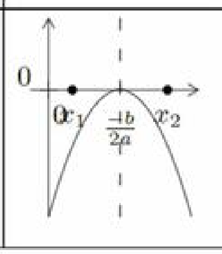
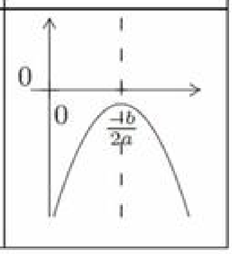
$$\boxed{P(x) \text{ se factorise sous la forme } P(x) = a(x - x_1) \times (x - x_2).}$$

- Si $\Delta = 0$ P a une racine réelle double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{P(x) \text{ se factorise sous la forme } P(x) = a(x - x_0)^2.}$$

- Si $\Delta < 0$ P n'a pas de racine réelle et P n'est pas factorisable.

Allure du graphe et signe du trinôme

	Cas $\Delta > 0$	**Cas** $\Delta = 0$	**Cas** $\Delta < 0$
Si $a > 0$			
Si $a < 0$			

Proposition 4.6.— Signe du trinôme —. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

- $P(x)$ est du signe de a si x est à l'extérieur de l'intervalle des racines.
- $P(x)$ est du signe contraire de a si x est à l'intérieur de l'intervalle des racines.

■ Équations polynomiales

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition : *Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels. On considère l'équation polynomiale à coefficients réels*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0 \tag{4.1}$$

- *Dans l'équation (4.1), x s'appelle l'**inconnue**.*
- *Un élément $x \in \mathbb{K}$ vérifiant (4.1) est appelé une **solution** de (4.1).*
- ***Résoudre dans** $\mathbb{K}$ l'équation (4.1), c'est déterminer l'ensemble des solutions*

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{K} \mid a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0\}.$$

Équations degré inférieur ou égal à 1

Proposition 4.7.— Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un couple de réels et considérons l'équation $ax + b = 0$.

- Si $a \neq 0$, alors elle possède une unique solution réelle, $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.
- Si $a = 0$ alors
  - si $b = 0$, tout élément de $\mathbb{K}$ est solution ;
  - si $b \neq 0$, l'équation ne possède aucune solution.

Équations du second degré

Théorème 4.8.— Formules du second degré ❤ —. Soit $a \in \mathbb{R}^\star$, $b, c \in \mathbb{R}$ et considérons l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4.2}$$

On note Δ le discriminant du polynôme associé, c'est-à-dire le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, (4.2) a deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, (4.2) a une racine réelle double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, (4.2) n'a pas de solution réelle, mais elle a deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 3

À l'aide du **théorème 4.3** on peut montrer qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines complexes distinctes. En fait, il est établi qu'un polynôme de degré n admet exactement n racines complexes, distinctes ou confondues. Ainsi, une équation polynomiale de degré n admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$... mais il n'existe pas de formule générale permettant d'exprimer ces solutions à l'aide des coefficients.

Méthodes

Généralités sur les polynômes

Formes développée, canonique, factorisée

Un polynôme peut être présenté sous forme développée, factorisée, ou encore sous forme canonique pour les trinômes du second degré.

Méthode 4.1.— Comment choisir la bonne représentation

- La forme développée $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ est la notation par défaut des polynômes. Elle est particulièrement utile pour traduire l'égalité de deux polynômes par identification des coefficients.
- La forme factorisée $P(x) = a_n(x - x_1) \times \cdots \times (x - x_n)$ est utile pour déterminer les racines du polynôme P ou, ce qui revient au même, résoudre l'équation $P(x) = 0$.
- La forme canonique d'un trinôme du second degré $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est très pratique pour connaître l'allure du graphe de P, étudier ses variations, déterminer ses extremums (maximum ou minimum).

Méthode 4.2.— Comment mettre le trinôme $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique

Soit $a \in \mathbb{R}^\star, b, c \in \mathbb{R}$. Pour mettre $P(x) = ax^2 + bx + c$ sous forme canonique

$\boxed{1}$ On factorise par a :

$$P(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$\boxed{2}$ On reconnaît dans $x^2 + \dfrac{b}{a}x$ le début du développement du carré de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$. On retranche $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ pour compenser. On obtient la forme voulue :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Exemple : pour déterminer le minimum de $P(x) = x^2 + x + 1$, écrivons d'abord le trinôme $P(x)$ sous forme canonique

$$P(x) = x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{2} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Sous cette forme, on visualise aisément l'allure de la parabole représentant le graphe de P. En particulier, on en déduit que la fonction polynomiale P est décroissante entre $-\infty$ et $-\frac{1}{2}$ puis croissante entre $-\frac{1}{2}$ et $+\infty$. Elle atteint son minimum en $x_0 = \frac{-1}{2}$ et ce minimum vaut $P(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

Méthode 4.3.— Comment factoriser le polynôme P

Soit $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ un polynôme de degré $n \geq 2$.

- Pour $n = 2$, on applique le **théorème 4.5** :

  $\boxed{1}$ On calcule le discriminant Δ de P.

  $\boxed{2}$ Suivant le signe de Δ, le **théorème 4.5** donne directement la factorisation de P.

- Pour $n \geq 3$, il y a deux pistes pour factoriser P :
  - soit on utilise une identité remarquable, comme $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$;
  - soit on utilise une racine a de P :

  $\boxed{1}$ Si on n'en trouve pas d'évidente, l'énoncé fournit parfois une indication

  $\boxed{2}$ D'après le **théorème 4.3**, il existe un polynôme Q, de degré $n - 1$, tel que $P(x) = (x - a) \times Q(x)$. On exprime $Q(x)$ à l'aide de coefficients inconnus,

  $$Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}.$$

  $\boxed{3}$ On détermine $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ en identifiant les coefficients dans l'égalité

  $$P(x) = (x - a) \times Q(x).$$

  $\boxed{4}$ On recommence le processus pour factoriser Q !

Exemple : factorisons le polynôme $P(x) = x^3 - 15x - 4$ sachant qu'il possède une racine entière.

$\boxed{1}$ On vérifie que 4 est racine évidente de P.

$\boxed{2}$ D'après le **théorème 4.3**, il existe $Q(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $P(x) = (x - 4)(ax^2 + bx + c)$.

$\boxed{3}$ Par identification des coefficients, il vient que a, b, c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & a \\ 0 & = & -4a + b \\ -15 & = & -4b + c \\ -4 & = & -4c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 4 \\ c & = & 1 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$\boxed{4}$ Ainsi, $Q(x) = x^2 + 4x + 1$. Pour factoriser ce polynôme de degré 2, on procède en deux étapes en utilisant le **théorème 4.5** :

$\boxed{1}$ Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 12 > 0$.

$\boxed{2}$ Q admet donc la factorisation $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, avec $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.

Finalement, $P(x) = x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})$.

Mise en œuvre : exercice 4.4, exercice 4.5.

Équations et inéquations polynomiales, cadre réel

Ce chapitre est l'occasion de revoir les méthodes générales de résolution d'équations déjà énoncées dans le chapitre **Nombres réels** (**méthode 1.8**). Pour résoudre une équation dans $\mathbb{R}$, on procèdera par équivalences successives :

- en ajoutant ou retranchant la même quantité aux deux membres de l'équation ;
- en multipliant ou divisant les deux membres de l'équation par le même nombre non nul ;
- en notant le signe des deux membres de l'équation puis en élevant le tout au carré.

Degré inférieur ou égal à 2

La résolution d'une équation du premier degré à une inconnue est immédiate, c'est la raison pour laquelle, on essaiera de ramener toute équation à la résolution de telles équations.

❑ Méthode 4.4.— Comment résoudre une équation du second degré
Soit $a \in \mathbb{R}^\star$, $b, c \in \mathbb{R}$. Pour déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4.2}$$

on applique le **théorème 4.8** :
$\boxed{1}$ On calcule le discriminant associé, $\Delta = b^2 - 4ac$.
$\boxed{2}$ On discute suivant son signe :

- Si $\Delta > 0$, (4.2) a deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, (4.2) a une racine réelle double : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, (4.2) n'a pas de solution réelle.

Mise en œuvre : exercice 4.3.

❑ Méthode 4.5.— Comment résoudre une inéquation du second degré
Soit $a \in \mathbb{R}^\star$, $b, c \in \mathbb{R}$. Pour déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c \leq 0 \tag{4.3}$$

On utilisera un tableau de signe du trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.
$\boxed{1}$ On calcule le discriminant associé, $\Delta = b^2 - 4ac$.
$\boxed{2}$ On discute suivant son signe :

- Si $\Delta > 0$,

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$,

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta < 0$,

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

Remarque : les méthodes de résolution des (in-)équations du second degré s'appliquent aussi pour résoudre des (in-)équations mettant en jeu des racines carrées.

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $4x^2 - 2x - 2 > 0$. Le discriminant du trinôme $P(x) = 4x^2 - 2x - 2$ est $\Delta = 4 + 32 = 36 > 0$. Par conséquent, P a deux racines réelles distinctes $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$. On en déduit le tableau de signe de P :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite, $\mathcal{S} =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$.

Degré supérieur ou égal à 3

Dans le cas général d'un entier n, $n \geq 3$ quelconque, il n'y a pas de formule permettant de calculer les solutions de (4.1).

> **Méthode 4.6.— Comment résoudre une équation de degré supérieur à 3**
> Pour résoudre (4.1) avec $n \geq 3$, la méthode consiste à se ramener à la résolution de plusieurs équations de degrés inférieurs. Pour cela, deux pistes sont envisageables.
>
> - **Factoriser le polynôme** $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Pour ce faire, on mettra en œuvre la **méthode 4.3** :
>   - en utilisant une racine particulière;
>   - à l'aide d'une identité remarquable.
> - **Effectuer un changement d'inconnue.** Un cas particulier important est celui des équations bicarrées, pour lesquelles le développement de $P(x)$ ne contient que des puissances paires. En ce cas,
>
> $\boxed{1}$ il existe un polynôme Q tel que $P(x) = Q(x^2)$;
>
> $\boxed{2}$ on pose $y = x^2$ et on résout le système $\begin{cases} Q(y) = 0 \\ x^2 = y \end{cases}$.

Exemple : résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation de degré 4

$$4x^4 - 21x^2 + 27 = 0 \tag{4.4}$$

$\boxed{1}$ On observe que cette équation ne présente que des puissances paires de l'inconnue.
$\boxed{2}$ On effectue le changement d'inconnue $y = x^2$.

$$(4.4) \iff \begin{cases} y = x^2 \\ 4y^2 - 21y + 27 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{3}$ Le discriminant de $Q(y) = 4y^2 - 21y + 27$ est $\Delta = 441 - 432 = 9 > 0$. Q admet donc deux racines réelles distinctes $y_1 = \frac{9}{4}$ et $y_2 = 3$. Ainsi,

$$(4.4) \iff \begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{9}{4} \text{ ou } y = 3 \end{cases} \iff x^2 = \frac{9}{4} \text{ ou } x^2 = 3 \iff x = \pm\frac{3}{2} \text{ ou } x = \pm\sqrt{3}$$

$\boxed{4}$ Finalement $\mathcal{S} = \{-\sqrt{3}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{3}\}$.

■ Équations polynomiales, cadre complexe

Nous reprenons l'équation polynomiale de degré n, mais cette fois d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n = 0 \tag{4.1}$$

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ une telle équation, on peut procéder par équivalences – comme dans $\mathbb{R}$ – en ajoutant un même nombre aux deux membres de l'égalité, en les multipliant par un même complexe non nul. Il pourra aussi être utile de choisir une représentation adaptée pour l'inconnue z, sous forme algébrique, trigonométrique ou exponentielle.

Équation du premier degré

L'équation du premier degré d'inconnue z se traite exactement comme dans $\mathbb{R}$, mais il arrive que l'équation mêle à la fois z et $\overline{z}$. On appliquera en ce cas la méthode suivante :

> ❑ **Méthode 4.7.— Comment résoudre une équation en z et $\overline{z}$**
> Lorsque l'équation met en jeu à la fois z et $\overline{z}$, par exemple $f(z,\overline{z}) = 0$, on cherchera z sous forme algébrique.
>
> $\boxed{1}$ On pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.
>
> $\boxed{2}$ On traduit l'équation initiale sous forme d'un système d'équations en identifiant les parties réelles d'une part, les parties réelles d'autre part :
>
> $$f(z,\overline{z}) = 0 \iff \begin{cases} z = x + iy, \\ f(x+iy, x-iy) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x + iy, \\ \mathfrak{Re}\, f(x+iy, x-iy) = 0 \\ \mathfrak{Im}\, f(x+iy, x-iy) = 0 \end{cases}$$
>
> On se ramène ainsi à la résoudre un système de deux équations d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$.

Exemple : résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $2i\overline{z} + 3z = 1 - i$. On cherche z sous forme algébrique $z = x + iy$, avec x et y réels.

$$2i\overline{z} + 3z = 1 - i \iff \begin{cases} z = x + iy \\ 2i(x - iy) + 3(x + iy) = 1 - i \end{cases} \iff \begin{cases} x + iy & = & z \\ 3x + 2y & = & 1 \\ 2x + 3y & = & -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = x + iy \\ x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$ .Ainsi, $z = 1 - i$ est la solution de l'équation proposée.

Mise en œuvre : exercice 4.7.

Degré supérieur ou égal à deux

Dans $\mathbb{C}$, toute équation polynomiale admet des solutions. Plus précisément une équation de degré n admet n solutions complexes, distinctes ou confondues.

> ❑ **Méthode 4.8.— Comment résoudre une équation du second degré**
> Soit $a \in \mathbb{R}^\star$, $b, c \in \mathbb{R}$. Pour déterminer l'ensemble des solutions complexes de l'équation (4.2) $ax^2 + bx + c = 0$, on applique le **théorème 4.8** :
>
> $\boxed{1}$ On calcule le discriminant associé, le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.
>
> $\boxed{2}$ On discute suivant le signe de Δ :
>
> - Si $\Delta > 0$, (4.2) a deux solutions réelles distinctes. $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
> - Si $\Delta = 0$, (4.2) a une racine réelle double. $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
> - Si $\Delta < 0$, (4.2) a deux solutions complexes conjuguées. $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Mise en œuvre : exercice 4.8.

Énoncé des exercices

Inéquations

Exercice 4.1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $8x+1 \geq 2x-5$;

2. $x+1 < \sqrt{x+2}$;

3. $(5-2x)^2 > (2x-5)(x-2)$;

4. $3x^3+5x^2-7x-1 \geq 0$.

Exercice 4.2 : Déterminer les réels m pour que les inégalités suivantes soit vérifiées pour tout x.

1. $(2m-3)x^2-2mx-1<0$;

2. $x^2-(3m+1)x+2m^2-3m+5 \geq 0$.

> **Le saviez-vous ?**
>
> Tout lycéen connaît la formule donnant les solutions d'une équation de degré 2 en fonction de ses coefficients. Des mathématiciens italiens au XVI$^{\text{e}}$ siècle ont établi une formule, fort complexe, pour celles de degrés 3 et 4. Pour le degré 5, la recherche échoua systématiquement et pour cause : il n'y en a pas ! Ce fut démontré par Niels Abel et Évariste Galois au début du XIX$^{\text{e}}$ siècle.

Résolutions d'équations dans $\mathbb{R}$

Exercice 4.3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{1}{x}$.

Exercice 4.4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3=6x+40$.

Exercice 4.5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $24x^3+62x^2-97x+30=0$ sachant que $\frac{1}{2}$ est racine.

Exercice 4.6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^4-13x^2+21=0$.

Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 4.7 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(1+3i)(i\overline{z}-1)=(3-2i)(\overline{z}+7)$;

2. $z^2+z\overline{z}+6i\sqrt{2}=0$.

Exercice 4.8 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2-6z+25=0$;

2. $2z^2-2z+3=0$.

Exercice 4.9 : On considère l'équation

$$z^3-(1+2i)z^2+(1+2i)z-2i=0 \tag{4.5}$$

1. Montrer que (4.5) possède une solution imaginaire pure $z_0 = ia$ que l'on déterminera.
2. Déterminer le polynôme $Q(z)$ de degré 2 tel que $P(z) = (z - ia)Q(z)$.
3. En déduire les solutions de l'équation (4.5).

> **Le saviez-vous ?**
>
> L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels contient $\mathbb{Q}$, celui des nombres rationnels. On trouve, compris entre les deux, l'ensemble A des nombres algébriques ; il correspond à tous les réels vérifiant une équation polynomiale à coefficients entiers. Ainsi $\sqrt{2}$ est algébrique puisqu'il vérifie l'équation $x^2 - 2 = 0$ et pourtant, il n'est pas rationnel puisqu'il ne s'écrit pas sous forme de fraction. Montrer qu'un nombre n'est pas algébrique – on le qualifie alors de transcendant– est difficile. Il a fallu attendre 1881 pour prouver la transcendance du nombre π.

Indications

Ex. 4.1

2. *Pour traiter cette inéquation, on se ramènera à une inéquation du deuxième degré.*
4. *Vous chercherez une factorisation du polynôme* $P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 7x - 1$.

Ex. 4.2

On utilisera la **méthode 4.5**.

Ex. 4.3

On se ramènera à la résolution d'une équation polynomiale de degré 2 afin d'appliquer la **méthode 4.4**.

Ex. 4.4

Humm ! c'est ennuyeux l'énoncé ne fournit pas d'indication pour cet exercice !

Ex. 4.5

On suivra la **méthode 4.6**.

Ex. 4.8

On met en œuvre la **méthode 4.8**.

Corrigé des exercices

Exercice 4.1

1. Il s'agit d'une inéquation de degré 1, on met en œuvre la **méthode 1.10** pour obtenir les équivalences suivantes : $8x+1 \geq 2x-5 \iff 6x \geq -6 \iff x \geq -1$. Ainsi, $\mathcal{S} = [-1, +\infty[$.

2. Cette inéquation met en jeu une racine carrée. Il faut donc d'abord s'assurer du domaine de validité. Ensuite, nous élèverons – proprement – au carré pour nous ramener à une inéquation du deuxième degré.

- L'équation est définie si $x+2$ est positif. Nous cherchons donc les solutions dans $I = [-2, +\infty[$.
- Soit $x \in I$. Pour résoudre $x+1 < \sqrt{x+2}$ dans I, nous distinguons deux cas :
  - si $x+1 < 0$, alors *a fortiori* $x+1 < \sqrt{x+2}$;
  - si $x+1 \geq 0$ (c'est-à-dire $x \geq -1$), les deux nombres positifs $x+1$ et $\sqrt{x+2}$ sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. Par conséquent

$$x+1 < \sqrt{x+2} \iff (x+1)^2 < x+2 \iff x^2+x-1 < 0$$

Pour étudier le signe du trinôme $P(x) = x^2+x-1$, on applique la **méthode 4.5** : le discriminant est $\Delta = 1+4 = 5$. P a donc deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-1		$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	

- En conclusion, $x+1 < \sqrt{x+2}$ précisément si $x < -1$ et si $-1 \leq x < x_2$. Ainsi $\mathcal{S} = [-1, x_2[$.

3. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(5-2x)^2 > (2x-5)(x-2) &\iff (5-2x)^2 + (5-2x)(x-2) > 0\\ &\iff (5-2x)\,\big[(5-2x)+(x-2)\big]\\ &\iff (5-2x)(3-x) > 0\end{aligned}$$

Même si $5-2x$ est non nul, on ne peut pas simplifier l'inéquation par $5-2x$ sans connaître son signe !

On peut alors appliquer la **méthode 4.5**. Les racines évidentes sont $\frac{5}{2}$ et 3. Le polynôme $(5-2x)(3-x)$ sera strictement positif à l'extérieur de l'intervalle $[\frac{5}{2}, 3]$. Par conséquent, $\mathcal{S} =]-\infty, \frac{5}{2}[\cup]3, +\infty[$.

4. Pour étudier le signe de $P(x) = 3x^3+5x^2-7x-1$, nous allons au préalable le factoriser. Pour cela, on observe que 1 est racine évidente. D'après le **théorème 4.3**, on peut factoriser $P(x)$ par $(x-1)$: il existe des coefficients a, b, c tels que

*On met en œuvre la **méthode 4.3**.*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$$

En redéveloppant le membre de droite, on obtient $P(x) = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. Par identification des coefficients, a, b, c sont solution du système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} a &= 3 \\ b-a &= 5 \\ c-b &= -7 \\ -c &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 3 \\ b &= 8 \\ c &= 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)(3x^2+8x+1)$ et l'équation proposée s'écrit :

$$P(x) \geq 0 \iff (x-1)(3x^2+8x+1)$$

Pour conclure, étudions le signe du trinôme $3x^2+8x+1$. Son discriminant vaut $52 > 0$, il admet donc deux racines $x_1 = \frac{-8-\sqrt{52}}{4} = \frac{-4-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{13}}{2}$. Le tableau suivant résume cette étude de signe :

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2+8x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement, $\mathcal{S} = [x_1, x_2] \cup [1, +\infty[$. ▲

Exercice 4.2

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. D'après la **méthode 4.5**, pour que le trinôme

$$P_m(x) = (2m-3)x^2 - 2mx - 1$$

soit toujours strictement négatif, il faut et il suffit que son discriminant et que son coefficient dominant soient strictement négatifs. Or son discriminant est $\Delta(m) = 4m^2 + 4(2m-3) = 4(m^2+2m-3) = 4(m-1)(m-3)$. Le tableau ci-dessous résume les signes du discriminant et du coefficient dominant :

Le discriminant $\Delta(m)$ est lui-même un polynôme du second degré en m !

m	$-\infty$		-3		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2m-3$		$-$	-9	$-$	-2	$-$	0	$+$	
$\Delta(m)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	

Finalement $P_m < 0$ si et seulement si $m \in]-3, 1[$.

2. Ici, le coefficient dominant est strictement positif, par conséquent, le polynôme $P_m(x) = x^2 - (3m+1)x + 2m^2 - 3m + 5$ est positif si et seulement si son discriminant est négatif. Or $\Delta(m) = (3m+1)^2 - 4(2m^2-3m+5) = m^2 + 18m - 19 = (m-1)(m+19)$. Finalement, d'après la **méthode 4.5**, on a $\Delta(m) \leq 0 \iff m \in [-19, 1]$. Ainsi, $\mathcal{S} = [-19, 1]$. ▲

$m = 1$ est racine évidente du discriminant.

Exercice 4.3

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère

$$\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x+4} = \frac{1}{x} \tag{4.6}$$

Cette équation est définie pour $x \notin \{-4, -3, 0\}$. Résolvons l'équation dans $I = \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 0\}$. Soit $x \in I$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de (4.6)} &\iff \frac{x(x+4) + 2x(x+3)}{x(x+3)(x+4)} = \frac{(x+3)(x+4)}{x(x+3)(x+4)} \\ &\iff 3x^2 + 10x = x^2 + 7x + 12 \\ &\iff 2x^2 + 3x - 12 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, (4.6) est équivalente à l'équation du second degré $2x^2 + 3x - 12 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 9 + 96 = 105 > 0$. Elle admet deux racines réelles distinctes $x_1 = \frac{-3-\sqrt{105}}{4}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{105}}{4}$. En conclusion $\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$. ▲

Exercice 4.4

Soit $P(x) = x^3 - 6x - 40$. On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation cubique $P(x) = 0$ à l'aide de la **méthode 4.6**. En l'absence d'indication de l'énoncé pour cette équation de degré 3, nous cherchons une solution particulière...

$\boxed{1}$ 4 est solution évidente ! D'après le **théorème 4.3** $P(x)$ peut être factorisé par $x - 4$.

$4^3 - 6 \times 4 - 40 = 0$

$\boxed{2}$ Il existe donc des réels a, b, c tels que

$$P(x) = (x - 4)(ax^2 + bx + c)$$

méthode 4.3

Développons le produit à droite puis identifions les coefficients. Il en résulte que a, b, c sont solutions du système

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b - 4a &= 0 \\ c - 4b &= -6 \\ -4c &= -40 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 4 \\ c &= 10 \end{cases}$$

Ainsi $P(x) = (x - 4)(x^2 + 4x + 10)$.

$\boxed{3}$ Il reste à résoudre l'équation de degré 2 $x^2 + 4x + 10 = 0$. On applique alors la méthode de résolution pour les équations polynomiales de degré 2 : Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 16 - 40 = -24 < 0$. Par conséquent, le trinôme est sans racine réelle.

méthode 4.4

$\boxed{4}$ En conclusion, P admet 4 pour unique racine réelle : $\mathcal{S} = \{4\}$. ▲

Exercice 4.5

Notons, $P(x) = 24x^3 + 62x^2 - 97x + 30$. Pour résoudre l'équation $P(x) = 0$, on met en œuvre la **méthode 4.6**.

$\boxed{1}$ Comme $x_0 = \frac{1}{2}$ est racine de cette équation, le polynôme $P(x)$ peut être factorisé par $(2x - 1)$.

$P(x)$ est factorisable par $x - \frac{1}{2}$.

$\boxed{2}$ Par conséquent, il existe des coefficients a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (2x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

On détermine les coefficients a, b, c par identification. Ils sont solutions du système

$$\begin{cases} 2a &= 24 \\ 2b - a &= 62 \\ 2c - b &= -97 \\ -c &= 30 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 12 \\ b &= 37 \\ c &= -30 \end{cases}$$

Ainsi, $P(x) = (2x - 1)(12x^2 + 37x - 30)$

$\boxed{3}$ Appliquons la **méthode 4.4** pour résoudre l'équation de degré 2 : $12x^2 + 37x - 30$. Le discriminant vaut $\Delta = 2809 = 53^2 > 0$. Par conséquent, le trinôme admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-37-53}{24} = -\frac{15}{4}$ et $x_2 = \frac{-37+53}{24} = \frac{2}{3}$.

$\boxed{4}$ Finalement, l'ensemble des racines de P est $\mathcal{S} = \{-\frac{15}{4}; \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$. ▲

Corrigé

Exercice 4.6

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 4. On suit la **méthode 4.6** :

$\boxed{1}$ On observe que l'équation ne comporte que des puissances paires de l'inconnue. Il s'agit d'une équation bicarrée.

$\boxed{2}$ On pose $y = x^2$. Il vient

$$2x^4 - 13x^2 + 21 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 \\ 2y^2 - 13y + 21 = 0 \end{array} \right.$$

Le polynôme $Q(y) = 2y^2 - 13y + 21$ admet pour discriminant $\Delta = 1 > 0$. Il admet donc deux racines réelles distinctes : $y_1 = \frac{13-1}{4} = 3$ et $y_2 = \frac{13+1}{4} = \frac{7}{2}$.

$\boxed{3}$ Ainsi

$$2x^4 - 13x^2 + 21 = 0 \iff x^2 = 3 \text{ ou } x^2 = \frac{7}{2} \iff x = \pm\sqrt{3} \text{ ou } x = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{4}$ En conséquence, l'ensemble des solutions de cette équation du quatrième degré est $\mathcal{S} = \{\pm\sqrt{3}; \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\}$. ▲

Exercice 4.7

1. Raisonnons par équivalences :

$$(1+3i)(i\overline{z} - 1) = (3-2i)(\overline{z} + 7) \iff (3i - 6)\,\overline{z} = 22 - 11\,i$$
$$\iff \overline{z} = -\frac{11}{3} \iff z = -\frac{11}{3}.$$

Finalement, $\mathcal{S} = \{-\frac{11}{3}\}$.

2. Pour résoudre cette équation mélant z et $\overline{z}$, nous cherchons z sous forme algébrique : $z = x + iy$.

Un nombre complexe est nul si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont.

$$z^2 + z\overline{z} + 6i\sqrt{2} = 0 \iff 2x^2 + 2y^2 + 2i(xy + 3\sqrt{2}) = 0$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} 2x^2 + 2y^2 & = & 0 \\ xy + 3\sqrt{2} & = & 0 \end{array} \right.$$

La seule solution de $x^2 + y^2 = 0$ est le couple $(0, 0)$.

Ce dernier système est incompatible, l'équation proposée n'a pas de solution. $\mathcal{S} = \emptyset$. ▲

Exercice 4.8

1. On met en œuvre la **méthode 4.8**

$\boxed{1}$ Le discriminant de l'équation $z^2 - 6z + 25 = 0$ est $\Delta = -64 < 0$.

$\boxed{2}$ L'équation possède deux racines complexes, conjuguées :

$$z_1 = \frac{6 - i\sqrt{64}}{2} = 3 - 4i \text{ et } z_2 = \frac{6 + i\sqrt{64}}{2} = 3 + 4i$$

$\boxed{3}$ Conclusion : $\mathcal{S} = \{3 \pm 4i\}$.

2. La résolution de l'équation $2z^2 - 2z + 3 = 0$ suit les mêmes lignes.

$\boxed{1}$ Le discriminant vaut $\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$.

$\boxed{2}$ L'équation possède donc aussi deux racines complexes, conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 - 2i\sqrt{5}}{4} = \frac{1 - i\sqrt{5}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{2 + 2i\sqrt{5}}{4} = \frac{1 + i\sqrt{5}}{2}$$

$\boxed{3}$ Conclusion : $\mathcal{S} = \{z_1, z_2\}$.

Exercice 4.9

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
ia \text{ solution de } (4.5) &\iff (ia)^3-(1+2i)(ia)^2+(1+2i)(ia)-2i=0\\
&\iff -ia^3+(1+2i)a^2+(i-2)a-2i=0\\
&\iff \begin{cases} -a^3+2a^2+a-2 &= 0\\ a^2-2a &= 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a=0 \text{ ou } a &= 2\\ -a^3+2a^2+a-2 &= 0\end{cases}\\
&\iff a=2
\end{aligned}$$

Ainsi $z_0=2i$ est une solution imaginaire pure de (4.5).

2. Cherchons $Q(z)$ sous la forme $Q(z)=az^2+bz+c$ tel que

$$\begin{aligned}
z^3-(1+2i)z^2+(1+2i)z-2i &= (z-2i)(az^2+bz+c)\\
&= az^3+(b-2ia)z+(c-2ib)z-2ic
\end{aligned}$$

On détermine les nombres a, b et c par identification. On en déduit comme précédemment que a, b et c sont solutions du système

$$\begin{cases} a &= 1\\ b-2ia &= -1-2i\\ c-2ib &= 1+2i\\ -2ic &= -2i\end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1\\ b &= -1\\ c &= 1\end{cases}.$$

Ainsi $Q(z)=z^2-z+1$ et $P(z)=(z-2i)(z^2-z+1)$.

3. Résolvons finalement l'équation $Q(z)=0$. Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2, à coefficients réels. On applique la **méthode 4.8**.

$\boxed{1}$ Le discriminant est $\Delta=1-4=-3<0$.

$\boxed{2}$ Le trinôme z^2-z+1 admet deux racines complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Conclusion : les racines complexes de l'équation (4.5) sont $z_0=2i$, $z_1=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$. ▲

Corrigé

Chapitre 5

Fonction exponentielle

On pourrait donner à Euler le titre de père de la fonction exponentielle. En effet ce brillant mathématicien y a consacré de nombreuses études. Il choisit en 1728 l'initiale du mot exponentielle pour désigner le nombre e ; en 1739 il l'exprime comme une somme infinie de puissances de la variable et il l'étend aux variables complexes. Sa formule préférée était $e^{i\pi} + 1 = 0$ car elle réunit les cinq nombres fondamentaux des mathématiques.

Leonhard Euler
1707-1783

OBJECTIFS

les incontournables

- Maîtriser les règles de calcul avec la fonction exponentielle :
  - pour calculer l'exponentielle d'une somme, d'une différence ;
  - pour calculer un produit, un quotient, une puissance ou encore une racine carrée d'exponentielles.
- Utiliser les propriétés de la fonction exponentielle :
  - pour comparer des exponentielles ;
  - pour étudier des limites de fonctions ;
  - pour dériver une fonction composée avec exponentielle.

et plus si affinités

- Utiliser les propriétés de stricte croissance de la fonction exponentielle et de sa fonction réciproque,
  - pour résoudre des équations mettant en jeu des exponentielles ;
  - pour résoudre des inéquations.

Résumé de cours

Définition et règles de calcul

Définition

Théorème-Définition 5.1.— Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = f(x)$
- $f(0) = 1$

Cette fonction est la **fonction exponentielle**, on la note $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Notation : *le nombre* $\exp(1)$ *est noté* e. *C'est le nombre de* NÉPER. *Plus généralement, pour une raison qui sera pleinement justifiée en* CPGE, *on note souvent* e^x *(lisez* e *puissance* x*) à la place de* $\exp(x)$.

Règles de calcul avec la fonction exponentielle

Théorème 5.2.— Relation fondamentale —.

$$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$$

Retenez que : l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles.

À partir de cette relation fondamentale, les autres règles de calcul se déduisent aisément :

Théorème 5.3.— Règles de calcul pour la fonction exponentielle ❤ —.

- $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$
- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x-y) = \exp(x)/\exp(y)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = 1/\exp(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

Variations et graphe

Sens de variation de la fonction exponentielle

Proposition 5.4.— La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Par conséquent, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+\star}$ est une fonction strictement croissante :

- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y \iff \exp(x) < \exp(y)$

Limites de la fonction exponentielle

Théorème 5.5.— Soit $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

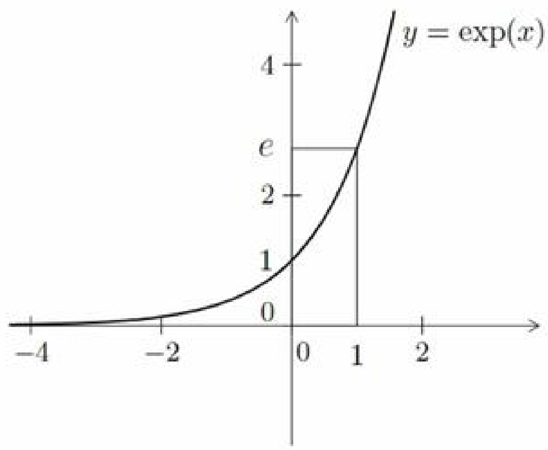
Pour lever les formes indéterminées, nous disposons des limites de référence suivantes :

Théorème 5.6.— Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Tableau de variations et graphe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	1	$+$	
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



- La tangente en 0 a pour équation $y = 1 + x$.
- La tangente au point 1, a pour équation $y = ex$.

Le saviez-vous ?

Dans un temps donné la quantité d'une substance radioactive diminue toujours du même pourcentage. Sa décroissance est donc exponentielle. Le temps nécessaire à la faire diminuer de moitié s'appelle la demi-vie radioactive.

Méthodes

Calculer avec des exponentielles

Utiliser les règles de calcul

Les règles de calcul pour la fonction exp, s'expriment sous la forme $\exp(a) \times \exp(b) = \exp(a+b)$, mais en pratique, on remplacera toujours $\exp(a)$ et $\exp(b)$ par e^a et e^b.

> **❑ Méthode 5.1.— Comment calculer avec les exponentielles**
> D'après les règles de calcul avec la fonction exponentielle, pour tous réels a et b, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a
> - le produit d'exponentielles est l'exponentielle de la somme $e^a \times e^b = e^{a+b}$;
> - le quotient d'exponentielles est l'exponentielle de la différence $\dfrac{e^a}{e^b} = e^a \times e^{-b} = e^{a-b}$;
> - la racine carrée d'une exponentielle est l'exponentielle de la moitié $\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}$;
> - la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une exponentielle est l'exponentielle du $n^{\text{ième}}$ itéré $\left(e^a\right)^n = e^{na}$.

Exemple : utilisons ces règles pour simplifier l'expression $f(x) = \dfrac{\exp(3x-1) \times \exp(2-x)}{\sqrt{\exp(4x-2)}}$.

Il en en résulte que $f(x) = \dfrac{e^{3x-1} \times e^{2-x}}{\left(e^{4x-2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}} = e^{(2x+1)-(2x-1)} = e^2$.

Mise en œuvre : exercice 5.1.

Factoriser, développer

> **❑ Méthode 5.2.— Comment factoriser une somme, développer un produit**
> D'après la relation fondamentale, la fonction exponentielle transforme les sommes en produits. Ainsi
> - le produit $e^a \times e^b$ se développe en e^{a+b} ;
> - la somme $e^{a+h} + e^{a+k}$ se factorise en $e^a \times (e^h + e^k)$.

Mise en œuvre : exercice 5.2.

Obtenir des inégalités

> **❑ Méthode 5.3.— Comment comparer deux exponentielles**
> Pour comparer deux exponentielles, il suffit de comparer les exposants ! En effet la fonction exponentielle étant strictement croissante, on a :
> - $e^x < e^y \iff x < y$
> - $e^x = e^y \iff x = y$

Méthodes

■ Résoudre des équations ou des inéquations avec des exponentielles

> ❑ **Méthode 5.4.— Comment étudier le signe d'une expression**
> Pour ce faire, plusieurs méthodes sont envisageables :
> - On peut factoriser l'expression et appliquer la règle des signes.
> - On peut résoudre une inéquation en raisonnant par équivalences.
> - On peut étudier ses variations.

Exemple : étudions le signe de $f(x) = xe^{3x} + e^x$.

- On peut noter tout d'abord que $f(x) = e^x(xe^{2x} + 1)$. Comme $e^x > 0$, il découle de la règle des signes, que $f(x)$ est du signe de $g(x) = xe^{2x} + 1$.
- Étudions donc les variations de g. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (2x+1)e^{2x}$. Par conséquent, $g'(x) \geq 0 \iff (2x+1)e^{2x} \geq 0 \iff 2x+1 \geq 0 \iff x \geq -\dfrac{1}{2}$.
  On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$g(-\frac{1}{2}) > 0$	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$		$+$		$+$	

Pour compléter ce tableau, on a utilisé

- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{2x} = 0$
- $g(-\frac{1}{2}) = 1 - \dfrac{1}{2e} > 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{2x} = +\infty$.

Mise en œuvre : exercice 5.3.

> ❑ **Méthode 5.5.— Comment résoudre une équation avec des exponentielles**
> - On peut raisonner par équivalences à l'aide de la **méthode 5.3**.
> - Si l'équation ou inéquation ne fait intervenir que des puissances de e^x, on peut effectuer un changement d'inconnue : $y = e^x, y > 0$ pour se ramener à une équation ou inéquation polynomiale d'inconnue y.

Exemples :

1. Résolvons l'inéquation $e^{2x+1} < \dfrac{1}{e^x}$ à l'aide de la **méthode 5.3** :

$$e^{2x+1} < \frac{1}{e^x} \iff e^{2x+1} < e^{-x} \iff 2x+1 < -x \iff 3x+1 < 0 \iff x < -\frac{1}{3}$$

Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty - \frac{1}{3}[$.

2. Résolvons l'équation $(E) \quad e^{3x} + e^{2x} - 10e^x + 8 = 0$.

$$(E) \iff (e^x)^3 + (e^x)^2 - 10e^x + 8 = 0 \iff \begin{cases} y = e^x > 0 \\ y^3 + y^2 - 10y + 8 = 0 \end{cases}$$

Notons P le polynôme $P(y) = y^3 + y^2 - 10y + 8$. P est un polynôme de degré 3, on le factorise à l'aide de la **méthode 4.6**. 1 étant racine évidente, P se factorise sous la forme :

$$P(y) = (y-1)(y^2+2y-8) = (y-1)(y-2)(y+4)$$

Finalement,

$$(E) \iff \begin{cases} y = e^x > 0 \\ y = 1 \text{ ou } y = 2 \text{ ou } y = -4 \end{cases} \iff e^x = 1 \text{ ou } e^x = 2 \iff x = 0 \text{ ou } x = \ln(2)$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{0, \ln(2)\}$.

Étudier des fonctions avec des exponentielles

Calculer des limites

Nous consacrons un chapitre entier à l'étude des limites. À ce stade, nous étudions quelques limites simples mettant en jeu des exponentielles.

> **Méthode 5.6.— Comment étudier une limite**
> On connaît parfaitement les limites de référence avec la fonction exponentielle (**théorème 5.5** et **théorème 5.6**). Pour s'y ramener, on utilisera :
> - les opérations algébriques sur les limites ;
> - une transformation d'écriture (factorisation ou développement) ;
> - un changement de variable.

Exemple : étudions la limite $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{1/x}}{x}$. Posons $y = \frac{1}{x}$. On a $\left.\begin{array}{l} \bullet\ y = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty \\ \bullet\ ye^y \xrightarrow[y \to -\infty]{} 0 \end{array}\right)$. Par composition (changement de variable), il en résulte que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{1/x}}{x} = 0$.

Mise en œuvre : exercice 5.7.

Calculer des dérivées

> **Méthode 5.7.— Comment calculer la dérivée de la fonction composée $x \mapsto e^{u(x)}$**
> Si $x \mapsto u(x)$ est une fonction dérivable dans un intervalle I alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est aussi dérivable dans I et
>
> $$\boxed{\text{Pour tout } x \in I, \quad \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}}$$

Notation : *la notation $\left(e^{u(x)}\right)'$ est abusive, il est plus correct d'écrire $(e^u)'(x)$.*

Exemple : la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = (-x^2)'e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$.

Mise en œuvre : exercice 5.8.

Énoncé des exercices

Manipuler des exponentielles

Exercice 5.1 : Simplifier les expressions suivantes :

1. $f_1(x) = e^7 \times e^{-3} \times e$

2. $f_2(x) = \big(\exp(2x)\big)^3$

3. $f_3(x) = \dfrac{\exp(-2,6)}{\exp(-1,1)}$

4. $f_4(x) = e^{3x+1} \times \left(e^{x+2}\right)^2$

5. $f_5(x) = \sqrt{e} \times 2e^{\frac{3x+1}{2}} \times e^{\frac{x}{2}+1}$

6. $f_6(x) = \dfrac{e^{x+2}}{e^{-x}}$

7. $f_7(x) = \left(e^x\right)^{-2} \times e^{2x+3}$

8. $f_8(x) = \dfrac{e^{x+4}}{e^5}$

9. $f_9(x) = \dfrac{e^{2x} + e^x}{e^x}$

Exercice 5.2 : Soit $x \in \mathbb{R}^\star$.
1. Factoriser $1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + e^{4x}$.
2. Développer $(e^x + e^{-x})^3$.

Exercice 5.3 : Étudier, en fonction de $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f(x) = e^{5x} - e^{x^2-3x-9}$.

Résolution d'équations et d'inéquations

Exercice 5.4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $e^x - 3 + e^{-x} = 1$

2. $6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0$

3. $2e^{2x} - 3e^x - 2 + 3e^{-x} = 0$

4. $e^{4x} - 4e^{2x} - 77 = 0$

Exercice 5.5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $e^x + e^{-x} \geq 2$

2. $e^{\frac{1}{x}} \leq e^{2x-1}$

3. $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0$

4. $e^x(e^x - 1) > e^{2x+1}(e^x - 1)$

Exercice 5.6 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\left\{ \begin{array}{rcl} e^x \times e^y & = & e^5 \\ e^{x-y} & = & e^2 \end{array} \right.$.

Études de fonctions

Calculs de limites

Exercice 5.7 : Étudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x - x^3$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$

3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{e^{\sin(x)} - 1}{x}$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 2}{2x^2 + 3e^{-x}}$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 1}{x^3 - x}$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

Calculs de dérivées

Exercice 5.8 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R}^\star$

2. $f_2(x) = (3x^2 + 2)e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$

3. $f_3(x) = e^{2x^2 - 7x + 2}$, $x \in \mathbb{R}$

4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x} e^{x^2 - 2}$, $x \in \mathbb{R}^\star$

5. $f_5(x) = \sqrt{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

6. $f_6(x) = e^{\frac{3x+1}{x^2+4}}$, $x \in \mathbb{R}$

Exercice 5.9 : Soit $f(x) = 2e^x - x^2 - 2$. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Études complètes

Exercice 5.10 : Fonction tangente hyperbolique —.
Soit $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
1. Vérifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.
2. Calculer la dérivée de f et en déduire ses variations.
3. Étudier les limites de f en $\pm\infty$ et compléter le tableau de variations.
4. Tracer la courbe de la fonction f.

Exercice 5.11 : Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.
1. Pour tout $x > 0$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2. Calculer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Démontrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe représentative de f.
5. Tracer la courbe de f et son asymptote.

Exercice 5.12 : Avec une fonction auxiliaire —.
Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$.
1. Soit $g : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = xe^x - e^x + 1$.
  a. Étudier les variations de g.
  b. En déduire le signe de $g(x)$.
2. Étudier les variations de f.

Indications

Ex. 5.1

On appliquera ici les **règles de calcul** *avec la fonction exponentielle (***théorème 5.3***), comme indiqué à la* **méthode 5.1**.

Ex. 5.7

2. *On pourra effectuer le changement de variable* $y(x) = \sin(x)$.
6. *On pourra effectuer le changement de variable* $y(x) = \frac{1}{x}$.

Corrigé des exercices

Exercice 5.1

1. $f_1(x) = e^7 \times e^{-3} \times e = e^{7-3+1} = e^5$.
2. $f_2(x) = \big(\exp(2x)\big)^3 = (e^{2x})^3 = e^{6x}$.
3. $f_3(x) = \frac{\exp(-2{,}6)}{\exp(-1{,}1)} = e^{-2{,}6} \times e^{1{,}1} = e^{-1{,}5}$.
4. $f_4(x) = e^{3x+1} \times \left(e^{x+2}\right)^2 = e^{3x+1} \times e^{2x+4} = e^{5x+5}$.
5. $f_5(x) = \sqrt{e} \times 2e^{\frac{3x+1}{2}} \times e^{\frac{x}{2}+1} = 2e^{\frac{1}{2}+\frac{3x+1}{2}+\frac{x}{2}+1} = 2e^{2x+2}$.
6. $f_6(x) = \frac{e^{x+2}}{e^{-x}} = e^{2x+2}$.
7. $f_7(x) = \left(e^x\right)^{-2} \times e^{2x+3} = e^{-2x+2x+3} = e^3$.
8. $f_8(x) = \frac{e^{x+4}}{e^5} = e^{x+4-5} = e^{x-1}$.
9. $f_9(x) = \frac{e^{2x}+e^x}{e^x} = 1 + e^x$. ▲

Exercice 5.2

*On utilise l'***identité géométrique** *(***méthode 12.7***) : si $q \neq 1$, $1+q+\cdots+q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$*

1. D'après les règles de calcul pour la fonction exponentielle, il s'agit de la somme de termes en progression géométrique. D'où

$$\begin{aligned} 1+e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x} &= (e^x)^0+(e^x)^1+(e^x)^2+(e^x)^3+(e^x)^4 \\ &= \frac{1-(e^x)^5}{1-e^x} = \frac{1-e^{5x}}{1-e^x} \end{aligned}$$

2. On utilise l'**identité remarquable** (**proposition 1.6**) pour $(a+b)^3$, il vient

$$\begin{aligned} (e^x+e^{-x})^3 &= (e^x)^3+3(e^x)^2(e^{-x})^1+3(e^x)^1(e^{-x})^2+(e^{-x})^3 \\ &= e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x} \end{aligned}$$

▲

Exercice 5.3

Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier le signe de $f(x)$ revient à comparer deux exponentielles. Pour cela, on applique la **méthode 5.3** :

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 \iff & \; e^{5x} \geq e^{x^2-3x-9} \iff 5x \geq x^2-3x-9 \\ \iff & \; x^2-8x-9 \leq 0 \end{aligned}$$

Finalement, l'étude du signe $f(x)$ découle de celle du trinôme. La **méthode 4.5** s'applique. Le discriminant Δ vaut 100. Le polynôme x^2-8x-9 admet deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 9$. On en déduit le tableau de signe de f.

x	$-\infty$		-1		9		$+\infty$
x^2-8x-9		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 5.4

On applique la **méthode 5.5.**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, remarquons tout d'abord que $e^x-3+e^{-x} = 1 \iff e^{2x}-3e^x+1 = e^x \iff e^{2x}-4e^x+1 = 0$. Cette dernière équation ne fait intervenir que des puissance de e^x. On effectue le changement d'inconnue $y = e^x$. Il vient

$$e^x-3+e^{-x} = 1 \iff \begin{cases} y = e^x \\ y^2-4y+1 = 0 \end{cases}.$$

On s'est ainsi ramené à la résolution de l'équation du deuxième degré $y^2-4y+1=0$. Pour cela, on utilise les formules du deuxième degré . Le discriminant Δ vaut 12. L'équation a deux racines réelles distinctes $y_1 = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$ et $y_2 = 2+\sqrt{3}$. Finalement

Voir **méthode 4.4**.

$$e^x - 3 + e^{-x} = 1 \iff \begin{cases} y = e^x \\ y = 2-\sqrt{3} \text{ ou } y = 2+\sqrt{3} \end{cases}$$
$$\iff e^x = 2-\sqrt{3} \text{ ou } e^x = 2+\sqrt{3}.$$

Les deux racines obtenues sont inverses l'une de l'autre, comme on pourra le vérifier en utilisant les règles de calcul de la fonction ln.

Finalement, comme $2-\sqrt{3} > 0$ et $2+\sqrt{3} > 0$, l'équation proposée admet deux racines : $\mathcal{S} = \{\ln(2-\sqrt{3}), \ln(2+\sqrt{3})\}$.

2. Pour résoudre l'équation $6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0$, on commence par la simplifier à l'aide des règles de calcul pour la fonction exponentielle :

$$6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0 \iff 6e^{5x+2} - 7e^{4x+2} + e^{3x+2} = 0$$
$$\iff e^{3x+2}\left[6e^{2x} - 7e^x + 1\right] = 0$$
$$\iff 6e^{2x} - 7e^x + 1 = 0.$$

Comme e^{3x+2} est strictement positif, il est simpliable dans l'avant-dernière équation.

Pour résoudre cette dernière équation, on effectue alors le changement d'inconnue $y = e^x$.

$$6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0 \iff \begin{cases} y = e^x \\ 6y^2 - 7y + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = e^x \\ y = 1 \text{ ou } y = \frac{1}{6} \end{cases} \iff e^x = 1 \text{ ou } e^x = \frac{1}{6} \iff x = 0 \text{ ou } x = \ln(1/6).$$

Finalement, $\mathcal{S} = \{0, -\ln(6)\}$.

3. Pour résoudre $2e^{2x} - 3e^x - 2 + 3e^{-x} = 0$, on se ramène comme précédemment à une équation polynomiale :

$$2e^{2x} - 3e^x - 2 + 3e^{-x} = 0 \iff e^x \times \left(2e^{2x} - 3e^x - 2 + 3e^{-x}\right) = 0$$
$$\iff 2e^{3x} - 3e^{2x} - 2e^x + 3 = 0 \iff \begin{cases} y = e^x \\ 2y^3 - 3y^2 - 2y + 3 = 0 \end{cases}.$$

Comme 1 est racine évidente de cette équation du troisième degré, nous pouvons factoriser par $y-1$. Par identification des coefficients, on détermine les réels a, b et c tels que $2y^3 - 3y^2 - 2y + 3 = (y-1)(ay^2 + by + c)$. On trouve

On applique la **méthode 4.6**.

$$2y^3 - 3y^2 - 2y + 3 = (y-1)(2y^2 - y - 3)$$

Ainsi, les solutions de l'équation polynomiale sont $y_1 = 1, y_2 = \frac{3}{2}$, $y_3 = -1$. Réinjectons dans le système d'équations précédent pour obtenir :

$$2e^{2x} - 3e^x - 2 + 3e^{-x} = 0 \iff e^x = 1 \text{ ou } e^x = \frac{3}{2} \text{ ou } e^x = -1$$

La dernière équation étant impossible, il reste finalement deux solutions : $\mathcal{S} = \{0, \ln(3) - \ln(2)\}$.

4. L'équation $e^{4x} - 4e^{2x} - 77 = 0$ ne fait intervenir que des puissances paires de e^x, on effectue le changement d'inconnue $y = e^{2x}$. On obtient l'équivalence suivante :

$$e^{4x} - 4e^{2x} - 77 = 0 \iff \begin{cases} y = e^{2x} \\ y^2 - 4y + 77 = 0 \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation est $\Delta = 324 = 18^2$. Les formules du deuxième degré donnent les deux solutions $y_1 = 11$ et $y_2 = -\frac{15}{2}$. Ainsi

L'équation $e^{2x} = -\frac{15}{2}$ n'admet pas de solution.

$$e^{4x} - 4e^{2x} - 77 = 0 \iff e^{2x} = 11 \text{ ou } e^{2x} = -\frac{15}{2} \iff e^{2x} = 11$$

Finalement, $\mathcal{S} = \{\frac{1}{2}\ln(11)\}$. ▲

Exercice 5.5

1. Raisonnons par équivalences :

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} \geq 2 &\iff e^{2x} + 1 \geq 2e^x \iff e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0 \\ &\iff \begin{cases} y = e^x \\ y^2 - 2y + 1 \geq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = e^x \\ (y-1)^2 \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout réel y, il s'ensuit que $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

2. Cette inéquation est définie pour les réels x non nuls. Soit $x \in \mathbb{R}^\star$. On a :

$$e^{\frac{1}{x}} \leq e^{2x-1} \iff \left(x > 0 \text{ et } 2x^2 - x - 1 \geq 0\right) \text{ OU } \left(x < 0 \text{ et } 2x^2 - x - 1 \leq 0\right)$$

À moins que vous n'ayez observé que 1 était racine évidente !

Étudions le signe du trinôme $2x^2 - x - 1$. Les formules du deuxième degré montrent qu'il admet pour racines $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$. Par conséquent, nous obtenons le tableau de signe suivant :

méthode 4.5

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2 - x + 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

En conclusion, $\mathcal{S} = [-\frac{1}{2}, 0[\cup[1, +\infty[$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Commençons par simplifier cette inéquation par le nombre strictement positif e^x, puis effectuons le changement d'inconnue $y = e^x$. Il vient

$$e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0 \iff e^{2x} - 6e^x + 8 > 0 \iff \begin{cases} y = e^x \\ y^2 - 6y + 8 > 0 \end{cases}.$$

Étudions le signe du trinôme $y^2 - 6y + 8$. Avec un discriminant égal à 4, il admet deux racines réelles distinctes $y_1 = \frac{6-2}{2} = 2$ et $y_2 = \frac{6+2}{2} = 4$. D'après la **méthode 4.5**, $y^2 - 6y + 8 > 0 \iff y < 2$ ou $y > 4$. Finalement

$$e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0 \iff e^x < 2 \text{ ou } e^x > 4 \iff x < \ln(2) \text{ ou } x > \ln(4),$$

et par conséquent $\mathcal{S} =]-\infty, \ln(2)[\cup] \ln(4), +\infty[$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour débuter, on peut simplifier cette inéquation ... non pas par $e^x - 1$ dont le signe est invertain, mais par le nombre strictement positif e^x. Ainsi

$$\begin{aligned} e^x(e^x - 1) > e^{2x+1}(e^x - 1) &\iff (e^x - 1) > x^{x+1}(e^x - 1) \\ &\iff (e^x - 1)(e^{x+1} - 1) < 0 \end{aligned}$$

Le tableau suivant précise le signe de ce produit :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$e^{x+1}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{x}-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(e^{x}-1)(e^{x+1}-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement $\mathcal{S} =]-1, 0[$. ▲

Exercice 5.6

Nous allons appliquer la **méthode 5.3** pour simplifier ce système

$$\begin{cases} e^x \times e^y &= e^5 \\ e^{x-y} &= e^2 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{x+y} &= e^5 \\ e^{x-y} &= e^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y &= 5 \\ x-y &= 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x &= \frac{7}{2} \\ y &= \frac{3}{2} \end{cases}$$

Finalement, ce système admet pour unique solution le couple $(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$. ▲

Exercice 5.7

1. On applique la **méthode 5.6** $x^2e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ par croissances comparées $-x^3 \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$. Par opérations algébriques sur les limites , il en résulte que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x - x^3 = +\infty$.

Voir **méthode 9.1**.

2. On sait que $\lim\limits_{\substack{\neq \\ y\to 0}} \dfrac{e^y-1}{y} = 1$. Posons $y(x) = 2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Il vient $\lim\limits_{\substack{\neq \\ x\to 0}} \dfrac{e^{2x}-1}{2x} = 1$ et donc $\lim\limits_{\substack{\neq \\ x\to 0}} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = 2$.

3. On sait que $\dfrac{e^y-1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$ et que $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Par opérations algébriques sur les limites, il en résulte que

$$\frac{e^{\sin(x)}-1}{x} = \frac{e^{\sin(x)}-1}{\sin(x)} \times \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

4. Dans cette fraction, numérateur et dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$. Nous avons affaire à une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, nous factorisons, numérateur et dénominateur par le terme prédominant :

Voir **méthode 9.5**.

$$\frac{e^x+2}{2x^2+3e^{-x}} = \frac{e^x}{2x^2} \times \frac{1+2e^{-x}}{1+\frac{3e^{-x}}{2x^2}}.$$

Or $\frac{1+2e^{-x}}{1+\frac{3e^{-x}}{2x^2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \dfrac{1}{1} = 1$ et par **croissances comparées** , on a $\frac{e^x}{2x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$.

méthode 5.6

On en déduit alors par opérations algébriques $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+2}{2x^2+3e^{-x}} = +\infty$.

5. Appliquons les mêmes techniques que dans la question précédente :

En cas d'indétermination, l'exponentielle de x l'emporte sur la puissance de x.

$$\frac{e^x+1}{x^3-x} = \frac{e^x}{x^3} \times \frac{1+e^{-x}}{1-x^{-2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Corrigé

6. On reconnaît ici une forme indéterminée «$0\times\infty$». Effectuons le changement de variable $y(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0^+$. On se ramène ainsi à étudier la limite en 0^+ de $g(y) = \dfrac{1}{y^2} \times (e^y - 1)$. Pour cela, notons que

$$g(y) = \frac{1}{y} \times \frac{e^y - 1}{y} \xrightarrow[y\to 0^+]{} +\infty$$

Par composition, il en résulte que $x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) = g(1/x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$ ▲

Exercice 5.8

Lorsqu'on dérive une fonction composée de la forme $f(x) = e^{u(x)}$, on peut toujours factoriser $f'(x)$ par $f(x) = e^{u(x)}$.

On met en œuvre la **méthode 5.7**. Il vient

1. $f_1'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\, e^{1/x}$.

2. $f_2'(x) = (6x^2 + 6x + 4)\, e^{2x}$.

3. $f_3'(x) = (4x - 7)\, e^{2x^2-7x+2}$.

4. $f_4'(x) = \left(2 - \dfrac{1}{x^2}\right)\, e^{x^2-2}$.

5. $f_5'(x) = \dfrac{1}{2}\, e^{x/2}$.

6. $f_6'(x) = \dfrac{-3x^2 - 2x + 12}{x^2 + 8x + 16}\, e^{\frac{3x+1}{x^2+4}}$. ▲

Exercice 5.9

En fait f est indéfiniment dérivable !

f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$f(x) = 2e^x - x^2 - 2,\ f'(x) = 2\ e^x - 2x;\ f''(x) = 2\ (e^x - 1)$$

L'étude du signe de $f''(x)$ est aisée, et nous permettra d'en déduire successivement le signe de $f'(x)$ et de $f(x)$.

$$f''(x) \geq 0 \iff x \geq 0$$

On en déduit que f' admet comme valeur minimale $f'(0) = 2 > 0$. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$$

la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Finalement, nous obtenons que $f(x)$ sera positif, si et seulement si, x l'est. ▲

Exercice 5.10

Pour tous a et b,

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

avec égalité si et seulement si a et b sont de même signe.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^x + e^{-x} > 0$, donc $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est bien défini. De plus, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|f(x)| = \left|\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right| = \frac{|e^x - e^{-x}|}{e^x + e^{-x}} < \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1.$$

Autrement dit, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.

2. f est dérivable comme quotient de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Étudions les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

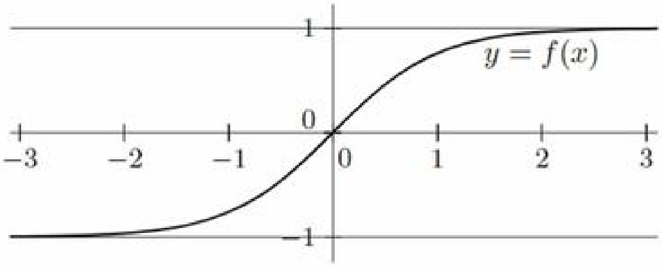
Au voisinage de $+\infty$, on factorise numérateur et dénominateur par e^x, il vient

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

En factorisant par e^{-x} au voisinage de $-\infty$, on en obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	1	$+$
$f(x)$	-1 $\nearrow$	0	$\nearrow$ 1

4.



Le graphe de f admet les droites d'équations

$$y = \pm 1$$

comme asymptotes horizontales. ▲

Exercice 5.11

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{1/x}.$$

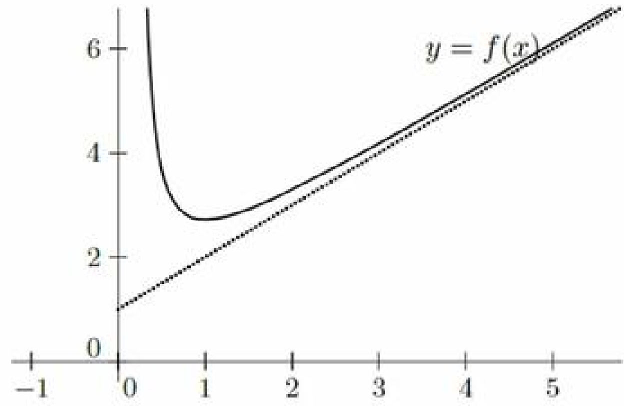
Par conséquent $f'(x) > 0 \iff x > 1$.
2. Au voisinage de $+\infty$, on a par opérations algébriques, $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
Au voisinage de 0, effectuons le changement de variable $y(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.
Comme $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$, il s'ensuit que $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.
3. Le tableau de variations résume ces propriétés.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	e	$\nearrow$ $+\infty$

Au voisinage de 0, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe représentatique de f. Au voisinage de $+\infty$, il y a aussi une branche infinie. Nous allons montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe.

4. Au voisinage de $+\infty$, $f(x) - (x+1) = x\left(e^{1/x} - 1\right) - 1 = \dfrac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} - 1$. Effectuons le changement de variable $y(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+$. Comme $\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{e^y - 1}{y} = 1$, il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+1) = 0$. Par définition, c'est dire que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe.

5.



▲

Exercice 5.12

1. Soit $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

a. g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = xe^x > 0$. Par conséquent, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

b. Comme de plus $g(0) = 0$, nous pouvons en conclure que pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

2. Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas et pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{2xe^{2x} - e^{2x} - 1}{x^2} = \frac{g(2x)}{x^2}$$

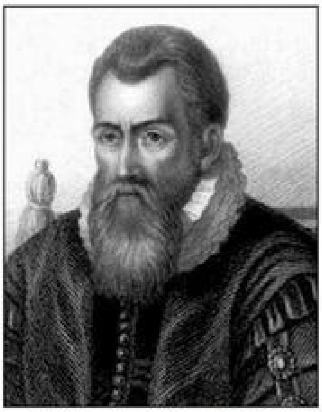
D'après la question précédente, g est à valeurs strictement positives et par conséquent $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

▲

Chapitre 6

Fonction logarithme

C'est un Écossais, John Napier, souvent francisé en Neper, qui inventa les logarithmes. Pour le faire, il considéra deux véhicules, l'un allant à une vitesse uniforme et l'autre à une vitesse proportionnelle à la distance restant à parcourir. Il considère que la distance parcourue par le second est le logarithme de celle restant à parcourir par le premier. John Neper est aussi l'auteur d'écrits théologiques qui eurent à son époque une grande diffusion.



John Napier
1550-1617

OBJECTIFS

les incontournables

- Maîtriser les règles de calcul avec la fonction logarithme :
  - pour calculer le logarithme d'un produit, d'un quotient, d'une puissance ou d'une racine carrée ;
  - pour calculer une somme, un différence de logarithmes.
- Utiliser les propriétés de la fonction logarithme :
  - pour comparer des expressions ;
  - pour étudier des limites de fonctions ;
  - pour dériver une fonction composée avec un logarithme.

et plus si affinités

- Utiliser les propriétés de stricte croissance de la fonction logarithme et de sa fonction réciproque,
  - pour résoudre des équations mettant en jeu des logarithmes ;
  - pour résoudre des inéquations.

Résumé de cours

Définition et règles de calcul

Définition

À l'aide du corollaire du **théorème des valeurs intermédiaires** pour les fonctions strictement monotones, on démontre que :

Théorème-Définition 6.1.— Pour tout réel $x > 0$, l'équation $\exp(t) = x$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}$, admet une solution réelle unique, appelée **logarithme népérien** de x et noté $\ln(x)$. On note

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+\star} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

la fonction qui à tout réel strictement positif associe son logarithme népérien.

Attention ! le réel $\ln(x)$ est défini seulement pour x strictement positif mais il peut prendre toute valeur réelle.

Proposition 6.2.— Ainsi, par définition

- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$
- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

Vocabulaire : *les fonctions* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+\star}$ *et* $\ln : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ *sont dites **réciproques** l'une de l'autre.*

Règles de calcul avec la fonction logarithme

Théorème 6.3.— Relation fondamentale —.

$$\boxed{\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}, \quad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)}$$

Retenez que : le logarithme d'un produit de nombres strictement positifs est la somme de leurs logarithmes.

À partir de cette relation fondamentale, les autres règles de calcul se déduisent aisément :

Théorème 6.4.— Règles de calcul pour les logarithmes ❤ —.

- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$, $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$, $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\ln(1/x) = -\ln(x)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

Variations et graphe

Sens de variation de la fonction logarithme

Proposition 6.5.— La fonction ln est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Par conséquent, $\ln : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement croissante :

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$, $x < y \iff \ln(x) < \ln(y)$.

Limites de la fonction logarithme

Théorème 6.6.— Limites de la fonction logarithme —.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to a} \ln(x) = \ln(a)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

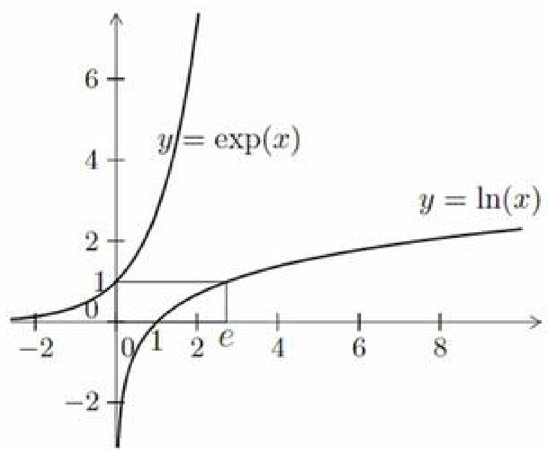
Pour lever les formes indéterminées, nous disposons des limites de référence suivantes :

Théorème 6.7.— Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Tableau de variations et graphe

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$	1	$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



- La tangente en 1 a pour équation $y = x - 1$.
- La tangente au point e, a pour équation $y = x/e$.

Remarque : les fonctions exponentielle et logarithme étant réciproques l'une de l'autre, leurs graphes sont symétriques par rappport à la première bissectrice.

■■ Méthodes

■ Calculer avec des logarithmes

Utiliser les règles de calcul

❑ Méthode 6.1.— Comment calculer avec les logarithmes
D'après les règles de calcul avec la fonction ln, pour tous réels strictement positifs a et b, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a

- la somme de logarithmes est le logarithme du produit : $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$;
- la différence de logarithmes est le logarithme du quotient : $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$;
- la moitié du logarithme est le logarithme de la racine carrée : $\frac{1}{2}\ln(a) = \ln(\sqrt{a})$;
- le $n^{\text{ième}}$ itéré du logarithme est le logarithme de la puissance $n^{\text{ième}}$: $n\ln(a) = \ln(a^n)$.

Exemple : pour tout réel x, simplifions l'écriture de $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) + \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$.
On peut noter que pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$. Ainsi $\sqrt{x^2+1} - x > 0$ et $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ et par conséquent $f(x)$ est bien défini pour tout réel x.
En outre, d'après la **méthode 6.1** cette somme de logarithmes peut encore s'écrire comme

$$f(x) = \ln\left((\sqrt{x^2+1} - x) \times (\sqrt{x^2+1} + x)\right) = \ln\left((x^2+1) - x^2\right) = \ln(1) = 0$$

La fonction f est la fonction constante égale à 0 !

Mise en œuvre : exercice 6.1.

Transformer une écriture

D'après la relation fondamentale, on peut simplifier une somme de logarithme en le logarithme du produit.

Exemple : simplifions la somme suivante

$$S = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{9}{10}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{9}{10}\right) = \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln(10)$$

Mise en œuvre : exercice 6.2.

Obtenir des inégalités

❑ Méthode 6.2.— Comment comparer deux logarithmes
Les logarithmes de deux réels strictement postifs, sont rangés dans le même ordre que ces réels ! En effet la fonction logarithme étant strictement croissante, on a :

- $\ln(x) < \ln(y) \iff x < y$
- $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$

En particulier $\ln(x) > 0 \iff x > 1$.

Méthodes

Résoudre des équations ou des inéquations avec des logarithmes

Méthode 6.3.— Comment étudier le signe d'une expression
Pour ce faire, plusieurs méthodes sont envisageables :

- On peut factoriser l'expression et appliquer la règle des signes.
- On peut résoudre une inéquation en raisonnant par équivalences.
- On peut étudier ses variations.

Mise en œuvre : exercice 6.9.

Méthode 6.4.— Comment résoudre une (in-)équation avec des logarithmes
Avant tout, il faut bien préciser le domaine de définition de l'équation (**méthode 1.7**). Ensuite,

- On peut raisonner par équivalences à l'aide de la **méthode 6.2**.
- Si l'équation ou inéquation ne fait intervenir que des puissances de $\ln(x)$, on peut effectuer un changement d'inconnue : $y = \ln(x)$ pour se ramener à une équation ou inéquation polynomiale d'inconnue y.

Exemples :

1. Résolvons l'équation $\ln\left(\frac{4x+2}{x-1}\right) = \ln(x^2)$.

$\boxed{1}$ L'équation est définie pour $\frac{4x+2}{x-1} > 0$ et $x^2 > 0$, c'est-à-dire lorsque $x \notin [-2, 1]$ et $x \neq 0$. Par conséquent, l'équation est définie sur $\mathcal{D} =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$.

$\boxed{2}$ Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par équivalences, il vient :

$$\ln\left(\frac{4x+2}{x-1}\right) = \ln(x^2) \iff \begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ \dfrac{4x+2}{x-1} = x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0 \end{cases}$$

-1 est racine évidente de l'équation polynomiale $x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$ qui se factorise sous la forme $(x+1)(x^2 - 2x - 2) = 0$. D'après les formules pour les équations du second degré (**méthode 4.8**), il vient

$$\ln\left(\frac{4x+2}{x-1}\right) = \ln(x^2) \iff \begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ x = -1 \text{ ou } x = 1 - \sqrt{3} \text{ ou } x = 1 + \sqrt{3} \end{cases} \iff x = 1 + \sqrt{3}$$

Finalement, $\mathcal{S} = \{1 + \sqrt{3}\}$.

2. Résolvons l'inéquation $\ln^2(x) - e\ln(x) + \ln(1/x) > -e$. Cette équation est définie pour $x > 0$. De plus, pour tout $x > 0$, on a

$$\ln^2(x) - e\ln(x) + \ln(1/x) > -e \iff \ln^2(x) - (e+1)\ln(x) + e > 0 \iff \begin{cases} y = \ln(x) \\ y^2 - (e+1)y + e > 0 \end{cases}$$

Le trinôme $y^2 - (e+1)y + e$ est du signe positif à l'intérieur de l'intervalle des racines, soit dans $]1, e[$ ici. Par suite $\ln^2(x) - e\ln(x) + \ln(1/x) > -e \iff 1\ln(x) < e \iff 0 < x < 1$. Finalement, $\mathcal{S} =]0, 1[$.

■ Étudier des fonctions avec des logarithmes

Calculer des limites

Nous consacrons un chapitre entier à l'étude des limites. À ce stade, nous étudions quelques limites simples mettant en jeu des exponentielles.

> ❑ **Méthode 6.5.— Comment étudier une limite**
> On connaît parfaitement les limites de référence avec la fonction logarithme (**théorème 6.6** et **théorème 6.7**). Pour s'y ramener, on utilisera :
> - les opérations algébriques sur les limites ;
> - une transformation d'écriture ;
> - un changement de variable.

Exemple : étudions la limite quand x tend vers $+\infty$ de $x\ln(1+\frac{3}{x})$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln(1+\frac{3}{x})$ tend vers 0, il y a donc une forme indéterminée. Effectuons le changement de variable $y = \frac{3}{x}$, on a

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \ y(x) = \frac{3}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \bullet\ \ \dfrac{\ln(1+y)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1 \end{array}\right) \quad \text{Par composition, il en résulte que } \frac{x}{3}\ln(1+\frac{3}{x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

Finalement, par opération algébrique, il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{3}{x}) = 3$.

Mise en œuvre : exercice 6.6.

Calculer des dérivées

> ❑ **Méthode 6.6.— Comment dériver la fonction composée $x \mapsto \ln\big(u(x)\big)$**
> Si $x \mapsto u(x)$ est une fonction dérivable dans un intervalle I et à valeurs strictement positives, alors $x \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ est aussi dérivable dans I et
>
> $$\boxed{\text{Pour tout } x \in I, \quad \big(\ln(u(x))\big)' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

Notation : *la notation $\big(\ln(u(x))\big)'$ est abusive, il est plus correct d'écrire $\big(\ln(u)\big)'(x)$.*

Exemple : la fonction $f(x) = \ln(\ln(x))$ est définie si $x > 0$ et $\ln(x) > 0$, c'est-à-dire si $x > 1$. De plus, pour tout réel $x > 1$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

Mise en œuvre : exercice 6.7.

Méthodes

Énoncé des exercices

Manipuler les logarithmes

Exercice 6.1 : Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les réels suivants :

1. $\ln(8)$
2. $\ln(\frac{1}{4})$
3. $\ln(16e)$
4. $\ln(\sqrt{2})$
5. $\ln(64/e^2)$
6. $\ln(\sqrt{5}-1)+\ln(\sqrt{5}+1)$

Exercice 6.2 : Transformer sous la forme d'un seul logarithme les réels suivants :

1. $\ln(2)-3\ln(3)+\ln(8)$
2. $5\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(2)$
3. $\ln(\sqrt{2}+1)+\ln(\sqrt{2}-1)$
4. $6\ln(\sqrt{2})-\ln(2^3/3)$
5. $\ln(3+\sqrt{5})^2+\ln(3-\sqrt{5})^2$
6. $\ln\sqrt{\sqrt{11}-3}+\ln\sqrt{\sqrt{11}+3}$

Exercice 6.3 : Établir les égalités suivantes :

1. Pour tout $x>-1$, $\ln(x^2-x+1)=\ln(x^3+1)-\ln(x+1)$.

2. Pour tout $x>3$, $\ln(x^2-2x-3)-2\ln(x+1)=\ln\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)$.

Résolution d'équations et d'inéquations

Exercice 6.4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln^2(x)-3\ln(x)=4$
2. $2\ln(\sqrt{x})+\ln(1-x)=2\ln(x)$
3. $\ln(2x+1)+\ln(2x-1)=\ln(x+2)$
4. $\ln^4(x)+\ln^3(x)-7\ln^2(x)-\ln(x)+6=0$

Exercice 6.5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\ln(x^2-x-2)>2\ln(3-x)$
2. $\ln(1+e^x)+\ln(1-e^x)\geq\dfrac{1}{2}$
3. $\ln(x)+\ln(x+2)<\ln(x^2-2x+2)$
4. $\ln^2(x)+\ln(x)-10<\dfrac{-8}{\ln(x)}$

Exercice 6.6 : Résoudre les systèmes :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} 2\ln(x)+5\ln(y) & = & -1 \\ 3\ln(x)-7\ln(y) & = & 13 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 7 \\ \ln(x)+2\ln(y) & = & \ln(2) \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} \ln(x^2y^3) & = & -4 \\ \ln(x^3/y^4) & = & 11 \end{array}\right.$

Études de fonctions

Calculs de dérivées

Exercice 6.7 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition et de dérivabilité et calculer la dérivée.

1. $f_1(x)=\ln(\ln(x))$
2. $f_2(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
3. $f_3(x)=\ln(\sqrt{x})$
4. $f_4(x)=\ln\left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+5}\right)$
5. $f_5(x)=\sqrt{2-\ln(x)}$
6. $f_6(x)=\dfrac{x^2}{1-\ln(x)}$

Calculs de limites

Exercice 6.8 : Étudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln^2(x) - 3\ln(x)$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) - 2x$

5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+1}{x^2} + \ln(x)$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\ln(x)}{1+\sqrt{x}}$

Études complètes

Exercice 6.9 : Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1. Vérifier que f est définie et dérivable sur $[1,+\infty[$.
2. Calculer la dérivée de f et en déduire ses variations.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$ et compléter le tableau de variations.
4. En déduire le signe de f sur $[1,+\infty[$.

Exercice 6.10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $f(x) = x^2 - (x+1)\ln(x)$.
1. Vérifier que f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour tout $x > 0$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$ pour compléter le tableau de variations de f.

Le saviez-vous ?

Les logarithmes permettent de transformer une multiplication en addition. Aussi ont-ils permis d'effectuer des calculs beaucoup plus ardus et ont amené d'énormes progrès scientifiques, en particulier en astronomie, aux XVIIe et XVIIIe siècles.

Indications

Ex. 6.1

On met en œuvre la **méthode 6.1**.

Ex. 6.2

Pour transformer ces expressions, vous utiliserez les **règles de calcul** *avec la fonction logarithme, rappelées dans la* **proposition 6.4**.

Ex. 6.3

1. *On pourra partir d'une factorisation de* x^3+1.

Corrigé des exercices

Exercice 6.1

On met en œuvre la **méthode 6.1** pour simplifier ces expressions. Il vient :
1. $\ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)$.
2. $\ln(\frac{1}{4}) = -\ln(2^2) = -2\ln(2)$.
3. $\ln(16e) = \ln(2^4 \times e) = \ln(2^4) + \ln(e) = 4\ln(2) + 1$.
4. $\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$.
5. $\ln(64/e^2) = \ln(2^6) - \ln(e^2) = 6\ln(2) - 2$.
6. $\ln(\sqrt{5}-1) + \ln(\sqrt{5}+1) = \ln\left((\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)\right) = \ln(5-1) = 2\ln(2)$. ▲

Exercice 6.2

Voir la **proposition 6.4**.

Il s'agit là encore d'appliquer les **règles de calcul** avec la fontion logarithme.
1. $\ln(2) - 3\ln(3) + \ln(8) = \ln(2 \times 8/3^3) = \ln(16/27)$.
2. $5\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(2) = \ln(3^5 \times \sqrt{2}) = \ln(243\sqrt{2})$.
3. $\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1) = \ln\left((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right) = \ln(1) = 0$.
4. $6\ln(\sqrt{2}) - \ln(2^3/3) = \ln(2^6 \times 2^{-3} \times 3) = \ln(24)$.
5.
$$\begin{aligned} \ln(3+\sqrt{5})^2 + \ln(3-\sqrt{5})^2 &= \ln\left((3+\sqrt{5})^2 \times (3-\sqrt{5})^2\right) \\ &= \ln\left((9-5)^2\right) = \ln(16). \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} \ln\left(\sqrt{\sqrt{11}-3}\right) + \ln\left(\sqrt{\sqrt{11}+3}\right) &= \ln\left(\sqrt{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)}\right) \\ &= \ln(\sqrt{11-9}) = \ln(\sqrt{2}). \end{aligned}$$

▲

Exercice 6.3

On utilise la **proposition 1.6**.

1. Soit $x > -1$, on sait d'après l'identité remarquable

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

Or, pour $x > -1$, on a $x^3 + 1 > 0, x + 1 > 0$ et $x^2 - x + 1 > 0$, par conséquent les **règles de calcul** pour la fonction logarithme s'appliquent et donnent :

$$\ln(x^3+1) = \ln(x+1)((x^2 - x + 1) = \ln(x+1) + \ln(x^2 - x + 1),$$

d'où l'on tire l'expression demandée.

Voir la **méthode 4.5**.

2. Soit $x > 3$. Étudions tout d'abord le signe du trinôme $x^2 - 2x - 3$. La méthode pour l'étude du signe des trinômes montre que $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ est strictement positif pour $x > 3$. Ainsi, pour $x > 3$, $x^2 - 2x - 3 > 0$, de même $\dfrac{x-3}{x+1} > 0$ et $x + 1 > 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - 2x - 3) - 2\ln(x+1) &= \ln\left((x-3)(x+1)\right) - 2\ln(x+1) \\ &= \ln(x-3) + \ln(x+1) - 2\ln(x+1) \\ &= \ln(x-3) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x-3}{x+1}\right). \end{aligned}$$

▲

Exercice 6.4

On met en œuvre les différentes stratégies proposées dans la **méthode 6.4**.

1. Comme l'équation $\ln^2(x) - 3\ln(x) = 4$ s'exprime uniquement avec des puissances de $\ln(x)$, nous allons effectuer le changement d'inconnue $y = \ln(x)$. Il vient :

$$\ln^2(x) - 3\ln(x) = 4 \iff \begin{cases} x > 0, y = \ln(x) \\ y^2 - 3y - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, y = \ln(x) \\ y = -1 \text{ ou } y = 4 \end{cases}$$
$$\iff \ln(x) = -1 \text{ ou } \ln(x) = 4 \iff x = e^{-1} \text{ ou } x = e^4$$

Finalement $\mathcal{S} = \{e^{-1}, e^4\}$.

2. L'équation $2\ln(\sqrt{x}) + \ln(1-x) = 2\ln(x)$ est définie si $x > 0$ et $x < 1$. Soit $x \in]0,1[$. Utilisons les **règles de calcul** avec la fonction logarithme pour simplifier cette équation. Il vient

$$2\ln(\sqrt{x}) + \ln(1-x) = 2\ln(x) \iff \begin{cases} x \in]0,1[\\ \ln\left(x \times (1-x)\right) = \ln(x^2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x \in]0,1[\\ \ln(x - x^2) = \ln(x^2) \end{cases}$$

Finalement, la **méthode 6.2** permet de se ramener à une équation polynomiale :

$$2\ln(\sqrt{x}) + \ln(1-x) = 2\ln(x) \iff \begin{cases} x \in]0,1[\\ x(2x-1) = 0 \end{cases}$$

Comme $0 \notin]0,1[$, il en résulte finalement que $\mathcal{S} = \{\frac{1}{2}\}$.

3. Cette équation est définie si $2x+1 > 0$ et $2x-1 > 0$ et $x+2 > 0$, soit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$. En ce cas,

$$\ln(2x+1) + \ln(2x-1) = \ln(x+2) \iff \ln(4x^2-1) = \ln(x+2)$$
$$\iff 4x^2 - x - 3 = 0$$

Cette équation polynomiale de degré 2 admet pour racines 1 et $-\frac{3}{4}$. Comme $-\frac{3}{4} \notin]\frac{1}{2}, +\infty[$, il vient $\mathcal{S} = \{1\}$.

On met en œuvre la **méthode 4.4**.

4. Comme cette équation s'exprime uniquement avec les puissances successives de $\ln(x)$, on effectue la changement d'inconnue $y = \ln(x)$, pour $x > 0$. On se ramène ainsi à la résolution de l'équation poynomiale

N'oubliez pas de tenir compte du domaine de définition de l'équation initiale !

$$y^4 + y^3 - 7y^2 - y + 6 = 0$$

Pour ce faire, on met en œuvre la **méthode 4.6**. On observe successivement que 1 et -1 sont des racines évidentes de cette équation qui se factorise donc sous la forme

$$(y-1)(y+1)(y^2+y-6) = 0$$

Finalement, les **formules pour le deuxième degré** donnent deux nouvelles racines 2 et -3. Finalement

Voir la **méthode 4.4**.

$$\ln^4(x) + \ln^3(x) - 7\ln^2(x) - \ln(x) + 6 = 0 \iff \ln(x) \in \{1, -1, 2, -3\}.$$

Finalement, $\mathcal{S} = \{e, e^{-1}, e^{-3}, e^2\}$. ▲

Exercice 6.5

1. Le trinôme $x^2 - x - 2$ admet deux racines -1 et 2. La **méthode 4.5** permet d'en déterminer le signe. Comme $3 - x > 0$ seulement si $x < 3$, l'inéquation

Corrigé

proposée est définie pour $x \in]-\infty, -1[\cup]2, 3[$. Pour un tel réel x, appliquons alors la **méthode 6.2**, il vient

$$\begin{aligned}\ln(x^2 - x - 2) > 2\ln(3 - x) &\iff x^2 - x - 2 > (3 - x)^2 \\ &\iff x^2 - x - 2 > x^2 - 6x + 9 \iff 5x > 11\end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{S} =]\frac{11}{5}, +\infty[\cap]2, 3[=]\frac{11}{5}, 3[$.

Pour tout réel x, on a $e^x + 1 > 0$.

2. L'inéquation est définie si $1 - e^x > 0$, c'est-à-dire si $x < 0$. En ce cas, d'après les **règles de calcul** pour la fonction ln, l'inéquation est équivalente à $1 - e^{2x} \geq \sqrt{e}$, soit $e^{2x} \leq 1 - \sqrt{e}$. Comme $1 - \sqrt{e}$ est strictement négatif, cette inéquation est impossible : $\mathcal{S} = \emptyset$.

Le discriminant de $x^2 - 2x + 2$ est strictement négatif. La **méthode 4.5** *permet d'en conclure que pour tout réel x, on a $x^2 - 2x + 2 > 0$.*

3. L'inéquation est définie si $x > 0$ et $x + 2 > 0$, soit pour $x > 0$. Or pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}\ln(x) + \ln(x + 2) < \ln(x^2 - 2x + 2) &\iff x^2 + 2x < x^2 - 2x + 2 \\ &\iff 4x < 2 \iff x < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} =]0, \frac{1}{2}[$.

4. Cette inéquation est définie pour $x \in \mathbb{R}^{+\star} \setminus \{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Pour résoudre cette inéquation, nous effectuons le changement d'inconnue, $y = \ln(x)$. Il vient

$$\begin{aligned}\ln^2(x) + \ln(x) - 10 < \frac{-8}{\ln(x)} &\iff y^2 + y - 10 < \frac{-8}{y} \\ &\iff y^2 + y - 10 + \frac{8}{y} < 0 \\ &\iff \frac{y^3 + y^2 - 10y + 8}{y} < 0\end{aligned}$$

Pour étudier le signe du polynôme $P(y) = y^3 + y^2 - 10y + 8$, nous allons le factoriser à l'aide de la **méthode 4.6**. On observe que 1 est racine de P ce qui permet d'obtenir une première factorisation :

On procède par identification des coefficients.

$$P(y) = (y - 1)(y^2 + 2y - 8)$$

Puis à l'aide de la **méthode 4.4**, on obtient finalement :

$$P(y) = (y - 1)(y - 2)(y + 4)$$

Un tableau de signes permet alors de conclure :

y	$-\infty$		-4		0		1		2		$+\infty$
$y - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$y^2 + 2y - 8$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{P(y)}{y}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement $\ln^2(x) + \ln(x) - 10 < \dfrac{-8}{\ln(x)} \iff \ln(x) \in]-4, 0[\cup]1, 2[$, d'où $\mathcal{S} =]e^{-4}, 1[\cup]e, e^2[$. ▲

Exercice 6.6

1. Ce premier système est défini pour $x > 0$ et $y > 0$. Pour le résoudre, effectuons le changement d'inconnues $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$. Il vient

$$(1) \iff \begin{cases} 2\ln(x) + 5\ln(y) &= -1 \\ 3\ln(x) - 7\ln(y) &= 13 \end{cases} \iff \begin{cases} 2X + 5Y &= -1 \\ 3X - 7Y &= 13 \end{cases}$$
$$\iff X = 2 \text{ et } Y = -1 \iff x = e^2 \text{ et } y = e^{-1}$$

Finalement $\mathcal{S} = \{(e^2, e^{-1})\}$.

2. Le système est aussi défini pour $x > 0$ et $y > 0$. Remarquons tout d'abord que

$$(2) \iff \begin{cases} 2x + 3y &= 7 \\ \ln(x) + 2\ln(y) &= \ln(2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y &= 7 \\ \ln(x \times y^2) &= \ln(2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x + 3y &= 7 \\ x \times y^2 &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{4}{y^2} + 3y &= 7 \\ x &= 2/y^2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 2/y^2 \\ 3y^3 - 7y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation polynomiale $3y^3 - 7y^2 + 4 = 0$ dans $\mathbb{R}^{+\star}$, nous appliquons la **méthode 4.6**. En remarquant tout d'abord que 1 est racine évidente, puis en factorisant ce polynôme, nous obtenons finalement ses 3 racines réelles : 1, 2 et $-\frac{2}{3} < 0$. Comme nous résolvons dans $\mathbb{R}^{+\star}$, les couples (x, y) solution de (2) sont $\mathcal{S} = \{(2, 1), (\frac{1}{2}, 2)\}$.

3. Ce système est défini uniquement pour $x > 0$ et $y > 0$. Pour le résoudre, nous effectuons le changement d'inconnues, $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$. Il vient

$$(3) \iff \begin{cases} \ln(x^2y^3) &= -4 \\ \ln(x^3/y^4) &= 11 \end{cases} \iff \begin{cases} 2X + 3Y &= -4 \\ 3X - 4Y &= 11 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} X &= 1 \\ Y &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= e \\ y &= e^{-2} \end{cases}$$

Finalement, ce système admet un unique couple solution $\mathcal{S} = \{(e, e^{-2})\}$. ▲

Exercice 6.7

1. Pour que la fonction composée $f_1(x)$ soit défini et dérivable, il faut et il suffit que $x > 0$ et que $\ln_(x) > 0$, ce qui revient à dire que $x > 1$. f_1 est donc définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x > 1$, $f_1'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

2. f_2 est définie et dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et pour un tel réel x, on a $f_2'(x) = \dfrac{2}{1 - x^2}$.

3. f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour tout $x > 0$, on a $f_3'(x) = \dfrac{1}{2x}$.

4. f_4 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $f_4(x) = \ln(2x^2 + 1) - \ln(x^2 + 5)$. Par suite, elle est déivable sur $\mathbb{R}$ et $f_4'(x) = \dfrac{4x}{2x^2 + 1} - \dfrac{2x}{x^2 + 5}$.

5. Pour que $f_5(x)$ soit défini et dérivable il faut et il suffit que $x > 0$ et que $\ln(x) < 2$. Ainsi, elle est définie et dérivable sur $]0, e^2[$, et pour tout $x \in]0, e^2[$, on a $f_5'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{2 - \ln(x)}}$.

Corrigé

6. Finalement, f_6 est définie et dérivable sur $]0, e[\cup]e, +\infty[$, et pour un tel réel x, on a $f_6'(x) = \dfrac{3x - 2x\ln(x)}{(1-\ln(x))^2}$. ▲

Exercice 6.8

1. Posons $y(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-2} = \dfrac{1+x^{-2}}{1-2x^{-2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Comme $\lim\limits_{y\to 1} \ln(y) = 0$, il s'ensuit par **composition des limites** que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right) = 0$.

Voir la **méthode 9.2**.

2. Il s'agit d'une forme indéterminée «$\infty - \infty$». Pour la lever, nous mettons en œuvre la **méthode 9.5**. On a

$$x\ln^2(x) - 3\ln(x) = x\ln^2(x)\left(1 - \frac{3}{x\ln(x)}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

3. Il s'agit d'une forme indéterminée «$\frac{0}{0}$». Pour la lever, remarquons que

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)} = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{1}{2}$$

Comme $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$, il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)} = \dfrac{1}{2}$.

Vous connaissez les limites usuelles pour la fonction logarithme, **théorème 6.6** *et* **théorème 6.7**.

4. Il s'agit encore d'une forme indéterminée «$\infty - \infty$». Cette fois-ci, utilisons les **règles de calcul** pour la fonction logarithme. Écrivons $\ln(e^x+1) - 2x = \ln(e^x+1) - \ln(e^{2x}) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^{2x}}\right) = \ln(e^{-x} + e^{-2x})$. On a par somme $y(x) = e^{-x} + e^{-2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$ et $\ln(y) \xrightarrow[y\to 0^+]{} -\infty$. Par **composition des limites**, il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) - 2x = -\infty$.

5. Utilisons la **méthode 9.5**. Factorisons par le terme prédominant, il vient

$$\frac{x+1}{x^2} + \ln(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 + x + x^2\ln(x)\right)$$

Par **croissances comparées**, on a $x^2\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, par **opérations algébriques** sur les limties, il e découle que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+1}{x^2} + \ln(x) = +\infty$.

Elles sont rappelées dans le **théorème 6.7**.

6. Il s'agit d'une forme indéterminée «$\frac{\infty}{\infty}$». Nous factorisons numérateur et dénominateur par son terme prédominant, il vient

$$\frac{1-\ln(x)}{1+\sqrt{x}} = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \times \frac{-1 + 1/\ln(x)}{1 + 1/\sqrt{x}}.$$

En cas d'indétermination entre une puissance de x et une puissance de $\ln(x)$, c'est la puissance de x qui l'emporte.

Par **croissances comparées**, nous en déduisons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\ln(x)}{1+\sqrt{x}} = 0$. ▲

Exercice 6.9

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1. Comme pour $x \in [1, +\infty[$, on a $x + 1 \neq 0$ et $\frac{x}{x+1} > 0$. Ainsi la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est bien définie, mais en outre, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+\star}$, domaine de dérivabilité de la fonction ln. Par composition, $x \mapsto \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ est bien définie et dérivable. Finalement, f est bien définie et dérivable comme somme de telles fonctions.

2. Soit $x \in [1, +\infty[$, on a

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1) \\
f'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x + (x^2+2x+1) - (x^2+x)}{x(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{x(x+1)^2} > 0
\end{aligned}
$$

Comme f' est strictement positive, il s'ensuit que f est strictement croissante.

3. Étudions la limite de f en $+\infty$. Par opérations algébriques, on a directement $\frac{1}{x+1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. De plus, $y(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+x^{-1}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$. Comme $\lim\limits_{y \to 1} \ln(y) = 0$, il en résulte par composition, que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Nous pouvons compléter le tableau de variations de f :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\nearrow$	0

où $f(1) = \frac{1}{2} - \ln(2)$.

4. Finalement, comme f est croissante et tend vers 0 en $+\infty$, nous en déduisons que f est strictement négative sur $[1, +\infty[$. ▲

Exercice 6.10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $f(x) = x^2 - (x+1)\ln(x)$.

1. D'après les propriétés de la fonction ln (**proposition 6.5**) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour tout $x > 0$, on a

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2x - \ln(x) - \frac{x+1}{x} = 2x - \ln(x) - 1 - \frac{1}{x} \\
f''(x) &= 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2}
\end{aligned}
$$

2. On peut noter que le trinôme $2x^2 - x + 1$ n'a pas de racine réelle et reste strictement positif sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f'' est strictement positive, ce qui entraîne que f' est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Or $f'(1) = 0$, par conséquent, $f'(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$.

✎ *Avec les notations de la* **méthode 4.5**, *on a* $a > 0$ *et* $\Delta < 0$.

3. Le tableau suivant résume ces propriétés de f.

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4. Pour compléter le tableau de variations de f, étudions ses limites aux bornes de l'intervalle de définition.

• Au voisinage de 0, le **théorème 6.6** donne directement $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

• Au voisinage de $+\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée «$\infty - \infty$». Factorisons par le terme prédominant, il vient

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \left(1 - \frac{x+1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= x^2 \left(1 - (1 + \frac{1}{x}) \times \frac{\ln(x)}{x}\right) \end{aligned}$$

À l'aide du **théorème 6.6**, nous pouvons affirmer que $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par **croissances comparées** et conclure ainsi que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. ▲

Chapitre 7

Fonctions puissances

Nicole Oresme est un théologien et mathématicien français du XIVe siècle. Ses contemporains n'attachaient que peu d'intérêt pour les sciences. Ceci explique que ses découvertes soient passées inaperçues. Deux siècles avant Descartes et Galilée, il repère des points par deux coordonnées et énonce la loi du mouvement uniforme. Il introduit les puissances avec des exposants fractionnaires et énonce la règle $(xp)q = xpq$.

Nicole Oresme
1325-1382

OBJECTIFS

les incontournables

- Maîtriser parfaitement les règles de calcul avec les puissances :
  - pour calculer la puissance d'un produit, d'un quotient,
  - pour calculer la puissance d'une puissance, d'une racine carrée ou d'une exponentielle,
  - pour calculer le logarithme d'une puissance.

et plus si affinités

- Utiliser les propriétés des puissances
  - pour résoudre des équations mettant en jeu des puissances et des racines ;
  - pour étudier des limites de fonctions.

Le saviez-vous ?

Élever un nombre à la puissance $\frac{1}{2}$ est synonyme de prendre sa racine carrée. L'utilisation du mot racine nous vient des mathématiciens indiens du milieu du premier millénaire. Pour eux, de même que la racine d'un arbre est cachée, celle d'un nombre est à découvrir ; on parle même parfois d'extraire la racine d'un nombre. Cette expression a été empruntée par les mathématiciens arabes au IX^{e} siècle qui nous l'ont à leur tour, transmise au Moyen-Âge.

Résumé de cours

Définition et règles de calcul

Définition des puissances d'exposant un entier relatif et de la fonction racine carrée

Définition : Fonctions puissances d'exposant un entier relatif —. *Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$*

- *Si $n \in \mathbb{N}$, on définit la* **puissance $n^{\text{ième}}$** *de x par $p_n(x) = x^n = \prod_{k=1}^{n} x = \underbrace{x \times \cdots\cdots \times x}_{n \text{ fois}}$.*
- *Si $n \in \mathbb{Z}^-$, et $x \in \mathbb{R}^\star$, on définit la* **puissance $n^{\text{ième}}$** *de x par $p_n(x) = x^n = \dfrac{1}{x^{|n|}}$.*

Remarque : en particulier pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ et $n > 0$, $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Théorème-Définition 7.1.— La fonction racine carrée —. La fonction carrée p_2 est strictement croissante et continue de l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs dans lui-même. On appelle **racine carrée** de $x \in [0, +\infty[$, et on note $\sqrt{x}$, l'unique solution positive de l'équation (d'inconnue t) $t^2 = x$.

Remarque : en CPGE, la définition des fonctions puissances sera étendue aux exposants rationnels puis aux exposants réels quelconques. Dans ce cadre plus général, la racine carrée de x, sera tout simplement la puissance d'exposant $\frac{1}{2}$ de x : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Règles de calcul

Théorème 7.2.— Règles de calcul avec les puissances ❤ — . Soit $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^\star$.

- $x^0 = 1$
- $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
- $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$
- $x^n \times x^m = x^{n+m}$
- $x^n \times y^n = \big(x \times y\big)^n$
- $\big(x^n\big)^m = x^{n \times m}$

Corollaire 7.3.— Puissances et exponentielle et logarithme —. Soit $n \in \mathbb{Z}^\star$.

- Pour tout réel x, $\exp(nx) = \exp(x)^n$.
- Pour tout réel strictement positif x, $\ln\big(x^n\big) = n\ \ln(x)$.

Remarque : toutes ces règles s'appliquent aussi aux exposants fractionnaires. Ainsi, si x est positif, on a $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x^1 = x$, $x^2 \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$, ou encore $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$.

Proposition 7.4.— Parité des fonctions puissances —. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Si n est pair, la fonction puissance d'exposant n est paire.
- Si n est impair, la fonction puissance d'exposant n est impaire.

Remarque : pour les étudier, on pourra restreindre le domaine[3] des fonctions p_n à $\mathbb{R}^+$ et compléter par symétrie par rapport à l'axe (Oy) si n est pair, ou par rapport au centre O si n est impair.

3. $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^\star$ suivant que n est positif ou négatif.

Variations et graphes

Dérivées et sens de variation

Proposition 7.5.— Dérivées des fonctions puissances —. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
La fonction p_n est dérivable sur son domaine de définition [3] et pour tout x, $\quad (x^n)' = nx^{n-1}$.

Notation : *bien qu'usuelle, la notation $(x^n)'$ est abusive ! On lui préfèrera $p_n'(x)$!*

Corollaire 7.6.— Variations des puissances sur $\mathbb{R}^+$ —. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Si $n > 0$, $p_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est strictement croissante.
- Si $n < 0$, $p_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est strictement décroissante.

Proposition 7.7.— Dérivée de la fonction racine carrée —.
La fonction $\sqrt{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour tout $x > 0$, $\quad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Corollaire 7.8.— En conséquence, $\sqrt{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est strictement croissante :

$$\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ x < y \iff \sqrt{x} < \sqrt{y}$$

Limites

Proposition 7.9.— Limites des fonctions puissances —.

- Si $n > 0$, alors $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
- Si $n < 0$, alors $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = 0^+$.

Pour lever les formes indéterminées, nous disposons des limites de référence suivantes :

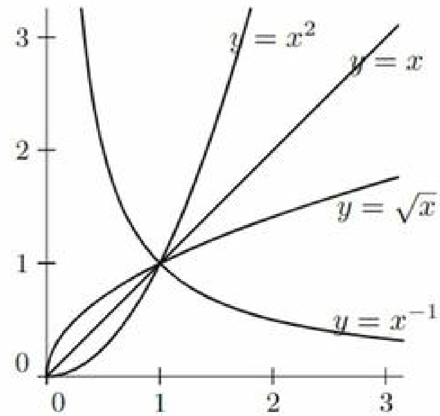
Théorème 7.10.— Croissances comparées —. Soit $n > 0$.

$$\boxed{\blacksquare \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \qquad \blacksquare \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \qquad \blacksquare \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \blacksquare \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0}$$

Tableaux de variations et graphes sur $\mathbb{R}^+$

$n > 0$	x	0	$+\infty$
	$p_n(x)$	0^+ $\nearrow$	$+\infty$

$n < 0$	x	0	$+\infty$
	$p_n(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0^+



Méthodes

Transformations d'écritures

Calculer avec les puissances

Méthode 7.1.— Comment simplifier un produit ou un quotient de puissances
Soit a, b des réels non nuls, n et m des entiers relatifs. Alors

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = (\dfrac{a}{b})^n$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$

Mise en œuvre : exercice 7.1.

Méthode 7.2.— Comment factoriser une somme de puissances successives
Lorsque $q \neq 1$ et $n > 1$, on peut utiliser l'**identité géométrique** pour factoriser la somme des n premières puissances successives de q : $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

Calculer avec des radicaux

Méthode 7.3.— Comment simplifier un produit ou un quotient de racines
Soit a, b des réels strictement positifs. Alors

- Pour tout $a \geq 0$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
- Pour tout $a, b \geq 0$, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$
- Pour tout $a \geq 0, b > 0$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Méthode 7.4.— Comment simplifier une racine carrée
Soit $a \geq 0$. Par définition, $\sqrt{a} = x$ signifie que $x^2 = a$ et $x \geq 0$. Ainsi, pour vérifier que $\sqrt{a} = b$, il suffit de

$\boxed{1}$ Vérifier que $b^2 = a$.

$\boxed{2}$ Vérifier que $b \geq 0$.

Exemple : simplifions $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$. On peut remarquer que $4+2\sqrt{3} = 1+2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2 = (1+\sqrt{3})^2$. Comme $b = 1+\sqrt{3} > 0$, on a $b^2 = 4+2\sqrt{3}$ et $b \geq 0$. Par conséquent, $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$.

Mise en œuvre : exercice 7.2.

❑ Méthode 7.5.— Comment transformer une somme ou une différence de racines
Soit A, B des quantités positives. On peut transformer la somme ou la différence de leurs racines carrées en multipliant et divisant par l'**expression conjuguée**.

- Si $A \neq B$ alors $\sqrt{A}+\sqrt{B} = \dfrac{(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \dfrac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$.
- Si $(A,B) \neq (0,0)$ alors $\sqrt{A}-\sqrt{B} = \dfrac{(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$.

■ Étudier des fonctions avec des racines carrées

❑ Méthode 7.6.— Comment résoudre une équation irrationnelle
Pour résoudre un équation irrationnelle, c'est-à-dire mettant en jeu des racines carrées, on se ramène à une équation polynomiale au moyen du schéma suivant

$$\boxed{\sqrt{A} = B \iff \begin{cases} A = B^2 & \text{équation résolvante} \\ B \geq 0 & \text{compatibilité des signes} \end{cases}}$$

Ainsi, pour résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$ où f et g sont des fonctions irrationnelles,

$\boxed{1}$ Bien préciser le domaine de définition de ces fonctions.
$\boxed{2}$ Isoler autant que faire se peut les racines carrées.
$\boxed{3}$ Égaliser les carrés en prenant les précautions nécessaires quant aux signes.

Exemple : résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation irrationnelle $3+\sqrt{2x+7} = 17-x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 3+\sqrt{2x+7} = 17-x &\iff \begin{cases} 2x+7 \geq 0 \\ \sqrt{2x+7} = 14-x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+7 \geq 0,\ 14-x \geq 0 \\ 2x+7 = (14-x)^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\frac{7}{2} \leq x \leq 14 \\ x^2-30x+189 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{7}{2} \leq x \leq 14 \\ x = 9 \text{ ou } x = 21 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, comme 21 ne vérifie pas la condition de compatibilité, $\mathcal{S} = \{9\}$.

Mise en œuvre : exercice 7.4.

Calculer des dérivées

❑ Méthode 7.7.— Comment dériver la fonction composée $x \mapsto \sqrt{u(x)}$
Si $u : I \to \mathbb{R}^{+\star}$ est dérivable, alors $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est aussi dérivable dans I et

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in I, \quad \left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$$

Mise en œuvre : exercice 7.5.

Énoncé des exercices

Transformations d'écriture

Calculer avec les puissances

Exercice 7.1 : Simplifier les expressions suivantes

1. $A = \dfrac{27^3 \times 25^4 \times 6^2}{10^3 \times 125^2 \times 30^2}$;

2. $B = \dfrac{40^3 \times 30^2 \times 15^4}{2^4 \times 9^2 \times 5^3}$;

3. $C = \dfrac{(-15)^3 \times (-14)^4}{21^5 \times 70^3}$;

4. $D = \dfrac{(-\frac{2}{5})^3 \times (-\frac{4}{7})^2}{(\frac{8}{10})^3 \times (\frac{14}{8})^3}$;

Calculer avec les racines carrées

Exercice 7.2 : Simplifier

1. $A = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

2. $B = \dfrac{\sqrt{8}+2\sqrt{10}}{2\sqrt{5}+2}$;

3. $C = \dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{15}}{\sqrt{21}-\sqrt{15}} - \dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{\sqrt{14}+\sqrt{10}}$;

4. $D = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$.

Exercice 7.3 :

1. Pour tout réel x, supérieur à 1, simplifier l'expression de $f_1(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

2. Pour tout réel x, simplifier l'expression de $f_2(x) = \sqrt{1+2x^2+2x\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+2x^2-2x\sqrt{1+x^2}}$.

Équations rationnelles et irrationnelles

Exercice 7.4 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sqrt{x+5} = 2x+9$;

2. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+17} = \sqrt{24-x}$.

Études de fonctions

Calcul de dérivées

Exercice 7.5 : Déterminer les domaines de dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x\sqrt{x^2+1}$;

2. $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

3. $f_3(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

4. $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{2+\sin(x)}$.

Exercice 7.6 : Soit $f(x) = \left(\dfrac{2}{5}x^2 - \dfrac{2}{5}x - \dfrac{12}{5}\right)\sqrt{3-x}$ pour $x<3$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Calcul de limites

Exercice 7.7 : Étudier les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x^2+x+1}}{x-1}$;

2. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2-x^3}-\sqrt{x^2+x^3}}{x\sqrt{x}}$;

3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1}$;

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$;

5. $\lim_{x\to -\infty} x+\sqrt{x^2+1}$;

6. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^3+2x^2+7x+1}-\sqrt{2x^2+2x-3}}{x^2}$.

Études complètes

Exercice 7.8 : Avec une fonction auxiliaire —.

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

- **a.** Étudier les variations de g.
- **b.** Dresser son tableau de variations.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = -\dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$.

- **a.** Dresser le tableau de variations de f
- **b.** Montrer que $\lim_{x\to -\infty} f(x) + x - 1 = 0$.
- **c.** Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à ses asymptotes.

Exercice 7.9 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2\sqrt{x}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et calculer f'.

2. Étudier la limite $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Dresser le tableau de variations de f.

4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

5. Représenter la courbe de f.

Indications

Ex. 7.1

On pourra d'abord décomposer les nombres en produits de facteurs premiers.

Ex. 7.2

1. *On pourra commencer par calculer* $(2 \pm \sqrt{3})^2$.

2. *On simplifie d'abord* B *en factorisant le numérateur par* $2\sqrt{2}$ *et le dénominateur par* 2.

3. *On peut simplifier les numérateurs et dénominateurs du premier terme par* $\sqrt{3}$ *et du deuxième terme par* $\sqrt{2}$.

Ex. 7.4

Toutes ces équations mettent en jeu, puissances et racines de x, *vous appliquerez la* **méthode 7.6**.

Ex. 7.5

Vous appliquerez la **méthode 7.7**.

Ex. 7.7

Vous mettrez en œuvre la **méthode 7.5**.

Corrigé des exercices

Exercice 7.1

Suivant l'indication fournie, nous décomposons chaque nombre en produit de facteurs premiers. On applique alors les règles de calcul avec les puissances. proposition 1.5

$$\begin{aligned}
A &= \frac{27^3 \times 25^4 \times 6^2}{10^3 \times 125^2 \times 30^2} = \frac{(3^3)^3 \times (5^2)^4 \times (2 \times 3)^2}{(2 \times 5)^3 \times (5^3)^2 \times (2 \times 3 \times 5)^2} = \frac{2^2 \times 3^{11} \times 5^8}{2^5 \times 3^2 \times 5^{11}} \\
&= \frac{3^9}{2^3 \times 5^3} = \frac{19683}{1000} \\
B &= \frac{40^3 \times 30^2 \times 15^4}{2^4 \times 9^2 \times 5^3} = 2^7 \times 3^2 \times 5^6 = 18 \times 10^6 \\
C &= \frac{(-15)^3 \times (-14)^4}{21^5 \times 70^3} = -\frac{2^4 \times 3^3 \times 5^3 \times 7^4}{2^3 \times 3^5 \times 5^3 \times 7^8} = -\frac{2}{3^2 \times 7^4} \\
D &= \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{4}{7}\right)^2}{\left(\frac{8}{10}\right)^3 \times \left(\frac{14}{8}\right)^3} = -\frac{2^7}{7^5}
\end{aligned}$$

▲

Exercice 7.2

1. On observe que $(2 \pm \sqrt{3})^2 = 7 \pm 4\sqrt{3}$. Ainsi

$$A = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4.$$

2. Suivant l'indication, il vient

$$B = \frac{\sqrt{8} + 2\sqrt{10}}{2\sqrt{5} + 2} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{10}}{2\sqrt{5} + 2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{1 + \sqrt{5}} = \sqrt{2}.$$

3. On observe que les numérateurs et dénominateurs du premier terme se simplifient par $\sqrt{3}$ et ceux du deuxième terme par $\sqrt{2}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
C &= \frac{\sqrt{21} + \sqrt{15}}{\sqrt{21} - \sqrt{15}} - \frac{\sqrt{14} - \sqrt{10}}{\sqrt{14} + \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} \\
&= \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{5})^2}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{4\sqrt{35}}{2} = 2\sqrt{35}.
\end{aligned}$$

4. Sous la racine carrée, commençons par réduire au même dénominateur les deux fractions, il vient :

$$\begin{aligned}
D &= \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})^2 + (3-\sqrt{5})^2}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}} \\
&= \sqrt{\frac{(9+6\sqrt{5}+5) + (9-6\sqrt{5}+5)}{9-5}} = \sqrt{\frac{28}{4}} = \sqrt{7}.
\end{aligned}$$

▲

Corrigé

Exercice 7.3

On met en œuvre la **méthode 7.3**.

*On utilise ici la propriété $\sqrt{a^2} = |a|$ (**méthode 7.3**).*

1. On remarque que $x \pm 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} \pm 1)^2$. Par conséquent,

$$f_1(x) = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = \left|\sqrt{x-1}+1\right| + \left|\sqrt{x-1}-1\right|$$

On peut noter que pour tout réel $x \geq 1$, on a $\left|\sqrt{x-1}+1\right| = \sqrt{x-1}+1$. Pour pouvoir simplifier l'autre valeur absolue, nous allons distinguer deux cas :

- Si $1 \leq x \leq 2$, alors $x - 1 \leq 1$ et par conséquent $\sqrt{x-1} - 1 \leq 0$, d'où $\left|\sqrt{x-1}-1\right| = 1 - \sqrt{x-1}$ et donc $f_1(x) = 2$.
- Si $x \geq 2$, alors $x - 1 \geq 1$ et par conséquent $\sqrt{x-1} - 1 \geq 0$, d'où $\left|\sqrt{x-1}-1\right| = \sqrt{x-1} - 1$ et dans ce cas $f_1(x) = 2\sqrt{x-1}$.

2. Ici, on observe que $1 + 2x^2 \pm 2x\sqrt{1+x^2} = (\sqrt{1+x^2} \pm x)^2$. D'où l'on tire, comme précédemment que $f_2(x) = \left|\sqrt{1+x^2}+x\right| + \left|\sqrt{1+x^2}-x\right|$. Pour conclure, nous devons étudier le signe de $\sqrt{1+x^2} \pm x$.

Nous savons que $1+x^2 \geq x^2$. Par croissance de la fonction racine carrée, nous en déduisons que $\sqrt{1+x^2} \geq |x|$. Ainsi, $\sqrt{1+x^2} \pm x \geq 0$ et nous pouvons conclure que $f_2(x) = (\sqrt{1+x^2}+x) + (\sqrt{1+x^2}-x) = 2\sqrt{1+x^2}$. ▲

Exercice 7.4

Nous mettons en œuvre la **méthode 7.6**. La stratégie générale est d'élever au carré les deux membres de l'équation afin de se ramener à une équation polynomiale. Cependant, il faut être rigoureux pour ne pas risquer de rajouter ou d'oublier des solutions !

1. Cette équation est définie uniquement si $x + 5 \geq 0$. Dans ce cas, si x est une solution, alors $2x+9$ est égal à une racine carrée. Il doit donc être positif. Ainsi :

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\iff \quad \sqrt{x+5} = 2x+9 \iff \begin{cases} x+5 \geq 0; 2x+9 \geq 0 \\ \sqrt{x+5} = 2x+9 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq -5; x \geq -\frac{9}{2} \\ x+5 = (2x+9)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -\frac{9}{2} \\ 4x^2+35x+76 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Déterminons les racines de l'équation polynomiale $4x^2+35x+76 = 0$ à l'aide de la **méthode 4.4**. Son discriminant, $\Delta = 9$ étant strictement positif, elle admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{-35-3}{8} = -\frac{19}{4}$ et $x_2 = \frac{-35+3}{8} = -4$. Seule x_2 vérifie la condition de compatibilité $x_2 \geq -\frac{9}{2}$, c'est donc l'unique solution de l'équation (1) : $\mathcal{S} = \{-4\}$.

2. Pour cette équation irrationnelle, nous allons devoir élever deux fois au carré ! Suivant le même schéma que précédemment, il vient tout d'abord

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\iff \quad \sqrt{x+2} + \sqrt{x+17} = \sqrt{24-x} \\
&\iff \begin{cases} x+2 \geq 0,\ x+17 \geq 0\, 24-x \geq 0 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{x+17} = \sqrt{24-x} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq -2,\ x \leq 24 \\ (x+2) + 2\sqrt{x+2}\sqrt{x+17} + (x+17) = 24-x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2 \leq x \leq 24 \\ 2\sqrt{x+2}\sqrt{x+17} = 5-3x \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour nous ramener à une équation polynomiale, une deuxème élévation au carré est nécessaire. Il en résulte

Avec les mêmes précautions quant au signe !

$$(2) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -2 \leq x \leq 24, \ 3x \leq 5 \\ 2(x+2)(x+17) = (5-3x)^2 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -2 \leq x \leq \frac{5}{3} \\ 5x^2 - 106x - 11 = 0 \end{cases}$$

L'équation du second degré $5x^2 - 106x - 11 = 0$ a un discriminant positif ($\Delta = 116^2$). Elle admet donc deux racines réelles distinctes $x_1 = \frac{106-116}{10} = -1$ et $x_2 = \frac{106+116}{10} = \frac{222}{10}$. De ces deux solutions, seules $x_1 = -1$ satisfait les conditions de compatibilités $-2 \leq x_1 \leq \frac{5}{3}$, par conséquent, c'est la seule solution réelle de (2) : $\mathcal{S} = \{-1\}$. ▲

Exercice 7.5

Dans cet exercice, on met en œuvre la **méthode 7.7**. De manière plus générale, pour déterminer les domaines de dérivabilité d'une fonction composée, vous utiliserez **méthode 10.4**.

1. La fonction polynomiale $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives. La fonction composée $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Finalement, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de telles fonctions. De plus pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $f_1'(x) = 1\ \sqrt{x^2+1} + x\ \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

2. Pour que f_2 soit dérivable, il faut que la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ soit définie et à valeurs strictement positives. Le signe de la fraction rationnelle est le même que celui du poynôme $(1+x)(1-x) = 1-x^2$. Ainsi, f_2 est dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$f_2'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x)}$$

3. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x$. Ainsi, $x + \sqrt{x^2+1}$ est dérivable comme somme de telles fonctions et à valeurs strictement positives. Par conséquent f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

On utilise la **méthode 6.6.**

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\ \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

4. Le dénominateur est une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur $]2,+\infty[$, puisque la fonction sin prend ses valeurs entre -1 et 1. Finalement $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{2+\sin(x)}$ est bien dérivable sur $]2,+\infty[$ comme quotient et pour tout $x > 2$, on a

$$f_4'(x) = \frac{\frac{2+\sin(x)}{2\sqrt{x-2}} - \cos(x)\sqrt{x-2}}{(2+\sin(x))^2} = \frac{2+\sin(x)+4\cos(x)-2x\cos(x)}{2\sqrt{x-2}\ (2+\sin(x))^2}$$

▲

Corrigé

Exercice 7.6

f est deux fois dérivable dans $]-\infty, 3[$ et

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{5}(x^2-x-6)\,\sqrt{3-x}\\
f'(x) &= \frac{1}{5}\left(2(2x-1)\,\sqrt{3-x}-(x^2-x-6)\frac{1}{\sqrt{3-x}}\right)\\
&= \frac{1}{5}\frac{(4x-2)(3-x)-(x^2-x-6)}{\sqrt{3-x}} = \frac{1}{5}\frac{-5x^2+15x}{\sqrt{3-x}} = \frac{x(3-x)}{\sqrt{3-x}}\\
&= x\sqrt{3-x}\\
f''(x) &= 1\,\sqrt{3-x}+x\,\frac{1}{2\sqrt{3-x}} = \frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{3-x}{\sqrt{3-x}}\\
&= \sqrt{3-x}
\end{aligned}$$

▲

Exercice 7.7

Pour étudier ces limites, nous suivons la **méthode 7.5**.

1. Lorsque x tend vers 1, on a affaire ici à une forme indéterminée «$\frac{0}{0}$». Pour la lever, nous allons multiplier et diviser par l'expression conjuguée du numérateur. Il vient :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x^2+x+1}}{x-1} = \frac{(x+3)-(2x^2+x+1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x^2+x+1})}\\
&= \frac{-2x^2+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x^2+x+1})} = \frac{-2(x^2-1))}{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x^2+x+1})}\\
&= \frac{-2(x+1))}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x^2+x+1}} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{-4}{2+2} = -1
\end{aligned}$$

2. Avant tout, lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, nous pouvons simplifier numérateur et dénominateur par $x=\sqrt{x^2}$. ensuite, multiplions et divisons par l'expression conjuguée, il vient

$$\begin{aligned}
f_2(x) = \frac{\sqrt{x^2-x^3}-\sqrt{x^2+x^3}}{x\sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} = \frac{(1-x)-(1+x)}{\sqrt{x}\,(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\
&= \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0
\end{aligned}$$

3. Pour simplifier l'expression de cette fraction, nous pouvons utiliser l'**identité géométrique** On a

✎ *Voir* **méthode 7.2.**

$$f_3(x) = \frac{x^4-1}{x-1} = x^3+x^2+x+1$$

Par opérations algébriques, il en résulte alors aisément que $\lim\limits_{x\to 1} f_3(x) = 4$.

4. On a $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \dfrac{(1-x)-1}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$.

5. Lorsque x tend vers $-\infty$, nous avons ici affaire à une forme indéterminée, «$-\infty+\infty$». Pour la lever, multiplions et divisons encore une fois par l'expression conjuguée. Il vient

$$f_5(x) = x + \sqrt{x^2+1} = \frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

Comme le dénominateur tend vers $-\infty$, il n'y a plus de forme indéterminée et l'on peut conclure $\lim\limits_{x\to-\infty} x + \sqrt{x^2+1} = 0^+$.

6. Commençons par multiplier et diviser par l'expression conjuguée, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
f_6(x) &= \frac{\sqrt{2x^3+2x^2+7x+1}-\sqrt{2x^2+2x-3}}{x^2}\\
&= \frac{(2x^3+2x^2+7x+1)-(2x^2+2x-3)}{x^2\left(\sqrt{2x^3+2x^2+7x+1}+\sqrt{2x^2+2x-3}\right)}\\
&= \frac{2x^3+5x+4}{x^2\left(\sqrt{2x^3+2x^2+7x+1}+\sqrt{2x^2+2x-3}\right)}\\
&= \frac{2+5x^{-2}+4x^{-3}}{\sqrt{2x+2+7x^{-1}+x^{-2}}+\sqrt{2+2x^{-1}-3x^{-2}}}
\end{aligned}$$

Comme le numérateur tend vers 2 et que le dénominateur tend vers $+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x) = 0$. ▲

Exercice 7.8

1. **a.** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{x^2+1} - x\,\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Pour alléger l'écriture, on utilise les exposants fractionnaires $a^{\frac{3}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}} = = a^1 a^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{a}$.

b. On en déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus,

- Pour $x < 0$, $g(x) = -\frac{1}{2} - \dfrac{|x|}{2\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^{-2}}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$.
- Pour $x > 0$, $g(x) = -\frac{1}{2} + \dfrac{|x|}{2\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^{-2}}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

On simplifie numérateur et dénominateur par $\sqrt{x^2} = |x|$.

Le tableau suivant résume l'étude de g.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	-1 ↗	0

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = -\dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$

a. On vérifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$. En particulier, f est strictement décroissante. De plus,

- Pour $x < 0$, $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1} - x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.
- Pour $x > 0$, $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1} - x) = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Le tableau suivant résume l'étude de f.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 1

Voir question **5.** *de l'***exercice 7.7**.

b. Au voisinage de $-\infty$, on a $f(x)+x-1 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{x^2+1}+x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^+$.

c. Le graphe de f admet deux asymptoptes.

• Au voisinage de $-\infty$, la droite $y = x+1$ est asymptote et la courbe de f est au-dessus puisque $f(x)+x-1$ tend vers 0 par valeurs strictement positives.

• Au voisinage de $+\infty$, la droite $y = 1$ est asymptote et la courbe de f est au-dessus d'après le tebleau de variations de f. ▲

Exercice 7.9

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme de fonctions dérivables (**proposition 7.5**) et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

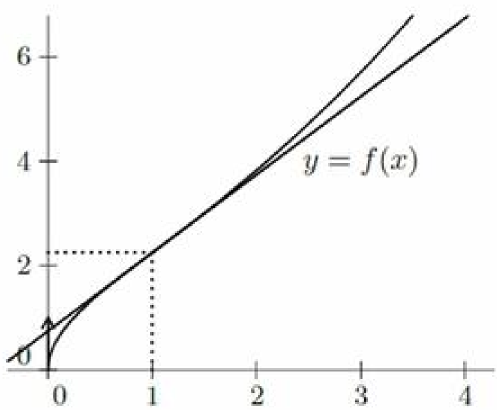
2. f est continue en 0 et $f(0) = 0$. Étudions la limite des taux de variations de f en 0. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \frac{x}{4} + \frac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty$. Ainsi, f n'est pas dérivable en 0, mais sa courbe représentative présente une tangente verticale au point d'abscisse 0.

3. Comme f' est strictement positive dans $\mathbb{R}^{+\star}$, et que les limites de f en 0 et en $+\infty$ ne présentent pas de difficultés particulières, nous obtenons directement

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

4. L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = \frac{9}{4} + \frac{3}{2}(x-1) \iff y = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}x$.

5.



▲

Chapitre 8

Fonctions trigonométriques

Aryabhata vivait en Inde au début du Ve siècle de notre ère. Pour satisfaire sa passion pour l'astronomie, il s'intéresse à la trigonométrie. Il est le premier mathématicien à avoir construit une table donnant la valeur du sinus et du cosinus d'un angle. Il donne aussi pour π la valeur de 62832/20000 soit 3,1416.

Aryabhata
env. 476 – env. 550

OBJECTIFS

les incontournables

- Étudier les propriétés de symétrie d'une fonction
  - étudier sa parité
  - étudier sa périodicité
- Étudier une fonction composée avec un cosinus ou un sinus
  - savoir la dériver
  - calculer ses limites

et plus si affinités

- Utiliser congruences et cercle trigonométrique,
  - pour résoudre une équation trigonométrique
  - ou pour résoudre une inéquation trigonométrique

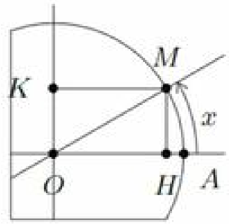
■■ Résumé de cours

■ Définitions et règles de calcul

Les fonctions sinus et cosinus

Définition : *Soit x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique. Le point M est déterminé par ses coordonnées dans le repère cartésien $\mathcal{R}$. On note*

- $\cos(x) = \overline{OH}$ *son abscisse ;*
- $\sin(x) = \overline{OK}$ *son ordonnée.*



Propriétés de symétries

Théorème 8.1.— Propriétés des fonctions sinus, cosinus —.

- La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire, périodique de période 2π.
- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire, périodique de période 2π.

Règles de calcul pour les fonctions trigonométriques ❤

Elles ont été énoncées dans le **Chapitre 2**, ainsi que d'autres propriétés de symétrie (cf. p. 24).

■ Variations et graphes

Continuité et dérivabilité

Théorème 8.2.— Propriétés des fonctions sinus, cosinus —.

- La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$
- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Tableau de variations de la fonction sinus

La fonction sin est 2π-périodique et impaire. On restreint l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$. On peut ensuite compléter le graphe par symétrie de centre O et translations.

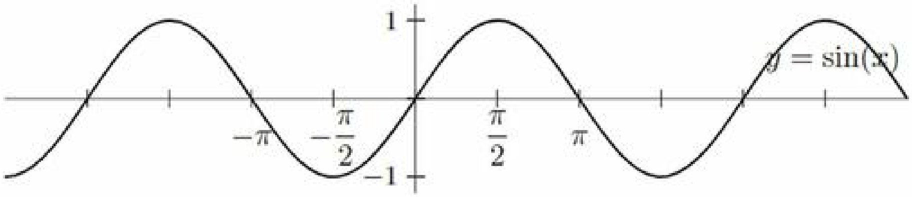
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

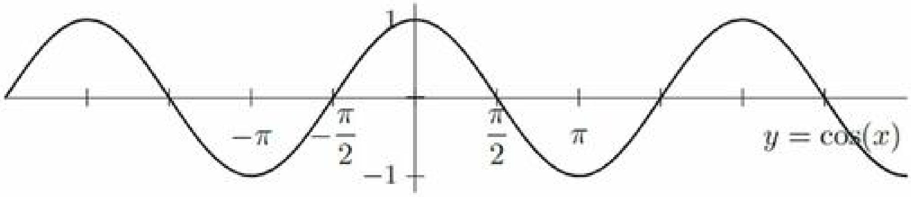
Tableau de variations de la fonction cosinus

La fonction sin est 2π-périodique et paire. On restreint l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.
On peut ensuite compléter le graphe par symétrie d'axe (Oy) et translations.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos'(x)$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos(x)$	1		$\searrow$		-1

Graphes des fonctions sinus et cosinus





■ Équations trigonométriques

Grâce aux symétries de ces fonctions, les équations trigonométriques ont beaucoup de solutions.

Résolution de $\cos(x) = \cos(a)$

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On s'intéresse à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = \cos(a)$.
Sur le graphe de la fonction cos on observe que cette équation possède ~~une~~ deux infinités de solutions. En effet, comme cos est 2π-périodique et paire, on a pour tout entier relatif $k \in \mathbb{Z}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(a+2k\pi) & = & \cos(a) \\ \cos(-a+2k\pi) & = & \cos(a) \end{array}\right.$$

Notation : congruences dans $\mathbb{R}$ —. *Soit m, x, y des réels, on note $y \equiv x\ [m]$ et on lit « y est congru à x modulo m » lorsque x et y diffèrent d'un multiple entier de m, ainsi*

$$y \equiv x\ [m] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad y - x = k \times m$$

Avec ces notations, retenez que

> **Proposition 8.3.—** Soit $(a, x) \in \mathbb{R}^2$, alors $\quad \cos(x) = \cos(a) \iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv a[2\pi] \\ x \equiv -a[2\pi] \end{array}\right.$.

Résolution de $\sin(x) = \sin(a)$

Grâce aux symétries de sin, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\left\{\begin{array}{lcl} \sin(a+2k\pi) & = & \sin(a) \\ \sin(\pi - a + 2k\pi) & = & \sin(a) \end{array}\right.$. Ainsi

> **Proposition 8.4.—** Soit $(a, x) \in \mathbb{R}^2$, alors $\quad \sin(x) = \sin(a) \iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv a[2\pi] \\ x \equiv \pi - a[2\pi] \end{array}\right.$.

Remarque : à l'aide des deux propositions, on obtient que $\left\{\begin{array}{l} \cos(x) = \cos(a) \\ \sin(x) = \sin(a) \end{array}\right. \iff x \equiv a\ [2\pi]$.

Résolution de $a\cos(x) + b\sin(x) = c$

Plus généralement, la **méthode 8.6** permet de résoudre toute équation trigonométrique de la forme

$$a\cos(x) + b\sin(x) = c$$

Méthodes

Étudier une fonction trigonométrique

Calculer des limites

Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. En particulier, la limite en tout point $a \in \mathbb{R}$ est la valeur de la fonction en a.
Dans la pratique,

- les règles de calcul avec les fonctions trigonométriques ;
- éventuellement un changement de variable ou des opérations algébriques sur les limites

permettent de se ramener à l'une des quatre limites de référence suivantes :

> **Méthode 8.1.— Limites des fonctions trigonométriques**
>
> - $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$
> - $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$
> - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
> - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$

Exemple : étudions la limite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \dfrac{\sqrt{\cos(x)}-1}{\sin(x)}$. Il s'agit d'une forme indéterminée. Pour la lever, nous pouvons multiplier et diviser par $\sqrt{\cos(x)}+1$. Il vient

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos(x)}-1}{\sin(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cos(x)}+1} \times \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cos(x)}+1} \times \frac{\cos(x)-1}{x} \times \frac{x}{\sin(x)}$$

Sous cette forme, l'indétermination est levée : le premier quotient a pour limite $\frac{1}{2}$, le deuxième 0 et le troisième 1. Par produit, il s'ensuit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} f(x) = 0$.

Étudier la périodicité, la parité

Les symétries sont essentielles pour l'étude des fonctions : si elles ne résolvent pas les problèmes posés, elles permettent néanmoins de restreindre l'intervalle d'étude.

> **Méthode 8.2.— Comment montrer que f est périodique**
> Si f est une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$, T un réel strictement positif.
>
> - Si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $x+T \in \mathcal{D}$ et $f(x+T) = f(x)$, alors f est T-périodique.
>
> Dans ce cas, on pourra restreindre l'étude de f à un intervalle de longueur T et compléter ensuite le graphe par translations successives.

Exemple : considérons la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$. Comme $-1 \leq \cos \leq 1$, f est définie sur $\mathbb{R}$ et de plus $f(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} = f(x)$. Ceci étant vrai pour tout réel x, on peut en conclure que f est 2π-périodique. Par conséquent, on pourrait restreindre l'étude de cette fonction à tout intervalle de longueur 2π, comme par exemple $[-\pi, \pi]$.

Méthodes

❑ Méthode 8.3.— Comment montrer que f est paire, impaire

Si f est une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ symétrique par rapport à 0, on exprime $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.

- Si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$, alors f est paire.
- Si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$, alors f est impaire.

Dans les deux cas, on pourra restreindre l'étude de f à $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}^+$ et compléter ensuite par symétrie par rapport à l'axe (Oy), ou par rapport au centre O.

Exemple : reprenons l'exemple précédent. On a $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = -\dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)} = -f(x)$. Ceci étant vrai pour tout réel $x \in [-\pi, \pi]$, on peut en conclure que f est impaire. Par conséquent, on pourra restreindre l'étude de f à $[0, \pi]$ puis compléter d'abord par symétrie par rapport à O et ensuite par translations successives de vecteur $2\pi\vec{e}_1$ pour avoir l'allure du graphe.

■ Résoudre une équation trigonométrique

En utilisant le cercle trigonométrique et les congruences

Soit $a \in \mathbb{R}$. On cherche les réels x tels que

$$\cos(x) = \cos(a) \tag{8.1}$$
$$\sin(x) = \sin(a) \tag{8.2}$$

Graphiquement, les images $M(x)$ des solutions de (8.1) (respectivement (8.2)) sont les points du cercle unité d'abscisse ou d'ordonnée donnée. Pour chacune de ces équations, il existe donc deux points du cercle unité correspondant à deux "infinités" de solutions réelles.

❑ Méthode 8.4.— Comment résoudre une équation trigonométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation trigonométrique (8.1) ou (8.2) :

$\boxed{1}$ On représente les images de ces solutions sur le cercle trigonométrique.

$\boxed{2}$ On conclut à l'aide de congruences :

- $\cos(x) = \cos(a) \iff x \equiv a[2\pi]$ ou $x \equiv -a[2\pi]$;
- $\sin(x) = \sin(a) \iff x \equiv a[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - a[2\pi]$.

Exemple : résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x+\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$. On a

$$\cos(2x+\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} \iff \cos(2x+\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+\frac{\pi}{6} & \equiv & \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \\ \text{ou } 2x+\frac{\pi}{6} & \equiv & -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x & \equiv & \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{ou } 2x & \equiv & -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & \equiv & \frac{\pi}{4}\ [\pi] \\ \text{ou } x & \equiv & -\frac{5\pi}{12}\ [\pi] \end{array}\right.$$

Mise en œuvre : exercice 8.7.

> **❑ Méthode 8.5.— Comment résoudre une inéquation trigonométrique**
> Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation trigonométrique $\cos(x) \geq \cos(a)$ ou $\sin(x) \geq \sin(a)$, sur un intervalle donné I, on peut adapter la méthode précédente :
>
> $\boxed{1}$ Sur un petit schéma, on représente les images de ces solutions : il s'agit d'arcs du cercle trigonométrique.
>
> $\boxed{2}$ Dans l'intervalle I considéré, l'ensemble des solutions est une réunion d'intervalle.

Exemple : résolvons dans $I = [0, 2\pi]$ l'inéquation $2\sin(x) - \sqrt{3} < 0$.

$$2\sin(x) - \sqrt{3} < 0 \iff \sin(x) < \sin(\frac{\pi}{3})$$

$\boxed{1}$ Les images des solutions sur le cercle trigonométrique forment un arc de cercle.

$\boxed{2}$ Finalement, l'ensemble des solutions dans I est $\mathcal{S} = [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, 2\pi]$.

Mise en œuvre : exercice 8.8.

En utilisant une factorisation

> **❑ Méthode 8.6.— Comment résoudre l'équation $a\cos(x) + b\sin(x) = c$**
> Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$. Pour résoudre l'équation $a\cos(x) + b\sin(x) = c$
>
> $\boxed{1}$ On factorise par $r = \sqrt{a^2+b^2}$:
>
> $$a\cos(x) + b\sin(x) = c \iff r \times \left[\frac{a}{r}\ \cos(x) + \frac{b}{r}\ \sin(x)\right] = c \qquad (8.3)$$
>
> $\boxed{2}$ Comme $(\frac{a}{r})^2 + (\frac{b}{r})^2 = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$. Par conséquent, (8.3) $a\cos(x) + b\sin(x) = c \iff r\cos(x-\varphi) = c \iff \cos(x-\varphi) = \frac{c}{r}$.
>
> $\boxed{3}$ On s'est ainsi ramené à une équation trigonométrique simple.

Exemple : résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique $\cos(x) + \sin(x) = 1$.

$\boxed{1}$ Ici $r = \sqrt{2}$. On divise par $\sqrt{2}$.

$\boxed{2}$ On obtient

$$\begin{array}{rcl} \cos(x) + \sin(x) = 1 & \iff & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & \iff & \cos(\frac{\pi}{4})\cos(x) + \sin(\frac{\pi}{4})\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{4}) \\ & \iff & \cos(x-\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) \iff x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv 0\ [2\pi] \end{array}$$

Mise en œuvre : exercice 8.9.

Méthodes

Énoncé des exercices

Étude de fonctions trigonométriques

Étude des symétries

Exercice 8.1 : Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 3\sin^2(x) - 4\cos^3(x)$, $(x \in \mathbb{R})$;

2. $f_2(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right)$, $(x \in]-1, 1[)$;

3. $f_3(x) = x\sin(x)$, $(x \in \mathbb{R})$;

4. $f_3(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$, $(x \in \mathbb{R})$.

Exercice 8.2 : Étudier la périodicité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \cos(4x) + 2\sin(2x + \dfrac{\pi}{6})$, $(x \in \mathbb{R})$;

2. $f_2(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$, $(x \in \mathbb{R})$;

3. $f_3(x) = x\sin(x)$, $(x \in \mathbb{R})$;

4. $f_4(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{3 + 2\cos(x)}$, $(x \in \mathbb{R})$.

> **Le saviez-vous ?**
>
> La trigonométrie concerne les notions de sinus, de cosinus. On peut les représenter sur un cercle de rayon 1. C'est pourquoi on parle de trigonométrie circulaire. Il existe aussi la trigonométrie hyperbolique qui se définit à l'aide de la fonction exponentielle. Ainsi le cosinus hyperbolique de x est $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et le sinus hyperbolique vaut $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. On peut les représenter sur une courbe appelée hyperbole, ce qui explique leur nom.

Étude des variations

Exercice 8.3 : Pour chacune des fonctions suivantes, étudier le domaine de dérivabilité, expliciter la fonction dérivée et étudier les variations :

1. $f_1(x) = \sqrt{\cos(x)}$, pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

2. $f_2(x) = 1 - \cos(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$;

3. $f_3(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$, pour $x \in]0, \pi[$;

4. $f_4(x) = \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)$, pour $x \in [0, 2\pi]$.

Exercice 8.4 : Encadrement de sinus et cosinus —.

1. Démontrer que pour tout réel positif $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\sin(x) \leq x$.

2. En déduire que pour tout réel positif $x \in \mathbb{R}^+$, on a $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$.

3. Prouver finalement que pour tout réel positif $x \in \mathbb{R}^+$, on a $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.

Études complètes

Exercice 8.5 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$.

1. Expliquer pourquoi on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0, \pi]$.

2. Étudier les variations de f sur cet intervalle.

3. Dessiner l'allure de la courbe de f entre -2π et 2π.

Exercice 8.6 : Fonction tangente —.

On considère la fonction, notée tan, définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Montrer que la fonction tangente est définie sur $\mathcal{D}_{tan} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi]\right\}$.

2. Vérifier que tan est impaire, périodique de période π.

3. Démontrer que la fonction tangente est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

4. Étudier les variations de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

5. Calculer les limites aux bornes de cet intervalle et dresser le tableau de variations.

6. Représenter l'allure de la courbe.

■ Résoudre une équation trigonométrique

Exercice 8.7 : Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(3x - \pi/4) = \sqrt{2}/2$

2. $\sin(2x + \pi/4) = -\sqrt{2}/2$

3. $\cos(3x - \pi/4) = \cos(x + \pi/3)$

4. $\sin(x + \pi/3) = \sin(3x - \pi/6)$

Exercice 8.8 : Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in]-\pi, \pi]$:

1. $2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$

2. $2\cos^2(x) + (\sqrt{3} + 2)\cos(x) + \sqrt{3} = 0$

3. $1 + \cos(2x) + \cos(4x) = 0$

4. $4\sin^2(x) + 2(1 + \sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} = 0$

Exercice 8.9 : Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in [0, 2\pi[$:

1. $2\sin(x) + 1 < 0$

2. $2\cos(4x) - \sqrt{3} \geq 0$

3. $2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 < 0$

4. $4\cos^2(x) - 2(\sqrt{2} - 1)\cos(x) - \sqrt{2} > 0$

■■ Indications

Ex. 8.1

Vous appliquerez la **méthode 8.3**.

Ex. 8.2

Pour déterminer la période d'une somme de deux fonctions périodiques, on cherchera un multiple commun aux deux périodes.

Ex. 8.4

Pour établir des inégalités entre fonctions, on peut étudier le signe de leur différence.

Ex. 8.7

Vous apliquerez la **méthode 8.4**.

Ex. 8.8

1. *Vous appliquerez la* **méthode 8.6**.

2. *Vous pourrez effectuer un changement d'inconnue...*

Ex. 8.9

Il s'agit de mettre en œuvre la **méthode 8.5**.

Corrigé des exercices

Exercice 8.1

On applique la **méthode 8.3**.

1. $f_1(-x) = 3\sin^2(-x) - 4\cos^3(-x) = f_1(x)$. Ceci étant vrai pour tout réel x, la fonction f_1 est paire.

2. $f_2(-x) = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right) = -f_1(x)$. Ceci étant vrai pour tout réel $x \in]-1,1[$, la fonction f_2 est impaire.

3. $f_3(-x) = (-x)\sin(-x) = x\sin(x) = f_3(x)$. Ceci étant vrai pour tout réel x, la fonction f_3 est donc paire.

4. $f_4(-x) = \dfrac{e^{-2x} - e^{2x}}{e^{-2x} + e^{2x}} = -\dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = -f_4(x)$. Ceci étant vrai pour tout réel x, la fonction f_4 est impaire. ▲

Exercice 8.2

On met en œuvre la **méthode 8.2**.

1. f_1 est la somme de deux fonctions périodiques. $x \mapsto \cos(4x)$ est $\frac{\pi}{2}$-périodique et $x \mapsto \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ est π-périodique. En ce cas, f_1 est π-périodique. Vérifions ceci :

Ces deux fonctions sont toutes deux π-périodiques, il en va de même pour leur somme.

$f_1(x+\pi) = \cos(4x+4\pi)+2\sin(2x+2\pi+\dfrac{\pi}{6}) = \cos(4x)+2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6}) = f_1(x)$.

2. f_2 est la somme de $x \mapsto \cos(2x)$ qui est π-périodique et de $x \mapsto -2\cos(x)$ qui est 2π-périodique. Montrons que f_2 est 2π-périodique :
$f_2(x+2\pi) = \cos(2x+4\pi) - 2\cos(x+2\pi) = \cos(2x) - 2\cos(x) = f_2(x)$.

3. f_3 est le produit de $x \mapsto \sin(x)$ qui est 2π-périodique et de $\vec{x} \mapsto x$ qui n'est pas périodique ! En ce cas, $f_3(x) = x\sin(x)$ n'est pas périodique.

4. f_4 est le quotient de $x \mapsto \sin^2(x)$ qui est π-périodique par $x \mapsto 3 + 2\cos(x)$ qui est seulement 2π-périodique. Ainsi, montrons que f_4 est 2π-périodique.

$f_4(x+2\pi) = \dfrac{\sin^2(x+2\pi)}{3+2\cos(x+2\pi)} = \dfrac{\sin^2(x)}{3+2\cos(x)} = f_4(x)$. ▲

Exercice 8.3

Pour l'étude de la dérivabilité de ces fonctions, on utilise le **théorème 8.2**. L'étude du signe de leur dérivée permet d'en déduire leurs variations, au moyen du **théorème 10.4** et de son corollaire.

1. $f_1(x) = \sqrt{\cos(x)}$ est bien défini pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ car en ce cas, $\cos(x) \geq 0$. Pour que f_1 soit dérivable, il faut que $\cos(x)$ soit strictement positif. Ainsi, f_1 est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et pour un tel réel, on a

La fonction racine carrée est continue sur $[0,+\infty[$ mais dérivable seulement sur $]0,+\infty[$.

$$f_1'(x) = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}.$$

On en déduit que $f_1'(x) > 0 \iff -\frac{\pi}{2} < x < 0$. f_1 est donc strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Comme la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, il en va de même de f_2 et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $f_2'(x) = \sin(x)$. Pour ce qui concerne ses variations, on peut noter que f_2 est 2π-périodique. Or pour $x \in [0, 2\pi]$, $f_2'(x) > 0 \iff 0 < x < \pi$. f_2 est donc croissante sur $[0,\pi]$ puis décroissante sur $[\pi, 2\pi]$. Par

On peut aussi résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sin(x) > 0$.

périodicité, il en résulte que f_2 est croissante sur tout intervalle de la forme $[2k\pi, 2k\pi+\pi]$ et décroissante sur tout intervalle de la forme $[2k\pi+\pi, 2k\pi+2\pi]$.

Avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. f_3 est dérivable sur l'intervalle $]0, \pi[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus pour tout réel $x \in]0, \pi[$, on a

On simplifie à l'aide de la formule de trigonométrie : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \frac{-\sin^3(x) - 2\sin(x)\cos^2(x)}{\sin^4(x)} = -\frac{\sin^2(x) + 2\cos^2(x)}{\sin^3(x)} \\ &= -\frac{1+\cos^2(x)}{\sin^3(x)} < 0 \end{aligned}$$

Comme sa dérivée est strictement négative, la fonction f_3 est strictement décroissante sur $]0, \pi[$.

4. On peut noter que l'expression $f_4(x) = \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)$ peut se simplifier à l'aide de la **méthode 8.6**. En effet, pour $x \in [0, 2\pi]$, on a

$$f_4(x) = 2 \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right] = 2\cos(x + \frac{\pi}{6})$$

Sous cette forme, on voit aisément que f_4 est dérivable et que $f_4'(x) = -2\sin(x + \frac{\pi}{6})$. Finalement

$$f_4'(x) > 0 \iff \sin(x + \frac{\pi}{6}) < 0 \iff x + \frac{\pi}{6} \in [\pi, 2\pi] \iff \frac{5\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}.$$

Par conséquent f_4 est décroissante sur $[0, 5\frac{\pi}{6}]$, croissante sur $[5\frac{\pi}{6}, 11\frac{\pi}{6}]$ puis décroissante de nouveau sur $[11\frac{\pi}{6}, 2\pi]$. ▲

Exercice 8.4

Pour démontrer une inégalité entre fonctions, on peut penser à étudier la fonction différence (**méthode ??**). C'est ce que nous allons mettre en œuvre ici.

1. Pour démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sin(x) \leq x$, posons $f_1(x) = \sin(x) - x$.

- Si $x \geq \frac{\pi}{2}$, alors on a $x \geq \frac{\pi}{2}$ et $1 \geq \sin(x)$. Comme $\frac{\pi}{2} > 1$, il en résulte que $x \geq \sin(x)$.
- Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $f_1'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$. Ainsi f_1 est décroissante sur $[0\frac{\pi}{2}]$. Comme $f_1(0) = 0$, il s'ensuit que f_1 est négative aussi sur $[0\frac{\pi}{2}]$.
- Conclusion : dans tous les cas, f_1 est négative, ce qui revient précisément à dire que $\sin(x) \leq x$.

2. D'après les propriétés de la fonction cos, nous savons déjà que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \cos(x) \leq 1$. Pour établir la minoration, introduisons la fonction différence $f_2(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$. f_2 est dérivable et $f_2'(x) = -\sin(x) + x = -f_1(x)$. D'après la première question $f_2' \geq 0$ et nous en déduisons que f_2 est croissante. Comme $f_2(0) = 0$, il en découle que $f_2(x) \geq 0$ ce qui revient à dire que $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$. Finalement, en recollant les morceaux, nous avons bien établi l'encadrement, valide pour tout réel x positif,

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$$

3. La première question consiste précisément en la majoration. Montrons que pour tout réel positif x, $\sin(x)$ est minoré par $x - \frac{x^3}{6}$. Pour ce faire, introduisons encore une fois la fonction différence : $f_3(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$. f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f_3'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} = f_2(x)$. D'après la question précédente, $f_3'(x) \geq 0$ et la fonction f_3 est donc croissante. Comme $f_3(0) = 0$, il en résulte que f_3 est positive. Finalement, nous avons bien établi l'encadrement souhaité. ▲

Exercice 8.5

1. f est définie sur $\mathbb{R}$. Comme $x \mapsto \cos(2x)$ est π-périodique et que $x \mapsto \cos(x)$ est 2π-périodique, la fonction f est 2π-périodique. On pourra donc restreindre l'étude de f à tout intervalle de longueur 2π est compléter ensuite l'étude par périodicité. D'autre part, on peut noter que la fonction f est paire.
Finalement,

$\boxed{1}$ On peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$;

$\boxed{2}$ Compléter le graphe à $[-\pi, \pi]$ par symétrie par rapport à (Oy) (grâce à la parité de f) ;

$\boxed{3}$ Puis dupliquer ce graphe sur tout intervalle $[2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi$ par périodicité.

2. f est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$, nous avons

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin(2x) + 2\sin(x) = 2\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) \\ &= 2\sin(x)\ (1 - 2\cos(x)) \end{aligned}$$

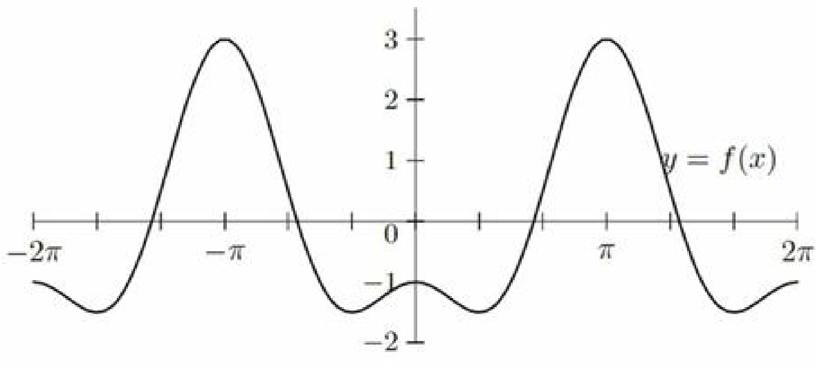
sin étant positif sur $[0, \pi]$, on a

$$f'(x) > 0 \iff 1 - 2\cos(x) > 0 \iff \cos(x) < \frac{1}{2} \iff x > \frac{\pi}{3}.$$

Le tableau suivant résume l'étude de f :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

3.



Exercice 8.6

1. $\tan(x)$ est défini pourvu que $\cos(x)$ soit différent de 0, c'est-à-dire pour $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Ainsi $\mathcal{D}_{tan} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\}$.

2. Appliquons la **méthode 8.3** et la **méthode 8.2**. On vérifie que si $x \in \mathcal{D}_{tan}$, alors $-x \in \mathcal{D}_{tan}$ et $x + \pi \in \mathcal{D}_{tan}$. En outre, pour tout $x \in \mathcal{D}_{tan}$, on a :

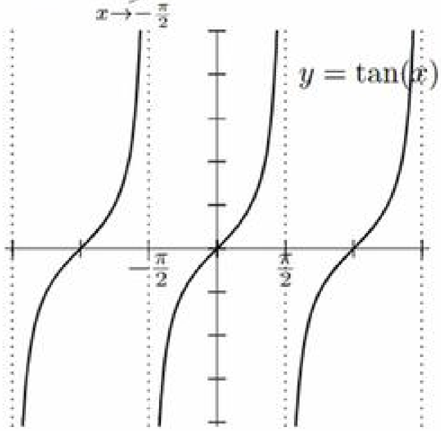
$$\begin{aligned}
\tan(-x) &= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \\
\tan(x+\pi) &= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)
\end{aligned}$$

En conclusion, la fonction tan est impaire, périodique de période π.
3. Sur l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tan est dérivable en tant que quotient de fonction dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$$\begin{aligned}
\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' &= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad\qquad = 1+\tan^2(x)
\end{aligned}$$

4. Les deux expressions de la dérivées que nous venons d'établir montrent clairement que tan′ est strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Par conséquent, la fonction tan est strictement croissante sur cet intervalle.
5. Au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}\cos(x)=0^+$ et $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}\sin(x)=1$. Par opérations algébriques, il en résulte que $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}\tan(x)=+\infty$.
Au voisinage de $-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{\pi}{2}}\cos(x)=0^+$ et $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{\pi}{2}}\sin(x)=-1$. Par opérations algébriques, il en résulte que $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{\pi}{2}}\tan(x)=-\infty$.

6.



▲

Exercice 8.7

Pour résoudre ces quatre équations trigonométriques, nous suivons la **méthode 8.4**. Pour cela, on s'aide du tableau de valeurs usuelles pour les fonctions sinus et cosinus, rappelé page 24.

$$\begin{aligned}
(1) \iff\ & \cos(3x-\pi/4)=\sqrt{2}/2 \iff \cos(3x-\pi/4)=\cos(\pi/4) \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{l} 3x-\pi/4\equiv\pi/4\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x-\pi/4\equiv-\pi/4\ [2\pi]\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 3x\equiv\pi/2\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x\equiv 0\ [2\pi]\end{array}\right. \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{l} x\equiv\pi/6\ [\frac{2\pi}{3}] \\ \text{ou} \\ x\equiv 0\ [\frac{2\pi}{3}]\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Corrigé

Finalement, l'ensemble recherché est $\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$$(2) \iff \sin(2x + \pi/4) = -\sqrt{2}/2 \iff \sin(2x + \pi/4) = \sin(-\pi/4)$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} 2x + \pi/4 \equiv -\pi/4\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x + \pi/4 \equiv 5\pi/4\ [2\pi] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv -\pi/4\ [\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi/2\ [\pi] \end{array}\right.$$

$$(3) \iff \cos(3x - \pi/4) = \cos(x + \pi/3) \iff \left\{\begin{array}{l} 3x - \pi/4 \equiv x + \pi/3\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x - \pi/4 \equiv -x - \pi/3\ [2\pi] \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} 2x \equiv 7\pi/12\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 4x \equiv -\pi/12\ [2\pi] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv 7\pi/24\ [\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\pi/47\ [\frac{\pi}{2}] \end{array}\right.$$

$$(4) \iff \sin(x + \pi/3) = \sin(3x - \pi/6) \iff \left\{\begin{array}{l} x + \pi/3 \equiv 3x - \pi/6\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x + \pi/3 \equiv 7\pi/6 - 3x\ [2\pi] \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} 2x \equiv \pi/2\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 4x \equiv 5\pi/6\ [2\pi] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv \pi/4\ [\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv 5\pi/24\ [\pi/2] \end{array}\right.$$

▲

Exercice 8.8

1. Pour résoudre cette équation, nous allons d'abord simplifier l'expression au moyen de la formule de duplication des sinus et de la **méthode 8.6**. Il vient

$$(1) \iff \sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0 \iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$$
$$\iff \cos(2x - \pi/6) = \cos(\pi/2) \iff \left\{\begin{array}{l} 2x - \pi/6 \equiv \pi/2\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x - \pi/6 \equiv -\pi/2\ [2\pi] \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} 2x \equiv 2\pi/3\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x \equiv -\pi/3\ [2\pi] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv \pi/3\ [\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\pi/6\ [\pi] \end{array}\right.$$

2. Cette équation porte sur des puissances successives de $\cos(x)$, on effectue le changement d'inconnue $y = \cos(x)$. Il vient

$$(2) \iff 2\cos^2(x) + (\sqrt{3} + 2)\cos(x) + \sqrt{3} = 0$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} y = \cos(x) \\ 2y^2 + (\sqrt{3} + 2)y + \sqrt{3} = 0 \end{array}\right.$$

Pour résoudre l'équation polynomiale, nous appliquons la **méthode 4.4**. Le discriminant $\Delta = (\sqrt{3} + 2)^2 - 8\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 2)^2 > 0$. Par conséquent, le trinôme a deux racines réelles $y_1 = -1$ et $y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Finalement

$$(2) \iff \left\{\begin{array}{l} \cos(x) = -1 \\ \text{ou} \\ \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv \pi\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pm 5\pi/6\ [2\pi] \end{array}\right.$$

3. Pour résoudre cette équation trigonométrique, nous allons utiliser d'abord une formule de factorisation : $1+\cos(4x) = 2\cos^2(2x)$, il vient

*D'après la formule de duplication (***proposition 2.4***), on a* $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$, *d'où l'on tire que* $1+\cos(2a) = 2\cos^2(a)$.

$$\begin{aligned}
(3) \quad &\iff \quad 2\cos^2(2x) + \cos(2x) = 0 \iff \cos(2x)\big(1+2\cos(2x)\big) = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} \cos(2x) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos(2x) = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x \equiv \pi/2\ [\pi] \\ \text{ou} \\ 2x \equiv \pm 2\pi/3\ [2\pi] \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv \pi/4\ [\frac{\pi}{2}] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pm\pi/3\ [\pi] \end{array}\right.
\end{aligned}$$

4. Cette fois, l'équation ne porte que sur des puissances de $\sin(x)$, on effectue le changement d'inconnue $y = \sin(x)$. Il vient :

$$\begin{aligned}
(4) \quad &\iff \quad 4\sin^2(x) + 2(1+\sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} = 0 \\
&\iff \quad \left\{\begin{array}{l} y = \sin(x) \\ 4y^2 + 2(1+\sqrt{3})y + \sqrt{3} = 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Le dscriminant du trinôme est $\Delta = \big(2(\sqrt{3}-1)\big)^2$. Les formules du deuxième degré donnent alors $y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y_2 = -\frac{1}{2}$. Finalement

méthode 4.4

$$(4) \iff \left\{\begin{array}{l} \sin(x) = \sin(-\pi/3) \\ \text{ou} \\ \sin(x) = \sin(-\pi/6) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv -\pi/3\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv 4\pi/3\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\pi/6\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv 7\pi/6\ [2\pi] \end{array}\right.$$

Finalement $\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}$. ▲

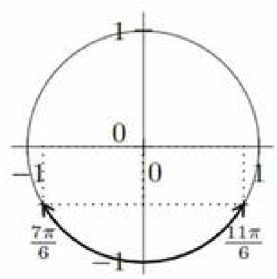
Exercice 8.9

Nous appliquons la **méthode 8.5**.

1. (1) $\iff$ $\sin(x) < -\frac{1}{2}$.

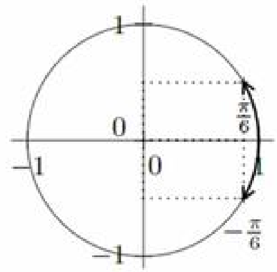
Pour résoudre (1) représentons sur le cercle trigonométrique les points d'ordonnée inférieure à $-\frac{1}{2}$. Ils forment un arc de cercle. Ce sont tout simplement les images des solutions de cette inéquation sur le cercle trigo. On en déduit que

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi + \frac{7\pi}{6}, 2k\pi + \frac{11\pi}{6}\right[.$$



2. Procédons de la même manière pour la deuxième inéquation.

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\iff \quad 2\cos(4x) - \sqrt{3} \geq 0 \\
&\iff \quad \cos(4x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\iff \quad 4x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right[
\end{aligned}$$



Ainsi, $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}, k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{24}\right[$.

3. Pour cette inéquation, nous commençons par effectuer le changement d'inconnue $y = \cos(x)$ afin de nous ramener à une inéquation polynomiale.

$$\begin{aligned}(3) \quad &\iff \quad \left\{\begin{array}{l} y = \cos(x) \\ 2y^2 - y - 1 < 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = \cos(x) \\ (y-1)(2y+1) < 0 \end{array}\right. \\ &\iff \quad \left\{\begin{array}{l} y = \cos(x) \\ -\frac{1}{2} < y < 1 \end{array}\right. \iff -\frac{1}{2} < \cos(x) < 1\end{aligned}$$

Grâce à la **méthode 4.5**, on s'est ainsi ramené à la résolution d'inéquations classiques. Nous pouvons conclure en appliquant la **méthode 8.5**. Il vient comme pour les deux premières inéquations trigonométriques :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi\right[\cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi, 2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right[.$$

4. Cette inéquation ne porte que sur des puissances de $\cos(x)$, on effectue de nouveau le changement d'inconnue $y = \cos(x)$.

$$(4) \iff \left\{\begin{array}{l} y = \cos(x) \\ 4y^2 - 2(\sqrt{2}-1)y - \sqrt{2} > 0 \end{array}\right.$$

Pour étudier le signe du trinôme, nous mettons en œuvre la **méthode 4.5**. Le discriminant du trinôme vaut $\Delta = 4\big((\sqrt{2}-1)^2 + 4\sqrt{2}\big) = 4(\sqrt{2}+1)^2 > 0$. Il existe donc deux racines réelles distinctes :

$$y_1 = \frac{2(\sqrt{2}-1) - 2(\sqrt{2}+1)}{8} = -\frac{1}{2} \text{ et } y_2 = \frac{2(\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{2}+1)}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalement

$$(4) \iff \cos(x) < -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On applique alors la **méthode 8.5** pour conclure :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{4\pi}{3}\right[\cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right[.$$

▲

Chapitre 9

Limites de fonctions

La définition de la dérivée se fait à l'aide de la limite d'un quotient a priori indéterminé. Lorsque cette notion fut introduite à la fin du XVII^e siècle, la notion de limite n'existait pas. Leibniz et Euler considéraient l'existence d'un état intermédiaire appelé infiniment petit situé entre le fait d'être différent de 0 et celui d'être nul. Ceci explique que certains mathématiciens aient combattu ces nouveaux outils malgré leur efficacité pour résoudre de nombreux problèmes jusque-là sans réponse. Jean le Rond d'Alembert chercha fort maladroitement à formuler une définition de la limite mais il faut attendre le milieu du siècle suivant pour que ce concept soit introduit de manière rigoureuse par Augustin-Louis Cauchy puis par Karl Weierstrass.

Augustin-Louis Cauchy
1789-1857

OBJECTIFS

les incontournables

- Calculer une limite
  - par opérations algébriques
  - en utilisant un changement de variable
- Reconnaître une forme indéterminée. Savoir lever une forme indéterminée
  - par opérations algébriques ;
  - à l'aide des croissances comparées des fonctions usuelles ;

et plus si affinités

- Utiliser la limite des taux de variations de fonctions usuelles pour déterminer une limite.

Résumé de cours

Notions de limites

Limites en $+\infty$

Définition : *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a,+\infty[$. On dit que*

• *f* ***a pour limite*** *$\ell \in \mathbb{R}$* ***en*** *$+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (ou $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$) lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pourvu que x soit assez grand.*

• *f* ***a pour limite*** *$+\infty$* ***en*** *$+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A,+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pourvu que x soit assez grand.*

Limites en un réel a

Définition : *Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ et $a \in \mathbb{R}$, un élément ou une extrémité réelle de $\mathcal{D}$. On dit que*

• *f* ***a pour limite*** *$+\infty$* ***en*** *a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A,+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pourvu que x soit assez proche de a dans $\mathcal{D}$.*

• *f* ***a pour limite*** *ℓ* ***en*** *a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pourvu que x soit assez proche de a dans $\mathcal{D}$.*

• *f* ***a une limite à droite en*** *a lorsque f a une limite quand x tend vers a avec $x > a$. On note cette limite $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)$.*

Définition : *Lorsque a est élément de $\mathcal{D}$, on dit que f* ***est continue en*** *a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Théorèmes d'existence de limites

Opérations sur les limites

Soit f, g deux fonctions définies sur un domaine $\mathcal{D}$, a un élement ou une extrémité éventuellement infinie de $\mathcal{D}$, ℓ, ℓ' des nombres réels ou infinis et $k \in \mathbb{R}^\star$ un nombre réel. On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$. Pourvu que les opérations qui suivent aient un sens, on a :

Théorème 9.1.—

- $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = k\,\ell$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x) = \ell \times \ell'$
- Si $\ell' \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}$
- Si $\ell = 0^+$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
- Si $\ell = 0^-$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Notation : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0^+$ *signifie $f > 0$ au voisinage de a dans $\mathcal{D}$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.*

Remarque : même lorsqu'on connaît les limites de f et de g, ce théorème ne permet pas toujours de conclure. Il y a des **cas d'indétermination**. Ce sont les quatre formes indéterminées $\infty - \infty$, $\infty \times 0$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

Existence de limite par comparaison, encadrement

Soit f, g, h trois fonctions définies sur un domaine $\mathcal{D}$, a un élement ou une extrémité éventuellement infinie de $\mathcal{D}$.

Théorème 9.2.—

$$\text{Si} \quad \left.\begin{array}{l} \bullet \text{ au } voisinage \text{ de } a,\ g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \end{array}\right), \quad \textbf{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

$$\text{Si} \quad \left.\begin{array}{l} \bullet \text{ au } voisinage \text{ de } a,\ g(x) \leq f(x) \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \end{array}\right), \quad \textbf{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Remarque : on a un énoncé analogue lorsque $f \leq g$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$.

Existence de limite par changement de variable

On étudie la limite d'une fonction composée $x \mapsto f(x) = g\big(h(x)\big)$. Ainsi $h : I \to J$ est une fonction définie dans I à valeurs dans J, $g : J \to \mathbb{R}$ est définie dans J et f désigne la composée $g \circ h$.

Théorème 9.3.— Soit a un élément ou une extrémité de I, b un élément ou une extrémité de J et ℓ un nombre réel ou infini.

$$\text{Si} \quad \left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to a} h(x) = b \\ \bullet \ \lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell \end{array}\right) \quad \textbf{alors} \quad \lim_{x\to a} g \circ h(x) = \ell$$

Limites des fonctions usuelles

Les fonctions usuelles (fonctions polynomiales, fractions rationnelles, sinus, cosinus, logarithme népérien, exponentielle et puissances) sont continues sur leurs domaines de définition respectifs.

Limites des fonctions logarithme, exponentielle, puissances

Théorème 9.4.— Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\begin{array}{lll} \bullet \ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty & \bullet \ \lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x) = 0 & \bullet \ \lim\limits_{x\to 0^+} x^n = 0 \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty & \bullet \ \lim\limits_{x\to +\infty} \exp(x) = +\infty & \bullet \ \lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty \end{array}$$

Croissances comparées des fonctions logarithme, exponentielle, puissances

Théorème 9.5.—

$$\begin{array}{ll} \bullet \ \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 & \bullet \ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to -\infty} x\exp(x) = 0 & \bullet \ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty \end{array}$$

Méthodes

Méthodes directes de calcul de limites

Soit à étudier la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. La fonction $x \mapsto f(x)$ peut être une fonction usuelle, ou bien construite à partir de fonctions usuelles au moyen d'opérations algébriques ou comme composée de plusieurs fonctions usuelles. Suivant les cas, nous allons voir comment étudier cette limite.

Utiliser les opérations algébriques (OPA)

Lorsque f est construite à partir de fonctions usuelles par opérations algébriques (somme, différence, produit ou quotient), *le bon réflexe* consiste à appliquer la **méthode 9.1** : *lorsqu'il n'y a pas d'indétermination*, la limite de f est obtenue par ces mêmes opérations algébriques sur les limites.

❑ Méthode 9.1.— Comment calculer une limite par opérations algébriques

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ou $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, ou $f(x) = f_1(x) \times f_2(x)$, ou $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$

$\boxed{1}$ Étudiez les limites $\ell_1 = \lim\limits_{x \to a} f_1(x)$ et $\ell_2 = \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$.

$\boxed{2}$ Lorsqu'il n'y a aucune indétermination, vous pouvez conclure que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_1 + \ell_2$, ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_1 - \ell_2$, ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_1 \times \ell_2$, ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.

Exemple : étudions la limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures de $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{x^2 - 1}$.
Ici $f(x)$ est une expression rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales) :

$\boxed{1}$ Étudions la limite du numérateur : $1 - 3x \xrightarrow[x \to 1^-]{} -2$

$\boxed{2}$ Étudions la limite du dénominateur : $x^2 - 1 \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^-$

$\boxed{3}$ Par opérations algébriques, il s'ensuit que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$.

Mise en œuvre : exercice 9.1.

Remarque : il est fréquent qu'apparaisse lors du calcul une forme indéterminée, c'est-à-dire une expression de la forme : $+\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $0 \times \infty$. En ce cas, la méthode précédente ne suffit pas pour conclure. On se reportera à la méthode **méthode 9.5**.

Utiliser un changement de variable

Comme c'est très souvent le cas, la fonction f peut être construite comme *composée* de plusieurs fonctions usuelles. En ce cas, on peut étudier la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ à l'aide du **théorème 9.3**. Essentiellement, il s'agit de *décomposer* cette étude de limite en plusieurs étapes.

❑ Méthode 9.2.— Comment étudier une limite par changement de variable
On observe que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = g\big(h(x)\big)$. On procède alors de la façon suivante :

$\boxed{1}$
- On pose $y = h(x)$ et on étudie $b = \lim\limits_{x \to a} h(x)$
- On étudie $\ell = \lim\limits_{y \to b} g(y)$.

$\boxed{2}$ On conclut à l'aide du **théorème 9.3**, que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Exemple : étudions la limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)^4$.

- On pose $y(x) = 2 - \frac{1}{x}$, on a $y(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$
- on sait que $y^4 \xrightarrow[y \to -\infty]{} +\infty$

Par composition, il vient $\lim\limits_{\substack{x>0 \\ x \to 0}} (2 - \dfrac{1}{x})^4 = +\infty$.

Mise en œuvre : exercice 9.1.

Utiliser un encadrement ou une comparaison

Lorsque $f(x)$ est construite par opérations algébriques à partir de fonctions qui n'admettent pas de limite (ou dont on ne sait pas facilement calculer la limite) on peut avoir recours à un encadrement de $f(x)$ entre des fonctions dont on sait montrer qu'elles ont même limite.

❑ Méthode 9.3.— Comment étudier une limite par encadrement
$\boxed{1}$ On montre qu'au voisinage du point a on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
$\boxed{2}$ On montre que g et h possèdent au point a la même limite $\ell = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$.
$\boxed{3}$ On conclut alors **par encadrement** que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Remarque : comme indiqué dans le résumé de cours, lorsque $\ell = \pm\infty$ une comparaison suffit :
- Lorsqu'au voisinage du point a, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- Lorsqu'au voisinage du point a, $f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemple : étudions la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sin(x)}{2 - \cos(x)}$.

$\boxed{1}$ Remarquons d'entrée de jeu que les fonctions cos et sin ne possédant pas de limites en $+\infty$, le **théorème 9.1** ne s'applique pas ici. Par contre, des encadrements $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, on tire :

$$0 < x - 1 \leq x + \sin(x) \leq x + 1 \qquad \text{et} \qquad 0 < 1 \leq 2 - \cos(x) \leq 3$$

$$0 < \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos(x)} \leq 1$$

D'où découle finalement l'encadrement $0 < \dfrac{x-1}{3} \leq \dfrac{x + \sin(x)}{2 - \cos(x)} \leq \dfrac{x+1}{1}$.

$\boxed{2}$ Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{3} = +\infty$, il s'ensuit par comparaison que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sin(x)}{2 - \cos(x)} = +\infty$.

Mise en œuvre : exercice 9.1.

■ Étudier une limite en cas d'indétermination

Lorsque f est construite par opérations algébriques à partir de fonctions usuelles, le **théorème 9.1** ne permet pas de conclure en toutes circonstances puisque rappelons-le, les expressions : $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$ sont indéterminées.

Reconnaître une croissance comparée usuelle

Lorsqu'on tombe sur une **forme indéterminée**, la seule connaissance des limites des fonctions en jeu ne suffit pas pour prédire le comportement de la somme, du produit, du quotient ou de la différence. Pour lever cette indétermination, il faut aussi prendre en compte les vitesses de convergence. Dans le cas des fonctions usuelles, vous connaissez parfaitement leurs croissances comparées (**théorème 9.5**).

> **❑ Méthode 9.4.— Comment reconnaître le terme prédominant**
> En cas d'indétermination au voisinage de a, retenez que :
> - la puissance de x l'emporte sur la puissance de $\ln(x)$,
> - la puissance de e^x l'emporte sur la puissance de x.

Exemple : étudions $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(x)}{\ln(x)}$. Nous sommes ici en présence d'une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, qui ressemble à une croissance comparée usuelle. Pour nous y ramener, un changement de variable s'impose :

- On pose $y(x) = \ln(x)$, on a $y(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
- On sait (CC) que $\dfrac{\ln(y)}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0^+$

Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = 0^+$.

Lever l'indétermination en factorisant par le terme prédominant

Plus généralement, comme les croissances comparées des fonctions usuelles se traduisent sous la forme de limites de quotient, nous chercherons à factoriser les expressions indéterminées par leur terme prédominant.

> **❑ Méthode 9.5.— Comment lever l'indétermination à l'aide d'une factorisation**
> Supposons que $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, où $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = +\infty$ de sorte que la limite en a de $f(x)$ est indéterminée ($\infty - \infty$).
>
> $\boxed{1}$ À l'aide des croissances comparées, on repère le terme prédominant dans la somme. Ce sera $f_1(x)$ pourvu que $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
>
> $\boxed{2}$ **On factorise par le terme prédominant** pour lever l'indétermination :
> $$f(x) = f_1(x) - f_2(x) = f_1(x) \times \left(1 - \tfrac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)$$
>
> $\boxed{3}$ Dans cette expression, il n'y a plus d'indétermination en effet. On conclut par OPA que
> $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f_1(x)$$

Remarques : cette méthode se généralise au cas d'une somme de plusieurs termes. Elle permet de « remplacer » $f(x)$ par son terme prédominant.
On peut aussi appliquer cette factorisation pour lever tout type d'indétermination : produit, quotient, somme ou différence.

Exemple : étudions la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2\ln(x)\cos(x) + e^{-x}}{(\ln(x))^2}$.

$\boxed{1}$ Au voisinage de $+\infty$, $x \mapsto 2\ln(x)\cos(x)$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont négligeables devant $x \mapsto x^2$ car par OPA $\dfrac{e^{-x}}{x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ et par encadrement $0 \leq \dfrac{|2\ln(x)\cos(x)|}{x^2} \leq 2\dfrac{\ln(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

$\boxed{2}$ On peut alors écrire $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln^2(x)} \times \left(1 - \dfrac{2\ln(x)\cos(x)}{x^2} + \dfrac{e^{-x}}{x^2}\right)$.

$\boxed{3}$ Par croissances comparées des fonctions usuelles (la puissance de x l'emporte sur la puissance de $\ln(x)$), on peut conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\ln^2(x)} = +\infty$.

❑ Méthode 9.6.— Comment étudier la limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle

Soit $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, où p et q sont des fonctions polynomiales :

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ où } a_n \neq 0 \\ q(x) & = & b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \text{ où } b_m \neq 0 \end{array}$$

Alors

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} q(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} b_m x^m$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n}{b_m} x^{n-m}$.

Mise en œuvre : exercice 9.2.

Utiliser l'expression conjuguée

La **méthode 9.5** consiste à utiliser une opération algébrique pour lever la forme indéterminée. D'autres opérations que la factorisation par le terme prédominant peuvent s'avérer utiles. Par exemple, pour une forme indéterminée mettant en jeu des racines carrées, on peut lever parfois l'indétermination en multipliant et divisant par l'expression conjuguée.

Exemple : étudions la limite en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} - x$. Par composition, on voit que $\sqrt{x^2+2x+2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ de sorte que nous avons ici affaire à une forme indéterminée $\infty - \infty$.
Pour lever cette indétermination, écrivons tout d'abord

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+2x+2} - x) \times (\sqrt{x^2+2x+2} + x)}{\sqrt{x^2+2x+2} + x} = \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2} + x}$$

Finalement, factorisons numérateur et dénominateur par leur terme prédominant, x, il vient

$$f(x) = \frac{2(1+\frac{2}{x})}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} + 1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{2}{2} = 1$$

Mise en œuvre : exercice 9.3.

Utiliser les taux de variations

Soit f une fonction dérivable en a. Par définition du nombre dérivée, les taux de variations de f en a tendent vers $f'(a)$.

$$\lim_{x \overset{\neq}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Or il n'aura pas échappé au lecteur que l'expression $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$ au voisinage de a. Ainsi, les dérivées usuelles peuvent parfois être utilisées pour lever des indéterminations du type $\dfrac{0}{0}$.

❑ Méthode 9.7.— Comment utiliser les taux de variations

D'autres limites de référence sont souvent obtenues comme limite des taux de variation d'une fonction usuelle.

• $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ • $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ • $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Exemple : étudions la limite en 0 de $\dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$. Il s'agit d'une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. Pour la lever, on peut tenter d'utiliser le taux de variation de cos en 0.

$$f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x} \times \frac{1}{x}$$

Malheureusement, on tombe sur une forme indéterminée $0\times\infty$! Pour lever l'indétermination, nous aurons recours à la trigonométrie. D'après la **formule de duplication**

$$f(x) = \frac{-2\ \sin^2(x/2)}{x^2} = -2\ \frac{\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2} = -\frac{1}{2}\ \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$$

Le changement de variable $y(x) = \frac{x}{2}$, dans la limite de référence $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$ montre finalement que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Mise en œuvre : exercice 9.3.

Méthodes

Énoncé des exercices

Calculs de limites

Exercice 9.1 : Étudiez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{\ln(x)}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(\cos(x))$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x+2\sin(x)}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}$
5. $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x-3}{x^2-4x-5}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+1)(-1+\dfrac{3}{x})$

Exercice 9.2 : Étudiez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+x\cos(x)+x^2e^{-x}}{(x+1)\ln(x)}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+e^{2x}}{x^2+\sqrt{x}+1}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-1}{2x^2-x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+5)}{5+\ln(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}+x+x^3}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\sqrt{\dfrac{x^2+x-1)}{x^2+1}}\right)$

Exercice 9.3 : Étudiez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+x+2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\ln(1+e^x)$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

> **Le saviez-vous ?**
>
> Une fonction positive de limite nulle n'est pas forcément décroissante. Considérez par exemple la fonction f définie pour $x>0$ par $f(x)=\frac{\sin(x)+1}{x}$. f est positive, majorée par $\frac{2}{x}$ et tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Pourtant elle n'est pas décroissante puisque $0=f(2k\pi)<f(2k\pi+\pi/2)=1/(2k\pi+\pi/2)$.

Indications

Ex. 9.1

On utilisera suivant les cas la **méthode 9.1**, *la* **méthode 9.2** *ou la* **méthode 9.3**.

Ex. 9.2

Vous utiliserez la **méthode 9.5** *à tour de bras !*

Ex. 9.3

Vous utiliserez entre autre la **méthode 9.7**...

Corrigé des exercices

Exercice 9.1

1. Posons $f_1(x) = \dfrac{\sin(x)}{\ln(x)}$. Au voisinage de $+\infty$, on a

$$0 \leq |f_1(x)| \leq \frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Par encadrement, il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$.

Comme $\sin$ *n'a pas de limite en* $+\infty$, *on ne peut pas appliquer le* **théorème 9.1**. *On met en œuvre la* **méthode 9.3**.

2. Pour étudier $f_2(x) = \ln(\cos(x))$ au voisinage de 1, un changement de variable s'impose :

théorème 9.3

$$\left.\begin{array}{r} \bullet \text{ On pose } y(x) = \cos(x), \text{ on a } y(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \\ \bullet \text{ par continuité de ln, } \ln(y) \xrightarrow[y \to 1]{} 0 \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x \to 0} f_2(x) = 0.$$

3. Pour étudier la limite en $+\infty$ de $f_3(x) = \dfrac{\cos(x)}{x + 2\sin(x)}$, on met en œuvre la **méthode 9.3**. Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$0 \leq |f_3(x)| = \frac{|\cos(x)|}{x + 2\sin(x)} \leq \frac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0^+$$

Comme $\sin \geq -1$, *on en déduit que* $x + 2\sin(x) \geq x - 2$.

Par encadrement, il en résulte que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = 0$.

4. Pour étudier $f_4(x) = \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}$ au voisinage de $+\infty$, on effectue le changement de variable $y = \dfrac{1}{x^2}$.

$$\left.\begin{array}{r} \bullet \text{ On a } y(x) = \dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+ \\ \bullet \text{ par continuité de } \sqrt{\cdot},\ \sqrt{y} \xrightarrow[y \to 0]{} 0 \end{array}\right) \text{Par composition, } \lim_{x \to 0} f_4(x) = 0.$$

5. On a $x - 3 \xrightarrow[x \to 5^-]{} 2$ et $x^2 - 4x - 5 \xrightarrow[x \to 5^-]{} 0^-$. Par opa, il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{x-3}{x^2 - 4x - 5} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$.

Le trinôme $x^2 - 4x - 5$ *est négatif entre ses racines* -1 *et* 5

6. Clairement $x^3 + 1 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ et $-1 + \dfrac{3}{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$. Par opa il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3+1)(-1+\dfrac{3}{x}) = +\infty$. ▲

méthode 9.1

Exercice 9.2

1. Pour étudier la limite en $+\infty$ de $f_1(x) = \dfrac{2x^2 + x\cos(x) + x^2 e^{-x}}{(x+1)\ln(x)}$, nous appliquons la **méthode 9.5** et factorisons numérateur et dénominateur par leur terme dominant. Il vient :

$$f_1(x) = \frac{x^2}{x\ln(x)} \frac{2 + \frac{\cos(x)}{x} + e^{-x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{\ln(x)} \frac{2 + \frac{\cos(x)}{x} + e^{-x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

Corrigé

En cas d'indétermination, la puissance de x l'emporte sur $\ln(x)$

- Par croissances comparées des fonctions usuelles, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$.
- Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0$.
- Par OPA, il en résulte finalement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$.

On applique encore la **méthode 9.5**

2. Posons $f_2(x) = \dfrac{e^x + e^{2x}}{x^2 + \sqrt{x} + 1}$. Au voisinage de $+\infty$, nous pouvons écrire

On utilise les **Règles de calcul** *de* exp, **théorème 5.3**.

$$f_2(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}\,\frac{1 + e^{-x}}{2 - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}} = \Big(\frac{e^x}{x}\Big)^2 \frac{1 + e^{-x}}{2 + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}}$$

En cas d'indétermination, l'exponentielle de x l'emporte sur la puissance de x.

- Par croissances comparées des fonctions usuelles, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
- Par OPA, il en résulte finalement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$.

3. Au voisinage de $-\infty$, écrivons $\dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \dfrac{3 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \dfrac{3}{2}$.

4. On utilise d'abord les règles de calcul avec la fonction logarithme. Il vient

Pour lever l'indétermination, on factorise par le terme prédominant comme préconisé dans la **méthode 9.5**.

$$f_4(x) = \frac{\ln(x+5)}{5 + \ln(x)} = \frac{\ln(x \times (1 + 5/x))}{5 + \ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln(1 + 5/x)}{5 + \ln(x)}$$

La **méthode 9.5**, permet alors de conclure :

$$f_4(x) = \frac{\ln(x) + \ln(1 + 5/x)}{5 + \ln(x)} = \frac{\ln_(x)}{\ln(x)} \times \frac{1 + \frac{\ln(1+5/x)}{\ln(x)}}{1 + \frac{5}{\ln(x)}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

5. Le piège ! Ici il n'y a pas de forme indéterminée ! On peut conclure directement par OPA que $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x} + x + x^3} = -\infty$.

6. Observons tout d'abord que d'après les règles de calcul de la fonction ln, nous avons

$$f_6(x) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1}\Big)$$

On pose alors $y(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1} = \dfrac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$. On peut donc conclure :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Comme } y(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1 \\ \bullet\ \qquad \text{et que } \ln(y) \xrightarrow[y\to1]{} 0 \end{array}\right) \text{Par composition, } \lim_{-\infty} f_6(x) = 0.$$

▲

Exercice 9.3

1. Au voisinage de $-\infty$, remarquons que nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $-\infty + \infty$ ». Pour la lever nous allons d'abord multiplier et diviser par l'expression conjuguée, puis appliquer la **méthode 9.6**. Il vient

$$\begin{aligned} x+\sqrt{x^2+x+2} &= \frac{(x^2+x+2)-x^2}{\sqrt{x^2+x+2}-x} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}-x} \\ &= \frac{x}{-x}\,\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. On a ici affaire à une forme indéterminée «$\frac{0}{0}$». Pour la lever, nous allons mettre en œuvre la **méthode 9.7**. Pour x voisin de 0 (mais différent de 0), on a :

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)} = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{1}{2}$$

Par la **méthode 9.7**, il en résulte alors aisément que $f_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$.

3. On peut noter $f_3(x) = \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x} = \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{\sin(x)} \times \dfrac{\sin(x)}{x}$. La limite du deuxième facteur en 0, résulte directement de la **méthode 9.7**. Pour le premier facteur, il va falloir composer :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \text{On a } y(x)=\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ \bullet \text{ Le taux de variation} \dfrac{e^y-1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1 \end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim_{x\to 0} f_3(x) = 1.$$

4. On a encore ici affaire à une forme indéterminée «$\frac{0}{0}$». Pour la lever, nous allons mettre en œuvre la **méthode 9.7**, mais avant cela, commençons par utiliser un peu de trigonométrie : $f_4(x) = \sqrt{2}\,\dfrac{\sin(x-\pi/4))}{x-\pi/4}$. Finalement,

Voir la **méthode 8.6**.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Posons } t(x) = x-\frac{\pi}{4} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{4}]{} 0 \\ \bullet \text{ On sait que } \dfrac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f_4(x) = \sqrt{2}.$$

5. Il s'agit encore d'un calcul de limite par changement de variable :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \text{Posons } y(x)=e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \\ \bullet \text{ On sait que } \dfrac{\ln(1+y)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1 \end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim_{x\to-\infty} f_5(x) = 1.$$

6. Multiplions et divisons par la quantité conjuguée du numerateur. Il vient

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

▲

Corrigé

Chapitre 10

Dérivation des fonctions

Le mathématicien français d'origine italienne Joseph Lagrange a consacré de nombreux travaux à l'étude de fonctions. C'est à lui que l'on doit les termes de dérivée et de primitive. Il considérait en effet que la première dérivait de la seconde considérée elle-même comme la fonction première, donc la primitive. Lagrange s'est penché sur presque tous les domaines des mathématiques. Citons seulement ses travaux en mécanique céleste et ceux sur les équations différentielles.

Joseph-Louis Lagrange
1736-1813

OBJECTIFS

les incontournables

- Étudier la dérivabilité d'une fonction f
  - en étudiant la limite des taux de variation
  - en utilisant les opérations algébriques ou la composition
- Déterminer la fonction dérivée de f
  - à l'aide des dérivées des fonctions usuelles
  - au moyen des opérations algébriques et de la composition

et plus si affinités

- Utiliser les taux de variation d'une fonction dérivable,
  - pour étudier une limite indéterminée de la forme «$\frac{0}{0}$».

Résumé de cours

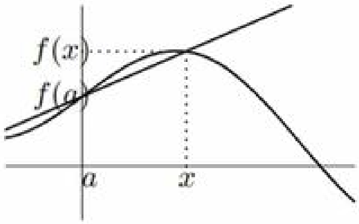
Notions de dérivées

Nombre dérivé

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que f est* **dérivable** *au point a lorsque les taux de variation de f au point a possèdent une limite finie au point a.*

En ce cas, $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \neq a \\ x \to a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *s'appelle le* **nombre dérivé** *de f en a.*

Interprétation graphique

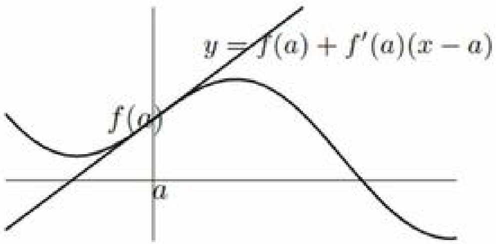


Le taux de variation $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est la pente de la corde d'extrémités $A(a, f(a))$ et $X(x, f(x))$. Le nombre dérivé de f correspond donc à la *pente limite*.

Définition : *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable au point a, alors la droite d'équation cartésienne réduite*

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

est appelée la **droite tangente** *à la courbe représentative de f* **au point $A(a, f(a))$**.



Interprétation : de toutes les droites affines du plan, la droite tangente en $A(a, f(a)$ est celle qui approche le mieux la courbe représentative de f.

Fonction dérivée

Définition : *f est dite* **dérivable sur I**, *si elle est dérivable en tout point de I. La fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x est la* **fonction dérivée** *de f. On la note $f' : I \to \mathbb{R}$.*

Calcul de dérivées

Opérations algébriques

Proposition 10.1.— Soit $u, v : I \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que u et v sont dérivables dans I. Alors

- $\lambda \cdot u$ est dérivable et pour tout $x \in I$, $\big(\lambda \cdot u(x)\big)' = \lambda \cdot u'(x)$
- $u + v$ est dérivable et pour tout $x \in I$, $\big(u(x) + v(x)\big)' = u'(x) + v'(x)$
- $u \times v$ est dérivable et pour tout $x \in I$, $(u(x) \times v(x))' = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
- $\dfrac{1}{u}$ est dérivable et pour tout $x \in I$, $(\dfrac{1}{u(x)})' = -\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$(si u est inversible)
- $\dfrac{u}{v}$ est dérivable et pour tout $x \in I$, $(\dfrac{u(x)}{v(x)})'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$(si v est inversible).

Dérivée d'une fonction composée

Proposition 10.2.— Soit $f : J \to \mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}$, telles que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. On note $f \circ u$ la composée $f \circ u : x \mapsto f(u(x))$. On suppose que f dérivable dans J et u dans I. Alors

- $f \circ u$ est dérivable et pour tout $x \in I$, $\big(f(u(x))\big)'(x) = f'(u(x)) \times u'(x)$

Remarque : seuls les cas où $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x)$, $f(x) = x^n$, $f(x) = \sqrt{x}$ sont au programme.

Propriétés des fonctions dérivables

Lien fondamental avec la continuité

Théorème 10.3.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$.

Si f est dérivable au point a, **alors** f est continue au point a.

Liens avec la monotonie

Théorème 10.4.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur I *si et seulement si* $f' \geq 0$.
- f est décroissante sur I *si et seulement si* $f' \leq 0$.
- f est constante sur I *si et seulement si* $f' = 0$.

Corollaire 10.5.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' > 0$, **alors** f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$, **alors** f est strictement décroissante sur I.

Dérivées d'ordre supérieur

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, sa dérivée est une fonction $f' : I \to \mathbb{R}$. Si f' est aussi dérivable, on dit que f est deux fois dérivable sur I. On note alors $f'' : I \to \mathbb{R}$ la fonction dérivée de la dérivée de f … Plus précisément,

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On convient que f est 0 fois dérivable et que $f^{(0)} = f$. Si $n \in \mathbb{N}^\star$, on dit que f est **n fois dérivable** dans I si*

- *f est $n-1$ fois dérivable dans I*
- *$f^{(n-1)}$ est dérivable dans I.*

En ce cas, on note $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Méthodes

Généralités

Étudier le domaine de dérivabilité d'une fonction : démarche générale

❑ Méthode 10.1.— Comment étudier la dérivabilité d'une fonction
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$.

- Si f est un fonction usuelle, la question ne se pose pas puisqu'on connaît parfaitement les dérivées des fonctions usuelles (cf. **méthode 10.2**) !
- Dans le cas général, pour étudier la dérivabilité de f et déterminer sa fonction dérivée, deux étapes peuvent être nécessaires :

  $\boxed{1}$ La fonction f est la plupart du temps définie à partir de fonctions usuelles, par opérations algébriques ou par composition. La **méthode 10.3** et la **méthode 10.4** permettront de déterminer le domaine et l'expression de f'.

  $\boxed{2}$ Certains points de $\mathcal{D}$ nécessitent parfois une étude particulière. On suivra alors la **méthode 10.5**.

Dérivabilité des fonctions usuelles

❑ Méthode 10.2.— Dérivées des fonctions usuelles
Les domaines de dérivabilité et l'expression des dérivées des fonctions usuelles doivent être parfaitement connus :

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité	paramètre
$x \mapsto C$	$C' = 0$	$x \in \mathbb{R}$	$C \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}^\star$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$x \in \mathbb{R}^\star$	$n \in \mathbb{N}^\star$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \mathbb{R}^{+\star}$	
$x \mapsto e^x$	$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$	
$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$	$(\ln(\lvert x\rvert))' = \frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}^\star$	
$x \mapsto \cos(x)$	$\cos'(x) = -\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$	
$x \mapsto \sin(x)$	$\sin'(x) = \cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$	

Méthodes

■ Étude de la dérivabilité et calcul des dérivées

Dérivabilité globale

❏ Méthode 10.3.— Comment dériver une fonction par opérations algébriques
Lorsque f est construite par opérations algébriques à partir de fonctions dérivables dans I, u et v, on applique la **proposition 10.1**.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$\lambda \cdot u$	$\big(\lambda \cdot u(x)\big)' = \lambda \cdot u'(x)$	pour tout $x \in I$
$u+v$	$\big(u(x)+v(x)\big)' = u'(x)+v'(x)$	pour tout $x \in I$
$u \times v$	$\big(u(x)\,v(x)\big)' = u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$	pour tout $x \in I$
$\dfrac{1}{u}$	$\left(\dfrac{1}{u(x)}\right)' = -\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$	pour tout $x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
$\dfrac{u}{v}$	$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$	pour tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$

❏ Méthode 10.4.— Comment dériver une fonction composée
Pour dériver une fonction composée, on utilise la **proposition 10.2**.
Si u est dérivable dans I et f dérivable dans J et vérifient que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$, alors $f \circ u$ est dérivable dans I et

$$\text{pour tout } x \in I,\ \big(\,f\big(u(x)\big)\,\big)' = f'\big(u(x)\big) \times u'(x).$$

Cette formule de dérivation est notamment utilisée dans les cas suivants ($n \in \mathbb{N}^\star$) :

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
u^n	$\big(u^n(x)\big)' = nu'(x)\,u^{n-1}(x)$	pour tout $x \in I$
$\dfrac{1}{u^n}$	$\left(\dfrac{1}{u^n(x)}\right)' = \dfrac{-nu'(x)}{u^{n+1}(x)}$	pour tout $x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
$\sqrt{u}$	$\big(\sqrt{u(x)}\big)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	pour tout $x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$\exp(u)$	$\big(e^{u(x)}\big)' = u'(x)e^{u(x)}$	pour tout $x \in I$
$\ln(\lvert u \rvert)$	$\big(\ln(\lvert u(x) \rvert)\big)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	pour tout $x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
$\sin(u)$	$\big(\sin(u(x))\big)' = u'(x)\cos\big(u(x)\big)$	pour tout $x \in I$
$\cos(u)$	$\big(\cos(u(x))\big)' = -u'(x)\sin\big(u(x)\big)$	pour tout $x \in I$

Exemple : étudions la dérivabilité de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
On a $f(x) = \sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = 1 + x^2$.

$\boxed{1}$ Notons tout d'abord que $f(x)$ est défini pour tout réel x car $u(x)$ l'est et $u(x) = 1 + x^2 > 0$.

$\boxed{2}$ De plus, u est dérivable dans $\mathbb{R}$ et la fonction $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$, on déduit du **théorème 10.2** que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Mise en œuvre : exercice 10.2, exercice 10.3.

Dérivabilité en un point

❑ Méthode 10.5.— Comment étudier la dérivabilité d'une fonction en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$. Pour savoir si f est dérivable en a et calculer le cas échéant son nombre dérivée $f'(a)$:

- On revient à la définition si $\displaystyle\lim_{\substack{x \neq a \\ x \to a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ ou $\displaystyle\lim_{\substack{t \neq 0 \\ t \to 0}} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
- On peut aussi étudier les dérivées à gauche et à droite au point a : lorsqu'elles existent et sont finies, il s'agit des limites : $f'_g(a) = \displaystyle\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $f'_d(a) = \displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Remarque : en pratique, on utilise très souvent le changement de variable $x = a + t$ car il permet de se ramener à l'étude d'une limite au voisinage de 0.

Exemple : soit $a > 0$. Montrons que la fonction racine carrée $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, est dérivable en $a > 0$ et que $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. Pour cela, on étudie les taux de variations $\dfrac{\sqrt{a+t} - \sqrt{a}}{t}$. Pour ce faire, on multiplie numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée. Il vient :

$$\frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \frac{\sqrt{a+t} - \sqrt{a}}{t} = \frac{(a+t) - a}{t(\sqrt{a+t} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+t} + \sqrt{a}} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Par continuité de la racine carrée en a, il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Mise en œuvre : exercice 10.1.

Le saviez-vous ?

Leibniz s'est trompé ! La célèbre formule de Leibniz $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ n'a pas été de soi car Leibniz lui-même a enseigné pendant un temps que la dérivée d'un produit était égale au produit des dérivées !

Méthodes

Dérivées successives

> ❑ **Méthode 10.6.— Comment déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction f**
>
> $\boxed{1}$ On commence par calculer f', f'', éventuellement $f^{(3)}$.
>
> $\boxed{2}$ On conjecture l'expression de $f^{(n)}$.
>
> $\boxed{3}$ On démontre cette propriété par récurrence.

Exemple : comme quotient de fonctions dérivables une fraction rationnelle est indéfiniment dérivable sur son domaine de définition. Déterminons, les dérivées successives de la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour cela

$\boxed{1}$ On peut calculer les premières dérivées de f. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\begin{array}{rclrcl} f(x) & = & \dfrac{1}{1-x}; & f'(x) & = & -\dfrac{(1-x)'}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}; \\ f''(x) & = & -2\dfrac{(1-x)'}{(1-x)^3} = \dfrac{1 \times 2}{(1-x)^3}; & f^{(3)}(x) & = & -3 \times 2\dfrac{(1-x)'}{(1-x)^4} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{(1-x)^4}. \end{array}$$

$\boxed{2}$ À ce stade on peut conjecturer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et tout entier $n \geq 1$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1 \times \cdots \times n}{(1-x)^{n+1}}.$$

$\boxed{3}$ Montrons cette propriété par récurrence :

- **Initialisation :** lorsque $n = 1$ cette propriété a été montrée.
- **Hérédité :** soit $n \geq 1$ tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{1 \times \cdots \times n}{(1-x)^{n+1}}$. Alors

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (1 \times \cdots \times n) \times (-n-1)\frac{(1-x)'}{(1-x)^{n+2}} = \frac{1 \times \cdots \times n \times (n+1)}{(1-x)^{n+2}}.$$

- **Conclusion :** la conjecture est démontrée par récurrence.

Mise en œuvre : exercice 10.4.

■ Applications de la dérivabilité

Application à l'étude des variations

Il s'agit bien entendu de la principale application de la notion de dérivée. Elle sera étudiée et exploitée au **Chapitre 11** consacré à l'étude des fonctions.

Application à l'étude des limites

D'après le **théorème 10.3** une fonction f, dérivable en a est continue en a de sorte que dans l'expression du taux de variation, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, numérateur et dénominateur tendent tous deux vers 0 quand x tend vers a. Il s'agit donc d'une forme indéterminée, dont on connaît la limite !

❑ Méthode 10.7.— Comment utiliser les taux de variations pour étudier une limite
Lorsqu'on étudie la limite en a d'un quotient de la forme $\dfrac{N(x)}{x-a}$, où $\lim_{x\to a} N(x) = 0$, il y a fort à parier qu'il s'agisse du taux de variation d'une fonction f. En ce cas,

$\boxed{1}$ S'assurer que f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

$\boxed{2}$ Et de conclure : $\dfrac{N(x)}{x-a} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)$.

Mise en œuvre : exercice 10.5.

Application à l'étude des tangentes

❑ Méthode 10.8.— Comment déterminer la droite tangente à une courbe
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

- Si f est dérivable en a, alors la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au voisinage de a.
- Si f est dérivable à gauche en a, alors la droite d'équation $y = f(a) + f'_g(a)(x-a)$ est la demi-tangente à $\mathcal{C}$ au voisinage de a.
- Si f n'est pas dérivable en a mais que $\lim_{\substack{x\neq a \\ x\to a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = a$ pour tangente verticale en a.

Notation : *si cette limite existe et est finie,* $f'_g(a) = \lim_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *est le nombre dérivé à gauche de* f *en* a.

Mise en œuvre : exercice 10.7.

Énoncé des exercices

Dérivabilité

Dérivabilité en un point

Exercice 10.1 : Pour chaque fonction, déterminer si f est dérivable au point a considéré et calculer $f'(a)$ le cas échéant.

1. $f_1(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$, $a = 2$;

2. $f_2(x) = \dfrac{2x}{|x| + 4}$, $a = 0$;

3. $f_3(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$, $a = 2$;

4. $f_4(x) = \sqrt{4x^3 - 4x^2 + x}$, $a = \dfrac{1}{2}$.

Fonctions dérivées

Exercice 10.2 : Dans chaque cas suivant, déterminer le domaine de définition de la fonction, les intervalles sur lesquels elle est dérivable et expliciter f'.

1. $f_1(x) = \sqrt{(1+x)^3}$;

2. $f_2(x) = \left(\dfrac{2x+1}{4-x}\right)^5$;

3. $f_3(x) = (1-x)\sqrt{x}$;

4. $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$.

Exercice 10.3 : Dans chaque cas suivant, déterminer le domaine de définition de la fonction, les intervalles sur lesquels elle est dérivable et expliciter f'.

1. $f_1(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)$;

2. $f_2(x) = \dfrac{e^{\cos(x)}}{e^{\sin(x)}}$;

3. $f_3(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

4. $f_4(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$.

Dérivées successives

Exercice 10.4 :

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$. Montrer que f est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et déterminer les dérivées successives de f.

2. Soit g la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2+x}{x-1}$.

a. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on ait $g(x) = a + \dfrac{b}{x-1}$.

b. En déduire que g est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et déterminer ses dérivées successives.

Applications

Calcul de limites

Exercice 10.5 : On considère la fonction $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$.

1. Étudier la limite de $f_1(x)$ en 1 en utilisant un nombre dérivée.

2. Retrouver ce résultat en utilisant l'expression conjuguée.

Exercice 10.6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.
1. Étudier la limite éventuelle en a de $\dfrac{xf(a) - af(x)}{x - a}$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{ax^3 - a^3x}{x - a}$.
3. En déduire $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\cos(x)}{x - \frac{\pi}{3}}$.

Tangentes

Exercice 10.7 : On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$ et en déduire les équations cartésiennes des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1.

Exercice 10.8 : On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-x^3 - 3x^2 + 1}{3}$.
1. Déterminer les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -3x$.
2. Donner les équations des tangentes en ces points.

Exercice 10.9 : Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 3}$ et $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.
1. Justifier que f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que les courbes représentatives de ces fonctions sont tangentes au point d'abscisse 1.

> **Le saviez-vous ?**
>
> On sait qu'une fonction dérivable est continue et que la réciproque est fausse. Cependant, on a longtemps pensé que les points où une fonction continue n'est pas dérivable étaient peu nombreux. En réalité, il existe des fonctions qui sont continues mais dérivables en aucun point ! Le premier à construire une telle monstruosité est le mathématicien allemand Karl Weierstrass en 1872.

Indications

Ex. 10.1

Pour étudier la dérivabilité de ces fonctions, nous mettons en œuvre la **méthode 10.5**.

Ex. 10.2

Vous mettrez en œuvre la **méthode 10.1**.

Ex. 10.3

Vous utiliserez la **méthode 10.4**.

Ex. 10.4

Conformément à la **méthode 10.6**, *on commencera par calculer les premières dérivées avant de conjecturer l'expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$.*

Corrigé des exercices

Exercice 10.1

Appliquons la **méthode 10.5**.

Pour l'étude du signe d'un trinôme, on pourra appliquer la **méthode 4.5**.

1. La fonction f_1 est définie et continue en tout point x tel que $x^2+3x-10$ est positif. L'étude du signe de ce trinôme permet de conclure que $Df_1 =]-\infty,-5] \cup [2,+\infty[$. Pour étudier la dérivabilité de f_1 au point 2, on pose $x = 2+t$, avec $t \to 0^+$. On a

$$\frac{f_1(2+t)-f_1(2)}{t} = \frac{\sqrt{t(t+7)}}{t} = \frac{\sqrt{t+7}}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty.$$

On peut donc conclure que f_1 n'est pas dérivable en 2.

2. f_2 est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Pour étudier sa dérivabilité en 0, étudions la limite de ses taux de variations :

$$\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \frac{2}{|x|+4} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

3. $f_3(x)$ est défini lorsque $x \in [-2,2]$. Pour étudier la dérivabilité de f_3 au point 2, posons $x = 2+t$, avec $t \to 0^-$. Avec ce changement de variable, il vient :

$$\frac{f_3(2+t)-f_3(2)}{t} = \frac{t+\sqrt{(4+t)(-t)}}{t} = 1 - \frac{\sqrt{4+t}}{\sqrt{|t|}} \xrightarrow[t\to 0^-]{} -\infty$$

En conséquence, f_3 n'est pas dérivable en 2.

À l'aide d'une **identité remarquable**.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire $x^3-4x^2+x = x(4x^2-4x+1) = x(2x-1)^2$. Ainsi, f_4 est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel positif x, on a $f_4(x) = \sqrt{x}|2x-1|$. De plus, pour $x \neq \frac{1}{2}$, on a :

$$\frac{f_4(x)-f_4(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{x}\,|2x-1|}{x-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}\,\frac{|2x-1|}{x-\frac{1}{2}} \xrightarrow[x\to(\frac{1}{2})^\pm]{} \pm\sqrt{2}$$

Ainsi, f_4 est dérivable à gauche et à droite en $a = \frac{1}{2}$, mais ces dérivées ne coïncident pas. Finalement, f_4 n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$. ▲

Exercice 10.2

Nous appliquons ici les techniques de la **méthode 10.1**.

1. $f_1(x)$ est défini si et seulement si $(1+x)^3$ est positif, soit pour $x \in [-1,+\infty[$. De plus, d'après la **méthode 10.4**, f_1 est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour $x > -1$, on a :

$$f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}} \times \left((1+x)^3\right)' = \frac{3}{2}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{3}{2}(1+x)\sqrt{1+x}.$$

On utilise ici la **méthode 10.3**.

2. f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{4\}$, il vient :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= 5\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)^4 \times \left(\frac{2x+1}{4-x}\right)' \\ &= 5\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)^4 \times \frac{2(4-x)+(2x+1)}{(4-x)^2} = 45\,\frac{(2x+1)^4}{(4-x)^6}. \end{aligned}$$

3. $f_3(x) = (1-x)\sqrt{x}$. Comme produit de fonctions usuelles, on sait que f_3 est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. De plus pour tout $x > 0$, on a : $f_3'(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times (1-x)$.

4. f_4 est définie sur $[0,2[\cup]2,+\infty[$ et dérivable sur $]0,2[\cup]2,+\infty[$ comme quotient de telles fonctions. De plus pour tout $x \in]0,2[\cup]2,+\infty[$, on a :

$$f_4'(x) = \frac{\frac{x-2}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x-2)^2} = -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-2)^2}.$$

▲

Exercice 10.3

1. f_1 est une fonction composée de la forme $f_1(x) = \ln\big(u(x)\big)$, nous appliquons la **méthode 10.4**.

$\boxed{1}$ $f_1(x)$ est défini et dérivable si $\dfrac{x+2}{1-x}$ est défini et à valeurs strictement positives. Un tableau de signe permet de préciser ce domaine de définition et de dérivabilité :

Le domaine de définition et de dérivabilité de ln *est* $\mathbb{R}^{+\star}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	3	$+$	
$1-x$		$+$	3	$+$	0	$-$	
$\dfrac{x+2}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Ainsi, f_1 est définie et dérivable sur $]-2,1[$ comme composée.

$\boxed{2}$ Pour un tel réel x, on a :

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \ln'\left(\frac{x+2}{1-x}\right) \times \left(\frac{x+2}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{x+2} \times \frac{(1-x)+(x+2)}{((1-x)^2} \\ &= \frac{3}{(1-x)(2+x)}. \end{aligned}$$

2. f_2 est le quotient de deux fonctions composées de la forme $e^{u(x)}$. Comme sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, il en va de même de $x \mapsto e^{\cos(x)}$ et $x \mapsto e^{\sin(x)}$. Comme de plus cette dernière fonction ne s'annule pas, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{\left(e^{\cos(x)}\right)' \times e^{\sin(x)} - e^{\cos(x)} \times \left(e^{\sin(x)}\right)'}{\left(e^{\sin(x)}\right)^2} \\ &= \frac{-\sin(x)\ e^{\cos(x)} \times e^{\sin(x)} - \cos(x)\ e^{\cos(x)} \times e^{\sin(x)}}{e^{2\sin(x)}} \\ &= -(\cos(x)+\sin(x))\ \frac{e^{\cos(x)}}{e^{\sin(x)}} \end{aligned}$$

3. f_3 est une fonction composée de la forme $f_3(x) = \sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Nous appliquons la **méthode 10.4**.

Corrigé

$\boxed{1}$ $f(x)$ est défini lorsque $u(x)$ est défini et $u(x) \geq 0$ pour pouvoir en prendre la racine carrée. Ainsi, $f_3(x)$ est défini lorsque,$x \neq 1$ et $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$, soit pour $x \in [-1, 1[$.

$\boxed{2}$ De plus, u est dérivable dans $[-1, 1[$ et la fonction $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. Comme u est positive sur $[-1, 1[$ et s'annule uniquement en -1, on en déduit (**théorème 10.2**) que f_3 est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \\ &= \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

4. f_4 est une fonction composée de la forme $f_4(x) = \ln\big(u(x)\big)$, avec $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

$\boxed{1}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$, donc $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

En outre, par croissance stricte de la fonction racine carrée, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$. Par conséquent, pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} - x > 0$ ce qui garantit que $x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ est bien défini et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée.

$\boxed{2}$ Pour tout réel x, on obtient finalement

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \left(\ln(\sqrt{x^2+1} - x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \times \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \times \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \times \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

▲

Exercice 10.4

1. f est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Elle est donc indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. pour calculer ses dérivées successives, on met en œuvre la **méthode 10.6**.

$\boxed{1}$ On calcule d'abord les premières dérivées. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1}; & f'(x) &= -\frac{(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}; \\ f''(x) &= \frac{(-1) \times (-2)}{(x-1)^3}; & f^{(3)}(x) &= \frac{(-1) \times (-2) \times (-3)}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ À ce stade on peut conjecturer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et tout entier $n \geq 1$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1) \times (-2) \times \cdots \times (-n)}{(x-1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n\ n!}{(x-1)^{n+1}},$$

où on a noté $n!$ le nombre, appelé factorielle de n, égal au produit $1 \times 2 \times \cdots \times n$.

$\boxed{3}$ Montrons cette propriété par récurrence :

- **Initialisation :** lorsque $n = 1$ cette propriété a été montrée.
- **Hérédité :** soit $n \geq 1$ tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$. Alors

On utilise ici, la **méthode 10.2** pour calculer la dérivée de $\frac{1}{(x-1)^n}$.

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n \, 1 \times 2 \times \cdots \times n \times (-n-1) \frac{(x-1)'}{(x-1)^{n+2}} \\ &= (-1)^{n+1} \times \cdots \times n \times (n+1) \frac{1}{(x-1)^{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \, (n+1)!}{(x-1)^{n+2}}. \end{aligned}$$

- **Conclusion :** la conjecture est démontrée par récurrence.

2. Posons $g(x) = \dfrac{2+x}{x-1}$.

a. Cherchons a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ on ait $g(x) = a + \dfrac{b}{x-1}$.
Pour cela, on raisonne par équivalences :

$$\frac{2+x}{x-1} = a + \frac{b}{x-1} \iff x+2 = a(x-1)+b \iff x+2 = ax+b-a.$$

Par identification des coefficients, ceci entraîne que $a = 1$ et $b = 3$. Ainsi, $g(x) = 1 + \dfrac{3}{x-1}$.

b. Comme g est une combinaison linéaire de fonctions indéfiniment dérivables, elle l'est aussi. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a

$$g^{(n)}(x) = 3f^{(n)}(x) = 3 \, \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

▲

Exercice 10.5

1. Posons $f(x) = \sqrt{x+3}$. La fonction f est dérivable sur $]-3, +\infty[$ et pour tout $x > -3$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

Par définition de la dérivabilité de f en 1, il vient :

$$f_1(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} f'(1) = \frac{1}{4}.$$

2. On peut aussi retrouver cette limite en multipliant et divisant par l'expression conjuguée.

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{(x+3)-4}{(x-1)\big(\sqrt{x+3}+2\big)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{4}.$$

▲

Exercice 10.6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. On a :

On ajoute et on retranche $xf(x)$ au numérateur.

$$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} = \frac{x\big(f(a)-f(x)\big)+(x-a)f(x)}{x-a} = f(x) - x\,\frac{f(a)-f(x)}{x-a}$$

Corrigé

Finalement, par OPA, il en résulte que $\dfrac{xf(a) - af(x)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} f(a) - af'(a)$.

2. Prenons $f(x) = x^3$. Il en résulte directement que $\lim xa \dfrac{ax^3 - a^3 x}{x - a} = -2a^3$.

3. Prenons $f(x) = \cos(x)$ et $a = \frac{\pi}{3}$. En ce cas, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\cos(x)}{x - \frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{\pi}{\sqrt{3}})$.

▲

Exercice 10.7

1. Comme quotient de telles fonctions –dont le dénominateur ne s'annule pas– f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Comme la fonction racine carrée, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

2. Soit $x > 0$. On a $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2} \times \dfrac{x+3}{(x+1)^2}$. En particulier $f'(0) = 0$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$. D'après la **méthode 10.8**, on en déduit les équations cartésiennes respectives de droites tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1. Elles sont données par :

- $(T_0) : y = 0$;
- $(T_1) : y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x - 1)$. ▲

Exercice 10.8

1. La pente de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est donnée par $f'(a)$. Pour que cette tangente soit parallèle à la droite d'équation $y = -3x$, il faut et il suffit que la tangente admette aussi pour coefficient directeur -3. Résolvons donc l'équation $f'(x) = -3$. Il vient

Si vous n'avez pas observé que 1 était racine évidente, vous utilisez la **méthode 4.4**.

$$\begin{aligned} f'(x) = -3 \quad &\iff \quad \frac{1}{3}(-3x^2 - 3 \times 2x) = -3 \iff -x^2 - 2x = -3 \\ &\iff \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \iff (x-1)(x+3) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, les seuls points pour lesquels la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à la droite d'équation $y = -3x$ sont les points d'abscisses 1 et -3.

2. Pour finir, explicitons les équations cartésiennes de ces tangentes :

- $(T_{-3}) : y = \frac{1}{3} - 3(x + 3)$;
- $(T_1) : y = -1 - 3(x - 1)$. ▲

Exercice 10.9

1. Le trinôme $x^2 - 3x + 3$ a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$. Par conséquent, pour tout réel x, $x^2 - 3x + 3$ est strictement positif. Par composition avec la fonction $u \mapsto 1 + \sqrt{u}$, il en résulte que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \dfrac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 3}}$. La fonction polynomiale g est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x$.

2. Comme $f(1) = g(1) = 2$ et $f'(1) = g'(1) = -\frac{1}{2}$, les courbes représentatives de f et g sont tangentes au point d'abscisse 1. L'équation de leur droite tangente (commune) est

$$y = 2 - \frac{1}{2}(x - 1).$$

▲

Chapitre 11

Étude d'une fonction

Le mathématicien allemand Karl Weierstrass a consacré de nombreux travaux à l'étude des fonctions. Il est connu pour son souci de rigueur dans les démonstrations. Nous utilisons toujours ses définitions pour l'étude de la limite ou de la continuité d'une fonction. Il a peu écrit et c'est par ses étudiants que l'on connaît son œuvre. Nombre d'entre eux apporteront par la suite une contribution importante aux mathématiques.

Karl Weierstrass
1815-1897

OBJECTIFS

■ les incontournables

- Étudier les variations d'une fonction f
  - au moyen de l'étude du signe de f'
  - en dressant le tableau de variations de f
- Interpréter un tableau de variations
  - pour déterminer les extremums d'une fonction
  - pour établir une inégalité
- Étudier les solutions de l'équation $f(x) = 0$
  - en montrant l'existence (et unicité) de solutions
  - calculer le nombre de solutions

■ et plus si affinités

- Obtenir une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$
  - à l'aide d'une dichotomie
  - au moyen d'un balayage

Résumé de cours

Continuité et limites aux bornes

Continuité

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.*

- *f est dite* ***continue en a*** *lorsque* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- *f est dite* ***continue sur I*** *lorsqu'elle l'est en tout point de I.*

Théorème 11.1.— Lien fondamental avec la dérivabilité —. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$.

Si f est dérivable au point a, **alors** f est continue au point a.

Remarque : la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction valeur absolue qui est continue sans pour autant être dérivable en 0.

Limites aux bornes du domaine de définition, asymptotes

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et on s'intéresse aux limites de f aux extrémités (ouvertes) de l'intervalle I.*

- *Si $a \in \mathbb{R}$ une extrémité ouverte réelle de I.*
  - *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, *$f$ est dite* ***prolongeable par continuité*** *au point d'abscisse a.*
  - *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, *on dit que la droite d'équation $x = \ell$ est* ***asymptote verticale*** *en a à $\mathscr{C}_f$, représentative de f.*
- *Si $\pm\infty$ est une extrémité ouverte de I.*
  - *Si* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$, *on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est* ***asymptote horizontale*** *en $\pm\infty$ à $\mathscr{C}_f$.*

Variations

Fonction monotone

Définition : *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite*

- ***croissante*** *sur I lorsque pour tous $x_1, x_2 \in I$, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$*
- ***décroissante*** *sur I lorsque pour tous $x_1, x_2 \in I$, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$*
- ***strictement croissante*** *sur I lorsque pour tous $x_1, x_2 \in I$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$*
- ***strictement décroissante*** *sur I lorsque pour tous $x_1, x_2 \in I$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.*

Une fonction est dite ***monotone*** *sur I si elle est croissante ou décroissante sur I, elle est dite* ***strictement monotone*** *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.*

Lien avec la dérivée

Théorème 11.2.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle non trivial[4] I.

- f est croissante sur I *si et seulement si* $f' \geq 0$.
- f est décroissante sur I *si et seulement si* $f' \leq 0$.
- f est constante sur I *si et seulement si* $f' = 0$.

Corollaire 11.3.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle non trivial I.

- **Si** $f' > 0$, **alors** f est strictement croissante sur I.
- **Si** $f' < 0$, **alors** f est strictement décroissante sur I.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 11.4.— Soit a et b des réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Alors f prend toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. Plus précisément,

Pour tout réel k, compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un élément $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Corollaire 11.5.— Soit a et b des réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Alors

Pour tout réel k, compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un élément $c \in [a, b]$, unique, tel que $f(c) = k$.

Extremums d'une fonction

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que*

- *f possède un **maximum** en $a \in I$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$.*
- *f possède un **minimum** en $a \in I$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$*

Proposition 11.6.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$.

- **Si** f est croissante sur $I \cap]-\infty, a[$ et décroissante sur $I \cap]a, +\infty[$, **alors** f a un maximum en a.
- **Si** f est décroissante sur $I \cap]-\infty, a[$ et croissante sur $I \cap]a, +\infty[$, **alors** f a un minimum en a.

4. *i.e.* contenant au moins deux points.

Méthodes

Dresser le tableau de variations d'une fonction

Construire le tableau de variations

L'étude d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ consiste essentiellement à en dresser le tableau des variations.

❑ Méthode 11.1.— Comment construire le tableau de variations de f

Pour dresser le tableau de variations de f :

$\boxed{1}$ On vérifie la dérivabilité de f et on calcule l'expression de la dérivée $f'(x)$, pour $x \in I$.

$\boxed{2}$ On résout l'inéquation $f'(x) > 0$ pour trouver le signe de f' suivant les valeurs de x.

$\boxed{3}$ On complète le tableau ci-dessous en respectant les consignes suivantes :

$\nearrow$ indique que sur l'intervalle considéré la fonction est strictement croissante et continue ;

$\searrow$ indique que la fonction est strictement décroissante et continue sur cet intervalle.

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

$\boxed{4}$ Pour conclure, on peut déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.

Exemple : étudions les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$.

$\boxed{1}$ f est dérivable comme polynôme et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 6x^2 + 6x$.

$\boxed{2}$ Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0 \iff 6x(x+1) > 0 \iff x < -1$ ou $x > 0$.

$\boxed{3}$ Le tableau de variations résume ces informations :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{4}$ Pour le calcul des limites, on applique la **méthode 9.6** au voisinage de $\pm\infty$:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$.

Mise en œuvre : exercice 11.1.

Utiliser le tableau de variations

Comme nous le verrons dans les prochains paragraphes, l'analyse du tableau de variations d'une fonction permettra :

- de montrer l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = k$;
- de compter les solutions de l'équation $f(x) = k$;
- de déterminer le signe de f ;
- d'établir des inégalités ;
- de déterminer l'existence d'un extremum de la fonction f.

■ Équations $f(x) = k$

Existence d'une solution

❑ Méthode 11.2.— Comment montrer l'existence d'une solution
Pour démontrer que l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$, il suffit d'appliquer le **théorème des valeurs intermédiaires** (**théorème 11.4**).
$\boxed{1}$ On montre que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (au besoin on peut s'aider du tableau de variations pour cela).
$\boxed{2}$ On vérifie que f est continue sur $[a, b]$.
$\boxed{3}$ On peut conclure à l'aide du **TVI** à l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = k$, comprise entre a et b.

Remarque : lorsque $k = 0$, pour démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution, il suffit de vérifier que f change de signe, i.e. $f(a) \times f(b) \leq 0$.

Existence et unicité de la solution

❑ Méthode 11.3.— Comment montrer existence et unicité d'une solution
Pour démontrer que l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a, b]$, il suffit d'appliquer le corollaire du **théorème des valeurs intermédiaires** (**corollaire 11.5**) pour les fonctions strictement monotones.
$\boxed{1}$ On montre que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$;
$\boxed{2}$ On vérifie que f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$;
$\boxed{3}$ Grâce au corollaire du **TVI** pour les fonctions strictement monotones, on conclut qu'il existe une unique solution de l'équation $f(x) = k$, comprise entre a et b.
L'utilisation du tableau de variations facilite la mise en œuvre de ce raisonnement.

Exemple : soit $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2}{5}x - \dfrac{4}{5}\cos(x)$. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, \pi]$.
$\boxed{1}$ $g(0) = -\frac{4}{5} < 0$ et $g(\pi) = \frac{2\pi+4}{5} > 0$. 0 est une valeur intermédiaire entre $g(0)$ et $g(\pi)$.
$\boxed{2}$ g est dérivable (donc continue) sur $[0, \pi]$ et sa fonction dérivée $x \mapsto \dfrac{2}{5}(1+2\sin(x))$ est strictement positive. Par conséquent, g est strictement croissante. Le tableau de variations suivant résume ces propriétés :

x	0		α		π
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\frac{4}{5}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2\pi+4}{5}$

$\boxed{3}$ Grâce au corollaire du **TVI** pour les fonctions strictement monotones, on peut conclure qu'il existe une unique solution de l'équation $g(x) = 0$, comprise entre 0 et π.

Compter et localiser les solutions

> **❑ Méthode 11.4.— Comment compter et localiser les solutions**
> On utilise le tableau de variations de f afin de se ramener à des intervalles sur lesquels f est strictement monotone.
>
> $\boxed{1}$ Pour chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ sur lequel f est continue et strictement monotone, on détermine si k est une valeur intermédiaire $f(a_i)$ et $f(a_{i+1})$.
>
> - Si tel est le cas, l'équation $f(x) = k$ admet exactement 1 solution dans cet intervalle.
> - Si tel n'est pas le cas, $f(x) = k$ admet exactement 0 solution dans cet intervalle.
>
> $\boxed{2}$ En additionnant le nombre de solutions obtenues sur les différents intervalles, on obtient le nombre total de solutions !

Exemple : soit $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose connu le tableau de variations de f. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-1, 4]$ et que $\alpha \in [1, 4]$.

x	-1		0		1		4
$f(x)$	-5	↗	-1	↘	-2	↗	3

- Sur l'intervalle $[1, 4]$: 0 est une valeur intermédiaire entre $f(-1) = -2$ et $f(4) = 3$. De plus f est strictement croissante et continue. Donc, d'après le corollaire du **TVI** pour les fonctions strictement monotones, il existe $\alpha \in [-1, 4]$, unique, tel que $f(\alpha) = 0$.
- Sur l'intervalle $[-1, 0]$: f est strictement croissante de -5 à -1. Comme 0 n'est pas une valeur intermédiaire entre -5 et -1, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[-1, 0]$.
- Sur l'intervalle $[0, 1]$, f est strictement décroissante -1 à -2. 0 n'étant pas une valeur intermédiaire entre -1 et -2, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[0, 1]$.

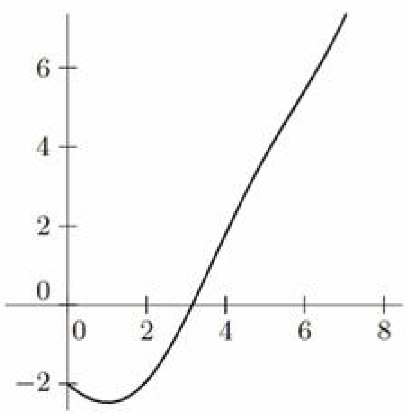
Finalement, on a bien établi que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-1, 4]$ et que cette solution appartient à $[1, 4]$. On peut compléter le tableau de variations de f.

x	-1		0		1		α		4
$f(x)$	-5	↗	-1	↘	-2	↗	0	↗	3

Mise en œuvre : exercice 11.3.

Obtenir une valeur approchée de la solution

Courbe $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}\ \sin(x) - \frac{3}{5}$



Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$. On suppose que $f(a) \times f(b) < 0$. On s'intéresse à l'équation

$$f(x) = 0.$$

D'après le **corollaire 11.5**, elle admet une unique solution c comprise entre a et b. Par conséquent $m = \frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de c à $\frac{b-a}{2}$ près.
Pour obtenir une approximation de c à la précision voulue, par exemple 0.01, deux méthodes numériques sont classiques.

■ **La méthode par balayage** consiste à calculer d'autres valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$.

■ **La méthode par dichotomie** consiste à diviser le segment initial $[a,b]$ en deux (par le milieu m) et de choisir lequel des deux sous-segments $[a,m]$ ou $[b,m]$ contient la solution c. Puis on répète ce procédé jusqu'à obtenir la précision voulue.

Mise en œuvre : exercice 11.4, exercice 11.5.

Exemple : considérons la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}\sin(x) - \frac{3}{5}$ dont la courbe est représentée page précédente. On peut vérifier que f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

■ **La méthode par balayage :**

$\boxed{1}$ On a tout d'abord $f(2) \approx -1.927$, $f(3) \approx -0.313$ et $f(4) \approx 1.805$. Par conséquent $c \in [3,4]$.

$\boxed{2}$ On subdivise le segment $[3,4]$ en 10.

$$\begin{array}{rcr} f(3.0) & \approx & -0.313 \\ f(3.1) & \approx & -0.111 \\ f(3.2) & \approx & 0.094 \\ & \vdots & \\ f(4.0) & \approx & 1.805 \end{array}$$

On calcule les images successives de ces réels par f. Comme f change de signe entre 3.1 et 3.2, on peut appliquer le **corollaire** ?? entre 3.1 et 3.2. Il s'ensuit que c est nécessairement compris entre 3.1 et 3.2.

$\boxed{3}$ On subdivise le segment $[3.1, 3.2]$ en 10.

$$\begin{array}{rcr} f(3.10) & \approx & -0.111 \\ & \vdots & \\ f(3.15) & \approx & -0.009 \\ f(3.16) & \approx & 0.011 \\ & \vdots & \\ f(3.20) & \approx & 0.094 \end{array}$$

Le changement de signe s'opère entre 3.15 et 3.16. Il s'ensuit que c est nécessairement compris entre 3.15 et 3.16. On peut donc en conclure que 3.15 est une valeur approchée (par défaut) de c à 10^{-2} près.

■ **La méthode par dichotomie :**

On sait que $c \in [3,4]$, par conséquent 3.5 est une valeur approchée de c à $\frac{1}{2}$ près. Comme $f(3.5) \approx 0.730$, on a $f(3) < 0 < f(3.5)$. On en déduit que $c \in [3, 3.5]$ de sorte que 3.25, milieu du segment $[3, 3.5]$ est une valeur approchée de c à $\frac{1}{4}$ près. Ainsi de suite, on complète le tableau suivant :

	a	$m = \dfrac{a+b}{2}$	b
Initialisation précision 2^{-1}	3 $f(3) < 0$	3.5 $f(3.5) > 0$	4 $f(4) > 0$
Étape 1 précision 2^{-2}	3 $f(3) < 0$	3.25 $f(3.25) > 0$	3.5 $f(3.5) > 0$
Étape 2 précision 2^{-3}	3 $f(3) < 0$	3.125 $f(3.125) < 00$	3.25 $f(3.25) > 0$
Étape 3 précision 2^{-4}	3.125 $f(3.125) < 0$	3.1875 $f(3.1875) > 0$	3.5 $f(3.25) > 0$
Étape 4 précision 2^{-5}	3.125 $f(3.125) < 0$	3.15625 $f(3.15625) > 0$	3.1875 $f(3.1875) > 0$
Étape 5 précision 2^{-6}	3.125 $f(3) < 0$	3.140625 $f(3.140625) < 0$	3.15625 $f(3.15625) > 0$
Étape 6 précision 2^{-7}	3.140625 $f(3.140625) < 0$	3.1484375	3.15625 $f(3.15625) > 0$

Finalement, 3.1484375 est une valeur approchée de c à $2^{-7} = \frac{1}{128}$ près.

■ Étudier le signe d'une fonction, établir des inégalités

Obtenir des inégalités

❑ Méthode 11.5.— Comment déterminer le signe d'une fonction
L'énoncé conduit parfois à étudier une fonction simplement dans le but d'établir son signe. Le tableau des variations de f permet de conclure.

x	a	
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	0	$\searrow$

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

x		a
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	0

Ainsi, dans les trois situations élémentaires ci-contre, on peut conclure que f est négative sur l'intervalle considéré.

Trois situations élémentaires analogues permettent de conclure que la fonction f est positive sur l'intervalle considéré.

La méthode précédente se généralise et permet d'établir des inégalités ou des encadrements entre fonctions. En effet pour démontrer que pour tout $x \in I, f(x) \leq g(x)$, il suffira étudier le signe de la différence $h(x) = f(x) - g(x)$.

Exemple : montrons l'encadrement, valide pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x - \dfrac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.

Pour ce faire, posons $h(x) = \ln(1+x) - x$ et $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$. Il s'agit d'établir que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) \leq 0$ et $g(x) \geq 0$.

- h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geq 0$, on a $h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{x+1}$. Ainsi h' est négative et la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, la relation $x \geq 0$ entraîne $h(x) \leq h(0)$. En clair, h est négative sur $\mathbb{R}^+$.

- g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = \dfrac{-x}{x+1} - x = \dfrac{x^2}{1+x}$. Comme g' est positive, g est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $g(0) = 0$, il s'ensuit que g est positive sur $\mathbb{R}^+$.

Les tableaux suivants résument l'étude des variations de g et h :

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Mise en œuvre : exercice 11.7, exercice 11.8.

Rechercher les extremums

Il s'agit simplement d'appliquer la **proposition 11.6**. Là encore, l'utilisation du tableau de variations de f facilite la lecture et l'analyse :

❑ Méthode 11.6.— Comment déterminer les valeurs extrêmes de f

Il est aisé de conclure dans les trois situations élémentaires ci-dessous que f admet $f(a)$ comme valeur maximale.

x	a	
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

x		a
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$

Trois situations élémentaires analogues permettent de conclure que la fonction f admet $f(a)$ comme valeur minimale.

Mise en œuvre : exercice 11.6.

Le saviez-vous ?

Une fonction f continue sur un intervalle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tous points a et b, f prend toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$. En fait, la dérivée d'une fonction, même si elle n'est pas continue, vérifie elle aussi cette propriété, c'est le théorème de Darboux, du nom d'un mathématicien français qui a consacré de nombreux travaux aux fonctions non continues.

Énoncé des exercices

Étude d'une fonction

Exercice 11.1 : Fonction réciproque —.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+4}$.

1. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

2. Soit y un réel strictement positif quelconque.

a. Montrer que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution réelle que l'on notera $g(y)$.

b. Déterminer l'expression de $g(y)$ en fonction de y.

c. On appelle $g : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ la fonction qui à tout réel strictement positif y associe $g(y)$. Calculer pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x)$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^{+\star}$, $f \circ g(y))$.

Exercice 11.2 : Tracé d'une courbe —.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-2}{(x^2+3x-10)^3}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. En déduire les équations des asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.

4. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses asymptotes.

5. Dresser le tableau de variations de f.

6. Dans un même repère tracer $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Résolution d'une équation

Exercice 11.3 : À partir du tableau de variations —.

On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné par

x	-5		-2		0		3		6
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-1

1. Donner le nombre exact de solutions des équations suivantes :

a. $f(x) = 0$ **b.** $f(x) = 1,1$ **c.** $f(x) = -0,5$

2. Discuter, suivant les valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 11.4 : Valeur approchée de la solution —.

Soit $f : [-1,3] \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in [-1,3]$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$.

1. Justifier que f est dérivable et étudier ses variations sur $[-1,3]$.

2. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, α.

3. À l'aide de la **méthode de balayage**, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 11.5 : Valeur approchée de la solution —.

On considère la fonction $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x^3 + 4x^2$.

1. Étudier les variations de f.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions, que l'on nommera α et β, avec $\alpha < \beta$.
3. La fonction h est définie par $h(x) = f(x) - 2$. Que produit l'algorithme suivant ?

```
Donnees
a, b des réels
Debut
a <— 8/3, b <— 4
Tant que b–a >10**(−6)
     Faire
     m = (a+b)/2
     Si h(a) * h(m) > 0 Alors a <— m
                         Sinon b <— m
     Fin Si
     Fin Faire
Afficher a,b
```

Comment s'appelle cette méthode ?
4. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

■ Établir des inégalités

Exercice 11.6 : Obtenir une inégalité —.

Soit f la fonction définie sur $I =]3, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+7}{x-3}$.
1. Dresser le tableau de variations de f sur I.
2. Quel est le minimum de f sur I ? En quel point est-il atteint ?
3. En déduire que pour tout $x > 3$, $f(x) \geq 14$.

Exercice 11.7 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^4}{4} - x + \dfrac{3}{4}$. Dresser le tableau de variations de g et démontrer que $g(x) \geq 0$ pour tout réel x.

Exercice 11.8 : Encadrements de la fonction sin —.

Soit $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) = 1$ et pour tout $x \neq 0$, $\quad f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.
On note $I = [0, \frac{\pi}{2}]$, $J =]0, \frac{\pi}{2}[$ et g, h respectivement les fonctions définies sur I par

$$g(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \quad \text{et} \quad h(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}.$$

1. Calculer la dérivée troisième de g et en déduire les variations puis le signe de g sur I.
2. Déduire de l'étude de h, le signe de $h(x)$, pour $x \in I$.
3. Déduire des deux questions précédentes un encadrement de $\sin(x)$ par deux fonctions polynômes pour tout réel $x \in I$.
4. Régularité de f
  a. Montrer que f est dérivable en 0.
  b. Vérifier que f est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
  c. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur I.
5. Tableau de variations de f

a. Montrer que pour tout réel $x \in J$, $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2}\, \varphi(x)$, où $\varphi(x) = x - \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

b. Étudier la fonction φ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition et construire la représentation graphique de f.

6. Montrer que pour tout réel $x \in I$, $\dfrac{2}{\pi}\, x \leq \sin(x) \leq x$.

> **Cherchez l'erreur**
>
> La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ a sa dérivée strictement négative. Elle devrait être strictement décroissante. Ce n'est pas le cas puisque $f(-1) < f(1)$.

Indications

Ex. 11.1

1. *On applique la* **méthode 11.1**.

2. a. *On utilise la* **méthode 11.3**.

Ex. 11.2

Il s'agit essentiellement de mettre en œuvre la **méthode 11.1**.

Ex. 11.3

2. *On appliquera la* **méthode 11.4**.

Ex. 11.4

2. *On met en œuvre la* **méthode 11.3**.

Ex. 11.6

Il s'agit de la **méthode 11.6**.

Ex. 11.8

On utilise la **méthode 11.5**.

Corrigé des exercices

Exercice 11.1

1. On met en œuvre la **méthode 11.1**.

$\boxed{1}$ La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel x, on a $x^2+4>0$. Ainsi $x \mapsto \sqrt{x^2+4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 1 + \frac{(x^2+4)'}{2\sqrt{x^2+4}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}$$

$\boxed{2}$ Par stricte croissance de la fonction racine carrée, on a $\sqrt{x^2+4} > \sqrt{x^2} = |x|$. En conséquence, on a $x+\sqrt{x^2+4} > 0$ et donc $f'(x) > 0$.

$\boxed{3}$ On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$	1	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Pour le calcul des limites aux bornes de l'intervalle, on a

- Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Au voisinage de $-\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée «$\infty - \infty$».

Pour lever la forme indéterminée, on met en œuvre la **méthode 9.5**.

En multipliant et divisant par la quantité conjuguée, il vient :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+4} = \frac{(x^2+4)-x^2}{\sqrt{x^2+4}-x} = \frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0.$$

2. Soit $y>0$ fixé.

a. Comme $y \in]0,+\infty[$, le **corollaire 11.5** montre qu'il existe un unique élément, $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Dans la suite, on notera $g(y)$ l'unique antécédent de y par la fonction f.

b. Pour déterminer l'expression de $g(y)$, résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
y = f(x) &\iff y = x + \sqrt{x^2+4} = y - x = \sqrt{x^2+4} \\
&\iff \begin{cases} y \geq x \\ y^2 - 2xy + x^2 = x^2+4 \end{cases} \iff \begin{cases} y \geq x \\ y^2 - 2xy = 4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y \geq x \\ x = \dfrac{y^2-4}{2y} \end{cases} \iff x = \frac{y^2-4}{2y}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $y>0$, on a $g(y) = \dfrac{y^2-4}{2y}$.

c. La fonction $g : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ ainsi définie, qui à tout réel strictement positif y associe son unique antécédent par la fonction f est appelée la fonction réciproque de f. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}^{+\star}$,

$$\begin{aligned}
g \circ f(x) &= \frac{f(x)^2-4}{2f(x)} = \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2+4} + (x^2+4) - 4}{2\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)} = \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2+4}}{2\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)} \\
&= \frac{2x\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)}{2\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)} = x.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f\circ g(y) = g(y)+\sqrt{g(y)^2+4} &= \frac{y^2-4}{2y}+\sqrt{\left(\frac{y^2-4}{2y}\right)^2+4}\\
&= \frac{y^2-4}{2y}+\sqrt{\frac{y^4-8y^2+16}{4y^2}+4} = \frac{y^2-4}{2y}+\sqrt{\frac{y^4+8y^2+16}{4y^2}}\\
&= \frac{y^2-4}{2y}+\sqrt{\left(\frac{y^2+4}{2y}\right)^2} = \frac{y^2-4+y^2+4}{2y} = \frac{2y^2}{2y} = y.
\end{aligned}
$$

Exercice 11.2

1. f est un quotient : elle est définie si le numérateur est défini et si le dénominateur est défini est non nul. Or, le trinôme $x^2+3x-10$ admet deux racines réelles distinctes -5 et 2. Par conséquent, f est définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty,-5[\cup]-5,2[\cup]2,+\infty[$.

On utilise la **méthode 4.4** *pour déterminer les racines réelles d'un trinôme.*

2. Pour $x\in\mathcal{D}_f$, on peut écrire $f(x)=\dfrac{-2}{(x+5)^3(x-2)^3}$. L'étude des limites de f aux bornes de son domaine de définition se fera à l'aide de la **méthode 9.1**. En prenant garde que $\lim\limits_{x\to-5^\pm}(x+5)^3=0^\pm$ et $\lim\limits_{x\to2^\pm}(x-2)^3=0^\pm$, il vient

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^-$
- $\lim\limits_{x\to-5^+} f(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to-5^-} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^-$

3. Les droites verticales d'équations cartésiennes $x=-5$ et $x=2$ sont asymptotes verticales à la courbe $\mathcal{C}_f$, la doite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$.

4. Au voisinage de $\pm\infty$, le trinôme $x^2+3x-10$ est positif et par conséquent $f(x)$ est strictement négatif. Ainsi, le graphe de f est en-dessous de son asymptote.

proposition 4.6

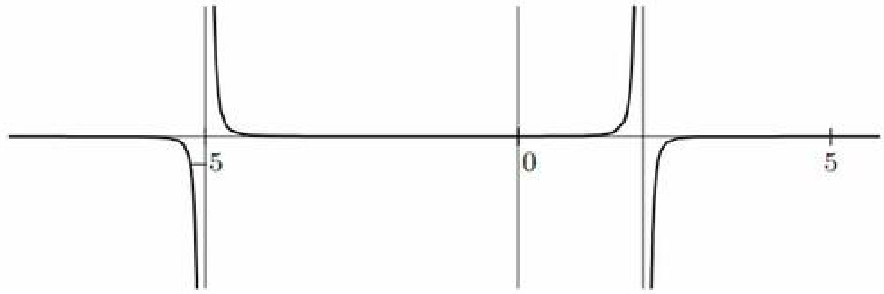
5. f est dérivable sur son domaine de définition car numérateur et dénominateur le sont. De plus, pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, on a :

$$f'(x)=\frac{(-2)(-3)(2x+3)}{(x^2+3x-10)^4}.$$

Par suite, $f'(x)\geq 0 \iff 2x+3\geq 0 \iff x\geq -\frac{3}{2}$. Le tableau suivant résume les variations de f.

x	$-\infty$		-5		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$x^2+3x-10$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	0^-	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f(\frac{-3}{2})$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0^-

6. À l'aide du tableau de variations de f, nous pouvons tracer la courbe de f et ses asymptotes.



▲

Exercice 11.3

1. On applique le corollaire du TVI pour les fonctions strictement monotones sur chaque sous-intervalle de $[-5, 6]$ sur lequel la fonction f est continue et strictement monotone.

corollaire 11.5

a. Nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$

- Sur l'intervalle $[-5, -2]$, 0 n'est pas une valeur intermédiaire entre $\sqrt{2} = f(-5)$ et $1 = f(-2)$.
- Sur $[-2, 0]$, 0 n'est pas une valeur intermédiaire entre 1 et 2.
- Sur $[0, 3]$, 0 est une valeur intermédiaire entre 2 et -4.
- Sur $[3, 6]$, 0 n'est pas une valeur intermédiaire entre -4 et -1.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-5, 6]$. Elle est comprise entre 0 et 3.

b. Nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1,1$

- Sur $[-5, -2]$, $1,1$ n'est pas une valeur intermédiaire entre $\sqrt{2}$ et 1.
- Sur $[-2, 0]$, $1,1$ est une valeur intermédiaire entre 1 et 2.
- Sur $[0, 3]$, $1,1$ est une valeur intermédiaire entre 2 et -4.
- Sur $[3, 6]$, $1,1$ n'est pas une valeur intermédiaire entre -4 et -1.

Le **corollaire 11.5** permet donc de conclure que l'équation $f(x) = 1,1$ admet exactement deux solutions, la première est comprise (strictement) entre -2 et 0, la deuxième entre 0 et 3.

c. La même méthode, montre que l'équation $f(x) = -0,5$ admet une unique solution dans $[-5, 6]$. Elle est comprise (strictement) entre 0 et 3.

2. Soit $k \in \mathbb{R}$. Le tableau suivant indique le nombre de solutions dans $[-5, 6]$ de l'équation $f(x) = k$.

k	$\cdots -4 \cdots -1 \cdots 1 \cdots \sqrt{2} \cdots 2 \cdots$
Nombre de solutions	0 1 2 2 1 2 3 3 2 1 0

▲

Exercice 11.4

1. f est dérivable sur $[-1, 3]$ comme polynôme et pour tout réel $x \in [-1, 3]$, on a : $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$. Par conséquent

$$f'(x) \geq 0 \iff x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1$$

Le tableau suivant résume les variations de f.

x	-1		α		0		1		3
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	31

Comme indiqué dans la **méthode 11.3**, *on peut placer dnas le tableau de variations la valeur α, solution de l'équation $f(x) = 0$.*

2. D'après le **corollaire 11.5**, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1, 0]$ et aucune solution sur $[0, 1]$ et $[1, 3]$. Ainsi, il existe une unique solution α de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-1, 3]$. De plus, α est comprise entre -1 et 0.

3. On sait queα est comprise entre -1 et 0. Pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-3} près, nous mettons en œuvre la méthode par balayage.

$\boxed{1}$ On subdivise le segment $[-1, 0]$ en 10.

$$\begin{array}{rcl} f(-1.0) & = & -1.000 \\ f(-0.9) & \approx & +0.112 \\ & \vdots & \\ f(-0.0) & = & +4.00 \end{array}$$

On calcule les images successives de ces réels par f. Comme f change de signe entre -1.0 et -0.9, α est compris entre -1.0 et -0.9.

$\boxed{2}$ On subdivise le segment $[-1.0, -0.9]$ en 10.

$$\begin{array}{rcl} f(-1.00) & = & -1.00 \\ & \vdots & \\ f(-0.92) & \approx & -0.096 \\ f(-0.91) & \approx & +0.008 \end{array}$$

Le changement de signe s'opère entre $f(-0.92)$ et $f(-0.91)$. α est donc compris entre -0.92 et -0.91.

$\boxed{3}$ On subdivise le segment $[-0.92, -0.91]$ en 10.

$$\begin{array}{rcl} f(-0.920) & \approx & -0.096 \\ & \vdots & \\ f(-0.911) & \approx & -0.001 \\ f(-0.910) & \approx & +0.008 \end{array}$$

Le changement de signe s'opère cette fois entre $f(-0.911)$ et $f(-0.910)$. Par conséquent, α est compris entre -0.911 et -0.910.

On peut donc finalement conclure que $\alpha \approx -0.911$ à 10^{-3} près. ▲

Exercice 11.5

1. La fonction f est dérivable comme polynôme et pour tout $x \in [0, 4]$, $f'(x) = -3x^2 + 8x = x(3 - 8x)$. L'étude du signe de f' est particulièrement simple. Nous en déduisons le tableau de variations suivant :

On met en œuvre la **méthode 11.1**.

x	0		α		$\frac{8}{3}$		β		4
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$47,4$	$\searrow$	2	$\searrow$	0

Anticipant sur la question suivante, nous avons placé dans ce tableau les valeurs α et β, solutions de l'équation $f(x) = 2$.

2. Sur l'intervalle $[0, \frac{8}{3}]$ (resp. $[\frac{8}{3}, 4]$) la fonction f est continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante). Comme 2 est une valeur intermédiaire sur cet intervalle, il découle du corollaire du TVI pour les fonctions

strictement monotones (**corollaire 11.5**) que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0, \frac{8}{3}]$ (resp. $[\frac{8}{3}, 4]$).
Finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions α et β appartenant respectivement à $[0, \frac{8}{3}]$ et $[\frac{8}{3}, 4]$.

3. On reconnaît l'algorithme de dichotomie, qui permet de rechercher une valeur approchée de β à 10^{-6} près.

4. Mettons en œuvre l'algorithme par dichotomie pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

À chaque étape, on calcule $h(m)$, où $m = \dfrac{a+b}{2}$.

• Si $h(m) < 0$, à la prochaine étape, on remplace a par m et on conserve b ;

• Sinon, à la prochaine étape, on conserve a et on remplace b par m.

	a	$m = \dfrac{a+b}{2}$	b
Initialisation	0	1.33	2.66
Étape 1	0	0.66	1.33
Étape 2	0.66	1.00	1.33
Étape 3	0.66	0.83	1.00
Étape 4	0.66	0.75	0.83
Étape 5	0.75	0.79	0.83
Étape 6	0.75	0.77	0.79
Étape 7	0.77	0.78	0.79

Finalement, une valeur approchée de α à 10^{-2} près est $\alpha \approx 0.78$. ▲

Exercice 11.6

méthode 11.1

1. f est dérivable comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas et pour tout $x > 3$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-3) - (x^2+7)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 6x - 7}{(x-3)^2} = \frac{(x+1)(x-7)}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

x	3		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	14	$\nearrow$	$+\infty$

Sous cette forme factorisée, l'étude du signe de f' est aisée. On obtient le tableau ci-dessus.

2. La **méthode 11.6** permet alors de conclure que f admet un minimum sur $]3, +\infty$, atteint en $x = 7$ et qui vaut $f(7) = 14$.

3. D'après la question précédente, 14 est le minimum de f, c'est-à-dire $\forall x \in]3, +\infty[, f(x) \geq 14$. ▲

Exercice 11.7

On met en œuvre la **méthode 11.1.**

$\boxed{1}$ La fonction polynomiale g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = x^3 - 1$.

On peut aussi utiliser la **méthode 4.3** *pour factoriser $x^3 - 1$.*

$\boxed{2}$ Pour l'étude du signe de la dérivée, on remarque que d'après l'**identité géométrique** (**proposition 1.6**) $g'(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. La **proposition 4.6** montre que pour tout réel x, x^2+x+1 est strictement positif. Ainsi, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$.

$\boxed{3}$ Le tableau suivant résume les variations de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Au voisinage de $+\infty$, il y a une forme indéterminée. Pour la lever, on factorise par le terme prédominant (cf. **méthode 9.5**). On obtient :

$$g(x) = x^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x} + \frac{3}{4x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Finalement, g admet 0 comme minimum. Autrement dit, pour tout réel x, $g(x) \geq 0$. ▲

Exercice 11.8

1. La fonction g admet des dérivées de tous ordres comme somme de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \\ g''(x) &= -\sin(x) + x \\ g^{(3)}(x) &= 1 - \cos(x) \end{aligned}$$

Comme pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x)$ est compris entre 0 et π. Il en résulte successivement :

- $g^{(3)}$ est positive sur I, donc g'' est croissante d'après le **théorème 11.2**.
- Comme $g''(0) = 0$ et que g'' est croissante, il s'ensuit que g'' est positive et par conséquent que g' est donc croissante.
- Ainsi g' est croissante sur I et que $g'(0) = 0$, il en résulte que g' est positive et finalement que g est croissante sur I.
- Finalement, comme g est croissante sur I et que $g(0) = 0$, on en déduit que g est positive sur cet intervalle.

2. Étudions la fonction h : cette fonction est deux fois dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a :

h est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ h''(x) &= -\sin(x) + x - \frac{x^3}{6} = -g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

D'après la question précédente, nous savons que g est positive sur I. Par conséquent, h'' est négative sur I, ce qui entraîne, d'après le **théorème 11.2** que la fonction h' doit être décroissante Comme $h'(0) = 0$, on en tire alors que h' est négative sur I. À son tour, cette inégalité entraîne que h est décroissante sur I. Sachant que $h(0) = 0$, il en résulte que h est de signe négatif sur l'intervalle I.

Car la dérivée de h' est négative.

3. D'après les deux premières questions, nous avons pour tout $x \in I$, que $h(x) \leq 0 \leq g(x)$. Autrement dit, nous avons établi l'encadrement :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

4. **a.** Pour étudier la dérivabilité de f en 0, nous appliquons la **méthode 10.5**. Lorsque $x > 0$, on peut diviser les 3 membres de l'encadrement suivant

Corrigé

par x sans changer le sens des inégalités.

$$-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x) - x \leq -\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \iff -\frac{x^2}{6} \leq f(x) - 1 \leq -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$$
$$\iff -\frac{x}{6} \leq \frac{f(x)-1}{x} \leq -\frac{x}{6} + \frac{x^3}{120}$$

théorème 9.2

On peut alors conclure à l'aide du théorème d'existence de limite par encadrement que
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = 0.$$

Attention au sens des inégalités lorsqu'on divise par un réel x strictement négatif !

En suivant la même méthode, on montre que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-1}{x} = 0$. Ainsi f admet des dérivées à droite et à gauche en 0 qui coïncident, f est donc dérivable en 0 de dérivée nulle.

b. D'après le **théorème 11.1**, f est continue en 0. Sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, f est bien continue en tout point de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

c. Appliquons la **méthode 8.3** pour montrer que f est paire. Tout d'abord, l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est bien symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$, $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin(x)}{x} = f(x)$. Nous pouvons conclure que f est paire. Par conséquent, on peut restreindre l'étude de f à I et compléter ensuite par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

5. a. Sur J, f est dérivable comme quotient de telles fonctions et pour tout $x \in J$, on a :
$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{\cos(x)}{x^2} \times \left(x - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\cos(x)}{x^2} \times \varphi(x).$$

b. Sur J, la fonction φ est elle-même dérivable comme somme et pour tout $x \in J$, on a :
$$\varphi'(x) = 1 - \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)-\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = -\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \leq 0$$

On en déduit que φ est décroissante sur J. Comme $\varphi(0) = 0$, il s'ensuit que φ est négative sur J.

c. D'après la question **5.a**, f' est du signe contraire de φ sur l'intervalle J, soit négative. En complétant par parité, nous obtenons le tableau de variations suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{2}{\pi}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{2}{\pi}$

6. En particulier, pour tout $x \in I$, on a $\dfrac{2}{\pi} \leq f(x) \leq 1$, ce qui revient à dire que $\dfrac{2}{\pi}\, x \leq \sin(x) \leq x$. ▲

Chapitre 12

Suites numériques

Au début du XIII[e] siècle le mathématicien italien Leonard de Pisae connu sous le nom de Fibonacci, introduisit une suite sous la forme amusante suivante : partant d'un couple de lapins, combien en obtiendra-t-on après un nombre donné de mois, sachant que chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel ne devient productif qu'après deux mois. Si on note Fn le nombre de couples au bout de n mois, on aboutit à la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Le rapport $Fn+1/Fn$ tend vers le nombre d'or $(1 + \sqrt{5})/2$.

Leonardo Fibonacci
env. 1180-1250

OBJECTIFS

les incontournables

- Savoir reconnaître une suite classique
  - suite arithmétique
  - suite géométrique
- Étudier la monotonie d'une suite (u_n) en s'adaptant au mode de construction
  - comparer deux termes consécutifs
  - étudier la fonction f si $u_n = f(n)$
- Étudier la limite de la suite (u_n)
  - en utilisant opérations algébriques et croissances comparées
  - à l'aide d'un théorème d'existence par encadrement ou comparaison
  - en appliquant le théorème de la limite monotone
- Démontrer une propriété universelle des entiers naturels
  - au moyen d'une preuve par récurrence.

et plus si affinités

- Étudier une suite définie par une relation de récurrence
- Reconnaître et étudier une suite arithmético-géométrique

Résumé de cours

Généralités

Modes de construction d'une suite

Définition : *Une **suite de réels** u est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout entier n associe le réel u_n, appelé **terme de rang** n de la suite. La suite u elle-même est souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Généralement, une suite est définie

- par l'expression de son terme général en fonction de n : $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique ;
- par la donnée de son premier terme (ou de plusieurs) et d'une relation de récurrence. Le plus souvent, on donne $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction numérique.

Suites réelles et ordre

Définition : Suites monotones —. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.*

- *u est dite **croissante** lorsque pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.*
- *u est dite **décroissante** lorsque pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.*

Définition : Suites majorées, minorées, bornées —. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.*

- *u est **majorée** s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.*
- *u est **minorée**, s'il existe un réel $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.*
- *u est **bornée** s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.*

Remarque : une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée *si et seulement si* elle est majorée et minorée.

Limites de suites

Définition : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que*

- *u **converge vers** ℓ, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, si tout intervalle ouvert de la forme $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.*
- *u **diverge vers** $+\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ (avec $A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.*
- *u **diverge vers** $-\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty, A[$ (avec $A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.*

Lorsqu'elle existe, la limite de la suite (u_n) est unique.

Proposition 12.1.— Limites et inégalités —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites admettant des limites (dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, alors $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.

Notation : *si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$.*

Théorèmes d'existence de limite

Théorème 12.2.— Opérations sur les limites —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites admettant des limites, $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ un réel. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Alors

- $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda \cdot u_n) = \lambda.\ell$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$
- si $\ell' \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n/v_n) = \ell/\ell'$
- si $\ell = 0^+$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (1/u_n) = +\infty$

pourvu que les opérations ci-dessus soient bien définies dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Remarque : les opérations $\infty - \infty$, $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$,$\frac{\infty}{0}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{0}$, ne sont pas définies dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. On les appelle des **formes indéterminées**.

Théorème 12.3.— Existence de limite par comparaison, encadrement —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites et $\ell \in \mathbb{R}$.

- Si $\begin{cases} \bullet\ u \text{ et } w \text{ convergent vers } \ell \\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n \end{cases}$ alors v est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
- Si $\begin{cases} \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq u_n \end{cases}$ alors v est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Corollaire 12.4.— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites et $\ell \in \mathbb{R}$.

- Si $\begin{cases} \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ |v_n - \ell| \leq u_n \end{cases}$ alors v est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Théorème 12.5.— Théorème de la limite monotone —. Toute suite monotone admet une limite.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors elle converge : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors elle converge : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors elle diverge vers $-\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 12.6.— Limites des suites de référence —.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- Si $k \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$
- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/\ln(n) = 0^+$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/\sqrt{n} = 0^+$
- Si $k \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/n^k = 0^+$
- Si $0 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0^+$

Remarque : si $q \leq -1$, la suite (q^n) diverge et n'a pas de limite.

Méthodes

Raisonnement par récurrence

La méthode de démonstration par récurrence s'utilise **uniquement** pour démontrer les propriétés universelles des entiers naturels, c'est-à-dire des propriétés du type

$$\text{Pour tout entier naturel } n \geq n_0, \quad \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}$$

où $\mathcal{P}$ est une propriété que peuvent ou non vérifier les entiers naturels.

> **❑ Méthode 12.1.— Comment faire une démonstration par récurrence**
> La rédaction d'une démonstration par récurrence s'articule en trois points :
> - **Initialisation :** vous vérifiez simplement que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
> - **Hérédité :** il s'agit de montrer que $\mathcal{P}$ est héréditaire, c'est-à-dire que si un entier $n \geq n_0$ possède la propriété $\mathcal{P}$ alors son successeur $n+1$ en hérite ! Votre démonstration débute par :
>
>   « *Soit $n \geq n_0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.* »...
> - **Conclusion :** il faut invoquer le principe de récurrence.
>
>   « *Par récurrence, on a montré que pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.* »

Vocabulaire : *lors de la démonstration de l'hérédité, nous formulons l'hypothèse que « $\mathcal{P}(n)$ est vraie ». Cette hypothèse est appelée* ***l'hypothèse de récurence****.*

Remarque : plus qu'une méthode de démonstration, la récurrence est en réalité un théorème qui sera établi (et généralisé) en CPGE.

Exemple : montrons que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $11^{n+1} + 10 \times 4^n$ est divisible par 7.
Avant de débuter la récurrence proprement dite, identifions précisément la propriété des entiers naturels à prouver :
Notons, pour $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété 7 divise $11^{n+1} + 10 \times 4$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$.

- **Initialisation :** $11^{0+1} + 10 \times 4^0 = 21$ est divible par 7 donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie :

$$\begin{aligned} 11^{n+2} + 10 \times 4^{n+1} &= (7+4) \times 11^{n+1} + 10 \times 4^{n+1} \\ &= 7 \times 11^{n+1} + 4 \times \left(11^{n+1} + 10 \times 4^n\right). \end{aligned}$$

  Par **hypothèse de récurrence** $11^{n+1}+10\times4^n$ est divisible par 7. Il découle alors immédiatement de l'égalité ci-dessus que $11^{n+2} + 10 \times 4^{n+1}$ l'est aussi.

- **Conclusion :** Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, nous avons prouvé que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $11^{n+1} + 10 \times 4$ est divisible par 7.

Mise en œuvre : exercice 12.1.

■ Suites réelles et ordre

Suites majorées, minorées, bornées

❑ Méthode 12.2.— Comment montrer qu'une suite est majorée
Pour démontrer qu'une suite est majorée :

▶ Si un majorant possible M est connu, vous vérifiez que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$. Comme il s'agit d'une propriété universelle des entiers, on peut le prouver par récurrence.

▶ Si le majorant M n'est pas connu a priori, vous devez le calculer. Pour cela, on peut procéder par étapes :

$\boxed{1}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On procède par majorations successives de u_n jusqu'à obtenir un majorant M **qui ne dépende pas de** n.

$\boxed{2}$ Comme M est indépendant de n, il majore donc tous les termes de la suite !

Remarque : on peut adapter cette méthode pour montrer qu'une suite est minorée ou bornée.

Exemple : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^\star\ u_n = n^2 - 2n + e^n - \dfrac{1}{n}$. Montrons que la suite u est minorée.

$\boxed{1}$ Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme on ne devine pas de minorant, on procède par minorations successives :

$$u_n = n^2 - 2n + e^n - \frac{1}{n} \geq n^2 - 2n + 1 - \frac{1}{n} \geq (n-1)^2 - \frac{1}{n} \geq 0 - \frac{1}{n} \geq -1$$

$\boxed{2}$ Ainsi, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a montré que $u_n \geq -1$. Par définition, la suite (u_n) est donc minorée.

Suites monotones

❑ Méthode 12.3.— Comment étudier la monotonie d'une suite
Étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est comparer deux termes consécutifs de u. Pour cela, on peut :

- ▶ étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$: si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est positif (*resp.* négatif), la suite (u_n) est croissante (*resp.* décroissante) ;
- ▶ étudier le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque la suite est à termes strictement positifs : si, pour tout entier n ce quotient est supérieur (*resp.* inférieur) à 1, la suite (u_n) est croissante (*resp.* décroissante) ;
- ▶ étudier f lorsque u est définie par $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$: si f est croissante (*resp.* décroissante) alors (u_n) l'est aussi.

Exemple : soit $(u_n)_{n\geq 3}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$, pour $n \geq 3$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$. Par conséquent, f est décroissante sur $[e, +\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est aussi décroissante.

Mise en œuvre : exercice 12.4.

■ Étude de la limite d'une suite

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour établir l'existence et la valeur de la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le travail attendu est souvent d'utiliser le théorème adéquat.

❑ Méthode 12.4.— Comment montrer qu'une suite admet une limite
Lorsque le candidat limite est connu, pour vérifier qu'il s'agit effectivement de la limite, on utilise souvent une comparaison (**théorème 12.3** et **corollaire 12.4**).

- Pour prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on cherchera une minoration de la forme $v_n \geq u_n$, où u_n est une suite de référence qui diverge vers $+\infty$. On peut alors conclure par comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Pour prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$, on cherchera une majoration de la forme $|v_n - \ell| \leq u_n$, où u_n est une suite de référence qui tend vers 0. On peut alors conclure par comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Lorsque le candidat limite n'est pas connu, on peut suivant les cas :

- encadrer (v_n) et utiliser le **théorème des gendarmes** (**théorème 12.3**) ;
- utiliser les théorèmes d'opérations algébriques sur les limites (**théorème 12.2**) ;
- appliquer le **théorème de la limite monotone** (**théorème 12.5**).

Lever une indétermination

Le **théorème 12.2** ne permet pas de conclure lorsqu'on tombe sur une forme indéterminée : la seule connaissance des limites des suites en jeu ne suffit pas pour conclure. Il faut aussi tenir compte de la vitesse de convergence.

❑ Méthode 12.5.— Comment lever une indétermination
Soit $k \in \mathbb{N}^\star$, $q > 1$. Pour lever une indétermination, on peut utiliser une transformation d'écriture en factorisant les termes d'une somme par le terme prépondérant afin de se ramener à une **croissance comparée usuelle** :

- **Suites divergeant vers** $+\infty$: $\ln(n) << \sqrt{n} << n << n^k << q^n$.
- **Suites convergeant vers** 0 : $1/q^n << 1/n^k << 1/n << 1/\sqrt{n} << 1/\ln(n)$.

Notation : *ici, nous avons noté $v_n << u_n$ la relation « v_n est infiniment plus petit que u_n »(ou u_n est prépondérant devant v_n).*

Exemple : étudions la limite de la suite $v_n = \frac{2n^2-7n+3}{n-4\ln(n)}$. Pour cela, observons tout d'abord que (v_n) est construite comme quotient. Numérateur et dénominateur étant tous deux indéterminés, factorisons-les par leurs termes prédominants ! Il vient

$$v_n = \frac{2n^2-7n+3}{n-4\ln(n)} = \frac{n^2}{n} \times \frac{2-\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-4\frac{\ln(n)}{n}} = n \times \frac{2-\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-4\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Par opération algébrique, il en résulte finalement que (v_n) diverge vers $+\infty$.

Mise en œuvre : exercice 12.6.

Méthodes

■ Suites classiques

Suites arithmétiques, géométriques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Par définition

- u est dite **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$, appelée la raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$.
- u est dite **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$, appelée la raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q.u_n$.

❑ Méthode 12.6.— Comment identifier une suite arithmétique, géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- Pour savoir si u est arithmétique il suffit de montrer que la différence entre deux termes consécutifs est constante égale à r. En ce cas, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \cdot r$.
- Par définition, pour savoir si u est géométrique il suffit de montrer que le quotient entre deux termes consécutifs est constant, égal à q. En ce cas, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \cdot q^n$.

Mise en œuvre : exercice 12.7.

❑ Méthode 12.7.— Comment calculer la somme des premiers termes

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Suites arithmético-géométriques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Par définition u est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.
Les suites artithmétiques et géométriques sont donc des cas particuliers de suites arithmético-géométriques.

❑ Méthode 12.8.— Comment calculer l'expression du terme général

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et $b \neq 0$ et (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n :

$\boxed{1}$ Résoudre l'équation d'inconnue r, $r = ar + b$.

$\boxed{2}$ Vérifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - r)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a. D'après la **méthode 12.6**, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - r = a^n(u_0 - r)$.

$\boxed{3}$ Finalement on peut conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = r + a^n(u_0 - r)$.

Mise en œuvre : exercice 12.8.

■ Suites récurrentes

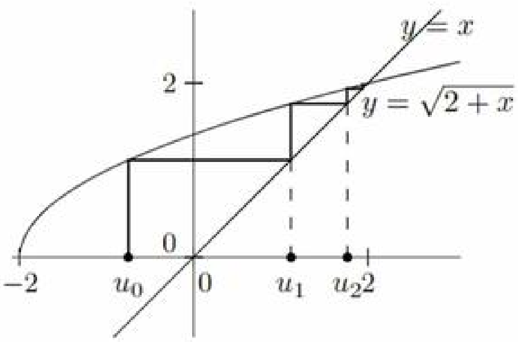
Étant donné une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I et $a \in I$, on étudie la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle que

$$\boxed{\begin{cases} \bullet \quad u_0 = a \\ \bullet \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}} \tag{12.1}$$

Le fait qu'une telle suite soit bien définie ne va pas de soi et l'étude de u débute souvent par une récurrence visant à montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et appartient à I !

Construction graphique

On peut construire les termes de la suite définie par (12.1) à l'aide de courbe représentative de f et de la première bissectrice :



Plaçons $u_0 = a$ sur l'axe des abscisses.

La verticale issue de a coupe le graphe de f au point de coordonnées $(a, f(a))$. La valeur de son ordonnée est donc u_1.

À l'aide de la première bissectrice, on reporte la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses et on repète alors le procédé à partir de u_1.

L'an prochain, vous découvrirez d'autres méthodes pour étudier la monotonie et la convergence des suites récurrentes, faisant notamment le lien avec les propriétés de la fonction f, mais il demeurera essentiel de savoir bien représenter graphiquement les premiers termes de cette suite !

Étude des variations

En général, pour étudier la monotonie d'une suite, vous pouvez déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 (lorsque la suite ne prend pas la valeur 0 et garde un signe constant). Ces méthodes mettant en jeu u_{n+1} et u_n sont particulièrement adaptées à l'étude des suites récurrentes.

Étude de la limite

❑ **Méthode 12.9.— Comment déterminer la limite d'une suite récurrente**
Souvent, la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie la (12.1) est monotone.

$\boxed{1}$ Pour prouver l'existence d'une limite, on met en œuvre le **théorème 12.5**. S'il s'agit de prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, on pourra s'aider de la représentation graphique pour trouver un majorant M et démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

$\boxed{2}$ Pour déterminer finalement la valeur de la limite, on peut s'aider de la construction graphique pour conjecturer la bonne valeur, puis démontrer la convergence en utilisant une comparaison ou l'unicité de la limite.

Exemple : étudions la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 = -\frac{3}{4}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

$\boxed{1}$ **Construction graphique :** sur la figure page 193, nous avons construit la graphe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$, la première bissectrice et les premiers termes de la suite (u_n). Le graphique semble indiquer que la suite u est croissante, majorée par 2 et convergente vers 2 !! Nous allons prouver ces résultats !

$\boxed{2}$ **La suite est bien définie :** montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > 0$.

- **Initialisation :** $u_1 = \sqrt{1,25} \approx 1,118$. donc $u_1 > 0$.
- **Hérédité :** soit $n \geq 1$ tel que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} > \sqrt{2}$ par croissante (stricte) de la fonction racine carrée. Par conséquent $u_{n+1} > 0$.
- **Conclusion :** par récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, u_n est bien défini et strictement positif.

$\boxed{3}$ **Monotonie :** soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n = \dfrac{(2+u_n) - u_n}{\sqrt{2+u_n} + u_n} = \dfrac{2}{\sqrt{2+u_n}+u_n} > 0$.
Ceci étant vrai pour tout entier, la suite (u_n) est croissante.

$\boxed{4}$ **Convergence :** montrons que la suite u est majorée par 2 par récurrence.

- **Initialisation :** $u_0 = -0,75$ donc $u_0 \leq 2$.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 2$. Alors $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$ par croissante de la fonction racine carrée. Par conséquent $u_{n+1} \leq 2$.
- **Conclusion :** par récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

Ainsi, u est croissante et majorée, par 2. Elle est donc convergente par **théorème 12.5**.

$\boxed{5}$ Montrons que (u_n) converge vers 2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq 2 - u_{n+1} &= 2 - \sqrt{2+u_n} = \frac{4-(2+u_n)}{2+\sqrt{2+u_n}} = \frac{2-u_n}{2+\sqrt{2+u_n}} \\ &\leq \frac{1}{2}\,|2-u_n| \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$. Une récurrence permet alors d'en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - 2| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Finalement, le **corollaire 12.4** permet d'en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Mise en œuvre : exercice 12.9.

> **Le saviez-vous ?**
>
> Choisissons un entier naturel $u_0 > 1$ et construisons par récurrence la suite (u_n) ainsi : si u_n est pair, posons $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ et sinon $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Le processus s'arrête lorsque $u_n = 1$. Quel que soit le choix de u_0, on constate que le processus s'arrête au bout d'un certain temps. Cependant, personne jusqu'ici n'a réussi à le démontrer. Ceci est connu sous le nom de conjecture de Syracuse.

Énoncé des exercices

Démonstrations par récurrence

Exercice 12.1 : Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Démontrer les propriétés universelles suivantes :

1. Pour tout entier $n \geq 0$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

2. Pour tout entier $n \geq 2$, $1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2} > \dfrac{3n}{2n+1}$.

3. Pour tout entier $n \geq 0$, $n(2n+1)(7n+1)$ est multiple de 6.

Exercice 12.2 : Nombres factoriels —.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On définit la factorielle de n comme étant le produit de tous les entiers compris entre 1 et n. On note

$$n! = 1 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

On convient que la factorielle de 0 vaut 1 : $0! = 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n! \geq 2^{n-1}$.

2. Montrer que pour tout entier naturel non nul $1! + \cdots + n! \leq (n+1)!$.

Suites réelles et ordre

Exercice 12.3 : Étudier la monotonie des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n - \ln(n^2+1)$.

2. $\forall n \geq 1,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

4. $\forall n \geq 1,\ u_n = \ln(1+e^{-n})$.

Exercice 12.4 : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{2n^2-n+1}{n^2+1}$.

1. Montrer que (u_n) est bornée.

2. Étudier la monotonie de (u_n).

3. En déduire que la suite est convergente et calculer sa limite.

Exercice 12.5 : Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \ln(n^2+2) - 2\ln(n)$.

1. Montrer que (u_n) est bornée.

2. Étudier la monotonie de (u_n).

3. En déduire que la suite est convergente et calculer sa limite.

Limites de suites

Exercice 12.6 : Étudier la convergence des suites définies par :

1. $\forall n \geq 2,\ u_n = n \times (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

2. $\forall n \geq 1,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

3. $\forall n \geq 2,\ u_n = \dfrac{2n+\ln(n)}{3n-5\sqrt{n}}$.

4. $\forall n \geq 1,\ u_n = \dfrac{\cos(3n^2+1)}{n^2}$.

■ Suites récurrentes

Exercice 12.7 : Soit u la suite définie par $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3 - u_n}$.

1. Première méthode —.

a. Démontrer que u est majorée par 0.

b. Étudier la monotonie de u.

c. En déduire que u est convergente et déterminer sa limite.

2. Deuxième méthode —. Considérons la suite auxiliaire v définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$.

a. Démontrez que v est une suite géométrique.

b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c. Montrez que u est convergente et précisez sa limite.

3. Troisième méthode —.

a. Montrer que la suite u vérifie l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|u_n|$.

b. En déduire que u converge et déterminer sa limite.

c. Déterminer un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle ouvert $]-10^{-2}, 10^{-2}[$.

Exercice 12.8 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 61$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,6 \times u_n + 8$.

1. Résoudre l'équation $x = 0,6 \times x + 8$. Dans la suite, on notera r la solution de cette équation.

2. On considère la suite $(v_n) = (u_n - r)$.

a. Montrer que la suite v est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

3. Exprimer u_n en fonction de v_n et déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 12.9 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Construire graphiquement u_0, u_1, u_2, u_3. Conjecturer les variations de u et sa limite.

2. Montrer que (u_n) est bien définie, à valeurs positives.

3. Montrer que (u_n) est croissante.

4. On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

a. Montrer en ce cas que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b. En déduire que la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit être solution de l'équation $x = x + \dfrac{1}{x}$.

5. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

■■ Indications

Ex. 12.3

On met en œuvre la **méthode 12.3**.

Ex. 12.5

On pourra chercher une autre expression de u_n pour $n \geq 1$.

Ex. 12.8

On suivra la **méthode 12.8**.

Corrigé des exercices

Exercice 12.1

Soit $a \in \mathbb{R}^+$.

1. Notons pour $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété $(1+a)^n \geq 1+na$. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- **Initialisation :** Lorsque $n=0$, on a $(1+a)^0 = 1$ et $1+0a=1$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi. On a

L'hypothèse que $\mathcal{P}(n)$ est vraie est l'hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)\times(1+a)^n \geq (1+a)(1+na)\\ &\geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a.\end{aligned}$$

$1+a>0$

- **Conclusion :** Par récurrence, on a prouvé que pour tout entier n, $(1+a)^n \geq 1+na$.

2. La preuve sera par récurrence :

- **Initialisation :** Lorsque $n=2$, on a $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$. Or $\frac{5}{4}>\frac{6}{5} \iff 25>24$. Donc la propriété est vérifiée pour $n=2$.
- **Hérédité :** Soit $n \geq 2$ tel que $1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}>\dfrac{3n}{2n+1}$. On a alors

On utilise ici l'hypothèse de récurrence.

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{3n}{2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{3n^3+6n^2+5n+1}{(2n+1)(n+1)^2}.$$

On vérifie alors que $\dfrac{3n^3+6n^2+5n+1}{(2n+1)(n+1)^2} \geq \dfrac{3n+3}{2n+3}$. En effet,

$$\begin{aligned}&\frac{3n^3+6n^2+5n+1}{(2n+1)(n+1)^2}-\frac{3n+3}{2n+3}=\frac{6n^4+21n^3+28n^2+17n+3}{(2n+1)(2n+3)(n+1)^2}\\ &-\frac{6n^4+21n^3+27n^2+15n+3}{(2n+1)(2n+3)(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)(n+1)^2}\geq 0.\end{aligned}$$

Par transitivité de la relation d'ordre, il s'ensuit que

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{3n+3}{2n+3}$$

- **Conclusion :** Par récurrence, on a montré que pour tout entier $n \geq 2$, $1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}>\dfrac{3n}{2n+1}$.

3. Sans surprise... on va faire une récurrence!

- **Initialisation :** Lorsque $n=1$, on a $1\times 3\times 8 = 4\times 6$ est divisible par 6.
- **Hérédité :** Soit $n \geq 0$ tel que $u_n = n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6. Montrons que u_{n+1} est divisible par 6 :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= (n+1)(2n+3)(7n+8) = [n+\mathbf{1}][(2n+1)+\mathbf{2}][(7n+1)+\mathbf{7}]\\ &= n(2n+1)(7n+1)+42n^2+60n+24\\ &= n(2n+1)(7n+1)+6\times[7n^2+10n+4]\end{aligned}$$

On obtient la dernière expression de u_{n+1} en développant ce produit.

Par hypothèse de récurrence, $u_n = n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6. Ainsi, u_{n+1} est aussi divisible par 6 comme somme de deux multiples de 6.

• **Conclusion :** Par récurrence, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6. ▲

Exercice 12.2

1. Notons pour $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété $n! \geq 2^{n-1}$. Procédons par récurrence :

• **Initialisation :** Lorsque $n = 0$, $1 \geq \frac{1}{2}$. Lorsque $n = 1$, on a $1 :! = 1$ et $2^{1-1} = 1$.

• **Hérédité :** Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$(n+1)! = (n+1) \times n! \geq (n+1) \times 2^{n-1} \geq 2 \times 2^{n-1} = 2^n.$$

Par transitivité, on a bien établi que $(n+1)! \geq 2^n$. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :** Par récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n! \geq 2^{n-1}$.

2. Notons pour $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété $1! + \cdots + n! \leq (n+1)!$. Procédons par récurrence :

• **Initialisation :** Lorsque $n = 1$, $1! = 1 \leq 2 = (1+1)!$.

• **Hérédité :** Soit $n \geq$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 1! + \cdots + n! + (n+1)! &\leq (n+1)! + (n+1)! \leq 2 \times (n+1)! \\ &\leq (n+2) \times (n+1)! \leq (n+2)! \end{aligned}$$

• **Conclusion :** Par récurrence, on a montré que pour tout entier $n \geq 1$, $1! + \cdots + n! \leq (n+1)!$. ▲

Exercice 12.3

Pour une synthèse des méthodes, voir la **méthode 12.3**.

Dans chaque cas, nous utilisons une méthode adaptée.

1. La suite est de la forme $u_n = f(n)$ où $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x - \ln(x^2+1)$. L'étude de la monotonie de (u_n) par celle de f. Or f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{1-2x+x^2}{1+x^2} = \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0$. Par conséquent, d'après le **théorème 11.2**, f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \leq f(n+1)$$

Ce qui revient précisément à dire que (u_n) est croissante.

On dit qu'il y a télescopage dans une somme, lorsque les termes se simplifient (presque) tous deux à deux !

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, par télescopage

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) \\ &- \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n + 1 < u_n$. La suite u est strictement croissante.

3. La suite (u_n) est inversible (ses termes sont tous non nuls) et strictement positive, on étudie plutôt les quotients :
Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!} \times \frac{2^n n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n!)}{(2n)!} \times \frac{n!}{(n+1)n!} \times \frac{2^n}{2^{n+1}}$$
$$= (2n+1) \geq 1.$$

Par conséquent, la suite (u_n) est croissante.
4. La suite est de la forme $u_n = f(n)$ où $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. Par composition, il est clair que cette fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, il en va de même de la suite (u_n). ▲

Exercice 12.4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$|u_n| = \left|\frac{2n^2 - n + 1}{n^2+1}\right| = \frac{|2n^2 - n + 1|}{n^2+1} \leq \frac{2n^2+n+1}{n^2+1}$$
$$\leq 3n^2 + 3n^2 + 1 = 3$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 3$. La suite (u_n) est bornée.
2. La suite est de la forme $u_n = f(n)$ où $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2+1}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) > 0$ dès que $x \geq 1$. Ainsi, la fonction restreinte $f_| : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante. Il en va de même de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. De plus comme $u_0 = u_1 = 1$, on peut conclure que (u_n) est croissante.
3. Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée, on peut donc conclure à l'aide du **théorème de la limite monotone** que la suite (u_n) est convergente. Reste à déterminer sa limite. Observons tout d'abord, que nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ». Pour la lever, nous factorisons numérateur et dénominateur par le terme prédominant. Il vient

✎ **théorème 12.5**

✎ *On suit la* **méthode 12.5**.

$$u_n = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 2.$$

Finalement, la suite (u_n) est convergente de limite 2. ▲

Exercice 12.5

1. Soit $n \geq 1$. À l'aide des règles de calcul pour la fonction logarithme, on a

$$u_n = \ln(n^2+2) - 2\ln(n) = \ln\big(\frac{n^2+2}{n^2}\big) = \ln\big(1 + \frac{2}{n^2}\big).$$

En particulier, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq ln(3)$.
2. Soit $n \geq 1$. On a $n^2 \leq (n+1)^2$. D'où l'on tire successivement $1 + \frac{2}{n^2} \geq 1 + \frac{2}{(n+1)^2}$, puis par croissance de la fonction logarithme $\ln\big(1 + \frac{2}{n^2}\big) \geq \ln\big(1 + \frac{2}{(n+1)^2}\big)$. Ceci étant vri pour tout entier $n \geq 1$, nous en déduisons que (u_n) est décroisante.
3. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, le **théorème de la limite monotone** permet d'en déduire qu'elle est convergente. De plus,

Corrigé

- On pose $x_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, on a $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
- par continuité de ln, $\ln(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

▲

Exercice 12.6

Pour lever la forme indéterminée, nous multiplions et divisons par l'expression conjuguée !

1. $u_n = n \times (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$

2. Soit $n \geq 1$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.
En sommant terme à terme tous ces encadrements, il s'ensuit que

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Or $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

théorème 12.3

D'après le **théorème d'existence de limite par encadrement** , il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.$

3. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = \dfrac{2n+\ln(n)}{3n-5\sqrt{n}} = \dfrac{n}{n}\dfrac{2+\frac{\ln(n)}{n}}{3-\frac{5}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{2}{3}.$

4. La suite $\cos(3n^2+1)$ n'admet pas de limite, mais elle est bornée par 1. Ainsi, $|u_n| = \dfrac{|\cos(3n^2+1)|}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par **comparaison** (**corollaire 12.4**), il en résulte que (u_n) est elle aussi convergente de limite nulle. ▲

Exercice 12.7

1. Première méthode

a. Par récurrence, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$.

- **Initialisation :** $u_0 = -2 < 0$.
- **Hérédité :** Soit $n \geq 0$ tel que $u_n < 0$. Alors $3 - u_n > 3 > 0$. Par conséquent u_{n+1} est strictement négatif comme quotient d'un nombre strictement négatif par un nombre strictement positif.
- **Conclusion :** Par récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{3-u_n} < \dfrac{2}{3} < 1$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par $u_n < 0$, il s'ensuit que $u_{n+1} > u_n$. Ceci étant vrai pour tout entier n, la suite (u_n) est strictement croissante.

théorème 12.5

c. Étant strictement croissante et majorée, la suite (u_n) est convergente d'après le **théorème de la limite monotone**. Notons $\ell \in \mathbb{R}^-$ sa limite. Déterminons ℓ à l'aide de la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3-u_n}$.

La limite d'une suite convergente de réels strictement négatifs est nécessairement positive ...ou nulle !

- On a d'une part, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- D'autre part, par opérations algébriques, $\frac{2u_n}{3-u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2\ell}{3-\ell}$.

Par **unicité de la limite**, ceci entraîne que $\ell = \dfrac{2\ell}{3-\ell}$, ce qui n'est possible que si $\ell = 0$. Ainsi, on a démontré que (u_n) est convergente de limite nulle.

2. Deuxième méthode

a. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{2u_n}{3-u_n}}{1-\frac{2u_n}{3-u_n}} = \frac{2u_n}{3-3u_n} = \frac{2}{3}\,\frac{u_n}{1-u_n} = \frac{2}{3}v_n.$$

Par définition, cela signifie que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$. D'après la **méthode 12.6**, il en résulte que pour tout entier naturel n, $v_n = v_0(2/3)^n = -(2/3)^{n+1}$.

$v_0 = \frac{-2}{1+2} = -\frac{2}{3}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, partant de la relation $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$, on tire aisément que

$$u_n = \frac{v_n}{1+v_n} = -\frac{(2/3)^{n+1}}{1-(2/3)^{n+1}}.$$

c. Comme $(v_n) = \big(-(2/3)^{n+1}\big)$ est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ de valeur absolue strictement inférieure à 1, elle est convergente de limite nulle. Par opérations algébriques (cf. **théorème 12.2**) il en résulte que (u_n) est aussi convergente de limite nulle.

3. Troisième méthode

a. Soit $n \in \mathbb{N}$, sachant que $u_n < 0$, nous en déduisons que $|u_{n+1}| = \left|\dfrac{2u_n}{3-u_n}\right| = \dfrac{2}{3-u_n}\,|u_n| \leq \dfrac{2}{3}|u_n|$.

b. Appliquons l'inégalité précédente avec $n = 0, 1, 2, \ldots$ Il vient

$$\begin{array}{rcl} |u_1| & \leq & \frac{2}{3}|u_0| \\ |u_2| & \leq & \frac{2}{3}|u_1| \leq \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}|u_0| = \left(\frac{2}{3}\right)^2 |u_0| \\ |u_3| & \leq & \frac{2}{3}|u_2| \leq \frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 |u_0| = \left(\frac{2}{3}\right)^3 |u_0| \\ \vdots & & \ddots \end{array}$$

Par itération , il s'ensuit que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times |u_0| \leq 2\,\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par **comparaison** (**corollaire 12.4**) il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Vous pouvez aussi rédiger une récurrence !

c. Pour que $|u_n|$ soit inférieur à 10^{-2}, il suffit d'après l'inégalité ci-dessus que $2\,\left(\frac{2}{3}\right)^n$ le soit. Or

$$\begin{array}{rcl} 2\,\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-2} & \Longleftrightarrow & \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 5\ 10^{-3} \Longleftrightarrow n\ln(2/3) \leq \ln(5) - 3\ln(10) \\ & \Longleftrightarrow & n \geq \dfrac{\ln(5)-3\ln(10)}{\ln(2)-\ln(3)} \end{array}$$

Attention au sens des inégalités lorsqu'on divise par le nombre strictement négatif $\ln(2/3) = \ln(2) - \ln(3)$.

Finalement, on trouve à l'aide d'une calculatrice $n \geq 14$. ▲

Exercice 12.8

Dans ces grandes lignes, cet exercice suit la **méthode 12.8**.

1. $x = \frac{3}{5}x + 8 \iff \frac{2}{5}x = 8 \iff x = 20$. L'unique solution de l'équation $x = 0,6 \times x + 8$ est $r = 20$.

Corrigé

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\left\| \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 0,6 \times u_n + 8 \\ r & = & 0,6 \times r + 8 \end{array} \right.$. En retranchant membre à membre ces deux égalités, il vient $v_{n+1} = u_{n+1} - r = 0,6 \times (u_n - r) = 0,6 \times v_n$. Ceci étant vrai pour tout entier n, la suite $(v_n) = (u_n - r)$ est donc géométrique de raison $0,6$ et de premier terme 41.

b. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times (0,6)^n = 41 \times (0,6)^n$.

c. Comme suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1, la suite (v_n) est convergente de limite nulle.

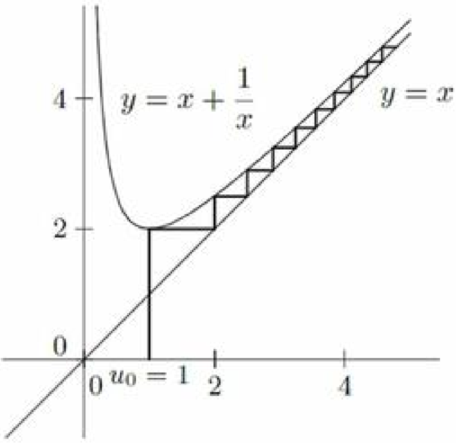
3. Finalement, comme pour tout entier n, on a $u_n = r + v_n = 20 + 41 \times (0,6)^n$, la suite (u_n) converge vers 20 par opérations algébriques. ▲

Exercice 12.9

On met en œuvre les méthodes pour l'étude des suites récurrentes (cf. p 193).

f est appelée la fonction itératrice de la suite.

1. On trace le graphe de la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ et la première bissectrice.



On place u_0 sur l'axe des abscisses. Le point du graphe de f à la verticale de u_0 a pour ordonnée $f(u_0) = u_1$. On reporte cette valeur sur l'axe des ordonnées par l'intermédiaire de la première bissectrice, ce qui permet de situer u_1. On réitère ensuite le procédé.

Graphiquement, on observe que la suite (u_n) semble croissante et divergente vers $+\infty$.

2. On montre par récurrence sur n que (u_n) est bien définie à valeurs positives.

- **Initialisation :** $u_0 = 1 > 0$,
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors u_n est inversible et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ est bien défin et strictement positif comme somme de tels nombres.
- **Conclusion :** Par récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$. Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante.

4. On suppose dans cette question que (u_n) est majorée.

C'est le **théorème de la limite monotone** *(***théorème 12.5***).*

a. (u_n) étant croissante et majorée, elle convergerait..

b. Notons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. Comme u_n est croissante on sait que $\ell \geq u_0 = 1$.

- On a d'une part, $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

On applique ici la **méthode 12.9**.

- D'autre part, par opérations algébriques, $u_n + \frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell + \frac{1}{\ell}$.

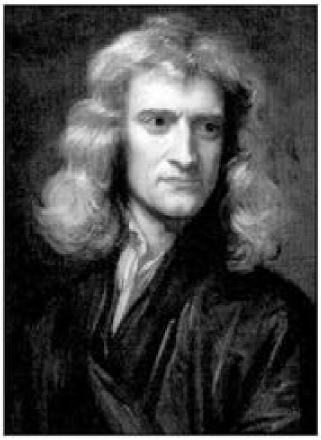
Par **unicité de la limite**, ceci entraîne que $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$. Or l'équation $x = x + \dfrac{1}{x}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

5. On a supposé que dans la question **4.** que la suite est majorée et on aboutit à une contradiction. Par l'absurde, on a donc démontré que la suuite (u_n) n'est pas majorée. D'après le **théorème de la limite monotone**, ceci entraîne que (u_n) diverge vers $+\infty$. ▲

Chapitre 13

Intégrales et primitives

Au XVI^{e} siècle, deux problèmes, apparemment différents, requièrent l'attention des mathématiciens. Les uns cherchent une méthode générale pour calculer l'aire située sous une courbe ; c'est le cas de John Wallis. D'autres, comme Pierre de Fermat, tentent de trouver un lien entre l'équation d'une courbe et de sa tangente. Isaac Newton, dans les années 1660, et Gottfried Leibniz, la décennie suivante, se rendent compte que les deux problèmes sont liés et établissent, semble-t-il indépendamment l'un de l'autre, une méthode générale. C'est ce qu'on appelle le calcul différentiel et intégral.



Isaac Newton
1643-1727

OBJECTIFS

les incontournables

- Savoir calculer une primitive
  - connaître les primitives usuelles
  - utiliser les formules de dérivation pour en déduire un calcul de primitive
- Calculer une intégrale
  - au moyen du **théorème fondamental du calcul intégral**
  - pour déterminer une aire
- Savoir utiliser les propriétés de croissance et positivité de l'intégrale
  - pour comparer deux intégrales
  - pour majorer, encadrer une intégrale

et plus si affinités

- Étudier une suite d'intégrales
  - savoir étudier sa monotonie
  - savoir prouver sa convergence
- Étudier une fonction définie à l'aide d'une intégrale
  - étudier ses variations
  - calculer ses limites

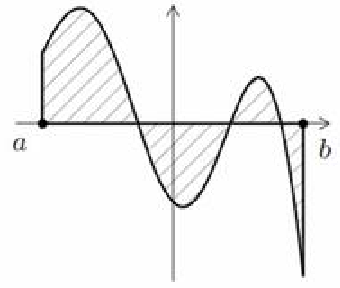
Résumé de cours

Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition intuitive de l'intégrale

Définition : *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$. On définit l'intégrale de a à b de f, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ le nombre réel égal à l'aire algébrique de la région du plan délimitée par*

- *le graphe de f,*
- *l'axe des abscisses,*
- *les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.*



Il s'agit de l'aire algébrique et non géométrique. Cela signifie que l'aire de la partie située au-dessus de l'axe des abscisses est comptée positivement, l'aire de la partie en dessous est comptée négativement.

Remarque : dans cette définition, la continuité de f sur le **segment** $[a,b]$ est essentielle.

Propriétés fondamentales de l'intégrale

Théorème 13.1.— Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I, $(a,b) \in I^2$ des réels tels que $a \leq b$. Alors

- **Positivité de l'intégrale**

  Si f est positive sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$.

- **Croissance de l'intégrale**

  Si $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.

- **Linéarité de l'intégrale**

  Si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, alors $\displaystyle\int_a^b (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$

- **Relation de Chasles**

  Si $(a,b,c) \in I^3$, alors $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$.

Remarque : lorsque $b < a$, on convient que $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$.

Théorème 13.2.— Valeur moyenne d'une fonction continue —. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = f(c)}$$

Lien fondamental entre intégrales et primitives

Primitives

Définition : *Soit $f, F : I \to \mathbb{R}$, deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si $F' = f$, i.e. pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.*

Proposition 13.3.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
- Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.
- Plus précisément, si F_0 est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont toutes les fonctions de la forme $F = F_0 + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante réelle.

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème 13.4.— Intégrale fonction de sa borne supérieure —. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $a \in I$. On définit la fonction $F_a : I \to \mathbb{R}$ par

$$\boxed{F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \text{ pour } x \in I}$$

Alors F_a est dérivable dans I et $F_a' = f$ c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $F_a'(x) = f(x)$.

Existence de primitives

Une conséquence fondamentale est l'existence de primitive pour une fonction continue sur I.

Théorème 13.5.— Existence de primitive —. Toute fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ possède des primitives sur I. Plus précisément,
Étant donné $a \in I$, f admet une unique primitive qui s'annule au point a, c'est la fonction $F_a : I \to \mathbb{R}$ définie ci-dessus.

Notation : *une primitive quelconque de f est notée $\int^x f(t)\,dt$.*
Exemple : sur $\mathbb{R}^{+\star}$, l'unique primitive qui s'annule en 1 de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$.

Calcul d'intégrales

Pour calculer la valeur d'une intégrale, on a très rarement recours à la définition en terme d'aire. On utilise plutôt le

Théorème 13.6.— Théorème fondamental du calcul intégral —. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive *quelconque* de f sur I, alors pour tout couple $(a, b) \in I^2$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Commentaires : ainsi, l'intégrale de a à b d'une fonction continue est la variation entre a et b d'une de ses primitives.

Méthodes

Calcul de primitives et d'intégrales

La primitivation étant l'opération inverse de la dérivation, pour obtenir les règles du calcul de primitives, il suffit essentiellement de réinterpréter les règles de dérivation.
En effet si $F : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue,

F est une primitive de f *si et seulement si* f est la dérivée de F.

Méthode 13.1.— Comment vérifier que F est une primitive de f
Soit $F, f : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que F est une primitive de f sur I revient à :
1. Vérifier que F est dérivable sur I.
2. Vérifier que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Remarque : ainsi, vous pourrez toujours vérifier vos calculs de primitives !

Primitives usuelles

Ainsi, on détermine les primitives usuelles en relisant le tableau des dérivées des fonctions usuelles (**méthode 10.2**) de la droite vers la gauche. On obtient :

Méthode 13.2.— Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitives	Intervalle de validité	paramètre
$x \mapsto 0$	$x \mapsto C$	$I \subset \mathbb{R}$	
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$I \subset \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert) + C$	$I \subset \mathbb{R}^{+\star}$ ou $I \subset \mathbb{R}^{-\star}$	
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$I \subset \mathbb{R}^{+\star}$ ou $I \subset \mathbb{R}^{-\star}$	$n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$
$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x} + C$	$I \subset \mathbb{R}^{+\star}$	
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + C$	$I \subset \mathbb{R}$	
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$	
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$	

Techniques usuelles de primitivation

D'après le théorème **primitives d'une fonction continue**, une fonction continue sur un intervalle y admet une infinité de primitives qui diffèrent entre elles d'une constante réelle C. Lorsque f est une fonction usuelle, la **méthode 13.2** permet d'obtenir directement ses primitives. Toutefois, en règle générale, la fonction f est plutôt construite *à partir* de ces fonctions usuelles par opérations algébriques ou composition. De nouveau, réinterprétons les **méthodes 10.3** et **10.4** pour obtenir des règles de calcul de primitives.

❑ Méthode 13.3.— Comment primitiver une fonction par opérations algébriques
On suppose que f est une fonction continue sur I, construite par opérations algébriques à partir de fonctions dérivables dans I, u et v et de leurs dérivées.

Fonction f	**Primitives F de f**	**Remarques**
$f = \lambda \cdot u' + \mu \cdot v'$	$F = \lambda \cdot u + \mu \cdot v + C$	linéarité de la primitivation
$f = u' \times v + u \times v'$	$F = u \times v + C$	

Remarque : la deuxième formule d'intégration sera énoncée dans le supérieur sous la forme :

$$\int^x u'(t) \times v(t)\,dt = \Big[u(t) \times v(t)\Big]^x - \int^x u(t) \times v'(t)\,dt.$$

Elle est appelée la **formule d'intégration par parties** (cf. **exercice 13.4**).

❑ Méthode 13.4.— Comment obtenir des fonctions composées comme primitives
On suppose que f est une fonction continue sur I, construite par opérations algébriques à partir d'une fonction u, dérivable dans I et de sa dérivée.

Fonction f	**Primitives F de f**	**Remarques**
$f = u' \times u^n$	$F = \dfrac{1}{n+1} u^{n+1} + C$	si $n \in \mathbb{N}$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln(\lvert u \rvert) + C$	si u ne s'annule pas
$f = \dfrac{u'}{u^n}$	$F = \dfrac{1}{1-n} \dfrac{1}{u^{n-1}} + C$	si u ne s'annule pas et $n \geq 2$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} + C$	si $u > 0$ dans I
$f = u' \times \exp(u)$	$F = e^u + C$	
$f = u' \times \cos(u)$	$F = \sin(u) + C$	
$f = u' \times \sin(u)$	$F = -\cos(u) + C$	

Mise en œuvre : exercice 13.1.

Calcul d'intégrales

Si la définition de l'intégrale d'une fonction continue s'interprète en terme d'aire, dans la pratique, l'utilisation du **théorème fondamental du calcul intégral** (**théorème 13.6**) est incontournable et permet de mener tout calcul d'intégrale.

> **❑ Méthode 13.5.— Comment calculer une intégrale**
> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $(a,b) \in I^2$. Pour calculer $\int_a^b f(t)\,dt$
> $\boxed{1}$ On commence par déterminer une primitive $F : I \to \mathbb{R}$ de f sur I.
> $\boxed{2}$ On applique directement le **théorème 13.6** :
> $$\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ainsi, tout calcul d'intégrale se ramène à un calcul de primitive !

Remarque : parfois, il peut être utile d'utiliser la **relation de Chasles** (**théorème 13.1**) pour scinder l'intervalle d'intégration en plusieurs dans le but de simplifier le calcul des primitives.

Exemple : calculons $J = \displaystyle\int_{-2}^{4} |x^2 - 2x - 3|\,dx$.

$\boxed{1}$ Le trinôme $p(x) = x^2 - 2x - 3$ se factorise sous la forme $p(x) = (x+1)(x-3)$. La **méthode ??** nous permet d'affirmer que $p(x) \geq 0 \iff x \in [-1,3]$ et coïncide sur cet intervalle avec sa valeur absolue !

$\boxed{2}$ On scinde l'intégrale en 3 à l'aide de la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} J &= \int_{-2}^{-1} |p(x)|\,dx + \int_{-1}^{3} |p(x)|\,dx + \int_{3}^{4} |p(x)|\,dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 2x + 3)\,dx + \int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\,dx + \int_{3}^{4} (-x^2 + 2x + 3)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{3}^{4} = -\frac{46}{3} \end{aligned}$$

Mise en œuvre : exercice 13.2.

> **Le saviez-vous ?**
> Dans le jargon des CPGE « faire 3/2 » signifie intégrer l'École Polytechnique (l'X) entre la $1^{\text{ère}}$ et la $2^{\text{ème}}$ année. Comment appelle-t-on un étudiant qui intègre en fin de $3^{\text{ème}}$ année ?

■ Comparaison d'intégrales

Les comparaisons d'intégrales se comprennent aisément en interprétant l'intégrale comme valeur moyenne (**théorème 13.2**) : si f est inférieure à g sur $[a,b]$, il est bien évident que la valeur moyenne de f sera inférieure à celle de g !

Méthode 13.6.— Comment comparer deux intégrales
Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$ ($a < b$). D'après les propriétés de **positivité** et de **croissance de l'intégrale** :

- Pour étudier le signe de $\int_a^b f(t)\,dt$, il suffit d'étudier le signe de f !
- Plus généralement, pour comparer $\int\limits_a^b f(t)dt$ et $\int\limits_a^b g(t)dt$, il suffit de comparer f et g.

Remarque : on prendra garde au fait que dans cette méthode (et les suivantes) les bornes des intégrales sont dans le bon sens ($a < b$). Si tel n'était pas le cas, il conviendrait de les remettre d'abord dans le bon sens en utilisant la relation $\int_a^b f(t)\,dt = \int_b^a [(-f(t)]\,dt$.

Méthode 13.7.— Comment majorer une intégrale
Pour majorer l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, avec $a < b$, on utilise la **croissance de l'intégrale**.
$\boxed{1}$ On majore f sur $[a,b]$. Ceci revient à déterminer $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \leq g(t)$$

$\boxed{2}$ En intégrant *terme à terme* cette inégalité (sans en changer le sens !) il vient :

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

Méthode 13.8.— Comment encadrer une intégrale
En particulier, pour encadrer l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, avec $a < b$
$\boxed{1}$ On détermine deux constantes, m et M telles que $\forall t \in [a,b],\ m \leq f(t) \leq M$.
$\boxed{2}$ En intégrant terme à terme ces inégalités, il vient $m\cdot(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq M\cdot(b-a)$.

Remarque : si f est monotone, on prendra pour m et M les valeurs extrêmes de f : $f(a)$ et $f(b)$.

Exemple : Soit $A \geq 1$, encadrons $J = \displaystyle\int_1^A (1+x)e^{x^2}\,dx$.

$\boxed{1}$ Pour tout $x \in [1, A]$, on a $xe^{x^2} \leq (1+x)e^{x^2} \leq 2xe^{x^2}$.

$\boxed{2}$ Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que $\displaystyle\int_1^A xe^{x^2}\,dx \leq J \leq 2\int_1^A xe^{x^2}\,dx$.

$\boxed{3}$ D'après la **méthode 13.4**, $\displaystyle\int_1^A 2xe^{x^2}\,dx = \left[e^{x^2}\right]_1^A = e^{A^2} - e$. Finalement $\dfrac{e^{A^2}-e}{2} \leq J \leq e^{A^2} - e$.

Mise en œuvre : exercice 13.5.

■ Étudier une fonction ou une suite définie à l'aide d'intégrales

Étude d'une suite d'intégrales

On trouve fréquemment des exercices d'étude de suites définies par des intégrales, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \int_a^b f_n(t)\, dt$$

où pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. En ce cas,

> ❑ **Méthode 13.9.— Comment étudier une suite d'intégrales**
> Pour étudier la suite (J_n), on utilise de préférence les propriétés liées à l'ordre.
>
> - Étudier la monotonie de (J_n) revient à établir une inégalité entre J_n et J_{n+1}. Pour cela, d'après la **méthode 13.6**, il suffit de comparer f_n et f_{n+1}.
> - Pour étudier l'existence de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$, on utilise un théorème de convergence lié à l'ordre : **théorème de la limite monotone**, ou **comparaison, encadrement**.

Exemple : on définit pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

- Étudions la monotonie de (J_n). Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, alors $\dfrac{1}{1+x^n} \leq \dfrac{1}{1+x^{n+1}}$. Par **croissance de l'intégrale** (les bornes sont dans le bon sens), il s'ensuit que (J_n) est croissante.
- De plus, pour tout entier n et tout réel $x \in [0,1]$, on a $0 \leq \dfrac{1}{1+x^n} \leq 1$. Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq J_n \leq 1$. Ainsi, (J_n) étant croissante et majorée, elle est convergente d'après le **théorème de la limite monotone**.
- Montrons que (J_n) converge vers 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leq 1 - \frac{1}{1+x^n} = \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$$

Par croissance de l'intégrale, il en résulte que $0 \leq 1 - J_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^n\, dx$, soit :

$$0 \leq 1 - J_n \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par **encadrement**, on en déduit que $(1 - J_n)$ converge vers 0, *i.e.* (J_n) converge vers 1.

Mise en œuvre : exercice 13.7.

Étude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle, $a \in I$ un point fixé dans I.

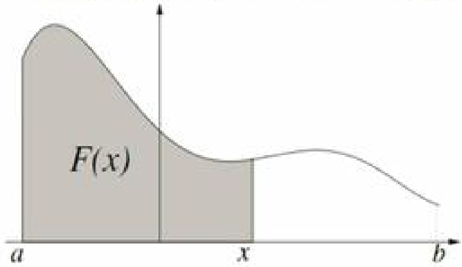
Méthodes

Pour chaque valeur $x \in I$ fixée, f est continue sur le segment $[a, x] \cup [x, a]$ et par conséquent l'intégrale $\int_a^x f(t)\, dt$ est bien définie. Notons

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Ce procédé définit une nouvelle fonction $F : I \to \mathbb{R}$ représentée par le schéma ci-contre.

Intégrale fonction de sa borne supérieure



La fonction F ainsi construite est très importante puisqu'il s'agit (d'après le **théorème 13.5**) de l'unique primitive de f sur I qui s'annule au point a.

> **❑ Méthode 13.10.— Comment étudier une intégrale fonction de sa borne sup**
>
> Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Pour mener une étude complète de F :
>
> $\boxed{1}$ On commence par déterminer l'intervalle I tel que $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est continue.
>
> $\boxed{2}$ En ce cas, d'après le **théorème 13.4**, $F : I \to \mathbb{R}$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a :
> $$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x) \text{ et } F(a) = 0$$
>
> $\boxed{3}$ L'étude des variations de la fonction F revient à étudier le signe de la fonction f.
>
> $\boxed{4}$ Pour l'étude des limites aux bornes de l'intervalle de définitions, on utilise de préférence un théorème d'existence de limite lié à l'ordre : **théorème de la limite monotone**, **comparaison**, ou **encadrement**.

Exemple : Soit F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

$\boxed{1}$ Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. f est continue comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\boxed{2}$ D'après le **théorème 13.4**, F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}^{+\star}$ qui s'annule au point 0.

$\boxed{3}$ F est donc dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\forall x > 0,\ F'(x) = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$. On en déduit aisément le tableau de variations de F :

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	
$F(x)$	$0 \nearrow$	??

$\boxed{4}$ Finalement, étudions la limite en $+\infty$ de F. Pour cela, observons que pour tout $t \geq 0$, on a $\sqrt{1+t^2} \leq 1+t$, soit $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \geq \dfrac{1}{1+t}$. Par **croissance de l'intégrale** il en résulte que pour tout réel $x > 0$, on a

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \geq \int_0^x \frac{dt}{t+1} = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^x = \ln(1+x) \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$$

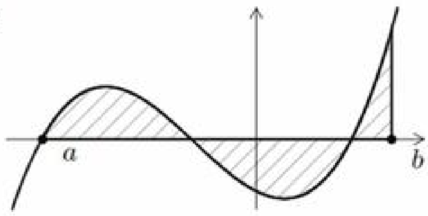
Par **comparaison**, il s'ensuit que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$. Nous pouvons compléter le tableau de variations de F !

Mise en œuvre : exercice 13.10.

■ Calculer une aire géométrique

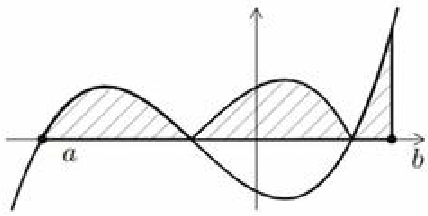
Calculer l'aire géométrique délimitée par une courbe

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$. On note $\mathscr{A}$ l'aire géométrique de la région délimitée par le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ hachurée dans la figure ci-contre.



- Si f est positive, alors par définition, $\mathscr{A}$ est précisément l'intégrale de a à b de f.
- Si f est négative sur l'intervalle $[a, b]$ alors $\mathscr{A}$ est l'opposé de l'intégrale de a à b de f.

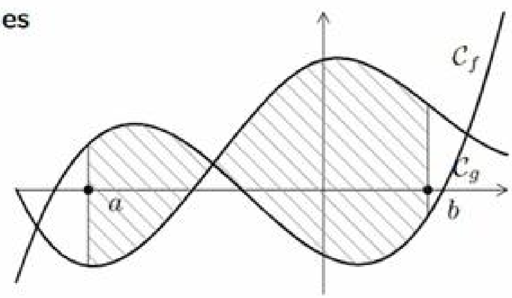
Dans le cas général, où f ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $[a, b]$, alors $\mathscr{A}$ est l'intégrale de la valeur absolue de f comme l'indique la figure ci-contre. Ainsi



$$\boxed{\mathscr{A} = \int_a^b |f(t)|\, dt \ u.a.}$$

Calculer l'aire géométrique délimitée par deux courbes

Plus généralement, soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$. On note $\mathscr{A}$ l'aire géométrique de la région délimitée par le graphe de f, le graphe de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ hachurée dans la figure ci-contre.



> ❑ **Méthode 13.11.— Comment calculer l'aire délimitée par deux courbes**
> Soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathscr{A}$ l'aire géométrique de la région délimitée par le graphe de f, le graphe de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Alors
>
> $$\boxed{\mathscr{A} = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt \ u.a.}$$

Mise en œuvre : exercice 13.6.

Énoncé des exercices

Calcul de primitives et d'intégrales

Exercice 13.1 : Calculer toutes les primitives des fonctions suivantes. On précisera les intervalles de validité.

1. $\displaystyle\int^x (t^3 - 2t + 1)\, dt$ **4.** $\displaystyle\int^x 3te^{t^2/2}\, dt$ **7.** $\displaystyle\int^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\, dt$

2. $\displaystyle\int^x \frac{3t^2 - 2t + 1}{t^4}\, dt$ **5.** $\displaystyle\int^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt$ **8.** $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t\ln(t)}$

3. $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sqrt{2t-1}}$ **6.** $\displaystyle\int^x \sin^2(t)\, dt$ **9.** $\displaystyle\int^x \ln(t)\, dt$

Exercice 13.2 : Après avoir vérifié que les intégrales suivantes ont un sens, calculez-les :

1. $\displaystyle\int_0^2 |t^2 - 3t + 2|\, dt$ **4.** $\displaystyle\int_1^{10} (t^2 - 5t + \frac{2}{t})\, dt$ **7.** $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{2t-1}{(t-1)^2}\, dt$

2. $\displaystyle\int_{-1}^1 (2t-3)^2 + 4t + 1\ dt$ **5.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{t^2+2t+4}\, dt$ **8.** $\displaystyle\int_0^1 te^{-t^2}\, dt$

3. $\displaystyle\int_e^3 \frac{dt}{t\ \ln(t)}$ **6.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos^5(t)\, dt$ **9.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{2t+1}{t+1}\, dt$

Exercice 13.3 :

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $\dfrac{t^2-1}{2t-1} = at + b + \dfrac{c}{2t-1}$.

2. Déterminer les primitives de $g : t \mapsto \dfrac{t^2-1}{2t-1}$.

3. En déduire $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{1 - 2\sin(x)}\ dx$.

Exercice 13.4 : Intégration par parties —.

1. Soit u, v des fonctions dérivables dans un intervalle I de dérivées continues. Montrer que pour tout $t \in I$, $u(t) \times v'(t) = \big[u(t) \times v(t)\big]' - u'(t) \times v(t)$.

2. En déduire que pour tout $(a, b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b u(t) \times v'(t)\ dt = \Big[u(t) \times v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t) \times v(t)\ dt$.

3. Application : Calculer $\displaystyle\int_0^x t^2 \cos(t)\, dt$.

Exercice 13.5 :

1. Montrer que pour tout réel positif t, on a $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$.

2. Soit x un réel positif. En intégrant les inégalités précédentes sur un intervalle à préciser, en déduire que

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

3. En déduire un encadrement de $\ln(1,001)$. Quelle est la valeur approchée par défaut à 10^{-9} près de $\ln(1,001)$. Que donne la calculatrice ?

Exercice 13.6 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Dans chaque cas, représenter à main levée la région du plan $\mathscr{R}$ décrite et calculer son aire $\mathscr{A}$.
1. $\mathscr{R}$ est délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation cartésienne $y = x^2 - 4$ et les droites (Ox), $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ d'équations cartésiennes respectives $y = 0$, $x = -1$ et $x = 0$.
2. $\mathscr{R}$ est délimitée par les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ d'équations cartésiennes $y = x^2$ et $y = x^3$ d'une part et les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ d'équations cartésiennes $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.

■ Étude de suites d'intégrales

Exercice 13.7 : On définit pour $n \in \mathbb{N}^\star$ les intégrales $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{t^2 + e^t}\, dt$.
1. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est positive.
2. Étudier la monotonie de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.
3. Étudier les extremums de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{e^t + t^2}$ sur $[0,1]$. En déduire un encadrement de J_n puis sa limite.

Exercice 13.8 : On définit pour $n \in \mathbb{N}^\star$ les intégrales :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x^2)\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^2}\, dx.$$

1. Étudier la monotonie de (J_n). En déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.
2. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout réel $x \in [0,1]$, on a

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \ln(1 + x^2)\right)' = x^n \ln(1 + x^2) + \frac{2x^{n+2}}{(n+1)(1 + x^2)}$$

et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad I_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} J_{n+2}$.
3. Montrer que (I_n) est convergente et préciser sa limite.
4. Montrer finalement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \ln(2)$.

■ Étude de fonctions définies à l'aide d'une intégrale

Exercice 13.9 :

1. **a.** Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout $t \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\dfrac{1}{t(1+t)^2} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{1+t} + \dfrac{c}{(1+t)^2}$.

b. Soit $x \geq 1$. Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t(1 + t^2)}$.

2. **a.** Démontrer que la fonction $f : t \mapsto \ln(t) \times \dfrac{1}{(1+t)^2}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

b. Soit φ la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{(1+t)^3}\, dt$.

Soit $x \geq 1$. Calculer de deux manières différentes l'intégrale $\displaystyle\int_1^x f'(t)\, dt$ déterminer l'expression de $\varphi(x)$ en fonction de x.

c. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{1}{2}\big(\ln(2) - \frac{1}{2}\big)$.

Exercice 13.10 : Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt.$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et déterminez f'. Donner le tableau de variations de f et son signe.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $g(x) = f(x) - \ln(x)$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}^{+\star}$ en déduire son signe.

3. Étudier les limites $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

> **Le saviez-vous ?**
>
> Toute fonction continue admet des primitives ; cependant, rien ne sert de s'angoisser si vous ne les trouvez pas : il peut arriver que celles-ci ne s'expriment pas à l'aide de fonctions déjà connues. C'était le cas de la fonction $x \mapsto 1/x$, continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Considérant son importance on a donné un nom à l'une de ses primitives c'est la fonction logarithme népérien [5] ! Il en est de même des primitives de la fonction $x \mapsto \exp(\frac{x^2}{2})$ très utiles en statistique.

Indications

Ex. 13.1

4. *Montrez que* $f_4(t) = 3te^{t^2/2}$ *est de la forme* $\lambda u'(t)e^{u(t)}$, *où* u *est une fonction à déterminer.*

9. *Vous pourrez calculer la dérivée de* $t \mapsto t\ln(t)$.

Ex. 13.2

7. *On pourra déterminer les réels* a *et* b *tels que* $\dfrac{2t-1}{(t-1)^2} = \dfrac{a}{(t-1)^2} + \dfrac{b}{t-1}$

Ex. 13.5

1. *Ceci peut faire penser aux identités remarquables* $a^2 - b^2 = (a+b)\times\cdots$ *et* $a^3+b^3 = (a+b)\times\cdots$.

Ex. 13.7

Vous appliquerez la **méthode 13.9**, *pour l'étude de la monotonie, de la convergence et le calcul de la limite.*

Ex. 13.9

1. *Pour déterminer les réels* a, b, c, *on pourra se ramener à une égalité polynomiale et procéder ensuite par* **identification des coefficients**.

5. C'est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1

Corrigé des exercices

Exercice 13.1

On utilise les **techniques classiques de primitivation** rappelées page 208.

1. La fonction $f_1(t) = t^3 - 2t + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Par linéarité,

$$\int^x (t^3 - 2t + 1)\, dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - t^2 + t\right]^x = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + C.$$

D'après le **théorème 13.5**, *toute fonction continue sur un intervalle I y admet des primitives.*

2. La fonction $f_2(t) = \dfrac{3t^2 - 2t + 1}{t^4} = 3t^{-2} - 2t^{-3} + t^{-4}$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$, elle admet donc des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}^\star$. Par linéarité,

$$\int^x (3t^{-2} - 2t^{-3} + t^{-4})\, dt = \left[-3t^{-1} + t^{-2} - \frac{1}{3}t^{-3}\right]^x = \frac{-3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x^3} + C.$$

3. La fonction $f_3(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2t-1}}$ est continue sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$, elle admet donc des primitives sur tout intervalle $I \subset]\frac{1}{2}, +\infty[$. D'après la **méthode 13.4**, il vient

$$\int^x \frac{dt}{\sqrt{2t-1}} dt = \left[\sqrt{2t-1}\right]^x = \sqrt{2x-1} + C.$$

$f_3(t)$ est de la forme $\lambda \dfrac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}$.

4. La fonction $f_4(t) = 3te^{t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$. De plus, $f_4(t)$ est de la forme $u'(t)e^{u(t)}$ et la **méthode 13.4** donne $\displaystyle\int^x 3te^{t^2/2}\, dt = \left[3e^{t^2/2}\right]^x = 3e^{x^2/2} + C.$

5. La fonction $f_5(t) = \dfrac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, elle admet donc des primitives sur tout intervalle $I \subset]0, +\infty[$. On peut noter que $f_5(t)$ est de la forme $u(t)u'(t)$, par conséquent $\displaystyle\int^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt = \left[\frac{1}{2}\ln^2(t)\right]^x = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C.$

Ici on prend $u(t) = \ln(t)$.

6. La fonction $f_6(t) = \sin^2(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour pouvoir les calculer, nous allons d'abord linéariser cette expression polynomiale en $\sin(t)$ à l'aide de la **méthode 2.4** :

$$\int^x \sin^2(t)\, dt = \int^x \frac{1 - \cos(2t)}{2}\, dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]^x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

7. La fonction $f_7(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$ est continue sur $\mathcal{D} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\}$, elle admet donc des primitives sur tout intervalle $I \subset \mathcal{D}$. De plus, $f_7(t)$ est de la forme $\frac{u'(t)}{u(t)}$, avec $u(t) = \cos(t)$. Ainsi

$$\int^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt = \int^x -\frac{\cos'(t)}{\cos(t)} dt = \Big[-\ln\left(|\cos(t)|\right)\Big]^x = -\ln\left(|\cos(x)|\right) + C.$$

8. La fonction $f_8(t) = \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, elle admet donc des primitives sur tout intervalle $I \subset]0, 1[\cup]1, +\infty[$. De plus, $f_8(t)$ est de la forme $\frac{u'(t)}{u(t)}$, avec $u(t) = \ln(t)$. Ainsi

$$\int^x \frac{dt}{t\ln(t)} dt = \Big[\ln\left(|\ln(t)|\right)\Big]^x = \ln\left(|\ln(x)|\right) + C.$$

9. La fonction $f_9(t) = \ln(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$, elle admet donc des

Corrigé

primitives sur tout intervalle $I \subset]0,+\infty[$. On vérifie que $t\ln(t)$ a pour dérivée $1+\ln(t)$. Par conséquent, $t\ln(t)-t$ admet pour dérivée $\ln(t)$. Autrement dit $\int^x \ln(t)\,dt = \Big[t\ln(t)-t\Big]^x = x\ln(x)-x+C$. ▲

Exercice 13.2

On met en œuvre la **méthode 13.5**.

1. $\int_0^2 |t^2-3t+2|\,dt$. L'intégrande n'est pas explicite à cause de la valeur absolue. On étudie donc le signe de t^2-3t+2. Ce trinôme est négatif si et seulement si $1 \le t \le 2$. Par conséquent, **la relation de Chasles** donne

$$\begin{aligned}\int_0^2 |t^2-3t+2|\,dt &= \int_0^1 (t^2-3t+2)\,dt - \int_1^2 (t^2-3t+2)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_1^2 = 1.\end{aligned}$$

2. $\int_{-1}^1 [(2t-3)^2+4t+1]\,dt = \int_{-1}^1 (4t^2-8t+10)\,dt = \left[\frac{4}{3}t^3-4t^2+10t\right]_{-1}^1 = \frac{68}{3}$.

Une primitive de $\frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}^{-\star}$ et sur $\mathbb{R}^{+\star}$ est $\ln(|t|)$. N'oubliez pas les valeurs absolues, lorsque vous n'êtes pas sûrs du signe...

3. La fonction $f_3(t) = \frac{1}{t\ln(t)}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Comme $I = [e,3] \subset]0,1[\cup]1,+\infty[$, l'intégrale est bien définie et
$\int_e^3 \frac{dt}{t\ln(t)} = \int_e^3 \frac{\ln'(t)}{\ln(t)}\,dt = \Big[\ln\left(|\ln(t)|\right)\Big]_e^3 = \ln\left(\ln(3)\right)$.

4. La fonction $f_5(t) = t^2-5t+\frac{2}{t}$ est continue sur $[1,10]$ et par linéarité,
$\int_1^{10} (t^2-5t+\frac{2}{t})\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+2\ln(t)\right]_1^{10} = \frac{171}{2}+2\ln(10)$.

On remarque que $f_5(t)$ est de la forme $\lambda\frac{u'(t)}{u(t)}$.

5. $\int_0^1 \frac{t+1}{t^2+2t+4}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t+2}{t^2+2t+4}\,dt = \frac{1}{2}\Big[\ln|t^2+2t+4|\Big]_0^1 = \ln(7/4)$.

6. $f_6(t) = \sin(t)\cos^5(t)$ est de la forme $\lambda u'(t)u^5(t)$. Nous allons appliquer la **méthode 13.4** :
$\int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos^5 t\,dt = -\frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} 6\cos'(t)\cos^5 t\,dt = -\frac{1}{6}\Big[\cos^6(t)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}$.

7. $f_7(t) = \frac{2t-1}{(t-1)^2}$ est continue sur $[-1,0]$. De plus pour tout $t\in[-1,0]$, on peut écrire $f_7(t) = \frac{2t-2+1}{(t-1)^2} = \frac{2}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}$. Par linéarité, il vient :
$\int_{-1}^0 \frac{2t-1}{(t-1)^2}\,dt = \int_{-1}^0 \frac{2}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\,dt = \left[2\ln(|t-1|)-\frac{1}{t-1}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{2}-2\ln(2)$.

On remarque que $f_8(t)$ est de la forme $\lambda u'(t)e^{u(t)}$.

8. $\int_0^1 te^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2t)\,e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\Big[e^{-t^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-1})$.

9. Comme pour intégrer f_7, nous remarquons que $f_9(t)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de fractions rationnelles simples à intégrer.
$\int_0^2 \frac{2t+1}{t+1}\,dt = \int_0^2 \frac{2t+2-1}{t+1}\,dt = \int_0^2 2-\frac{1}{t+1}\,dt = \Big[2t-\ln(t+1)\Big]_0^2 = 4-\ln(3)$.

▲

Exercice 13.3

1. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}\frac{t^2-1}{2t-1} = at+b+\frac{c}{2t-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad t^2-1 = (at+b)(2t-1)+c \\ &\Longleftrightarrow \quad t^2-1 = 2at^2+(2b-a)t+(c-b).\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, on en déduit par identification des coefficients que a, b et c sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a &=& 1 \\ -a+2b &=& 0 \\ -b+c &=& -1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{4} \\ c=-\frac{3}{4} \end{array}\right. .$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $\dfrac{t^2-1}{2t-1} = \frac{t}{2}+\frac{1}{4}-\dfrac{3}{4(2t-1)}$.

2. Sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, la fonction continue $g(t) = \dfrac{t^2-1}{2t-1}$ admet des primitives. Ce sont toutes les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int^x \left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4(2t-1)}\right)dt = \left[\frac{t^2}{4}+\frac{t}{4}-\frac{3}{8}\ln(|2t-1|)\right]^x \\ &= \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}\ln(|2x-1|)+C. \end{aligned}$$

3. Pour calculer cette intégrale, nous mettons en œuvre la **méthode 13.5**.

$\boxed{1}$ Notons $f(x) = \dfrac{\cos^3(x)}{1-2\sin(x)}$, pour $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Comme $\sin(x)$ est compris entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 1, la fonction f est continue sur le segment $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

$\boxed{2}$ En outre, pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, nous pouvons écrire

$$f(x) = \cos(x)\,\frac{\cos^2(x)}{1-2\sin(x)} = \cos(x)\,\frac{\sin^2(x)-1}{2\sin(x)-1} = \sin'(x)\,\frac{\sin^2(x)-1}{2\sin(x)-1}.$$

On reconnaît ici la dérivée d'une fonction composée :

$$f(x) = \sin'(x)\,g\big(\sin(x)\big) = \sin'(x)\,G'\big(\sin(x)\big) = \big(G\big(\sin(x)\big)\big)'$$

C'est la formule de la dérivée d'une fonction composée (cf. **méthode 10.4***).*

Finalement, une primitive de f sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ est $G(\sin(x))$ et par conséquent

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{1-2\sin(x)}\,dx &= \left[\frac{1}{4}(\sin x)^2+\frac{1}{4}(\sin x)-\frac{3}{8}\ln(|2(\sin x)-1|)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[\frac{u^2}{4}+\frac{u}{4}-\frac{3}{8}\ln(2u-1)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \frac{3-\sqrt{2}}{8}-\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

▲

Exercice 13.4

1. D'après la **formule de Leibniz** pour la dérivée d'un produit :
$\big[u(t)\times v(t)\big]' = u'\times v+u\times v'$, soit $u(t)\times v'(t) = \big[u(t)\times v(t)\big]' - u'(t)\times v(t)$.

2. Autrement dit, $u\times v$ est une primitive de $u'\times v+u\times v'$. À l'aide du **théorème fondamental du calcul intégral**, il s'ensuit que

Corrigé

$$\left[u(t)\times v(t)\right]_a^b = \int_a^b \left(u'(t)\times v(t)+u(t)\times v'(t)\right)\,dt$$
$$= \int_a^b u'(t)\times v(t)\,dt+\int_a^b u(t)\times v'(t)\,dt,$$

d'où l'on tire finalement la **formule d'intégration par parties** :

$$\int_a^b u(t)\times v'(t)\,dt=\left[u(t)\times v(t)\right]_a^b-\int_a^b u'(t)\times v(t)\,dt.$$

Ici, la situation serait meilleure sans les t^2 ! C'est la raison pour laquelle nous allons dériver la fonction $t\mapsto t^2$ et intégrer la fonction $t\mapsto\cos(t)$.

3. Appliquons cette formule d'intégration pour calculer $\int^x t^2\cos(t)\,dt$. Posons

$$\left\| \begin{array}{lllllll} u(t) & = & t^2; & v'(t) & = & \cos(t) \\ u'(t) & = & 2t; & v(t) & = & \sin(t) \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées sont continues sur $\mathbb{R}$, nous pouvons intégrer par parties. Il vient

$$\int^x t^2\cos(t)\,dt=\left[t^2\sin(t)\right]^x-\int^x 2t\sin(t)\,dt=x^2\sin(x)-\int^x 2t\sin(t)\,dt$$

Posons

$$\left\| \begin{array}{lllllll} u(t) & = & 2t; & v'(t) & = & \sin(t) \\ u'(t) & = & 1; & v(t) & = & -\cos(t) \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v ainsi définies dérivables et leurs dérivées sont continues sur $\mathbb{R}$ et une autre intégration par parties donne :

$$\int^x t^2\cos(t)\,dt = x^2\sin(x)+\left[2t\cos(t)\right]^x+\int^x 2(-\cos(t))\,dt$$
$$= x^2\sin(x)+2x\cos(x)-2\int^x\cos(t)\,dt$$
$$= x^2\sin(x)+2x\cos(x)-2\sin(x)+C.$$

▲

Exercice 13.5

Les identités remarquables sont rappelées dans le **théorème 1.6**.

1. Soit $t\geq 0$, on a $1-t^2\leq 1\leq 1+t^3$. Or d'après les identités remarquables $1-t^2=(1+t)(1-t)$ et $1+t^3=(1+t)(1-t+t^2)$. Ainsi, en divisant les trois membres de cet encadrement par le réel strictement positif $1+t$, nous obtenons l'encadrement :

$$1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2.$$

Les bornes sont dans le bon sens !

2. Soit $x\geq 0$. Intégrons terme à terme l'encadrement ci-dessus entre 0 et x. Par croissance de l'intégrale, il vient

$$\int_0^x(1-t)dt\leq\int_0^x\frac{dt}{1+t}\leq\int_0^x(1-t+t^2)dt,\ \text{soit}\ x-\frac{1}{2}x^2\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$

3. Appliquons le résultat précédent à $x=10^{-3}$, nous obtenons

$$0,000\,999\,5\leq\ln(1,001)\leq 0,000\,999\,500\,333\,333.$$

La calculatrice donne $\ln(0,001)=0,000\,999\,500\,333\,081$. ▲

Exercice 13.6

On met en œuvre la **méthode 13.11**.

1. D'après la **méthode 13.11**, l'aire de la région du plan délimitée par $(\mathcal{C})$, (Ox), $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ est donnée par :

$$\mathscr{A} = \int_{-1}^{0} |x^2 - 4|\,dx = \int_{-1}^{0} (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} = \frac{11}{3}\ u.a.$$

2. L'aire de la région délimitée par $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}')$, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ est donnée par :

$$\mathscr{A} = \int_{0}^{1} |x^2 - x^3|\,dx = \int_{0}^{1} (x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1} = \frac{1}{12}\ u.a.$$

figure 1.

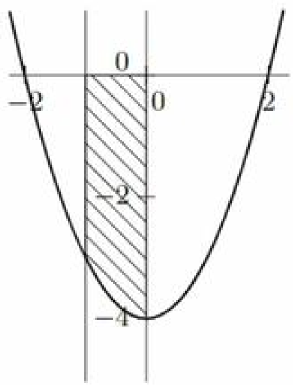
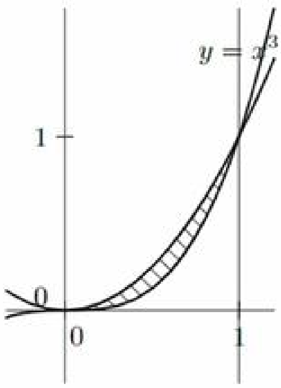


figure 2.



Exercice 13.7

On met en œuvre la **méthode 13.9**, pour l'étude de la monotonie, de la convergence et le calcul de la limite.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Posons pour $\in [0,1]$, $f_n(t) = \dfrac{t^n}{t^2 + e^t}$. La fonction f_n est continue et positive sur $[0,1]$. Son intégrale J_n est donc bien définie et positive par **positivité de l'intégrale**. ✎ **théorème 13.1**

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $t^{n+1} \leq t^n$, d'où l'on tire que

$$\frac{t^{n+1}}{t^2 + e^t} \leq \frac{t^n}{t^2 + e^t}$$

Par **croissance de l'intégrale**, il en résulte que $J_{n+1} \leq J_n$. Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, la suite (J_n) est décroissante. D'après le **théorème de la limite monotone**, la suite (J_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente de limite $\ell \geq 0$. ✎ **théorème 13.1** ✎ **théorème 12.5**

3. La fonction $t \mapsto e^t + t^2$ est strictement croissante et strictement positive sur $[0,1]$. Il en résulte que son inverse, la fonction g est strictement décroissante sur $[0,1]$. En particulier, $\forall t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+e} \leq \dfrac{1}{e^t + t^2} \leq 1$. En multipliant les trois membres de cet encadrement par t^n, nous obtenons l'encadrement, valide pour tout $t \in [0,1]$:

$$\frac{t^n}{1+e} \leq \frac{t^n}{e^t + t^2} \leq t^n$$

Par **croissance de l'intégrale**, nous en déduisons l'encadrement de J_n suivant : ✎ $\displaystyle\int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$

Corrigé

$$\frac{1}{(n+1)(e+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Finalement, comme les deux suites encadrantes sont convergentes de limite nulle, il en résulte **par encadrement** que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$. ▲

Exercice 13.8

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leq \frac{x^n}{1+x^2}$. Par **croissance de l'intégrale** (les bornes sont ds le bon sens) il s'ensuit que

✎ théorème 13.1

$$0 \leq J_{n+1} \leq J_n$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons conclure que la suite (J_n) est décroissante et positive. D'après le **théorème de la limite monotone**, elle est donc convergente.

✎ théorème 12.5

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par **croissance de l'intégrale**

$$0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par **encadrement**, il en résulte que (J_n) est convergente de limite nulle.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0,1]$. D'après la **formule de Leibniz**, on a :

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \ln(1+x^2)\right)' = x^n \ln(1+x^2) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \times \frac{2x}{1+x^2},$$

Soit $x^n \ln(1+x^2) = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \ln(1+x^2)\right)' - \frac{2x^{n+2}}{(n+1)(1+x^2)}$. Intégrons terme à terme cette égalité. D'après le **théorème fondamental du calcul intégral**, il en résulte

✎ théorème 13.6

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}. \end{aligned}$$

3. Comme la suite (J_n) est convergente de limite nulle, il découle de cette dernière égalité que (I_n) est convergente de limite nulle par opérations algébriques sur des suites convergentes.

✎ théorème 12.2

4. D'après la question précédente, l'égalité suivante a lieu pour tout entier n

$$nI_n = \ln(2)\frac{n}{n+1} - \frac{2n}{n+1}J_{n+2} = \ln(2)\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{1+\frac{1}{n}}J_{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2).$$

Ainsi, , on a bien établi que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \ln(2)$. ▲

✎ *En CPGE vous apprendrez que cette relation signifie que I_n se comporte lorsque n est très grand, comme $\frac{\ln(2)}{n}$.*

Exercice 13.9

1. a. Soit a, b, c des réels. Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+\star}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2} &\iff 1 = a(1+t)^2 + bt(1+t) + ct \\ &\iff 1 = (a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a. \end{aligned}$$

Par **identification des coefficients**, on trouve que a, b, c doivent être solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 0 \\ 2a+b+c &=& 0 \\ a &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ b &=& -1 \\ c &=& -1 \end{array}\right.$$

Ainsi, pout tout réel $t \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{1}{t(1+t)^2} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$.

b. Soit $x \geq 1$ fixé. Calculons $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t(1+t^2)}$ à l'aide de la décomposition ci-dessus. Par **linéarité** de l'intégrale, il vient :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right) dt &= \left[\ln(t) - \ln(1+t) + \frac{1}{1+t}\right]_1^x \\ &= \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{1+x} + \ln(2) - \frac{1}{2} \\ &= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{1+x} + \ln(2) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. a. La fonction définie par $f(t) = \ln(t) \times \dfrac{1}{(1+t)^2}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ comme produit de telles fonctions et la **formule de Leibniz** donne :

$$f'(t) = \frac{1}{t(1+t)^2} - 2\frac{\ln(t)}{(1+t)^3}$$

b. Soit $x \geq 1$ fixé.

D'une part, d'après le **théorème fondamental du calcul intégral**, on a :

$$\int_1^x f'(t)\,dt \;=\; \Big[f(t)\Big]_1^x = \left[\frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\right]_1^x = \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}$$

D'autre part, il découle de la **linéarité de l'intégrale** que :

$$\int_1^x f'(t)\,dt \;=\; \int_1^x \frac{1}{t(1+t)^2}\,dt - 2\int \frac{\ln(t)}{(1+t)^3}\,dt = \int_1^x \frac{dt}{t(1+t)^2} - 2\varphi(x).$$

En égalisant ces deux expressions de $\displaystyle\int_1^x f'(t)\,dt$, on tire

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2}\left(\int_1^x \frac{dt}{t(1+t)^2} - \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{1+x} - \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} + \ln(2) - \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

c. Étudions la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\varphi(x)$.

- Lorsque x tend vers $+\infty$, on a $\ln(\frac{x}{x+1}) = \ln(1 - \frac{1}{x+1}) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$;
- Par opérations algébriques, on a $\frac{1}{x+1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$;
- Par **croissances comparées** $\dfrac{\ln(x)}{(1+x)^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

On utilise la continuité de la fonction ln *en* 1.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)$. ▲

Corrigé

Exercice 13.10

théorème 13.5

1. L'intégrande $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$. D'après le **théorème fondamental du calcul intégral**, f est l'unique primitive de l'intégrande qui s'annule au point 1. En particulier, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{e^x}{x}$$

Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}+\star$. Comme de plus $f(1) = 0$, on en déduit que $\forall x > 0, \quad f(x) > 0 \iff x > 1$. Le tableau suivant résume ces propriétés de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	e	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme de telles fonctions, de plus,

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Or, par croissance de la fonction exponentielle, nous avons pour tout $x > 0$, $e^x > 1$. Par conséquent g' est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Comme de plus, g s'annule au point 1, il s'ensuit que

$$\forall x > 0, \quad g(x) > 0 \iff x > 1.$$

On en déduit le tableau de signes

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - \ln(x)$		$-$	0	$+$	

En particulier,

- Au voisinage de 0^+, on a $f(x) \leq \ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$;
- Au voisinage de 0^+, on a $f(x) \geq \ln(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$.

Par comparaison, il en résulte que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. ▲

Chapitre 14

Probabilités sur un univers fini

Jacques Bernoulli est le premier d'une famille de mathématiciens suisses. Il aborde pratiquement tous les sujets en mathématiques ; son apport a été fondamental dans le développement du calcul différentiel et intégral mais on lui doit aussi des travaux importants sur les courbes. À la fin de sa vie, il s'intéresse aux calculs des probabilités. Dans son ouvrage posthume *Ars conjectandi* publié en 1713, il étudie la loi qui porte son nom ainsi que la loi binomiale.

Jacques Bernoulli
1654-1705

OBJECTIFS

■ les incontournables

- ▸ identifier et modéliser l'expérience aléatoire
  - ▸ traduire ensemblistement l'énoncé
  - ▸ utiliser les propriétés classiques des probabilités
  - ▸ mettre en œuvre les formules des probabilités totales, des probabilités composées et de Bayes

■ et plus si affinités

- utiliser la formule des probabilités totales pour obtenir une relation de récurrence entre les termes d'une suite de probabilités.

Résumé de cours

Le langage des probabilités

Expériences et événements aléatoires

Définition : *Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat. L'étude d'une expérience aléatoire commence par la description des résultats possibles, appelés **éventualités**. L'ensemble des résultats possibles est appelé **univers des possibles**. On le note généralement Ω.*

Définition : *Un **événement aléatoire** est un événement qui peut se produire ou non, suivant le résultat de l'expérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des éventualités qui le réalisent. Il s'agit donc d'une partie de Ω. À la suite d'une expérience aléatoire, on dira que l'**événement A est réalisé** si le résultat ω de cette expérience est élément de A.*

Vocabulaire : *Ω est l'événement certain, $\emptyset$ est l'événement impossible.*

Liens avec les opérations ensemblistes

L'identification entre les événements aléatoires et les parties de Ω permet d'utiliser les opérations élémentaires ensemblistes pour traduire certains événements, ainsi

- l'événement (A *ou* B), appelé **disjonction de** A **et** B, est modélisé par la réunion $A \cup B$;
- l'événement (A *et* B), appelé **conjonction de** A **et** B, est modélisé par l'intersection $A \cap B$;
- l'événement $\overline{A}$, appelé **contraire de** A, est modélisé par le complémentaire de A $\complement_\Omega A$.

Événements incompatibles, système complet d'événements

Définition : *Deux **événements** A et B sont dits **incompatibles** lorsqu'il est impossible qu'ils soient réalisés simultanément, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.*

Définition : *Une famille finie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'événements forme une **partition** de Ω ou un **système complet d'événements** si :*

- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$
- *Pour tout couple* $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ ***si*** $i \neq j$.

Exemple : *si A est un événement quelconque, $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements.*

Espace probabilisé fini

Loi de probabilité sur un ensemble fini

Définition : *Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_n\}$ un ensemble fini.*

- *Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est attribuer à chaque éventualité ω_i, un réel $p_i \in [0,1]$ de telle sorte que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.
- *Étant donné un événement $A \subset \Omega$, on définit alors la **probabilité de** A, et on note $P(A)$ comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A.*

$$P(A) = \sum_{i \in [\![1,n]\!] \mid \omega_i \in A} p_i$$

On dit alors que (Ω, P) est un ***espace probabilisé fini****.*

Remarque : on a alors $P(\{\omega_i\}) = p_i$.

Probabilité uniforme sur un ensemble fini

Théorème-Définition 14.1.— On considère une expérience aléatoire pour laquelle l'univers des possibles Ω est un ensemble fini, non vide et $A \subset \Omega$ une partie de Ω.
La **probabilité uniforme** pour que l'événement A soit réalisé à l'issue de l'expérience aléatoire est donnée par :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Card }(A)}{\text{Card }(\Omega)} = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}}$$

Le procédé qui à tout événement A de Ω associe sa probabilité $P(A)$ définit une probabilité sur Ω appelée **probabilité uniforme**.

Notation : *soit $A \subset \Omega$, on appelle* ***cardinal*** *de A, et on note Card(A), le nombre d'éléments de A.*

Propriétés des probabilités finies

Théorème 14.2.— Propriétés fondamentales des lois de probabilités —. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit A et B des événements. Alors

- $P(\Omega) = 1$.
- **Si** A et B sont incompatibles, **alors** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Corollaire 14.3.— Avec les notations ci-dessus

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Remarque : $P(\Omega) = 1$ donc $P(\emptyset) = 0$.

Vocabulaire : *un événement B est dit* ***négligeable*** *pour la loi P si $P(B) = 0$.*

Théorème 14.4.— Formule d'additivité finie —. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements **deux à deux incompatibles**, alors

$$\boxed{P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

Méthodes

Bien aborder un exercice de probabilité

Si l'objet de la théorie des probabilités est l'aléatoire, la résolution d'un exercice de probabilité ne doit rien au hasard ! Dans un problème classique, l'énoncé fournit toutes les indications utiles à la construction du modèle, à condition de savoir le décrypter !

Modélisation d'une expérience aléatoire

$\boxed{1}$ **Description des résultats possibles** de l'expérience aléatoire (éventualités).
Lors de cette étape cruciale, il faut essayer autant que possible de **simplifier cette description**, afin de se ramener à un modèle connu.
On pose alors $\boldsymbol{\Omega}$ l'univers des possibles, c'est-à-dire de l'ensemble de toutes les éventualités.

$\boxed{2}$ **Choix d'une loi de probabilité sur $\boldsymbol{\Omega}$.** En pratique, on n'a pas vraiment le choix !

- **Il y a équiprobabilité des événements élémentaires :** on définit sur Ω la probabilité uniforme.
- **Il n'y a pas équiprobabilité des événements élémentaires :** en ce cas, l'énoncé permet de définir la loi de probabilité en précisant la probabilité de certains événements « **importants** ».
  - Identifiez ces événements en choisissant des notations adaptées.
  - Explicitez en français ces événements.
  - Traduisez-les en termes de parties de Ω.

Exemple : considérons l'expérience aléatoire suivante. On lance deux dés (honnêtes !) discernables (de couleurs différentes par exemple) et on note les numéros obtenus.
Dans ce cas, les résultats possibles sont les couples $(1,1),(1,2),\dots,(6,5),(6,6)$. Ainsi, $\Omega = [\![1,6]\!]^2$.
Comme les 36 issues possibles sont équiprobables (le dé n'est pas truqué !), Ω est muni de la loi de probabilité uniforme.

Mise en œuvre : exercice 14.5, exercice 14.6.

Décryptage du sujet

Une fois le modèle construit, vous devez traduire les données et les questions de l'énoncé en hypothèses ensemblistes.

❑ Méthode 14.1.— Comment traduire ensemblistement les données de l'énoncé
Un événement peut être traduit comme

- **réunion** d'événements lorsqu'il est décrit dans l'énoncé à l'aide des mots-clés « ou », « au moins », « il existe » ;
- **intersection** lorsqu'il est décrit dans l'énoncé à l'aide des mots-clés « et », « tout, tous, toutes », « chaque, chacun, chacune » ;
- **complémentaire** lorsqu'il est plutôt décrit dans l'énoncé de façon négative, *i.e.* comme le contraire d'un autre.

Méthodes

Exemple : on tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On note C l'événement « on a un cœur »et D l'événement « on a une dame ». L'événement « obtenir une dame ou un cœur » est $C \cup D = \{$ 7♥, 8♥, 9♥, 10♥, V♥, D♥, R♥, A♥, D♣, D♦, D♠$\}$. L'événement « obtenir la dame de cœur » est $C \cap D = \{$D♥ $\}$.

Mise en œuvre : exercice 14.1.

■ Calcul des probabilités

> ❑ **Méthode 14.2.— Comment calculer $P(A)$ en cas d'équiprobabilité**
> Lorsqu'il y a équiprobabilité des événements élémentaires, Ω est muni de la probabilité uniforme.
>
> $\boxed{1}$ On calcule $n = \text{Card }(\Omega)$. Pour tout éventualité $\omega \in \Omega$, on a $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{n}$.
>
> $\boxed{2}$ Calculer la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$, revient à dénombrer A. On conclut alors à l'aide de la formule classique
>
> $$\boxed{P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{Card }(A)}{\text{Card }(\Omega)}}$$

Exemple : reprenons l'expérience aléatoire correspondant au lancer d'un couple de dés honnêtes et calculons les probabilités des événements suivants :

- A « *la somme des nombres obtenus est supérieure ou égale à 10* ».
- B « *le produit des nombres obtenus est supérieur ou égal à 20* ».

Pour dresser la liste des couples (i, j) qui réalisent A, il suffit d'écrire la table de l'addition ! Il vient $A = \{(4,6); (5,5); (5,6); (6,4); (6,5); (6,6)\}$. De même, en examinant la table de multiplication, on obtient aisément $B = \{(4,5); (4,6); (5,4); (5,5); (5,6); (6,4); (6,5); (6,6)\}$.
Finalement, $P(A) = \dfrac{\text{Card }(A)}{\text{Card }(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$, $\quad P(B) = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$.

Mise en œuvre : exercice 14.6.

> ❑ **Méthode 14.3.— Comment calculer $P(A \cup B)$**
>
> ► Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
>
> ► Si A et B sont quelconques, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple : on tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Comme défini plus haut C désigne l'événement « on obtient un cœur » et D l'événement « on obtient une dame ».
Ici les éventualités sont équiprobables, Ω est donc muni de la loi de probabilité uniforme. Ainsi, $P(C) = \dfrac{\text{Card }(C)}{\text{Card }(\Omega)} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$, $P(D) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$, $P(C \cap D) = \dfrac{1}{32}$ et $PC \cup D) = \dfrac{\text{Card }(C \cup D)}{\text{Card }(\Omega)} = \dfrac{11}{32}$.
Vérifions ceci au moyen de la deuxième formule :
$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \dfrac{8+4-1}{32} = \dfrac{11}{32}$.

Mise en œuvre : exercice 14.2, exercice 14.4.

Remarque : la première formule se généralise au cas d'une famille finie d'événements deux à deux incompatibles (**théorème 14.4**).

❑ Méthode 14.4.— Comment calculer la probabilité de $\overline{A}$

On peut appliquer le **corollaire du théorème 14.2** :

$\boxed{1}$ On calcule $P(A)$.

$\boxed{2}$ On conclut $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Mise en œuvre : exercice 14.4.

Remarque : le calcul de la probabilité de l'événement contraire peut s'avérer plus facile que le calcul direct de $P(A)$. C'est notamment le cas pour le calcul des probabilités des réunions quelconques d'un nombre fini d'événements.

Le saviez-vous ?

Le mot « hasard » nous vient de l'arabe az zahr qui signifie la fleur. En effet, dans certains jeux de dés, la face considérée comme gagnante était décorée d'une fleur.

Énoncé des exercices

Propriétés des probabilités

Exercice 14.1 : Soit A, B, C trois événements d'un même espace probabilisé (Ω, P). Exprimer ensemblistement en fonction de A, B, C les événements suivants :

1. A_1 « l'un au moins des trois événements se réalise » ;
2. A_2 « un et un seul des trois événements se réalise » ;
3. A_3 « deux au moins des trois événements se réalisent » ;
4. A_4 « deux exactement des trois événements se réalisent » ;
5. A_5 « aucun des trois ne se réalise » ;
6. A_6 « deux au plus au plus se réalisent ».

Exercice 14.2 : Soit A, B des événements d'un même espace probabilisé (Ω, P).
1. Soit C l'événement « soit A, soit B se réalise ». Traduire ensemblistement C.
2. Montrer que $P(C) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

Exercice 14.3 : Soit A, B des événements d'un même espace probabilisé (Ω, P). On suppose que $P(A) = P(B) = \dfrac{3}{4}$. Déterminer un encadrement de $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Probabilités classiques

Exercice 14.4 : On choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 100.
1. Soit A l'événement « L'écriture décimale du nombre choisi contient au moins un chiffre 3 ».
 a. Quels sont les événements élémentaires qui constituent A ?
 b. Déterminer $P(A)$ et en déduire $P(\overline{A})$.
2. Soit B l'événement « le nombre choisi est supérieur ou égal à 80 ».
 a. Déterminer $P(B)$, $P(A \cap B)$.
 b. En déduire $P(A \cup B)$.

Exercice 14.5 : Dans une urne se trouvent une boule blanche, deux boules rouges et deux boules noires.
On tire une boule au hasard dans l'urne. On note sa couleur, on la remet dans l'urne et on en tire une deuxième au hasard. On s'intéresse aux couleurs des boules sorties, dans l'ordre.
1. Modélisation
 a. Déterminer les différentes issues possibles. On note Ω l'univers des possibles.
 b. Déterminer la loi de probabilité sur Ω.
2. Déterminer les probabilités des événements suivants :
 a. D « Obtenir deux fois la même couleur ».
 b. E « Obtenir au moins une boule noire. »
3. Décrire les événements $\overline{D}$, $\overline{E}$, $D \cap E$ $D \cup E$ et calculer leurs probabilités.

Exercice 14.6 : Avec deux dés —.
On jette deux dés à six faces, parfaitement équilibrés et discernables (de couleurs différentes). On note alors la somme des deux numéros obtenus.

1. Modélisation

a. Quel est l'ensemble Φ des issues possibles ?

b. Compléter le tableau à double entrée ci-contre en indiquant dans chaque case la somme des numéros de ligne et de colonne.

c. Déterminer la loi de probabilité de Φ.

2. Déterminer les probabilités des événements suivants :

a. « Obtenir une somme inférieure ou égale à 10. »

b. « Obtenir une somme strictement inférieure à 4. »

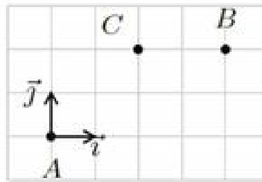
c. « Obtenir une somme impaire. »

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Exercice 14.7 : Sauts de puce —.

Une puce partie du point A de coordonnées $(0,0)$ a rejoint le point $B(4,2)$ en six sauts. À chaque instant, elle a fait un saut d'une unité vers la droite ou vers le haut.

Notation : *le trajet haut-droite-droite-haut-droite-droite sera représenté par le 6-uplet* $(\vec{\jmath},\vec{\imath},\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\imath},\vec{\imath})$.



1. À l'aide d'un arbre, déterminer tous les trajets possibles. Combien y en a-t-il ?

2. On suppose que tous ces trajets sont équiprobables. Quelle est la probabilité que la puce soit passée en C ?

Exercice 14.8 : Fiabilité d'un test médical —.

Lors d'une épidémie, on estime que 2% de la population est atteinte par un virus. On met en place un test médical qui devrait être positif si un individu est contaminé et négatif s'il est sain. Cependant, on a observé les résultats suivants :

- Quand l'individu est malade, le test est positif dans $99,6\%$ des cas.
- Quand l'individu est sain, le test est négatif dans $97,4\%$ des cas.

1. On considère une population de 100 000 personnes. Compléter le tableau ci-dessous :

	Personnes malades	Personnes saines	Total
Test positif			
Test négatif			
Total			

2. Une personne est sélectionnée au hasard. On lui fait passer le test médical. On considère les événements A « la personne est contaminée » et B « la personne a eu un test postif ».

a. Calculer $P(A)$, $P(B)$.

b. Décrire les événements $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ et $A\cup B$, puis calculer leurs probabilités.

c. Calculer la probabilité que le test donne un résultat faux.

Indications

Ex. 14.1

On mettra en œuvre la **méthode 14.1**.

Ex. 14.4

Pur bien démarrer cet exercice, commencez par bien modéliser l'expérience aléatoire. Ensuite vous pourrez utiliser les **méthode 14.2**, **méthode 14.4** *et la* **méthode 14.3**

Ex. 14.6

1. *Les différents événements élémentaires pour* Φ *ne sont pas équiprobables. Pour déterminer la loi de probabilité de* Φ, *on considérera le couple de numéros obtenus. Comme les dés ne sont pas pipés, ces différents couples sont quant à eux équiprobables.On pourra donc appliquer la* **méthode 14.2**.

Ex. 14.7

1. *Chaque point étape du parcours de la puce correspondra à un sommet de cet arbre. Il pourra directement être représenté par ses coordonnées cartésiennes dans le plan.*

Ex. 14.8

1. *Pour bien démarrer, calculez d'abord combien il y a de personnes contaminées et de personnes saines dans cette population.*

Corrigé des exercices

Exercice 14.1

On met en œuvre la **méthode 14.1**

1. $A_1 = A \cup B \cup C$.

2. Ici, A_2 est une disjonction de trois cas : soit A se réalise et ni B, ni C ne se réalisent, soit B seulement est réalisé, soit C seulement est réalisé. Ainsi $A_2 = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

3. A_3 est décrit avec l'expression « au moins ». Il se traduit comme A_1 au moyen d'une réunion. $A_3 = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

4. $A_4 = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$.

5. $A_5 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

6. Il est plus facile de traduire l'événement contraire $\overline{A}_6$ est l'événement « les trois événements A,B, C se réalisent. ». Ainsi $A_6 = \overline{A \cap B \cap C}$. ▲

Lorsque l'événement est décrit en français avec l'expression « au moins »cela se traduit ensemblistement par une réunion.

Exercice 14.2

1. L'événement « soit A, soit B » se traduit par $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2. La réunion ci-dessus étant disjointe, l'additivité de P et le **corollaire 14.3** donnent $P(C) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$. ▲

Exercice 14.3

Pour déterminer un encadrement de ces probabilités, on peut utiliser la propriété de croissance de la probabilité P (**théorème 14.2**).

- On a d'une part $A \subset A \cup B \subset \Omega$. Par **croissance de** P, il s'ensuit que

$$\frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq 1.$$

- D'autre part, d'après la **formule de Poincaré** (**corollaire 14.3**), on a $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{2} - P(A \cup B)$. Comme $\frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq 1$, il vient $\frac{1}{2} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{4}$. ▲

Exercice 14.4

Dans cette expérience aléatoire, une éventualité est un nombre entier compris entre 1 et 100. L'univers des possibles est donc $\Omega = \{1, 2, \dots, 99, 100\}$. Comme le nombre est choisi au hasard, Ω est muni de la probabilité uniforme.

1. Soit A l'événement « L'écriture décimale du nombre choisi contient au moins un chiffre 3 ».

a. Les éventualités qui constituent A sont de deux sortes : les nombres qui ont « 3 » comme chiffre des unités et ceux qui ont « 3 » comme chiffre des dizaines.

Ainsi $A = \{13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 30, 31, 32, 34, 35, 35, 36, 37, 38, 39\}$.

Le nombre « 33 » fait partie des deux catégories !

b. Ω étant muni de la probabilité uniforme, la **méthode 14.2** donne

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{Card } (A)}{\text{Card } (\Omega)} = \frac{19}{100}.$$

Corrigé

La **méthode 14.4** permet alors de conclure que $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{81}{100}$.

2. Soit B l'événement « le nombre choisi est supérieur ou égal à 80 ».

a. À l'aide de la **méthode 14.2**, on calcule $P(B) = \dfrac{\text{Card }(B)}{\text{Card }(\Omega)} = \dfrac{21}{100}$ et $P(A \cap B) = P(\{83, 93\}) = \dfrac{2}{100}$.

b. Finalement, la **formule de Poincaré**, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{38}{100}$. ▲

Exercice 14.5

1. a. Notons $\mathcal{U} = \{B_1, N_1, N_2, R_1, R_2\}$ l'urne contenant les cinq boules. Dans l'expérience aléatoire décrite, une éventualité est la liste des couleurs des deux boules prélevées. Convenons de noter B, N, R les trois couleurs « blanche », « noire », « rouge ». Nous pouvons alors modéliser une éventualité comme un couple de couleurs. Les différentes issues possibles sont donc

$$(B, B); (B, N); (B, R); (N, B); (N, N); (N, R); (R, B); (R, N); (R, R).$$

La première lettre correspond à la couleur de la première boule, le seconde correspond à celle de la deuxième.

Ces neuf couples constituent l'univers des possibles Ω.

b. Vu la composition de l'urne, ces différentes issues ne sont pas toutes équiprobables. Le tableau suivant représente les 25 tirages possibles de deux boules dans l'urne.

En gras, nous avons fait apparaître les quatre tirages de boules qui réalisent l'éventualité (N, R).

	B_1	N_1	N_2	R_1	R_2
B_1	(B_1, B_1)	(B_1, N_1)	(B_1, N_2)	(B_1, R_1)	(B_1, R_2)
N_1	(N_1, B_1)	(N_1, N_1)	(N_1, N_2)	$\boldsymbol{(N_1, R_1)}$	$\boldsymbol{(N_1, R_2)}$
N_2	(N_2, B_1)	(N_2, N_1)	(N_2, N_2)	$\boldsymbol{(N_2, R_1)}$	$\boldsymbol{(N_2, R_2)}$
R_1	(R_1, B_1)	(R_1, N_1)	(R_1, N_2)	(R_1, R_1)	(R_1, R_2)
R_2	(R_2, B_1)	(R_2, N_1)	(R_2, N_2)	(R_2, R_1)	(R_2, R_2)

Comme les tirages se font au hasard, toutes ces réalisations sont équiprobables. On en déduit la loi de probabilité de Ω en dénombrant les cas favorables :

Par exemple, il y a 4 cas favorables pour l'événement (N, R), sur les 25 possibles. Donc $P(N, R) = \frac{4}{25}$.

- $P(B, B) = \frac{1}{25}$;
- $P(B, N) = \frac{2}{25}$;
- $P(B, R) = \frac{2}{25}$;
- $P(N, B) = \frac{2}{25}$;
- $P(N, N) = \frac{4}{25}$;
- $\boldsymbol{P(N, R)} = \frac{4}{25}$;
- $P(R, B) = \frac{2}{25}$;
- $P(R, N) = \frac{4}{25}$;
- $P(R, R) = \frac{4}{25}$.

2. a. $D = \{(B, B); (N, N); (R, R)\}$. La probabilité de D est par définition la somme des probabilités des éventualités qui le constituent : $P(D) = \frac{9}{25}$.

b. $E = \{(B, N); (N, B); (N, N); (R, N), (N, R)\}$. Par suite, $P(E) = \frac{16}{25}$.

3. Explicitons ces événements et calculons leurs probabilités.

- $\overline{D}$ est l'événement « Obtenir deux boules de couleurs différentes ». Sa probabilité est $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = \frac{16}{25}$.
- $\overline{E}$ est l'événement « Ne pas obtenir de boules de couleur noire ». Sa probabilité est $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = \frac{9}{25}$.
- $D \cap E$ est l'événement « Obtenir deux boules de couleur noire ». Sa probabilité est $P(D \cap E) = P(N, N) = \frac{4}{25}$.
- $D \cup E$ est l'événement « Obtenir deux boules de couleurs diffrentes ou au moins une boule de couleur noire ». Sa probabilité est obtenue par la **formule de Poincaré** : $P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E) = \frac{21}{25}$. ▲

Exercice 14.6

1. **a.** Un résultat possible pour cette expérience aléatoire est un entier compris entre 2 et 12, l'univers des possibles est donc $\Phi = \{2, 3, \ldots, 12\}$.

b.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

c. Nous allons munir Φ d'une probabilité en procédant de la manière suivante. Notons $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{(d_1, d_2),\ 1 \leq d_1 \leq 6,\ 1 \leq d_2 \leq 6\}$ l'ensemble des résultats possibles aux deux lancers de dés.

Comme les dés ne sont pas pipés, toutes les couples (d_1, d_2) sont équiprobables. On munit donc Ω de la probabilité uniforme. La loi de probabilité de Ω s'obtient en dénombrant les cas favorables :

- $P(2) = \frac{1}{36}$;
- $P(3) = \frac{2}{36}$;
- $P(4) = \frac{3}{36}$;
- $P(5) = \frac{4}{36}$;
- $P(6) = \frac{5}{36}$;
- $P(7) = \frac{6}{36}$;
- $P(8) = \frac{5}{36}$;
- $P(9) = \frac{4}{36}$;
- $P(10) = \frac{3}{36}$;
- $P(11) = \frac{2}{36}$;
- $P(12) = \frac{1}{36}$.

2. Par définition, la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des éventualités qui le constituent. Ainsi

a. Soit $[S \leq 10]$ l'événement « la somme est inférieure ou égale à 10. » Alors $P[S \leq 10] = P\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = 1 - P\{11, 12\} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$.

b. Soit $[S < 4]$ l'événement « la somme est strictement inférieure à 4. » Alors $P[S < 4] = P\{2, 3\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

c. Notons $[S \in \{3, 5, 7, 9, 11\}]$ l'événement « la somme est impaire. » Alors $P[S \in \{3, 5, 7, 9, 11\}] = P\{3, 5, 7, 9, 11\} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. ▲

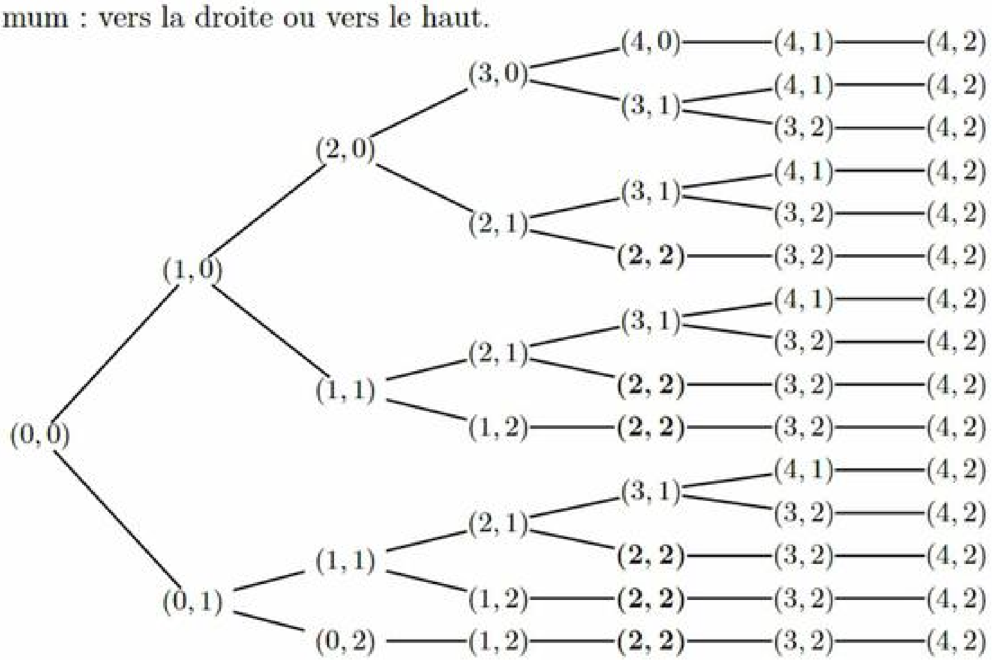
Exercice 14.7

1. À chaque sommet, la puce peut rebondir dans deux directions au maximum : vers la droite ou vers le haut.

Armons-nous de patience pour réaliser cet arbre !

Les sommets de cet arbre correspondent aux coordonnées cartésiennes de la puce à chaque étape.

Nous avons indiqué en gras les passages de la puce en C qui a pour coordonnées $(\mathbf{2}, \mathbf{2})$.



Ainsi, la puce a pu emprunter l'un des 15 trajets différents.

2. On suppose que tous ces trajets sont équiprobables. 6 trajets passent par C. Ainsi, la probabilité que la puce soi passée par C est de $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. ▲

Exercice 14.8

1. On considère une population de 100 000 personnes. À l'aide des données fournies par l'énoncé, on peut compléter le tableau de la manière suivante.

	Personnes malades	Personnes saines	Total
Test positif	1 992	2 548	4 540
Test négatif	8	95 452	95 460
Total	2 000	98 000	100 000

2. On considère les événements A « la personne est contaminée » et B « la personne a eu un test postif ». Comme la personne est « tirée au hasard » l'univers des possibles (la population globale) est muni de la probabilité uniforme.

a. Ainsi $P(A) = \dfrac{2\,000}{100\,000} = 0,02$, $P(B) = \dfrac{4\,540}{100\,000} = 0,00454$.

b. Explicitons ces événements et calculons leurs probabilités.

- $\overline{A}$ est l'événement « La personne est saine ». Sa probabilité est $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,980$.
- $\overline{B}$ est l'événement « Le test est négatif ». Sa probabilité est $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0,9546$.
- $A \cap B$ est l'événement « La personne est malade et son test est positif ». Sa probabilité est $P(A \cap B) = \dfrac{1\,992}{100\,000} = 0,01992$.
- $A \cap \overline{B}$ est l'événement « La personne est malade mais son test est négatif ». Sa probabilité est $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{8}{100\,000} = 0,00008$.
- $\overline{A} \cap \overline{B}$ est l'événement « La personne est saine et son test est négatif ». Sa probabilité est $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{95\,452}{100\,000} = 0,95452$.
- $A \cup B$ est l'événement « La personn est malade ou son test est positif ». Sa probabilité est obtenue par la **formule de Poincaré** : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,04548$.

c. Le test indique un résultat faux lorsque la personne est saine mais son test est positif ou lorsque la personne est malade et que le test est négatif. Ceci correspond donc à l'événement $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. D'après les questions précédentes,

- $P(A \cap \overline{B}) = 0,00008$;
- $P(\overline{A} \cap B) = \dfrac{2\,548}{100\,000} = 0,02548$.

Ces deux événements étant incompatibles, il en résulte par additivité que $P(A \cap \overline{B} \cup)(\overline{A} \cap B) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0,02556$. ▲

Chapitre 15

Conditionnement, indépendance

Blaise Pascal et Pierre de Fermat ont échangé quelques lettres considérées souvent comme le début du calcul des probabilités. L'une d'elle pose le problème suivant : deux joueurs misent la même somme et joue en un certain nombre de partie. Le jeu est soudainement interrompu alors que le premier joueur est à deux parties gagnées de la victoire et le second à trois. On se propose de répartir la mise proportionnellement à leur chance de gagner.

Blaise Pascal
1623-1662

OBJECTIFS

■ les incontournables

- ▸ traduire l'énoncé au moyen d'un arbre pondéré ;
  - ▸ utiliser les propriétés classiques des probabilités ;
  - ▸ mettre en œuvre les formules des probabilités totales, des probabilités composées et de Bayes.

■ et plus si affinités

- utiliser la formule des probabilités totales pour obtenir une relation de récurrence entre les termes d'une suite de probabilités.

Résumé de cours

Dans tout le chapitre (Ω, P) est un espace probabilisé.

Conditionnement

Probabilité conditionnelle de A sachant B

Définition : *Soit B un événement non négligeable (c'est-à-dire tel que $P(B) > 0$). Pour tout événement $A \subset \Omega$, on définit la* **probabilité conditionnelle de A sachant B** *par :*

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Notation : *On note aussi $P(A \mid B)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.*

Proposition 15.1.— Loi de probabilité conditionnelle —. Soit B un événement non négligeable. L'application qui à tout événement $A \subset \Omega$ associe la probabilité conditionnelle de A sachant B, est une loi de probabilité sur Ω.

Remarque : en particulier, cette probabilité conditionnelle P_B vérifie toutes les propriétés des probabilités déjà établies au chapitre précédent.

Corollaire 15.2.— Pour tous événements A et B tels que $P(B) > 0$,

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)}$$

Corollaire 15.3.— Inversion des conditionnements —. Pour tous événements A et B tels que $P(A), P(B) > 0$,

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}}$$

Formule des probabilités composées

Plus généralement pour calculer la probabilité de l'intersection d'une famille finie d'événements, nous disposons de la :

Proposition 15.4.— Formule des probabilités composées —. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors

$$\boxed{P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \cdots \times P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Vocabulaire : *cette formule est parfois dénommée* **loi des chemins** *car elle s'interprète sur un arbre de probabilités en disant que la probabilité d'une issue est le produit des probabilités inscrites le long de ce chemin.*

Formule des probabilités totales

Théorème 15.5.— Formule des probabilités totales —. Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements. Pour tout événement $B \subset \Omega$,

- $P(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$.
- $P(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P_{A_i}(B)$, si de plus les A_i sont non négligeables.

Corollaire 15.6.— Soit A, B des événements. On suppose que $P(A) > 0$ et $P(\overline{A}) > 0$. Alors

$$\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}$$

Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements

Définition : *Deux événements A et B sont **indépendants pour la probabilité** P lorsque*

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Corollaire 15.7.— Soit A et B deux événements. On suppose que $P(B) > 0$. Alors

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants } \textit{si et seulement si } P_B(A) = P(A).}$$

Remarque : deux événements A et B incompatibles et non négligeables ne sont pas indépendants !

Proposition 15.8.— Soit A, B des événements indépendants pour P, alors

- les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants ;
- les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants ;
- les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Méthodes

Construire et utiliser un arbre pondéré

On peut distinguer trois types d'exercice de probabilité.

- Les différents résultats de l'expérience aléatoire sont équiprobables. En ce cas, l'univers des possibles est muni de la loi de probabilité uniforme comme on l'a vu au chapitre précédent.
- Les résultats de l'expérience aléatoire se répartissent en plusieurs cas $A_1, \dots, A_n$ qui s'excluent les uns les autres. Il s'agit d'un système complet d'événements.
- L'expérience aléatoire consiste en une succession d'épreuves. À chaque étape, les différents résultats possibles constituent aussi un système complet d'événements.

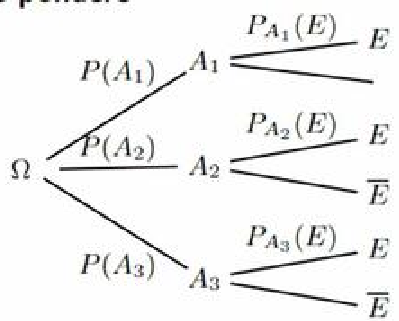
Construire un arbre pondéré

Dans les deux derniers types d'exercice, la réalisation d'un arbre est incontournable ! Non seulement ce schéma est utile pour bien comprendre l'expérience aléatoire mais il permet en outre de visualiser les formules du cours pour le calcul des probabilités **Probabilités totales, Probabilités composées**.

❑ Méthode 15.1.— Comment construire un arbre pondéré

Considérons une expérience aléatoire consistant en 2 épreuves successives. Supposons que

- 3 événements A_1, A_2, A_3 sont possibles à l'issue de la première épreuve qui forment un SCE et
- 2 événements E et $\overline{E}$ sont possibles à l'issue de la deuxième.



$\boxed{1}$ On peut schématiser cette expérience au moyen de l'arbre ci-dessus.

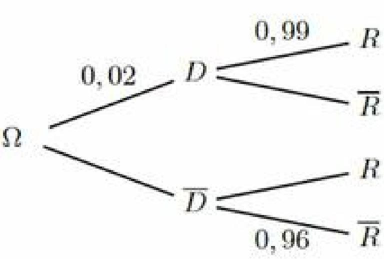
$\boxed{2}$ On complète cette arbre en indiquant au-dessus des branches menant de Ω à A_1, A_2, A_3 les probabilités de ces 3 événements.

$\boxed{3}$ Puis en indiquant au-dessus de chaque branche $A_i \to E$ la probabilité conditionnelle $P_{A_i}(E)$, et au-dessus de chaque branche $A_i \to \overline{E}$ la probabilité conditionnelle $P_{A_i}(\overline{E})$.

Exemple : dans un atelier, 2% des pièces fabriquées sont défectueuses. Lors d'un contrôle, on choisit une pièce au hasard. On estime que

• si la pièce contrôlée est défectueuse, la probabilité qu'elle soit refusée est de $0,99$;

• si la pièce est correcte la probabilité qu'elle soit acceptée est de $0,96$.

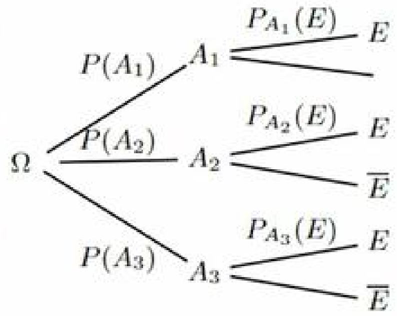


Notons D et R les événements « la pièce est défectueuse » et « la pièce est rejetée ». Nous pouvons représenter cette expérience aléatoire à deux étapes sous la forme d'un arbre pondéré.
Mise en œuvre : exercice 15.4.

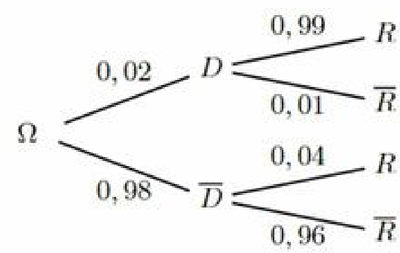
❑ Méthode 15.2.— Comment utiliser un arbre pondéré

Supposons qu'une expérience aléatoire soit modélisée par l'arbre ci-contre. Trois règles permettent d'extraire le maximum d'informations de cet arbre.

- **Loi des nœuds** la somme des probabilités issues de n'importe quel nœud vaut 1.
- **Loi des chemins** la probabilité de l'issue représentée par un chemin est le produit des probabilités inscrites le long de ce chemin.
- **Loi des probabilités totales** la probabilité d'un événement E est la somme des probabilités de toutes les issues qui mènent à la réalisation de E.



Exemple : reprenons l'exemple précédent. Déterminons la probabilité que la pièce soit correcte et rejetée ($\overline{D} \cap R$) puis qu'elle soit rejetée (R).



$\boxed{1}$ On complète d'abord l'arbre à l'aide de la **loi des nœuds**.

$\boxed{2}$ D'après la **loi des chemins**

$$P(\overline{D} \cap R) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(R) = 0,0392,$$

$\boxed{3}$ Finalement, d'après la **loi des probabilités totales**

$$P(R) = P(D) \times P_D(R) + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(R) = 0,059.$$

Mise en œuvre : exercice 15.5, exercice 15.6.

■ Indépendance

❑ Méthode 15.3.— Comment reconnaître des événements indépendants

- On reconnaît que A et B sont indépendants lorsque le fait de savoir que B est réalisé ne présage en rien de la réalisation de A (et inversement).
- Plus généralement, des événements non négligeables sont mutuellement indépendants lorsque tout événement de la famille est indifférent à la réalisation de n'importe quels autres événements de la famille.

Exemple : une urne contient des boules noires et blanches en proportion donnée. On effectue N tirages d'une boule, en notant sa couleur puis en la remettant dans l'urne après chaque tirage. On note pour $n \in [\![1, N]\!]$, B_n l'événement « une boule blanche est prélevée au $n^{\text{ième}}$ tirage ». Comme les tirages s'effectuent avec remise, la famille d'événements (B_n) est mutuellement indépendante. Plus généralement, les résultats obtenus lors d'épreuves indépendantes (lancers successifs à pile ou face, tirages avec remise dans une urne de composition connue, etc.) forment une famille d'événements mutuellement indépendants.

Mise en œuvre : exercice 15.7.

■ Conditionnement

Les méthodes présentées dans cette partie doivent être interprétées sur un arbre pondéré (voir la **méthode 15.1** et la **méthode 15.2**) !

Calculer une probabilité conditionnelle

Souvent, des probabilités conditionnelles sont directement fournies par l'énoncé. Lors de la construction d'un arbre pondéré (**méthode 15.1**), vous inscrivez $P_B(A)$ au-dessus de la branche $B \to A$. Plus généralement, si A, B sont des événements tels que B est non négligeable, on a par définition

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

En pratique, il n'est pas nécessaire de connaître au préalable $P(A \cap B)$ pour calculer $P_B(A)$:

> **❑ Méthode 15.4.— Comment calculer une probabilité conditionnelle**
>
> $\boxed{1}$ On suppose que B est réalisé. En ce cas, l'univers des possibles est changé puisqu'il se restreint à B ! A ne sera donc réalisé qu'au travers de $A \cap B$.
>
> $\boxed{2}$ On calcule la probabilité de cet événement dans le nouveau modèle.

Exemple : on tire une carte au *hasard* d'un jeu de 32 cartes. Considérons les événements A « la carte est la dame de cœur » et B « la carte est de couleur rouge ». Calculons $P_B(A)$. On suppose donc que B est réalisé : désormais, l'univers des possibles est B. Comme le tirage se fait au hasard

$$P_B(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{Card }(A \cap B)}{\text{Card }(B)} = \frac{1}{16}$$

Mise en œuvre : exercice 15.1.

Calculer la probabilité d'une intersection

Pour le calcul de la probabilité d'une intersection, le bon cas est celui d'une famille d'événements indépendants. Dans le cas contraire, on a recours aux probabilités conditionnelles.

> **❑ Méthode 15.5.— Comment calculer la probabilité d'une intersection**
>
> - Si A et B sont des événements indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
> - Si A et B sont des événements tels que $P(B) > 0$, alors $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$.

Mise en œuvre : exercice 15.1.

Remarque : dans un arbre pondéré, la probabilité de l'intersection $A \cap B$ est le produit des probabilités inscrites le long du chemin de A vers B. C'est la **loi des chemins** (**méthode 15.2**). Cette formule se généralise au cas de l'intersection d'une famille finie d'événements, c'est la **formule des probabilités composées** (**théorème 15.4**).

Calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales

Soit $A_1, \ldots, A_n$ un système complet d'événements, l'univers des possibles se partage en plusieurs cas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ qui s'excluent les uns les autres ! Pour mesurer la probabilité d'un événement

Méthodes

B, on peut distinguer plusieurs cas deux à deux incompatibles : $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, ..., $B \cap A_n$. La probabilité de B est la somme des probabilités de ces différentes réalisations de B.

❑ Méthode 15.6.— Comment utiliser la formule des probabilités totales
Pour calculer la probabilité de B à l'aide de la formule des probabilités totales,
$\boxed{1}$ Calculez les probabilités de ces événements $P(A_1), \dots, P(A_n)$ pour vérifier qu'il s'agit d'événements non négligeables.
$\boxed{2}$ Concluez à l'aide du **théorème 15.5** que $P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + \cdots + P(A_n)P_{A_n}(B)$.

Remarque : dans un arbre pondéré, la probabilité de B est la somme des probabilités de toutes les issues qui mènent à sa réalisation.

Mise en œuvre : exercice 15.5, exercice 15.6, exercice 15.8.

Calculer la probabilité des causes

Après avoir utilisé la formule des probabilités totales, il est fréquent de s'intéresser à la probabilité des causes. Il s'agit de mettre en œuvre le **corollaire 15.3**.

❑ Méthode 15.7.— Comment utiliser la formule d'inversion des conditionnements
Soit A, B des événements non négligeables. Pour calculer la probabilité de A sachant B connaissant la probabilité de B sachant A, on utilise la formule d'inversion des conditionnements, **corollaire 15.3** $P_B(A) = \dfrac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$.

Exemple : reprenons l'exemple des pièces de l'atelier. Supposons que la pièce contrôlée est rejetée. Calculons la probabilité que cette pièce soit pourtant correcte. Autrement dit, il s'agit de déterminer $P_R(\overline{D})$. La **Formule d'inversion des conditionnements** donne :

$$P_R(\overline{D}) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(R)} = \frac{0,0392}{0,059} = 0,664.$$

Mise en œuvre : exercice 15.5, exercice 15.6.

Le saviez-vous ?

Thomas Bayes vivait au XVIII^{e} siècle. C'était un prêtre et un théologien qui s'intéressait aux mathématiques à ses moments libres. Le principal écrit qu'on lui doit de son vivant est une défense du calcul différentiel injustement attaqué par un évêque d'origine irlandaise, George Berkeley. C'est un de ses amis qui retrouve après sa mort, survenue en 1763, quelques écrits en particulier, celui qui traite de la fameuse formule qui porte son nom.

Énoncé des exercices

Probabilités conditionnelles

Exercice 15.1 : Soit A, B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P).
1. On suppose que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,01$. Calculer $P_B(A)$ et $P_A(B)$.
2. On suppose que $P(A) = 0,2$, $P_A(B) = 0,3$ et $P_B(A) = 0,1$. Calculer $P(A \cap B), P(B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 15.2 : Les trois quarts de la population d'un pays sont vaccinés contre une maladie contagieuse. On estime que sur l'ensemble de la population 10% des individus sont malades, et que 18% sont des individus non vaccinés et sains.
On choisit un individu au hasard dans cette population.
1. Traduire les informations dans un tableau à double entrée et le compléter.
2. Sachant que l'individu est vacciné, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Exercice 15.3 : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

- C : « La carte tirée est un cœur ».
- T : « La carte tirée est un trèfle ».
- R : « La carte tirée est de couleur rouge ».
- D : « La carte tirée est une dame ».
- F : « La carte tirée est une figure ».

1. Déterminer $P_C(D)$, $P_R(C)$, $P(F \cap T)$, $P(D \cup C)$.
2. Quelle est la probabilité que la carte tirée soit une figure de couleur rouge ?
3. Sachant que la carte tirée est une dame, quelle est la probabilité que ce soit un trèfle ?

Arbres de probabilités

Exercice 15.4 : Trois urnes contiennent des boules blanches et noires : $\mathcal{U}_1$ contient 2 blanches et 3 noires, $\mathcal{U}_2$ contient 4 blanches et 2 noires, $\mathcal{U}_3$ contient 6 blanches et 1 noire. On effectue trois tirages successifs selon le protocole suivant.

- On tire une boule de $\mathcal{U}_1$, on note sa couleur, on met cette boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
- On tire une boule de $\mathcal{U}_2$, on note sa couleur, on remet cette boule dans l'urne $\mathcal{U}_3$.
- On tire une boule de $\mathcal{U}_3$ et on note sa couleur.

1. Notons B_i (resp. N_i) l'événement « la $i^{\text{ième}}$ boule tirée est blanche (resp. noire) ». Représenter cette succession d'épreuves aléatoires sous forme d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité pour que les trois boules tirées soient de la même couleur ?

Exercice 15.5 : Une compagnie d'assurance automobile a classé ses assurés en trois classes d'âges : moins de 25 ans, de 25 ans à 50 ans, plus de 50 ans. Le tableau ci-dessous fournit deux informations la proportion d'assurés appartenant à chaque classe et la probabilité qu'un assuré, d'une classe donnée déclare au moins un accident au cours de l'année.

Classe	Proportion	Probabilité
moins de 25 ans	0,25	0,12
de 25 à 50 ans	0,53	0,06
plus de 50 ans	0,22	0,09

1. Un assuré est tiré au hasard dans le fichier de la compagnie. Quelle est la probabilité qu'il ait déclaré au moins un accident au cours de l'année ?
2. Quelle est la probabilité qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident au cours de l'année soit agé d'au plus 25 ans ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un assuré agé de 25 ans ou plus ait au moins un accident au cours de l'année ?
4. Quelle est la probabilité qu'un assuré n'ayant déclaré aucun accident soit âgé de 25 à 50 ans ?

Exercice 15.6 : Dans une usine, on fabrique des composants électroniques sur trois machines. Les machines M_1, M_2 et M_3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% des composants.
Le qualiticien de l'usine estime que

— 2% des composants fabriqués par la machine M_1 sont défectueux,

— 3% des composants fabriqués par la machine M_2 sont défectueux,

— 5% des composants fabriqués par la machine M_3 sont défectueux.

1. Quelle est la probabilité qu'un composant pris au hasard à la sortie de l'usine soit défectueux ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une pièce défectueuse provenant de M_1 ? Les événements « la pièce est défectueuse » et « la pièce provient de M_1 » sont-ils indépendants ?
3. Un composant est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de M_1 ?

Suites de probabilités

Exercice 15.7 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est p, avec $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?
2. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers face ne soit jamais suivi de pile.

Exercice 15.8 : On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir pile soit de 1/3.

— Si on obtient pile on décide de jouer uniquement avec le dé A.

— Si on obtient face on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au premier coup.
2. On a obtenu rouge aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième coup.
3. On a obtenu rouge aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A.

Indications

Ex. 15.1

On utilise la définition de la probabilité conditionnelle $P_B(A)$.

Ex. 15.3

Pour déterminer ces probabilités conditionnelles, vous mettrez en œuvre la **méthode 15.4**.

Ex. 15.4

Dans cet exercice, la composition des urnes au moment du tirage dépend des résultats précédents. Les tirages successifs ne sont pas indépendants les uns des autres.

1. *On met en œuvre la* **méthode 15.1**.

2. *On utilisera la* **méthode 15.2**.

Ex. 15.7

1. *À l'aide, des événements* P_k *(resp.* F_k*) « on a obtenu pile (resp. face) au* k *ième lancer » pour* $k \in [\![1, n]\!]$, *décrivez l'événement « au cours des* n *lancers, pile est apparu au moins une fois » ainsi que son contraire !*

2. *Vous pourrez décrire l'événement « au cours des* n *lancers, face n'est jamais suivi de pile » en discutant suivant le rang d'apparition du premier face à l'aide des* P_k *et* F_k.

Corrigé des exercices

Exercice 15.1

1. Par définition de la probabilité conditionnelle, il vient directement : $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,01}{0,4} = 0,025$ et $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,01}{0,2} = 0,05$.

2. De la définition de la probabilité conditionnelle, on tire $P(A\cap B) = P(A)P_A(B) = 0,2\times 0,3 = 0,06$, puis $P(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P_B(A)} = \dfrac{0,06}{0,1} = 0,6$. Enfin, d'après la **méthode 14.3**, il vient $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = 0,2+0,6-0,06 = 0,74$. ▲

Exercice 15.2

On note Ω la population de ce pays.

1. La population Ω se scinde entre individus sains et individus malades d'une part, entre individus vaccinés ou non d'autre part. Les indications fournies par l'énoncé (en gras dans le tableau) permettent de construire et compléter le tableau à double entrée suivant :

On complète chaque ligne ou colonne du tableau en utilisant le total. Dès que deux pourcentages de la ligne ou de la colonne sont connus, on peut ainsi en déduire le troisième.

	Individus malades	**Individus sains**	**Total**
Individus vaccinés	3 %	72%	**75%**
Individus non vaccinés	7%	**18%**	25%
Total	**10%**	90 %	**100%**

2. Un individu $\omega\in\Omega$ est choisi au hasard dans la population. Convenons de noter :

- M l'événement « L'individu est malade. »
- V l'événement « L'individu est vacciné. »

On calculer $P_V(M)$ à l'aide de la définition : $P_V(M) = \frac{P(V\cap M)}{P(V)} = \frac{0,03}{0,75} = 0,04$. ▲

Exercice 15.3

Dans cet exercice, un éventualité est une des 32 cartes du paquet : Ω est l'ensemble des 32 cartes.

1. Pour déterminer ces probabilités conditionnelles, on suit la **méthode 15.4**.

- On suppose que C est réalisé. En ce cas, l'univers des possibles est réduit aux huit cartes de cœur. La probabilité que la carte tirée soit la dame est donc

$$P_C(D) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

- On suppose que R est réalisé. En ce cas, l'univers des possibles est réduit aux cartes de couleur rouge. La probabilité que la carte tirée soit un cœur est

$$P_R(C) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{8}{16} = 0,5.$$

• $F \cap T$ est constitué des figures à trèfle : $F \cap T = \{ V♣, D♣, R♣, A♣\}$.
Comme le tirage se fait au hasard parmi les 32 cartes de Ω, on a :

$$P(F \cap T) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{4}{32} = 0,125.$$

• $D \cup C$ est constitué des dames de pique, carreau, trèfle et des huit cartes à cœur. Par conséquent Card $(D \cup C) = 11$ et sa probabilité vaut

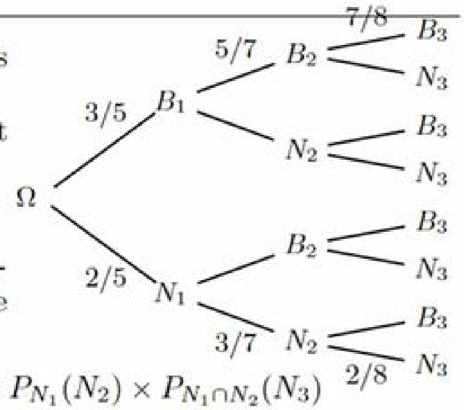
$$P(D \cup C) = \frac{11}{32} = 0,34375.$$

2. On demande de calculer la probabilité de $F \cap R$. Comme précédemment, on a : $P(F \cap R) = \frac{4}{32} = 0,125$.
3. On suppose que la carte tirée est une dame. L'univers des possibles se réduit donc à $D = \{D♣, D♦, D♥, D♠\}$. Comme ces quatre éventualités sont équiprobables, on a $P_D(T) = \frac{1}{4} = 0,25$. ▲

Exercice 15.4

1. On peut représenter les tirages successifs dans un arbre.
2. On cherche la probabilité de l'événement

$$E = (N_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3).$$



D'après la **formule des probabilités composées (proposition 15.4)**, il vient d'une part :

$$\begin{aligned} P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{8} = \frac{9}{140}. \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{140}. \end{aligned}$$

Nb : on vérifie *a posteriori* que les conditionnements sont bien définis, *i.e.* $P(B_1 \cap B_2) > 0$ et $P(N_1 \cap N_2) > 0$. Finalement par additivité de la probabilité, nous obtenons

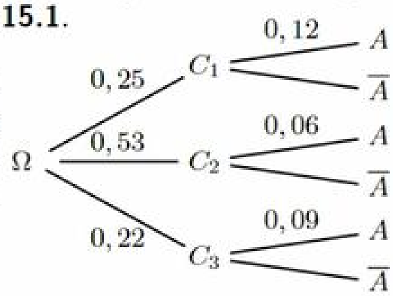
$$P(E) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{9 + 35}{140} = \frac{11}{35} \approx 0,3142.$$

▲

Exercice 15.5

On observe que dans cet énoncé, tout est conditionné par la classe d'âge de l'assuré. Nous mettons à l'œuvre la **méthode 15.1**.

Notons C_1,C_2, C_3 les trois classes d'âges rangées par ordre croissant, et A l'événement « l'assuré déclare (au moins) un accident dans l'année ». Un arbre pondéré permet de visualiser l'expérience aléatoire.



On applique ici la **méthode 15.6**.

1. On applique la **formule des probabilités totales** pour le SCE non négligeables (C_1, C_2, C_3). Il vient

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3) \\ &= 0,25 \times 0,12 + 0,53 \times 0,06 + 0,22 \times 0,09 = 0,0816. \end{aligned}$$

Prise en compte d'une information supplémentaire : on calcule une probabilité conditionnelle

2. On sait que l'assuré a eu un accident au cours de l'année. On cherche la probabilité qu'il soit agé d'au plus 25 ans. On calcule donc $P(C_1|A)$, à l'aide de la **formule de Bayes** :

$$\begin{aligned} P(C_1|A) &= \frac{P(A|C_1)P(C_1)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3)} \\ &\approx 0,3676. \end{aligned}$$

C_2 et C_3 sont incompatibles

3. On calcule la probabilité pour qu'un assuré agé de 25 ans ou plus ait au moins un accident au cours de l'année, soit $P(A|C_2 \cup C_3)$. D'après les propriétés des probabilités :

$$\begin{aligned} P(A|C_2 \cup C_3) &= \frac{P\big(A \cap (C_2 \cup C_3)\big)}{P(C_2 \cup C_3)} = \frac{P\big((A \cap C_2) \cup (A \cap C_3)\big)}{P(C_2) + P(C_3)} \\ &= \frac{P(C_2)P(A|C_2) + P(C_3)P(A|C_3)}{P(C_2) + P(C_3)} = 0,688. \end{aligned}$$

4. On cherche la probabilité pour qu'un assuré n'ayant déclaré aucun accident soit âgé de 25 à 50 ans, c'est-à-dire $P(C_2|\overline{A})$. On utilise la **formule d'inversion des conditionnements** :

$$P(C_2|\overline{A}) = \frac{P(C_2)P(\overline{A}|C_2)}{P(\overline{A})} \approx 0,5424.$$

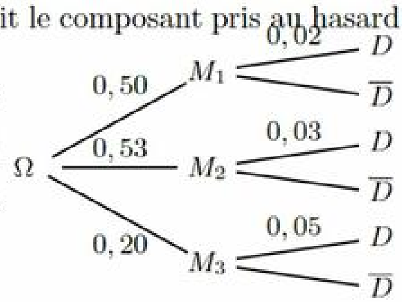
▲

Exercice 15.6

Tout est conditionné par la machine qui produit le composant pris au hasard.

(M_1, M_2, M_3) est un système complet d'événements (SCE).

Notons M_1 (resp. M_2, M_3) l'événement « le composant est produit par la machine M_1 (resp. M_2, M_3), et D l'événement « le composant est défectueux ». Un arbre des possibles permet de visualiser l'expérience aléatoire.



1. On applique la **formule des probabilités totales** pour le système complet d'événements non négligeables (M_1, M_2, M_3). Il vient

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|M_1)P(M_1) + P(D|M_2)P(M_2) + P(D|M_3)P(M_3) \\ &= 0,5 \times 0,02 + 0,3 \times 0,03 + 0,2 \times 0,05 = 0,029. \end{aligned}$$

méthode 14.1

2. On prélève un composant au hasard. On détermine la probabilité pour qu'il provienne de M_1 **et** qu'il soit défectueux. On calcule donc $P(M_1 \cap D)$. $P(M_1 \cap D) = P(M_1)P(D|M_1) = 0,5 \times 0,02 = 0,01$. Comme $P(M_1 \cap D) \neq P(M_1) \times P(D)$, M_1 et D ne sont pas indépendants pour la probabilité P.

3. On sait que le composant prélevé est defectueux. On calcule la probabilité conditionnelle $P(M_1|D)$ à l'aide de la définition :

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,01}{0,029} \approx 0,3448.$$

Prise en compte d'une information supplémentaire

▲

Exercice 15.7

Il s'agit d'une succession d'épreuves aléatoires. Les résultats de chaque épreuve forment une SCE. On note P_k (resp. F_k) l'événement « on a obtenu pile (resp. face) au k ième lancer » pour $k \in [\![1, n]\!]$.

1. Soit E l'événement « au cours des n lancers, pile est apparu au moins une fois ». On a $E = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$ et $\overline{E} = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$.

Comme les lancers sont mutuellement indépendants, on a $P(\overline{E}) = P(F_1) \times \cdots \times P(F_n) = q^n$ et par suite $P(E) = 1 - q^n$.

méthode 15.5

Probabilité de l'événement contraire

2. Soit A l'événement « au cours des n lancers, face n'est jamais suivi de pile ». Nous allons discuter suivant le rang d'apparition du premier face. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- On note $A_k = P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k \cap \cdots \cap F_n$, l'événement « face n'est jamais suivi de pile et le premier face est apparu au k$^{\text{ième}}$ lancer ».
- On note $A_{n+1} = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap \cdots \cap P_n$, l'événement « on n'a obtenu que des pile ».

Les événements A_k sont deux à deux incompatibles et recouvrent A puisque $A = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k$. Par additivité finie des probabilités, il vient

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k)$$

Or, les événements $P_1, P_2, \ldots, P_n$ étant mutuellement indépendants, on a

méthode 15.5

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(P_1) \cdots P(P_{k-1}) \cdot P(F_k) \cdots P(F_n) = p^{k-1} q^{n-k+1} \\ P(A_{n+1}) &= P(P_1) \cdots P(P_n) = p^n \end{aligned}$$

D'où, finalement, d'après l'**identité géométrique**

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n+1} p^{k-1} q^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k} = \begin{cases} \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q} & \text{si } p \neq q \\ \frac{n+1}{2^n} & \text{si } p = q = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

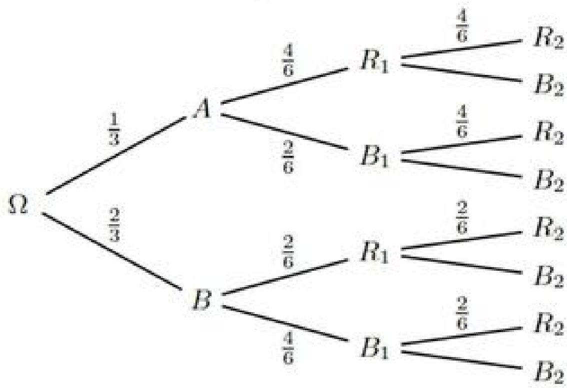
L'identité géométrique exprime la somme des premiers termes d'une suite de réels en progression géométrique, cf **méthode 12.7.**

▲

Exercice 15.8

Dans cette expérience aléatoire, tout est conditionné par le résultat du lancer à pile ou face.

On note A (resp. B) l'événement « la pièce tombe sur pile (resp. face) », R_k (resp. B_k) l'événement « on obtient rouge (resp. blanc) au k ième lancer de dé ». On peut représenter l'expérience aléatoire sous la forme d'un arbre.



1. D'après la **formule des probabilités totales** pour le SCE d'événements non négligeables (A, B), il vient

$$P(R_1) = P(A) \times P(R_1 \,|\, A) + P(B) \times P(R_1 \,|\, B) = \frac{4}{6}\,\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\,\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \approx 0,4444.$$

2. On sait que $R_1 \cap R_2$ est réalisé. On cherche $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \,|\, R_1 \cap R_2)$. D'après la **formule des probabilités totales** pour le SCE d'événements non négligeables (A, B), il vient

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) = &\ P(A)\ P(R_1 \cap R_2 \,|\, A) + P(B)\ P(R_1 \cap R_2 \,|\, B) \\ P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = &\ P(A)\ P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \,|\, A) + P(B)\ P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \,|\, B) \end{aligned}$$

méthode 15.4

Calculons les probabilités conditionnelles : on suppose tout d'abord que A est réalisé. Dans ce cas, les événements R_1, R_2, R_3 sont mutuellement indépendants et de même probabilité $\frac{2}{3}$. Par conséquent $P(R_1 \cap R_2 \,|\, A) = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ et $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \,|\, A) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$. De même, en supposant cette fois que B est réalisé, on obtient $P(R_1 \cap R_2 \,|\, B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ et $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \,|\, B) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Réinjectons ceci dans les **FPT** ci-dessus pour obtenir :

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \\ P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{10}{81}. \end{aligned}$$

Finalement $P(R_1 \,|\, R_1 R_2) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{P(R_1 \cap R_2)} = \dfrac{5}{9} \approx 0,5555.$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On calcule $P(A \,|\, R_1 \cap \cdots \cap R_n)$ à l'aide la **Formule de Bayes**. Tout d'abord, d'après la **formule des probabilités totales** pour le SCE non négligeables (A, B), on a :

Sous la condition que A ou B soit réalisé, les événements $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont mutuellement indépendants

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap \cdots \cap R_n) &= P(A)P(R_1 \cap \cdots \cap R_n \,|\, A) + P(B)P(R_1 \cap \cdots \cap R_n \,|\, B) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} P(A \,|\, R_1 \cap \cdots \cap R_n) &= \frac{P(R_1 \cap \cdots \cap R_n \,|\, A)P(A)}{P(A)P(R_1 \cap \cdots \cap R_n \,|\, A) + P(B)P(R_1 \cap \cdots \cap R_n \,|\, B)} \\ &= \frac{2^n}{2^n + 2}. \end{aligned}$$

▲

Chapitre 16

Variables aléatoires réelles

Pierre-Simon Laplace fut l'un des théoriciens du déterminisme. Selon lui, « une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. »
Il comprend cependant l'impossibilité de cette connaissance et de cette analyse et il rédige un ouvrage fondamental sur la théorie des probabilités.

Pierre-Simon Laplace
1749-1827

OBJECTIFS

les incontournables

- Lois de probabilité
  - déterminer la loi d'une variable aléatoire réelle
  - reconnaître et utiliser une loi classique : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale
- Moments d'une variable aléatoire
  - calculer et interpréter espérance et variance d'une variable aléatoire

et plus si affinités

- étudier une suite de variables aléatoires

Le saviez-vous ?

La notion de variable aléatoire a été introduite parallèlement par deux mathématiciens en 1922, l'un Paul Lévy était Français et l'autre, Alexandre Khintchine, était Russe.

Résumé de cours

Variable aléatoire

Dans tout le chapitre, (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini.

Variable aléatoire réelle

Définition : *On considère une expérience aléatoire pour laquelle l'ensemble des issues possibles est Ω. À chaque événement élémentaire, $\omega \in \Omega$ on associe un nombre réel $X(\omega) \in \mathbb{R}$. Ce procédé définit une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ appelée* ***variable aléatoire réelle*** *(v.a.r.) sur (Ω, P).*

Notation : *l'ensemble des valeurs possibles pour X est fini et sera noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.*

Définition : *Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel. On définit l'événement « X prend la valeur x » et on note $(X = x)$, l'événement $(X = x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.*

Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle finie

Définition : *Soit X une v.a.r. sur (Ω, P). Déterminer la* ***loi de probabilité de X*** *c'est trouver $X(\Omega)$ et déterminer, pour chaque valeur possible $x \in X(\Omega)$ la probabilité de l'événement « X prend la valeur x ».*

Théorème-Définition 16.1.— La loi de probabilité de X est la donnée d'un n-uplet de couples $(x_i, p_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ tel que :

- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i = P(X = x_i)$

Corollaire 16.2.— Système complet d'événements lié à X —.

Les événements $(X = x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ forment un SCE. En particulier $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i \geq 0,$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Paramètres (ou moments) d'une variable aléatoire

Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition : *Soit X une v.a.r. sur (Ω, P) de loi $(x_i, p_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$. On appelle* ***espérance mathématique*** *de X (ou encore moyenne de X) et on note $E(X)$ le nombre :*

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i.$$

Remarque : l'espérance de X est la moyenne des valeurs prises par X, pondérée par leurs probabilités. Avec cette interprétation, on en déduit aisément les :

Théorème 16.3.— Propriétés de l'espérance —. Soit X une v.a.r. définie sur Ω, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- Si $X \geq 0$ (*i.e.* $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq 0$), alors $E(X) \geq 0$.
- Si $a \leq X \leq b$ (*i.e.* $\forall \omega \in \Omega,\ a \leq X(\omega) \leq b$), alors $a \leq E(X) \leq b$.

Variance, écart-type d'une variable aléatoire

Définition : *Soit X une v.a.r. sur (Ω, P).*

- *La variance de X est le nombre positif $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$.*
- *L'écart-type de X est le nombre positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.*

Proposition 16.4.— Soit X une v.a.r. sur (Ω, P). La variance de X est aussi donnée par :

- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Proposition 16.5.— Soit X une v.a.r. sur (Ω, P) et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un couple de réels. Alors

- $E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$
- $V(aX + b) = a^2\, V(X)$

Lois finies usuelles

Le schéma succès-échec

Ce modèle classique s'applique à toute expérience aléatoire e qui ne connaît que deux issues possibles : le succès ou l'échec !

- En une tentative
  Si X est une v.a.r. qui prend la valeur 1 lorsque l'expérience e est un succès, et 0 en cas d'échec, on dit que X suit la **loi de Bernoulli**.
- En n tentatives
  On répète n fois l'expérience e de façon indépendante les unes des autres. Si X représente le *nombre de succès* obtenus au cours de ces n tentatives, on dit que X suit une **loi binomiale**.

Lois de Bernoulli et loi binomiale

Définition : *Soit X une v.a.r. sur (Ω, P), $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On dit que*

- ***X suit la loi de Bernoulli de paramètre** $p \in [0, 1]$ et on note $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$, si*
  - $X(\Omega) = \{0, 1\}$
  - $P(X = 1) = p$ *et* $P(X = 0) = q = 1 - p$
- ***X suit la loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in [0, 1]$, et on note $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p)$, si*
  - $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
  - $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, *où on a noté $q = 1 - p$.*

Notation : *les coefficients $\binom{n}{k}$ sont appelés les coefficients du binôme.*

Remarque : la loi de Bernoulli de paramètre p est la loi binomiale de paramètres $n = 1$ et p.

Proposition 16.6.— Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors

- $E(X) = n\,p$
- $V(X) = n\,p\,(1 - p) = n\,p\,q$

Méthodes

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Méthode 16.1.— Comment déterminer la loi d'une variable aléatoire X

S'il s'agit d'un modèle classique (**méthode 16.4**), on donne directement la loi de X. Sinon, par définition, déterminer la loi de probabilité de X s'effectue en deux étapes :

$\boxed{1}$ On détermine l'ensemble des valeurs possibles pour X. Comme Ω est fini, il en va de même de $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$$

$\boxed{2}$ Pour toute valeur $x_i \in X(\Omega)$, on calcule $p_i = P(X = x_i)$.
Si n est raisonnablement petit, on présente la loi de X sous la forme d'un tableau.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	$\cdots$	p_n

On peut être amené à utiliser les liens entre opérations logiques et ensemblistes pour expliciter l'événement $[X = x_i]$ comme une réunion ou une intersection d'événements (**méthode 14.3**, **méthode 15.5**) dont on connaît les probabilités.

Exemple : on lance deux dés à six faces parfaitement équilibrés.

L'univers des possibles est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. On s'intéresse à la somme des deux dés. Ceci définit une variable aléatoire

$$S : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (i, j) & \mapsto & i + j \end{array}.$$

$\boxed{1}$ On peut visualiser les valeurs possibles pour S à l'aide d'un tableau (ci-contre). L'ensemble des valeurs prises par S est

$$S(\Omega) = [\![2, 12]\!].$$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\boxed{2}$ Les événements élémentaires étant équiprobables, Ω est muni de la probabilité uniforme. On en déduit aisément la loi de S.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Mise en œuvre : exercice 16.2.

Espérance, variance et écart-type

Calculer les paramètres d'une v.a.r.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. À chaque événement élémentaire $\omega \in \Omega$, correspond une valeur $X(\omega)$. Par définition, $E(X)$ est la valeur moyenne de X en tenant compte de la distribution des valeurs de X (chaque valeur x_i étant pondérée par la probabilité p_i d'être réalisée).

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

Exemple : lorsqu'on lance deux dés à six faces (exemple précédent), parfaitement équilibrés, la somme des deux dés est une variable aléatoire d'espérance

$$E(S) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = 2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36} = 7.$$

> **❑ Méthode 16.2.— Comment calculer les paramètres d'une v.a.r.**
> Soit X une v.a.r. de loi connue $(x_i, p_i)_{1 \le i \le n}$. S'il s'agit d'un modèle classique (**méthode 16.4**), on donne directement les paramètres de X. Sinon, on les calcule au moyen des formules suivantes :
>
> - **Espérance :** $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$
> - **Variance :** $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$ ou $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2$
> - **Écart-type :** $\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$

Mise en œuvre : exercice 16.3.

Utiliser les paramètres d'une v.a.r.

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, l'espérance mathématique d'une v.a.r. X s'interprète comme une valeur moyenne. La variance mesure quant à elle la dispersion des valeurs de X autour de leur moyenne. Si X représente le gain d'un joueur à l'issue d'une expérience aléatoire,

- $E(X) > 0$ signifie que le jeu est **favorable** au joueur,
- $E(X) < 0$ signifie que le jeu est **défavorable** au joueur,
- $E(X) = 0$ signifie que le jeu est **équitable**.

> **❑ Méthode 16.3.— Comment utiliser l'espérance pour établir une stratégie**
> Supposons qu'un joueur hésite entre deux stratégies possibles. Pour décider laquelle choisir,
>
> $\boxed{1}$ On note X_1, X_2 les v.a.r. correspondant aux gains du joueur dans chaque stratégie.
>
> $\boxed{2}$ On compare $E(X_1)$ et $E(X_2)$:
>
> - Si $(E(X_1) \ge E(X_2)$ le joueur optera pour la première stratégie.
> - Sinon le joueur optera pour la deuxième.

Mise en œuvre : exercice 16.6, exercice 16.7.

■ Lois finies usuelles

Comment reconnaître le bon modèle

> **❑ Méthode 16.4.— Comment reconnaître le bon modèle**
> Pour savoir quelle loi de probabilité usuelle suit une variable aléatoire réelle, vous devez connaître un exemple typique de chaque modèle, comme ceux présentés ci-dessous :
> - le schéma succès-échec : **loi de Bernoulli**
> - le nombre de succès en n tentatives indépendantes : **loi binomiale**.

Reconnaître une loi de Bernoulli

Modèle : schéma succès-échec

On considère une expérience aléatoire e qui a deux issues : le succès S ou l'échec E. On suppose que la probabilité que S se réalise est p. On associe à cette expérience la v.a.r. X définie par

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in S \\ 0 & si\ \omega \notin S \end{cases}$$

Exemple : soit $p \in [0, 1]$. On effectue un lancer d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir « *Pile* » est p, et la probabilité d'obtenir « *Face* » est $q = 1 - p$. On note X la variable aléatoire réelle définie par $X(Pile) = 1$ et $X(Face) = 0$. Alors $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$.

Reconnaître une loi binomiale

Modèle : nombre de succès en n tentatives

On considère une expérience aléatoire e qui a deux issues : le succès S ou l'échec E. On suppose que la probabilité que S se réalise est p. On répète n fois dans les mêmes conditions et de façon ***indépendante*** *les unes des autres, l'expérience e. On note X la v.a.r. égale au* ***nombre de succès obtenus en n tentatives****.*

Exemple : on effectue n lancers indépendants les uns des autres d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir « *Pile* » est $p \in]0, 1[$. On note X le nombre de « *Pile* » obtenus. Alors X suit la loi binomiale $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Tableau récapitulatif des lois finies usuelles

Nom de la loi	Paramètres	Loi de probabilité	Espérance, variance
Loi de Bernoulli $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$	• $p \in [0, 1]$ • $q = 1 - p$	• $X(\Omega) = \{0, 1\}$ • $P[X = 1] = p$ • $P[X = 0] = q$	• $E(X) = p$ • $V(X) = pq$
Loi binomiale $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p)$	• $n \in \mathbb{N}^*$, • $p \in [0, 1]$ • $q = 1 - p$	• $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ • $P[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	• $E(X) = np$ • $V(X) = npq$

Méthodes

Énoncé des exercices

Lois de probabilité

Exercice 16.1 : Un dé cubique est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ soit proportionnelle à k. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu. Déterminer la loi de X.

Exercice 16.2 : On lance simultanément deux dés à 6 faces. On appelle X la variable aléatoire égale à la somme des numéros obtenus et Y la variable aléatoire égale au maximum des numéros obtenus.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer la loi de probabilité de Y.

Moments d'une variable aléatoire

Exercice 16.3 : On lance simultanément deux dés à 6 faces. On appelle Z la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus.
1. Déterminer la loi de probabilité de Z.
2. Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 16.4 : Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.
On extrait au hasard deux boules de l'urne sans remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes tirées.
1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
3. Calculer la probabilité de l'événement A « les deux boules prélevées sont de même couleur ».

Exercice 16.5 : Une entreprise utilise des machines constituées de deux éléments a et b. La défectuosité d'un seul des éléments met la machine hors service.
On note A l'événement « l'élément a est défectueux » et B l'événement « l'élément b est défectueux ».
On admet que les événements A et B sont indépendants et que $P(A) = 0,008$ et $P(B) = 0,05$.
1. **a.** Calculer la probabilité s pour que les deux éléments soient simultanément défectueux.
b. Calculer la probabilité que la machine soit hors-service.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'éléments défectueux.
a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Calculer l'espérance de X.

Exercice 16.6 : On propose deux jeux différents :

- Au **Jeu 1**, on a 14% de chance de gagner 1 500 000 € et 85% de chance de ne rien gagner.
- Au **Jeu 2**, on a 8% de chance de gagner 2 500 000 € et 92% de chance de ne rien gagner.

Quel est le meilleur choix ?

Exercice 16.7 : On s'intéresse aux différents coûts de l'électricité en fonction de son origine. On a le tableau suivant

Origine	Production en TWh	Coût de production (en €) du kWh
Nucléaire	420	0,03
Énergie renouvelable	57	0,045
Thermique	74	0,05

1. Quel est le prix moyen du kWh ?
2. Sachant que le kWh est revendu au prix moyen de $0,08$ €, quel est le bénéfice moyen d'un kWh pour EDF ?
3. EDF souhaite augmenter de 50% sa production d'énergie renouvelable sans changer son bénéfice. Quel devra être le prix moyen de revente ?

Lois usuelles

Exercice 16.8 : A et B sont deux avions ayant respectivement 2 et 4 moteurs. Ces moteurs sont indépendants les uns des autres et chacun a la probabilité $p = 0,01$ de tomber en panne.
Un avion arrive à destination si la moitié de ses moteurs –au moins– fonctionnent normalement. Quel avion choisissez-vous ?

Exercice 16.9 : Une personne effectue une succession de 10 lancers indépendants avec une pièce parfaitement équilibrée. On note X le nombre de « *Piles* » obtenus.
1. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ? sa variance ?
2. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue de ces 10 lancers le nombre de « *Piles* » obtenus soit strictement supérieur au nombre de face ? Qu'en serait-il avec 11 lancers ?

Exercice 16.10 : Marche aléatoire sur une droite —.
Soit $p \in [0,1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine 0. À chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite ou d'une unité vers la gauche avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$. À l'instant initial, la puce est à l'origine. Étant donné $n \in \mathbb{N}^\star$, on note X_n l'abscisse de la puce à l'instant n.
Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

Indications

Ex. 16.4

Commencez par bien modéliser l'expérience aléatoire. On effectue deux tirages sans remise dans l'urne !
1. *Vous mettrez en œuvre la* **méthode 16.1**.

Ex. 16.7

1. $1\,TWh = 10^9\,Wh$

Ex. 16.8

Le nombre de panne de moteurs suit une loi usuelle.

Ex. 16.10

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on pourra noter S_k la variable de Bernoulli qui prend la valeur 1 si le $k^{ième}$ saut a lieu vers la droite.

Corrigé des exercices

Exercice 16.1

Par hypothèse, il existe un réel $a \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(X = k) = ak$. Reste à déterminer a. Pour cela on utilise que les événements liés à X forment un système complet d'événements. En particulier,

$$\begin{aligned} 1 &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) \\ &= a(1+2+3+4+5+6) = 21a. \end{aligned}$$

On en déduit que $a = \dfrac{1}{21}$, ce qui permet de déterminer entièrement la loi de X. ▲

Exercice 16.2

Une réalisation possible pour cette expérience aléatoire est un couple d'entiers (i, j), avec $1 \leq i, j \leq 6$.

Avant tout, nous construisons le modèle

Comme tous ces couples sont équiprobables, Ω est équipé de la probabilité uniforme. Card $(\Omega) = 6^2 = 36$.

1. Pour déterminer la loi de X, nous appliquons la **méthode 16.1**. Pour chaque valeur du couple (i, j), nous indiquons dans le tableau ci-contre la valeur correspondante de X.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Comme pour tout $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2, P(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36}$, on en déduit facilement la loi de X :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. Déterminons la loi du maximum des deux dés.

Pour cela, nous indiquons dans le tableau ci-contre la valeur maximale de i et j.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Finalement, comme pour tout $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2, P(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36}$, on en déduit facilement la loi de Y :

y	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

▲

Exercice 16.3

Une réalisation possible pour cette expérience aléatoire est un couple d'entiers (i, j), avec $1 \leq i, j \leq 6$.

Ainsi, $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Comme tous les couples sont équiprobables, Ω est équipé de la probabilité uniforme. Card $(\Omega) = 6^2 = 36$.

1. Pour déterminer la loi de Z, nous appliquons la **méthode 16.1**.

Pour chaque valeur du couple (i, j), nous indiquons dans le tableau ci-contre la valeur correspondante de Z.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Comme pour tout $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2, P(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36}$, on en déduit facilement la loi de Z :

z	0	1	2	3	4	5
$P(Y = y)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

2. On applique la **méthode 16.2** :

$$\begin{aligned} E(Z) &= P(Z = 1) + 2P(Z = 2) + 3P(Z = 3) + 4P(Z = 4) + 5P(Z = 5) \\ &= \frac{35}{18} \approx 1,944 \\ E(Z^2) &= P(Z = 1) + 2^2P(Z = 2) + 3^2P(Z = 3) + 4^2P(Z = 4) + 5^2P(Z = 5) \\ &= \frac{35}{6} \\ V(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{665}{324} \approx 2,052 \end{aligned}$$

▲

Exercice 16.4

Comme toujours, commençons par modéliser cette expérience aléatoire. Notons $\mathscr{U} = \{V_1, V_2, R_1, R_2, R_3\}$ l'urne. On prélève deux boules dans $\mathscr{U}$, sans remise. L'énoncé ne précise pas si les tirages ont lieu successivement ou simultanément ; nous supposerons que l'on tire les boules l'une après l'autre.

On note V_1 et V_2 les deux boules vertes, R_1, R_2 et R_3 les trois boules rouges.

Dans ce cas, une réalisation possible est un couple de boules distinctes. Le tirage ayant lieu au hasard, tous les couples possibles sont équiprobables. Mais combien en existe-t'il de distincts ?

Le cas où les tirages sont simultanés, conduirait aux mêmes résultats.

- Pour la première boule, il y a 5 boules possibles.
- Pour la deuxième en revanche, il n'y a plus que 4 boules possibles.

Finalement, il y a 20 tirages différents possibles suivant le protocole indiqué par l'énoncé.

Il n'y a pas de remise !

1. L'ensemble des valeurs possibles pour X est $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, calculons $P(X = k)$.

• L'événement lié à X, $[X = 0]$ correspond à tous les couples formés de deux boules rouges :

$$[X = 0] = \{(R_1, R_2); (R_2, R_1); (R_1, R_3); (R_3, R_1); (R_2, R_3); (R_3, R_2)\}.$$

Ainsi, $P(X = 0) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{6}{20}$.

• L'événement lié à X, $[X=1]$ correspond à tous les couples formés d'une boule rouge et d'une boule verte. Il en existe 12 :

$$[X=1]=\{(R_1,V_1);(V_1,R_1);(R_1,V_2);(V_2,R_1);\ldots;(R_3,V_2);(V_2,R_3)\}.$$

Ainsi, $P(X=1)=\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}=\dfrac{12}{20}$.

• L'événement lié à X, $[X=2]$ correspond à tous les couples formés des deux boules vertes :

$$[X=2]=\{(V_1,V_2);(V_2,V_1)\}.$$

Finalement, $P(X=2)=\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}=\dfrac{2}{20}$.

Le tableau suivant résume la loi de X :

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{2}{20}$

2. Par définition,

$$E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)=\frac{8}{10}=0,8.$$

3. L'événement A peut être traduit à l'aide des événements liés à X. En effet $A=[X=0]\cup[X=2]$. Ces deux événements étant incompatibles, il découle de l'additivité de la probabilité que $P(A)=P(X=0)+P(X=2)=0,4$. ▲

Exercice 16.5

1. Notons A l'événement « l'élément a est défectueux » et B l'événement « l'élément b est défectueux » et M l'événement « la machine est hors-service ».

a. Par définition $s=P(A\cap B)$. Or les événements A et B sont indépendants, par conséquent $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0,008\times 0,05=0,0004$.

✎ **méthode 15.5**

b. Par définition $M=A\cup B$, or d'après la **formule de Poincaré**, on a

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,0576.$$

2. a. Appliquons la **méthode 16.1**.

• $X(\Omega)=\{0,1,2\}$.

• De plus, A et B étant indépendants, il en résulte que A ou $\overline{A}$ et B ou $\overline{B}$ le sont également. On en déduit les probabilités suivantes :

✎ *C'est la* **proposition 15.8.**

$$\begin{aligned}
P(X=0)&=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\times P(\overline{B})=0,9424\\
P(X=1)&=P\big((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\big)=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)\\
&=P(A)\times P(\overline{B})+P(\overline{A})\times P(B)=0,0572\\
P(X=2)&=P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0,0004.
\end{aligned}$$

b. D'après la **méthode 16.2**, il s'ensuit que $E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) = 0,0732$. ▲

Exercice 16.6

Pour décider d'une stratégie, comparons les espérances de gain dans chaque cas.

- Selon le **Jeu 1**, l'espérance de gain est 21 10^5 euros.
- Selon le **Jeu 2**, l'espérance de gain est 20 10^5 euros.

On aura intérêt à jouer au **Jeu 1**. ▲

Exercice 16.7

1. La production totale d'électricité coûte 18 865 000 € pour 551 000 000 kWh, soit un coût moyen de $0,0342$ € du kWh.
2. EDF revend le kWh au prix de $0,08$ €, dégageant ainsi un bénéfice moyen $0,0458$ € du kWh.
3. En augmentant de 50% sa production d'énergie renouvelable, le coût moyen du kWh passerait à $0,0347$ €. Pour préserver son bénéfice de $0,0458$ € du kWh, EDF devrait revendre le kWh au prix moyen de $0,0805$ €. ▲

Exercice 16.8

Calculons les probabilités d'arriver sans encombre avec les différents avions. Observons que les moteurs tombant en panne indépendamment les uns des autres, leur nombre est une variable aléatoire N suivant une loi binomiale de paramètres n et p, avec $n = 2$ ou $n = 4$ suivant l'avion.

• Pour l'avion A, N suit la loi $\mathscr{B}(2, p)$. L'événement « l'avion arrive sans encombre » se traduit en ce cas par $[N \leq 1] = [N = 0] \cup [N = 1]$. En conséquence

$$P([N \leq 1] = \binom{2}{0} \times p^0(1-p)^2 + \binom{2}{1} \times p^1(1-p)^1 = 0,9801 + 0,0198 = 0,9999.$$

• Pour l'avion B, N suit la loi $\mathscr{B}(4, p)$. L'événement « l'avion arrive sans encombre » se traduit en ce cas par $[N \leq 2] = [N = 0] \cup [N = 1] \cup [N = 2]$. En conséquence

$$\begin{aligned} P([N \leq 2] &= \binom{4}{0} \times p^0(1-p)^4 + \binom{4}{1} \times p^1(1-p)^3 + \binom{4}{2} \times p^2(1-p)^2 \\ &\approx 0.96059 + 0.03881 + 0.00058 \approx 0,99998. \end{aligned}$$

On préfèrera sans conteste prendre l'avion B. ▲

Exercice 16.9

1. On reconnaît ici le modèle succès-échec. 10 tentatives indépendantes, le nombre de « Pile » obtenus suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$. Ainsi, $E(X) = np = 5$ et $V(X) = npq = \frac{5}{2}$. **méthode 16.4**
2. L'événement « le nombre de Piles obtenus est strictement supérieur au nombre de face » se traduit par

$$[X \geq 6] = [X = 6] + [X = 7] + [X = 8] + [X = 9] + [X = 10].$$

Par définition de la loi binomiale, il vient

$$\begin{aligned} P([X \geq 6] &= \binom{10}{6} \times \frac{1}{2^{10}} + \binom{10}{7} \times \frac{1}{2^{10}} + \binom{10}{8} \times \frac{1}{2^{10}} + \binom{10}{9} \times \frac{1}{2^{10}} + \binom{10}{10} \times \frac{1}{2^{10}} \\ &\approx 0,3769. \end{aligned}$$

Avec 11 lancers, on obtient nécessairement un nombre de « Pile » et de Face différents. Comme la pièce est parfaitement équilibrée, la probabilité d'obtenir strictement plus de « Pile » que de « Face » et la probabilité d'obtenir plus de « Face » que de « Pile » coïncident et valent toutes deux $0,5$! ▲

Exercice 16.10

Comme la puce initialement située à l'origine bondit d'une unité à chaque instant, sa position à l'instant n est égale à la différence de ses déplacements vers la droite et de ses déplacements vers la gauche. Notons S_k la variable de Bernoulli qui prend la valeur 1 si le $k^{\text{ième}}$ saut a lieu vers la droite. Le nombre de déplacements vers la droite est donc $D_n = \sum_{k=0}^{n} S_k$ et par suite le nombre de déplacements vers la gauche est donc $G_n = n - D_n$. On en déduit

$$X_n = D_n - G_n = 2D_n - n$$

Comme les sauts sont indépendants les uns des autres, D_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p). Ainsi,

- $D_n(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$
- $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $P(D_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Or, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on a l'équivalence $D_n = k$ si et seulement si $X_n = 2k - n$. On en déduit la loi de $X_n = 2D_n - n$:

- $X_n(\Omega) = \{2k - n\,;\ 0 \leq k \leq n\}$
- $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $P(X_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

D'après les propriétés de l'espérance et de la variance (**proposition 16.5**) on a :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= E(2D_n - n) = 2E(D_n) - n = 2np - n \\ V(X_n) &= V(2D_n - n) = 4V(D_n) = 4npq. \end{aligned}$$

▲

INDEX

Dans la même collection

PRÉPAS SCIENCES

En route pour la Prépa ! Les Maths en vacances !

La rentrée en Prépa est difficile, parfois décourageante : rythme de travail, acquisition des connaissances, abstraction : tout déconcerte le néophyte.

Cet ouvrage est là pour aplanir ces difficultés ; il revisite le cours de maths de Première et Terminale S avec l'esprit de l'enseignement supérieur, en sélectionnant les parties les plus utiles pour la suite.

Il vous permet :

- de rafraîchir vos souvenirs
- de combler vos lacunes
- d'avoir une vision synthétique et transversale des connaissances
- d'acquérir l'exigence de l'enseignement supérieur
- d'être tout de suite opérationnel en début de prépa.

Chaque chapitre est constitué :

- d'un résumé de cours retraçant l'essentiel
- de méthodes efficaces de résolution d'exercices ou de problèmes
- d'exercices classiques avec corrections
- de conseils du professeur de prépa.

Compagnon de vos vacances, ce livre vous permettra d'aborder sereinement la rentrée en Prépa avec de bonnes bases en **mathématiques**. **Indispensable**, que vous entriez en Prépas **MPSI, PCSI, PTSI, BCPST, BL** ou toute filière du supérieur où les mathématiques jouent un rôle important.

Nicolas Nguyen enseigne en première année de classes préparatoires scientifiques. Il est l'auteur de divers ouvrages aux éditions Ellipses.

9 782340 005471

www.editions-ellipses.fr