COLLECTION

FRACTALE

MATHÉMATIQUES

ALGÈBRE
GÉOMÉTRIE

TERMINALES
C et E

Bordas

COLLECTION

FRACTALE

MATHÉMATIQUES

Cet ouvrage a été rédigé sous la direction de
Guy BONTEMPS
inspecteur pédagogique régional.

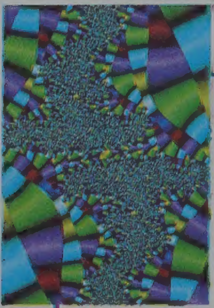
Geneviève HAYE
professeur au lycée Jules-Ferry, Paris
Monique NOUET
professeur au lycée Montesquieu, Le Mans
Éric SERRA
professeur au lycée Bellevue, Toulouse
Jacqueline VENARD
professeur au lycée Joachim-du-Bellay, Angers

ALGÈBRE GÉOMÉTRIE

TERMINALES C et E

PROGRAMME 1992

Bordas



La photo de couverture représente une vue de l'ensemble de Julia $J(A)$; cet ensemble est paramétré par le point $A(a_1, a_2)$. Cet objet fractal (c'est-à-dire un objet dont la structure se répète à toutes les échelles d'observations) est obtenu par le processus itératif suivant.
En chaque point $C(c_1, c_2)$ du plan, on définit les deux suites :

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a_1 \quad \text{avec :} \quad x_0 = c_1 .$$
$$y_{n+1} = 2x_n y_n + a_2 \quad \quad y_0 = c_2 .$$

Lors de cette itération deux cas se rencontrent :

1° Le point (x_{n+1}, y_{n+1}) reste à distance finie de l'origine : on dit alors que le point courant $C(c_1, c_2)$ appartient à l'ensemble de Julia $J(A)$.

2° Le point (x_{n+1}, y_{n+1}) s'éloigne à l'infini : on dit alors que le point courant $C(c_1, c_2)$ n'appartient pas à l'ensemble de Julia $J(A)$.
En fait, dès que le point (x_{n+1}, y_{n+1}) s'éloigne de plus de deux unités de l'origine, l'issue du test précédent est connue, et le point $C(c_1, c_2)$ est marqué par une couleur choisie en fonction du rapport :

$$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \quad (x_{n+1} \neq 0).$$

© J.-F. Colonna, GSV-Lactamme (École Polytechnique, CNET).

CRÉDITS PHOTOGRAPHIQUES

p. 6 Portrait de Cardan. Bib. Nat., Paris. Ph. Jeanbor © Archives Photeb.
Portrait de Tartaglia. Bib. Nat., Paris. Ph. Jeanbor © Archives Photeb.

p. 20 Portrait d'Euler. Bib. Nat., Paris. Ph. Jeanbor © Archives Photeb.

p. 60 Scène de la vie quotidienne extraite de « *L'histoire du roi Alexandre* ». Manuscrit du xv^e siècle. Musée du Petit Palais, Paris. Ph. © Bulloz.

p. 60 Albrecht Dürer (1471-1528). Un homme dessinant une femme couchée. Gravure sur bois. Bib. Nat., Paris. Ph. © Bib. Nat. /Archives Photeb.

p. 97 Copie d'un portrait par H. Schäfer de Karl Friedrich Gauss (1777-1855), mathématicien allemand. Bundespost Museum, Francfort. Ph. J.-L. Charmet © Archives Photeb.

p. 114 Justus Susterman (1597-1681). Portrait de Galilée, astronome italien (1564-1642). Galerie des Offices, Florence. Ph. Scala © Archives Photeb.

p. 146 Ph. © De Sazo/Rapho.

p. 155 Ph. © C.E.R.N./T.

p. 167 M. C. Escher (1898-1972). *Étude d'un remplissage périodique d'un plan avec figures humaines*, 1936. Ph. © 1936 M. C. Escher/Cordon. Art - Baarn - Holland.

p. 168 M. C. Escher (1898-1972). *Étude d'un remplissage périodique d'un plan avec reptiles*, 1939. Ph. © 1939 M. C. Escher/Cordon. Art - Baarn - Holland.

p. 185 Ph. © Pour la Science.

p. 198 M. C. Escher (1898-1972). *Le Cours de la Vie*, 1958. Ph. © 1958 M. C. Escher/Cordon. Art - Baarn - Holland.

p. 227 L'Œuf de Pâques de Ron Resch à Végreville, Alberta, Canada. Ph. © Holiday Photo, Végreville, Alberta.

p. 228 Le pendule de Foucault. Musée National des Techniques. Ph. F. Delastre © C.N.A.M.

p. 229 Perspective dans les miroirs. Adèle Le Breton : « *Traité de perspective simplifiée* », Paris, 1828. Bib. Nat., Paris. Ph. © Photeb.

p. 254 Anamorphose cylindrique (anonyme). Dép. des Estampes. Bib. Nat., Paris. Ph. © Bib. Nat., Photeb.

p. 254 Anamorphose extraite de l'ouvrage : « *Les deux règles de la perspective* », rédigé vers 1530-1540 par Iacomo Barozzi Da Vignola mais publié avec les commentaires d'Egnatio Danti en 1583 seulement. Ph. © Institut et Musée de l'Histoire des Sciences. Florence.

p. 273 Ph. © Images Photothèque.

Édition : Michèle Miollany
Conception graphique : Michel Méline. **Mise en page :** Véronique Kempf
Schémas : Fractale. **Couverture :** Patrick O'Heguerty.
Fabrication : Maria Pauliat. **Iconographie :** Nathalie Bocher-Lenoir

© BORDAS, Paris, 1992

ISBN : 2-04-019470-3

ISSN : 0993-5541

« Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit, ou ayants-cause, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective d'une part, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration ».

Avant-propos

Ce manuel, de la collection FRACTALE, a été élaboré pour répondre aux exigences précises du nouveau programme des classes de Terminales C et E.

En effet, pour assurer une bonne continuité avec les programmes de Seconde et de Premières SE, il a été nécessaire d'infléchir ceux de Terminale. Les sujets présentant de trop grandes difficultés théoriques ont souvent été écartés. En revanche, des points essentiels ont été renforcés ainsi que les objectifs d'acquisition des méthodes.

La structure

Dans tous les chapitres, nous avons gardé l'organisation de base qui a assuré le succès des manuels de Premières S et E :

- les activités préparatoires,
- le cours,
- les travaux pratiques,
- la fiche méthode avec ses exercices commentés,
- les exercices et problèmes classés par thème et niveau de difficulté (très facile ■, facile ■■, moins facile ■■■, difficile ■■■■).

Cependant, afin de tenir compte des suggestions de nombreux enseignants et préparer efficacement les élèves à l'épreuve du baccalauréat, nous y avons apporté des améliorations et innovations :

- A l'entrée de chaque chapitre, un sommaire détaillé et la présentation des **OBJECTIFS** de connaissance et de savoir-faire.
- **« LE JOUR DU BAC » :** une nouvelle rubrique, dans tous les chapitres, conçue pour aider les élèves à bien aborder l'examen : à partir d'un exercice du bac, nous proposons une analyse de l'énoncé, les mots-clés, les objectifs de l'exercice, les méthodes qu'il faut utiliser pour le résoudre, ainsi que la rédaction d'une solution.

A la fin du livre, vous trouverez aussi :

- la réponse à certains exercices (les exercices concernés sont signalés en bleu),
- un index des mots-clés,
- un index des fiches méthode.

Comment se servir de ce livre ?

Ce manuel est d'une utilisation souple : chaque professeur peut organiser son cours en toute liberté, selon sa classe et sa propre pédagogie. La méthode proposée, qui part toujours de l'étude d'une situation pour introduire des notions nouvelles, permet de faire du cours de mathématiques une véritable pratique où la réflexion et la participation des élèves sont privilégiées.

Les activités préparatoires et les travaux pratiques sont variés et nombreux. Naturellement, il n'est pas nécessaire de traiter tous ces travaux. Les professeurs peuvent choisir une progression adaptée au niveau de leurs élèves.
En revanche, nous pouvons assurer que tous les T.P. qui figurent explicitement dans les programmes officiels sont présents dans ce manuel, la plupart du temps dans la rubrique « Travaux pratiques » mais parfois dans une « Activité préparatoire » ou dans un exercice commenté.

Nous espérons, par ce manuel, transmettre notre conception ouverte et vivante des mathématiques, et nous accueillerons avec reconnaissance les critiques et suggestions capables de l'améliorer.

Les Auteurs

Sommaire

1 Nombres complexes.
Formes algébrique et trigonométrique. Calculs 5

2 Nombres complexes et géométrie 35

3 Espace : produit scalaire, projections 59

4 Systèmes linéaires 91

5 Vecteurs et barycentres 113

6 Produit vectoriel 145

7 Isométries du plan 165

8 Similitudes 197

9 Transformations de l'espace 225

10 Coniques 251

Index des mots clés 283

Index des méthodes 284

Réponses aux exercices 285

1 Nombres complexes

Formes algébrique et trigonométrique. Calculs

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Une introduction à la notion de nombre complexe 6
AP2 Premiers calculs dans l'ensemble des nombres complexes 8
AP3 Représentation géométrique d'un nombre complexe. Forme trigonométrique 10

COURS

1. Définition de l'ensemble des nombres complexes 12
2. Représentation géométrique d'un nombre complexe 14
3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe 17

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Résolution dans ℂ des équations du second degré à coefficients réels 21
TP2 Transformation de $a \cos x + b \sin x$ 22
TP3 Trigonométrie 23
TP4 Exemples d'utilisation des formules de Moivre et d'Euler 25
TP5 Racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes de 1 26

FICHE MÉTHODE

FICHE MÉTHODE Comment calculer dans ℂ 28

EXERCICES COMMENTÉS 29

LE JOUR DU BAC 30

EXERCICES ET PROBLÈMES 31

objectifs

- Introduire un nouvel ensemble de nombres, noté ℂ, qui permettra de résoudre toutes les équations algébriques (par exemple $x^2 + 1 = 0$) et donnera la possibilité de factoriser tous les polynômes à coefficients réels, à l'aide de polynômes, de degré un uniquement, à coefficients complexes.
- Élaborer un outil pour la trigonométrie, en particulier transformer des expressions telles que $\sin^k x$, $\cos^k x$, $\sin(mx)$, $\cos(px)$. Ces transformations trouveront leur intérêt dans le calcul intégral.

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

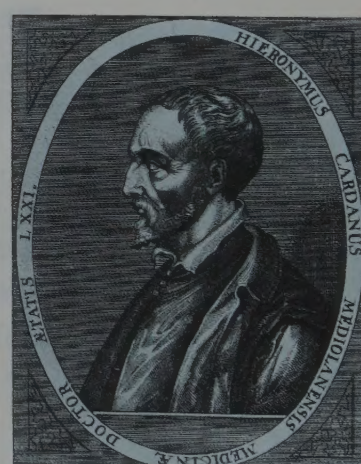
AP 1 Une introduction à la notion de nombre complexe

Le but de cette activité est d'introduire les nombres complexes suivant une démarche historique.

1 ■ *Introduction*

Dans l'ensemble des entiers naturels, une équation telle que $x + 2 = 5$ admet une solution : 3. Pour que l'équation $x + 5 = 2$ admette une solution, on doit introduire la notion d'entier **relatif.** De même, pour résoudre l'équation $3x = 5$ on doit introduire la notion de **nombre rationnel,** etc. Chaque nouvelle « catégorie » de nombres permet de résoudre de nouveaux problèmes.
Vous allez maintenant découvrir des nombres qui permettront de résoudre des équations du type $x^2 = -1$...
Au XVI^{e} siècle, en Italie, certains mathématiciens ont mis en évidence des nombres « imaginaires » aux curieuses propriétés.
Ces nombres sont aujourd'hui appelés « **nombres complexes** ». Leur existence a été confirmée au travers de la résolution par Bombelli de l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$, selon une méthode mise au point par Cardan et Tartaglia.

Nicolas Tartaglia (1499-1557)



Jérôme Cardan (1501-1576)

2 ■ *Formule de Cardan-Tartaglia*

En 1545, Cardan a publié une formule de résolution « par radicaux » d'une équation du type $x^3 + px + q = 0$. Tartaglia lui en a contesté la paternité.
La formule est :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{4 \times 27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{4 \times 27}}},$$

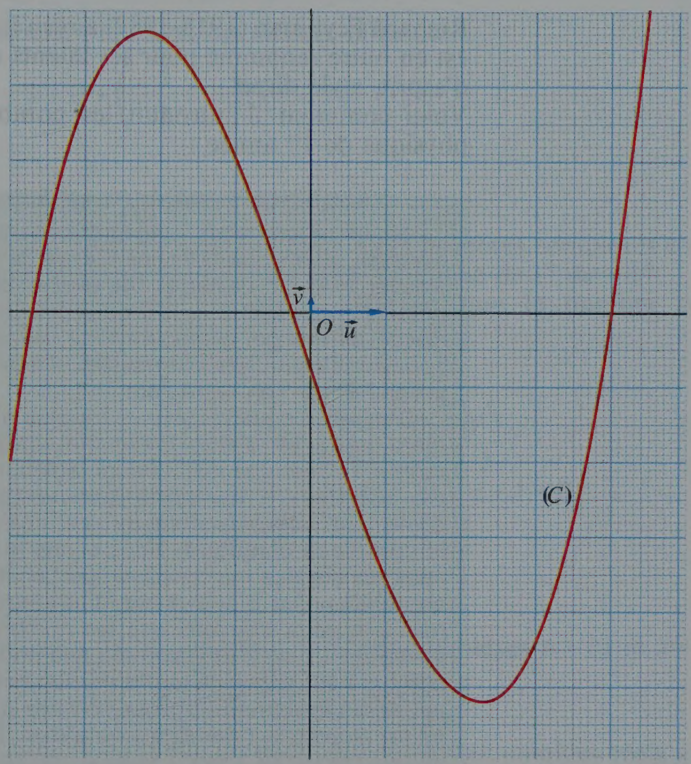
elle n'est utilisable que si $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$.

3 ■ *Résolution de l'équation* $x^3 - 15x - 4 = 0$

1° Sur la figure est tracée la courbe (C) représentative de la fonction $x \mapsto x^3 - 15x - 4$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Quel est le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$x^3 - 15x - 4 = 0$?

b) Indiquez une solution entière.



2° *a*) Calculez $4p^3 + 27q^2$ dans le cas de $x^3 - 15x - 4 = 0$.

b) Bien qu'elle n'ait pas de sens, écrivez la formule de Cardan.
Supposons qu'il existe une quantité, que nous noterons provisoirement «$\sqrt{-1}$», qui élevée au carré donne -1.
Remarquez alors qu'en appliquant les règles usuelles de calcul :

$(2 + «\sqrt{-1}»)^3 = 2 + 11«\sqrt{-1}» = 2 + «\sqrt{-121}»$.

c) En appliquant ces remarques à la formule de Cardan, retrouvez 4 comme solution de l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$.

L'existence d'un «nombre» i tel que $i^2 = -1$ semble justifiée puisque son utilisation dans les calculs précédents permet de retrouver un résultat vérifié par une autre méthode.
On a utilisé des expressions de la forme $a + ib$ ou $a + bi$ dans lesquelles a et b sont des nombres réels et «i» un élément vérifiant $i^2 = -1$.
De telles expressions sont appelées *nombres complexes*.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

AP2 Premiers calculs dans l'ensemble des nombres complexes

Le but de cette activité est de commencer à manipuler les nombres complexes. Le texte préliminaire présenté ci-dessous nous servira d'introduction.

1 ■ *L'introduction des nombres complexes par un prix Nobel de Physique*

Richard Feynman (1918-1988) a reçu le prix Nobel de Physique en 1965. Il est en outre renommé pour ses talents de pédagogue : clarté et profondeur d'esprit, style direct.
Voici comment il introduit les nombres complexes dans son cours de physique de 1re année :

... Nous ne pouvons toujours pas résoudre toutes les équations! Par exemple, quelle est la racine carrée de -1? Supposons que nous devions trouver $x^2 = -1$. Le carré... de **rien** de ce que nous avons découvert jusqu'à présent n'est égal à -1. Il nous faut donc généraliser nos nombres à une classe plus large. Supposons qu'une solution spécifique de $x^2 = -1$ soit appelée d'une certaine manière, nous l'appelons i; i par définition a la propriété que son carré vaut -1. ...
... Bien sûr, l'équation $x^2 = -1$ a plus d'une racine. Quelqu'un peut écrire i, mais quelqu'un d'autre peut dire, « Non je préfère $-$i. Mon i est moins votre i. » C'est une aussi bonne solution, et puisque la seule définition de i est que $i^2 = -1$, n'importe quelle équation que nous pouvons écrire est également vraie si le signe de i est changé partout. On appelle cela prendre le **complexe conjugué.** Nous allons maintenant fabriquer des nombres en additionnant des i successivement, en multipliant des i par des nombres, et en additionnant d'autres nombres, etc., selon toutes nos règles. De cette manière, nous trouvons que les nombres peuvent être tous écrits sous la forme $p + iq$, où p et q sont ce que nous appelons des nombres **réels...** Le nombre i est appelé le nombre **imaginaire unité.** Tout multiple réel de i est appelé un **imaginaire pur.** Le nombre le plus général a est de la forme $p + iq$ et est appelé un **nombre complexe.** Les choses ne deviennent pas pire si, par exemple, nous multiplions de tels nombres complexes, disons $(r + is)(p + iq)$. Alors, utilisant les règles, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(r + is)(p + iq) &= rp + r(iq) + (is)p + (is)(iq)\\ &= rp + i(rq) + i(sp) + (ii)(sq)\\ &= (rp - sq) + i(rq + sp),\end{aligned}$$

puisque $ii = i^2 = -1$.
Vous dites alors, « Ceci peut continuer éternellement! Nous avons défini des puissances de nombres imaginaires et tout le reste, mais lorsque tout sera fini, quelqu'un d'autre viendra avec une autre équation que nous ne pouvons résoudre, telle que $x^6 + 3x^2 = -2$. Alors il nous faudra recommencer notre généralisation! » Mais il apparaît qu'**avec cette seule invention supplémentaire,** la racine carrée de -1, **toute équation algébrique peut être résolue!** C'est un fait fantastique, et nous laissons au Département de Mathématique le soin de le prouver...

2 ■ *Addition et multiplication*

1° *a*) Dans le texte, l'auteur effectue une multiplication de deux nombres complexes dans le cas général. Remarquez que, sans le dire, il applique les mêmes règles de calcul que celles que vous connaissez dans l'ensemble $\mathbb{R}$. Nous conviendrons de conserver ces règles.

b) D'après la remarque précédente, calculez : $1 \times i$ et $0 \times i$.

c) En vous inspirant du calcul de Feynman,
— retrouvez que $(2 - \mathrm{i}) \times (1 + 2\mathrm{i}) = 4 + 3\mathrm{i}$;
— calculez $(3 + \mathrm{i}\sqrt{2})\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})$.

2° Il est encore plus facile de calculer des sommes ; par exemple :
$(12 - 5\mathrm{i}) + (-11 + \mathrm{i}) = (12 - 11) + (-5 + 1)\mathrm{i} = 1 - 4\mathrm{i}$.

Effectuez : $(5 - 2\mathrm{i}) + \left(\frac{1}{2} + 3\mathrm{i}\right)$; $(-1 + \mathrm{i}) + (2 - \mathrm{i})$.

3° En associant les deux opérations, effectuez :
$(1 - 2\mathrm{i})(-3 + \mathrm{i}) + \left(-\frac{1}{2} + 3\mathrm{i}\right)(-2 - \mathrm{i})$.

3 ■ *Nombres complexes conjugués*

Feynman fait allusion dans son texte à des nombres complexes conjugués. En suivant ses explications, quel est le conjugué de i ? de $-\mathrm{i}$?
Soit l'équation $z^2 - z + 1 = 0$. Vérifiez que le nombre complexe $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ est solution de cette équation.

Quel est, d'après le texte, le conjugué de $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$?
Ce nombre est-il solution de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$?
Cela était-il annoncé dans le texte ?

4 ■ *Inverse. Quotient*

Il est naturel de dire que deux nombres complexes $a + b\mathrm{i}$ et $x + y\mathrm{i}$ sont égaux si et seulement si $a = x$ et $b = y$.

• **Inverse**

1° En écrivant que $1 = 1 + 0\mathrm{i}$, déterminez les nombres réels x et y tels que $(2 + 3\mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = 1$.

2° Soit $a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe (a et b sont deux nombres réels). Cherchez deux nombres réels x et y tels que : $(a + \mathrm{i}b)(x + \mathrm{i}y) = 1$.

(Vous exprimerez x et y en fonction de a et b ; cela revient à résoudre un système de deux équations à deux inconnues.)
A quelle condition sur a et b y a-t-il une solution unique ?
On dit alors que le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$ est l'inverse du nombre complexe $a + \mathrm{i}b$. On notera : $x + \mathrm{i}y = \frac{1}{a + \mathrm{i}b}$.

3° *Méthode :* pour déterminer l'inverse du nombre complexe $a + \mathrm{i}b$ on multiplie le dénominateur et le numérateur de $\frac{1}{a + \mathrm{i}b}$ par le nombre $a - \mathrm{i}b$.

Par exemple : $\frac{1}{2 - \mathrm{i}} = \frac{2 + \mathrm{i}}{(2 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\,\mathrm{i}$.

Calculez : $\frac{1}{3 - 4\mathrm{i}}$ et $\frac{1}{3 + \mathrm{i}}$.

• **Quotient**

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$.

Si $z' \neq 0$ alors on pose $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$. Calculez : $\frac{2 - \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}$ et $\frac{1 + 2\mathrm{i}}{3 + 4\mathrm{i}}$.

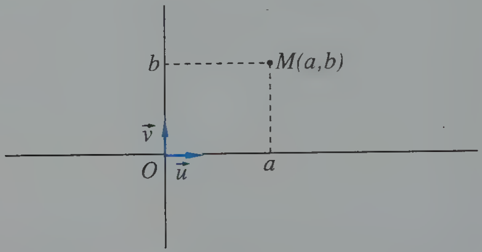
AP3 Représentation géométrique d'un nombre complexe. Forme trigonométrique

Dans toute cette activité, nous considérons un plan orienté (P) muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Les nombres réels ont pu être représentés à l'aide d'un axe gradué.
Le but de cette activité est de fournir un moyen simple pour représenter géométriquement un nombre complexe. Cette interprétation nous conduira à une autre forme d'écriture, utilisant les fonctions sinus et cosinus.

1 ■ *Représentation d'un nombre complexe par un point*

Le nombre complexe $a + ib$ est entièrement déterminé par le couple de nombre réels (a, b). Dans le plan (P) muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, ce couple détermine un point et un seul : le point $M(a, b)$.

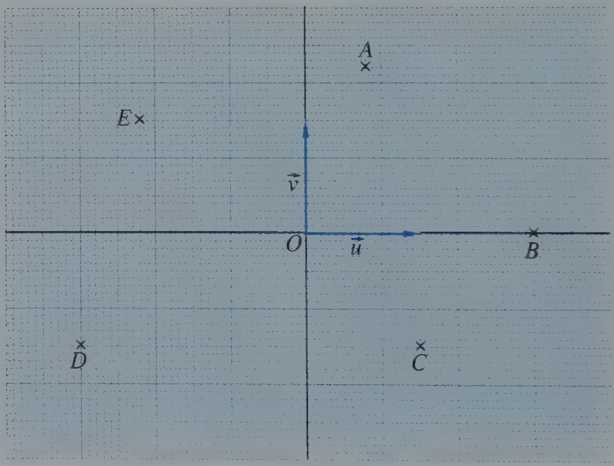


Ce point $M(a, b)$ représente le nombre complexe $a + ib$. Il en est le point image.

a) Placez dans le plan (P) les points images des nombres complexes :

$i, \quad -i, \quad 2i, \quad 1, \quad -1, \quad 1+i, \quad -1+2i.$

b) Déterminez les nombres complexes dont les points A, B, C, D et E représentés sur la figure sont les images.



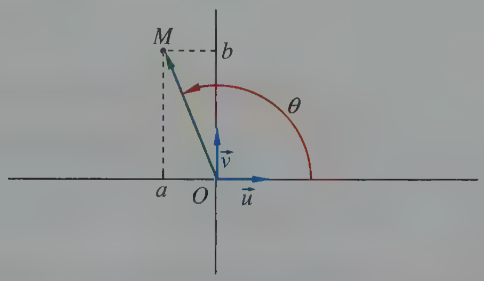
c) Sur une autre figure, tracez le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1. Placez les points images des nombres complexes :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad i; \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Que constatez-vous ?
La droite d'équation $y = x$ coupe (Γ) en deux points. Quels sont les nombres complexes dont ces points sont les images ?

2 ■ *Forme trigonométrique*

Soit le point M, image du nombre complexe $a + ib$.
Posons $r = OM$ et $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

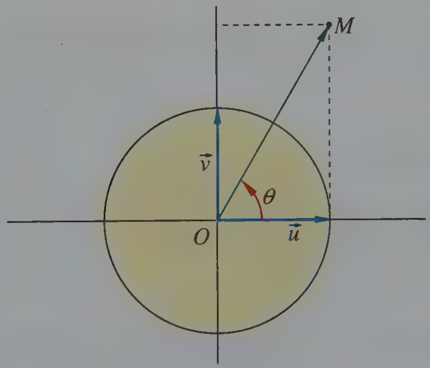


a) Calculez r en fonction de a et b.
Si $a \neq 0$, calculez $\tan\theta$ en fonction de a et b.

b) Exprimez a et b en fonction de r et θ.
Remarquez que l'on a : $a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

L'écriture $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée « forme trigonométrique » du nombre complexe $a + ib$; l'écriture $a + ib$ est sa « forme algébrique ».

c) *Exemple.*
Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$ et M son point image.
On a : $OM = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.



$z = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ ou $z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On trouve donc : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ soit $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ est la forme trigonométrique de $1 + i\sqrt{3}$.

d) Déterminez la « forme trigonométrique » des nombres complexes $1 + i$, $-1 + i$, $\sqrt{3} - i$.

COURS

1. DÉFINITION DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

1. Définition

Définition 1

L'ensemble des nombres de la forme $a + ib$, où a et b sont des nombres réels et $i^2 = -1$, muni des opérations multiplication et addition ayant les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$, est appelé ensemble des nombres complexes.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

□ *Remarques*

1° $\mathbb{R}$ est considéré comme une partie de $\mathbb{C}$: il suffit de prendre $b = 0$ dans $a + ib$.

2° On peut noter indifféremment : $z = a + ib$ ou $z = a + bi$.

EXEMPLE

$1, i, -2i, 1 + 2i, 3 - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont des nombres complexes.

2. Partie réelle, partie imaginaire

Soit z et z' deux nombres complexes s'écrivant $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ (a, b, a' et b' sont des nombres réels). Nous admettons que :

$$z = z' \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} a = a' \\ b = b'. \end{cases}$$

A tout nombre complexe on peut donc ainsi associer un couple unique de réels.

Définition 2

Soit un nombre complexe z s'écrivant $a + ib$ où a et b sont deux nombres réels.
a est appelé partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
b est appelé partie imaginaire de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

■ **Conséquence**
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

EXEMPLE

Soit	$z_1 = 1 - 2i$,	$z_2 = -4$,	$z_3 = -2i$.
	$\mathrm{Re}(z_1) = 1$;	$\mathrm{Re}(z_2) = -4$;	$\mathrm{Re}(z_3) = 0$;
	$\mathrm{Im}(z_1) = -2$;	$\mathrm{Im}(z_2) = 0$;	$\mathrm{Im}(z_3) = -2$.

□ *Remarque.* Tout nombre complexe **non nul** dont la partie réelle est nulle est appelé **nombre imaginaire pur.**

COURS

3. Calculs dans $\mathbb{C}$

■ **Addition et multiplication**

Les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$. Tous les résultats démontrés dans $\mathbb{R}$ à partir de ces propriétés restent valables dans $\mathbb{C}$.

EXEMPLES

Soit $z = 1 - \mathrm{i}$, $z' = -2 + 3\mathrm{i}$.

$z + z' = (1-2) + (-1+3)\mathrm{i} = -1 + 2\mathrm{i}$.

$zz' = 1 \times (-2) + 1 \times 3\mathrm{i} + (-\mathrm{i}) \times (-2) + (-\mathrm{i}) \times 3\mathrm{i}$

$zz' = -2 + 3\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 \qquad (\mathrm{i}^2 = -1)$

$zz' = 1 + 5\mathrm{i}$.

■ **Identités remarquables**

Propriétés 1

Pour tous nombres complexes z et z' :

$(z+z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$;

$(z-z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$;

$(z+z')(z-z') = z^2 - z'^2$.

□ *Remarque.* $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 + b^2$.

On peut donc factoriser dans $\mathbb{C}$ des expressions non factorisables dans $\mathbb{R}$.

■ **Application au calcul d'un quotient**

On utilise la remarque précédente pour «rendre réel» le dénominateur.

EXEMPLE

$$\frac{1-\mathrm{i}}{-2+3\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})(-2-3\mathrm{i})}{(-2+3\mathrm{i})(-2-3\mathrm{i})} = \frac{-5-\mathrm{i}}{(-2)^2+3^2} = \frac{-5}{13} - \frac{1}{13}\mathrm{i}.$$

$$\frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

■ **Formule du binôme**

Propriété 2

Soit deux nombres complexes z et z' et n un entier naturel non nul :

$$(z+z')^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k z^n z'^{n-k}.$$

EXEMPLE

$(1+\mathrm{i})^5 = 1 + 5\mathrm{i} + 10\mathrm{i}^2 + 10\mathrm{i}^3 + 5\mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^5 = -4 - 4\mathrm{i}$.

$(2-\mathrm{i})^4 = 2^4 - 4 \times 2^3 \times \mathrm{i} + 6 \times 2^2 \times \mathrm{i}^2 - 4 \times 2 \times \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 = -7 - 24\mathrm{i}$.

2. REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit un plan (P) muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Affixe d'un point

A tout nombre complexe $a + ib$, on peut associer le point M de (P) de coordonnées (a, b) et réciproquement.

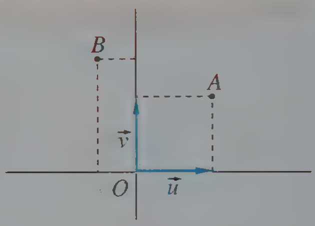
Définition 3

Dans le plan (P) muni d'un repère orthonormal direct, le point M de coordonnées (a, b) est appelé point image du nombre complexe $a + ib$. Réciproquement, le nombre complexe $a + ib$ est appelé affixe du point M.

On écrit $M(a + ib)$ et on lit : « M d'affixe $a + ib$ ».

EXEMPLE

Sur la figure sont placés les points $A(1 + i)$ et $B\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i\right)$.



Remarquez que l'axe $(O, \vec{u})$ est l'ensemble des points images des nombres réels.

2. Affixe d'un vecteur

De même, à tout nombre complexe $a + ib$, on peut associer le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (a, b) dans le plan (P) et réciproquement.

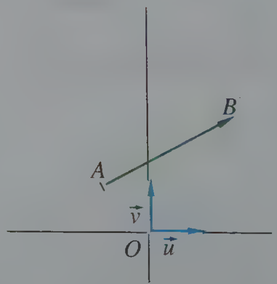
Définition 4

Dans le plan (P) muni d'une base orthonormale directe, le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (a, b) est appelé vecteur image du nombre complexe $a + ib$.
Réciproquement, le nombre complexe $a + ib$ est appelé affixe du vecteur $\vec{w}$.

□ *Remarque.* Si M a pour affixe z alors $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z et réciproquement.

■ **Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$**

Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points de (P).
Déterminons l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
A a pour coordonnées (x_A, y_A) ;
B a pour coordonnées (x_B, y_B).
$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.
Donc l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $(x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$,
c'est-à-dire $z_B - z_A$.



Propriété 3

Si A et B sont deux points du plan, d'affixes respectives z_A et z_B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

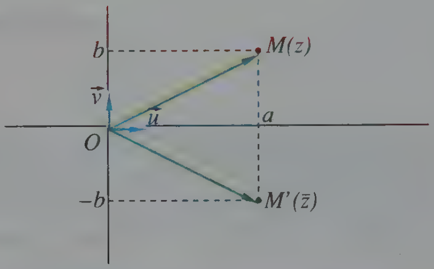
EXEMPLE

Soit $A(-1+2\mathrm{i})$ et $B(1-\mathrm{i})$:
$\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $2-3\mathrm{i}$ et $\overrightarrow{BA}$ a pour affixe $-2+3\mathrm{i}$.

3. Nombres complexes conjugués

Soit $M(z)$, s la réflexion d'axe $(O, \vec{u})$ et $M' = s(M)$.

Si $z = a + \mathrm{i}b$ alors l'affixe z' de M' est $a - \mathrm{i}b$.



Définition 5

Soit M un point quelconque du plan (P), d'affixe z.
L'affixe du point M', symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, est appelé nombre complexe conjugué de z. Il est noté $\bar{z}$.

Les propriétés de la réflexion s ainsi que les règles de calcul de $\mathbb{C}$ impliquent les conséquences résumées dans la propriété ci-dessous :

Propriété 4

Soit z et z' deux nombres complexes quelconques.

- **Si $z = a + \mathrm{i}b$ alors $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$ (a et b nombres réels).**
- **$\bar{\bar{z}} = z$ (si $M' = s(M)$ alors $s(M') = M$).**
- **$z = \bar{z}$ équivaut à $z \in \mathbb{R}$. (M est invariant par s si et seulement si M est sur $(O, \vec{u})$.)**
- **$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.**
- **$\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$.**

4. Module d'un nombre complexe

Définition 6

Soit z un nombre complexe quelconque et M le point image de z dans le plan (P) muni du repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On appelle module de z la distance OM. On note : $|z| = OM$.

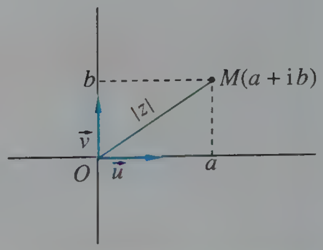
□ *Remarques*

- Si z est réel, sa valeur absolue et son module sont confondus (en accord avec la notation $|z|$).
- $|z|$ est un **nombre réel positif.**
- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

COURS

■ **Calcul du module**

Soit $z = a + ib$.
Soit M le point d'affixe z.
$\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, donc $\|\overrightarrow{OM}\|^2 = a^2 + b^2$
car $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormal.
D'où : $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Propriété 5

> **Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ (a et b nombres réels). On a : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.**

EXEMPLE

$|1 + i| = \sqrt{2}$; $\left|-\frac{1}{2} + i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $|1 + i\sqrt{3}| = 2$.

□ *Remarque.* $(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$.
On a donc : $z\bar{z} = |z|^2$ soit $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, puisque $|z| \geqslant 0$.
On a alors : $|zz'|^2 = (zz')(\overline{zz'}) = (z\bar{z})(z'\bar{z}') = |z|^2|z'|^2$;
d'où : $|zz'| = |z||z'|$.

Propriété 6

> **Pour tout nombre complexe z : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.**
> **Pour tous nombres complexes z et z' : $|zz'| = |z||z'|$.**

On peut en déduire que, pour tout entier naturel n ($n \geqslant 1$) : $|z^n| = |z|^n$.

EXEMPLE

$|(1 + i\sqrt{3})^3| = |1 + i\sqrt{3}|^3 = 8$.

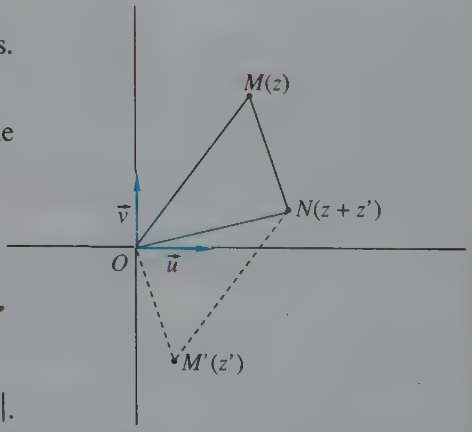
■ **Module d'une somme**

Soit z et z' deux nombres complexes.
Soit les points $M(z)$ et $N(z + z')$.
Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe z'.
D'après l'inégalité triangulaire dans le plan, on a :

$$ON \leqslant OM + MN,$$

soit $|z + z'| \leqslant |z| + \|\overrightarrow{MN}\|$.

Soit $M'(z')$. On a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM'}$
(ils ont même affixe); donc :
$\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{OM'}\| = |z'|$.
D'où le résultat : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

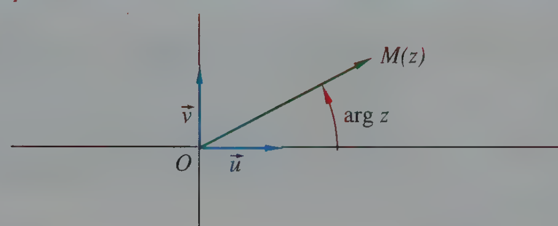


Propriété 7
Inégalité triangulaire

> **Pour tous nombres complexes z et z' :**
> **$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.**

3. FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Argument d'un nombre complexe non nul



Définition 7

Étant donné un nombre complexe z non nul, de point image M, on appelle argument de z tout nombre réel α, mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

☐ *Remarques*

- Si α et θ sont deux arguments de z alors il existe un entier relatif k tel que $\alpha = \theta + k2\pi$.
- Si le réel θ est un argument de z, on note :

$\arg z = \theta$ ou $\arg z = \theta + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

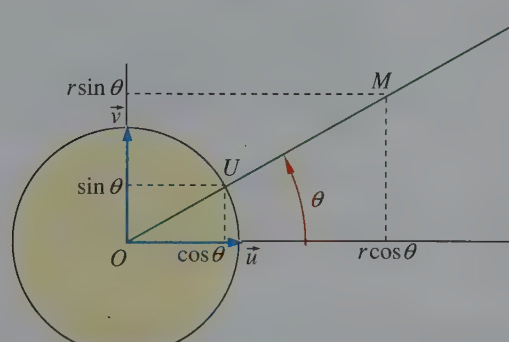
- Le nombre 0 n'a pas d'argument.

2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Remarque préliminaire

La donnée de son module r et d'un de ses arguments θ caractérise entièrement tout nombre complexe non nul z. En effet :

- $\arg z = \theta + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ situe M sur la demi-droite $]O, U)$ où U est le point de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$.



- Sur $]O, U)$ il existe un unique point M tel que $OM = r$.

■ **Forme trigonométrique**

En projetant orthogonalement le point M sur les axes de coordonnées, on obtient :

$\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\,\vec{u} + r\sin\theta\,\vec{v}$.

On peut donc écrire : $z = r\cos\theta + \mathrm{i}\,r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

Propriété 8

Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ peut s'écrire :

$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

Cette écriture est la forme trigonométrique du nombre complexe z.

EXEMPLES

$|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$. Donc $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$|-1+\mathrm{i}\sqrt{3}| = 2$. Donc $-1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

3. Forme trigonométrique d'un produit. Formule de Moivre

■ **Forme trigonométrique d'un produit**

Soit $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$ ($r \in \mathbb{R}_+^*$ et $r' \in \mathbb{R}_+^*$).

$zz' = rr'(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$,

$zz' = rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + \mathrm{i}(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')]$,

$zz' = rr'[\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')]$.

Donc $|zz'| = rr'$ et $\arg(zz') = \theta + \theta'$.

Propriétés 9

Le module du produit de deux nombres complexes est le produit de leurs modules.
Un argument du produit de deux nombres complexes non nuls est la somme de leurs arguments.

□ *Remarques*

• Si $|z| = r$ et $\arg z = \theta$, alors $z \times \dfrac{1}{z} = 1$ implique :

$|z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$ et $\arg z + \arg\dfrac{1}{z} = 0$.

On obtient donc : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{r}$ et $\arg\dfrac{1}{z} = -\theta$.

• Si, de plus, $|z'| = r'$ et $\arg z' = \theta'$, en combinant avec la propriété 9, on a :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{r}{r'} \quad \text{et} \quad \arg \frac{z}{z'} = \theta - \theta'.$$

Formule de Moivre

Soit n un entier naturel non nul. Du paragraphe précédent, on déduit aisément que :

si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ alors $z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$.

En particulier, si $r = 1$: $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$.

Cette formule, qui a de nombreuses applications en trigonométrie, a été découverte par le mathématicien français Abraham de Moivre en 1722 alors qu'il essayait de factoriser des polynômes du type $z^{2n} + 2z\cos n\theta + 1$.

Propriété 10
Formule de Moivre

Pour tout nombre entier naturel non nul n et tout nombre réel θ :
$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$.

EXEMPLE

$$\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^{1\,993} = \cos\frac{1\,993\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{1\,993\pi}{4};$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^{1\,993} = \cos\left(500\pi - \frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(500\pi - \frac{7\pi}{4}\right);$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^{1\,993} = \cos\frac{7\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Notation $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Formules d'Euler

Notation $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Dans la formule de Moivre, on remarque que l'argument θ se comporte comme un exposant. On convient de noter :

$\boxed{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

Cette notation sera justifiée dans les années ultérieures. En Terminale, nous l'utilisons pour sa commodité d'écriture.

La formule de Moivre devient : $\boxed{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}$.

De même, tout nombre complexe z de module r et d'argument θ se note :

$\boxed{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

EXEMPLE

$-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$; $\quad \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$; $\quad -1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

La proposition relative au produit de deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique nous fournit, dans le cas où $r = r' = 1$, la relation suivante :

Propriété 11

Pour tous nombres réels θ et θ' :

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}; \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}.$$

■ **Formules d'Euler.**

Soit $z = \cos\theta + i\sin\theta$ et $\bar{z}$ son conjugué. On a :

$\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$,

$z + \bar{z} = 2\cos\theta$ et $z - \bar{z} = 2i\sin\theta$.

On obtient donc :

$$\cos\theta = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Or on peut écrire : $z = e^{i\theta}$ et $\bar{z} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$.

On en déduit donc les formules suivantes dues à Euler (inventeur de la notation $e^{i\theta}$ en 1746) :

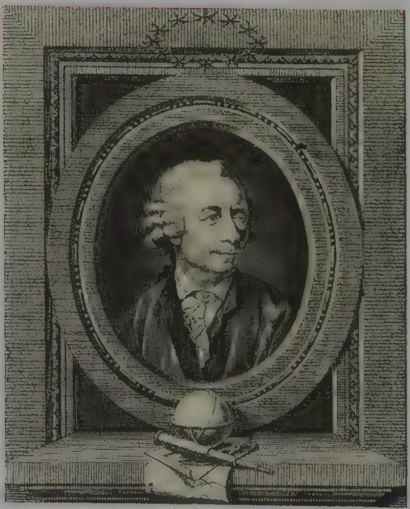
Propriété 12
Formules d'Euler

Pour tout nombre réel θ :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

EXEMPLE

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2}; \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2i}.$$



Léonhard Euler
(1707-1783)

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels

1 ■ *Un exemple historique*

Le mathématicien italien Cardan a résolu au XVI^e siècle le problème suivant : « partager dix en deux parties telles que leur produit soit quarante ».
Il avait abouti à deux solutions : 5 + « $\sqrt{-15}$ » et 5 – « $\sqrt{-15}$ » (en transcrivant ses notations). Au XVIII^e siècle, le mathématicien suisse Léonhard Euler, confronté à un problème et un résultat analogues, en déduisait que ces solutions n'existaient pas.

1° Montrez que le problème de Cardan se ramène à la résolution de l'équation : $z^2 - 10z + 40 = 0$ (1).

2° *a*) Montrez que (1) équivaut à : $(z-5)^2 + 15 = 0$ (2).

b) Calculez $(a - ib)(a + ib)$. Déduisez-en une factorisation de $(z-5)^2 + 15$.

c) Résolvez l'équation (1) dans $\mathbb{C}$.

3° *a*) Comparez vos solutions complexes à celles de Cardan. Commentez.

b) Que pensez-vous des affirmations d'Euler ? L'équation (1) admet-elle des solutions réelles ?

2 ■ *Étude du cas général*

On se propose de résoudre toute équation du type $az^2 + bz + c = 0$ où a, b, c sont des nombres réels ($a \neq 0$).

La factorisation canonique effectuée dans $\mathbb{R}$ reste valable dans $\mathbb{C}$. Si $a \neq 0$ alors :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \text{où } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $\Delta \geqslant 0$ alors on sait résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$ donc dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
Si $\Delta < 0$ alors $|\Delta| = -\Delta$.

1° Montrez que $az^2 + bz + c = 0$ équivaut à $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2} = 0$.

2° En vous inspirant de l'exemple précédent, factorisez $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}$.

3° Montrez que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

3 ■ *Applications*

1° Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - 4z + 3 = 0$.

2° Trouvez deux nombres complexes de produit 1 et de somme – 1.

4 ■ *Méthode*

Pour résoudre une équation du second degré à coefficients réels, $az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0)$:

1° Vérifiez que l'équation n'admet pas de solution visible (du type $z = \mathrm{i}$ dans $z^2 + 1 = 0$).

2° Calculez $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $\Delta \geqslant 0$ appliquez les formules valables dans $\mathbb{R}$.
Si $\Delta < 0$ l'équation admet *deux solutions complexes conjuguées :*

$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

TP2 Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Le but de ce TP est de factoriser toute expression du type a* $\cos x + b \sin x$, *où a et b sont deux nombres réels non simultanément nuls, sous la forme* $r \cos(x - \theta)$. *Cette seconde écriture est plus pratique pour des résolutions d'équations, recherches de signes, etc.

1 ■ *Approche géométrique du problème*

1° Soit $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ et, dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, les points $M(z)$ et $M'(z')$.
Vérifiez que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = \mathrm{Re}(z\bar{z}')$.

2° Soit $M(a, b)$. Déterminez les coordonnées d'un point N tel que $a \cos x + b \sin x$ s'interprète comme $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$.

3° M a pour affixe $a + \mathrm{i}b$ et N a pour affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Il existe un nombre r $(r > 0)$ et un nombre θ tels que $a + \mathrm{i}b = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
En utilisant le **1°** et le **2°**, exprimez $a \cos x + b \sin x$ en fonction de r, θ et x.
Que représentent r et θ pour le nombre complexe $a + \mathrm{i}b$?

2 ■ *Exemple de factorisation*

Appliquons la méthode précédente à l'expression : $\cos x - \sqrt{3} \sin x$.

1° Écrivez sous forme trigonométrique le nombre complexe $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

2° Déduisez-en que $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3 ■ *Résolution d'équations*

1° En utilisant la méthode précédente de factorisation, résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x + \sin x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$;

b) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$.

2° Une équation du type $a \cos x + b \sin x = c$ admet-elle toujours des solutions ?

Discutez suivant les valeurs de c (rappelez-vous que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$).

4 ■ *Méthode*

Pour factoriser une expression du type $a \cos x + b \sin x$,
1° on écrit le nombre complexe $a + ib$ sous forme trigonométrique : $re^{i\theta}$;
2° on a alors : $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \theta)$.

TP3 Trigonométrie

Le but de ce TP est de transformer une somme trigonométrique en un produit (et réciproquement).
L'intérêt d'une telle transformation est clair, par exemple pour résoudre une équation du type **$\cos 3x + \cos 5x = 0$.**

1 ■ *Transformation d'une somme en un produit*

1° Factorisation de $\cos a + \cos b$
Le nombre $\cos a + \cos b$ est la partie réelle du nombre complexe $e^{ia} + e^{ib}$.

a) On peut écrire : $|e^{ia} + e^{ib}|^2 = (\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2$.

Montrez que : $|e^{ia} + e^{ib}|^2 = 2[1 + \cos(a - b)] = 4 \cos^2 \dfrac{a-b}{2}$.

b) En utilisant la formule d'Euler pour $\cos \dfrac{a-b}{2}$, montrez que :

$$e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos \frac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

c) En égalant les parties réelles, montrez que :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

2° Autres factorisations

a) En égalant les parties imaginaires des deux écritures de $e^{ia} + e^{ib}$, montrez que :

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

b) En procédant comme au **1°** avec le nombre $e^{ia} - e^{ib}$, montrez successivement que :

- $|e^{ia} - e^{ib}|^2 = 4 \sin^2 \dfrac{a-b}{2}$;
- $e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin \dfrac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}$;
- $\cos a - \cos b = -2 \sin \dfrac{a+b}{2} \sin \dfrac{a-b}{2}$;
- $\sin a - \sin b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \sin \dfrac{a-b}{2}$.

3° Exemples
En utilisant les formules trouvées précédemment, factorisez les expressions suivantes :

a) $\cos 2x + \cos 6x$; *b*) $\sin x + \sin 5x$;
c) $\cos 3x - \cos x$; *d*) $\sin 2x - \sin 3x$.

2 ■ *Transformation d'un produit en une somme*

1° On pose $p = \dfrac{a+b}{2}$ et $q = \dfrac{a-b}{2}$.

a) Exprimez a et b en fonction de p et q.

b) Déduisez des formules trouvées précédemment que :

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2}[\cos(p+q) + \cos(p-q)].$$

c) Déterminez de même les produits : $\sin p \sin q$ et $\sin p \cos q$.

2° Application

En utilisant les formules précédentes, écrivez sous forme de sommes les produits suivants :

a) $\sin 2x \cos 6x$;

b) $\cos x \cos 5x$;

c) $\sin 3x \sin 2x$.

3 ■ *Exemples d'utilisations*

1° Résolution d'une équation trigonométrique

Soit l'équation $\sin 5x + \sin 7x = 0$.

a) Grâce aux formules vues plus haut, factorisez $\sin 5x + \sin 7x$.

b) Résolvez les équations $\sin 6x = 0$ et $\cos x = 0$.

c) Déduisez-en les solutions de l'équation initiale.

2° Recherche d'une primitive

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sin 3x \cos 5x$.

a) Transformez $f(x)$ en une somme trigonométrique.

b) Déduisez-en une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

4 ■ *Bilan des formules à retenir*

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2};$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2};$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2};$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2}[\cos(p+q) + \cos(p-q)];$$

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2}[\cos(p-q) - \cos(p+q)];$$

$$\sin p \cos q = \frac{1}{2}[\sin(p+q) + \sin(p-q)].$$

TP4 Exemples d'utilisation des formules de Moivre et d'Euler

1 ■ *Exemple d'utilisation de la formule de Moivre*

1° Écrivez $1 + \mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.

2° Déduisez-en l'expression de $(1 + \mathrm{i})^{13}$ par la formule de Moivre.

3° Développez $(1 + \mathrm{i})^{13}$ en utilisant la formule du binôme de Newton.

4° Déduisez-en que :

$$1 - C_{13}^{2} + C_{13}^{4} - C_{13}^{6} + C_{13}^{8} - C_{13}^{10} + C_{13}^{12} = -64 ;$$

$$C_{13}^{1} - C_{13}^{3} + C_{13}^{5} - C_{13}^{7} + C_{13}^{9} - C_{13}^{11} + C_{13}^{13} = -64.$$

2 ■ *Linéarisation de polynômes trigonométriques*

1° Linéarisation de $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$.

a) Soit un réel x. Développez $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3$.

b) Déduisez-en l'expression de $\cos^3 x$ en fonction de termes du type $\cos kx$. (Utilisez la formule d'Euler en regroupant les termes d'exposants opposés.)
On dit alors qu'on a **linéarisé** $\cos^3 x$.

c) Procédez de même pour linéariser $\sin^3 x$.

Indication : partez de $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3$.

2° En utilisant une démarche analogue, linéarisez l'expression : $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$.

3° Recherche d'une primitive d'un polynôme trigonométrique.

a) Linéarisez : $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

b) Déduisez-en une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

3 ■ *Opération inverse de la linéarisation*

1° Écriture de $\cos 4x$ en fonction des puissances de $\cos x$.

a) Développez $(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^4$.

b) Appliquez la formule de Moivre à $\cos 4x + \mathrm{i} \sin 4x$.

c) En égalant les parties réelles, concluez.

d) Exprimez $\sin 4x$ à partir des puissances de $\sin x$.

2° Applications

a) Montrez que : $\sin 3x = -4 \sin^3 x + 3 \sin x$.

b) Soit k un entier naturel. Exprimez $\sin \dfrac{x}{3^k}$ en fonction de $\sin \dfrac{x}{3^{k+1}}$.

c) Montrez que :

$$\sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3^2} + 3^2 \sin^3 \frac{x}{3^3} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n} = \frac{3^n}{4} \sin \frac{x}{3^n} - \frac{1}{4} \sin x.$$

TP5 Racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes de 1

Le but de ce TP est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = 1$ et certaines équations du type $z^n = a$.
Dans tout ce TP on appellera « racine $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe a » tout nombre complexe z tel que $z^n = a$. Ne confondez pas avec la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre réel positif.

1 ■ *Racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1*

1° Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ (n entier naturel non nul).

a) Montrez que si $z^n = 1$, alors $|z| = 1$.

b) Montrez que l'équation $z^n = 1$ équivaut à l'équation d'inconnue θ : $e^{in\theta} = 1$.

c) Déduisez de ce qui précède que l'équation $z^n = 1$ a n solutions complexes :

$$1, \quad e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad e^{i\frac{4\pi}{n}}, \quad \dots, \quad e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}.$$

2° Ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1

Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

a) Exprimez les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 (autres que 1) en fonction de ω. Écrivez ainsi la liste des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

b) Soit M_k le point d'affixe $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Déduisez de *a*) que : $(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \dfrac{2\pi}{n}$.

Quelle est la figure géométrique inscrite dans le cercle $\mathcal{C}(O, 1)$ déterminée par les points $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$?

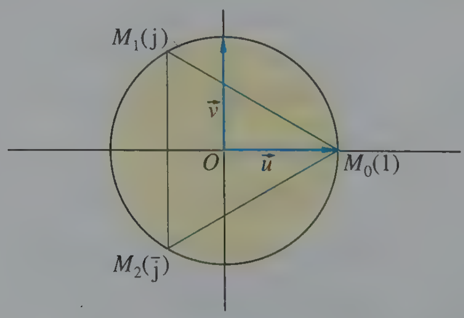
c) Déduisez de *a*) la somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

3° Étude des cas $n = 3$ et $n = 4$

a) Déterminez les racines troisièmes de 1.
Exprimez-les sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

b) Soit $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vérifiez que les racines troisièmes de 1 sont : 1, j et j^2.
Remarquez que $j^2 = \bar{j}$.
Les points images de 1, j et $\bar{j}$ forment un triangle équilatéral.



c) Déterminez de même les racines quatrièmes de 1 et placez leurs points images sur une figure analogue.

2 ■ *Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe a*

□ *Remarque :* Nous n'étudierons que le cas où la forme trigonométrique de a est connue ou facile à obtenir.

1° Étude d'un exemple

On se propose de déterminer l'ensemble des racines troisièmes de $8e^{i\frac{\pi}{5}}$.

a) Déterminez le réel positif ρ et un réel φ tels que : $8e^{i\frac{\pi}{5}} = (\rho e^{i\varphi})^3$.

b) Montrez qu'alors l'équation $z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{5}}$ équivaut à $\left(\dfrac{z}{\rho e^{i\varphi}}\right)^3 = 1$.

c) Connaissant l'ensemble des racines troisièmes de 1, déduisez-en l'ensemble des racines troisièmes de $8e^{i\frac{\pi}{5}}$.

2° Étude du cas général

Cherchons les racines $n^{\text{ièmes}}$ du nombre complexe $a = re^{i\theta}$.
Remarquez que si $a = 0$ il y a une seule racine $n^{\text{ième}}$: 0.

a) Cherchez une solution z sous la forme $\rho e^{i\varphi}$.
Remarquez que l'on a : $\rho^n = r$ et $n\varphi = \theta + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Montrez que $z^n = a$ équivaut à $\left(\dfrac{z}{\rho e^{i\varphi}}\right)^n = 1$.

c) Connaissant l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1, déduisez-en que les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a sont :

$$\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}, \quad \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{(n-1)2\pi}{n}\right)}.$$

3 ■ *Bilan*

- **Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 sont :**

$$1, \quad e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad e^{i\frac{4\pi}{n}}, \quad \ldots, \quad e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}.$$

- **Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de $re^{i\theta}$ sont :**

$$\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}, \quad \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{(n-1)2\pi}{n}\right)}.$$

Remarquez que l'on obtient toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de $re^{i\theta}$ en multipliant successivement $\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$ par les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

FICHE METHODE

Comment calculer dans $\mathbb{C}$

1 *Pour calculer avec des nombres sous la forme $a + \mathrm{i}b$*

- Appliquer les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$, avec en plus : $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Pour effectuer un quotient, multiplier d'abord numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

2 *Pour calculer avec des nombres sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ou $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$*

- Pour multiplier des nombres, il faut :
  — multiplier les modules,
  — ajouter les arguments.
  En particulier : $(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.
- Pour diviser deux nombres il faut :
  — diviser les modules,
  — soustraire les arguments.

3 *Pour écrire un nombre $a + \mathrm{i}b$ sous forme trigonométrique*

- Il faut calculer le module $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Il faut factoriser par celui-ci :

  $a + \mathrm{i}b = \sqrt{a^2 + b^2}\quad(a' + \mathrm{i}b')$.
- Un argument de $a + \mathrm{i}b$ est alors tout réel θ tel que :

  $a' = \cos\theta$ et $b' = \sin\theta$.
- On a alors :

  $a + \mathrm{i}b = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

EXERCICES COMMENTÉS

Exercice 1

Énoncé

Calculez : a) $(2-3i)^2(1+i)$. b) $\dfrac{2+i}{1-i}$.

Solution

a) Les nombres donnés sont sous forme algébrique. On applique les règles classiques et $i^2=-1$.
On effectue d'abord $(2-3i)^2$ en utilisant une identité remarquable.

$(2-3i)^2(1+i)=(4-12i-9)(1+i)$ (règle $i^2=-1$),

$(2-3i)^2(1+i)=-(5+12i)(1+i)$,

$(2-3i)^2(1+i)=7-17i$.

b) On multiplie les deux termes du quotient par le conjugué du dénominateur. On obtient ainsi un nouveau dénominateur qui est un nombre réel.

$$\frac{2+i}{1-i}=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+3i}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i.$$

Exercice 2

Énoncé

Calculez $(1-i\sqrt{3})^{10}$.

Solution

On pourrait utiliser la formule du binôme de Newton qui est valable dans $\mathbb{C}$. Mais l'exposant 10 est plutôt dissuasif ! Il vaut mieux, dans ce type de calcul, utiliser la forme trigonométrique (voir fiche méthode).

Soit $z=1-i\sqrt{3}$. $|z|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$.

$z=2\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Cherchons θ tel que $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

On trouve : $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$. Donc $z=2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

La règle $(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}$ donne ici :

$$(1-i\sqrt{3})^{10}=2^{10}e^{i\frac{10\pi}{3}}$$

$$(1-i\sqrt{3})^{10}=1\,024\left(\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right),$$

$$(1-i\sqrt{3})^{10}=1\,024\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-512-512\sqrt{3}i.$$

Exercice 3

Énoncé

Soit θ un nombre réel de l'intervalle $]0\,;\pi[$.

a) Écrivez sous forme trigonométrique le nombre $z=1+e^{i\theta}$.

b) Déduisez-en la forme trigonométrique du nombre $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$.

Solution

a) Le nombre z **n'est pas** écrit sous forme trigonométrique : il n'est pas sous la forme $re^{i\theta}$ avec r dans $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $z=1+\cos\theta+i\sin\theta$.

Or $1+\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ et $\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$,

$$z=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Le module de z est bien $2\cos\dfrac{\theta}{2}$ car dans les conditions de l'exercice ce nombre est positif. Il faudrait mener une discussion si l'on n'avait pas de condition sur θ.

b) L'énoncé suggère d'utiliser le a). On va donc chercher la forme trigonométrique du nombre $z'=1-e^{i\theta}$.

$z'=1-\cos\theta-i\sin\theta$.
Le quotient est bien défini : on ne peut avoir $z'=0$.

$1-\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ et $\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$,

donc $z'=2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}-i\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$,

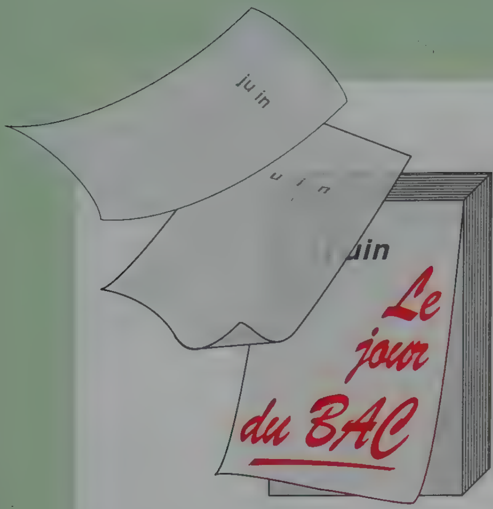
$|z'|=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ car $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ pour $0<\theta<\pi$.

$$z'=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

$$\frac{z}{z'}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}i.$$

Remarque. On pouvait conclure plus astucieusement :

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}i.$$



Énoncé

Bac CE, 1991. Extrait.

Soit les nombres complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ **et** $z_2 = 1 - i$.

1° Mettre sous forme trigonométrique z_1, z_2 **et** $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

2° En déduire que : $\cos \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

3° On considère l'équation d'inconnue réelle x **:**

$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2.$

***a*) Résoudre cette équation dans** $\mathbb{R}$.

***b*) Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.**

MOTS CLÉS
« Forme trigonométrique »

Analyse du problème

L'exercice est scindé en deux.

■ Les parties **1°** et **2°** sont très classiques : on écrit un nombre complexe sous forme trigonométrique puis algébrique. En égalant les deux écritures on obtient le cosinus et le sinus d'angles peu usités.

Remarquez le « en déduire » du **2°** : on pourrait calculer directement $\cos \dfrac{\pi}{12}$ en écrivant : $\cos \dfrac{\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)$. Ce n'est pas ce qui est attendu ici, d'après le libellé de cette question. Cela reste quand même un bon moyen de vérification.

■ La partie **3°** consiste à résoudre une équation du type $a \cos x + b \sin x = c$. On sait que pour cela il faut écrire le nombre complexe $a + ib$ sous la forme $re^{i\theta}$. L'équation est alors équivalente à $r \cos(x - \theta) = c$.

La similitude des coefficients de l'équation proposée et des nombres figurant au **2°** laisse entendre qu'il faudra utiliser les questions **1°** et **2°** pour résoudre la question **3°**.

Une solution

1° $|z_1| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}.$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} i\right) = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}.$

$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}.$

$|Z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = 1.$

$\arg Z = \arg z_1 - \arg z_2 = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}.$ $\quad Z = e^{i\frac{\pi}{12}}.$

2° En calculant Z sous forme algébrique on obtiendra sa partie réelle : $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et sa partie imaginaire : $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

$$Z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1 - i)} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1 + i)}{2(1 - i)(1 + i)}$$

$$Z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\mathrm{Re}(Z) = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \quad \mathrm{Im}(Z) = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

3° *a*) L'équation est du type $a \cos x + b \sin x = c$.

Soit $z = a + ib$. Ici $z = 4Z$ donc $|z| = 4$ et $\arg z = \dfrac{\pi}{12}$. L'équation du texte est donc équivalente à :

$$4 \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 2 \quad \text{soit} \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}.$$

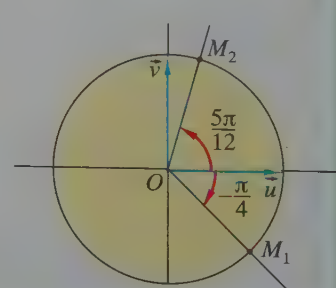
Cette équation du type $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right) = \cos \dfrac{\pi}{3}$ admet

pour solutions : $x - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

ou $x - \dfrac{\pi}{12} = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$.

$$x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi.$$

b) Les points images des solutions sont les points M_1 et M_2.



Exercices et problèmes

Q.C.M.

Dans chacun des cas, une ou plusieurs réponses sont exactes.

1 $(1-i)(1-2i)(1-3i)$ est égal à :

- -10 ☐
- $6i$ ☐
- $1-6i$ ☐

2 $\dfrac{5-i}{2+i}$ est égal à :

- $\dfrac{2}{5}+\dfrac{7}{5}i$ ☐
- $\dfrac{11}{5}-\dfrac{7}{5}i$ ☐
- $\dfrac{9}{5}-\dfrac{7}{5}i$ ☐

3 Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2+2z+3=0$ a pour ensemble de solutions :

- $\varnothing$ ☐
- $\left\{-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$ ☐
- $\{-1-i\sqrt{5},\ -1+i\sqrt{5}\}$ ☐

4 $2+i$ a pour module :

- $\sqrt{5}$ ☐
- $-\sqrt{5}$ ☐
- 5 ☐

5 $1+i+i^2+\ldots+i^{10}$ est égal à :

- $\dfrac{1-i^{10}}{1-i}$ ☐
- $\dfrac{1-i^{11}}{1-i}$ ☐
- i ☐

6 $\cos^4 x$ est égal à :

- $\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\cos 4x$ ☐
- $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{4}\cos 4x$ ☐
- $1-\sin^4 x$ ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Calculs dans $\mathbb{C}$. Parties réelle et imaginaire

Dans les exercices **7** *à* **12**, *mettez les nombres complexes donnés sous forme algébrique.*

7 ■ *a)* $(2-5i)(3+i)$. *b)* $(1-i)(1+i)$.

8 ■ *a)* $(1+i)(1-2i)(1+3i)$. *b)* $(2-i)^3$.

9 ■ *a)* $\dfrac{1}{i}$. *b)* $\dfrac{1}{1+i}$.

10 ■ *a)* $\dfrac{(3+2i)(1+i)}{i-1}$. *b)* $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$.

11 ■ *a)* $(1+2i)^3$. *b)* $(3i-2)^4$.

12 ■ *a)* $\dfrac{1}{4+3i}$. *b)* $\dfrac{4+3i}{4-3i}$.

13 ■ Soit $f(z)=\dfrac{1+z+z^2+z^3}{1+z}$ $(z\neq -1)$.

a) Calculez $f(i)$, $f(i-1)$, $f(2+i)$.

b) Trouvez les deux solutions de $f(z)=0$.

14 ■■ Calculez les sommes données, en distinguant éventuellement plusieurs cas, suivant les valeurs de l'entier naturel n :

a) $1+i+i^2+\ldots+i^n$. *b)* $1-i+i^2-\ldots+(-1)^n i^n$.

15 ■ Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations :

a) $(1+2i)z-(i-1)=iz-3$.

b) $z(z+i)(1-i-z)=0$. *c)* $\dfrac{1+2iz}{1+2z}=i\,\dfrac{z-1}{z+3}$.

16 ■ Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto z^2+1$.

1° Calculez les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ (on pourra écrire $z=x+iy$).

2° Déterminez l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

17 Soit z nombre complexe distinct de i, tel que $z = x + iy$ (avec x et y réels). Soit $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$.

1° Calculez les parties réelle et imaginaire de Z en fonction de x et de y.

2° Déterminez l'ensemble des nombres complexes z tels que $\operatorname{Im}(Z) = 0$.

3° Exprimez z en fonction de Z et retrouvez le résultat de la question précédente.

Équations du second degré à coefficients réels

Dans les exercices **18** *à* **25**, *résolvez dans* $\mathbb{C}$ *les équations proposées.*

18 a) $z^2 - z + 2 = 0$. b) $1 + z + z^2 = 0$.

19 a) $2z^2 + \sqrt{2}z + 1 = 0$. b) $z^2 - 4z + 13 = 0$.

20 a) $z^2 - z + 1 = 0$. b) $4z^2 - 12z + 25 = 0$.

21 $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

22 $z^2 - z + 1 - \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} = 0$. $\left(\text{Posez } Z = z + \dfrac{1}{z}.\right)$

23 $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$.

24 $z^3 - 3z^2 + 9z + 13 = 0$.

25 $z^2 - 2^{\theta+1} z \cos\theta + 2^{2\theta} = 0$ (θ nombre réel).

Conjugaison. Module. Affixes

26 1° Placez dans le plan (P) les points d'affixes respectives :

$A(-1+2i)$; $B\left(\dfrac{1}{1+i}\right)$; $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$.

2° Déterminez les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

27 Soit z un nombre complexe distinct de 1. Soit Z tel que : $Z = \dfrac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}}$.

1° Déterminez les parties réelle et imaginaire de Z en fonction de celles de z.

2° Montrez que l'ensemble des points $M(z)$ du plan, tels que Z soit réel, est une droite privée d'un point.

3° Montrez que l'ensemble des points $M(z)$ du plan, tels que Z soit un imaginaire pur ou zéro, est un cercle privé d'un point dont vous donnerez une équation.

28 Déterminez l'ensemble des points M d'affixe z, tels que $(2-z)(i+\bar{z})$:

a) soit réel ; b) soit imaginaire pur.

29 Déterminez l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\right)z + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\right)\bar{z} + 1 = 0$.

Représentez-le graphiquement.

30 Déterminez et construisez l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$. b) $|\bar{z} + i| = 2$.

31 Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de -1. Soit $Z = \dfrac{2iz - i}{z+1}$ (x et y sont des réels).

1° Calculez $\bar{Z}$, $\operatorname{Re}(Z)$, $\operatorname{Im}(Z)$, $|Z|$, en fonction de x et y.

2° Déterminez l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.

3° Déterminez l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

4° Déterminez les affixes des points d'intersection de E_1 et de E_2.

Forme trigonométrique. Arguments

Déterminez les arguments des nombres complexes z de module 1 donnés dans les exercices **32** *et* **33**.

32 a) $z = i$; $z = -i$; $z = 1$; $z = -1$.

b) $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

33 a) $z = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{3} + i\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$; $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{-1-i}{i}\right)$.

b) $z = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^3$.

Dans les exercices **34** *à* **38**, *mettez les nombres complexes donnés sous forme trigonométrique.*

34 $z = 2i$; $z = -2i$; $z = -5\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $z = \sqrt{2}$.

35 ▪
$z = 1 + i$; $\quad z = 1 - i$;

$z = i - \sqrt{3}$; $\quad z = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)$.

36 ▪
a) $z = \sqrt{2}\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)$; $\quad$ b) $z = \left(\frac{i}{1-i}\right)^4$;

c) $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}\right)^{12}$.

37 ▪
a) $z = (1+i)^{1992}$. $\quad$ b) $z = (\sqrt{3} - i)^{37}$.

38 ▪▪
a) $z = 1 + \cos\theta - i\sin\theta$;

b) $z = \sin\theta + 2i\sin^2\frac{\theta}{2}$.

c) $z = \cos\theta + i(1 + \sin\theta)$. ($\theta$ nombre réel.)

39 ▪▪▪
Déterminez z nombre complexe tel que :
$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 + \bar{z}|$.

40 ▪▪▪
1° Calculez $(1+i)^n$ (n entier naturel) :
a) par la formule du binôme de Newton ;
b) par la formule de Moivre.
2° Déduisez-en deux égalités.

Forme trigonométrique. Notation $re^{i\theta}$

41 ▪
Dans le plan (P) muni d'un repère orthonormal direct, placez les points images des nombres complexes :

$e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\quad \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\quad 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$; $\quad e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

42 ▪▪
Exprimez sous forme trigonométrique les nombres complexes :
$\sqrt{3} - i$; $\quad 5(1+i)$; $\quad 2\sqrt{3}(i - \sqrt{3})$.

43 ▪▪
Soit $z = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$ où θ est un nombre réel de $[-\pi ; \pi[$.
1° Montrez que z est imaginaire pur ou nul.
2° Exprimez $|z|$ en fonction de $\frac{\theta}{2}$.

44 ▪▪
Soit $z = re^{i\theta}$. Montrez que
$(z + \bar{z})(z^2 + \bar{z}^2) + \dots + (z^n + \bar{z}^n)$ est un nombre réel que vous exprimerez en fonction de r et θ.

45 ▪▪
Soit $z = re^{i\theta}$ $(r > 0)$ et $Z = z + |z|$.
1° Exprimez $|Z|$ et $\arg Z$ en fonction de $\frac{\theta}{2}$.
2° On se situe dans un plan muni d'un repère orthonormal direct. M a pour affixe Z, m a pour affixe z. Quel est le lieu décrit par M lorsque m décrit un cercle de centre l'origine ?

46 ▪
Linéarisez : $\quad$ a) $\sin^6 x$; $\quad$ b) $\cos^4 x \sin^3 x$.

47 ▪
Linéarisez : $\quad$ a) $\cos^5 x$; $\quad$ b) $\sin^4 x \cos^3 x$.

48 ▪▪
Soit θ un nombre réel de $]-\pi, \pi[$.

Soit $\quad t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$.

Calculez $\frac{2t}{1+t^2}$, $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{2t}{1-t^2}$ en fonction des lignes trigonométriques de θ.

49 ▪▪▪
Calculez les sommes (considérez $A_1 + iB_1$) :

$A_1 = \cos x + \cos(x + \theta) + \cos(x + 2\theta) + \dots + \cos(x + (n-1)\theta)$;

$B_1 = \sin x + \sin(x + \theta) + \sin(x + 2\theta) + \dots + \sin(x + (n-1)\theta)$

Trigonométrie

50 ▪
Calculez $\tan 3x$ en fonction de $\tan x$.

51 ▪
Calculez $\cos 5x$ et $\sin 5x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Dans les exercices **52** *à* **56**, *résolvez dans* $\mathbb{R}$ *les équations proposées.*

52 ▪
$\sin 3x - \sin 2x = \sin x$.

53 ▪
$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

54 ▪
$\sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x = 0$.

55 ▪▪
$\cos\frac{n+1}{2}x + \cos\frac{n-1}{2}x = \cos\frac{x}{2}$ $\quad$ (n entier).

56 ▪▪
$\sin\frac{n+1}{2}x - \sin\frac{n-1}{2}x = \sin x$ $\quad$ (n entier).

57 Mettez sous la forme $r\cos(x-\theta)$ les expressions suivantes :

a) $3\cos x - 3\sqrt{3}\sin x$; b) $\sqrt{6}\cos x + \sqrt{2}\sin x$;
c) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x - (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x$.

Exercices **58** *à* **60**. *Résolvez dans* $\mathbb{R}$.

58 $-\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

59 $2\cos x - 3\sin x = 15$.

60 $\sin x - \cos x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

61 Déterminez z tel que :
a) $z^5 + 1 = 0$; b) $z^5 + i = 0$.

62 Écrivez sous forme trigonométrique $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

puis résolvez dans $\mathbb{C}$: $z^6 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

63 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = 2(1+i\sqrt{3})$.

64 Résolvez le système suivant, d'inconnues z_1 et z_2 complexes : $\begin{cases} z_1 = z_2^2 \\ z_2 = z_1^2. \end{cases}$

65 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 8i$; déduisez-en $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

66 Soit $P(z) = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + 2z^4 + z^5$.
1° Calculez $P(-1)$.
2° Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

PROBLÈMES

67 L'objectif de ce problème est de faire utiliser la **méthode de Ferrari** (secrétaire de Cardan) afin de résoudre une équation de degré 4.
On se propose de résoudre l'équation (E) :
$z^4 + 3z^2 + 6z + 10 = 0$.

1° a) A quelle condition sur son discriminant un trinôme du second degré peut-il s'écrire sous la forme $\beta(z-\gamma)^2$? (Pensez au nombre de racines.)

b) Montrez que, chercher un nombre réel α tel que :
$(z^4 + 3z^2 + 6z + 10) - (z^2 + \alpha)^2 = \beta(z-\gamma)^2$
revient à résoudre l'équation :
$-2\alpha^3 + 3\alpha^2 + 20\alpha - 21 = 0$.
Trouvez une solution à cette équation.

c) Déterminez alors β et γ. Déduisez-en que :
$z^4 + 3z^2 + 6z + 10 = (z^2+1)^2 + (z+3)^2$.

d) Déterminez A et B en fonction de z tels que :
$z^4 + 3z^2 + 6z + 10 = (A + iB)(A - iB)$.

2° a) Calculez $(3+2i)^2$.

b) Déduisez-en la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$ (utilisez la factorisation canonique).

c) Sans calcul, déduisez de b) la résolution de $z^2 - iz + 1 - 3i = 0$.

3° a) Factorisez $z^4 + 3z^2 + 6z + 10$ en produits de facteurs complexes de degré 1 en z.

b) Résolvez (E) dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

68 **Racines septièmes de l'unité**
1° Déterminez l'ensemble des racines septièmes complexes de 1.

2° Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

a) Calculez $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6$.

b) Montrez que :

$1 + 2\cos\dfrac{2\pi}{7} + 2\cos\dfrac{4\pi}{7} + 2\cos\dfrac{6\pi}{7} = 0$.

c) Exprimez $\cos 2x$ et $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.
Déduisez-en que $\cos\dfrac{2\pi}{7}$ est solution de l'équation :

$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$ (E)

3° Soit $X = \omega + \omega^2 + \omega^4$, $Y = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

a) Montrez que $Y = \overline{X}$ et $\operatorname{Im}(X) > 0$.

b) Calculez $X + Y$ et XY. Déduisez-en X et Y.

c) Exprimez $\operatorname{Re}(X)$ en fonction de $\cos\dfrac{2\pi}{7}$.

Retrouvez ainsi que $\cos\dfrac{2\pi}{7}$ est solution de (E).

4° a) En utilisant les variations de la fonction
$f : x \mapsto 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$
montrez que l'équation (E) a trois solutions x_1, x_2 et x_3, situées respectivement dans $[0,5 ; 1]$, $[-0,5 ; 0]$ et $[-1 ; -0,5]$.

b) En utilisant une dichotomie, déterminez ainsi un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $\cos\dfrac{2\pi}{7}$.

2 Nombres complexes

et géométrie

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Approche de l'interprétation géométrique de $z \mapsto z + a$ 36
AP2 Approche de l'interprétation géométrique de $z \mapsto az$ 37

COURS

1. Utilisation de l'affixe d'un vecteur 38
2. Interprétation géométrique d'opérations dans $\mathbb{C}$ 39
3. Déterminant d'un couple de vecteurs du plan orienté 41

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Interprétation de arg $\dfrac{z_B - z}{z_A - z}$ 43
TP2 Nombres complexes et configurations usuelles 44
TP3 Lignes de niveau de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ modulo π 46
TP4 Lignes de niveau de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ modulo 2π 49

FICHE MÉTHODE

FICHE MÉTHODE Comment utiliser les nombres complexes 50

EXERCICES COMMENTÉS 51
LE JOUR DU BAC 53
EXERCICES ET PROBLÈMES 54

objectifs

- Utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes d'origine géométrique.
- Savoir interpréter les translations et les rotations à l'aide des nombres complexes.
- Savoir traduire des relations sur les angles de deux vecteurs par des relations sur les nombres complexes pour :
  — évaluer un angle ;
  — démontrer l'alignement ou l'orthogonalité, la cocyclicité, etc.

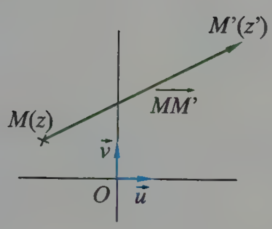
ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

Dans tout ce chapitre, on considère le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

AP1 Approche de l'interprétation géométrique de $z \mapsto z + a$

Le but de cette activité est d'étudier sur des exemples l'interprétation géométrique de l'addition dans $\mathbb{C}$.

1 ■ *Affixe d'un vecteur*



Étant donnés deux points M et M' d'affixes respectives z et z', précisez l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ (voir chap. 1).

2 ■ *Interprétation géométrique de $z \mapsto z + 2 - i$*

1° Soit $\vec{w}$ le vecteur $2\vec{u} - \vec{v}$. Quelle est l'affixe de $\vec{w}$?

2° Placez sur une même figure :
— le point W tel que $\overrightarrow{OW} = \vec{w}$,
— un point M d'affixe z,
— le point M' d'affixe $z + 2 - i$.
Conjecturez la nature du quadrilatère $OMM'W$.

3° On considère l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$z \mapsto z'$ où $z' = z + 2 - i$.

Soit $M(z)$ et $M'(z')$.

a) Déterminez l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

b) Prouvez que le quadrilatère $OMM'W$ est un parallélogramme.

c) Quelle est la nature de la transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$?

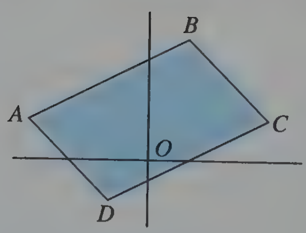
3 ■ *Autour d'un parallélogramme*

1° Soit A, B, C trois points tels que :

- $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$;
- C est le symétrique de A par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$;
- B est tel que $OABC$ est un parallélogramme.

a) Quelle est l'affixe z_A de A ?
Quel lien y a-t-il entre les affixes de z_A de A et z_C de C ?

b) Déterminez un nombre complexe a tel que $z_B = z_A + a$.



2° Plus généralement si $ABCD$ est un parallélogramme (fig. ci-contre), que pouvez-vous dire des nombres complexes $z_B - z_A$ et $z_C - z_D$? Et des nombres complexes $z_C - z_B$ et $z_D - z_A$?

AP2 Approche de l'interprétation géométrique de $z \mapsto az$

Le but de cette activité est d'étudier sur des exemples l'interprétation géométrique de la multiplication dans $\mathbb{C}$.

1 ■ *Étude de $z \mapsto iz$*

On considère l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $z \mapsto z'$ où $z' = iz$.

Soit $M(z)$ et $M'(z')$.

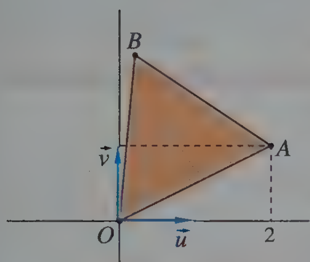
1° Déterminez M' si $M = O$.

2° Montrez que $OM' = OM$.

3° Pour z non nul, calculez $\arg(iz)$ en fonction de $\arg z$.
Déduisez-en l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ si $M \neq O$.

4° Placez sur une figure un point $M(z)$ et le point $M'(z')$ correspondant.
Quelle est la transformation du plan définie par $M \mapsto M'$? Prouvez-le.

2 ■ *Autour d'un triangle équilatéral*



Soit A et B deux points tels que :

- $\overrightarrow{OA} = 2\vec{u} + \vec{v}$;
- OAB est un triangle équilatéral de sens direct.

(Cela signifie que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce que l'on note aussi : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$ ou $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$ modulo 2π.)

1° Quelle est l'affixe z_A de A ?

2° A partir de la valeur de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, déterminez une relation entre $\arg z_B$ et $\arg z_A$.

3° Comparez $|z_A|$ et $|z_B|$.

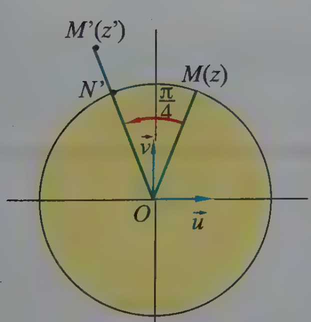
4° Déterminez un nombre complexe a tel que $z_B = az_A$.

3 ■ *Étude de $z \mapsto (1+i)z$*

On considère l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $z \mapsto z'$ où $z' = (1+i)z$.
Soit $M(z)$ et $M'(z')$.

1° Écrivez $1 + i$ sous forme trigonométrique.

2° Déduisez-en que : $OM' = \sqrt{2}\,OM$, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.



3° Soit le point N' d'affixe $z_{N'}$ telle que $z_{N'} = e^{i\frac{\pi}{4}} z$.
En vous inspirant du **1 ■**, montrez que N' est l'image de M par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Calculez $(\overrightarrow{ON'}, \overrightarrow{OM'})$ à l'aide des arguments de $z_{N'}$ et de z'.
Déduisez-en que $\overrightarrow{OM'} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{ON'}$.

4° Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$. Exprimez la transformation du plan $f : M \mapsto M'$ en fonction de h et de r.

COURS

Dans tout ce chapitre, on considère le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. UTILISATIONS DE L'AFFIXE D'UN VECTEUR

1. Interprétation géométrique de $|z_B - z_A|$

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B.
Si le point M a pour affixe $z_B - z_A$ alors on a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Or $OM = |z_M|$, donc :
$AB = OM = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$.

Propriété 1

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. On a :
$AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$.

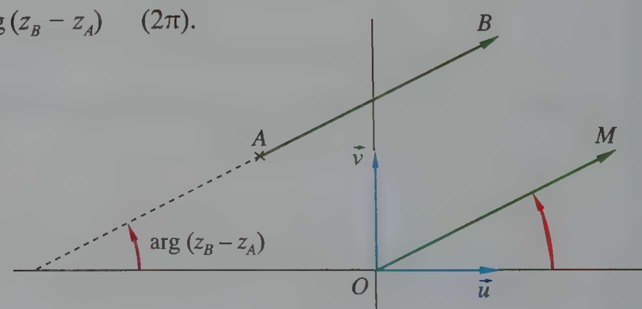
EXEMPLE

Soit $A(-1 - \mathrm{i})$ et $B(2 + 3\mathrm{i})$.
$AB = |-3 - 4\mathrm{i}| = 5$.

2. Interprétation géométrique de $\arg(z_B - z_A)$

A et B sont distincts.
Si le point M a pour affixe $z_B - z_A$ alors on a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Or $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg z_M \quad (2\pi)$,
donc : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad (2\pi)$.



Propriété 2

Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B. On a :
$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \quad (2\pi)$.

EXEMPLE

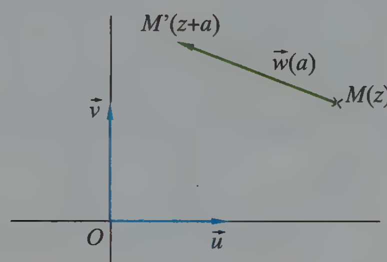
Soit $A(-5 + 3\mathrm{i})$ et $B(-4 + 4\mathrm{i})$.

$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(1 + \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4} \; (2\pi)$.

2. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE D'OPÉRATIONS DANS $\mathbb{C}$

1. Interprétation géométrique de $z \mapsto z + a$

Soit a un nombre complexe, $\vec{w}$ le vecteur d'affixe a et M un point quelconque d'affixe z.



Soit M' le point d'affixe $z + a$.
Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z_{M'} - z_M$ soit a. On a donc :
$\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$.

Le point M' est donc l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe a.

■ **Réciproquement**
Considérons la translation t de vecteur $\vec{w}$ d'affixe a. Tout point M d'affixe z a pour image par t le point M' d'affixe z' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$.
On en déduit que :

$z' - z = a$ soit $z' = z + a$.

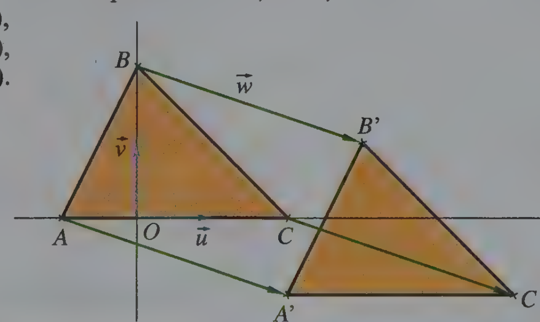
Propriété 3

Soit a un nombre complexe, M et M' deux points d'affixes respectives z et z'.
$z' = z + a$ équivaut à : M' est l'image de M par la translation de vecteur d'affixe a.

EXEMPLE

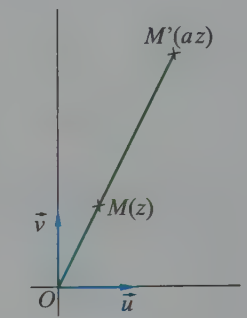
Soit A, B, C trois points d'affixes respectives -1, $2i$, 2.
Soit A', B', C' trois points d'affixes respectives $2 - i$, $3 + i$, $5 - i$.
On a donc : $z_{A'} = z_A + (3 - i)$,
$z_{B'} = z_B + (3 - i)$,
$z_{C'} = z_C + (3 - i)$.

Le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $3 - i$.



2. Interprétation géométrique de $z \mapsto az$

Soit a un nombre complexe non nul, M un point quelconque d'affixe z et M' le point d'affixe az.



■ Étude du cas où a est un nombre réel

Si $\quad z = x + \mathrm{i}y \quad$ alors $\quad az = ax + \mathrm{i}ay$,

soit $\quad \overrightarrow{OM}' = ax\vec{u} + ay\vec{v} = a\overrightarrow{OM}$.

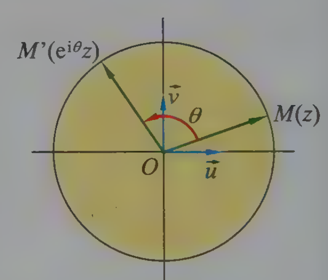
Le point M' est donc le transformé du point M par l'homothétie de centre O et de rapport a.

■ Étude du cas où a est de module 1

Soit $\quad \theta = \arg a. \quad$ On a : $\quad a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

— Si $\quad z = 0 \quad$ alors $\quad az = 0$.

Donc si $\quad M = O, \quad$ alors $\quad M' = O$.



— Si $z \neq 0$: $\quad \arg az = \arg a + \arg z \quad (2\pi)$,

donc $\quad (\vec{u}, \overrightarrow{OM}') = \theta + (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \quad (2\pi)$,

soit $\quad (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}') = \theta \quad (2\pi)$.

De plus : $\quad |az| = |a|\,|z| = |z|$

donc $\quad OM' = OM$.

Des deux relations ainsi obtenues on déduit que M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\arg a$.

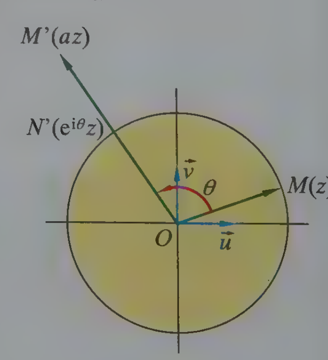
■ Étude du cas général

Soit $\quad \theta = \arg a \quad$ et $\quad k = |a|. \quad$ On a : $\quad a = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

— Si $\quad z = 0 \quad$ alors $\quad az = 0. \quad$ Donc si $\quad M = O \quad$ alors $\quad M' = O$.

— Si $\quad z \neq 0, \quad$ soit N' le point d'affixe $z_{N'}$ telle que $z_{N'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$.

On a : $\quad z' = kz_{N'}$ avec k réel.



M$'$ est donc l'image de N' par l'homothétie h de centre O et de rapport $k\,(k > 0)$.

D'après ce qui précède, le point N' est l'image de M par la rotation r de centre O et d'angle θ.

Le point M' est donc le transformé de M par l'application $h \circ r$.

■ Réciproquement

Les notations sont celles du paragraphe précédent.

Si $M' = h \circ r(M)$ alors $\begin{cases} OM' = kOM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad (2\pi) \end{cases}$ (puisque $k > 0$).

On en déduit : $\begin{cases} |z'| = k|z| \\ \arg z' = \arg z + \theta \quad (2\pi). \end{cases}$

Donc, si $a = ke^{i\theta}$: $z' = az$.

Propriété 4

> **Soit a un nombre complexe non nul, M et M' deux points d'affixes respectives z et z'.**
> **Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$.**
> **Soit r la rotation de centre O et d'angle $\arg a$.**
> **$z' = az$ équivaut à $M' = h \circ r(M)$.**

□ *Remarque.* On a également : $M' = r \circ h(M)$.
Si a est élément de $\mathbb{R}_-^*$, on a $M' = h \circ r(M)$ où :
h est l'homothétie de centre O, de rapport $-a$,
r est la rotation de centre O, et d'angle π.

3. DÉTERMINANT D'UN COUPLE DE VECTEURS DU PLAN ORIENTÉ

Dans ce paragraphe, on considère le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1. Déterminant d'un couple de vecteurs

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques du plan, de coordonnées respectives (x, y) et (x', y').
L'affixe z de $\vec{u}$ est $x + iy$. Celle, z', de $\vec{v}$ est $x' + iy'$.

■ **Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls**

Soit les points M et M' d'affixes respectives z et z' :
$\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM'}$.
$(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg z' - \arg z = \arg(\bar{z}z')$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :
$(\vec{u}, \vec{v}) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ soit $\arg(\bar{z}z') = k\pi$, soit $\bar{z}z' \in \mathbb{R}^*$.

■ **Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul**

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$\left.\begin{array}{r} \vec{u} = \vec{0} \\ \text{ou } \vec{v} = \vec{0} \end{array}\right\}$ équivaut à $zz' = 0$, soit $\bar{z}z' = 0$.

■ **En conclusion**

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si :
$\bar{z}z' \in \mathbb{R}$, soit $\operatorname{Im}(\bar{z}z') = 0$.
Or $\bar{z}z' = (xx' + yy') + i(xy' - yx')$, donc $\operatorname{Im}(\bar{z}z') = xy' - yx'$.

Définition 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y) et (x', y'). On appelle déterminant du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ le nombre réel, noté dét $(\vec{u}, \vec{v})$, défini par :

dét$(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$.

Attention à l'ordre des vecteurs : dét$(\vec{u}, \vec{v}) = -$ dét$(\vec{v}, \vec{u})$.

Propriété 5

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si dét$(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

EXEMPLE

Soit les vecteurs $\vec{u}(2\,;\,-3)$ et $\vec{v}(-1\,;\,5)$.

dét$(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 5 - (-3) \times (-1) = 7$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. Expressions de dét$(\vec{u}, \vec{v})$ et de $\vec{u} \cdot \vec{v}$

On considère $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non nuls.**

$\arg(\bar{z}z') = (\vec{u}, \vec{v})$ donc :

$\bar{z}z' = |\bar{z}z'|\,[\cos(\vec{u}, \vec{v}) + \mathrm{i}\sin(\vec{u}, \vec{v})]$,

$\bar{z}z' = |z|\,|z'|\,[\cos(\vec{u}, \vec{v}) + \mathrm{i}\sin(\vec{u}, \vec{v})]$,

$\bar{z}z' = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,[\cos(\vec{u}, \vec{v}) + \mathrm{i}\sin(\vec{u}, \vec{v})]$.

$\mathrm{Re}(\bar{z}z') = xx' + yy' = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}, \vec{v})$.

$\mathrm{Im}(\bar{z}z') = xy' - yx' = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Propriété 6

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}, \vec{v})\,;$$

$$\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\vec{u}, \vec{v}).$$

On retrouve évidemment l'expression du produit scalaire vue en Première mais il est important de mettre les deux formules en parallèle.

EXEMPLE

Soit les points $A(\mathrm{i})$, $B(2 + \mathrm{i})$, $C\left(\frac{3}{2} + \frac{2 + \sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour affixes respectives 2 et $\frac{3}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\left.\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \frac{\text{dét}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}\right\}$$

On en déduit que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$.

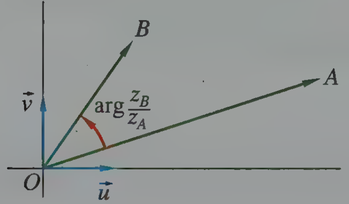
TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Interprétation de $\arg \dfrac{z_B - z}{z_A - z}$

Le but de ce TP est de permettre l'évaluation d'un angle à l'aide des nombres complexes.

1 ■ *Évaluation d'un angle* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B non nulles.



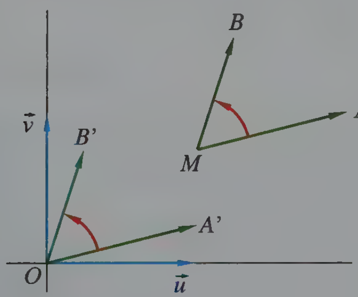
a) Interprétez géométriquement $\arg z_A$.

b) Décomposez $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ en utilisant le vecteur $\vec{u}$.

c) Montrez alors que $\quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg \dfrac{z_B}{z_A} \quad (2\pi)$.

2 ■ *Évaluation d'un angle* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$

Soit trois points A, B, M deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B, z.



a) Montrez qu'il existe deux points $A'(z_{A'})$ et $B'(z_{B'})$ tels que :
$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA}'$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB}'$.
(Quelle est la transformation t telle que $t(M) = O$, $t(A) = A'$, $t(B) = B'$?)

b) Évaluez $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ à partir du nombre complexe $\dfrac{z_{B'}}{z_{A'}}$.

c) Déduisez-en que : $\boxed{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \arg \dfrac{z_B - z}{z_A - z} \quad (2\pi).}$

3 ■ *Orthogonalité et colinéarité*

Utilisez le résultat précédent pour dégager les conditions :

a) d'orthogonalité

b) de colinéarité
de deux vecteurs **non nuls** $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.

(Vous devez trouver : *a*) $\dfrac{z - z_B}{z - z_A}$ nombre imaginaire pur ;

b) $\dfrac{z - z_B}{z - z_A}$ nombre réel non nul.)

4 ■ *Application*

Soit trois points $A(-1-\mathrm{i})$, $B(1+\mathrm{i})$, $C(-1+\mathrm{i})$.
Évaluez les angles du triangle ABC.
Quelle est sa nature ?

TP2 Nombres complexes et configurations usuelles

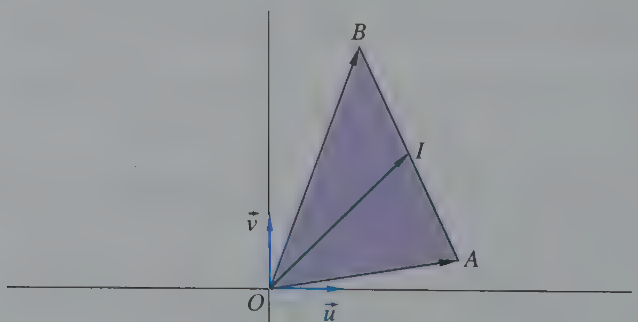
Le but de ce TP est de vous permettre de traduire sous forme complexe les configurations usuelles du plan qui s'y prêtent le mieux.

Remarques préliminaires :

- Dire que le triangle ABC est de sens direct signifie qu'une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est élément de $]0 ; \pi[$.
- Dire que le carré $ABCD$ est de sens direct signifie que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}$.

1 ■ *Milieux et barycentres*

- Soit deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B.
Soit $I(z_I)$ le milieu du segment $[AB]$.



a) Exprimez $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

b) Déduisez-en que : $\boxed{z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}.}$

- Plus généralement :
soit un système de n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Notons z_{A_i} l'affixe du point A_i et z_G l'affixe du centre de gravité de ces points.

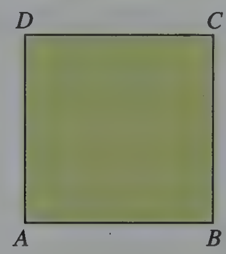
Exprimez $\overrightarrow{OG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$.

Déduisez-en que : $\boxed{z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} z_{A_i}}{n}.}$

Application : déterminez l'affixe du centre de gravité du triangle ABC où $A(1 + 2i)$, $B(-2 + i)$, $C(1 + 3i)$.

2 ■ *Carré*

Soit $ABCD$ un carré de sens direct.
On note a, b, c, d les affixes respectives des points A, B, C, D.



a) Donnez une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
Comparez $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AD}\|$.

b) Déduisez-en le module et l'argument du rapport $\dfrac{d-a}{b-a}$.

c) Montrez que $d = (1 - i)a + ib$.
En utilisant la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, exprimez c en fonction de a et b.

d) Retrouvez ainsi que $d - b = i(c - a)$. Quel résultat classique retrouvez-vous ?
Comment interprétez-vous géométriquement le fait que :
$d - b = (1 - i)(a - b)$?

3 ■ *Triangles*

• **Cas du triangle équilatéral**

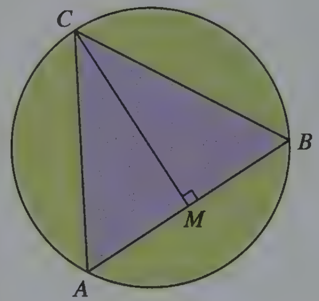
Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct.

Soit a, b, c les affixes respectives des points A, B, C.

a) Donnez une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Comparez $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.

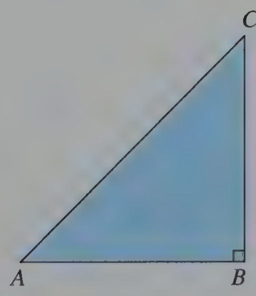
b) Déduisez-en le module et l'argument du rapport $\dfrac{c-a}{b-a}$.

c) Soit $M(m)$ le milieu du segment $[AB]$.
Exprimez m en fonction de a et b.



Déterminez l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MC}$ et retrouvez ainsi les résultats classiques :

$(MC) \perp (AB)$ et $MC = AB\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



• **Cas du triangle isocèle rectangle**

Soit ABC un triangle isocèle de sens direct rectangle en B.

Soit a, b, c les affixes respectives des points A, B, C.

a) Donnez une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

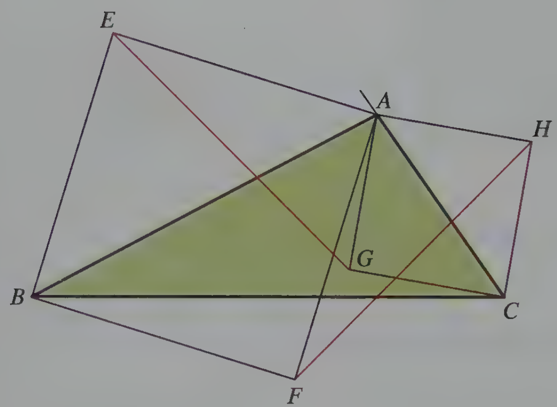
Comparez $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.

b) Déduisez-en le module et l'argument du rapport $\dfrac{c-a}{b-a}$.

Montrez que $\quad c - a = (1 + \mathrm{i})(b - a)$.

4 ■ *Application*

On considère le triangle ABC de sens direct dessiné ci-dessous.



On construit les points E, F, G, H tels que $AEBF$ et $AGCH$ soient des carrés de sens direct.

a) Mesurez EG et FH. Que constatez-vous ? Estimez sur la figure l'angle formé par les deux segments $[EG]$ et $[FH]$.
Quelle conjecture pouvez-vous émettre à propos de ces deux segments ?

b) Quelle est la nature des triangles BAE et BAF ? Déduisez-en les affixes de E et de F en fonction de celles de A et de B.
Effectuez un travail analogue dans l'autre carré.

c) Exprimez les affixes des vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FH}$ en fonction des affixes des trois points A, B, C.

d) Déduisez-en que : $\; EG = FH \;$ et $\; (EG) \perp (FH)$.

TP3 Lignes de niveau de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ modulo π.

1 ■ *Calcul du sinus d'un angle de vecteurs*

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, d'affixes respectives $\quad z = x + \mathrm{i}y, \quad z' = x' + \mathrm{i}y'$.

Rappelez la formule donnant $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et traduisez-là à l'aide des coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

2 ■ *Ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (\pi)$*

Soit A et B deux points distincts du plan, M un point distinct de A et de B.
L'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est alors défini.
Pour tout nombre réel α, nous notons (Γ_α) l'ensemble des points M du plan tels que $\quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (\pi)$.

1° On suppose $\quad \alpha = 0 \quad (\pi)$.
Montrez que (Γ_α) est alors la droite (AB), privée de A et de B.

2° On suppose α non nul modulo π.

Choisissons un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal direct du plan : on prend pour origine le milieu O de $[AB]$, pour vecteur $\vec{i}$ le vecteur $\dfrac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$.

On pose : $AB = 2a$. A et B ont alors pour coordonnées respectives $(-a\,;0)$ et $(a\,;0)$, M a pour coordonnées (x, y).

a) Montrez que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (\pi)$ équivaut à $\sin[(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \alpha] = 0$.

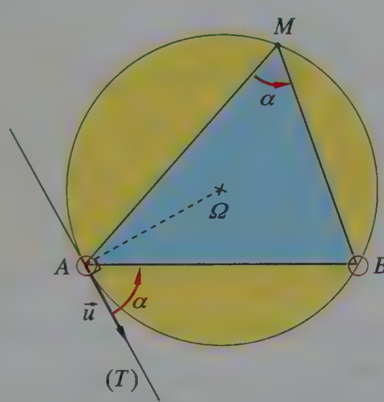
b) En développant $\sin[(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \alpha]$, montrez que M appartient à (Γ_α) si et seulement si :
$(\cos\alpha)\,\text{dét}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - (\sin\alpha)\,\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

c) Montrez alors que (Γ_α) est l'ensemble des points $M(x, y)$, distincts de A et de B, tels que : $x^2 + y^2 - 2ay\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - a^2 = 0$.

d) On note $(\mathcal{C}_\alpha)$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ay\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - a^2 = 0$.
Montrez que A et B appartiennent à $(\mathcal{C}_\alpha)$. Donc : $(\Gamma_\alpha) = (\mathcal{C}_\alpha) - \{A, B\}$.
Déterminez le centre Ω de ce cercle. Quel est ce point Ω lorsque α vaut $\dfrac{\pi}{2}$?
(Quel résultat classique retrouvez-vous ?)

e) La tangente en A à $(\mathcal{C}_\alpha)$ est la droite orthogonale à (ΩA) passant par A. Montrez qu'elle admet pour vecteur directeur $\vec{u} = (\cos\alpha)\,\vec{i} - (\sin\alpha)\,\vec{j}$.
Déterminez l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ modulo π.
Déduisez-en une construction géométrique du centre Ω de $(\mathcal{C}_\alpha)$.

En conclusion de cette étude, vous retiendrez que :



Soit α un nombre réel non nul modulo π. L'ensemble (Γ_α) des points M du plan tels que
$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (\pi)$
est un cercle passant par A et B, privé de A et de B, tel que la tangente (T) en A à ce cercle ait pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$, vérifiant :
$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \alpha \quad (\pi)$.

3 ■ *Applications*

1° Soit A et B les points d'affixes respectives -1 et 1.
Déterminez l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z telle que $\dfrac{z-1}{z+1}$ ait pour argument $\dfrac{\pi}{3}\ (\pi)$.

2° Montrez que cet ensemble contient le point C d'affixe $\sqrt{3}\,i$.
Que représente (Γ) pour le triangle ABC ?

4 ■ *Condition d'alignement et de cocyclicité*

Soit A, B, C, D quatre points distincts.

a) On suppose A, B, C non alignés.
En utilisant la ligne de niveau : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ (π), montrez que le cercle circonscrit à ABC, privé de A et de B, contient D si et seulement si : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ (π).

b) On suppose A, B, C alignés.
Montrez que D appartient à la droite (ABC) si et seulement si :

$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ (π).

c) Montrez alors que A, B, C, D sont alignés ou cocycliques si et seulement si : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ (π).

- **Exemple 1**

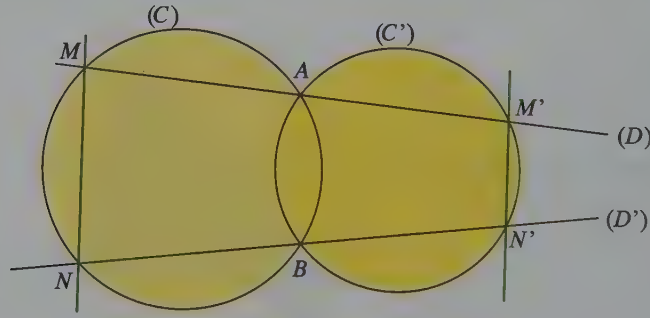
Soit A, B, C, D d'affixes respectives a, b, c, d avec :

$a = 1 + \mathrm{i}$, $b = 3 + \mathrm{i}$, $c = 3 + 3\mathrm{i}$, $d = 2 + \sqrt{2} + 2\mathrm{i}$.

Calculez $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ à l'aide des arguments de $\dfrac{b-c}{a-c}$ et $\dfrac{b-d}{a-d}$.
Montrez alors que A, B, C, D sont cocycliques.

- **Exemple 2**

Soit (C) et (C') deux cercles sécants en deux points A et B.
Une droite (D) passant par A recoupe (C) en M et (C') en M', une droite (D') passant par B recoupe (C) en N et (C') en N'.
On suppose que les droites (MN) et $(M'N')$ existent. On se propose de montrer qu'elles sont parallèles.



a) Montrez que :

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'N'})$ (π).

b) En utilisant la cocyclicité de M, A, N, B, montrez que : $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA})$ (π). Transformez de même $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'N'})$.

c) Montrez alors que $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = 0$ (π) et concluez.

En conclusion, vous retiendrez que :

> **Quatre points distincts A, B, C, D sont alignés ou cocycliques si et seulement si $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ (π).**

TP4 Lignes de niveau de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ modulo 2π

Nous reprenons les notations du TP précédent. Notons, pour tout α réel, (Γ'_α) l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (2\pi)$.

1° Montrez que (Γ'_α) est inclus dans l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (\pi)$, noté (Γ_α).

2° Soit M un point de (AB), distinct de A et de B.
Que vaut $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ lorsque M est sur le segment $[AB]$?
Que vaut $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ lorsque M est un point de la droite (AB), extérieur au segment $[AB]$?
Déduisez-en les ensembles (Γ'_0) et (Γ'_π). Faites des figures.

3° On suppose α non nul modulo π.
Soit M un point de (Γ_α). On a $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (\pi)$, donc : soit $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (2\pi)$, soit $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + \pi \quad (2\pi)$.

a) Montrez que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \ (2\pi)$ équivaut, pour tout point M de (Γ_α), à la condition : $\text{dét}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \sin \alpha > 0$.
En reprenant les calculs du TP précédent, exprimez, à l'aide des coordonnées de M, cette condition, et vérifiez qu'elle détermine un demi-plan ouvert de frontière (AB).

b) Montrez alors que l'ensemble (Γ'_α) est l'intersection de (Γ_α) avec le demi-plan ouvert d'équation $y \sin \alpha > 0$.

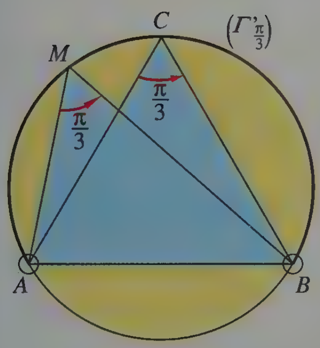


Figure réalisée lorsque $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

En conclusion de cette étude, vous retiendrez que :

L'ensemble (Γ_α') des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \ (2\pi)$ est :

- **la droite (AB) privée de $[AB]$, si $\alpha = 0 \quad (2\pi)$;**
- **le segment $[AB]$ privé de A et de B, si $\alpha = \pi \quad (2\pi)$;**
- **un arc de cercle d'extrémités A et B, privé de A et de B, de frontière (AB). On le détermine comme intersection de (Γ_α) et du demi-plan d'équation $y \sin \alpha > 0$.**

4° Applications

a) Déterminez l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{4} \ (2\pi)$. (Pour le construire, on pourra utiliser le point C tel que ABC soit rectangle en A, isocèle et direct).

b) Soit A et B les points d'affixes -1 et 1. A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3$.
On cherche l'ensemble (E) des points M du plan tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre réel strictement négatif. Montrez que M appartient à (E) si et seulement si : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{3} \quad \left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.
Prouvez alors que (E) est réunion des trois sous-ensembles, $\left(\Gamma'_{\frac{\pi}{3}}\right)$, (Γ'_π) et $\left(\Gamma'_{\frac{5\pi}{3}}\right)$, et admet la droite (AB) pour axe de symétrie. Représentez (E).

FICHE MÉTHODE

Comment utiliser les nombres complexes

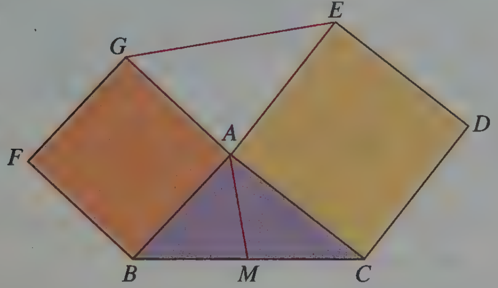
1	**Pour évaluer une distance :** $AB = \lvert z_A - z_B \rvert$.
2	**Pour évaluer un angle :** A, B, C sont deux à deux distincts. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \quad (2\pi)$.
3	**Pour démontrer un alignement :** A, B, C deux à deux distincts sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ est un nombre réel.
4	**Pour démontrer une orthogonalité :** $(AB) \perp (CD)$ si $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur.
5	**Pour démontrer une cocyclicité :** Les points A, B, C, D non alignés sont cocycliques si : $\arg \dfrac{z_D - z_B}{z_D - z_A} = \arg \dfrac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \quad (\pi)$.

EXERCICES COMMENTÉS

Exercice 1

Énoncé

Soit ABC un triangle de sens direct (voir TP2). Sur ses côtés on construit deux carrés de sens direct : $ACDE$ et $BAGF$.
Soit M le milieu du côté $[BC]$.
Démontrez que : $EG = 2AM$ et $(AM) \perp (EG)$.



Solution

Si l'on choisit d'utiliser les nombres complexes pour traiter cet exercice, on devra passer par deux étapes :
– traduire sous forme complexe les hypothèses de l'énoncé ;
– utiliser le calcul dans $\mathbb{C}$ et ses aspects géométriques pour aboutir à la conclusion.

Traduction des hypothèses

Désignons les affixes des points A, B, ... par les minuscules correspondantes a, b, ...
Puisque la conclusion concerne le segment $[EG]$, il faut chercher à exprimer les affixes de E et G en fonction de celles de A, B, C.
Les points D et F semblent inutiles pour la résolution du problème.

- « $ACDE$ carré de sens direct » se traduit en ce qui concerne le point E par :

$e - a = i(c - a)$.

- De même, on a :

$g - a = -i(b - a)$ ($ABFG$ de sens indirect).

- « M milieu de $[BC]$ » nous conduit à :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ soit $2(m - a) = (b - a) + (c - a)$.

Utilisation du calcul dans $\mathbb{C}$

$e - g$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{GE}$.

$e - g = (e - a) - (g - a)$,

$e - g = i(c - a) + i(b - a)$,

$e - g = i[(c - a) + (b - a)]$,

$e - g = 2i(m - a)$.

On a donc : $\dfrac{e - g}{m - a} = 2i$.

Conclusion

$\left|\dfrac{e - g}{m - a}\right| = 2$ donc $\dfrac{EG}{AM} = 2$ et $EG = 2AM$.

$\arg \dfrac{e - g}{m - a} = \dfrac{\pi}{2}$ (2π) donc $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{GE}) = \dfrac{\pi}{2}$ (2π) et $(AM) \perp (EG)$.

Exercice 2

Énoncé

On considère le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout nombre complexe z distinct de 1, on pose $z' = \dfrac{z - 1}{\bar{z} - 1}$. On appelle A, B, M et M' les points d'affixes 1, -1, z et z'.

1° a) Calculez $|z'|$.

b) Traduisez géométriquement ce résultat pour le point M'.

2° a) Calculez en fonction de z le nombre complexe :

$r = \dfrac{z' + 1}{z - 1}$.

b) Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.

3° Utilisez ce qui précède pour donner une construction géométrique de M', connaissant M.

Solution

1° a) Il ne faut pas poser $z = x + iy$, puis calculer les parties réelle et imaginaire de z'... En effet, on a :

$\overline{z - 1} = \bar{z} - \bar{1} = \bar{z} - 1$. On a donc :

$z' = \dfrac{z - 1}{\overline{z - 1}}$; $|z'| = \dfrac{|z - 1|}{|\overline{z - 1}|} = 1$.

(Un nombre complexe et son conjugué ont même module.)

b) Le point M' est donc sur le cercle (C) de centre O et de rayon 1.
Attention, cela ne signifie pas que tout point de (C) est un point M'...

2° a) $z' + 1 = \dfrac{z-1}{\bar{z}-1} + 1 = \dfrac{z+\bar{z}-2}{\bar{z}-1} = \dfrac{2\,\mathrm{Re}\,(z)-2}{\overline{z-1}}$.

Donc $\quad r = \dfrac{2(\mathrm{Re}\,(z)-1)}{(\overline{z-1})(z-1)} = \dfrac{2(\mathrm{Re}\,(z)-1)}{|z-1|^2}$.

(On utilise $|z|^2 = z\bar{z}$.) Remarquez que r est un nombre réel, ce qui justifie a posteriori la notation.

b) Lorsque les vecteurs sont connus par leurs affixes, la condition de colinéarité qu'on utilise doit être le plus souvent la nullité de l'angle à π près. Le rapport des affixes doit être un nombre réel (*cf.* Fiche méthode).

Attention cela ne peut se faire qu'avec des vecteurs **non nuls.**
Ici $z \neq 1$ donc $M \neq A$.

Si $M' = B$ alors $\overrightarrow{BM'} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{BM'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}$.
Si $M' \neq B$ alors l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'})$ existe et :

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}) = \arg \dfrac{z'+1}{z-1} = \arg r$.

Or r est un nombre réel donc $\arg r = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Il en résulte que l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'})$ est nul ou plat.
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.

3° Il ressort du **1°** et du **2°** que :
– le point M' est sur le cercle (C) ;
– si le point M' est distinct de B alors les droites (BM') et (AM) sont parallèles.
Donc soit M' est en B, soit M' est un des points d'intersection de la droite parallèle à (AM) passant par B et du cercle (C).

- A quelle condition le point M' est-il en B ?

$z' = -1$ équivaut à $r = 0$ soit $\mathrm{Re}(z) = 1$ (voir **2°** a)).

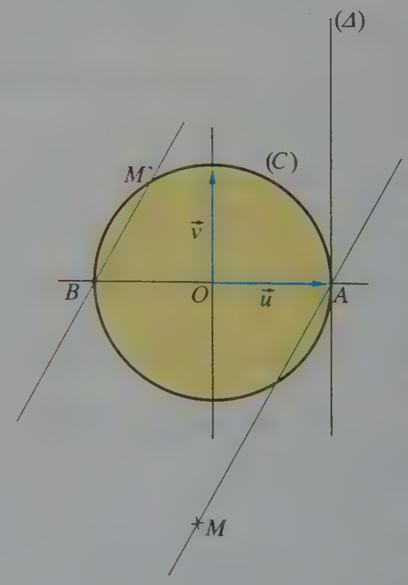
L'ensemble des points M tels que $M' = B$ est donc la droite (Δ) d'équation $x = 1$, privée du point A. (Remarquez alors que la parallèle à (Δ) passant par B est tangente au cercle (C).)

- Si $M \notin (\Delta)$ alors $M' \neq B$. La droite (D_M) parallèle à (AM) et passant par B coupe alors (C) en deux points distincts B et M'.

(On sait qu'il y a deux points d'intersection car sinon (D_M) serait tangente à (C) en B ; et on aurait $(AM) = (\Delta)$ donc $M \in (\Delta)$ ce qui est contraire à l'hypothèse).

Conclusion :

- Si $M \in (\Delta)$ alors $M' = B$.
- Si $M \notin (\Delta)$ alors la droite parallèle à (AM) et passant par B coupe le cercle (C) en deux points distincts : B et M'.



Énoncé

Bac CE 1990. Exercice partiel.

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit A le point d'affixe $-2+3i$ et B le point d'affixe $1-3i$.
Soit M le point d'affixe z, $z \neq -2+3i$. A z on associe le nombre complexe z' tel que : $z' = \dfrac{z-1+3i}{z+2-3i}$.

1° Établir une relation entre un argument de z' et l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

2° Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que z' ait pour argument $\dfrac{\pi}{2}$.

A la lecture du sujet

Il s'agit ici de tester deux connaissances chez le candidat :

- l'expression d'un angle par l'argument d'un quotient ;
- la ligne de niveau $\dfrac{\pi}{2}$ de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (2π).

Analyse du problème

■ La question **1°** vise à préparer la résolution de la question **2°**.
En effet, au **1°**, on établit que :
$\arg z' = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (2π).

Au **2°**, la relation : $\arg z' = \dfrac{\pi}{2}$ (2π) mène à l'étude d'une ligne de niveau de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ à 2π près.

■ Les mots clés font référence à deux connaissances requises :

- $\arg \dfrac{z-z_B}{z-z_A} = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (2π) ;
- l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}$ (2π) est un des arcs d'extrémités A et B portés par le cercle de diamètre $[AB]$. (Attention, les points A et B sont exclus.)

■ Tout le préliminaire de l'énoncé est important.
Remarquez les indications qu'il recèle :
— le fait d'écrire les affixes de A et B juste avant celles de z' permet de faire l'association :

$z' = \dfrac{z-z_B}{z-z_A}$;

— la précision $z \neq -2+3i$ est nécessaire à l'existence de z' ; ceci amène à faire attention : pour parler d'un argument de z', il faut que z' soit non nul et donc $z \neq 1-3i$.

Une solution

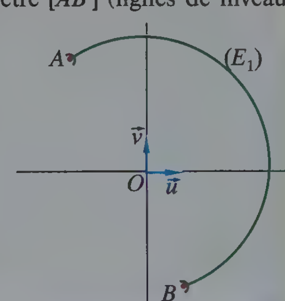
1° Pour qu'un argument de z' existe, il faut que z' existe et qu'il soit non nul. Il faut donc $z \neq 1-3i$ et $z \neq -2+3i$.
Le point M est alors distinct des points A et B et l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ existe.

On a : $$z' = \frac{z-z_B}{z-z_A},$$

donc $$\arg z' = \arg \frac{z-z_B}{z-z_A} \quad (2\pi)$$
$$\arg z' = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad (2\pi)$$

d'après les connaissances du cours.

2° $\arg z' = \dfrac{\pi}{2}$ (2π) équivaut à $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}$ (2π) d'après la question **1°**.
L'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}$ (2π) est un arc d'extrémités A et B porté par le cercle de diamètre $[AB]$ (lignes de niveau de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ à 2π près).
Celui des deux demi-cercles qui est solution coupe l'axe $(O, \vec{u})$ en un point d'abscisse positive.
L'ensemble (E_1) est le demi-cercle dessiné, les points A et B étant exclus.



Exercices et problèmes

Q.C.M.

Dans chacun des cas, une ou plusieurs réponses sont exactes.

1 Le nombre complexe $\sqrt{3} - 3i$ a pour argument :

$\frac{\pi}{3}$ .... ☐

$-\frac{\pi}{3}$ .... ☐

$\frac{\pi}{3} + \pi$ .... ☐

Dans les exercices **2** *à* **4**, $\theta \in]-\pi, \pi[$. *Soit* z *le nombre complexe* $\cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) i$.

2 Le module de z est :

$\cos \theta$ quel que soit θ .... ☐

$\cos \theta$ si $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .... ☐

$\cos(\theta + \pi)$ si $\theta \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .... ☐

3 Un argument de z est :

θ quel que soit θ .... ☐

2θ .... ☐

$\theta + \pi$ si $\theta \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .... ☐

4 z^2 est égal à :

$\cos^4 \theta - \frac{1}{4} \sin^2 2\theta + i \sin 2\theta \cos^2 \theta$ .... ☐

$(\cos^2 \theta) e^{i2\theta}$ .... ☐

$\cos^2(\theta + \pi) e^{i2(\theta + \pi)}$ .... ☐

5 Soit trois points $A(i)$, $B(-i)$ et $M(z)$. Le nombre réel positif $|z - i|$ représente la longueur :

AM .... ☐

BM .... ☐

AB .... ☐

6 La transformation complexe $z \mapsto z - 2i$ s'interprète géométriquement comme :

la translation de vecteur d'affixe $2i$ .... ☐

la translation de vecteur d'affixe $1 - 2i$ .... ☐

la translation de vecteur d'affixe $-2i$ .... ☐

7 Soit trois points A, B, C deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C. L'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure :

$\arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ .... ☐

$\arg \frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$ .... ☐

$\arg \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ .... ☐

8 Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, le lieu des points M d'affixe z tels que $\arg z = \frac{\pi}{4} \quad (\pi)$ est :

contenu dans la droite d'équation $y = x$ .... ☐

la demi-droite $]O, \vec{w})$ avec $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ .... ☐

la droite d'équation $y = x$, privée de O .... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

On rappelle que, sauf autre précision, le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Transformations du type $z \mapsto az$ et $z \mapsto z + a$

Dans les exercices **9** *à* **11**, *précisez la nature et les caractéristiques des transformations écrites ici sous forme complexe.*

9 ■ $z \mapsto (1 + i)z$; $\quad z \mapsto z + i$;

$z \mapsto iz$; $\quad z \mapsto -iz$.

10 ■ $z \mapsto \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$; $\quad z \mapsto z + 1$;

$z \mapsto z + 1 - i$; $\quad z \mapsto (\sqrt{3} + i)z$.

11

$z \mapsto -2z$;

$z \mapsto e^{i\theta}z \quad (\theta \in \mathbb{R})$;

$z \mapsto -e^{i\theta}z \quad (\theta \in \mathbb{R})$;

$z \mapsto (1 + \cos\theta + i\sin\theta)z \quad (\theta \in]-\pi, \pi[)$.

Aspects géométriques des modules et arguments

12 Calculez la distance MN et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$:

a) si $M(1 + i)$ et $N(-2i)$;

b) si $M(-1 + i\sqrt{3})$ et $N(\sqrt{3} + 3i)$;

c) si $M(2 - 3i)$ et $N(3 + 2i)$.

13 Soit les trois points $A(-1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1))$, $B(-1 - i)$, $C(2 + 2i)$.
Calculez les longueurs des côtés et les angles du triangle ABC.

14 Soit A le point d'affixe $2i$. Déterminez l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

a) $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$;

b) $\arg \frac{z}{2i} = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$;

c) $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4}\ (\pi)$;

d) $|z - 2i| = 1$; e) $\left|\frac{z}{2i}\right| = 1$.

15 Soit le point A d'affixe i et le point B d'affixe $2 - i$. A tout point m d'affixe z $(z \neq i)$ on associe le point M d'affixe Z telle que $Z = \frac{z - 2 + i}{z - i}$.

1° Déterminez et construisez l'ensemble des points m tels que M parcourt l'axe $(O, \vec{u})$.

2° Déterminez et construisez l'ensemble des points m tels que M parcourt le cercle de diamètre $[AB]$.

16 Soit trois points A, B, C du plan, d'affixes respectives $1 + i$; $2i$; $2(1 + i)$.

1° Montrez que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

2° Déterminez l'affixe du point D tel que $OBCD$ soit un carré.

3° Soit $OB'C'D'$ l'image de $OBCD$ par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminez les affixes de B', C', D' et du centre A' de ce carré.

4° Soit A_1 et A'_1 les symétriques de A et A', par rapport à la droite (OD). Calculez les affixes de A_1 et A'_1. Quelle est la nature du polygone $AA'A'_1A_1$?

5° Déterminez les affixes des sommets du transformé de $AA'A'_1A_1$ par r.
Vérifiez que cette figure est globalement invariante par les réflexions d'axes (OB) et (OD).

17 1° Soit Ω un point d'affixe ω. Soit θ un nombre réel. A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

a) Déterminez z' si $z = \omega$.

b) Quelle est la nature de la transformation du plan qui à tout point M associe M' ?

(Intéressez-vous au nombre complexe $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$.)

2° a) Déterminez l'image du point $A(2 + 3i)$ dans la rotation de centre $\Omega(1 + i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Déterminez deux points B tels que $A\Omega B$ soit un triangle isocèle rectangle en Ω.

18 On note (P') le plan complexe privé du point A d'affixe i.

1° Démontrez que la relation $zz' - i(z + z') - 2 = 0$ définit une application f de (P') dans (P') qui, à tout point M d'affixe z, associe l'image $M' = f(M)$ d'affixe z'.

2° Vérifiez que l'application f est involutive, c'est-à-dire que $f \circ f = \mathrm{Id}_{(P')}$. Déterminez les points de (P') invariants par f.

3° On appelle B l'image par f du point O. Établissez les égalités suivantes :

$OM' = \frac{MB}{MA}$; $\quad OM = \frac{M'B}{M'A}$.

4° Soit (Γ) l'ensemble des points M de (P') tels que $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2}$.
Quelle est la nature de (Γ) ? Vérifiez que (Γ) passe par les points invariants de f et par le point d'affixe $i\sqrt{2}$. Soit (Γ') l'image de (Γ) par f ; établissez que $(\Gamma') = (\Gamma)$.

Déterminant d'un couple de vecteurs. Colinéarité

19 Calculez les déterminants des couples de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ dont sont données les coordonnées ou l'affixe :

a) $\vec{u}(-3 ; 1)$; $\quad \vec{v}(1 ; 2)$.

b) $\vec{u}(2 ; 3)$; $\quad \vec{v}(-1 ; 4)$.

c) $\vec{u}(1 + i)$; $\quad \vec{v}\left(-\frac{1}{2} + 2i\right)$.

20 ■ Étudiez la colinéarité des vecteurs suivants :

a) $\vec{u}(\sqrt{2}\,;\,1)$; $\vec{v}(-4\,;\,-2\sqrt{2})$.

b) $\vec{u}(-3+\mathrm{i})$; $\vec{v}(\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{3})$.

c) $\vec{u}\left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)$; $\vec{v}(-\sqrt{3}-\mathrm{i})$.

21 ■ a) Soit les vecteurs $\vec{u}(-1\,;\,1)$ et $\vec{v}(1\,;\,2)$.
Calculez $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v})$.

b) Soit les points $A(1+\mathrm{i})$, $B(2\mathrm{i})$ et $C(-1-\mathrm{i})$.
Calculez $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Calculez $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et $\sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

22 ■■ Soit M le point d'abscisse α de la droite (D) d'équation $y = x$. Soit A le point d'affixe i.
Soit $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $1 + 2\mathrm{i}$.
Étudiez suivant la valeur de α la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$.

23 ■■■ Soit M le point d'affixe $e^{\mathrm{i}\alpha}$ du cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1. Soit $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $\sqrt{3}+\mathrm{i}$. Étudiez suivant la valeur de α la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$.

24 ■■■ Soit (D) la droite d'équation $y = x + 1$.
Soit M le point de (D) d'abscisse α.
Soit I et J les points d'affixes respectives -1 et 1.
Soit m le projeté orthogonal de M sur la droite (IJ).
On appelle G le centre de gravité du triangle IMJ et H le centre de gravité du triangle JMm.
Étudiez suivant la valeur de α la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{OH}$.

Lignes de niveau de $M \mapsto (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$, cocyclicité ou alignement

25 ■■ Soit I et J deux points d'affixes respectives i et $2+2\mathrm{i}$. A tout point M d'affixe $z\,(z \neq \mathrm{i})$, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z-2-2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}.$$

1° Déterminez l'ensemble (Δ) des points M tels que M' parcoure le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon 1.

2° Déterminez et construisez l'ensemble des points M tels que M' parcoure la demi-droite $[OJ)$.

3° (Δ) coupe le cercle circonscrit au triangle OIJ en deux points A et B. Déterminez **géométriquement** les points A' et B' (construction...).

26 ■■ Soit A le point d'affixe 1. Déterminez et représentez l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\left(\frac{z}{z-1}\right)^3$ soit imaginaire pur.

27 ■■ Soit A, B, C trois points d'affixes respectives $2\mathrm{i}$, -1 et 2.

1° a) Déterminez l'affixe h de l'orthocentre H du triangle ABC.

b) Déterminez l'affixe h' du symétrique H' de H par rapport à la droite (BC).
Montrez que H', A, B et C sont cocycliques.

2° Soit ABC un triangle non rectangle d'orthocentre H. On note H_A le symétrique de H par rapport à (BC).

a) Montrez que $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ (π).

b) Comparez $(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C})$ et $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})$.

c) Montrez alors que H_A est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

28 ■■■ Soit M_1, M_2, M_3 trois points d'affixes respectives 1, z, z^2.

1° Déterminez l'ensemble des nombres complexes z tels que M_1, M_2 et M_3 soient deux à deux distincts.

2° On suppose les points M_1, M_2, M_3 deux à deux distincts. Déterminez l'ensemble des points M_2 tels que le triangle $M_1M_2M_3$ soit rectangle.

29 ■■■ Soit A, B, C, D quatre points cocycliques.
Les points B et D se projettent orthogonalement sur (AC) respectivement en B' et D', les points A et C se projettent orthogonalement sur (BD) en A' et C'.
Montrez que les points A', B', C', D' sont cocycliques.

30 ■■■ Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles sécants en A et B, M un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et de B.
La droite (AM) recoupe $(\mathcal{C}')$ en N. Les tangentes respectives à $(\mathcal{C})$ en M et à $(\mathcal{C}')$ en N se recoupent en un point T.
Montrez que les points M, N, T, B sont cocycliques.

31 ■■■ Soit ABC un triangle isocèle, P un point de (BC), distinct de B et de C, $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit à ABC.
On note $(\mathcal{C}')$ le cercle tangent en B à (AB), passant par P. Il recoupe la droite (AP) en un point M.
On se propose de montrer que M est sur le cercle $(\mathcal{C})$.

1° Montrez que :
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PM})$ (π), puis
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{MA})$ (π).

2° En décomposant les angles et en utilisant l'égalité $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ (que vous justifierez), montrez que l'on a : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})$ (π). Concluez.

32 ■■■■ **Droite de Simson**
Dans le plan, soit ABC un triangle. On se propose de déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points dont les projetés orthogonaux sur les côtés du triangle sont alignés. La droite ainsi déterminée est appelée droite de Simson du triangle ABC.

1° Les points A, B et C appartiennent-ils à $(\mathcal{E})$?

2° Montrez que si M est un point de $(\mathcal{E})$ et si l'un de ses projetés est un sommet A, B ou C alors la droite de Simson porte un des côtés du triangle.

3° Déterminez $(\mathcal{E})$. (Utilisez **1°** et **2°** pour étudier les cas particuliers.)

Nombres complexes et configurations

33 ■ Soit A et B deux points d'affixes respectives $-1-i$ et 1. Déterminez l'ensemble des points C tels que ABC soit un triangle équilatéral.

34 ■ Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $1+i$, $-2-i$ et $-3i$.

1° Déterminez l'affixe de G, barycentre du système $(A, 2)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$.

2° Placez les points A, B, C et G sur une figure.

35 ■ Soit A et B deux points d'affixes respectives $-i$ et 2.

1° Déterminez les points C et D tels que $ABCD$ soit un carré de sens direct.

2° Déterminez l'affixe du centre de gravité de ce carré.

3° Déterminez les longueurs des côtés et des diagonales de ce carré.

36 ■■ Soit ABC un triangle de sens direct (voir TP2, p. 44). On construit extérieurement au secteur angulaire saillant $([AB), [AC))$ les segments $[AM]$, $[CN]$ et $[BP]$ tels que :

- $AM = BC$ et (AM) et (BC) perpendiculaires,
- $CN = CA$ et (CN) et (CA) perpendiculaires,
- $BP = BA$ et (BP) et (BA) perpendiculaires.

Soit a, b, c, m, n, p les affixes respectives des points A, B, C, M, N, P.

1° a) Montrez que $p - c = i(m - b)$.

b) Montrez que $PC = MB$ et (PC) et (MB) sont perpendiculaires.

c) Montrez que $BN = MC$ et (BN) et (MC) sont perpendiculaires.

d) En considérant le triangle BMC, montrez que les trois droites (AM), (BN) et (CP) sont concourantes.

2° Soit K d'affixe k le milieu de $[AN]$ et L d'affixe l le milieu de $[AP]$.

a) Montrez que $m - k = -i(b - k)$.

b) Montrez que $m - l = i(c - l)$.

c) Quelle est la nature des triangles BKM et MLC ?

37 ■■ Soit A et B deux points d'affixes respectives a et b $(a \neq 0)$ tels que le triangle OAB soit direct (voir TP2, p. 44), isocèle rectangle en A. Soit M le point d'affixe a^2.

1° Déterminez le triangle OAB tel que M soit le milieu de $[OB]$.

2° Déterminez le triangle OAB tel que $OABM$ soit un carré.

38 ■■ Soit $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1° On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

a) Montrez que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et déduisez-en que α et β sont solutions de l'équation (1) : $X^2 + X - 1 = 0$.

b) Déterminez α en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

c) Résolvez l'équation (1) et déduisez-en la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

2° On appelle A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives 1, z_0, z_0^2, z_0^3, z_0^4 dans le plan affine rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Soit H le point d'intersection de la droite $(A_1 A_4)$ avec l'axe $(O, \vec{u})$. Montrez que $\overline{OH} = \cos \frac{2\pi}{5}$.

b) Soit (C) le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par B d'affixe i. Ce cercle coupe $(O, \vec{u})$ en M et N (on appellera M le point d'abscisse positive). Montrez que $\overline{OM} = \alpha$, $\overline{ON} = \beta$ et que H est le milieu de $[OM]$.

c) Déduisez-en une construction simple d'un pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0.

(Bac C)

39 ■■ Dans le plan orienté on considère quatre points A, B, C et D deux à deux distincts. On note I le milieu de $[BD]$, J le milieu de $[AC]$ et O l'isobarycentre de A, B, C, D. On construit les triangles rectangles isocèles ABM, BCN, CDP et DAQ tels que les angles orientés :

$$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}), \quad (\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NB}), \quad (\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PC}), \quad (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QD})$$

ont pour mesure $\frac{\pi}{2}$. Soit K le milieu de $[MP]$ et L le milieu de $[NQ]$. On se propose d'étudier la configuration (I, J, K, L). A cet effet, on pourra prendre un repère orthonormal direct d'origine O et introduire les affixes a, b, c, d de A, B, C, D, les affixes m, n, p, q de M, N, P, Q et les affixes f, g, k, l de I, J, K, L.

1° Déterminez le milieu de $[IJ]$.

2° Prouvez que $m(1-i) = a - ib$. Calculez de façon analogue n, p et q.

3° Déterminez l'isobarycentre de M, N, P, Q. Déduisez-en le milieu de $[KL]$.

4° Effectuez une figure soignée en prenant

$a = -2+2i$, $b = -2-i$, $c = -2i$ et $d = 4+i$.

5° Soit r le quart de tour direct de centre O. Montrez que $r(J) = K$.

6° Caractérisez les configurations (A, B, C, D) telles que $I = J$. Indiquez alors la position de K et de L et la nature de $MNPQ$. Ce cas étant écarté, prouvez que $IJKL$ est un carré de centre O.

(Bac C)

40 ■■■ Soit un quadrilatère convexe $ABCD$ de sens direct (voir «*Note*»). On construit sur chaque côté un carré, à l'extérieur du quadrilatère. Soit I, J, K et L les centres respectifs des carrés de côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1° Montrez que $IK = JL$ et que les droites (IK) et (JL) sont perpendiculaires.

2° Déterminez la nature du quadrilatère $IJKL$ si $ABCD$ est un parallélogramme.

Note : Une figure est convexe si, étant donnés deux points quelconques M et N intérieurs à la figure, tout point du segment $[MN]$ est intérieur à la figure. Un quadrilatère convexe $ABCD$ est de sens direct si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \in [0, \pi]$.

PROBLÈMES

41 ■■■

Homographie

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit A et A' les points d'affixes respectives 1 et -1.

I – Soit H l'application ponctuelle qui à tout point m, d'affixe z, distinct de A', associe le point m' d'affixe $h(z)$ avec $h(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ (1).

1° Vérifiez que H est une bijection de (P) privé de A' sur (P) privé de A. Déterminez H^{-1}.

2° Soit (P^*) le plan (P) privé des points O, A et A'. Soit $\mathcal{H}$ la restriction de H à (P^*).

a) Montrez que $\mathcal{H}$ est une bijection de (P^*) sur (P^*).

b) Soit $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \circ \mathcal{H}$, $\mathcal{H}^3 = \mathcal{H} \circ \mathcal{H}^2$, ..., $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \circ \mathcal{H}^{n-1}$...
Déterminez $\mathcal{H}^4$.

Déterminez $\mathcal{H}^n$, pour n nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

3° a) Montrez que H admet deux points invariants I et J.
Prouvez que pour tout nombre complexe z distinct de $-i$ la relation (1) peut s'écrire :

$$\frac{h(z)-i}{h(z)+i} = -i\,\frac{z-i}{z+i}.$$

b) Retrouvez ainsi l'expression de $\mathcal{H}^n$ lorsque n est multiple de 4.

4° a) Si m est distinct de I et J, comparez les mesures des angles $(\overrightarrow{m'I}, \overrightarrow{m'J})$ et $(\overrightarrow{mI}, \overrightarrow{mJ})$.

b) Quelle est l'image par H d'un cercle passant par I et J?

c) Traitez le cas particulier du cercle de diamètre $[IJ]$.

42 ■■■

Transformation de Joukovski

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A et A' les points d'affixes respectives 1 et -1.
Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi(z) = z^2$.
Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{0\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{(transformation de Joukovski).}$$

Soit h l'application de $\mathbb{C} - \{-1\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $h(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$. On désigne par Φ, F et H les transformations ponctuelles associées à φ, f et h.

1° Montrez que la restriction de F au plan (P) privé des points O et A' coïncide avec l'application : $H^{-1} \circ \Phi \circ H$.

2° En utilisant la relation $H \circ F = \Phi \circ H$, déterminez l'image par F d'un cercle passant par A et A'. Faites une figure dans le cas du cercle centré en I d'affixe i. Examinez le cas particulier du cercle de diamètre $[AA']$.

3° Déterminez les coordonnées du point M d'affixe Z telle que $Z = f(z)$ en fonction de celles du point m d'affixe z.

4° Montrez que, lorsque m décrit la droite d'équation $y = 0$, le point M décrit l'ensemble $(AA') -]AA'[$.

5° Soit (Γ) la courbe décrite par le point M quand m décrit le cercle de diamètre $[OA]$.

a) Déterminez une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Montrez que (Γ) passe par A, et donnez-en une équation cartésienne dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

c) Tracez (Γ) en remarquant que $(\Gamma) = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$, où (Γ_1) et (Γ_2) sont deux courbes représentatives de fonctions, symétriques par rapport à (OA).

3 Espace : produit scalaire, projections

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Perspective. Projection 60
AP2 Angles droits dans l'espace 61
AP3 Projection orthogonale sur une droite 62
AP4 Configuration de Thalès 63

COURS

1. Projections ponctuelles de l'espace 64
2. Projections vectorielles 68
3. Produit scalaire dans l'espace 70
4. Étude analytique 75

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Angles dans un tétraèdre 79
TP2 Distance d'un point à un plan ou à une droite 80
TP3 Sphère 80

FICHE MÉTHODE

FICHE MÉTHODE Comment démontrer des orthogonalités dans l'espace 82

EXERCICES COMMENTÉS 83
LE JOUR DU BAC 84
EXERCICES ET PROBLÈMES 85

objectifs

- Étendre à l'espace la notion de produit scalaire rencontrée dans le plan.
- Définir la projection sur une droite ou sur un plan.
- Appliquer ces notions dans des calculs d'angles et de distances.

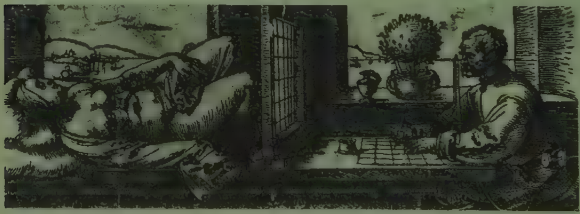
ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Perspective. Projection

Voir références en page 2.

Dans la représentation des objets de l'espace par des dessins plans, comment obtenir un dessin qui rende la notion de profondeur, de volume ?

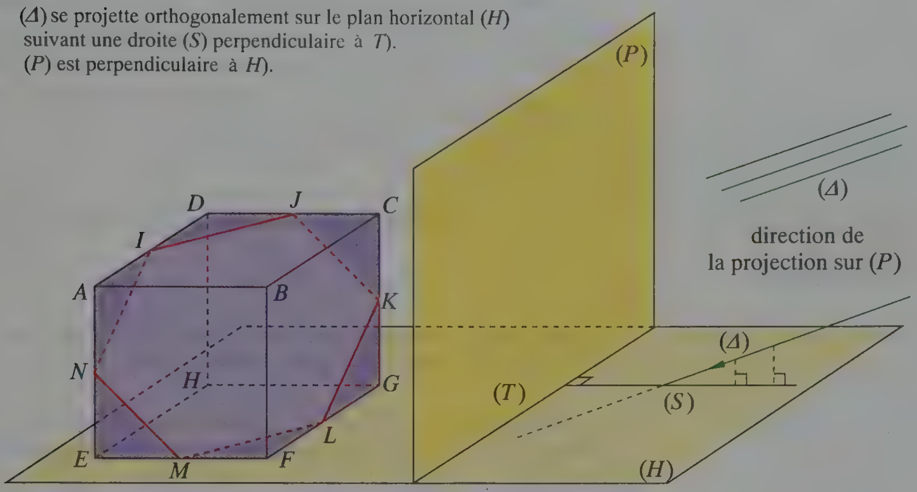
Il faut attendre le XV^{e} siècle pour que s'organisent des règles de représentations planes des objets de l'espace et que naisse « la science de la perspective ». Parmi les peintres et architectes qui participèrent à la naissance et au développement de cette science nouvelle, retenons Brunelleschi (1377-1446), Piero della Francesca (vers 1410-1492), Léonard de Vinci (1452-1519), Albrecht Dürer (1471, 1538).
Pour représenter un objet en perspective, Piero della Francesca imagina d'interposer une vitre entre l'objet et l'observateur, l'intersection du cône visuel avec la vitre donnant le dessin de l'objet dans le plan de la vitre.
Le portillon de Dürer (ci-dessous) est un dispositif permettant de construire, point par point, le dessin perspectif de l'objet. Le cône visuel a pour sommet l'œil de l'observateur, les rayons visuels sont les droites joignant ce sommet à divers points de l'objet.



Le dessin obtenu représente l'image de l'objet dans une projection centrale sur la vitre. Si l'œil de l'observateur est supposé placé à l'infini, alors les rayons visuels sont considérés comme parallèles. On obtient dans ce cas l'image de l'objet par une projection parallèle : la direction de la projection étant celle des rayons visuels. Le dessin obtenu est alors la représentation de l'objet en perspective cavalière.

Construisez, dans le plan (P) de la figure ci-dessous, le dessin perspectif du cube $ABCDEFGH$, de l'hexagone $IJKLMN$ obtenu en joignant des milieux d'arêtes, et celui du tétraèdre régulier $ACFH$.

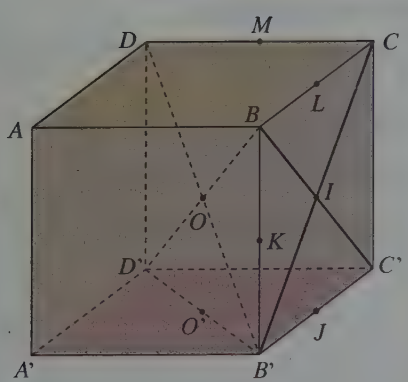
☐ *Remarque :* notons que le cube est ici, en fait, déjà représenté par une perspective cavalière sur le plan de la feuille.



AP2 Angles droits dans l'espace

Cette AP2, outre un travail sur l'orthogonalité, pose le problème de la conservation ou de la non-conservation de l'orthogonalité de deux droites de l'espace par une projection. Une condition de conservation sera étudiée dans le cours (page 75).

Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube dont les arêtes mesurent 1 unité de longueur. Notons O le centre du cube, O' et I les centres respectifs des faces $A'B'C'D'$ et $BCC'B'$, J, K, L et M les milieux des arêtes $[B'C']$, $[BB']$, $[BC]$ et $[CD]$.



1° Complétez le tableau ci-dessous en indiquant notamment les images par projection orthogonale sur le plan $(A'B'C'D')$ des droites proposées.

	Couples de droites	Droites orthogonales	
		oui	*non*
Droites	(OB') et (OC')	.....	.....
Projections	....	.....	.....
Droites	(BA) et (BC')	.....	.....
Projections	....	.....	.....

Faites de même avec les couples de droites (AB') et (CB'), (IA) et (IB'), (BB') et (BC).

2° Les angles envisagés dans cette question ont leurs côtés situés dans les plans $(ABCD)$ ou $(BCC'B')$, plans dont on peut dire, intuitivement, qu'ils sont perpendiculaires (voir « cours », page 73).

a) Donnez une mesure de l'angle $\widehat{ACB'}$ (justifiez votre réponse).

b) Donnez une mesure de l'angle $\widehat{MCK}$ (justifiez votre réponse).

c) L'angle $\widehat{KLM}$ est-il droit ?

d) Existe-t-il, dans le plan $BCC'B'$; une droite passant par L et perpendiculaire à la droite (LM) ? Le problème admet-il une ou plusieurs solutions ? Pouvez-vous, de cette deuxième question, dégager une condition suffisante pour qu'un angle $\widehat{RST}$, R dans le plan $(ABCD)$, S sur l'arête (BC), T dans le plan $(BCC'B')$, soit un angle droit ?

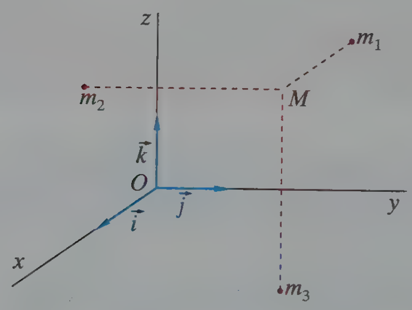
AP3 Projection orthogonale sur une droite

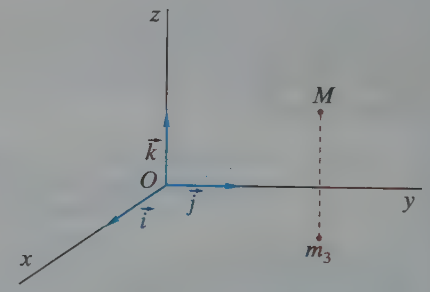
La projection orthogonale sur un plan a été définie en Seconde. Comment intervient-elle dans les repères orthonormaux ?

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ utilisé dans cette AP3 est un repère orthonormal. Un point M de l'espace se projette orthogonalement en m_3 sur (xOy), m_2 sur (zOx), m_1 sur (yOz).

1° La figure ci-dessous (à gauche) est-elle exacte ?

2° Sur la figure ci-dessous (à droite), on donne M et m_3. Construisez m_1 et m_2.





3° **Dans le plan** (xOy) le point m_3 se projette orthogonalement en A et B respectivement sur (Ox) et (Oy). Démontrez que :

a) le plan (Mm_2m_3) est orthogonal à (Ox) ;

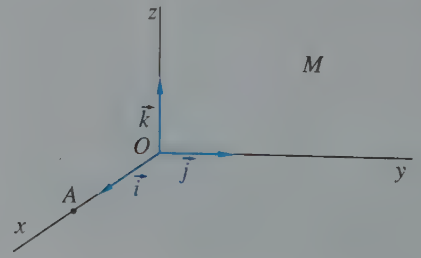
b) le point A est l'intersection de (Ox) et (Mm_2m_3).

Ce point A, intersection de (Ox) et du plan passant par M et orthogonal à (Ox) est le projeté orthogonal de M sur la droite (Ox).

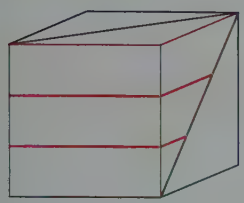
c) Quel est le projeté orthogonal de M sur (Oy) ?

d) Construisez le projeté orthogonal, C, de M sur (Oz).

4° On donne M et A (figure ci-dessous). Construisez les points B et C.

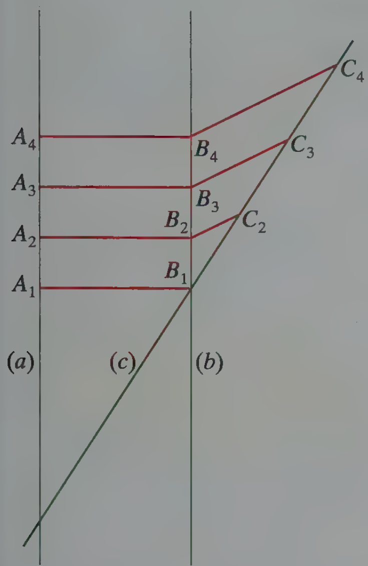


AP4 Configuration de Thalès



Nous vous proposons deux lectures de la figure ci-contre : une lecture plane puis une lecture spatiale. Nous nous intéresserons notamment, pour cette situation particulière, à la configuration de Thalès dans le plan et son adaptation dans l'espace.

1 ■ *Lecture plane*

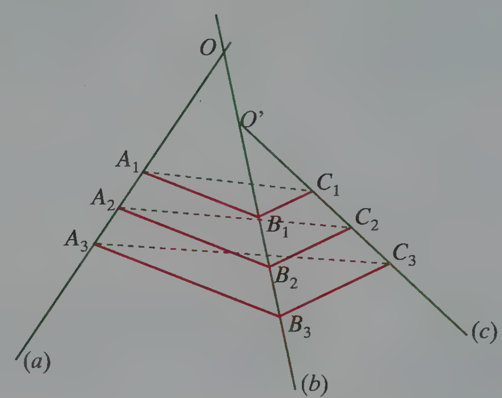


1° Les droites (a) et (b) (figure ci-contre), sont parallèles, les droites (b) et (c) sont sécantes en B_1. Les droites (A_1B_1), (A_2B_2), (A_3B_3), (A_4B_4) d'une part, (B_2C_2), (B_3C_3), (B_4C_4) d'autre part, sont parallèles. Les droites (A_2C_2), (A_3C_3), (A_4C_4) sont-elles parallèles ?

2° Étudiez le cas où :

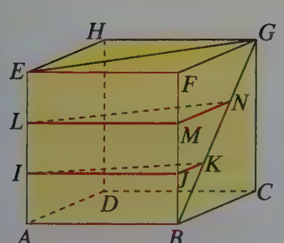
a) les droites (a), (b), (c) sont concourantes ;

b) les droites (a), (b), (c) ne sont ni concourantes, ni deux à deux parallèles (figure ci-dessous).



□ *Remarque.* Bien que les rapports $\dfrac{A_1A_3}{A_1A_2}$ et $\dfrac{B_1C_3}{B_1C_2}$ soient égaux, ce qui se vérifie rapidement, les droites (A_1B_1), (A_2C_2) et (A_3C_3) ne sont pas parallèles. La réciproque du théorème de Thalès n'est pas valable.

2 ■ *Lecture spatiale*



La figure ci-contre représente un cube en perspective cavalière. Les droites (AB), (IJ), (LM) et (EF) d'une part, (JK), (MN), (FG) d'autre part, sont parallèles.

1° Les droites (IK), (LN) et (EG) sont-elles parallèles ?

2° Démontrez que ces droites sont situées dans des plans parallèles.

3° On suppose que $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AI}$. Justifiez que $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BK}$.
Ainsi : les droites (AE) et (BG) sont coupées par des plans parallèles, aux points A, I, L et B, K, N ; de l'égalité $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AI}$ on a déduit l'égalité : $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BK}$.

Cette propriété rappelle la configuration de Thalès dans le plan.

De plus, par analogie avec la définition donnée dans l'AP2, les points B, K, N, G sont dits **projetés** des points A, I, L, E sur la droite (BG) **parallèlement au plan $(ABCD)$.** Quels sont les projetés de B, K, N, G sur (AE) parallèlement à $(ABCD)$?

COURS

1. PROJECTIONS PONCTUELLES DE L'ESPACE

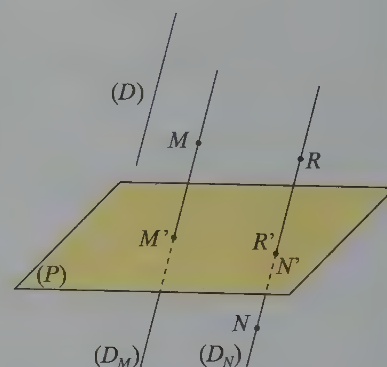
1. Définition

Soit (P) un plan et (D) une droite non parallèle à (P).

■ Pour tout point M de l'espace il existe une droite (D_M) unique passant par M et parallèle à (D) ; cette droite (D_M) coupe le plan (P) en un point unique, noté M', **projeté de M sur (P) suivant la direction de (D).**

La droite (D_M) est appelée **projetante** de M sur (P).

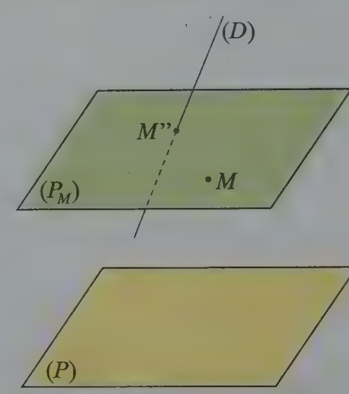
L'application de l'espace définie par $M \mapsto M'$ est la **projection ponctuelle** (ou simplement **projection**) sur (P) selon la direction de (D).



■ De même pour tout point M de l'espace il existe un plan (P_M) unique passant par M et parallèle à (P) et ce plan coupe la droite (D) en un point unique M''.

Le point M'' est appelé **projeté de M sur (D) selon le plan (P)** (ou suivant la direction de (P) ou suivant (P)).

Le plan (P_M) est le **plan projetant** de M sur (D).



Définition 1

> **Une droite (D) et un plan (P) étant donnés, (D) non parallèle à (P), on appelle projection ponctuelle sur (D) (ou plus simplement : projection sur (D)) suivant (P) l'application de l'espace qui, à tout point M, associe le point M', intersection de (D) et du plan passant par M et parallèle à (P).**
> **L'image M' de M est appelée projeté de M sur (D) suivant (P).**

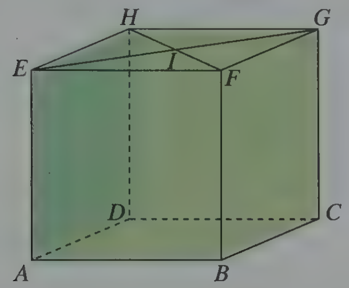
■ *Cas particuliers : projections orthogonales*

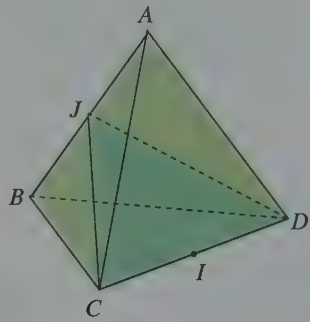
Dans le cas où (D) est orthogonale à (P), les projections sur (P) suivant (D) et sur (D) suivant (P) sont dites **orthogonales.** La première est dite **projection orthogonale sur (P)**, la seconde est la **projection orthogonale sur (D).**

EXEMPLES

1° Dans l'AP3, B est le projeté de M sur (Oy) suivant (xOz). Si le repère est orthonormal alors B est le projeté orthogonal de M sur (Oy).

2° Dans le cube ci-dessous, D est le projeté orthogonal de H sur (DC) car D est l'intersection de (DC) et du plan (AEH) passant par H et orthogonal à (DC). Le point A est le projeté orthogonal de B, de C, de D sur (AE).



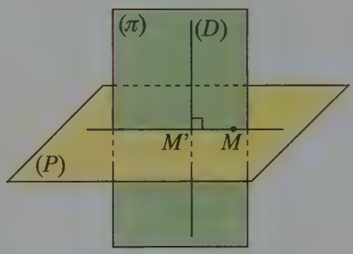


3° Dans le tétraèdre régulier $ABCD$, où I et J sont les milieux des arêtes $[CD]$ et $[AB]$, J est le projeté orthogonal de I sur (AB).

□ *Remarques.*

1° Les projections ne sont pas des bijections de l'espace (exemple **2°** précédent : A admet plusieurs antécédents).

2° Si M n'est pas un point de (D) appelons M' son projeté orthogonal sur (D) ; alors M et (D) définissent un plan (π) et, dans ce plan (π), (MM') est perpendiculaire à (D) ; M' est donc, dans (π), le projeté orthogonal de M sur (D).



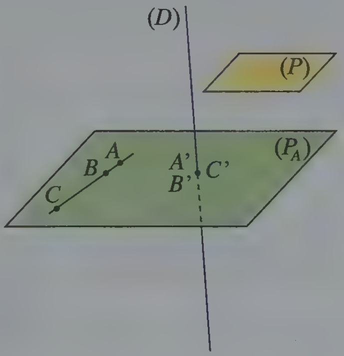
2. Points alignés

■ *Projection sur une droite*

Soit (D) une droite et (P) un plan, (D) non parallèle à (P). Notons A, B, C trois points alignés de l'espace et A', B', C' leurs projetés respectifs sur (D) suivant (P).

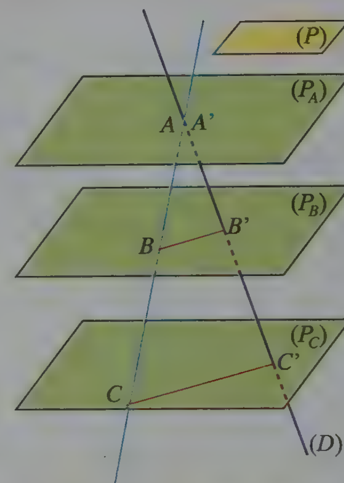
• Dans le cas de la figure ci-contre : la droite (AB) est parallèle à (P).

Les plans projetants de A, de B et de C sont confondus donc A', B', C' sont confondus.



COURS

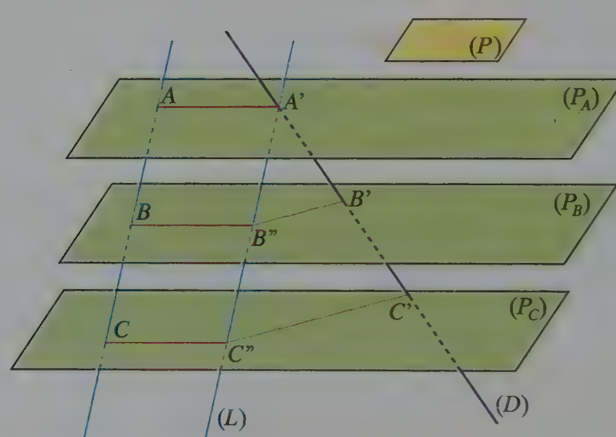
• Dans le cas de la figure ci-contre : $A \in (D)$ et (AB) n'est pas parallèle à (P) ; les points A', B', C' sont deux à deux distincts et $A = A'$.



Les droites (AB) et (D) définissent un plan (π). Les plans (P_B) et (P_C), projetants de B et C, coupent (π) suivant les droites (BB') et (CC') parallèles.

Nous retrouvons, dans ce plan (π), la configuration de Thalès ; par suite, si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$.

• Dans le cas le plus général, les droites (AB) et (D) ne sont pas coplanaires.
Traçons la droite (L) passant par A' et parallèle à (AB). Elle coupe les plans (P_B) et (P_C) respectivement en B'' et C'' ; les plans (P_A), (P_B) et (P_C) et les droites (L) et (D) forment une figure analogue à la figure ci-dessus.



Dans le plan (ABA'), défini par les droites (AB) et (L), strictement parallèles, les droites (AA'), (BB'') et (CC'') sont parallèles ; par suite les quadrilatères $AA'B''B$ et $AA'C''C$ sont des parallélogrammes donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B''}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C''}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant colinéaires, $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, si on pose $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ avec k réel alors $\overrightarrow{A'C''} = k\overrightarrow{A'B''}$. Or, de $\overrightarrow{A'C''} = k\overrightarrow{A'B''}$, on déduit $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$. Ainsi, de $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ on déduit $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$.

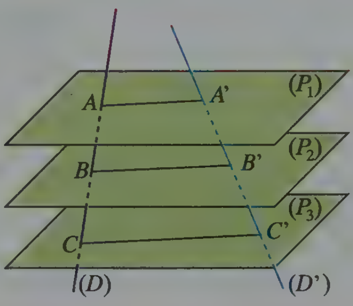
Cette propriété étend à l'espace la propriété étudiée dans le plan et reste encore valable lorsque les points A', B', C' sont confondus (fig. bas p. 65).

Propriété 1

Si des points A, B, C de l'espace sont tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, où k est un nombre réel, alors leurs projetés A', B', C' sur une droite (D) suivant un plan (P) sont tels que $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$.

EXEMPLE

Trois plans (P_1), (P_2), (P_3) sont tels que leurs intersections A, B, C avec une droite (D) sont telles que B est le milieu de $[AC]$.
Alors leurs intersections A', B', C' avec toute droite (D') non parallèle à ces plans sont telles que B' est le milieu de $[A'C']$. Les points A', B', C' peuvent en effet être interprétés comme les projetés de A, B, C sur (D') suivant (P_1).



■ Projection sur un plan

• Conservation de l'alignement

Soit (P) un plan, (D) une droite non parallèle à (P). Notons A, B, C trois points alignés de l'espace, A', B', C' leurs projetés sur (P) suivant (D).
Si (AB) est parallèle à (D) alors A', B' et C' sont confondus (fig. ***a***).

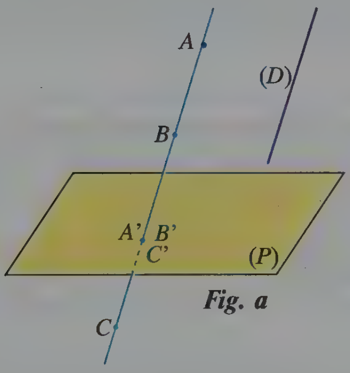


Fig. a

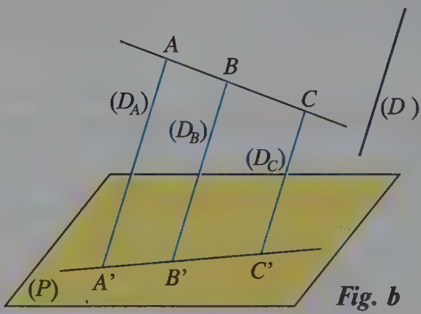


Fig. b

Si (AB) n'est pas parallèle à (D) (fig. ***b***) alors les droites (AB) et (D_A) (projetante de A) définissent un plan (π). La droite (D_B), projetante de B, contient B et est parallèle à la droite (D_A) de (π) donc à (π) ; elle est donc contenue dans (π). De même (D_C) est une droite de (π). Les points B' et C' sont donc des points de (π).
Situés dans (P) et dans (π), plans sécants, A', B', C' sont alignés.

Propriété 2

Les projetés sur un plan (P) suivant une droite (D) de trois points A, B, C alignés sont des points alignés, éventuellement confondus.

Nous dirons plus brièvement : les projections sur un plan **conservent l'alignement.**
Notons que, dans le plan (π), si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$.

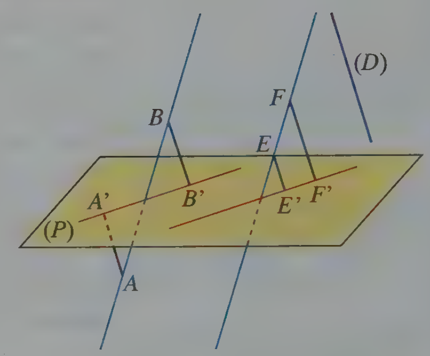
□ *Remarque :* **projetée d'une droite.**
D'après la propriété 2, tout point C de la droite (AB), non parallèle à (D), se projette en un point C' de la droite $(A'B')$. De plus, tout point E' de $(A'B')$ est le projeté d'un point E de (AB), point d'intersection de (AB) et de la droite passant par E' et parallèle à (D).
La droite $(A'B')$ est donc la projetée de la droite (AB) sur (P) suivant (D).

- **Conservation du parallélisme**

Deux droites (AB) et (EF) sont parallèles entre elles et non parallèles à (D).

Les projetés sur (P) suivant (D) de A, B, E, F sont notés A', B', E', F'.

Les plans (ABA') et (EFE') sont tels que : $(AB) /\!/ (EF)$, $(AA') /\!/ (EE')$, (AB) et (AA') sont sécantes ; par suite ces plans sont parallèles. Leurs intersections $(A'B')$ et $(E'F')$ avec le plan (P) sont donc des droites parallèles.

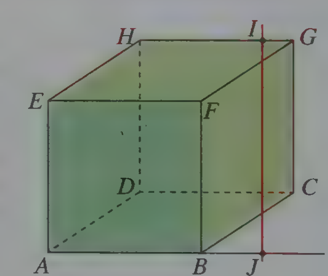


Nous dirons que le parallélisme des droites (AB) et (EF) est conservé par la projection sur (P).

Propriété 3

> **Toute projection sur un plan conserve le parallélisme des droites non parallèles à la direction de la projection.**

□ *Remarque*
Dans le cas d'un croquis perspectif, deux droites parallèles de l'objet sont représentées par deux points ou par deux droites parallèles.
Réciproquement, des droites parallèles du dessin ne représentent pas nécessairement des droites parallèles de l'objet. On s'en persuadera en regardant le croquis d'un cube.



$I \in (HG)$, $J \in (AB)$ et, sur le dessin, $(IJ) /\!/ (CG)$.
Dans le cube, (IJ) et (CG) ne sont pas coplanaires.

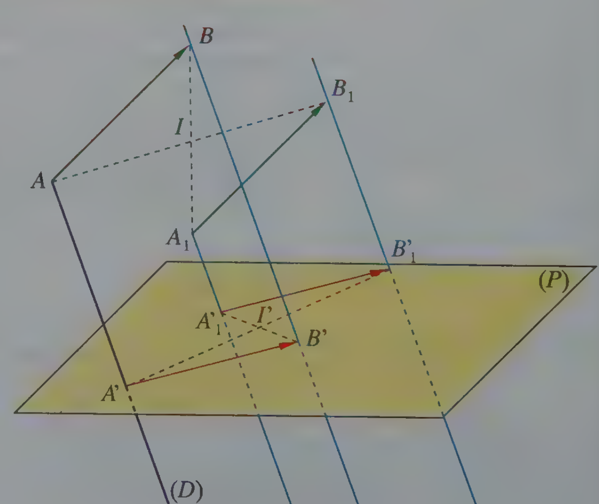
2. PROJECTIONS VECTORIELLES

1. Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace, (A, B) et (A_1, B_1) deux couples de points tels que :

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{u}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A_1B_1}$ étant égaux, les segments $[AB_1]$ et $[A_1B]$ ont le même milieu I.



Les projetés A', B', A'_1, B'_1, I' des points A, B, A_1, B_1, I sur un plan (P) suivant une droite (D) (respectivement sur une droite (D) suivant un plan (P)) sont tels que les segments $[A'B'_1]$ et $[A'_1B']$ ont le même milieu I'.

Par suite on a : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'_1B'_1}$.

Posons $\vec{u}' = \overrightarrow{A'B'}$.

(P) et (D) étant donnés, $\vec{u}'$ ne dépend que de $\vec{u}$ et non des points A et B choisis pour déterminer $\vec{u}'$. Le vecteur $\vec{u}'$ est appelé projeté de $\vec{u}$ sur (P) (respectivement : sur (D)) et l'application $\vec{u} \mapsto \vec{u}'$ est appelée projection vectorielle sur (P) suivant (D) (respectivement : sur (D) suivant (P)).

Définition 2

Soit (P) et (D) un plan et une droite de l'espace, (D) non parallèle à (P).
On appelle projection vectorielle associée à la projection ponctuelle sur (P) suivant (D) (resp. sur (D) suivant (P)) l'application qui à tout vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $\vec{u}'$ ainsi défini :
- **si A et B sont des points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, A' et B' leurs projetés sur (P) suivant (D) (resp. sur (D) suivant (P))**
- **alors $\vec{u}' = \overrightarrow{A'B'}$.**

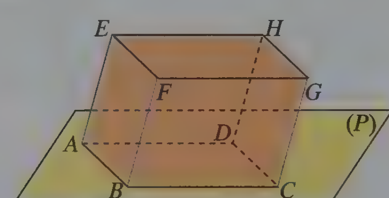
EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède. Si on note f la projection ponctuelle sur (ABC) suivant (DH) et φ la projection vectorielle associée alors on écrira :

$$\begin{cases} f(A) = A \\ f(G) = C \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi(\overrightarrow{AG}) = \overrightarrow{AC}$$

De même :

$$\begin{cases} f(E) = A \\ f(H) = D \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi(\overrightarrow{EH}) = \overrightarrow{AD}$$



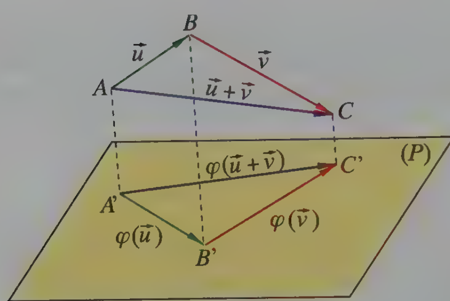
□ *Remarque.* Quel que soit le point A, d'image A' par une projection ponctuelle, on a, pour la projection vectorielle associée :

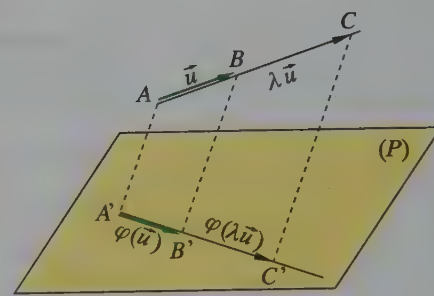
$\varphi(\overrightarrow{AA}) = \overrightarrow{A'A'}$ c'est-à-dire $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$.

2. Linéarité des projections vectorielles

En règle générale (voir aussi chapitre 7 « Isométries du plan ») nous étudierons les propriétés des applications vectorielles en liaison avec les opérations définies sur les vecteurs : addition et multiplication par un nombre réel.

Soit f une projection ponctuelle et φ sa projection vectorielle associée.
Nous admettrons les propriétés suivantes illustrées dans le cas d'une projection sur un plan par les figures ci-après.





$\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$ $\qquad$ $\varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda\varphi(\vec{u})$ $\qquad$ (propriété 4).

Propriété 4

Toute projection vectorielle φ est telle que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et le nombre réel λ, on a :

$\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$;

$\varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda\varphi(\vec{u})$.

On dit que φ est une application linéaire.

3. Barycentres et projections

Soit (A_1, α_1), (A_2, α_2) des points pondérés tels que $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, et G le barycentre de ces points pondérés.
Si f est une projection ponctuelle, sur un plan ou sur une droite, φ sa projection vectorielle associée, A_1', A_2', G' les images respectives de A_1, A_2, G par f alors, en appliquant la linéarité de φ (propriété 4), on a :

$\varphi(\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2}) = \alpha_1\varphi(\overrightarrow{GA_1}) + \alpha_2\varphi(\overrightarrow{GA_2})$.

Or, $\quad \alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} = \vec{0}, \quad \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$,

$\varphi(\overrightarrow{GA_1}) = \overrightarrow{G'A_1'}$ $\quad$ et $\quad$ $\varphi(\overrightarrow{GA_2}) = \overrightarrow{G'A_2'}$ $\quad$ donc : $\quad \vec{0} = \alpha_1\overrightarrow{G'A_1'} + \alpha_2\overrightarrow{G'A_2'}$.

Le point G' est donc le barycentre des points pondérés (A_1', α_1), (A_2', α_2).

Cette étude peut être étendue à un système de trois ou quatre points. Elle pourra, après le chapitre 5, être étendue au cas de n points.

Propriété 5

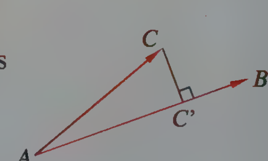
L'image, par une projection f, du barycentre de deux points pondérés (A_1, α_1), (A_2, α_2) est le barycentre des points images : $(f(A_1), \alpha_1)$, $(f(A_2), \alpha_2)$.

3. PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1. Définition. Diverses expressions

■ Dans le plan, le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, $\quad \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, a été défini à l'aide de la projection orthogonale sur (AB).

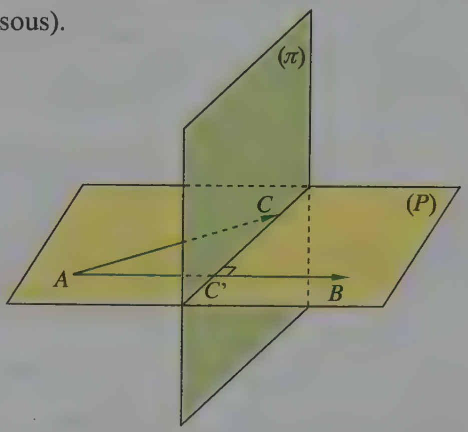
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC'}$ $\qquad$ (fig. ci-contre).



■ La définition est étendue à l'espace à l'aide de la projection orthogonale sur (AB), projection sur **une droite suivant un plan.**

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC'}$ (fig. ci-dessous).

Notons que si les points A, B, C définissent un plan (P) alors, dans (P), C' est aussi le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



Le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans l'espace est donc égal au produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan (P). Il en est de même lorsque les points A, B, C sont alignés donc localisables dans un plan (P).

Comme dans le plan, la définition est étendue au cas où $\overrightarrow{AB}$ est nul en posant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Définition 3

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ de l'espace est le nombre réel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ainsi défini :

- **si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$;**
- **si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC'}$ où C' est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).**

Comme dans le plan nous avons aussi :

Propriété 6

Si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$ nous avons :

Propriété 7

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left((\vec{u} + \vec{v})^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2\right).$$

EXEMPLE

Dans le cube $ABCDEFGH$, tel que $AB = a$:

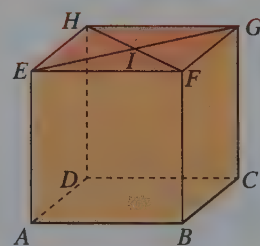
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = a^2$,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = a^2$,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FC} = \overline{AB} \cdot \overline{BB} = 0$,

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = \overline{AE} \cdot \overline{AE} = a^2$,

$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overline{EG} \cdot \overline{EI} = a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = a^2$.



2. Propriétés

Les propriétés du produit scalaire dans le plan s'étendent au produit scalaire dans l'espace.
Rappelons ces propriétés :

Propriété 8

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le nombre réel α on a :

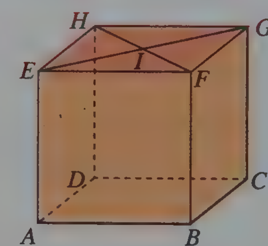
$$\left.\begin{array}{c}\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u},\\ \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w},\\ \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})=\alpha\times(\vec{u}\cdot\vec{v}),\end{array}\right\}\quad \begin{array}{c}\textbf{propriétés dont on déduit :}\\ (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w},\\ (\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\alpha\times(\vec{u}\cdot\vec{v}).\end{array}$$

Comme dans le plan nous avons :

- **Norme :** $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$.
- **Vecteurs orthogonaux :** $\vec{u}\perp\vec{v}$ équivaut à $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ ou, si $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ à $\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$.

EXEMPLE

Dans le cube de la figure :
$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})\cdot\overrightarrow{EC}$,
$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{EC}$,
$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FB}$,
$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EC}=a^2-a^2$,
$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EC}=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont orthogonaux.



3. Orthogonalité de droites et de plans

Droites et plans

L'orthogonalité de droites et de plans peut être, on le vérifiera sans peine, traduite de la façon suivante :

Propriété 9

- **Deux droites (D) et (D') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ (fig. *a*).**

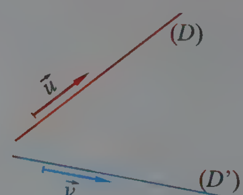


Fig. a

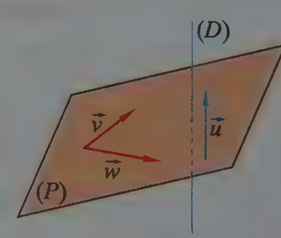


Fig. b

- **Une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan (P) de base $(\vec{v}, \vec{w})$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ et $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$ (fig. *b*).**

Définition 4

On appelle vecteur normal à un plan (P) tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à (P).

□ *Remarque.* Deux plans parallèles admettent des vecteurs normaux colinéaires.

Plans perpendiculaires

Dans le langage courant, une droite verticale est perpendiculaire à tout plan horizontal et tout plan contenant une droite verticale est un plan vertical, perpendiculaire à tout plan horizontal.

D'une façon plus générale :

Définition 5

On dit que deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Dans une telle situation (fig. ***c***) la droite (L), du plan (P), perpendiculaire en A à (Δ) est orthogonale à (P'). Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ directeurs de (D) et (L), donc respectivement normaux à (P) et (P'), sont orthogonaux.

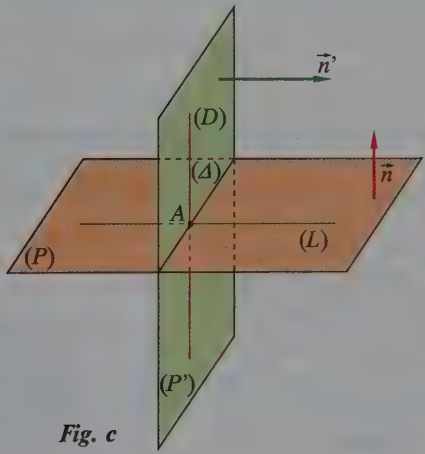


Fig. c

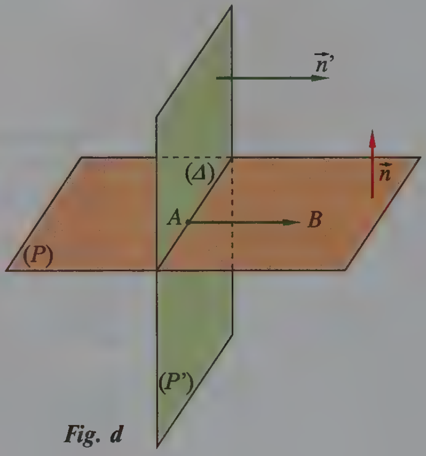


Fig. d

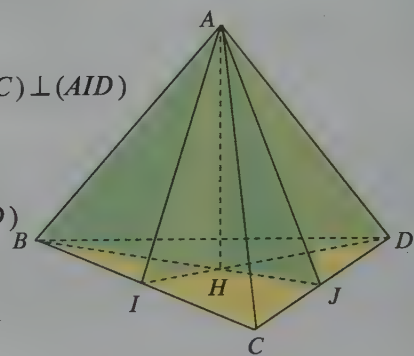
Réciproquement si deux plans (P) et (P') admettent des vecteurs normaux, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, orthogonaux (fig. ***d***) alors ces deux plans sont sécants (conséquence de la remarque ci-dessus).
Soit A un de leurs points communs et B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{n}'$. De l'orthogonalité de $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ on déduit que B est dans (P).
On a ainsi : (AB) orthogonale à (P') et (AB) dans (P). Les plans (P) et (P') sont donc perpendiculaires.

Propriété 10

Deux plans (P) et (P') sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ respectivement normaux à (P) et (P') sont orthogonaux.

EXEMPLES

1° Dans le tétraèdre régulier $ABCD$, I et J sont les milieux des arêtes $[BC]$ et $[CD]$.



- $\left.\begin{array}{l}(AI)\perp(BC)\\(ID)\perp(BC)\\(AI)\text{ et }(ID)\text{ sont sécantes}\end{array}\right\}$ donc $(BC)\perp(AID)$

  $\left.\begin{array}{l}(BC)\perp(AID)\\(BC)\subset(BCD)\end{array}\right\}$ donc $(AID)\perp(BCD)$

  Remarquons que :

  $(AH)\subset(AID)$ et $(AH)\perp(BCD)$.

- (AID) et (AJB) ne sont pas perpendiculaires. Ils sont sécants suivant la droite (AH) et la perpendiculaire en H à (BH) n'est pas dans (ADI).

2° Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les plans de repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O, \vec{j}, \vec{k})$ sont perpendiculaires (ils admettent pour vecteurs normaux les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{i}$ qui sont orthogonaux).

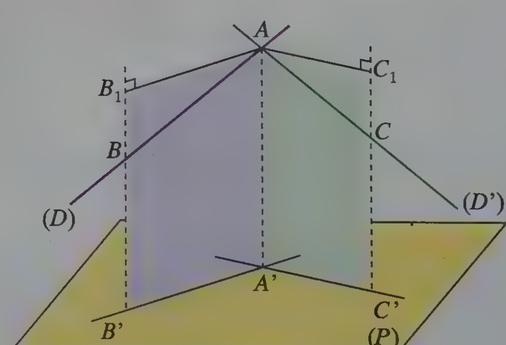
4. Projection orthogonale sur un plan de deux droites orthogonales

Déterminons, pour compléter les observations de l'AP2 (**1°**) une condition nécessaire et suffisante pour que deux droites orthogonales se projettent orthogonalement sur un plan suivant deux droites perpendiculaires.

- Soit (P) un plan, (D) et (D') deux droites orthogonales et non orthogonales à (P).

Il n'est pas restrictif de prendre ces droites sécantes, d'après la propriété 3.

Appelons A le point commun à (D) et (D'), B un deuxième point de (D), C un deuxième point de (D'), A', B', C' les projetés orthogonaux de A, B, C sur (P).



Dans le plan (ABA'), A se projette orthogonalement en B_1 sur (BB'), projetante de B sur (P).

Dans le plan (ACA'), A se projette orthogonalement en C_1 sur (CC'), projetante de C sur (P) (Notons que $(AB_1)\,/\!/\,(P)$ et $(AC_1)\,/\!/\,(P)$.)

Nous avons alors : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB_1}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC_1}$ donc :

$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC_1}$.

- À quelle condition ce produit scalaire est-il nul ?

$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1})$,

$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}) \cdot \overrightarrow{CC_1}$,

$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0 + \overrightarrow{BB_1} \cdot (\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1C}) + \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{CC_1}$,

$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} + 0$

$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0 + \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{C_1C}$

$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{C_1C}$.

Puisque $\overrightarrow{BB_1}$ et $\overrightarrow{CC_1}$ sont colinéaires, le produit scalaire $\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{C_1C}$ est nul si et seulement si l'un des vecteurs est nul.
Ainsi $(A'B') \perp (A'C')$ si et seulement si $(AB) /\!/ (P)$ ou $(AC) /\!/ (P)$.

Propriété 11

Deux droites orthogonales de l'espace se projettent orthogonalement sur un plan suivant deux droites perpendiculaires si et seulement si l'une au moins des deux droites est parallèle au plan.

EXEMPLE

Dans le tétraèdre régulier $ABCD$, les points I, J, K sont les milieux des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

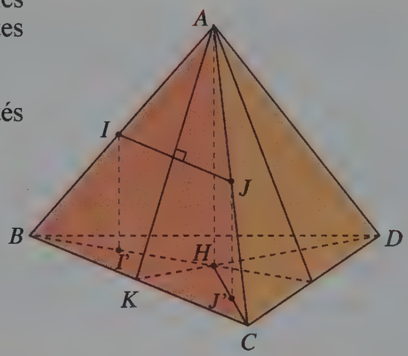
Les points I', J', H sont les projetés orthogonaux de I, J, A sur (BCD).

On a $(IJ) /\!/ (BC)$,

donc $(IJ) /\!/ (BCD)$,

et $(IJ) \perp (AK)$

donc $(I'J') \perp (HK)$.



4. ÉTUDE ANALYTIQUE

Dans ce paragraphe, le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormal.

1. Produit scalaire de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, (x, y, z) et (x', y', z') leurs coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Nous avons successivement :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$,

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'\vec{i}^2 + yy'\vec{j}^2 + zz'\vec{k}^2 + (xy' + yx')\vec{i} \cdot \vec{j} + (xz' + zx')\vec{i} \cdot \vec{k} + (yz' + zy')\vec{j} \cdot \vec{k}$

Puisque le repère est orthonormal : $\vec{i}^2 = 1$, $\vec{j}^2 = 1$, $\vec{k}^2 = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$...
Ainsi : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Notons alors que (résultats déjà rencontrés en Première) :

- $\vec{u}^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$.

COURS

Propriété 12

Si des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') dans une base orthonormale alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

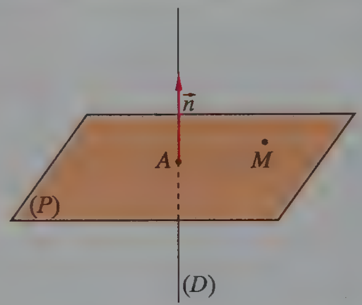
$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0.$$

2. Équation d'un plan

■ *Caractérisation géométrique d'un plan*

Soit (P) un plan défini par un point A et un vecteur $\vec{n}$ normal à (P). Le plan (P) est le plan passant par A et orthogonal à la droite de repère $(A, \vec{n})$.

Le plan (P) est donc l'ensemble des points M tels que $M = A$ ou (AM) et (D) sont orthogonales, ce qui équivaut à $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



Propriété 13

Étant donnés un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul, l'ensemble des points M tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

■ *Équation d'un plan*

• **Recherche d'une équation**

Soit (P) le plan passant par A, de coordonnées (x_0, y_0, z_0), et de vecteur normal $\vec{n}$, de coordonnées (a, b, c).

Pour tout point M de coordonnées (x, y, z) on a :

$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0,$

$M \in (P) \Leftrightarrow (x - x_0)\,a + (y - y_0)\,b + (z - z_0)\,c = 0,$

$M \in (P) \Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$

En posant $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d,$ on obtient :

$M \in (P) \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0.$

$ax + by + cz + d = 0$ est une équation du plan (P).

EXEMPLE

Le plan passant par O (donc $d = 0$) et de vecteur normal $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ a pour équation $x + y + z = 0$.

• **Réciproque**

Quel est l'ensemble (E) des points M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient l'équation :

$ax + by + cz + d = 0$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$?

Cherchons un point particulier de (E).
Puisque $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, supposons $a \neq 0$; dire qu'un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) est dans (E) signifie que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, ce qui équivaut à : $x_0 = -\dfrac{1}{a}(by_0 + cz_0 + d)$.

Le choix de y_0 et z_0 détermine une valeur de x_0 unique $\left(\text{ex. } : 0, 0, -\dfrac{d}{a}\right)$.

Alors, pour tout point M de (E) on a : $ax + by + cz + d = 0$,

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0,$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Appelons $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (a, b, c), vecteur non nul d'après l'hypothèse. Nous avons alors : $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$.
Cette équivalence prouve que (E) est le plan passant par M_0 et de vecteur normal $\vec{n}$.

Nous résumerons ainsi les résultats obtenus :

Propriété 14

> • **Tout plan (P) de l'espace admet, dans un repère orthonormal, une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c, d sont des nombres réels, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.**
>
> • **Toute équation $ax + by + cz + d = 0$, a, b, c, d nombres réels et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, est l'équation d'un plan dans un repère orthonormal, un vecteur normal à ce plan ayant pour coordonnées (a, b, c).**

EXEMPLES

• L'équation $x + 2y - z + 4 = 0$ est l'équation d'un plan admettant pour vecteur normal : $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.
Pour trouver un point de ce plan, posons $x = 0$ et $y = 0$; alors $z = 4$. Le plan passe donc par le point de coordonnées $(0 ; 0 ; 4)$.

• L'équation $x - 3z + 2 = 0$ est l'équation du plan passant par $A(-2, 0, 0)$ et de vecteur normal $\vec{i} - 3\vec{k}$.

3. Équation d'une sphère

Recherche d'une équation

Soit (S) une sphère de centre I, de coordonnées (a, b, c), et de rayon r.
Pour tout point M de coordonnées (x, y, z) on a :

$M \in (S) \Leftrightarrow IM = r$, $\quad M \in (S) \Leftrightarrow IM^2 = r^2$.

L'égalité $IM^2 = r^2$ équivaut successivement à :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = r^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad \text{en posant} \quad d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2.$$

Une équation de la sphère est donc une équation du type :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

EXEMPLE

Une équation de la sphère de centre $I(1\ ;\ -2\ ;\ 4)$ et de rayon 2 est :
$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$,
soit après réduction : $x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z+17=0$.

Réciproque

Quel est l'ensemble (E) des points M de coordonnées (x, y, z) telles que :
$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$,
où a, b, c, d sont des nombres réels ?
L'équation proposée équivaut successivement à :
$(x-a)^2-a^2+(y-b)^2-b^2+(z-c)^2-c^2+d=0$,
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-d$.
Appelons I le point de coordonnées (a, b, c).

Alors l'équation équivaut à : $IM^2=a^2+b^2+c^2-d$.

- Si $a^2+b^2+c^2-d>0$ alors (E) est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.
- Si $a^2+b^2+c^2-d=0$ alors $(E)=\{I\}$; on dit que (E) est la sphère de centre I et de rayon nul $(IM=0)$.
- Si $a^2+b^2+c^2-d<0$ alors (E) est l'ensemble vide.

Nous résumerons ainsi les résultats obtenus :

Propriété 15

- **Toute sphère de centre I, de coordonnées (a, b, c), et de rayon r a pour équation :**
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.
- **L'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient l'équation $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, où a, b, c, d sont des nombres réels, est une sphère, dont le centre a pour coordonnées (a, b, c), ou l'ensemble vide.**

EXEMPLE

L'équation $x^2+y^2+z^2-3x+2y-5z+\frac{1}{2}=0$ équivaut à :

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-1-\frac{25}{4}+\frac{1}{2}=0,$$

soit $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{5}{2}\right)^2=9$.

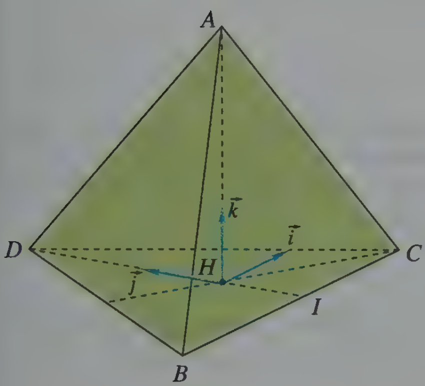
Si J est le point de coordonnées $\left(\frac{3}{2}\ ;\ -1\ ;\ \frac{5}{2}\right)$ alors l'équation donnée équivaut à $JM^2=3^2$. C'est une équation de la sphère de centre J et de rayon 3.

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Angles dans un tétraèdre

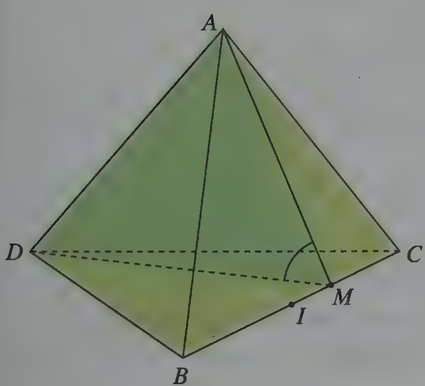
Ce TP offre, en utilisant l'outil analytique, une situation de calcul de l'angle de deux plans et de l'angle d'une droite et d'un plan.

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. On note I le milieu de $[BC]$, H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) et a la longueur des arêtes.



1 ■ *Choix d'un repère*

Compte tenu des propriétés de la figure, choisissons pour origine le point H. La nécessité de calculer des angles invite à définir un repère orthonormal $(H, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: choisissons $\vec{i}$ directeur de (BC) et $\vec{k}$ colinéaire à $\overrightarrow{HA}$ et de même sens, comme sur la figure.
Calculez les coordonnées des points B, C, D, I et A.



2 ■ *Rectiligne d'un dièdre*

Soit M un point de la droite (BC). Étudions les variations de l'angle $\widehat{AMD}$ quand M décrit (BC).
Posons : $\overrightarrow{IM} = \lambda \overrightarrow{BC}$, où λ est un nombre réel.
1° Exprimez le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD}$ en fonction de λ et a.

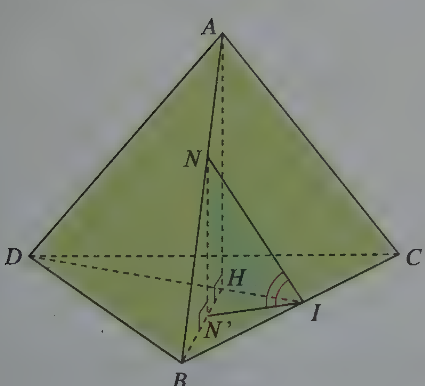
2° Vérifiez que : $\cos \widehat{AMD} = \dfrac{4\lambda^2 + 1}{4\lambda^2 + 3}$.

Ce résultat pourra être contrôlé dans le cas où :

$|\lambda| = \dfrac{1}{2}$ (M en B ou en C).

3° Calculez, à 0,1° près, l'angle $\widehat{AID}$.

4° En étudiant les variations de la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par $f(\lambda) = \dfrac{4\lambda^2 + 1}{4\lambda^2 + 3}$, démontrez que l'angle $\widehat{AMD}$ est maximal quand M est en I.
L'angle $\widehat{AID}$ est dit **rectiligne du dièdre $(A, (BC), D)$**.



3 ■ *Angle d'une droite et d'un plan*

Soit N un point de la demi-droite $[BA)$, N' son projeté orthogonal sur le plan (BCD), λ le nombre réel tel que : $\overrightarrow{BN} = \lambda \overrightarrow{BA}$.

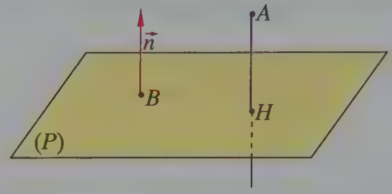
1° Démontrez que : $\cos \widehat{NIN'} = \sqrt{\dfrac{4\lambda^2 - 6\lambda + 3}{3(4\lambda^2 - 2\lambda + 1)}}$.

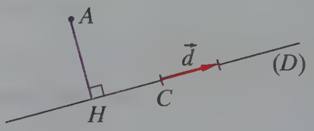
2° Soit g la fonction définie dans $\mathbb{R}^+$ par $g(\lambda) = \dfrac{4\lambda^2 - 6\lambda + 3}{4\lambda^2 - 2\lambda + 1}$.

En étudiant les variations de cette fonction g, démontrez que l'angle $\widehat{NIN'}$ est maximal quand N est en A.
Ainsi, parmi les droites du plan (BAC) passant par I, la droite (IA) est celle qui fait le plus grand angle avec sa projetée orthogonale sur le plan (BCD) : elle est dite **ligne de plus grande pente du plan (ABC) sur le plan (BCD).**

TP2 Distance d'un point à un plan ou à une droite

Par définition, la distance d'un point A à un plan (P) (respectivement : à une droite (D)) de l'espace est la distance de A à son projeté orthogonal H sur (P) (respectivement : sur (D)).





Plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour calculer ces distances : seule une méthode pour chacun des deux calculs (distance d'un point à un plan, à une droite) est proposée dans ce TP. D'autres méthodes pourront être étudiées dans les exercices.

1 ■ *Distance d'un point A à un plan (P)*

1° Étant donnés un point B de (P) et un vecteur $\vec{n}$ normal à (P), démontrez que : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$; déduisez-en que, si $\vec{n}$ est unitaire, alors : $AH=|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|$.

2° Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.
Le point A a pour coordonnées $(1\,;2\,;3)$.
Le plan (P) a pour équation : $2x+y-5z+3=0$.

a) Démontrez que le point $B(-1\,;-1\,;0)$ appartient à (P).

b) Déterminez un vecteur $\vec{n}$ unitaire et normal à (P).

c) Calculez $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}$.

d) Calculez la distance de A à (P).

2 ■ *Distance d'un point A à une droite (D) de l'espace*

1° Étant donnés un point C de (D) et un vecteur $\vec{d}$ directeur de (D), démontrez que : $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{d}=\overrightarrow{HC}\cdot\vec{d}$; déduisez-en que, si $\vec{d}$ est unitaire, alors : $AH^2=AC^2-(\overrightarrow{AC}\cdot\vec{d})^2$.

2° La droite (D) passe par le point $C(-1\,;0\,;2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{d}(1\,;-1\,;2)$ (les coordonnées étant données dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du paragraphe **1** ■ précédent).

a) Déterminez un vecteur $\vec{d}\,'$ unitaire et colinéaire à $\vec{d}$.

b) Calculez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

c) Calculez AC^2, puis $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{d}\,'$.

d) Déduisez-en la distance de A à (D).

TP3 Sphère

Ce TP propose quelques situations dans lesquelles la recherche de sphères et cercles de l'espace fournit l'occasion de calculer une distance d'un point à un plan, d'utiliser le plan médiateur d'un segment et des droites et plans perpendiculaires.

Chaque fois qu'il est nécessaire, l'espace est rapporté à un repère orthonormal.

1 ■ *Plans tangents à une sphère et parallèles à un plan donné*

Soit (S) une sphère de diamètre $[AB]$. Nous vous proposons d'écrire une équation de (S), puis une équation de chacun des deux plans tangents à (S) et parallèles à un plan donné (P).

1° Démontrez que (S) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

2° Soit I le milieu de $[AB]$. Démontrez qu'un plan (P') parallèle à (P) est tangent à (S) si, et seulement si, la distance de I à (P') est égale au rayon de (S).

3° Les points A et B sont donnés par leurs coordonnées : $A(1\,;2\,;3)$ et $B(-2\,;1\,;1)$; le plan (P) est donné par son équation : $2x + y - z + 1 = 0$.

a) Déterminez une équation de (S).

b) Calculez les coordonnées de I et le rayon de (S).

c) Utilisez la méthode du TP2 pour calculer la distance de I à (P).

d) Déterminez par leurs équations les plans tangents à (S) et parallèles à (P) ainsi que les coordonnées de leurs points de contact avec (S).

2 ■ *Sphère passant par un point donné et tangente en un point donné à un plan donné*

Soit (P) un plan, B un point de (P), A un point hors de (P). Toute sphère qui passe par A et B et est tangente à (P) est centrée sur le plan médiateur de $[AB]$ et sur la perpendiculaire en B à (P).
Réciproquement : A n'appartenant pas à (P) et B appartenant à (P), le plan médiateur de $[AB]$ n'est pas perpendiculaire à (P), donc coupe la perpendiculaire en B à (P) en un point I ; la sphère de centre I qui passe par A passe aussi par B et est tangente à (P).
On donne : $A(2\,;3\,;-1)$, $B(1\,;-1\,;2)$ et l'équation de (P) : $2(x-1)-(y+1)+3(z-2)=0$.

1° Vérifiez que A n'appartient pas à (P) et que B appartient à (P).

2° Déterminez les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et celles du milieu de $[AB]$; déduisez-en une équation du plan (π) médiateur de $[AB]$.

3° Donnez les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ unitaire et normal à (P).

4° Déterminez un nombre réel t tel que le point M qui vérifie $\overrightarrow{BM} = t\vec{n}$ appartienne au plan (π).

5° Donnez une équation de la sphère passant par A et tangente en B à (P).

3 ■ *Cercles de l'espace*

Étant donnés deux cercles de l'espace, on dit qu'ils sont cosphériques s'il existe une sphère qui les contient.
Soit (C) et (C') deux cercles de l'espace, de centres respectifs O et O', de rayons respectifs r et r'.

1° Démontrez que, s'il existe une sphère (S) qui contient (C) et (C'), alors son centre I est commun aux axes des deux cercles et son rayon R vérifie les égalités : $R^2 = IO^2 + r^2$ et $R^2 = IO'^2 + r'^2$.

2° L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, (C) est le cercle du plan (P) d'équation $2x - 3y - z - 3 = 0$, de centre $O(1\,;-1\,;2)$ et de rayon 1 ; (C') est un cercle de centre $O'(0\,;5\,;0)$ d'un plan (P') d'équation : $x + y + mz - 5 = 0$, où m est un nombre réel donné.

a) Déterminez m pour que les axes (Δ) et (Δ') de (C) et (C') se coupent.

b) Déterminez alors les coordonnées du point I commun à (Δ) et (Δ').

c) Déterminez aussi le rayon R de la sphère (S) de centre I qui contient (C).

d) La sphère (S) ainsi déterminée contient-elle le cercle (C') ?

FICHE MÉTHODE

Comment démontrer des orthogonalités dans l'espace

1 *Une droite (D) est orthogonale à une droite (D') si...*

1° Un vecteur directeur de (D) est orthogonal à un vecteur directeur de (D').

2° (D) est dans un plan orthogonal à (D').

3° Deux points A et B de (D) sont équidistants de deux points A' et B' de (D').

2 *Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) si...*

1° (D) est orthogonale à deux droites sécantes de (P).

2° (D) est parallèle à une droite (D') orthogonale à (P).

3° (D) est orthogonale à un plan (P') parallèle à (P).

4° A et B étant deux points de (D), (P) est le plan médiateur de $[AB]$.

5° Un vecteur directeur de (D) est normal à (P).

6° Un vecteur directeur de (D) est orthogonal aux deux vecteurs d'une base de (P).

3 *Un plan (P) est perpendiculaire à un plan (P') si...*

1° (P) contient une droite orthogonale à (P').

2° Un vecteur normal à (P) et un vecteur normal à (P') sont orthogonaux.

EXERCICES COMMENTÉS

Exercice 1

Énoncé

1° Vérifiez que, quels que soient les points A, B, C, D, on a :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$

2° Un tétraèdre $ABCD$ est tel que les droites (AB) et (CD) d'une part, (AC) et (BD) d'autre part soient orthogonales.
Démontrez qu'alors (AD) et (BC) sont orthogonales.

3° On appelle A' le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD). Démontrez que A' est l'orthocentre du triangle BCD.

Solution

1° Dans l'égalité demandée, le point A joue un rôle privilégié : trois vecteurs ont pour origine A. Transformons les écritures des trois autres vecteurs (par exemple : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$).
Posons : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \alpha.$

$\alpha = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB});$

$\alpha = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}.$

$\alpha = 0.$ Ce qui démontre l'égalité proposée.

2° Cette question est une application de l'égalité précédente, l'orthogonalité des droites (AB) et (CD) étant exprimée à l'aide de l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ donc par $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$

$(AB) \perp (CD)$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0;$

$(AC) \perp (BD)$ donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$

De l'égalité du **1°**, on déduit : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$ Ainsi les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.

3° Retenons le mot orthocentre, point d'intersection des hauteurs du triangle BCD. Est-il possible de démontrer que (BA') est une hauteur du triangle BCD, c'est-à-dire que $\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$? Les hypothèses relatives à (BA) et (CD) nous incitent à décomposer $\overrightarrow{BA'}$ en $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'}$.

$\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'}) \cdot \overrightarrow{CD};$

$\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{CD}.$

Or $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$
De plus, (AA') est orthogonale à (BCD), d'après la définition de A', donc (AA') est orthogonale à (CD), droite du plan (BCD). Ainsi $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$
On déduit de ces deux résultats partiels que $\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ donc $(CD) \perp (BA')$. La droite (BA') est donc une hauteur du triangle BCD.
Une démonstration analogue permettrait de démontrer que $(CA') \perp (BD)$.
Le point A' est donc l'orthocentre du triangle BCD.

Exercice 2

Énoncé

Dans un plan (P) de l'espace on considère un cercle (C) de diamètre $[AB]$. Soit (D) la droite orthogonale à (P) en A, S un point de (D) autre que A, I le projeté orthogonal de A sur (BS), M un point de (C) autre que A et B, H le projeté orthogonal de A sur (MS).

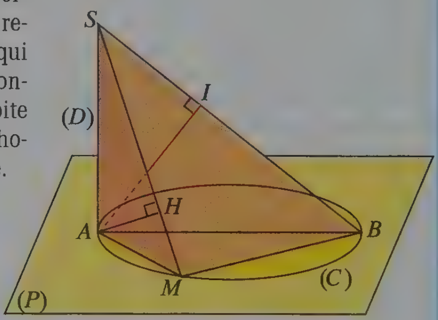
1° Démontrez que les plans (AMS) et (BMS) sont perpendiculaires.

2° Démontrez que (AH) est orthogonale au plan (BSM).

Solution

1° Plans (AMS) et (BMS)

Parmi les méthodes permettant de démontrer que deux plans sont perpendiculaires, retenons celle qui consiste à démontrer qu'une droite de l'un est orthogonale à l'autre.



Puisque M est un point du cercle (C) on a : $(MA) \perp (MB)$. De plus, (AS) est orthogonale à (P) donc à toute droite de (P), en particulier à (BM).

La droite (BM), orthogonale à deux droites (AS) et (AM) sécantes dans le plan (AMS), est orthogonale au plan (AMS).

Ainsi le plan (BMS) contient une droite, (BM), orthogonale au plan (AMS). Les deux plans (AMS) et (BMS) sont donc perpendiculaires.

2° Propriété de (AH)

Nous démontrerons que (AH) est orthogonale au plan (BMS) en démontrant qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan, les droites particulières envisageables étant (BM), (MS) et (BS). La considération de (AH) et (BM) peut être une application de la question précédente puisque (AH) est dans (ASM).
Nous savons que (BM) est orthogonale à (AMS) et la droite (AH) est une droite du plan (AMS), donc (BM) est orthogonale à (AH). De plus, par définition de H, on a : $(AH) \perp (SM)$. Orthogonale aux deux droites sécantes (BM) et (SM) du plan (BSM) la droite (AH) est orthogonale au plan (BSM).

Énoncé

Bac CE, 1987. Exercice 1.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(6\,;\,0\,;\,0)$ et $B(0\,;\,6\,;\,0)$. Faites une figure.

1° Déterminez le barycentre G du système $(O, 1)$, $(A, 2)$, $(B, 3)$. Placez-le sur la figure.

2° Soit $C(0\,;\,0\,;\,4)$. Déterminez l'ensemble (S) des points M de l'espace définis par : $(\overrightarrow{MO} + 2\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = 0$. Donnez une équation cartésienne de (S).

3° Déterminez l'intersection de (S) et du plan d'équation $x = 0$. Dessinez cette intersection sur la figure.

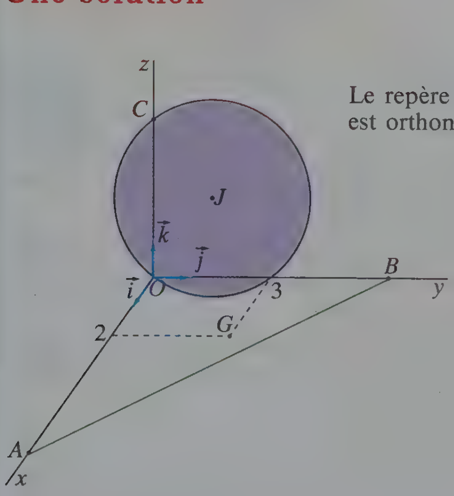
A la lecture du sujet

Cet exercice, de géométrie analytique dans l'espace, regroupe des questions concernant le barycentre d'un système de points et des déterminations analytiques (c'est-à-dire à partir d'équations cartésiennes) d'ensembles de points définis géométriquement. Pour le premier ensemble (question **2°**) un regard rapide permet de remplacer l'égalité proposée par $6\,\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ et donc de reconnaître une caractérisation de sphère.

Analyse du problème

L'énoncé invite à travailler analytiquement, dans un repère orthonormal. Il ne laisse pas de choix dans la méthode de recherche. Les résultats du cours sont donc directement utilisés : expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs, reconnaissance d'une sphère, d'un plan à partir d'une équation cartésienne, distance de deux points.

Une solution



Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormal.

1° Le point G est caractérisé par l'égalité $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{6}(\overrightarrow{OO} + 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB})$, donc :

$\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{6}(2 \cdot 6\vec{i} + 3 \cdot 6\vec{j})$ c'est-à-dire $\overrightarrow{OG} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

Les coordonnées de G sont $(2\,;\,3\,;\,0)$.

2° Soit M un point de coordonnées (x, y, z).
Quel que soit M dans l'espace, on a :

$\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{MG}$ et les coordonnées de $\overrightarrow{MG}$ sont $(2 - x,\ 3 - y,\ -z)$.

L'égalité $(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ équivaut à :

$6\,\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ soit $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

c'est-à-dire, analytiquement, à :

$(2 - x)(-x) + (3 - y)(-y) - z(4 - z) = 0.$

En développant, on obtient :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 4z = 0.$

En remarquant que $(0\,;\,0\,;\,0)$ vérifie cette équation, nous pouvons conclure que cette équation est celle d'une sphère passant par O.

Cette équation équivaut encore à :

$$(x - 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 = 1 + \frac{9}{4} + 4$$

$$(x - 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 = \frac{29}{4}.$$

(S) est donc la sphère de centre $I\left(1\,;\,\dfrac{3}{2}\,;\,2\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

3° Soit M un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z).

Ce point M appartient à (S) et au plan d'équation $x = 0$ si et seulement si ses coordonnées sont telles que $x = 0$ et $y^2 + z^2 - 3y - 4z = 0$, équation qui équivaut à :

$$\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 = \frac{25}{4}.$$

Dans le plan (yOz), de repère $(O, \vec{j}, \vec{k})$, l'ensemble (Γ) est donc le cercle de centre $J\left(\dfrac{3}{2}\,;\,2\right)$ et de rayon $\dfrac{5}{2}$.

Exercices et problèmes

Q.C.M.

Dans chacun des cas une ou plusieurs réponses sont exactes.

1 Les vecteurs dont les coordonnées suivent sont unitaires :

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .... ☐

$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .... ☐

$\left(\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ .... ☐

2 Dans l'espace, l'équation $2x - y + 3 = 0$ est celle :

d'une droite de vecteur directeur $\vec{i} + 2\vec{j}$ .... ☐

d'un plan de vecteur normal $2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ .... ☐

d'un plan de vecteur normal $2\vec{i} - \vec{j}$ .... ☐

d'un plan de base $(\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{k})$ .... ☐

3 L'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$:

est celle d'une sphère centrée sur (Ox) .... ☐

est celle d'une sphère centrée dans (yOz) .... ☐

n'est pas l'équation d'une sphère .... ☐

est celle d'une sphère de rayon 2 .... ☐

4 Les points A et B étant distincts, si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ alors :

$C = D$ .... ☐

$\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .... ☐

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux .... ☐

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires .... ☐

5 Deux plans (P) et (P') sont perpendiculaires, leur intersection est une droite (D) :

Toute droite de (P) est orthogonale à toute droite de (P') .... ☐

Une droite de (P) est orthogonale à toute droite de (P') .... ☐

Une droite de (P) non perpendiculaire à (D) est orthogonale à toute droite de (P') .... ☐

6 Soit (D) une droite de vecteur unitaire $\vec{n}$. Le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{u}$ sur (D) est :

$\vec{u} \cdot \vec{n}$ .... ☐

$(\vec{u} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ .... ☐

$(\vec{u} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u}$ .... ☐

EXERCICES ET PROBLÈMES

*Dans les exercices **7** à **37** le repère utilisé est un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.*

Orthogonalité. Distances. Angles

7 ▪ Les vecteurs dont les coordonnées suivent sont-ils orthogonaux :

1° $(1; -2; 5)$ et $\left(2; -\frac{3}{2}; -1\right)$?

2° $(-1; 3; 1)$ et $(2; 1; 5)$?

3° $(\sqrt{2}; \sqrt{3}; 0)$ et $(-\sqrt{3}; \sqrt{2}; 1)$?

8 ▪ Soit A, B, C les points de coordonnées respectives $(0; 1; 3)$, $(-5; 0; 4)$ et $(2; 2; 1)$.

1° Calculez les distances AB, BC, CA. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

2° Calculez, à un degré près, les angles du triangle ABC.

Plans

9 ▪ Déterminez une équation du plan défini par le point A de coordonnées (a, b, c) et le vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées (a', b', c') dans les cas suivants :

1° $(a, b, c) = \left(-\frac{1}{2}; 2; \frac{2}{3}\right)$, $(a', b', c') = (4; 1; -6)$.

2° $(a, b, c) = (1; 0; 1)$, $(a', b', c') = (1; -1; 0)$.

3° $(a, b, c) = \left(-1; 3; \frac{3}{4}\right)$, $(a', b', c') = (0; 2; -3)$.

4° $(a, b, c) = (0; 0; 2)$, $(a', b', c') = (0; 4; 0)$.

5° $(a, b, c) = (-1; -1; 1)$, $(a', b', c') = (3; -2; -1)$.

10 Déterminez une équation du plan médiateur du segment $[AB]$, les coordonnées des points A et B étant respectivement :

1° $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; -2\right)$, $\left(\frac{5}{2}; \frac{4}{3}; 0\right)$.

2° $(-4; 1; 7)$, $(3; 2; -5)$.

3° $(0; 1; -3)$, $(0; 1; 1)$.

11 Déterminez dans chacun des cas suivants un point et un vecteur normal au plan d'équation :

1° $x - y + z - 1 = 0$. 2° $2y - 5z + 11 = 0$.

3° $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{5}y - 2 = 0$. 4° $2x - 7 = 0$.

5° $2x + 4y - 2z = 0$. 6° $x - 2y + 3z - 6 = 0$.

12 Déterminez une équation du plan (P') passant par A de coordonnées $(1; 0; 2)$ et parallèle au plan (P) d'équation $5x - y + 3z + 2 = 0$.

13 Soit A, B, C les points de coordonnées respectives $(1; 1; 0)$, $(0; 1; 2)$, $(1; 3; -2)$. Déterminons une équation du plan (ABC).

1° Vérifiez que les points A, B, C ne sont pas alignés.

2° *Première méthode.*

a) Soit $\vec{u}$ un vecteur normal au plan (ABC), (α, β, γ) les coordonnées de $\vec{u}$. Écrivez deux égalités traduisant la définition de $\vec{u}$.

b) Déduisez-en les coordonnées d'un vecteur normal à (ABC).

c) Déterminez une équation de (ABC).

3° *Deuxième méthode*

Notons $ax + by + cz + d = 0$ une équation de (ABC).

a) Exprimez analytiquement que les points A, B, C sont des points de (ABC).

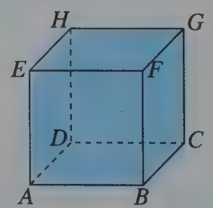
b) Résolvez le système formé par les égalités écrites au **3°** a).

c) Comparez les résultats obtenus au **2°** c) et au **3°** b).

14 Soit $ABCDEFGH$ un cube dont les arêtes mesurent 6 unités de longueur. Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est tel que $O = A$ et les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ et de même sens.

1° Vérifiez analytiquement que (AG) est orthogonale à chacun des plans (EBD) et (CFH).

2° Déterminez une équation de chacun des plans (EBD) et (CFH).



15 1° Un plan (ABC) coupe les axes de repères $(O, \vec{i})$, $(O, \vec{j})$, $(O, \vec{k})$ en A, B, C de coordonnées respectives $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$, $(0; 0; c)$ avec $abc \neq 0$. Vérifiez qu'une équation de ce plan est $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

2° Dessinez, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les intersections, avec chacun des plans de coordonnées, du plan d'équation $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} + z = 0$.

16 Dessinez dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) telles que :

$$\frac{|x|}{2} + \frac{|y|}{3} + \frac{|z|}{2} = 1.$$

17 Reprenez l'étude de l'exercice **16** avec l'équation $|x| + |y| + |z| = 3$.

18 Les plans dont les équations suivent sont-ils perpendiculaires ?

1° $x + 2y - 5z + 4 = 0$ et $2x - y + 3 = 0$.

2° $x + 2y - 5z + 4 = 0$ et $x + 2y + z - 2 = 0$.

3° $x - 3y + 2 = 0$ et $y - 2z + 1 = 0$.

4° $2y - 5z = 0$ et $3x + 5y + 2z + 1 = 0$.

Distance : point-plan

19 Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $x - 4y + 3z - 1 = 0$ et A le point de coordonnées $(1; -3; 0)$.

1° Déterminez un vecteur $\vec{u}$ normal à $(\mathcal{P})$.

2° Soit A' le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$ et t le nombre réel tel que $\overrightarrow{AA'} = t\vec{u}$. Exprimez en fonction de t les coordonnées de A'.

3° a) Calculez les coordonnées de A'.

b) Déduisez-en la distance de A à $(\mathcal{P})$.
Remarque : il n'est pas indispensable de calculer les coordonnées de A' pour trouver la distance de A à $(\mathcal{P})$. On vérifiera que la connaissance du nombre t suffit.

20 En procédant comme dans l'exercice **19**, déterminez la distance du point A, de coordonnées (a, b, c) au plan $(\mathcal{P})$ d'équation (E) dans les cas suivants :

1° $(a, b, c) = (-2, 5, 3)$, $(E) : x + y + z - 3 = 0$.

2° $(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, 3, 1\right)$, $(E) : -y + 3z + 4 = 0$.

3° $(a, b, c) = \left(2\sqrt{3}, 1, \frac{1}{2}\right)$, $(E) : \sqrt{3}x + y - 2z + 1 = 0$.

4° $(a, b, c) = (0, 0, 2)$, $(E) : x + y - 3 = 0$.

21 ■■ Déterminez les coordonnées du projeté orthogonal du point A de coordonnées (a, b, c) sur le plan $(\mathcal{P})$ d'équation (E) dans les cas suivants :

1° $(a, b, c) = (1 ; 1 ; 1)$, $(E) : x + y + z = 0$.

2° $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, $(E) : x + 2y + 3z - 1 = 0$.

3° $(a, b, c) = (1, 2, 0)$, $(E) : \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} + 1 = 0$.

22 ■■■ Soit a, b, c trois nombres réels non nuls, A, B, C les points de coordonnées respectives $(a ; 0 ; 0)$, $(0 ; b ; 0)$, $(0 ; 0 ; c)$.

1° Déterminez une équation du plan (ABC).

2° Démontrez que le projeté orthogonal O' de O sur le plan (ABC) est l'orthocentre du triangle ABC (on pourra faire une étude géométrique).

3° On note h la distance OO'. Démontrez l'égalité :
$\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Distance : point-droite

23 ■■ Soit A le point de coordonnées $(0 ; 1 ; -2)$ et $(\mathcal{D})$ la droite passant par B de coordonnées $(1 ; -1 ; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{i} + \dfrac{2}{3}\vec{j} - \vec{k}$, noté $\vec{u}$.

1° Déterminez une équation du plan passant par A et orthogonal à $(\mathcal{D})$.

2° a) Soit M un point de $(\mathcal{D})$. Posons $\overrightarrow{BM} = t\vec{u}$, t nombre réel. Exprimez les coordonnées de M en fonction de t.

b) Calculez les coordonnées du projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.

24 ■■■ Soit A le point de coordonnées $(3 ; 5 ; -2)$ et $(\mathcal{D})$ la droite passant par B de coordonnées $(2 ; 0 ; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, noté $\vec{u}$.

1° Soit M un point de $(\mathcal{D})$. Posons $\overrightarrow{BM} = t\vec{u}$, t nombre réel. Exprimez les coordonnées de M en fonction de t.

2° a) Exprimez AM^2 en fonction de t.

b) On pose $f(t) = AM^2$. Démontrez que la fonction f admet un minimum pour une valeur t_0 de t que vous déterminerez.

c) On note A' le point de $(\mathcal{D})$ tel que $\overrightarrow{BA'} = t_0\vec{u}$. Vérifiez que A' est le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$ et calculez AA'.

25 ■■■ Procédez comme dans l'exercice **24** pour calculer la distance du point A de coordonnées $(2 ; 3 ; -4)$ à la droite $(\mathcal{D})$ passant par B de coordonnées $(1 ; 1 ; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$.

26 ■■ Soit $(\mathcal{D})$ une droite de repère $(A, \vec{u})$, $\vec{u}$ vecteur unitaire, B un point se projetant orthogonalement en B' sur $(\mathcal{D})$.

1° On pose $\overrightarrow{AB'} = t\vec{u}$, t nombre réel. Démontrez que $t = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.

2° On suppose que $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{i}$, et $\vec{u} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}\vec{i} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$.

a) Vérifiez que $\vec{u}$ est unitaire.

b) Calculez t.

c) Déterminez les coordonnées de B'.

d) Calculez la distance de B à $(\mathcal{D})$.

27 ■■■ Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ les plans d'équations respectives $x + 2y - z + 1 = 0$ et $-x + y + z = 0$ et M le point de coordonnées $(0 ; 1 ; 1)$.

1° Vérifiez que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires.

2° Calculez les distances de M à chacun des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ (voir exercice **19**).

3° Déduisez-en la distance de M à la droite $(\mathcal{D})$ intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

Sphères

28 ■ Déterminez une équation de la sphère de centre I, de coordonnées (a, b, c), et de rayon r dans les cas suivants :

1° $(a, b, c) = (1, -1, 1)$ et $r = \sqrt{2}$.

2° $(a, b, c) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, -5\right)$ et $r = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

3° $(a, b, c) = (-2, 1, -4)$ et $r = \sqrt{21}$.

4° $(a, b, c) = (0, 1, 0)$ et $r = 2$.

29 ■ Déterminez une équation de la sphère de centre I de coordonnées (a, b, c), passant par le point A de coordonnées (a', b', c') dans les cas suivants :

1° $(a, b, c) = (-1 ; 0 ; 2)$, $(a', b', c') = (2 ; 4 ; -1)$.

2° $(a, b, c) = \left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{3}{2} ; \dfrac{5}{2}\right)$, $(a', b', c') = (0 ; 1 ; 1)$.

3° $(a, b, c) = (0 ; 0 ; 0)$, $(a', b', c') = (1 ; 1 ; 0)$.

4° $(a, b, c) = (0 ; 1 ; -2)$, $(a', b', c') = (3 ; 0 ; 1)$.

30 ■ Déterminez une équation de la sphère de diamètre $[AB]$, A et B ayant respectivement pour coordonnées (a, b, c) et (a', b', c') dans les cas suivants :

1° $(a, b, c) = (1 ; 0 ; 0)$, $(a', b', c') = (0 ; 1 ; 0)$.

2° $(a, b, c)=\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; 1\right)$, $(a', b', c') = \left(\frac{5}{2}; \frac{2}{3}; -1\right)$.

3° $(a, b, c)=(2; -1; 3)$, $(a', b', c')=(-2; 1; -3)$.

4° $(a, b, c) = (5; -4; 1)$, $(a', b', c') = (-1; 2; 3)$.

31 ■ Une sphère a pour centre I de coordonnées (a, b, c) et passe par le point A de coordonnées (a', b', c'). Déterminez, dans chacun des cas suivants, une équation de la sphère puis une équation du plan tangent en A à la sphère :

1° $(a, b, c) = (1; 2; -5)$, $(a', b', c') = (0; 2; -1)$.

2° $(a, b, c) = (0; 2; 0)$, $(a', b', c') = (2; 2; 0)$.

3° $(a, b, c) = (-3; 1; 5)$, $(a', b', c') = (1; 1; 1)$.

4° $(a, b, c)=\left(\frac{1}{2}; -2; \frac{5}{2}\right)$, $(a', b', c') = (-1; 0; 2)$.

32 ■ Déterminez la nature et les éléments caractéristiques (centre et rayon) de l'ensemble (E) dont une équation est :

1° $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 8z - 3 = 0$.

2° $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + 4z + 7 = 0$.

3° $x^2 + y^2 + z^2 - 3z = 0$.

4° $x^2 + y^2 + z^2 + 5x - 8 = 0$.

5° $x^2 + y^2 + z^2 + x + y = 0$.

6° $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + \frac{1}{4} = 0$.

7° $x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cos \alpha \cos \theta\, x - 2 \cos \alpha \sin \theta y - 2 \sin \alpha z - 3 = 0$,

où $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\theta \in [0; 2\pi[$.

33 ■■ Déterminez les coordonnées du centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, les sommets A, B, C, D ayant respectivement pour coordonnées :

$(-1; -1; 0)$, $(-1; 0; -2)$, $(1; 1; 0)$, $(-1; 0; 2)$.

34 ■■ Soit (P) le plan d'équation $x - 5y + z - 4 = 0$ et A le point de (P) d'abscisse 2 et d'ordonnée 1. Déterminez les équations des sphères de rayon 3 tangentes en A à (P).

35 ■■ Soit A le point de coordonnées $(-2; 3; 1)$ et (P) le plan d'équation $x + y - 5z + 1 = 0$. Déterminez une équation de la sphère de centre A tangente à (P).

Pour les exercices **36** *et* **37**, *les quatre points A, B, C, D ont respectivement pour coordonnées* $(1; 0; 2)$, $(6; 0; 0)$, $(0; 0; 5)$, $(-1; +3; -2)$.

36 ■■ Déterminez analytiquement l'ensemble des points M tels que :

1° $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$.

2° $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot (2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}) = 0$.

3° $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0$.

4° $(\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}) \cdot (2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}) = 0$.

5° $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$.

37 ■■ Déterminez analytiquement l'ensemble des points M tels que :

1° $MA^2 + MB^2 = 19$.

2° $MA^2 - MB^2 = -31$.

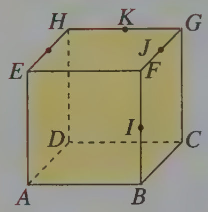
3° $2MA^2 + MC^2 = 119$.

4° $MC^2 + 3MD^2 = 10$.

5° $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 0$.

6° $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 10$.

Orthogonalité et configurations



Dans les exercices **38** *à* **40**, *le cube ABCDEFGH est celui de la figure ci-contre. Les points I, J, K sont les milieux des arêtes [BF], [FG], [GH].*

38 ■ Calculez les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BC}$:

b) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FJ}$, $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB}$.

39 ■ a) En écrivant $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, calculez $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EB}$.

b) Calculez, de même : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{JI}$, $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{JK}$.

40 ■ On définit un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ étant respectivement colinéaires à et de même sens que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$. On pose $AB = a$.
Calculez les produits scalaires :
$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KI}$, $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{HC}$.

41 ■■ Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, I, J, K, L, M, N les milieux des arêtes $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$, $[CD]$, et G le centre de gravité du triangle BCD. On pose : $AB = a$.

1° Calculez les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
Quelle propriété retrouvez-vous ?

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JN}$, $\overrightarrow{JN} \cdot \overrightarrow{JL}$, $\overrightarrow{JN} \cdot \overrightarrow{BC}$.

c) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{LD} \cdot \overrightarrow{IJ}$.

d) $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{LK}$.

2° a) Calculez AG en fonction de a.

b) Calculez les produits scalaires $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{AG}$.

42 ■■■ Soit α et β deux nombres réels, $ABCDEFGH$ le cube de l'exercice **38**, U et V les points définis par : $\overrightarrow{CU} = \alpha\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{DV} = \beta\overrightarrow{DH}$.

1° A quelle condition, portant sur α et β, les droites (AU) et (FV) sont-elles orthogonales ?

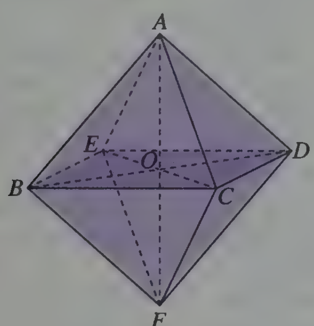
2° On pose : $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{2}{3}$. Calculez $\overrightarrow{AU} \cdot \overrightarrow{FV}$.

3° Soit γ un nombre réel et W le point défini par $\overrightarrow{AW} = \gamma\overrightarrow{AE}$. Pour quelle valeur de γ les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{HW}$ sont-ils orthogonaux ?

4° Dessinez la section du cube par le plan passant par H et perpendiculaire à (DI). (On pourra chercher l'intersection de ce plan avec (DC).)

43 ■ Le polyèdre $ABCDEF$ est un octaèdre régulier.

1° Justifiez que les plans (ABF) et (AFC) sont perpendiculaires.



2° Énoncez d'autres couples de plans perpendiculaires.

44 ■■ Le cube $ABCDEFGH$ est celui de l'exercice **38.**

1° Les plans (ACG) et (AFH) sont-ils perpendiculaires ?

2° Les plans (IJK) et (ECB) sont-ils perpendiculaires ?

45 ■■ Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, I et J les milieux des arêtes $[AB]$ et $[CD]$.

1° En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ démontrez que (AB) et (CD) sont orthogonales.

2° Démontrez que les plans (ABJ) et (CDI) sont perpendiculaires.

46 ■■ **Théorème « des trois perpendiculaires ».**
Soit (P) un plan, (D) une droite perpendiculaire à (P), O est le point commun à (D) et (P), (D') une droite de (P) ne passant pas par O ; H est le projeté orthogonal de O sur (D').

Démontrez que, pour tout point A de (D), on a $(AH) \perp (D')$.

47 ■■ Soit $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites d'un plan (P), A un point non contenu dans (P), A' le projeté orthogonal de A sur (P), B un point de $[Ox)$ autre que O. Une droite (D) du plan (P) passe par B et coupe $[Oy)$ en M. On appelle N le projeté orthogonal de A sur la droite (BM).

Déterminez le lieu de N quand (D) pivote autour de B.

48 ■■■ (P) et (P') sont deux plans perpendiculaires ; (Δ) est leur droite d'intersection ; (d) est une droite de (P), (d') est une droite de (P').

Existe-t-il une droite (D) de l'espace qui se projette orthogonalement suivant (d) sur (P) et suivant (d') sur (P') ?

49 ■■■ Deux points A et B fixes de l'espace se projettent orthogonalement sur un plan fixe (P) en A' et B'. On pose $AA' = a$, $BB' = b$, $a < b$.

Déterminez le lieu du point M de (P) tel que les angles des droites (MA) et (MB) avec le plan (P) soient égaux.

50 ■■■ Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) et le coupe en O. Une droite (D') coupe (P) en A et n'est pas orthogonale à (P).

1° Démontrez que la projetée orthogonale sur (P) de la perpendiculaire commune à (D) et (D') est la perpendiculaire en O à la projetée orthogonale de (D') sur (P).

2° Déduisez-en une méthode permettant d'obtenir la perpendiculaire commune à (D) et (D').

51 ■■■ On donne deux droites (D) et (D') non orthogonales et non coplanaires. Soit M un point de (D) et (Δ) la perpendiculaire en M à (D) qui rencontre (D').

1° Projetez orthogonalement la figure sur un plan (P) perpendiculaire à (D) ; décrivez la figure obtenue.

2° Déduisez-en une méthode permettant de trouver un point M sur (D) tel que $(\Delta) \perp (D')$.

52 ■■ Dans l'espace, on donne deux droites (D) et (D') orthogonales et non coplanaires.
Soit M un point quelconque de (D).

1° Démontrez que le projeté orthogonal de M sur (D') ne dépend pas du choix de M sur (D).

2° Soit A' le projeté orthogonal de M sur (D') et A le projeté orthogonal de A' sur (D).

a) Démontrez que, si M' est un point quelconque de (D') alors : $MA' \leqslant MM'$.

b) Démontrez que $AA' \leqslant MA'$.

Remarque : la droite (AA') est appelée **la perpendiculaire commune aux deux droites (D) et (D')** et la longueur AA' du segment $[AA']$ est la plus courte distance d'un point de (D) à un point de (D').

53 ■■ Soit (P) un plan de l'espace, A et B deux points de (P), $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$, (D) la droite passant par A et orthogonale à (P), N un point de (D) autre que A. Un point M étant choisi sur $(\mathcal{C})$, distinct de A et B, on appelle S le projeté orthogonal de A sur (NM) et R le projeté orthogonal de A sur (BN).

1° Démontrez que les plans (AMN) et (BMN) sont perpendiculaires.

2° Démontrez que le triangle ASR est rectangle.

3° Démontrez que les points B, M, R, S sont cocycliques.

54 ■■ Un trièdre (Ox, Oy, Oz) est tel que $\widehat{xOy} = \widehat{yOz} = \widehat{zOx} = 60°$, A est un point de $[Oz)$ et $OA = a$.
M est un point de $[Ox)$; N est un point de $[Oy)$, $OM = x$ et $ON = y$.

1° Calculez en fonction de a, x et y les longueurs des côtés du triangle MAN

2° a) Démontrez que, si MAN est rectangle en A alors $a(x+y) - xy = 2a^2$.

b) La réciproque est-elle vraie ?

3° a) On suppose que l'égalité de la question **2°** a) est vérifiée. Exprimez y en fonction de x ; étudiez les variations de y en fonction de x.

b) Quelles sont les portions de demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ décrites par M et N ?

55 ■■■ Soit (D) et (D') deux droites non coplanaires de l'espace ; A et B sont deux points de (D) ; A' et B' sont deux points de (D').

1° Démontrez que les plans médiateurs de $[AA']$ et $[BB']$ se coupent.

2° Démontrez que, si $AB = A'B'$, alors la droite (Δ) commune aux plans médiateurs de $[AA']$ et $[BB']$ est équidistante de (D) et (D').

56 ■■■■ **Un empilement de boules**

Trois boules (A), (B), (C) de même rayon R sont posées sur un plan horizontal (π) ; leurs centres A, B, C sont les sommets d'un triangle équilatéral. On pose $AB = x$.
Une quatrième boule (D), de centre D et de même rayon R, est posée sur les trois premières.

1° Justifiez l'inégalité $x \geqslant 2R$.

2° La boule (D) est tangente à (A), (B), (C) respectivement en A', B', C'. Démontrez que A', B', C' sont les sommets d'un triangle équilatéral situé dans un plan horizontal (π').

3° Le point D est sommet d'une pyramide régulière de base ABC. Notons h la hauteur de cette pyramide.

a) Démontrez que le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le centre O du triangle ABC.

b) Exprimez h en fonction de R et x.

c) Quelles sont les valeurs que peut prendre x ?

4° On note H la hauteur de l'empilement défini par les quatre boules.

a) Exprimez H en fonction de R et x.

b) Étudiez les variations de H en fonction de x.

4 Systèmes linéaires

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Intersections de plans 92
AP2 Les systèmes échelonnés 93

COURS

1. Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire 95
2. Exemples de résolution par la méthode du pivot de Gauss 97

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Systèmes d'équations linéaires et inconnues auxiliaires 99
TP2 Systèmes d'équations linéaires et optimisation 100
TP3 Décomposition d'un vecteur sur une base de l'espace 101
TP4 Sphères et systèmes linéaires 103

FICHE MÉTHODE

FICHE MÉTHODE Comment résoudre simplement un système d'équations linéaires 104

EXERCICES COMMENTÉS 104

LE JOUR DU BAC 106

EXERCICES ET PROBLÈMES 107

objectifs

- Acquérir les notions de système échelonné et d'opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire.
- Mettre en place, sur des exemples, la méthode du pivot de Gauss.
- Utiliser des systèmes d'équations ou d'inéquations linéaires pour résoudre des problèmes d'optimisation.
- Pratiquer la résolution de systèmes linéaires, par de nombreux exemples, souvent de nature géométrique.

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Intersections de plans

Le but de cette activité est de résoudre des problèmes d'intersections de plans à l'aide de systèmes d'équations linéaires, et de retrouver les différents cas possibles (solution unique, pas de solution, infinité de solutions).

1 ■ *Intersection de trois plans*

L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit (P_1), (P_2), (P_3) trois plans d'équations cartésiennes respectives :

$x - y - z + 3 = 0 \quad (P_1)$; $\qquad 2x - 3y + z + 6 = 0 \quad (P_2)$;

$5x + y - 4z - 4 = 0 \quad (P_3)$.

1° Montrez qu'un point $M(x, y, z)$ est commun aux trois plans (P_1), (P_2), (P_3) si et seulement si le triplet (x, y, z) est solution d'un système linéaire (S), que vous écrirez.

2° Résolvez le système (S) par la méthode de votre choix (combinaisons linéaires ou substitution).
Déduisez-en que les trois plans (P_1), (P_2), (P_3) ont un unique point commun, noté A.

2 ■ *Un quatrième plan...*

Soit (P_4) le plan d'équation cartésienne $\quad -y + 3z + 1 = 0$.
S'il existait un point appartenant aux trois plans (P_1), (P_2), (P_4), quel serait le système vérifié par les coordonnées (x, y, z) de ce point ? En considérant les équations de ce système associées à (P_1) et (P_2) d'une part, et celle associée à (P_4) d'autre part, montrez que ce système n'a pas de solution. Que concluez-vous ?

3 ■ *Un cinquième plan...*

Soit (P_5) le plan d'équation $\quad 7x - 8y - 4z + 21 = 0$.
Cherchons à nouveau l'intersection éventuelle des plans (P_1), (P_2), (P_5).

1° Soit $M(x, y, z)$ un point commun à ces trois plans.
Écrivez le système (S') que doit vérifier (x, y, z).
Montrez que les solutions de (S') peuvent se mettre sous la forme $(4z - 3, 3z, z)$, où z est un nombre réel quelconque. On dit alors que x et y sont exprimés en fonction du paramètre z.
(S') a donc une infinité de solutions.

2° Soit Ω le point de coordonnées $(-3, 0, 0)$.
Montrez que M est commun à (P_1), (P_2), (P_5) si et seulement s'il existe un nombre réel z tel que $\overrightarrow{\Omega M} = z\vec{u}$ avec $\vec{u}$ vecteur de coordonnées $(4, 3, 1)$.
Montrez alors que (P_1), (P_2), (P_5) ont en commun une droite (D), et prouvez, sans calcul, que le point A appartient à la droite (D).

3° On note (L_1) la 1^re ligne du système (S') associée à (P_1), (L_2) la 2^e associée à (P_2), (L_3) la 3^e associée à (P_5).
Écrivez la ligne qui serait obtenue en ajoutant à (L_2) 5 fois la ligne (L_1) (on note cette ligne $(L_2) + 5(L_1)$). Que remarquez-vous ? On dit alors que (L_3) est **combinaison linéaire** des lignes (L_1) et (L_2).

4° Sans aucun calcul supplémentaire, déterminez l'intersection des plans (P_1), (P_2), (P_3) et (P_5).

4 ■ *Un sixième plan...*

1° Soit (Q_λ) un plan dont l'équation cartésienne serait $(L_2) + \lambda(L_1)$, λ réel. Sans aucun calcul, que pouvez-vous dire de l'intersection de (P_1), (P_2) et (Q_λ) ? Écrivez une équation cartésienne de (Q_λ).

2° Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle le plan (Q_λ) est le plan d'équation $-y + 3z = 0$? On notera (R) le plan obtenu.
Montrez que (P_4) est strictement parallèle à (R). Justifiez alors le résultat de la question **2** ■.

AP2 Les systèmes échelonnés

L'objectif de cette activité est d'observer la facilité de résolution d'un système à inconnues échelonnées, et de voir des exemples simples permettant de s'y ramener.

1 ■ *Exemple de système échelonné*

Soit (S) le système d'équations linéaires d'inconnues (x, y, z, t) :

$$(S)\quad \begin{cases} x + 4y - 6z + t = 1 & (L_1) \\ \quad 3y + z - 2t = 1 & (L_2) \\ \quad\quad -z + t = 3 & (L_3) \\ \quad\quad\quad 4t = 8 & (L_4). \end{cases}$$

On note (L_1), (L_2), (L_3), (L_4) les lignes de ce système.

1° Pour résoudre (S), par quelle équation (ou ligne), allez-vous commencer ?

2° Résolvez alors (S) de proche en proche. On dit que (S) est un système échelonné, à quatre équations et quatre inconnues.

3° Soit (S') le système : $\begin{cases} x + 4y - 6z + t = 1 & (L_1') \\ \quad 3y + z - 2t = 1 & (L_2') \\ \quad\quad -z + t = 3 & (L_3') \\ \quad\quad\quad t = 2 & (L_4'). \end{cases}$

Résolvez ce système. Que remarquez-vous ? Comparez (L_4) et (L_4').
(S') est obtenu en remplaçant la ligne (L_4) de (S) par la ligne $\frac{1}{4}(L_4)$. On note cette transformation : $(L_4) \leftarrow \frac{1}{4}(L_4)$. (On met $\frac{1}{4}(L_4)$ à la place de (L_4).)
Cette modification a transformé le système (S) en un système équivalent, puisque (S) et (S') ont même ensemble de solutions.

2 ■ *Comment se ramener à un système échelonné*

Soit (S_1) le système : $\begin{cases} x + 4y - 6z + t = 1 & (L_1) \\ x + 7y - 5z - t = 2 & (L_2) \\ \quad 6y + z - 3t = 5 & (L_3) \\ x - 8y - 8z + 8t = -7 & (L_4). \end{cases}$

Nous allons chercher à ramener (S_1) à un système échelonné à quatre équations et quatre inconnues.

1° Conservons l'équation (L_1), et remplaçons (L_2) par $(L_2) - (L_1)$: ainsi le coefficient de x devient zéro.
On note cette opération : $(L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1)$ (on met $(L_2) - (L_1)$ à la place de (L_2)).
Écrivez le nouveau système obtenu.

Quelle transformation devez-vous faire subir à (L_4) pour qu'elle ne contienne plus x ?

Vérifiez alors que le système obtenu est :

$$\begin{cases} x + 4y - 6z + t = 1 & (L_1) \\ \quad 3y + z - 2t = 1 & (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1) \\ \quad 6y + z - 3t = 5 & (L_3) \\ -12y - 2z + 7t = -8 & (L_4) \leftarrow (L_4) - (L_1). \end{cases}$$

2° Pour faire disparaître y dans (L_3) nous pouvons effectuer l'opération : $(L_3) \leftarrow (L_3) - 2(L_2)$ (on met $(L_3) - 2(L_2)$ à la place de (L_3)).
De même cherchons à faire disparaître y dans (L_4). Quelle transformation allez-vous faire subir à cette ligne ?

Vous obtenez alors le système :

$$\begin{cases} x + 4y - 6z + t = 1 \\ \quad 3y + z - 2t = 1 \\ \quad - z + t = 3 \\ \quad 2z - t = -4. \end{cases}$$

Inscrivez les opérations effectuées en face de chaque ligne de ce système.

3° Terminez en faisant le même type d'opérations pour éliminer z dans la dernière ligne. Quelle est alors la solution obtenue ?
Vérifiez que ce quadruplet solution est solution de (S_1).

3 ■ *Système ayant plus d'inconnues que d'équations*

1° Soit (S_2) le système :

$$\begin{cases} x + 4y - 6z + t + \omega = 1 \\ x + 7y - 5z - t + 2\omega = 2 \\ \quad 6y + z - 3t + 5\omega = 5 \\ x - 8y - 8z + 8t - 7\omega = -7. \end{cases}$$

a) Combien (S_2) a-t-il d'inconnues et d'équations ? Expliquez alors pourquoi la méthode précédente n'a aucune chance d'aboutir à un système échelonné ayant même nombre d'équations que d'inconnues.

b) Nous constatons que les coefficients de x, y, z, t sont les mêmes que dans le système précédent. Effectuez alors les mêmes opérations que dans la question **2 ■**, et montrez alors que le système (S_2) est transformé en :

$$(S_2') \begin{cases} x + 4y - 6z + t + \omega = 1 \\ \quad 3y - z - 2t + \omega = 1 \\ \quad - z + t + 3\omega = 3 \\ \quad t + 2\omega = 2. \end{cases}$$

On dit encore que (S_2') est un système échelonné, mais cette fois il comporte plus d'inconnues que d'équations.

2° Montrez que (S_2') est équivalent à :

$$\begin{cases} x + 4y - 6z + t = 1 - \omega \\ \quad 3y + z - 2t = 1 - \omega \\ \quad - z + t = 3 - 3\omega \\ \quad t = 2 - 2\omega. \end{cases}$$

Montrez alors que (S_2') admet une infinité de solutions, que vous exprimerez en fonction de ω. On dit que ω est un paramètre ; on admet ici que les transformations effectuées sur (S_2) l'ont transformé en un système équivalent (on le démontrera en cours). Donnez alors les solutions de (S_2).

4 ■ *Conclusion de cette étude*

Nous avons transformé chacun des systèmes précédents en systèmes échelonnés, que nous avons su résoudre simplement, quitte à choisir certaines inconnues comme paramètres.
Ce sera le principe de la *méthode de Gauss*.

COURS

1. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES LIGNES D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

1. Notion de système d'équations linéaires

Définition 1

Soit n et p deux nombres entiers naturels non nuls.
On appelle système d'équations linéaires à p inconnues $x_1, x_2, ..., x_p$ et n équations, le système :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_p = b_n. \end{cases}$$

Les $a_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p)$ sont des nombres réels (ou complexes), les nombres b_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ également.
Ces nombres b_i constituent le second membre de (S).

La résolution d'un tel système est la recherche des p-uplets $(x_1, x_2, ..., x_p)$ vérifiant les équations de (S).
On note (L_1), (L_2), ..., (L_n) les n lignes (ou équations) constituant le système.
Remarquons que $a_{i,j}$ est le coefficient de l'inconnue x_j dans la ligne (L_i).

2. Opérations élémentaires sur les lignes

- **Multiplication par un nombre réel non nul**

Soit k un réel non nul, (S) le système : $(S) \quad \begin{cases} (L_1) \\ (L_2) \\ \vdots \\ (L_n) \end{cases}$,
et (L_i) la $i^{\text{ème}}$ ligne du système (S) $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

$$a_{i,1}x_1 + ... + a_{i,p}x_p = b_p$$

équivaut à $k(a_{i,1}x_1 + ... + a_{i,p}x_p) = kb_p$, puisque k est non nul.
La ligne (L_i) peut donc être remplacée par la ligne $k(L_i)$ sans que l'ensemble des solutions du système soit modifié.
On note cette transformation par le codage suivant :

$(L_i) \leftarrow k(L_i)$ (on met $k(L_i)$ à la place de (L_i)).

Ceci nous permet, par exemple, de simplifier une équation par un facteur commun à tous les coefficients.

- **Échange de deux lignes**

Il est clair qu'échanger deux lignes (L_i) et (L_j) d'un système (S) ne change pas l'ensemble des solutions de (S). On note cette transformation :

$(L_i) \leftrightarrow (L_j)$ (on met (L_j) à la place de (L_i) et réciproquement).

En répétant cette opération, on peut donc permuter les lignes de manière quelconque.

Addition à une ligne d'un multiple d'une autre
Soit λ un nombre réel, i et j deux indices distincts.
Considérons le système d'équations formé par les deux lignes (L_j) et (L_i).

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ une solution de $\begin{cases}(L_j)\\(L_i)\end{cases}$ $(j \neq i)$.

On a alors : $\begin{cases}a_{j,1}\alpha_1 + ... + \alpha_{j,p}\alpha_p = b_j\\ a_{i,1}\alpha_1 + ... + a_{i,p}\alpha_p = b_i.\end{cases}$

Alors $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ vérifie aussi :
$a_{i,1}\alpha_1 + ... + a_{i,p}\alpha_p + \lambda(a_{j,1}\alpha_1 + ... + a_{j,p}\alpha_p) = b_i + \lambda b_j$,
correspondant à l'équation que l'on peut noter $(L_i) + \lambda(L_j)$.

Réciproquement : soit $(\beta_1, ..., \beta_p)$ vérifiant le système $\begin{cases}(L_j)\\(L_i) + \lambda(L_j)\end{cases}$ $(j \neq i)$.

$(\beta_1, ..., \beta_p)$ vérifie $\begin{cases}a_{j,1}\beta_1 + ... + a_{j,p}\beta_p = b_j & (1)\\ (a_{i,1} + \lambda a_{j,1})\beta_1 + ... + (a_{i,p} + \lambda a_{j,p})\beta_p = b_i + \lambda b_j. & (2)\end{cases}$

Multiplions (L_j) par λ : $\lambda a_{j,1}\beta_1 + ... + \lambda a_{j,p}\beta_p = \lambda b_j$.
Retranchons à (2) ; on a alors : $a_{i,1}\beta_1 + ... + a_{i,p}\beta_p = b_i$, soit la vérification de la ligne (L_i). $(\beta_1, ..., \beta_p)$ vérifie alors $\begin{cases}(L_j)\\(L_i).\end{cases}$

Le système $\begin{cases}(L_j)\\(L_i)\end{cases}$ et le système $\begin{cases}(L_j)\\(L_i) + \lambda(L_j)\end{cases}$ ont donc les mêmes solutions.

Le système $\begin{cases}(L_1)\\ \vdots\\ (L_j)\\ (L_i)\\ \vdots\\ (L_n)\end{cases}$ et le système $\begin{cases}(L_1)\\ \vdots\\ (L_j)\\ (L_i) + \lambda(L_j)\\ \vdots\\ (L_n)\end{cases}$ ont donc aussi même ensemble de solutions.

On note cette transformation :

$(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_j)$ (on met $(L_i) + \lambda(L_j)$ à la place de (L_i)).

Définition 2

On appelle opération élémentaire sur les lignes d'un système d'équations linéaires l'une de ces trois opérations :
(1) échange $(L_i) \leftrightarrow (L_j)$,
(2) multiplication par un réel non nul $(L_i) \leftarrow k(L_i)$,
(3) transformation $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_j)$ $(i \neq j)$.

Propriété

Toute opération élémentaire sur les lignes d'un système d'équations linéaires transforme ce dernier en un système ayant même ensemble de solutions. On dit que ces deux systèmes sont équivalents.

□ *Remarque.* On peut composer les deux opérations $(L_i) \leftarrow k(L_i)$ et $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_j)$. On obtient alors : $(L_i) \leftarrow k(L_i) + \lambda(L_j)$ avec k non nul. Ceci est une combinaison linéaire des lignes (L_i) et (L_j). Il faut alors bien prendre soin d'avoir un coefficient k non nul, pour éviter de perdre la ligne (L_i) du système.

COURS

2. EXEMPLES DE RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

Le mathématicien allemand Karl Friedrich Gauss (1777-1855).

L'objectif de la méthode du pivot de Gauss est de ramener, à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes d'un système d'équations linéaires, la résolution d'un système à celle d'un système échelonné.

1. Exemple 1

Soit (S) le système : $\begin{cases} x + 2y + z + 2t = -1 & (L_1) \\ 2x + y - z - t = 8 & (L_2) \\ x + y + 3z + t = -2 & (L_3) \\ -x + 2y - z + 4t = -7 & (L_4). \end{cases}$

▪ Nous voulons faire disparaître x des équations (L_2), (L_3), (L_4). En effet le coefficient de x dans (L_1) est simple, nous allons donc garder x dans (L_1), et faire les transformations :

$(L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1)$; $(L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1)$; $(L_4) \leftarrow (L_4) + (L_1)$.

Le coefficient de x dans (L_1) sera appelé le **1er pivot de la résolution :** c'est lui qui nous sert à éliminer x dans les équations suivantes.

Le système équivalent obtenu est alors : $\begin{cases} x + 2y + z + 2t = -1 & \\ -3y - 3z - 5t = 10 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \\ -y + 2z - t = -1 & (L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1) \\ 4y + 6t = -8 & (L_4) \leftarrow (L_4) + (L_1). \end{cases}$

▪ Nous allons itérer ce procédé sur y.
Nous avons intérêt à échanger (L_2) et (L_3), pour pouvoir choisir comme 2e pivot le nouveau coefficient de y, soit -1.
Remarquons que la ligne (L_4) admet 2 comme facteur commun aux coefficients, nous pouvons donc simplifier par l'opération : $(L_4) \leftarrow \frac{1}{2}(L_4)$.

Le système est alors transformé en le système équivalent suivant : $\begin{cases} x + 2y + z + 2t = -1 & \\ -y + 2z - t = -1 & (L_2) \leftrightarrow (L_3). \\ -3y - 3z - 5t = 10 & \\ 2y + 3t = -4 & (L_4) \leftarrow \frac{1}{2}(L_4) \end{cases}$

▪ Faisons alors les transformations élémentaires : $(L_3) \leftarrow (L_3) - 3(L_2)$, $(L_4) \leftarrow (L_4) + 2(L_2)$. Cela fera disparaître y dans (L_3) et (L_4).

Le système obtenu est alors : $\begin{cases} x + 2y + z + 2t = -1 \\ -y + 2z - t = -1 \\ -9z - 2t = 13 \\ 4z + t = -6. \end{cases}$

▪ Cherchons à faire disparaître z dans (L_4) ; nous pouvons faire : $(L_4) \leftarrow (L_4) + \frac{4}{9}(L_3)$, ou, pour éviter les fractions : $(L_4) \leftarrow 9(L_4) + 4(L_3)$.
Le pivot choisi est ici le coefficient -9 de z dans (L_3).

Le système devient alors : $\begin{cases} x + 2y + z + 2t = -1 \\ -y + 2z - t = -1 \\ -9z - 2t = 13 \\ t = -2. \end{cases}$

■ Résolvons de proche en proche ce dernier système, qui est échelonné.

(S) équivaut alors à $\begin{cases} t = -2 \\ z = -1 \\ y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$, et a donc une solution unique, le quadruplet (2, 1, − 1, 2).

□ *Remarque.* Ce qui permet d'appliquer la méthode précédente, dite du pivot de Gauss, est son caractère itératif. Lorsque le travail est fait sur x, on est dans une situation analogue sur y, et l'on peut continuer les mêmes opérations élémentaires. C'est cet aspect algorithmique qui rend cette méthode utile en programmation.

2. Exemple 2

Soit (S) le système : $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$

Remarquons que (S) a plus d'inconnues que d'équations, donc ne peut avoir une solution unique.

■ Éliminons x_1 en choisissant d'utiliser (L_1), et en faisant donc les opérations élémentaires :

$(L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1)$; $(L_3) \leftarrow (L_3) - 2(L_2)$; $(L_4) \leftarrow (L_4) - 3(L_1)$.

(S) devient : $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 & \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 1 & (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1) \\ -x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 2 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 2(L_2) \\ 2x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 & (L_4) \leftarrow (L_4) - 3(L_1). \end{cases}$

■ Itérons le procédé avec x_2, en prenant donc comme pivot le coefficient 1 de x_2 dans la ligne (L_2), et en faisant les transformations :

$(L_3) \leftarrow (L_3) + (L_2)$; $(L_4) \leftarrow (L_4) - 2(L_2)$.

(S) est alors équivalent à : $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 & \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 1 & \\ x_4 + 2x_5 = 3 & (L_3) \leftarrow (L_3) + (L_2) \\ -3x_4 + 2x_5 = -1 & (L_4) \leftarrow (L_4) - 2(L_2). \end{cases}$

Remarquons alors que x_3 a déjà disparu de (L_3) et (L_4). Nous n'aurons donc pas besoin de pivot relatif à l'inconnue x_3.

■ Continuons avec x_4, en faisant la transformation : $(L_4) \leftarrow (L_4) + 3(L_3)$.

(S) est alors transformé en le système équivalent suivant :

$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_4 + 2x_5 = 3 \\ 8x_5 = 8 \end{cases}$ équivalent à $\begin{cases} x_5 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_2 = 1 - 2x_3 \\ x_1 = -1 + 3x_3. \end{cases}$

Le système (S) a donc une infinité de solutions, obtenues en fonction du paramètre x_3. Ce sont les 5-uplets : $(-1 + 3x_3, 1 - 2x_3, x_3, 1, 1)$, x_3 réel.

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Systèmes d'équations linéaires et inconnues auxiliaires

Le but de ce TP est de montrer comment l'introduction d'une inconnue auxiliaire peut simplifier la résolution d'un système d'équations linéaires, et éviter d'utiliser la méthode de Gauss.

1° *a*) Résolvez le système (S) suivant, par la méthode de Gauss :

$$(S)\quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

b) On pose $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Montrez que (S) est équivalent à :

$$\begin{cases} s - 2x_1 = 0 \\ s - 2x_2 = 2 \\ s - 2x_3 = 4 \\ s - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

En additionnant les lignes, déterminez s. Retrouvez alors le résultat de la question précédente.

2° Plus généralement, soit (S_1) le système d'équations linéaires :

$$(S_1)\quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + \quad \dots \quad + x_n = -n \\ x_1 - x_2 + x_3 + \dots \quad + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + \dots \quad + x_n = 4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} - x_n = 2(n-1). \end{cases}$$

En introduisant l'inconnue auxiliaire $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, et en procédant comme dans **1°** *b*), trouvez un système équivalent à (S_1).
Additionnez les lignes de ce système, et déterminez $x_1, x_2, \dots, x_n$.

3° Soit (S_2) le système d'équations linéaires :

$$(S_2)\quad \begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(on suppose que λ est un nombre réel distinct de un).

a) Résolvez le système (S_2) par la méthode de Gauss.
b) Introduisez $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
Donnez alors un système utilisant s et équivalent au système (S_2).
Discutez alors, suivant les valeurs de λ, la résolution du système (S_2).

Remarquons que :

> **Dans tous ces systèmes, les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ jouent des rôles symétriques, comme dans la variable $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.**
> **Nous utiliserons cette transformation lorsque les équations s'écrivent plus simplement en fonction de s.**

TP2 Systèmes d'équations linéaires et optimisation

Rappel. Nous avons établi en classe de Première les résultats suivants :

• Si (S) est le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$ ce système a une solution unique si, et seulement si, $ab' - a'b$ est non nul. Si $ab' - a'b = 0$, soit le système a une infinité de solutions, soit il n'en a aucune.

• Soit (a, b) distinct de $(0, 0)$, (D) la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
Cette droite (D) partage le plan en deux demi-plans sur lesquels $f(x, y) = ax + by + c$ garde un signe constant.

Nous allons dans ce TP appliquer ces résultats à des inéquations linéaires et des problèmes d'optimisation.

1 ■ *Polygone des contraintes et profit maximal*

Un industriel fabrique deux sortes de produits, P_1 et P_2. Chacun de ces produits utilise des matières premières M_1, M_2, M_3. Son approvisionnement par semaine est de 180 kg pour M_1, 80 kg pour M_2, 120 kg pour M_3.

Pour fabriquer le produit P_1, il faut : 1 kg de M_1, 1 kg de M_2, 2 kg de M_3.
Pour le produit P_2, il faut : 3 kg de M_1, 1 kg de M_2, 1 kg de M_3.
L'industriel va fabriquer x produits P_1 et y produits P_2. Le profit réalisé par produit P_1 est de 20 F, le profit réalisé par produit P_2 de 30 F.

1° Écrivez la valeur $f(x, y)$ du profit réalisé pour x produits P_1 et y produits P_2.

2° Écrivez les contraintes dues aux quantités de matières premières M_1, M_2, M_3.

3° L'industriel cherche à obtenir le profit maximal.
Montrez que les contraintes auxquelles il a à faire face sont :

$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 180 \\ x + y \leqslant 80 \\ 2x + y \leqslant 120. \end{cases} \quad x, y \text{ nombres entiers positifs.}$$

Représentez dans le plan l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} x + 3y \leqslant 180 \\ x + y \leqslant 80 \\ 2x + y \leqslant 120 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{Cet ensemble s'appelle « polygone des contraintes ».}$$

4° Représentez sur le même dessin la droite (D) de profit 1 200.
Que pouvez-vous dire de (D_k), droite de profit k, par rapport à (D) ?

En « balayant » le polygone des contraintes par la droite (D_k) suivant les valeurs de k, trouvez graphiquement le point $M(x, y)$ pour lequel le profit $f(x, y)$ est maximal. Calculez alors le profit correspondant.

2 ■ Utilisation de systèmes d'équations linéaires

On se propose de démontrer rigoureusement que c'est en fabriquant 30 produits P_1 et 50 produits P_2 que l'industriel réalise le meilleur profit.
Il n'est pas facile de résoudre des inéquations, mais il est beaucoup plus simple de résoudre des systèmes d'équations linéaires.

1° Montrez que les contraintes de l'industriel sont équivalentes à l'existence de x_1, x_2, x_3, tels que :

$$\begin{cases} x + 3y + x_1 = 180 \\ x + y + x_2 = 80 \\ 2x + y + x_3 = 120, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{avec } x, y \text{ nombres entiers positifs,} \\ \text{et } \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0. \end{array}$$

2° Soit (S) le système $\begin{cases} x + 3y + x_1 = 180 \\ x + y + x_2 = 80 \\ 2x + y + x_3 = 120. \end{cases}$

(S) est un système d'équations linéaires à inconnues x, y, x_1, x_2, x_3.
Résolvez-le en choisissant comme paramètres x_1 et x_2.
Calculez $f(x, y)$ en fonction de x_1 et x_2.
Montrez alors que $f(x, y)$ est maximal si, et seulement si, x_1 et x_2 sont nuls.
Calculez alors x, y, et x_3, et vérifiez que x_3 est bien positif, x et y sont bien des entiers naturels.
Retrouvez alors le résultat constaté intuitivement sur le graphique.

TP3 Décomposition d'un vecteur sur une base de l'espace

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne un repère de l'espace.

1 ■ Bases quelconques

1° On définit les vecteurs : $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{J} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{K} = -4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$.
Ces vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vérifient donc le système :

$$(S) \begin{cases} \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \vec{I} & (L_1) \\ 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = \vec{J} & (L_2) \\ -4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} = \vec{K} & (L_3). \end{cases}$$

On se propose d'exprimer $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$, si cela est possible.
Nous allons pour cela effectuer des opérations élémentaires sur les lignes du système (S).

a) Écrivez le système $\begin{cases} (L_1) \\ (L_2) - 2(L_1) \\ (L_3) + 4(L_1). \end{cases}$

Que remarquez vous ? Continuez jusqu'à obtenir un système échelonné en $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

b) Calculer alors $\vec{k}$, puis $\vec{j}$ et $\vec{i}$, en fonction de $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$.

2° Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque, de coordonnées (x, y, z) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:
$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

a) Exprimez $\vec{u}$ en fonction de $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$.

b) Montrez alors qu'il existe un triplet unique (X, Y, Z) de réels tels que $\vec{u} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$.

$(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ constitue une **base de l'espace.**

c) Calculez X, Y, Z lorsque $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

2 ■ *Bases orthonormales*

On suppose cette fois le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal.

Soit $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ définis par :

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}); \quad \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}); \quad \vec{K} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}).$$

1° Montrez que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ constitue une base orthonormale.

2° En travaillant comme dans la première partie, exprimez $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$.
Calculez les produits scalaires $\vec{i} \cdot \vec{I}$, $\vec{i} \cdot \vec{J}$, $\vec{i} \cdot \vec{K}$. Que remarquez-vous ?

3° Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Le vecteur $\vec{u}$ se décompose de manière unique sous la forme : $\vec{u} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$.
Calculez $\vec{u} \cdot \vec{I}$, $\vec{u} \cdot \vec{J}$, $\vec{u} \cdot \vec{K}$, en fonction de x, y, z et en fonction de X, Y, Z.
Exprimez alors X, Y, Z en fonction de x, y, z.

4° Soit M un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Donnez ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

5° Soit t un nombre réel, $M(t)$ le point de coordonnées, dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos t + \dfrac{1}{\sqrt{6}} \sin t \\[2ex] y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos t + \dfrac{1}{\sqrt{6}} \sin t \\[2ex] z = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos t - \dfrac{2}{\sqrt{6}} \sin t. \end{cases}$$

Exprimez $\overrightarrow{OM(t)}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.
Quel est l'ensemble des points $M(t)$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$?

6° Soit t un nombre réel, $P(t)$ le point de coordonnées, dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} t + \dfrac{1}{\sqrt{2}} t^2 \\[2ex] y_1 = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} t - \dfrac{1}{\sqrt{2}} t^2 \\[2ex] z_1 = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} t. \end{cases}$$

Soit $\Omega(1, -1, 2)$. Exprimez $\overrightarrow{\Omega P(t)}$ en fonction de $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.
Montrez alors que l'ensemble des points $P(t)$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, est une parabole du plan $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$.

TP4 Sphères et systèmes linéaires

Le but de ce TP est de montrer un exemple d'utilisation de systèmes linéaires en géométrie.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal, $A(4, 4, 5)$, $B(1, 1, 7)$, $C(6, 3, 4)$, $D(8, 1, 0)$ quatre points de l'espace.

1° Vérifiez que les quatre points A, B, C, D ne sont pas coplanaires. Ils définissent donc le tétraèdre $ABCD$.

2° Montrez qu'un point Ω de l'espace est équidistant de A, B, C, D si, et seulement si, il appartient aux trois plans médiateurs suivants : le plan (P), médiateur de $[AB]$, le plan (Q), médiateur de $[AC]$, le plan (R), médiateur de $[AD]$.

3° On cherche à écrire une équation de la sphère (Σ) circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Elle est déterminée par son centre $\Omega(x, y, z)$, et son rayon ΩA ($= \Omega B = \Omega C = \Omega D$).

a) Écrivez les équations respectives des plans (P), (Q), (R).

b) Montrez alors que les coordonnées de Ω vérifient un système linéaire (S) à trois équations.
Résolvez le système (S). Calculez alors la distance ΩA et écrivez une équation de la sphère (Σ).

4° On se propose de retrouver les coordonnées de Ω et l'équation de (Σ) par une autre méthode.
On sait que l'équation d'une sphère est de la forme :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ où a, b, c, d sont des nombres réels.

a) Montrez que l'appartenance des points A, B, C, D à (Σ) équivaut à un système linéaire (S') vérifié par le quadruplet (a, b, c, d).

b) Résolvez le système (S') et retrouvez les résultats de la question **3°**.

5° Reprenez le problème avec les points $A'(0, 4, -1)$, $B'(-2, 4, -5)$, $C'(1, 1, -5)$, $D'(1, 0, -4)$ et déterminez une équation de la sphère circonscrite au tétraèdre $A'B'C'D'$.

FICHE MÉTHODE

Comment résoudre simplement un système d'équations linéaires

Si le système est « 2 × 2 », utilisez les méthodes de substitution ou de combinaisons linéaires.
Si le système comporte des fractions, utilisez la transformation $(L_i) \leftarrow k(L_i)$ $(k \neq 0)$ pour avoir des coefficients entiers.
Simplifiez toute équation par tout facteur commun non nul des coefficients.
Choisissez comme première équation celle où le coefficient de la première inconnue x est le plus simple. Les transformations $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_1)$ en seront facilitées. On intervertira éventuellement pour cela des équations.
Si la transformation $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_j)$ comporte un λ fractionnaire, faites plutôt une combinaison linéaire : par exemple, au lieu de calculer $(L_2) - \dfrac{2}{3}(L_1)$, calculez $3(L_2) - 2(L_1)$.
Vérifiez éventuellement les solutions en les reportant dans le système initial.
Si les inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$ jouent des rôles symétriques, introduisez éventuellement l'inconnue auxiliaire $s = x_1 + x_2 + ... + x_n$, si cela simplifie le système.

EXERCICES COMMENTÉS

Exercice 1

Énoncé

Résolvez le système d'équations linéaires (S) :

$$(S)\begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 5 \\ x + 3y + 5z - 2t = 3 \\ x + 5y - 9z + 8t = 1 \\ 5x + 18y + 4z + 5t = 12. \end{cases}$$

Solution

Nous voulons appliquer la méthode de Gauss, donc d'abord éliminer x dans trois équations du système.

Le coefficient de x dans (L_1) est 2, dans (L_2), c'est 1. Nous avons donc intérêt à échanger (L_1) et (L_2), pour éviter des termes fractionnaires.

(S) devient alors
$$\begin{cases} x + 3y + 5z - 2t = 3 \\ 2x + 7y + 3z + t = 5 \\ x + 5y - 9z + 8t = 1 \\ 5x + 18y + 4z + 5t = 12. \end{cases}$$

Pour éliminer x, faisons alors les transformations élémentaires :

$(L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1)$; $\quad (L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1)$;
$(L_4) \leftarrow (L_4) - 5(L_1)$.

(S) est équivalent à :

$$\begin{cases} x+3y+\ 5z-\ 2t=3 & \\ \quad y-\ 7z+\ 5t=-1 & (L_2)\leftarrow(L_2)-2(L_1) \\ 2y-14z+10t=-2 & (L_3)\leftarrow(L_3)-(L_1) \\ 3y-21z+15t=-3. & (L_4)\leftarrow(L_4)-5(L_1) \end{cases}$$

Cherchons maintenant à éliminer y. Faisons donc les transformations :

$(L_3)\leftarrow(L_3)-2(L_2)$; $\quad (L_4)\leftarrow(L_4)-3(L_2)$.

(S) est alors équivalent à $\begin{cases} x+3y+5z-2t=3 \\ y-7z+5t=-1 \\ 0=0 \\ 0=0. \end{cases}$

Nous pouvons donc supprimer les deux dernières lignes. Il ne reste alors que deux équations et quatre inconnues. Choisissons d'exprimer x et y en fonction de z et de t, choisis comme paramètres.

(S) équivaut à $\begin{cases} x=3-3y-5z+2t \\ y=-1+7z-5t \end{cases}$

soit encore à $\begin{cases} x=3-3(-1+7z-5t)-5z+2t \\ y=-1+7z-5t \end{cases}$

ou encore $\begin{cases} x=6-26z+17t \\ y=-1+7z-5t. \end{cases}$

Les solutions de (S) sont les quadruplets de la forme $(6-26z+17t,\ -1+7z-5t,\ z,\ t)$ où z et t sont des paramètres réels.

Exercice 2

Énoncé

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal. Déterminez l'équation d'une sphère passant par les points $A(1, 1, 0)$, $B(2, 1, 1)$, $C\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ et dont le centre est situé dans le plan (P) d'équation cartésienne $\quad 2x+y-z-3=0$.

Solution

Nous savons que l'équation d'une sphère (Σ) est de la forme :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$,

le centre Ω de la sphère ayant pour coordonnées (a, b, c). Traduisons les contraintes imposées :

- A appartient à (Σ) équivaut à :

$2-2a-2b+d=0$

(relation obtenue en remplaçant (x, y, z) par $(1, 1, 0)$ dans l'équation de (Σ)).

- De même, B appartient à (Σ) équivaut à :

$6-4a-2b-2c+d=0$;

- C appartient à (Σ) équivaut à :

$\frac{3}{2}-a-2b-c+d=0$;

- Ω est dans le plan (P) équivaut à : $2a+b-c-3=0$.

Toutes ces relations sont équivalentes au système d'équations linéaires :

$$(S)\quad \begin{cases} a+2b+\ c-d=\frac{3}{2} \\ 2a+2b\qquad -d=2 \\ 2a+\ b-\ c\qquad =3 \\ 4a+2b+2c-d=6. \end{cases}$$

Nous avons mis dans ce système en première équation celle où a est affecté du coefficient le plus simple, pour faciliter les calculs de la méthode du pivot de Gauss.

Résolvons alors le système (S). $\quad (S)$ équivaut à :

$$\begin{cases} a+2b+\ c-\ d=\frac{3}{2} & \\ -2b-2c+\ d=-1 & (L_2)\leftarrow(L_2)-2(L_1) \\ -3b-3c+2d=0 & (L_3)\leftarrow(L_3)-2(L_1) \\ -6b-2c+3d=0. & (L_4)\leftarrow(L_4)-4(L_1) \end{cases}$$

Pour éliminer b et pour éviter des coefficients fractionnaires mettons dans (L_3) la combinaison linéaire : $2(L_3)-3(L_2)$.

Pour (L_4), il suffit de prendre $(L_4)-3(L_2)$.

(S) équivaut alors à :

$$\begin{cases} a+2b+\ c-\ d=\frac{3}{2} & \\ -2b-2c+\ d=-1 & \\ d=3 & (L_3)\leftarrow 2(L_3)-3(L_2) \\ 4c=3. & (L_4)\leftarrow(L_4)-3(L_2) \end{cases}$$

En intervertissant les lignes, on obtient alors :

$$\begin{cases} c=\frac{3}{4} \\ d=3 \\ -2b-\frac{3}{2}+3=-1 \\ a+2b+\frac{3}{4}-3=\frac{3}{2}. \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} c=\frac{3}{4} \\ d=3 \\ b=\frac{5}{4} \\ a=\frac{5}{4}. \end{cases}$$

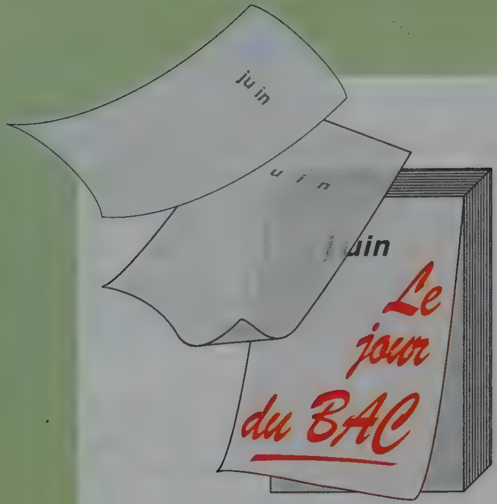
Le système (S) a donc pour solution unique le quadruplet : $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 3\right)$.

La sphère (Σ) a donc pour équation :

$x^2+y^2+z^2-\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}y-\frac{3}{2}z+3=0$,

ou encore : $\quad \left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$.

Son centre Ω a pour coordonnées $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$, son rayon est $\frac{\sqrt{11}}{4}$.



Énoncé

Bac D, La Réunion, 1987.

Soit a, b, c des nombres réels et f une fonction définie sur $[0\,;\,2]$ par :

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$.

Dans le plan $(\mathscr{P})$ rapporté à un repère, soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et I le point de coordonnées $\left(1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$.

Déterminez a, b, et c pour que :

$a)$ $f(0) = f(2)$;

$b)$ la courbe $(\mathscr{C})$ passe par le point I ;

$c)$ en ce point I, la courbe $(\mathscr{C})$ admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

A la lecture du sujet

Il s'agit ici de traduire les conditions imposées par des relations portant sur les coefficients indéterminés a, b, c, en particulier la condition de tangente parallèle à $(x'Ox)$ par la relation d'annulation de la dérivée.

On résout alors le système linéaire obtenu. La méthode du pivot de Gauss n'est pas imposée.

Une solution

$f(0) = f(2)$ équivaut à $0 = 16 + 8a + 4b + 2c$, soit :

$4a + 2b + c = -8$.

$(\mathscr{C})$ passe par I si et seulement si les coordonnées de I vérifient l'équation :

$y = f(x)$,

soit si : $\quad -\dfrac{1}{2} = 1 + a + b + c$,

ou encore : $\quad a + b + c = -\dfrac{3}{2}$.

En I, $(\mathscr{C})$ admet une tangente parallèle à $(x'Ox)$ si et seulement si : $f'(1) = 0$.

f est dérivable comme fonction polynôme et :

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$.

$f'(1) = 0$ équivaut à $3a + 2b + c = -4$.

Les conditions imposées à a, b, c se traduisent donc par le système linéaire (S) :

$$(S)\quad \begin{cases} 4a + 2b + c = -8 & (L_1) \\ a + b \quad + c = -\dfrac{3}{2} & (L_2) \\ 3a + 2b + c = -4 & (L_3). \end{cases}$$

Faisons l'opération : $(L_1) \leftarrow (L_1) - (L_3)$, qui déterminera a.

(S) équivaut à :

$$\begin{cases} a = -4 & (L_1) \leftarrow (L_1) - (L_3) \\ a + b + c = -\dfrac{3}{2} \\ 3a + 2b + c = -4 \end{cases}$$

$$\text{soit à}\quad \begin{cases} a = -4 & (L_1) \\ b + c = \dfrac{5}{2} & (L_2) \\ 2b + c = 8 & (L_3). \end{cases}$$

Faisons l'opération élémentaire : $(L_3) \leftarrow (L_3) - (L_2)$, qui déterminera b.

(S) équivaut alors à :

$$\begin{cases} a = -4 \\ b + c = \dfrac{5}{2} \\ b = \dfrac{11}{2} & (L_3) \leftarrow (L_3) - (L_2) \end{cases}$$

et admet pour solution unique le triplet :

$\left(-4\,;\,\dfrac{11}{2}\,;\,-3\right)$.

Exercices et problèmes

Q.C.M.

Dans chacun des cas, une ou plusieurs des réponses sont exactes.

1 Soit (S) le système $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ -3x + y = -4 \end{cases}$:

le système (S_1) $\begin{cases} 2|x| + 3|y| = 10 \\ -3|x| + |y| = -4 \end{cases}$ a même ensemble de solutions que (S) .... ☐

la solution de (S) est solution de (S_1) .... ☐

le système (S_2) $\begin{cases} 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 5\sqrt{2} \\ -3\sqrt{x} + \sqrt{y} = -2\sqrt{2} \end{cases}$ a même ensemble de solutions que (S) .... ☐

le système (S_3) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 20 \\ -3x^2 + y^2 = -8 \end{cases}$ a même ensemble de solutions que (S) .... ☐

2 Soit $M(x, y)$ un point dont les coordonnées vérifient le système (S) : $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

$M(x, y)$ appartient alors au plan d'équation :

$3x + 2y + z = 0$ .... ☐
$x + 2y - z + 1 = 0$ .... ☐
$4x + y + 2z - 1 = 0$ .... ☐

3 Soit (P) et (Q) les plans d'équations respectives $x - y + 3 = 0$, $2x + y + z = 0$, (D) la droite d'intersection de (P) et de (Q).

(D) est incluse dans le plan d'équation $3x + z = 0$ .... ☐
(D) est parallèle au plan d'équation $3x + z = 0$ ... ☐
(D) est incluse dans tout plan d'équation $\lambda(x - y + 3) + 2x + y + z = 0$ (λ réel) ..... ☐
(D) admet pour vecteur directeur $\vec{i} - 3\vec{k}$ .... ☐

4 Les transformations suivantes transforment un système (S) en un système équivalent :

$(L_1) \leftrightarrow (L_2)$ .... ☐
$(L_1) \leftarrow k(L_1)$ (k réel quelconque) .... ☐
$(L_1) \leftarrow (L_2)$ .... ☐
$(L_1) \leftarrow k(L_1) + (L_2)$ (k réel quelconque) .... ☐

5 Soit (S) le système : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + 2z = 3. \\ 2x + 5y + 2z = 9 \end{cases}$

Le système (S) admet :

$(1, 1, 1)$ pour unique solution .... ☐
une infinité de solutions de la forme $(-3 + 4\lambda, 3 - 2\lambda, \lambda)$, λ réel .... ☐
une infinité de solutions de la forme $(1 + 4\lambda, 1 - 2\lambda, 1 + \lambda)$, λ réel .... ☐

6 Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.
Les systèmes de vecteurs suivants forment une base de l'espace :

$(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$ .... ☐
$(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ .... ☐
$(-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$ .... ☐
$(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} + \vec{k}, \vec{k} + \vec{i})$ .... ☐

7 Soit (P_1), (P_2), (P_3) les trois plans d'équations :

(P_1) $x + 4y + z = 1$; (P_2) $4x + y + z = 1$;
(P_3) $x + y + 4z = 1$.

Ces trois plans ont pour intersection :

une droite .... ☐
un point .... ☐
l'ensemble vide .... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

8 ■ Résolvez les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 4x + 3y = -17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^3 + 5y^2 = 1 \\ 4x^3 + 3y^2 = -17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2 + 5\sqrt{y} = 1 \\ 4x^2 + 3\sqrt{y} = -17 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y} = 1 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = -17. \end{cases}$

9 ■ Résolvez les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ -x + 3y = 5 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 6y = 7 \\ -3x + 4y = 1 \\ 2x + y = -2. \end{cases}$

10 ■■ Discutez, suivant la valeur du nombre réel θ de $[0\,;\,2\pi[$, le système (S) suivant :

$$\begin{cases}(\sin 2\theta)x + (\sin\theta)y = \sin 3\theta\\(\cos 2\theta)x + (\cos\theta)y = 2\cos\theta\cos 2\theta.\end{cases}$$

11 ■■ Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit ABC un triangle de sommets $A(5, 1)$, $B(3, 4)$, $C(1, 3)$.

1° Écrivez des équations des hauteurs du triangle ABC.

2° Déterminez un système d'équations linéaires vérifié par les coordonnées (x, y) de l'orthocentre H du triangle ABC.
Donnez alors les coordonnées du point H.

3° Déterminez de la même façon les coordonnées du point Ω, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

12 ■■ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, (D) et (D') les droites ayant, dans ce repère, les équations respectives :

$2x + y = 2$ (D); $3x - y = 3$ (D').

1° Déterminez le point d'intersection de (D) et (D').

2° Soit m un nombre réel, (D_m) la droite d'équation $mx - y - 2m = 0$.

a) Montrez que (D) et (D_m) sont sécantes.

b) Pour quelles valeurs de m les trois droites (D), (D') et (D_m) déterminent-elles un triangle ?
Donnez alors les sommets de ce triangle.

13 ■ Soit (D_m) et (Δ_m) les droites d'équations respectives :

(D_m) $(m+4)x + 2y = m^2$,

(Δ_m) $-2x + my = 2m^2 - 2m$.

Discutez, suivant les valeurs de m, l'intersection des droites (D_m) et (Δ_m).

14 ■■ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan, (D_1), (D_2), (D_3) les droites d'équations respectives :

(D_1) $2x - 3y - 1 = 0$,

(D_2) $3x - 2y - 5 = 0$,

(D_3) $x + y - 4 = 0$.

1° Montrez que (D_1), (D_2), (D_3) sont concourantes en un point noté H.

2° Soit A le point de coordonnées $(2\,;\,1)$. Montrez que A est sur (D_1). Existe-t-il un triangle ABC de premier sommet A, tel que B soit sur (D_2), C sur (D_3) et que ABC ait pour orthocentre le point H ?

Inéquations linéaires à deux inconnues

15 ■ Représentez graphiquement l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $|x| + |y| \leqslant 1$.

16 ■ Soit $ABCD$ le parallélogramme de sommets :
$A(1\,;\,2)$, $B(5\,;\,3)$, $C(6\,;\,4)$, $D(2\,;\,3)$.

Déterminez un système d'inéquations linéaires définissant l'intérieur du parallélogramme, bords compris.

17 ■ Représentez graphiquement l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant :

$$\begin{cases}0 \leqslant 3x + 5y \leqslant 15\\-2 \leqslant 2x + y \leqslant 8.\end{cases}$$

Systèmes à trois inconnues

18 ■ Résolvez les systèmes suivants :

1° $\begin{cases}2x - 2y + 5z = 0\\5x + 2y + 3z = -2\\3x + 4y + 2z = -10.\end{cases}$ 2° $\begin{cases}4x - y - 2z = 0\\5x + 3y - 4z = -1\\3x + 2y - z = 4.\end{cases}$

19 ■■ Résolvez le système :

$$\begin{cases}x + 2y - 7z = 4\\2x + 3y - 5z = -8\\4x - 5y - 4z = -6\\-x + y + z = \lambda\end{cases}$$ (λ est un nombre réel).

20 ■■ Résolvez le système, d'inconnues x, y, z complexes :

$$\begin{cases}x + y + z = 0\\x + jy + j^2z = 3j^2\\x + j^2y + jz = 0\end{cases}$$ j désigne le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Systèmes ayant quatre inconnues ou plus

21 ■ Résolvez, par la méthode de Gauss, le système suivant :

$$\begin{cases}x + 3y + z + 3t = 1\\2x + 6y + 3z + 6t = 1\\3x + 9y + 5z + 9t = 1\\4x + 12y + 7z + 13t = 1.\end{cases}$$

22 ■■ Résolvez les systèmes :

a) $\begin{cases}x + 2y + 3z + 4t = 5\\2x + 3y + 4z + 5t = 6\\3x + 4y + 5z + 6t = 7\\4x + 5y + 6z + 7t = 8.\end{cases}$ b) $\begin{cases}x + 2y + 4z + 8t = 8\\8x + y + 2z + 4t = 4\\4x + 8y + z + 2t = 2\\2x + 4y + 8z + t = 1.\end{cases}$

23 ■ Résolvez les systèmes suivants par la méthode de Gauss :

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

24 ■ 1° Résolvez, par la méthode de Gauss, le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + t = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ y + 2z + t = 1 \\ x + z + 2t = 1. \end{cases}$$

2° Reprenez la résolution en introduisant l'inconnue auxiliaire $s = x + y + z + t$.

Bases de l'espace

25 ■ Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace. On pose :

$\vec{I} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{J} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{K} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}.$

1° Montrez que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base de l'espace.

2° Soit $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Décomposez $\vec{u}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

26 ■ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On pose :

$$\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k}); \quad \vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{k} + \vec{i}); \quad \vec{K} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}).$$

1° Montrez que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base de l'espace, formée de vecteurs unitaires.

2° Décomposez tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

27 ■■ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ sont définis par :

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} + \frac{3}{5}\vec{k}\right); \quad \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} + \frac{3}{5}\vec{k}\right);$$

$$\vec{K} = -\frac{3}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k}.$$

1° Montrez que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base de l'espace. Décomposez les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dans cette base.

2° Soit $M(t)$ le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t - \sin t \\ y(t) = \dfrac{4}{5}(\sin t + \cos t) \\ z(t) = \dfrac{3}{5}(\sin t + \cos t), \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En décomposant $\overrightarrow{OM(t)}$ sur la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, montrez que l'ensemble des points $M(t)$ est un cercle. Donnez une équation cartésienne du plan dans lequel est situé ce cercle.

Systèmes d'équations linéaires et analyse

28 ■■ Déterminez des réels a, b, c, d tels que la courbe d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passe par les points $A(1, -1)$ et $B(-1, 7)$ et admette en ces deux points une tangente horizontale. Donnez alors le tableau de variations de la fonction obtenue.

29 ■■ 1° Déterminez des réels a, b, c, d tels que, pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\,;\,0\}$, on ait :

$$\frac{-x^3 + x^2 + 5x - 5}{x^2 + x} = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + x}.$$

2° Déduisez-en l'existence d'une asymptote à la courbe d'équation $y = \dfrac{-x^3 + x^2 + 5x - 5}{x^2 + x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

30 ■■ 1° Déterminez des réels a, b, c, d tels que, pour tout x réel, on ait :

$$\frac{3x^3 - x^2 + 2}{x^4 + 4} = \frac{ax + b}{x^2 + 2x + 2} + \frac{cx + d}{x^2 - 2x + 2}.$$

2° Déduisez-en les primitives, sur $\mathbb{R}$, de la fonction $x \mapsto \dfrac{3x^3 - x^2 + 2}{x^4 + 4}$.

31 ■ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équation :

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad$ (a, b, c, d réels).

Déterminez a, b, c, d pour que $(\mathcal{C})$ passe par les points $A(1\,;\,2)$, $B(2\,;\,-2)$, $C(3\,;\,-14)$, $D(-1\,;\,10)$.

PROBLÈMES

Systèmes d'équations linéaires et suites numériques

32 ■■■ 1° Soit p un nombre entier non nul. Montrez qu'il existe a, b, c, d réels tels que :

$$\frac{1}{p(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{p+2} + \frac{d}{p+3}.$$

2° Soit n un entier non nul. On définit S_n par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Calculez S_n en fonction de n.
Déduisez-en la convergence de (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Systèmes d'équations linéaires et polynômes

33 ■■■ Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
On pose $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
On note $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$ les polynômes définis par :

$Q_0(x) = 1$; $Q_1(x) = (x+1)$;

$Q_2(x) = (x+1)^2$; $Q_3(x) = (x+1)^3$.

1° Montrez qu'il existe α, β, γ, δ réels tels que :

$x^3 = \alpha Q_0(x) + \beta Q_1(x) + \gamma Q_2(x) + \delta Q_3(x)$.

Reprenez le problème avec les polynômes x^2, x, 1.

2° Montrez alors que tout polynôme $P(x)$ de degré inférieur ou égal à trois peut se décomposer, de manière unique, sous la forme :

$P(x) = \alpha Q_0(x) + \beta Q_1(x) + \gamma Q_2(x) + \delta Q_3(x)$.

On donnera α, β, γ, δ en fonction de a, b, c, d.
Effectuez la décomposition pour le polynôme :

$P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 2$.

34 ■■■ On note $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ les polynômes suivants :

$Q_0(x) = x(x-1)$; $Q_1(x) = x(x-2)$;

$Q_2(x) = (x-1)(x-2)$.

1° Montrez que tout polynôme $P(x)$ de degré inférieur ou égal à deux peut s'écrire, de manière unique, sous la forme :

$P(x) = \alpha Q_0(x) + \beta Q_1(x) + \gamma Q_2(x)$ (α, β, γ réels).

2° Comparez α, β, γ avec les valeurs $P(2)$, $P(1)$, $P(0)$. Que remarquez-vous ? Justifiez alors le résultat obtenu.

3° Effectuez la décomposition pour :

$P(x) = 3x^2 - 3x + 1$.

Programmation linéaire

35 ■■ Un industriel veut fabriquer des produits P_1 et P_2. Les deux produits nécessitent le passage sur deux machines M_1 et M_2. La fabrication de P_1 nécessite un temps de passage sur M_1 de 20 heures, et sur M_2 de 15 heures.
La fabrication de P_2 utilise M_1 pendant 50 heures et M_2 pendant 25 heures.
M_1 est disponible 290 heures par mois, M_2 180 heures par mois. L'industriel réalise un profit de 100 F sur P_1, 200 F sur P_2. Il veut réaliser x produits P_1 et y produits P_2, avec le profit maximal.

1° Écrivez les contraintes du problème, et représentez graphiquement le polygone des contraintes obtenu.

2° Écrivez la valeur du profit $f(x, y)$ en fonction de x et y. Graphiquement, pour quelles valeurs (x, y) l'industriel réalise-t-il le profit maximal ?

3° On se propose de démontrer rigoureusement le résultat.

a) Montrez qu'il existe deux nombres réels a et b positifs, tels que :

$100x + 200y = a(20x + 50y) + b(15x + 25y)$.

b) Déduisez-en que le profit est maximal lorsque $20x + 50y$ et $15x + 25y$ sont tous les deux maximaux.
Déterminez alors le nombre de produits P_1 et P_2 fabriqués, et le profit réalisé par l'industriel.

36 ■■ Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Résolvez graphiquement le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x \text{ et } y \text{ nombres entiers} \\ x + y \leqslant 160 \\ 2x + 3y \leqslant 416 \\ 3x + 2y \leqslant 420. \end{cases}$$

2° Une entreprise de jouets fabrique chaque jour un nombre x de poupées et un nombre y de petits trains électriques. Les contraintes de fabrication étant définies par le système précédent et les bénéfices assurés par la fabrication d'une poupée et d'un train électrique étant respectivement de 30 F et 40 F par unité, déterminez le programme de fabrication donnant à l'entreprise un bénéfice maximal.
Calculez alors ce bénéfice.

37 ■■■ Une organisation humanitaire doit fournir, après une catastrophe naturelle, une aide d'urgence à un village sinistré. Cette aide se compose d'une équipe de 100 personnes (médecins, infirmières, aides bénévoles) et de 5,5 tonnes de matériel pharmaceutique de première urgence.
Le transport des personnes et du matériel se fera d'une ville voisine par hélicoptère.
La ville dispose de sept hélicoptères de type 1 et de onze hélicoptères de type 2 ; un hélicoptère de type 1 peut transporter 4 personnes (en plus du pilote) et 500 kg de matériel, un hélicoptère de type 2 peut transporter 8 personnes et 300 kg de matériel.
La location et l'utilisation d'un hélicoptère de type 1 coûtent 25 000 F, celles d'un hélicoptère de type 2 coûtent 75 000 F.
Pour effectuer l'opération, l'organisation loue x hélicoptères de type 1 et y de type 2. On cherche alors à minimiser le coût global de l'opération.

1° Écrivez les contraintes posées par le problème, et représentez le polygone des contraintes dans un repère.

2° Déterminez alors x et y pour que le coût de l'aide apportée soit minimal.

Systèmes d'équations linéaires et géométrie plane

38 ■■

Soit A_1, A_2, A_3 trois points du plan complexe, d'affixes respectives a_1, a_2, a_3.
On se pose le problème suivant : existe-t-il des points M_1, M_2, M_3 tels que A_1 soit le milieu de $[M_1M_2]$, A_2 le milieu de $[M_2M_3]$, A_3 le milieu de $[M_3M_1]$?

1° Montrez que le problème posé équivaut à l'existence de solutions au système S : $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ z_2 + z_3 = 2a_2 \\ z_3 + z_1 = 2a_3, \end{cases}$
z_1, z_2, z_3 désignant les affixes des éventuels points M_1, M_2, M_3.

2° Résolvez alors (S), et concluez.

3° Application numérique : déterminez M_1, M_2, M_3 lorsque A_1, A_2, A_3 ont pour affixes : $a_1 = 1 + i$, $a_2 = 3 - i$, $a_3 = 2 + 3i$.

4° Proposez une solution géométrique à ce problème, en démontrant que les triangles $A_1A_2A_3$ et $M_1M_2M_3$ doivent avoir même centre de gravité.

39 ■■■ **Le théorème de Brianchon-Poncelet**

1° Soit $A\left(2\,;\dfrac{1}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{1}{3}\,;3\right)$, $C\left(-6\,;-\dfrac{1}{6}\right)$ trois points de l'hyperbole ($\mathcal{H}$) d'équation $xy = 1$.

a) Déterminez les équations des trois hauteurs du triangle ABC.

b) Déterminez les coordonnées (x, y) de l'orthocentre H de ce triangle. Vérifiez que H est sur l'hyperbole.

2° Plus généralement, soit $A\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$, $B\left(b, \dfrac{1}{b}\right)$, $C\left(c, \dfrac{1}{c}\right)$ trois points de l'hyperbole ($\mathcal{H}$), deux à deux distincts.

a) Montrez que « H orthocentre de ABC » équivaut à :
$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0. \end{cases}$$
Exprimez ces relations sous forme d'un système linéaire vérifié par les coordonnées (x, y) de H.

b) Déterminez alors les coordonnées (x, y) de H en fonction de a, b, c et vérifiez que H est sur l'hyperbole.

Systèmes d'équations linéaires et géométrie dans l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

40 ■■

Soit (P_1), (P_2), (P_3), (P_4), les plans d'équations respectives :

$(P_1) : x + 2y + 3z = 2\,;$ $(P_2) : 2x + 3y + z = 0\,;$

$(P_3) : 3x + y + 2z = 4\,;$ $(P_4) : x + y + z = 2.$

Montrez que ces quatre plans sont les faces d'un tétraèdre, dont vous déterminerez les sommets.

41 ■■

Soit (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) les plans d'équations respectives :

$(P_1) : x + y - z = 0\,;$ $(P_2) : x - y + z = 0\,;$

$(P_3) : -x + y + z = 0\,;$ $(P_4) : 3x + y - 5z + 4 = 0.$

1° Montrez que (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) sont les faces d'un tétraèdre, dont l'un des sommets est le point O. Déterminez les autres sommets.

2° Déterminez une équation de la sphère circonscrite à ce tétraèdre.

42 ■■

Soit a un nombre réel positif, (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) les plans d'équations respectives :

$(P_1) : x + y + z = 3a\,;$ $(P_2) : x - y + z = 7a$

$(P_3) : x + y - z = a\,;$ $(P_4) : -x + y + z = a.$

Montrez que ces quatre plans déterminent un tétraèdre régulier, dont vous déterminerez les sommets.

43 ■■

Soit m un paramètre réel, (P_m) le plan d'équation :

$(m + 3)x + (2m + 5)y - (m + 1)z + 3m + 1 = 0.$

1° Vérifiez que cette équation définit bien un plan, pour tout réel m.

2° Écrivez les équations de (P_0), (P_1), (P_2).
Montrez que (P_0), (P_1), (P_2) se coupent suivant une droite (D), dont vous donnerez un système d'équations paramétriques.

3° Montrez que (D) est incluse dans tous les plans (P_m).

44 ■■■

1° Soit (P), (Q), (R) les plans d'équations respectives :

$(P) : x = \dfrac{1}{5}y + z\,;$ $(Q) : y = \dfrac{1}{2}x + z\,;$

$(R) : z = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{5}y.$

Montrez que (P), (Q), (R) se coupent suivant une droite passant par O.

2° Plus généralement, soit :
(P) le plan d'équation $x = by + cz$,
(Q) le plan d'équation $y = ax + cz$,
(R) le plan d'équation $z = ax + by$,
où a, b, c sont des nombres réels tous distincts de -1.
Montrez que le système :
$$(S)\quad \begin{cases} x = by + cz \\ y = ax + cz \\ z = ax + by \end{cases}$$
équivaut à : $\begin{cases} (1 + a)x = (1 + b)y = (1 + c)z \\ z = ax + by. \end{cases}$

Montrez alors que les trois plans se coupent suivant une droite passant par O si, et seulement si :
$$\frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + c} = 1.$$

45 ■■ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace et f l'application ponctuelle qui, à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = y + 3z - 1 \\ y' = -3x + 4y + 9z - 3 \\ z' = x - y - 2z + 1. \end{cases}$$

1° Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que $f(M)$ soit le point O.

2° Déterminez l'ensemble des points invariants par f. On montrera qu'il s'agit d'un plan (P), et que M' appartient à ce plan (P).

3° Montrez que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

46 ■■■ **Sphère inscrite dans un tétraèdre**

Soit $A(1, 2, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(1, 3, 0)$, $D(1, 2, 1)$ quatre points de l'espace.

1° Écrivez des équations des plans suivants :
le plan (P) passant par A orthogonal à (BC),
le plan (Q) passant par A orthogonal à (DC),
le plan (R) passant par A orthogonal à (BD).

2° Montrez que (P), (Q), (R) se coupent suivant une droite, dont vous déterminerez un vecteur directeur. Montrez que cette droite est orthogonale au plan (BCD).

3° Soit (π) le plan d'équation :

$$(3 + \sqrt{3})x - 2\sqrt{3}y + (3 + \sqrt{3})z - 6 + 2\sqrt{3} = 0.$$

a) Montrez que (π) contient (BD).

b) Montrez que les plans (P), (Q), (R), (π) ont un unique point commun, noté Ω.

c) Montrez que Ω est équidistant des quatre plans des faces du tétraèdre $ABCD$. (C'est donc le centre de la sphère inscrite dans ce tétraèdre.)

Systèmes avec paramètres

47 ■■ Résolvez le système (S) suivant :

$$\begin{cases} (2\cos\varphi)x + y = \cos 2\varphi \\ x + (2\cos\varphi)y + z = 0 \\ y + (2\cos\varphi)z + t = 0 \\ z + (2\cos\varphi)t = \cos\varphi \end{cases} \qquad (\varphi \in \mathbb{R}).$$

48 ■■■ a, b, c sont trois nombres réels distincts de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Résolvez le système (S) :

$$\begin{cases} x + y\cos a + z\cos 2a = 0 \\ x + y\cos b + z\cos 2b = 2\cos b(\cos b - \cos a) \\ x + y\cos c + z\cos 2c = 2\cos c(\cos c - \cos a). \end{cases}$$

49 ■■■ Soit a, b, c trois nombres réels, et (S) le système linéaire :

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2 \\ a^2x + b^2y + c^2z = a^3 + b^3 + c^3. \end{cases}$$

1° Trouvez une solution évidente du système (S).

2° On suppose les trois réels a, b, c deux à deux distincts. En effectuant les opérations élémentaires sur les lignes de (S), second membre non compris, montrez que (S) peut se ramener à un système échelonné. Déduisez-en l'unicité de la solution de (S).

3° On suppose $b = a$, c distinct de a. Montrez que (S) a une infinité de solutions, vérifiant :

$$\begin{cases} x + y = 2a \\ z = c. \end{cases}$$

Trouvez de même les solutions lorsque :
$c = a$, b distinct de a, puis $c = b$, b distinct de a.

4° Résolvez le système lorsque $a = b = c$.

50 ■■■ **1°** Résolvez le système :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = a_1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = a_2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = a_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = a_4 \end{cases} \quad (a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ nombres réels}).$$

Vous introduirez l'inconnue $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

2° Plus généralement, résolvez le système :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \dots + x_n = a_1 \\ x_1 + x_3 + \dots + x_n = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n = a_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = a_n. \end{cases}$$

($a_i \in \mathbb{R}$, pour tout i de $[1, n]$).

5 Vecteurs et barycentre

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Galilée et la balance hydrostatique 114
AP2 Étude de vecteurs $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ 116
AP3 Notion de barycentre partiel 117
AP4 Lignes de niveau 118

COURS

1. Réduction du vecteur $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ 120
2. Propriétés du barycentre 123
3. Caractérisation de droites et segments 125

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Lignes de niveau de $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ non nul 127
TP2 Lignes de niveau de $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ nul 128
TP3 Lignes de niveau de $M \mapsto \dfrac{MA}{MB}$ 130
TP4 Utilisation du barycentre pour les problèmes de concours et d'alignement 131
TP5 Barycentres et optimisation 132

FICHE MÉTHODE

FICHE MÉTHODE Comment utiliser un barycentre 134

EXERCICES COMMENTÉS 134
LE JOUR DU BAC 136
EXERCICES ET PROBLÈMES 137

objectifs

- Poursuivre le calcul vectoriel et l'utilisation du barycentre rencontré en Première.
- Réduire les écritures de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$.
- Savoir utiliser le barycentre pour résoudre des problèmes d'alignement, de droites concourantes, de points coplanaires.
- Savoir déterminer certaines lignes de niveau.

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Galilée et la balance hydrostatique

L'objectif de cette activité est de revoir, à partir d'un exemple historique, le barycentre de deux points et sa position sur un segment.

■ Rappelons que :

• Si m_1 et m_2 sont deux masses suspendues en des points a et b, le point d'équilibre du système, noté ici c, vérifie :

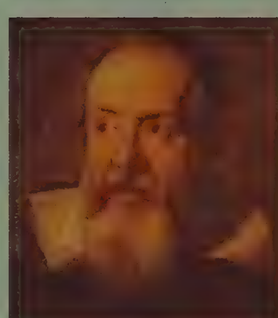
$m_1\,\overrightarrow{ca} + m_2\,\overrightarrow{cb} = \vec{0}$, donc $m_1 \,.\, ac = m_2 \,.\, bc$.

Le principe de la balance hydrostatique est de laisser les points b et c fixes, et de déplacer le point a.

• Tout corps plongé dans un liquide subit une poussée, de bas en haut, appelée poussée d'Archimède, égale au poids du volume d'eau déplacé.

■ Voici un extrait du livre : « *Galilée, le message céleste* » d'Émile Namer, collection « Un savant dans le texte » (Gauthier Villars).

Le nouvel esprit scientifique.



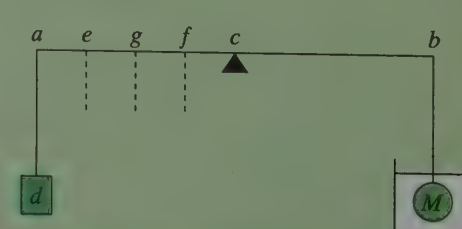
C'est Galilée qui réussit à donner un fondement nouveau à la connaissance de la physique. Il trouva sa voie, dès qu'il eut médité ce que l'on savait alors d'Archimède.

C'est en l'année 1586, âgé de 22 ans, que Galilée, en cinq ou six pages significatives, reconstitua le principe de la balance hydrostatique, qui permettait de déterminer les poids spécifiques(*) des corps, métaux ou pierres, dans l'air et dans l'eau.

Comment, sans briser la couronne de Hiéron, tyran de Syracuse, Archimède avait-il pu y déceler un vol ?

Ce n'est pas par des abstractions pures qu'on pouvait mesurer des poids spécifiques. Galilée construisit et utilisa cette balance de haute précision, de façon que les données pussent s'exprimer directement en rapports mathématiques.

Voici le schéma de cet instrument :



(*) Il s'agit de masses volumiques.

Soit une tige métallique graduée *ab* ; horizontale, mobile et en équilibre en son milieu *c*.

1° Une masse de métal *M* (de l'or par exemple) est suspendue en *b* ; le poids *d* lui fait équilibre à l'extrémité symétrique *a*.

2° Si nous plongeons *M* dans l'eau, l'équilibre est rompu en faveur du poids *d*. Pour le rétablir, nous devons, à l'aide d'un curseur, déplacer le poids *d* et le rapprocher de *c*, soit en *e*.

3° Prenons maintenant en *b* une masse d'argent *M'* de même poids *d*, dans l'air. Si nous plongeons cette masse d'argent dans l'eau, il faudra déplacer *d* et le rapprocher davantage de *c*, soit en *f*. « Ce point *f*, dit Galilée, sera plus voisin du point *c*, comme le montre l'expérience, puisque l'argent est moins lourd que l'or. » La différence entre les distances *af* et *ae* indique précisément la différence de poids entre l'or et l'argent.

4° Enfin, considérons un mélange d'or et d'argent *M"*, placé en *b* et pesant dans l'air le même poids *d* (situé en *a*). Si nous plongeons le mélange dans l'eau, il est évident que la nouvelle position *g* du poids *d* sera comprise entre les limites extrêmes *e* et *f* qui sont celles de l'or pur et de l'argent pur. Le point *g* divise la distance *ef* en deux segments, qui sont entre eux dans le rapport exact des poids d'or et d'argent du composé.

Cet exemple réunit l'idée d'une expérience incroyablement fine à celle d'une expression mathématique rigoureuse et parfaitement adhérente à la réalité physique qu'elle traduit. Il contient, en germe, les conditions essentielles du nouvel esprit scientifique. L'événement physique est soigneusement observé, conceptuellement analysé, techniquement réalisé avec toutes les garanties de précisions concevables à cette époque. A 22 ans, Galilée était donc en possession d'une méthode de travail et de pensée qui tranchait nettement avec celle de la science traditionnelle.

1° Expliquez pourquoi, lorsque l'on plonge *M* dans l'eau, on doit rapprocher le poids *d* du point *c*. (Si on appelle *V* le volume de la masse *M*, la poussée d'Archimède est alors proportionnelle à *V*, donc égale à *kV* où *k* est un nombre réel.) Montrez que $ce = \frac{bc}{d}(d - kV)$ (*k* s'exprime en newtons/m^3).

2° Appelons V' le volume de la masse d'argent de l'affirmation **3°** de Galilée. Comparez V et V'.
Expliquez alors pourquoi le point *f* est plus proche du point *c* que le point *e*. Montrez aussi que $af - ae$ est proportionnelle à $V' - V$, donc à la différence de masse volumique entre l'or et l'argent.

3° Appelons α le pourcentage d'or du mélange d'or et d'argent de l'affirmation **4°** de Galilée, β le pourcentage d'argent. On a $\alpha + \beta = 1$.

a) Quel est le volume occupé dans l'eau par ce mélange ?

b) Calculez la distance *cg*.
En encadrant $\alpha V + \beta V'$, montrez l'inégalité :

$cf \leqslant cg \leqslant ce$.

Quelle affirmation de Galilée avez-vous justifiée ?

c) Montrez que l'on a : $\frac{ge}{gf} = \frac{\beta}{\alpha}$, c'est-à-dire que le point *g* partage le segment [*ef*] dans le rapport des poids des deux métaux. Trouvez des coefficients réels *p* et *q* faisant apparaître le point *g* comme barycentre du système (*e*, *p*) et (*f*, *q*).

AP2 Étude de vecteurs $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$

L'objectif de cette activité est de revoir, sur des exemples, des simplifications d'écritures de vecteurs du type $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$, rencontrées en Première.

1 ■ *Premier cas : $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$*

Soit ABC un triangle quelconque. On note I le symétrique de C par rapport à B, J le milieu de $[AC]$, K le symétrique de A par rapport à B.

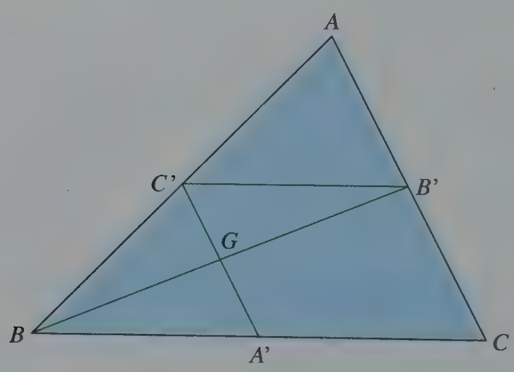
1° Exprimez I comme barycentre des points B et C, J comme barycentre des points A et C, K comme barycentre des points A et B. Représentez ces points sur une figure. Tracez les droites (AI), (BJ), (CK). Que remarquez-vous ?

2° Soit $\overrightarrow{V(M)}$ le vecteur défini, pour tout point M du plan, par la relation : $\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
Montrez que $\overrightarrow{V(M)}$ est un vecteur constant, noté $\vec{V}$, que vous exprimerez en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3° Exprimez $\overrightarrow{V(I)}$, $\overrightarrow{V(J)}$, $\overrightarrow{V(K)}$ en fonction de $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{KC}$. Montrez alors que les droites (AI), (BJ), (CK) sont parallèles.

2 ■ *Deuxième cas : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$*

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$.



A tout point M du plan, on associe le vecteur $\overrightarrow{V(M)}$ défini par : $\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

1° Exprimez $\overrightarrow{V(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Montrez alors qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{V(G)} = \vec{0}$. On exprimera $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. G est le **barycentre du système de points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$.**
Calculez $\overrightarrow{V(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.

2° Exprimez $\overrightarrow{V(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MB'}$. Montrez alors que G est le milieu de $[BB']$.

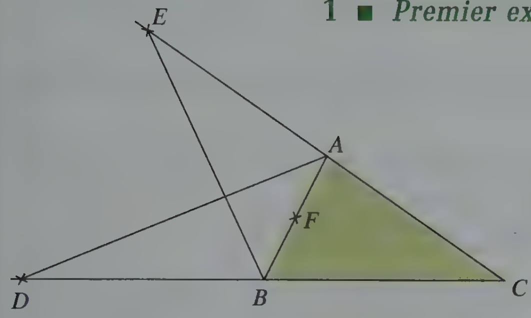
3° Exprimez $\overrightarrow{V(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{MC'}$; prouvez alors que G est le milieu de $[A'C']$.

4° Quelle propriété classique du quadrilatère $A'BC'B'$ retrouve-t-on ici ?

AP3 Notion de barycentre partiel

L'objectif de cette activité est de montrer comment on peut déterminer le barycentre d'un système de trois points pondérés ou plus.

1 ■ *Premier exemple : position d'un barycentre de trois points*



Soit ABC un triangle. On note :
D le symétrique de C par rapport à B,
E le symétrique de C par rapport à A,
F le milieu du segment $[AB]$,
G le barycentre du système de points pondérés $(A, 2)$, $(B, 2)$, $(C, -1)$.

1° Exprimez D comme barycentre des points B et C, E comme barycentre des points A et C.

2° En écrivant la relation vectorielle définissant G, et en faisant intervenir le point D, montrez que G est le barycentre du système de points $(A, 2)$, $(D, 1)$.
Nous remarquons alors que nous pouvons obtenir le point G à partir du barycentre du système « partiel » de points pondérés $(B, 2)$, $(C, -1)$ issu du système $(A, 2)$, $(B, 2)$, $(C, -1)$. G est alors le barycentre du système $(A, 2)$, $(D, 1)$. D est ici affecté de la somme des coefficients affectant B et C.

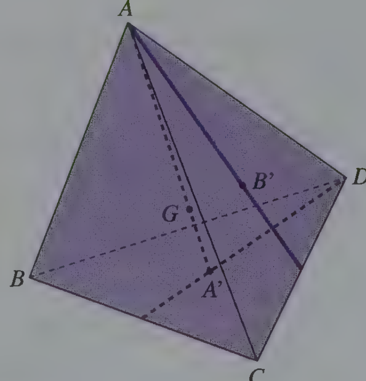
3° En raisonnant de même avec les points B et E, exprimez G comme barycentre de B et de E.
Montrez alors que G est le point d'intersection des droites (AD) et (BE), et placez G sur la figure.

4° Montrez de la même façon que G est le barycentre du système de points pondérés $(F, 4)$, $(C, -1)$. Que pouvez-vous en déduire pour les droites (AD), (BE), (CF) ?

Nous constatons sur cet exemple que, si G est le barycentre du système de points (A, α), (B, β), (C, γ) (avec $\alpha + \beta + \gamma$ non nul), G' le barycentre du système (B, β), (C, γ) (avec $\beta + \gamma$ non nul), alors G est le barycentre du système (A, α), $(G', \beta + \gamma)$.

2 ■ *Deuxième exemple : isobarycentre d'un tétraèdre*

Soit $ABCD$ un tétraèdre de l'espace $(\mathcal{E})$.



On note A', B', C', D' les centres de gravité respectifs des triangles BCD, ACD, ABD, ABC.

1° Montrez qu'il existe un unique point G de l'espace tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. On l'appelle l'**isobarycentre** des points A, B, C, D.

2° Montrez que G vérifie la relation : $\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$.
Précisez alors la position de G sur le segment $[AA']$. Nous constatons que G est barycentre de $(A, 1)$, et du barycentre A' du système partiel $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$, affecté du coefficient 3, qui est la somme des coefficients affectant B, C et D.

3° Montrez de la même façon que G est situé sur les segments $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$.

4° Soit I le milieu de $[AB]$, J celui de $[BC]$, K celui de $[CD]$, L celui de $[AD]$, M celui de $[AC]$, N celui de $[BD]$.
En faisant intervenir I et K dans la relation vectorielle :
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$,
montrez que G est le milieu du segment $[IK]$; montrez de même que G est le milieu des segments $[JL]$ et $[MN]$. Combien de droites particulières du tétraèdre sont-elles sécantes en G ?

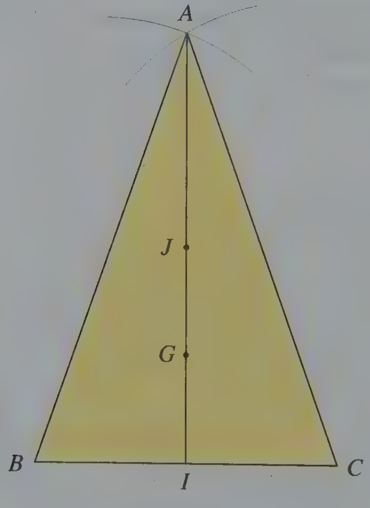
Ici encore nous avons regroupé des points pondérés, pour en prendre des barycentres partiels.
Comme nous avions 4 points, nous avons pu regrouper :

- **un point et le barycentre des trois autres,**

ou : • **deux systèmes de deux points.**

AP4 Lignes de niveau

L'objectif de cette activité est de déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2$ ait une valeur k donnée. Un tel ensemble s'appelle la ligne de niveau k de l'application f : $M \mapsto 2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2$.



Soit ABC un triangle isocèle.

On suppose :

$AB = AC = 6$ cm ; $BC = 4$ cm.

Pour tout point M du plan on définit $f(M)$ par :

$f(M) = 2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2$.

1° On note I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[AI]$, G le barycentre du système $(A, 2)$, $(B, 3)$, $(C, 3)$. Montrez que G est le milieu de $[JI]$.

2° En décomposant MA^2 en $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2$, MB^2 en $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$, MC^2 en $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$, montrez que l'on a :

$$f(M) = 8MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2 + 3GC^2 = 8MG^2 + f(G).$$

3° Calculez GA, GB et GC, puis $f(G)$.

4° Déterminez l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $f(M) = 72$. On l'appelle la **ligne de niveau** 72 de f.

5° Déterminez l'ensemble (E'), ligne de niveau 88 de f.

6° *a*) Existe-t-il une ligne de niveau de f passant par B et C ?

b) Existe-t-il une ligne de niveau 4 de f ?

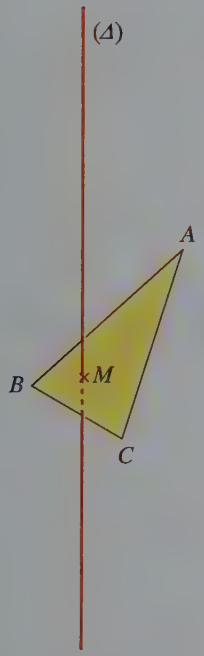
7° Soit k un nombre réel. Discutez, suivant les valeurs de k, l'existence et la nature de (E_k), ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$.

8° Nous voulons préciser ici l'ensemble (E') par rapport au triangle ABC.

a) Calculez $f(I)$. Tracez alors (E').

b) On choisit un repère d'origine I, tel que $\overrightarrow{IC} = 2\vec{i}$, et $(I, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal direct.
Déterminez une équation de la droite (AC) dans ce repère et calculez la distance du point G à la droite (AC).

c) Que représentent le point G et l'ensemble (E') pour le triangle ABC ?



9° Moment d'inertie

On considère un axe (Δ) perpendiculaire au plan du triangle ABC, et coupant ce plan en un point M, et le système matériel constitué par les trois points A, B, C affectés des masses respectives 2 kg, 3 kg, 3 kg.

Soit (A_i, m_i) un système de points pondérés.

On appelle **moment d'inertie** de ce solide par rapport à l'axe (Δ) la quantité

$J(M) = \sum_{i=1}^{n} m_i MA_i^2$ (m_i masse affectée à A_i) ; donc ici :

$$J(M) = 2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2.$$

a) Montrez que :

$J(M) = J(G) + 8MG^2$ (théorème d'Huyghens).

Déduisez-en la position du point M telle que le moment d'inertie J par rapport à (Δ) soit minimal.

b) L'énergie cinétique du solide ABC tournant autour de (Δ) avec une vitesse angulaire ω est donnée par la formule : $E = \dfrac{1}{2} J\omega^2$.

Déterminez alors la position de M qui rend l'énergie cinétique minimale.

COURS

$(\mathcal{E})$ désignera soit le plan, soit l'espace. Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ n points de $(\mathcal{E})$, et $\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_n$ n nombre réels.

On note $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ le vecteur $\lambda_1 \overrightarrow{MA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{MA_2} + ... + \lambda_n \overrightarrow{MA_n}$.

1. RÉDUCTION DU VECTEUR $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$

Nous allons généraliser les résultats vus dans l'AP2.

1. Introduction

Définition 1

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à un, $A_1, A_2, ..., A_n$, n points de $(\mathcal{E})$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, n nombres réels.
La suite $(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), ..., (A_n, \lambda_n)$ s'appelle système de points pondérés. Nous la noterons aussi $(A_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

- **Vecteur $\overrightarrow{V(M)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$**

Soit $(A_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système de n points pondérés.
A tout point M de $(\mathcal{E})$, associons le vecteur $\overrightarrow{V(M)}$ défini par :

$$\overrightarrow{V(M)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \lambda_1 \overrightarrow{MA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{MA_2} + ... + \lambda_n \overrightarrow{MA_n}.$$

Nous allons étudier les propriétés de ce vecteur.

- **Comparaison de $\overrightarrow{V(M)}$ et $\overrightarrow{V(M')}$**

Soit M et M' deux points de $(\mathcal{E})$.

$$\overrightarrow{V(M)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_i}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{MM'} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{M'A_i}.$$

Or $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{M'A_i}$ est le vecteur $\overrightarrow{V(M')}$. D'où :

$$\overrightarrow{V(M)} - \overrightarrow{V(M')} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{MM'} \qquad \text{(relation (1))}.$$

2. Cas où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$

Nous avons alors, quels que soient les points M et M', $\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{V(M')}$, d'après la relation précédente. Le vecteur $\overrightarrow{V(M)}$ est donc constant. D'où :

Propriété 1

Soit $(A_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système de n points pondérés.
Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, le vecteur $\overrightarrow{V(M)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ est un vecteur constant.

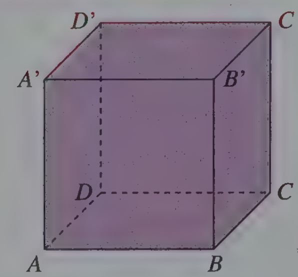
COURS

EXEMPLES

Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube.

A tout point M de $(\mathcal{E})$, associons $\overrightarrow{V(M)}$ défini par :

$\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}' + \overrightarrow{MD}'$.



La somme des coefficients affectés aux points A, B, C', D' est nulle, $\overrightarrow{V(M)}$ est donc constant.

Or $\overrightarrow{V(A)} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}' + \overrightarrow{AD}'$

$\overrightarrow{V(A)} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C'D}' = 2\overrightarrow{BA}$.

Pour tout point M de $(\mathcal{E})$, on a donc : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}' + \overrightarrow{MD}' = 2\overrightarrow{BA}$.

3. Cas où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ est non nul

Choisissons un point O fixé dans $(\mathcal{E})$, et appliquons la relation (1) :

$$\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{V(O)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\overrightarrow{MO}.$$

Cherchons s'il existe un point M tel que $\overrightarrow{V(M)}$ soit le vecteur nul :

$\overrightarrow{V(M)} = \vec{0}$ équivaut à $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{V(O)}$. Comme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ est non nul,

$\overrightarrow{V(M)} = \vec{0}$ équivaut alors à $\displaystyle \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\overrightarrow{V(O)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}\right)$.

Ceci définit un point M unique de $(\mathcal{E})$, tel que $\overrightarrow{V(M)} = \vec{0}$. Notons-le G.

- **Barycentre**

Propriété 2

> **Soit $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de n points pondérés tels que la somme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ soit non nulle, et soit $\overrightarrow{V(M)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$.**
>
> **Il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{V(G)} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.**
>
> **Pour tout point O de $(\mathcal{E})$, G vérifie : $\displaystyle \overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}\right)$.**
>
> **G est appelé le barycentre du système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.**

COURS

Isobarycentre

Supposons les coefficients λ_i tous égaux à 1. Leur somme est alors non nulle, et le système de points $(A_i, 1)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ admet alors un barycentre. On l'appelle l'**isobarycentre** des points A_1, A_2, ..., A_n, ou **centre de gravité** de A_1, A_2, ..., A_n.

Nous retrouvons ici la notion de centre de gravité d'un triangle ABC.

Réduction du vecteur $\overrightarrow{V(M)}$

Appliquons la relation (1) en prenant pour point M' le point G :

$$\overrightarrow{V(M)} - \overrightarrow{V(G)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{MG}.$$

Comme $\overrightarrow{V(G)}$ est le vecteur nul, on obtient :

$$\overrightarrow{V(M)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{MG}.$$

Propriété 3

> **Soit $(A_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système de n points pondérés, tel que la somme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ soit non nulle.**
>
> **Pour tout point M de $(\mathcal{E})$, on a la relation :**
>
> $$\overrightarrow{V(M)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{MG} \qquad \textbf{(relation (2))}.$$

EXEMPLE

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Considérons le système de points pondérés $(B, 1)$, $(C, -3)$, $(D, 1)$. La somme des coefficients affectés à B, C, D vaut -1, elle est non nulle, le système admet un barycentre G, vérifiant : $\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Utilisons le point A pour déterminer G :

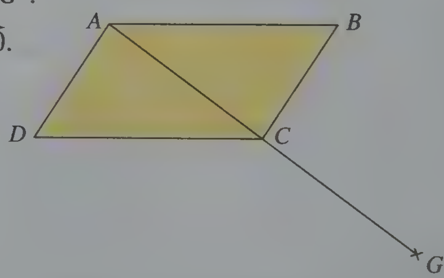
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

Or $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

$-\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CA}$, soit $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CA}$.

G est donc le symétrique du point A par rapport à C (voir figure).



Pour tout point M du plan, on aura : $\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MG}$.

Remarquons qu'ici, on a aussi :

$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GC}$, soit $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

G est le barycentre du système de points $(A, 0)$, $(B, 1)$, $(C, -3)$, $(D, 1)$, et aussi de $(A, 1)$, $(B, 0)$, $(C, -2)$, $(D, 0)$.

Il n'y a pas unicité des coefficients.

COURS

2. PROPRIÉTÉS DU BARYCENTRE

1. Invariance par multiplication des coefficients par une constante non nulle

Nous nous plaçons ici dans le cas où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ est non nul ; le système $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ admet alors un barycentre, noté G, défini par la relation vectorielle :

$\lambda_1 \overrightarrow{GA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

Il est clair que G ne dépend pas de l'ordre choisi pour les points pondérés (A_i, λ_i). La propriété suivante est alors immédiate :

Propriété 4

Soit k un nombre réel non nul, n un nombre entier supérieur ou égal à un, $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de points admettant un barycentre G. Alors le point G est aussi barycentre du système $(A_i, k\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.

□ *Remarques*

1° Si les coefficients λ_i, $1 \leq i \leq n$, sont tous égaux, le point G est l'isobarycentre des points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

2° Posons $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$; λ est non nul.

Soit G le barycentre du système $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.

G est aussi le barycentre du système $\left(A_i, \dfrac{\lambda_i}{\lambda}\right)_{1 \leq i \leq n}$.

$\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$ On peut donc toujours affecter les points A_i de coefficients dont la somme est égale à 1.

2. Associativité de la barycentration

Nous allons généraliser le résultat rencontré dans l'AP3.

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 3, p un nombre entier tel que : $2 \leq p \leq n - 1$.

Soit $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de points tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ soit non nul, et G le barycentre de ce système. On suppose de plus que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ est aussi non nul.

Le système de points $(A_1, \lambda_1), \dots, (A_p, \lambda_p)$ admet alors un barycentre, appelé **barycentre partiel**, noté G_p.

Le point G est défini par la relation vectorielle : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$, le point G_p par la relation : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{G_pA_i} = \vec{0}$. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (\overrightarrow{GG_p} + \overrightarrow{G_pA_i}) + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i GA_i = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) \overrightarrow{GG_p} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{G_pA_i} + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i}.$$

Or $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{G_pA_i} = \vec{0}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) \overrightarrow{GG_p} + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i}$.

Ce vecteur $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i}$ est le vecteur nul, par définition de G.

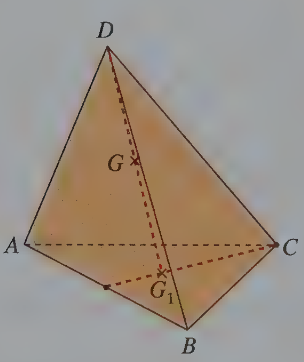
D'où : $\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) \overrightarrow{GG_p} + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Ceci définit G comme barycentre des points pondérés $\left(G_p, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right)$, (A_{p+1}, λ_{p+1}), ..., (A_n, λ_n).

Ici nous avons utilisé le barycentre des p premiers points. Mais comme l'ordre des points n'affecte pas la définition du barycentre, nous pouvons choisir tout système partiel de p points ayant un barycentre.

Propriété 5
Associativité de la barycentration

Soit $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de points pondérés, tel que la somme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ soit non nulle, et G le barycentre de ce système. On suppose qu'un système partiel de ces points admet un barycentre G'.
Alors G est le barycentre du point G', affecté de la somme des coefficients des points constituant le système partiel, et des points restants.



EXEMPLES

Soit $ABCD$ un tétraèdre, G le barycentre du système de points $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 3)$.

Appelons G_1 le centre de gravité du triangle ABC. D'après la propriété précédente, G est le barycentre de $(G_1, 3)$, $(D, 3)$ (on affecte à G_1 la somme des coefficients de A, B, C), donc G est le milieu du segment $[G_1D]$, ce qui permet de situer G dans ce tétraèdre.

3. Affixe d'un barycentre

Nous avons vu que, pour tout point O, la définition du barycentre se traduit par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \right). \qquad \text{D'où :} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i},$$

en se plaçant dans le plan complexe, où les points A_i ont pour affixe z_i et G pour affixe z_G.

EXEMPLE

Soit A, B, C les points d'affixes respectives :

$z_A = -1 + 2\mathrm{i}$, $\quad z_B = 2 - 3\mathrm{i}$, $\quad z_C = -1 + \mathrm{i}$.

L'isobarycentre G du triangle ABC a pour affixe :

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-1 + 2\mathrm{i} + 2 - 3\mathrm{i} - 1 + \mathrm{i}}{3} = 0.$$

C'est donc le point O, origine du repère.

3. CARACTÉRISATION DE DROITES ET SEGMENTS

Propriété 6

Soit A et B deux points distincts.
La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que :
$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \quad k \in \mathbb{R}.$
Ceci traduit la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

□ *Remarque.* Soit M un point de (AB).
$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ équivaut à : $\overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$, ou encore :
$(1-k)\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
Cette relation définit M comme le barycentre du système $(A, 1-k)$, (B, k).
Tout point de (AB) est donc barycentre des points A et B.

Propriété 7

Soit A et B deux points distincts.
Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que :
$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \quad k \in [0\,;1].$

□ *Démonstration.* Un point M de $[AB]$ est un point de (AB) tel que $\overrightarrow{AM}$ soit de même sens que $\overrightarrow{AB}$ et $AM \leqslant AB$.
M étant sur (AB), il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
$k \geqslant 0$ traduit : $\overrightarrow{AM}$ de même sens que $\overrightarrow{AB}$.
$|k| \leqslant 1$ traduit l'inégalité : $AM \leqslant AB$.

□ *Remarque.* M est alors le barycentre du système $(A, 1-k)$, (B, k) avec $1-k \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Tout point de $[AB]$ est donc barycentre des points A et B affectés de coefficients positifs.
Cherchons si nous pouvons déterminer ces coefficients de manière plus géométrique. Si M est un point de $[AB]$, on a la relation vectorielle :

$MB \times \overrightarrow{MA} + MA \times \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

M est donc le barycentre du système de points (A, MB), (B, MA).

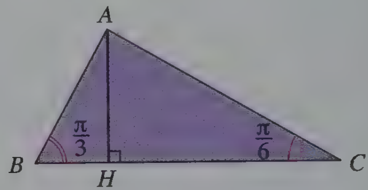
EXEMPLE

Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $\widehat{B} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{C} = \frac{\pi}{6}$. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Déterminons H comme barycentre de B et de C.

H est le barycentre de (B, HC), (C, HB).

$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{AH}{BH} = \sqrt{3}$ et $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{AH}{CH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D'où $BH = \frac{AH}{\sqrt{3}}$ et $CH = AH\sqrt{3}$.



H est le barycentre de $(B, AH\sqrt{3})$, $\left(C, \frac{AH}{\sqrt{3}}\right)$ ou encore du système $(B, 3)$, $(C, 1)$ (en multipliant les coefficients par la constante $\frac{\sqrt{3}}{AH}$, non nulle).

Traduction dans un repère

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace, (AB) une droite ; $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (D).
M appartient à (D) si, et seulement si, il existe k réel tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
Appelons (a, b, c) les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (x_0, y_0, z_0) celles du point A.

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb \\ z = z_0 + kc, \quad k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ceci constitue un système d'équations paramétriques de (D), et caractérise l'appartenance d'un point $M(x, y, z)$ à la droite (D).

□ *Remarque : cas d'une demi-droite.*
Appelons (D') la demi-droite $[AB)$.
M appartient à (D') si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, avec k réel positif. (En effet $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et de même sens.)
La relation $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}^+$ est donc la caractérisation vectorielle de la demi-droite $[AB)$.

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Lignes de niveau de $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ non nul

L'objectif de ce TP est d'étudier, suivant les valeurs du nombre réel k, l'ensemble des points M du plan tels que : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2 = k$; cet ensemble est appelé ligne de niveau k de l'application $f : M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2$.

Nous en avons vu un exemple dans l'AP4 avec trois points A, B, C et $f(M) = 2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2$.

1 ■ *Formule de Leibniz*

1° On pose $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA}_i^2$. Soit G le barycentre du système de points $(A_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (G existe car $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ est supposé non nul).

En décomposant $\overrightarrow{MA}_i^2$ en $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}_i)^2$, montrez que :

$$f(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA}_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i GA_i^2.$$

2° Déduisez-en : $f(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) MG^2 + f(G)$.

Ce résultat s'appelle la **formule de Leibniz.**

2 ■ *Ensemble de niveau de f*

1° Montrez que $f(M) = k$ équivaut à : $MG^2 = \dfrac{k - f(G)}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$.

2° Dans le plan.

En discutant suivant le signe de $\dfrac{k - f(G)}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$, déterminez les lignes de niveau k de f.

3° Dans l'espace.

En discutant de la même façon, déterminez, suivant la valeur de k, les « ensembles » de niveau k de f.

3 ■ *Applications*

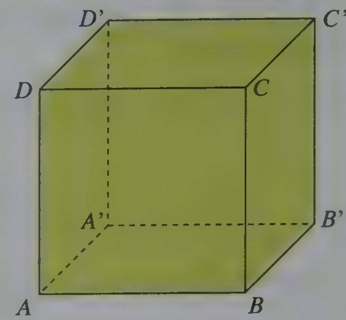
1° Soit ABC un triangle équilatéral de côtés de longueur a.

a) Déterminez un triplet de réels (α, β, γ) tels que le point I défini par $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB}$ soit le barycentre du système (A, α), (B, β), (C, γ).

b) Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que :

$MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = -a^2$.

Montrez qu'il passe par B, et représentez-le.



2° Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube, d'arêtes de longueur a.

Soit f l'application définie, pour tout point M de l'espace $(\mathcal{E})$, par :

$f(M) = MA^2 + MB'^2 + MC'^2 + MD^2$.

On note O le centre du cube.

a) Montrez que :

$f(M) = 4MO^2 + OA^2 + OB'^2 + OC'^2 + OD^2$.

b) Calculez alors $f(O)$.

c) Déterminez l'ensemble des points M de $(\mathcal{E})$ tels que : $f(M) = 6a^2$.
Montrez que c'est la sphère circonscrite au cube.

Vous retiendrez que :

> **L'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2 = k$, avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, est soit un cercle, soit un point, soit l'ensemble vide.**

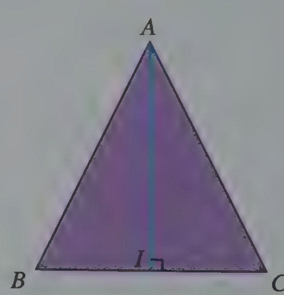
TP2 Lignes de niveau de $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ nul

Nous reprenons les notations du TP précédent.

Comme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ est nul, le vecteur $\overrightarrow{V(M)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ est un vecteur $\vec{V}$ constant.

1 ■ *Étude d'un exemple*

Soit a un nombre réel strictement positif, ABC un triangle équilatéral de côté de longueur a, I le milieu de $[BC]$.



A tout point M du plan, on associe :

$f(M) = 2MA^2 - MB^2 - MC^2$.

1° Calculez le vecteur $\vec{V}$.

2° Montrez que, pour tout point M, on a :

$f(M) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \vec{V} + f(A)$.

(On pourra décomposer MB^2 en $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})^2$ et MC^2 en $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})^2$.)

3° Déterminez $f(A)$, puis l'ensemble (E) des points M du plan tels que $f(M) = -2a^2$. On s'aperçoit qu'il s'agit d'une droite, orthogonale à (AI). Représentez-la.

4° Cherchons maintenant l'ensemble (E') des points M du plan tels que $f(M) = a^2$.

a) On cherche s'il existe un point H de la droite (AI) tel que $f(H) = a^2$. Montrez que l'on peut poser : $\overrightarrow{AH} = \lambda\vec{V}$ et calculez alors λ pour avoir $f(H) = a^2$. Quel est alors ce point H ?

b) Montrez que « M appartient à (E') » équivaut à : $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{V} = 0$. Déduisez-en l'ensemble (E').

c) Retrouvez ce résultat en calculant $f(B)$ et en écrivant $f(M)$ sous la forme : $f(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \vec{V} + f(B)$.
Nous remarquons que (E) et (E') sont deux droites parallèles, orthogonales au vecteur $\vec{V}$ constant.

2 ■ *Étude générale*

1° En choisissant un point O fixé du plan, et en décomposant $\overrightarrow{MA_i}^2$ en $(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i})^2$, montrez la relation : $f(M) = 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{V} + f(O)$.

2° On suppose $\vec{V}$ égal au vecteur nul. Déterminez alors, suivant k, les lignes de niveau k de f.

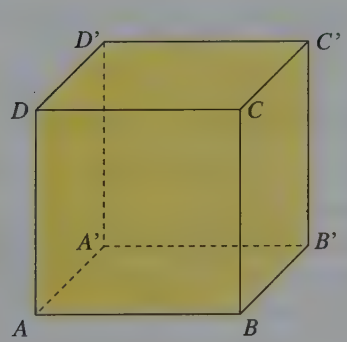
3° On suppose $\vec{V}$ distinct du vecteur nul.
$f(M) = k$ équivaut alors à $2\overrightarrow{OM} \cdot \vec{V} = f(O) - k$.
Soit (D) la droite passant par O dont un vecteur directeur est $\vec{V}$.

a) Montrez qu'il existe un unique point H de (D) tel que $f(H) = k$. (On pourra poser $\overrightarrow{OH} = \lambda\vec{V}$, et déterminer λ tel que $f(H) = k$.)

b) Montrez que : $f(M) = k$ équivaut à $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{V} = 0$.

c) Déterminez alors, dans le plan, les lignes de niveau k de f.

3 ■ *Un exemple dans l'espace*



Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube de centre O et soit f définie par :

$f(M) = MA^2 + MB'^2 - MC'^2 - MD^2$.

1° Soit $\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB'} - \overrightarrow{MC'} - \overrightarrow{MD}$.
Montrez que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{V(M)}$ est un vecteur constant égal à $2\overrightarrow{DA}$.

2° Calculez $f(O)$ et déduisez-en la relation :

$f(M) = 4\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{DA}$.

3° On cherche les points de l'espace tels que $f(M) = -2a^2$. Soit I le milieu de $[AB']$.

a) Montrez que $\overrightarrow{IO}$ est colinéaire à $\overrightarrow{DA}$, et calculez $f(I)$.

b) Déduisez-en que «l'ensemble» de niveau $-2a^2$ de f est le plan $(ABB'A')$.

4° Retrouvez ce résultat en décomposant f sous la forme : $f(M) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \vec{V} + f(A)$, et en calculant $f(A)$.

Vous retiendrez les résultats suivants :

Dans le plan, soit (A_i, λ_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, un système de points pondérés tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.

Posons : $\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ et $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2$.

• Si $\vec{V} = \vec{0}$, l'ensemble de niveau k de f est, soit l'ensemble vide, soit $(\mathcal{E})$.

• Si $\vec{V} \neq \vec{0}$, la ligne de niveau k de f est une droite orthogonale à $\vec{V}$.

TP3 Lignes de niveau de $M \mapsto \dfrac{MA}{MB}$

A et B sont deux points du plan, k un nombre réel.

L'objectif de ce TP est de déterminer l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$.

Comme MA et MB sont des distances, nous nous limiterons à $k > 0$.

1 ■ *Étude générale*

1° On suppose $k = 1$. $\dfrac{MA}{MB} = 1$ équivaut à $MA = MB$. Déterminez alors l'ensemble (E_1).
Nous retrouverons ce résultat dans la suite.

2° Montrez que $\dfrac{MA}{MB} = k$ équivaut à $MA^2 - k^2 MB^2 = 0$.

On pose $f(M) = MA^2 - k^2 MB^2$. L'ensemble (E_k) cherché est l'ensemble des points M tels que $f(M) = 0$.

a) On suppose $k \neq 1$. D'après les résultats du TP1, quelle est la nature de (E_k) ?

b) On suppose $k = 1$. D'après les résultats du TP2, quelle est la nature de (E_1) ? En remarquant que le milieu de $[AB]$ est un point de (E_1), retrouvez le résultat de la question **1°**.

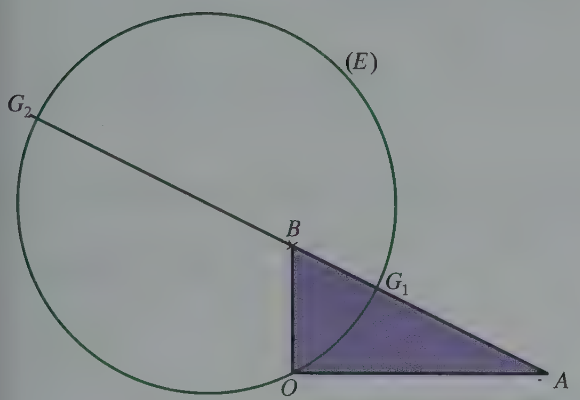
3° On suppose k distinct de 1.
Soit G_1 le barycentre du système $(A, 1)$, (B, k),
G_2 le barycentre du système $(A, 1)$, $(B, -k)$.

a) Justifiez l'existence de G_1 et G_2.

b) Montrez que $\dfrac{MA}{MB} = k$ équivaut à $\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$.

c) Précisez alors l'ensemble (E_k).

2 ■ *Application*



Soit a un nombre réel strictement positif, OAB un triangle rectangle en O tel que :

$OA = 2a, \quad OB = a.$

On cherche à déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$\frac{MA}{MB} = 2.$$

1° Montrez que O appartient à (E).

2° Soit G_1 le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$.
G_2 le barycentre de $(A, 1)$, $(B, -2)$.

a) Montrez que G_2 est le symétrique de A par rapport à B. Construisez alors G_2.

b) Déterminez la nature de (E). Déduisez-en que G_1 est situé sur la droite orthogonale à (OG_2) passant par O. Construisez alors G_1, puis (E).

Vous retiendrez les résultats suivants :

> **• L'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = 1$ est la médiatrice de $[AB]$.**
>
> **• L'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$ $(k > 0, \quad k \neq 1)$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$, G_1 et G_2 étant respectivement les barycentres des systèmes $(A, 1)$, (B, k) et $(A, 1)$, $(B, -k)$.**

TP4 Utilisation du barycentre pour les problèmes de concours et d'alignement

L'objectif de ce TP est de montrer comment l'utilisation de barycentres permet de résoudre des problèmes d'alignement, de droites concourantes, ou de points coplanaires.

1 ■ *Premier exercice : problèmes d'alignement*

ABC est un triangle, a, b, c trois nombres réels deux à deux distincts.

On note : A' le barycentre du système $(A, 0)$, (B, b), $(C, -c)$,
B' le barycentre du système $(A, -a)$, $(B, 0)$, (C, c),
C' le barycentre du système (A, a), $(B, -b)$, $(C, 0)$.

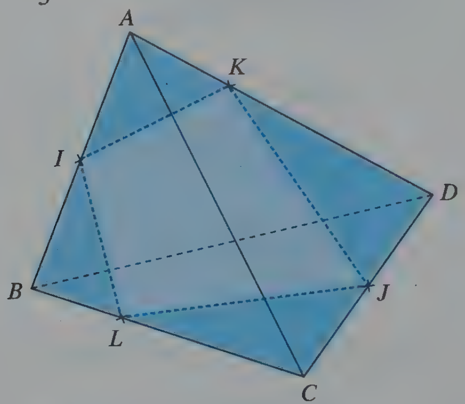
1° Justifiez l'existence des points A', B', C'. Faites une figure en prenant $a = 2, \quad b = 1, \quad c = -1$.

2° A tout point M du plan, on associe le vecteur $\overrightarrow{V(M)}$ défini par :
$\overrightarrow{V(M)} = (b-c)\overrightarrow{MA'} + (c-a)\overrightarrow{MB'} + (a-b)\overrightarrow{MC'}$.
Montrez que $\overrightarrow{V(M)}$ est le vecteur nul.

3° Montrez que les points A', B', C' sont alignés (on pourra utiliser $\overrightarrow{V(A')}$).

2 ■ *Deuxième exercice : droites concourantes, points coplanaires*

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$.
On définit les points K et L par les relations vectorielles suivantes : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\quad \overrightarrow{BL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.



1° Exprimez K comme barycentre de A et D, L comme barycentre de B et C.

2° Soit G le barycentre du système $(A, 2)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$.
En utilisant l'associativité du barycentre, montrez que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en G. Déduisez-en que les points I, K, J, L sont coplanaires.

3° Toujours avec l'associativité de la barycentration, exprimez K comme barycentre de I, J et L. Retrouvez alors que I, J, K, L sont coplanaires.

4° De manière plus générale, soit A, B, C trois points non alignés de l'espace $(\mathcal{E})$.
On suppose que a, b, c sont des nombres réels de somme non nulle, et G le barycentre du système (A, a), (B, b), (C, c). Montrez que G appartient au plan (ABC).

TP5 Barycentres et optimisation

L'objectif de ce TP est de résoudre des problèmes de minimum ou maximum à l'aide du barycentre.

1 ■ *Minimum de $MA^2 + MB^2 + MC^2$*

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$. Pour tout point M du plan, on pose $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.
On note m_a, m_b, m_c les longueurs des médianes $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$.

1° Montrez la relation : $\quad f(M) = 3MG^2 + f(G)$, $\quad$ où G est le centre de gravité de ABC.

2° Montrez que : $\quad f(G) = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$.

3° Théorème de la médiane. Montrez que :

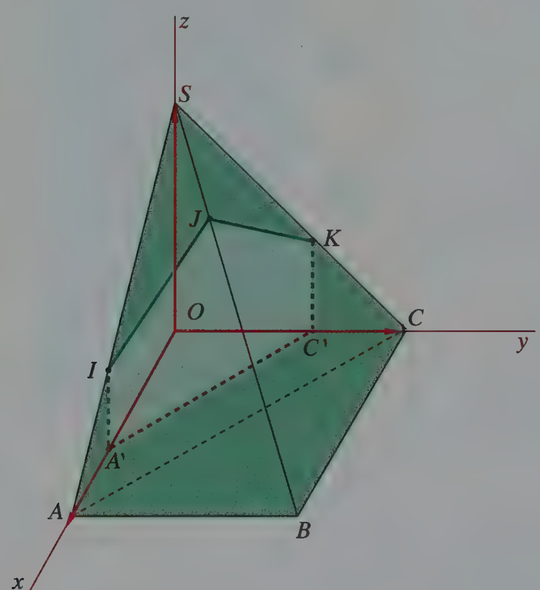
$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

Calculez alors m_a en fonction des longueurs des côtés : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

4° Montrez que f admet un minimum en G, et calculez ce minimum en fonction de a, b, c.
Application numérique : calculez ce minimum lorsque $a = 2$, $b = c = 4$.

2 ■ *Aire maximale d'une intersection d'une pyramide et d'un plan*

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal, A, B, C, S les points définis par : $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OS} = \vec{k}$.
Soit a un nombre réel de $]0\,;1[$. On se propose de déterminer l'intersection du plan (P) d'équation $x + y = a$ avec la pyramide $SOABC$, et le maximum de l'aire de cette intersection.



1° (OA) coupe (P) en A', (OC) en C', (SA) en I, (SB) en J, (SC) en K. Montrez que $A'C'KI$ est un rectangle. Déterminez son aire.

2° Déterminez les coordonnées de J ; calculez alors l'aire du triangle IJK.

3° Déterminez alors l'aire du pentagone $A'C'KJI$.

4° Soit f la fonction définie sur $]0\,;1[$ par $f(a) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}(4 - 3a)$.
Étudiez les variations de f sur $]0\,;1[$. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle maximale ?

5° Déduisez-en la position du plan (P) qui réalise le maximum de l'aire délimitée par son intersection avec la pyramide $SOABC$. Montrez que c'est le plan parallèle à (AC) et (OS), passant par l'isobarycentre du triangle OAC.

FICHE MÉTHODE

Comment utiliser un barycentre

1	**Pour simplifier l'écriture d'un vecteur.**	$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$ avec G barycentre de (A, a), (B, b), (C, c) $(a+b+c \neq 0)$.
2	**Pour démontrer que trois points A, B, C sont alignés.**	Il suffit de montrer que l'un des points est barycentre des deux autres.
3	**Pour démontrer que quatre points A, B, C, D sont coplanaires.**	Il suffit de montrer que l'un des points est barycentre des trois autres.
4	**Pour démontrer que des droites sont concourantes.**	• Deux droites distinctes (AB) et (CD) sont concourantes s'il existe un point G à la fois barycentre de A et B et de C et D. • On utilise l'associativité du barycentre.
5	**Pour déterminer des lignes de niveau.**	On utilise la formule de Leibniz : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i GA_i^2$.

EXERCICES COMMENTÉS

Exercice 1

Énoncé

Soit ABC un triangle rectangle, tel que $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 5$ cm. On note I le milieu de $[BC]$. A tout point M du plan, on associe le nombre réel $f(M)$ défini par : $f(M) = 7MA^2 - 16MB^2 + 9MC^2$.

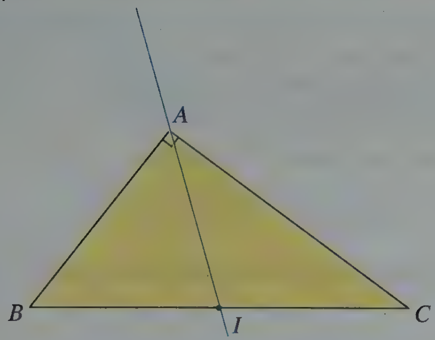
1° Calculez $f(A)$ et $f(I)$.

2° Déterminez la ligne de niveau zéro de f.

Solution

Nous sommes ici en présence de $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}^2$, avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ nul.

Nous connaissons donc, a priori, la nature même de la ligne de niveau zéro de f : soit l'ensemble vide, soit le plan, soit une droite.



1° $f(A) = -16AB^2 + 9AC^2$,

$f(A) = -16 \times 9 + 9 \times 16 = 0$.

I est le milieu de $[BC]$ et, comme le triangle est rectangle en A, le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Donc $IA = IB = IC$.

$f(I) = 7IA^2 - 16IB^2 + 9IC^2 = (7 - 16 + 9)IA^2 = 0$.

2° A et I sont donc situés sur la ligne de niveau zéro de f. Celle-ci n'est donc pas vide.

$f(B) = 7BA^2 + 9BC^2$.

$f(B)$ est non nul, donc la ligne de niveau n'est pas le plan. C'est donc une droite.
La ligne de niveau zéro de f est donc la droite (AI).

□ *Remarque*. Il est inutile ici de déterminer le vecteur constant $\overrightarrow{V(M)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$, qui sert dans un cas plus général.

Exercice 2

Énoncé

Soit ABC un triangle, A' le barycentre du système $(B, 2)$, $(C, -1)$, B' celui du système $(A, 6)$, $(C, 1)$, C' celui du système $(A, 3)$, $(B, 1)$.

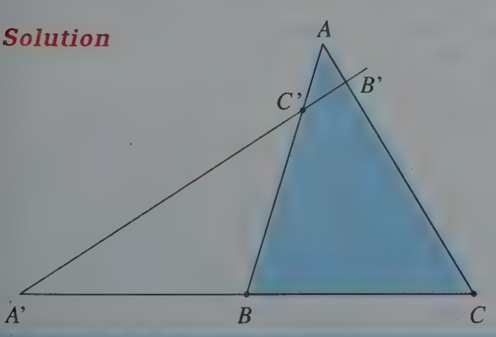
1° Faites une figure situant les points A', B', C'.

2° a) Montrez que C' appartient à la droite $(A'B')$ s'il existe des coefficients α et β tels que C' soit le barycentre du système (A', α), (B', β).

b) Montrez que : « C' barycentre du système (A', α), (B', β) » équivaut à « C' barycentre du système $\left(A, \frac{6\beta}{7}\right)$, $(B, 2\alpha)$, $\left(C, -\alpha + \frac{\beta}{7}\right)$ ». (On pourra utiliser l'associativité de la barycentration.)

c) Concluez alors à l'alignement des points A', B', C'.

Solution



1° A' est défini par la relation vectorielle :

$2\overrightarrow{A'B} - \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$, ou encore $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{BC}$.

B' est défini par :

$6\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = \vec{0}$, ou encore $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$.

C' est défini par :

$3\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

2° a) Pour montrer l'alignement de trois points, il suffit de montrer que l'un des points est barycentre des deux autres (voir fiche méthode).
Donc, pour montrer l'alignement des points A', B', C', il suffit de trouver des coefficients α et β tels que C' soit le barycentre du système (A', α), (B', β) (avec $\alpha + \beta \neq 0$).

b) A' est le barycentre du système $(B, 2)$, $(C, -1)$. Donc le barycentre du système $(B, 2\alpha)$, $(C, -\alpha)$ est le point A', que l'on affecte de la somme des coefficients, soit ici α.
B' est le barycentre du système $(A, 6)$, $(C, 1)$.
Nous voulons trouver B' affecté du coefficient β, donc considérer B' comme barycentre du système $\left(A, \frac{6\beta}{7}\right)$, $\left(C, \frac{\beta}{7}\right)$. (Pour trouver la somme des coefficients égale à β, on sait que l'on ne change pas le barycentre en multipliant les coefficients par une constante non nulle.)
C' barycentre du système (A', α), (B', β) équivaut alors à C' barycentre du système $(B, 2\alpha)$, $(C, -\alpha)$, $\left(A, \frac{6\beta}{7}\right)$, $\left(C, \frac{\beta}{7}\right)$, soit, en réordonnant et en regroupant les coefficients du point C, C' barycentre du système $\left(A, \frac{6\beta}{7}\right)$, $(B, 2\alpha)$, $\left(C, -\alpha + \frac{\beta}{7}\right)$.

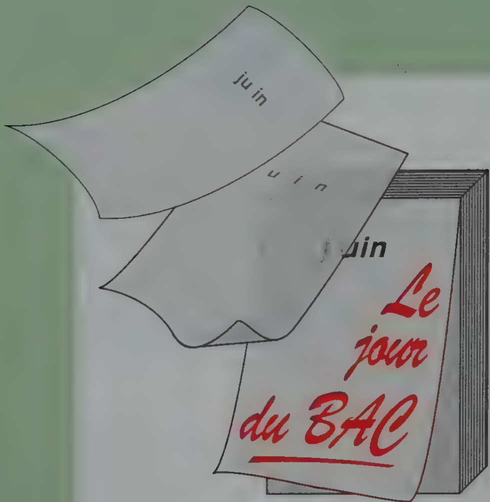
c) Nous savons que C' est le barycentre du système $(A, 3)$, $(B, 1)$, et donc $(A, 3)$, $(B, 1)$, $(C, 0)$.
Deux barycentres de trois points coïncident si leurs coefficients sont proportionnels.

Le barycentre du système $\left(A, \frac{6\beta}{7}\right)$, $(B, 2\alpha)$, $\left(C, -\alpha + \frac{\beta}{7}\right)$ sera celui du système $(A, 3)$, $(B, 1)$, $(C, 0)$, ou encore le point C', s'il existe α et β réels de somme non nulle tels que :

$$\begin{cases} \frac{6\beta}{7} = 3 \times 2\alpha \\ -\alpha + \frac{\beta}{7} = 0, \quad \text{soit} \quad \beta = 7\alpha. \end{cases}$$

Le point C' est donc le barycentre du système (A', α), $(B', 7\alpha)$ avec α non nul, ou encore le barycentre du système $(A', 1)$, $(B', 7)$.

Les points A', B', C' sont donc alignés.



Énoncé

Bac C, 1990. Extrait.

ABC est un triangle, on pose $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. A' est le milieu du segment $[BC]$, B' celui de $[AC]$, C' celui de $[AB]$. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC.

1° Montrez que, pour tout point M du plan,

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

2° En calculant de deux façons différentes $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$, établissez que :

$$2\,\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6}.$$

3° On considère les points communs aux cercles de diamètre $[AA']$ et $[BC]$. Montrez que, lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b, c.

MOT CLÉ
« Isobarycentre »

Analyse du problème

Dans la première question, il faut décomposer MA^2 en $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2$, puis MB^2 et MC^2, pour faire apparaître $3MG^2$. Il suffira alors de calculer $GA^2 + GB^2 + GC^2$. Au candidat de penser au théorème de la médiane.

Dans la deuxième question, il faut se laisser guider par le texte ; $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$.

Pour faire apparaître $\overrightarrow{MA'}$, il faut regrouper $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, qui vaut $2\,\overrightarrow{MA'}$, et donc décomposer $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$ en $[\overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})]^2$.

Dans la troisième question, l'énoncé propose de trouver un cercle de centre G ; il faut donc aboutir à une distance MG constante.

De plus, l'appartenance d'un point au cercle de diamètre $[AA']$ (respectivement $[BC]$), peut se traduire par : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MA'} = 0$ (respectivement $\overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{MC} = 0$).

Ces produits scalaires apparaissent d'ailleurs dans la deuxième question.

Une solution

1° $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$;

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + 2\,\overrightarrow{MG}\,.\,(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Or $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, G étant l'isobarycentre de ABC, donc :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2. \quad (1)$$

Or, $AG = \frac{2}{3}AA'$, donc $GA^2 = \frac{4}{9}AA'^2$.

Appliquons le « théorème de la médiane » :

$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$, qui permet de calculer AA'^2 : $c^2 + b^2 = 2AA'^2 + \frac{a^2}{2}$;

$AA'^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$; d'où $GA^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$.

Les sommets jouant des rôles symétriques, on a :

$$GB^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{9}, \quad GC^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{9}$$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{9} = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

En reportant dans l'égalité (1), on a bien :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

2° $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = (3\,\overrightarrow{MG})^2 = 9MG^2$.

$[\overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})]^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\,\overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{MC} + 2\,\overrightarrow{MA}\,.\,2\,\overrightarrow{MA'}$

(car $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MA'}$). En égalant les deux expressions de $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$, on a :

$$9MG^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 2\,\overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{MC} + 4\,\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MA'}.$$

$$2\,\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6}.$$

3° Si M est un point commun aux deux cercles de diamètres respectifs $[AA']$ et $[BC]$, alors $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MA'} = 0$ et $\overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{MC} = 0$. D'où :

$$3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6} = 0, \quad MG = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{18}}.$$

La distance MG est donc constante, M est bien sur un cercle fixe de centre G, de rayon :

$$R = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{18}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}.$$

Exercices et problèmes

Q.C.M.

Dans chacun des cas, une ou plusieurs réponses sont exactes.

1 *ABCD* est un parallélogramme, de centre *O*. Pour tout point *M* du plan, le vecteur $\vec{V}(M)$ suivant est le vecteur nul :

$\vec{V}(M) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ .... ☐
$\vec{V}(M) = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ .... ☐
$\vec{V}(M) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ .... ☐
$\vec{V}(M) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - 2\overrightarrow{MO}$. .... ☐

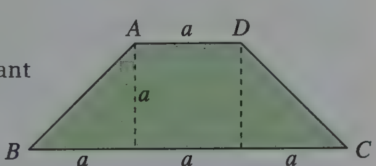
2 *A*, *B*, *C*, *D* sont les points d'affixes respectives $2 + 3i$, $1 - i$, $1 + i$, $4 + i$, *G* l'isobarycentre de *ABCD* :

G a pour affixe $2 + i$ .... ☐
G a pour affixe $1 + 2i$ .... ☐
G est situé sur la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ .... ☐

3 *A* et *B* sont deux points distincts, *x* un nombre réel positif. L'ensemble des barycentres de $(A, 1)$, (B, x), lorsque *x* décrit $\mathbb{R}^+$, est :

le segment $[AB]$ .... ☐
le segment $[AB]$ privé de *A* .... ☐
le segment $[AB]$ privé de *B* .... ☐

4 On considère la figure représentant un trapèze *ABCD* :



A est barycentre de $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 3)$ .... ☐
B est barycentre de $(A, 3)$, $(C, 1)$, $(D, -3)$ .... ☐
C est barycentre de $(A, 3)$, $(B, -1)$, $(D, -3)$ ...... ☐
D est barycentre de $(A, 3)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$ .... ☐

5 Soit *ABC* un triangle, dont les sommets *B* et *C* sont fixes, *A* variable sur un cercle de rayon *R*. On note *G* le centre de gravité de *ABC*.
L'ensemble des points *G*, lorsque *A* varie est :

un cercle de même rayon .... ☐
un cercle de rayon $\frac{R}{3}$ .... ☐
un cercle de rayon $\frac{2R}{3}$ .... ☐

6 Soit *ABCD* un carré de côté de longueur *a* $(a > 0)$, $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit à ce carré. $(\mathscr{C})$ est l'ensemble des points *M* du plan tels que :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4a^2$ .... ☐
$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 2a$ .... ☐
$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\|$ .... ☐

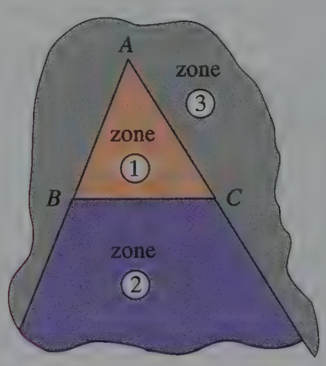
7 *A* et *B* sont fixes. A tout point *M* du plan, on associe *M'* tel que *M'* soit le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(M, 1)$.
L'application $M \mapsto M'$ est :

une homothétie de rapport $\frac{1}{4}$ .... ☐
une homothétie de rapport $\frac{1}{3}$ .... ☐
une translation .... ☐

8 *ABCD* est un tétraèdre quelconque, *I*, *J*, *K*, *L*, *M*, *N* les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$, $[BD]$.
Les droites (IJ), (MN), (KL) sont :

coplanaires .... ☐
deux à deux orthogonales .... ☐
concourantes .... ☐

9 *ABC* est un triangle. Les demi-droites $[AB)$, $[AC)$, et le segment $[BC]$ régionnent le plan en trois zones :



le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$
est situé dans la zone 1 .... ☐
le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$
est situé dans la zone 2 .... ☐
tout point de la zone 2 est barycentre
de (A, α), $(B, 2)$, $(C, 3)$ avec α négatif .... ☐
tout barycentre de (A, α), $(B, 2)$, $(C, 3)$
est sur la droite (AA') avec A' barycentre
de $(B, 2)$, $(C, 3)$, α réel .... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

10 ■ Soit A, B, C trois points non alignés du plan (P), et λ un réel.
Soit M le barycentre de $(A, 1-2\lambda)$, (B, λ), (C, λ).

1° Vérifiez que ce barycentre existe.

2° Quel est l'ensemble des points M :

a) quand λ décrit $\mathbb{R}$?

b) quand λ décrit $[0\,;\,1]$?

11 ■ Soit A, B, C trois points non alignés, d'isobarycentre G. Soit k un réel. On définit les points A', B', C' par :

$\overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC}$; $\quad \overrightarrow{CB'} = k\overrightarrow{CA}$; $\quad \overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB}$.

Montrez que A', B', C' ont aussi pour isobarycentre G.

12 ■ Soit n un nombre entier tel que $n \geqslant 2$.
A_1, A_2, ..., A_n sont n points de l'espace $(\mathcal{E})$, d'isobarycentre G.
B_1, B_2, ..., B_n sont n points de $(\mathcal{E})$, d'isobarycentre G'.

Montrez que le vecteur $\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i}$ est colinéaire à $\overrightarrow{GG'}$.

13 ■ Soit (P) un plan, et $ABCD$ un rectangle. On définit, pour tout point M de (P), le vecteur $\overrightarrow{V(M)}$ par :

$\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + m\overrightarrow{MD}$,

m étant un paramètre réel.

1° Déterminez m tel que $\overrightarrow{V(M)}$ soit indépendant du point M.

2° M étant l'un des points de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$, déterminez m pour que $\|\overrightarrow{V(M)}\|$ soit indépendant de M.

14 ■ Soit (P) le plan complexe, A et B deux points d'affixes respectives $1 + \mathrm{i}$ et $-2 + 3\mathrm{i}$.
Déterminez le point C tel que le triangle ABC ait pour centre de gravité le point O.

15 ■ Soit A, B, C, D quatre points de l'espace, a, b, c, d quatre nombres réels de somme nulle. On suppose que $a + b$ est non nul. Soit G_1 le barycentre du système de points (A, a), (B, b), G_2 le barycentre du système de points (C, c), (D, d).

1° Soit $\overrightarrow{V(M)}$ le vecteur défini, pour tout point M de l'espace, par la relation :

$\overrightarrow{V(M)} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} + d\overrightarrow{MD}$.

Montrez que $\overrightarrow{V(M)}$ est un vecteur constant $\vec{V}$.

2° Montrez que $\overrightarrow{G_1G_2}$ est colinéaire à $\vec{V}$.

16 ■ Soit $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux tétraèdres de l'espace $(\mathcal{E})$.

1° Montrez que ces deux tétraèdres ont même isobarycentre si, et seulement si, on a la relation vectorielle :

$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$.

2° On suppose que A' est l'isobarycentre du triangle BCD, B' celui de CDA, C' celui de DAB, D' celui de ABC.
Montrez que les tétraèdres $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ont même isobarycentre.

17 ■■ Soit $ABCD$ un tétraèdre, k un nombre réel différent de -1.
On appelle M le barycentre de $(A, 1)$, (B, k), M' le barycentre de $(C, 1)$, (D, k).

1° Justifiez l'existence des points M et M'. Exprimez le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

2° Montrez alors que, lorsque k varie dans $\mathbb{R} - \{-1\}$, la droite (MM') reste parallèle à un plan fixe.

18 ■ 1° Soit $ABCD$ un parallélogramme.
Montrez que, pour tout point M, les triangles MAC et MBD ont même centre de gravité.

2° Soit $ABCDA'B'C'D'$ un parallélépipède de centre O.

a) Montrez que les triangles $AB'D'$ et $AA'C'$ ont même centre de gravité G, et que les points A', O, G, C sont alignés.

b) On note de même G' le centre de gravité du triangle $BA'C'$. Montrez que la droite (GG') est parallèle à l'une des arêtes du parallélépipède.

19 ■ Soit A et B les points d'affixes respectives $1 + 2\mathrm{i}$ et $3 + 4\mathrm{i}$.

1° Déterminez l'affixe du point G_1, barycentre du système $(A, 1)$, $(B, 3)$, et l'affixe du point G_2, barycentre du système $(A, 1)$, $(B, -3)$.

2° Déduisez-en l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\left|\dfrac{z - 1 - 2\mathrm{i}}{z - 3 - 4\mathrm{i}}\right| = 3$.

Associativité de la barycentration

20 ■■ Soit ABC un triangle, de centre de gravité G.
On note :
G_1 le barycentre du système $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$,
G_2 celui du système $(A, 2)$, $(B, 3)$, $(C, 1)$,
G_3 celui du système $(A, 3)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$.

1° En utilisant l'associativité de la barycentration, montrez que G est aussi le centre de gravité du triangle $G_1G_2G_3$.

2° Montrez que chaque médiane de l'un des triangles est parallèle à un côté de l'autre triangle.

21 ■ Soit A, B, C, D, E cinq points quelconques du plan. On considère les segments joignant le milieu du segment défini par deux des points au centre de gravité du triangle formé par les trois autres.

1° Combien de segments peut-on ainsi former ?

2° En utilisant l'associativité de la barycentration, montrez que ces segments ont un point commun, qui les partage tous dans le même rapport.

22 ■■ Soit ABC un triangle, B' le milieu de $[AC]$, C' celui de $[AB]$, et D le barycentre de $(A, 3)$, $(B, 2)$.
Soit I le barycentre du système $(A, 3)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$.

1° Montrez que I est barycentre du système $(D, 5)$, $(C, 1)$ et également du système $(B', 1)$, $(C', 2)$.
Montrez alors que $(B'C')$ et (CD) concourent en I.

2° La droite (AI) coupe (BC) en E. Déterminez la position de E.

3° B et C restent fixes. Le point A se déplace dans le plan, privé de (BC), le segment $[AE]$ conservant une longueur constante. Déterminez les lieux géométriques de I et D (on pourra faire apparaître des homothéties).

23 ■■ Soit ABC un triangle isocèle, tel que $BC = 2a$, $AB = AC = 3a$.
On note H l'orthocentre du triangle ABC.

1° Montrez qu'il existe des coefficients α, β, γ tels que H soit le barycentre du système (A, α), (B, β), (C, γ).

2° On note B' le projeté orthogonal de B sur (AC). En utilisant l'associativité de la barycentration, montrez que B' est le barycentre du système (A, α), (C, γ).

3° Calculez $\cos \widehat{A}$, puis $\dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$.

Exprimez alors B' comme barycentre de A et de C.

4° Déduisez-en des coefficients (α, β, γ) tels que H soit le barycentre de (A, α), (B, β), (C, γ).

24 ■ Soit A, B, C, D quatre points de l'espace $(\mathscr{E})$.
On note :
G le barycentre $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$, $(D, 1)$,
A' le barycentre du système $(B, 1)$, $(C, 2)$, $(D, 1)$,
B' celui du système $(A, 2)$, $(C, 2)$, $(D, 1)$,
C' celui du système $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(D, 1)$,
D' celui du système $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$,
I le milieu de $[AC]$, J le milieu de $[BD]$.
Montrez que les droites (AA'), (BB'), (CC'), (DD') et (IJ) sont concourantes en G.

Barycentres et constructions géométriques

25 ■ Soit $[AB]$ un segment, $(\mathscr{D})$ une droite passant par A, distincte de (AB), $(\mathscr{D}')$ la parallèle à $(\mathscr{D})$ passant par B. Soit $\dfrac{p}{q}$ un nombre rationnel différent de 1, $\vec{i}$ un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$.
On définit C et D par les relations vectorielles :
$\overrightarrow{AC} = p\vec{i}$ et $\overrightarrow{BD} = q\vec{i}$.

1° Montrez que la droite (CD) coupe (AB) en un point G, barycentre du système de points (A, q), $(B, -p)$, et que ceci permet de construire tout barycentre G du système (A, α), (B, β) tel que $\dfrac{\alpha}{\beta}$ soit un nombre rationnel distinct de -1.

2° Effectuez la construction à la règle et au compas lorsque :

a) $p = 2$, $q = 3$, du barycentre du système de points $(A, 3)$, $(B, -2)$.

b) $p = -2$, $q = 3$, du barycentre du système de points $(A, 3)$, $(B, 2)$.

26 ■■ Soit $ABCD$ un carré de côtés de longueur a ; on note O le centre du carré.

1° Construisez à la règle et au compas, le barycentre G_1 du système $(A, 3)$, $(B, 4)$ et le barycentre G_2 du système $(B, 3)$, $(C, 4)$.

2° On note :

G_3 le barycentre du système $(C, 3)$, $(D, 4)$,
G_4 le barycentre du système $(D, 3)$, $(A, 4)$.

Utilisez l'associativité de la barycentration pour montrer que O est le milieu de $[G_1G_3]$ et de $[G_2G_4]$.
Construisez alors G_3 et G_4.

3° Montrez que $G_1G_2G_3G_4$ est un carré, dont on déterminera la longueur des côtés.

27 ■■ Soit ABC un triangle d'isobarycentre G, et P un point appartenant à (BC), distinct de B et C.
On pose $k = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$. Soit Q le barycentre du système $(A, 1)(C, -k)$, R le barycentre du système $(B, 1)$, $(A, -k)$.

1° Montrez que le triangle PQR a pour isobarycentre G.

2° On se propose de construire, à partir du point P, le triangle PQR.

a) Montrez que l'on peut construire le milieu I de $[QR]$.

b) Soit $(\mathscr{D})$ la droite transformée de (AB) dans la symétrie par rapport à I. Montrez que Q appartient à $(\mathscr{D})$.

c) Construisez alors les points Q et R.

Barycentres et lieux géométriques

28 ■■ A, B, C, D sont quatre points non coplanaires de l'espace $(\mathscr{E})$, I et J les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. m est un nombre réel non nul. On lui associe G_m, barycentre du système de points pondérés $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, m-2)$, (D, m).

1° Vérifiez l'existence de G_m.

2° Construisez les points $G_1(m = 1)$ et $G_2(m = 2)$. Montrez que G_2 est le milieu du segment $[G_1J]$.

3° Montrez que, pour tout m :

$$\overrightarrow{IG_m} = \frac{(m-2)}{2m}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.$$

Déduisez-en que l'ensemble (E) des points G_m, lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$, est inclus dans un plan fixe.

4° Montrez que $m\overrightarrow{JG_m}$ est un vecteur constant. Déduisez-en l'ensemble (E).

(Bac C.)

29 ■■ Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles de même centre O et de rayons respectifs R et R' vérifiant : $O < R' < R$.
Soit P un point fixé de $(\mathcal{C}')$. A chaque point A de $(\mathcal{C}')$ distinct de P on associe la droite passant par P et orthogonale à (AP), qui coupe $(\mathcal{C})$ en B et C.

1° On note G le centre de gravité du triangle ABC. Montrez que G est un point fixe du segment $[OP]$.

2° On note I le milieu de $[BC]$. Déterminez le lieu géométrique de I, lorsque A décrit $(\mathcal{C}') - \{P\}$.

30 ■■ Soit (P) et (P') deux plans sécants suivant une droite (D), A un point n'appartenant ni à (P), ni à (P'). On se propose de chercher les points M du plan (P) tels qu'il existe un point M' de (P') vérifiant la propriété suivante : A est le barycentre du système $(M, 1)$, $(M', -2)$.

1° Montrez que, si M convient, il est l'image du point M' par une homothétie h de centre A.

2° Montrez alors que M est dans le plan $h((P'))$.

3° Déduisez-en que l'ensemble des points M est une droite parallèle à (D).

Barycentres et applications ponctuelles

31 ■ Soit $ABCD$ un carré du plan (P).

1° Construisez le point G barycentre du système $(A, 2)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$.

2° Construisez l'ensemble (Γ) des points M de (P) tels que :

$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

3° Soit f l'application qui, à tout point M du plan, associe M' défini par :

$\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Montrez que f est une homothétie.

32 ■ On donne dans un plan (P) deux points distincts A et B.

1° Déterminez la condition sur le couple de nombres réels (α, β) pour que, pour tout point M de (P), il existe un unique point M' de (P) tel que :

$\alpha\overrightarrow{M'A} + \beta\overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$.

2° On suppose cette condition réalisée, et on désigne par f l'application qui à M associe le point M'.

a) Déterminez, suivant les valeurs du couple (α, β), l'ensemble des points invariants par f.

b) On suppose $\alpha + \beta = 0$. Exprimez le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de α et $\overrightarrow{AB}$, et concluez sur la nature de l'application f.

c) On suppose $\alpha + \beta \neq 0$. Montrez que f est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

(Bac C.)

Lignes de niveau

33 ■ Dans un plan on considère un losange $ABCD$ dont la longueur de la diagonale $[AC]$ est égale à la longueur des côtés du losange, notée a.

1° Montrez que, pour tout point M du plan, on a

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BD} + \dfrac{a^2}{2}$.

2° Quel est l'ensemble des points M tels que :

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}^2$?

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}^2 + \dfrac{a^2}{2}$?

c) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \dfrac{a^2}{2}$?

34 ■■ Soit ABC un triangle. On désigne par a, b, c les longueurs respectives des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1° Déterminez l'ensemble (Δ_a) des points M du plan tels que : $MB^2 + b^2 = MC^2 + c^2$.

2° Montrez qu'il existe un unique point H du plan tel que : $HA^2 + a^2 = HB^2 + b^2 = HC^2 + c^2$.

Que représente ce point H pour le triangle ABC ?

35 ■ Soit $ABCD$ un carré. Déterminez un triplet de nombres réels (b, c, d) tel que A soit barycentre du système (B, b), (C, c), (D, d).
Déterminez ensuite l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0$.

36 ■ Soit ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$.

1° On définit, pour tout point M du plan, le nombre réel $f(M)$ par :

$f(M) = MB^2 + MC^2 - 2MA^2$.

a) Montrez que $f(M) = AB^2 + AC^2 + 4\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AA'}$.

b) Déduisez-en que l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = AB^2 + AC^2$ est une droite orthogonale à la médiane (AA') du triangle ABC.

c) On suppose ABC rectangle en A, tel que $AB = 3$, $AC = 4$.
Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = 25$.

2° Soit $g(M) = 2MA^2 + MB^2 + MC^2$, I le milieu de $[AA']$.

a) Montrez que $g(M) = 4MI^2 + g(I)$.

b) On suppose à nouveau ABC rectangle en A, avec $AB = 3$, $AC = 4$. Calculez $g(A)$.
Déduisez-en l'ensemble des points M tels que $g(M) = 25$.

37 ■ Soit $ABCD$ un rectangle de centre O tel que $BC = 2\sqrt{3}$ et $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{1}{2}$.

1° Calculez AC et AB. Faites une figure.

2° *a*) Construisez le point G, barycentre du système de points $(A, 1)$, $(B, 3)$ et le point G', barycentre du système de points $(C, 1)$, $(D, 3)$.

b) Montrez que O est le milieu de $[GG']$, et calculez la distance OG.

3° Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\|$.
Représentez-le.

4° Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}) = 108$.
Représentez-le.
Que représente cet ensemble pour le rectangle $ABCD$?

38 ■■ Soit $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ un hexagone régulier, de centre O, inscrit dans un cercle de rayon unité.
Pour tout point M du plan, on définit $f(M)$ par : $f(M) = \sum_{i=1}^{6} MA_i^2$.

1° Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = 12$, puis tels que $f(M) = \frac{21}{2}$.

2° On note (Γ) la couronne circulaire définie par l'inégalité : $\frac{21}{2} \leqslant f(M) \leqslant 12$.
Montrez que (Γ) contient les côtés de l'hexagone.

39 ■■ On donne, dans l'espace $(\mathscr{E})$, quatre points A, B, C, D non coplanaires. I est le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$, G le milieu de $[IJ]$.

1° Peut-on avoir $I = J$?
Existe-t-il des points de $(\mathscr{E})$ tels que :
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$?

2° Déterminez l'ensemble (P_1) des points M de $(\mathscr{E})$ tels que : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

3° Déterminez l'ensemble (P_2) des points M de $(\mathscr{E})$ tels que : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$.

4° Peut-on avoir $(P_1) = (P_2)$?

(*Bac C.*)

40 ■ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace $(\mathscr{E})$, et $A(6, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$ deux points de $(\mathscr{E})$.

1° Déterminez le barycentre G du système $(O, 1)$, $(A, 2)$, $(B, 3)$. Faites une figure.

2° Soit $C(0\,;0\,;4)$. Déterminez l'ensemble (S) des points M de l'espace définis par :
$(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.
Donnez une équation cartésienne de (S).

3° Déterminez l'intersection de (S) et du plan d'équation $x = 0$, et dessinez-la sur la figure.

4° Soit (P) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24$.
Montrez que G appartient à (P) et déterminez (P).

(*Bac C.*)

41 ■■ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace $(\mathscr{E})$. A, B, C, D les points de coordonnées respectives :
$A(1\,;1\,;0)$; $B(0\,;1\,;1)$; $C(1\,;0\,;1)$; $D(1\,;1\,;1)$.
On pose : $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.
Montrez que f admet un minimum en un point G, et déterminez ce minimum.

Caractérisations de droites

$(O, \vec{i}, \vec{j}, k)$ est un repère orthonormal de $(\mathscr{E})$.

42 ■ Soit (D) la droite dont un système d'équations paramétriques dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Déterminez une caractérisation vectorielle de la droite (D') symétrique de (D) par rapport au point O.

43 ■ Soit (P) le plan d'équation $x - y + z - 3 = 0$. (D) la droite passant par $A(1\,;1\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

1° Que pouvez-vous dire de (D) et de (P)?

2° Donnez un système d'équations paramétriques de (D), et déduisez-en les coordonnées du point d'intersection de (D) et (P).

44 ■ Soit A et B les points de coordonnées respectives $A(1\,;-1\,;0)$ et $B(1\,;2\,;1)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, h l'homothétie de centre O et de rapport 2.

1° Donnez une caractérisation vectorielle du segment $[AB]$, que vous traduirez dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2° Donnez un système de représentation paramétrique du segment $[A'B']$, image de $[AB]$ par h.

45 ■ Soit A, B, C trois points de coordonnées respectives :
$A(2\,;0\,;0)$, $B(0\,;3\,;0)$, $C(0\,;0\,;4)$.

1° Déterminez une équation cartésienne du plan (ABC).

2° Soit (D) la droite passant par O, de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Après avoir donné une caractérisation vectorielle de (D), montrez que (D) coupe le plan (ABC) en un point dont vous donnerez les coordonnées.

PROBLÈMES

46 ■■ Soit ℓ un nombre réel strictement positif, $SABC$ un tétraèdre tel que $SA = SB = SC = \ell$.
M est un point quelconque strictement intérieur au triangle ABC.
La parallèle à (AS) issue de M coupe le plan (SBC) en un point A', la parallèle à (BS) issue de M coupe (SAC) en B', la parallèle à (CS) issue de M coupe (SAB) en C'.

1° On note A_1 le point où (AM) recoupe (BC).
Montrez que $MA' = \ell \dfrac{MA_1}{AA_1}$.

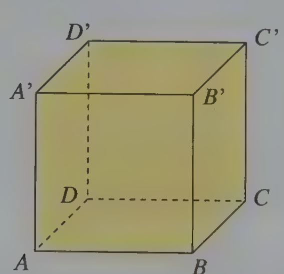
2° Montrez qu'il existe des nombres réels (x, y, z) tels que $x + y + z = 1$, et M barycentre du système de points (A, x), (B, y), (C, z). Montrez que A_1 est le barycentre du système (B, y), (C, z).

3° Calculez alors $\dfrac{MA_1}{AA_1}$ et montrez que la somme $MA' + MB' + MC'$ est indépendante de la position de M sur la face ABC.

47 ■■ **Tétraèdres associés de Möbius**

On appelle tétraèdres associés de Möbius deux tétraèdres $ABCD$ et $A'B'C'D'$ tels que chaque sommet de l'un soit dans le plan d'une face de l'autre.

1° Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube.
Montrez que les tétraèdres $ABB'C'$ et $A'CD'D$ sont associés au sens de Möbius.



2° Soit $ABCD$ un tétraèdre et :
A' l'isobarycentre de BCD,
B' le barycentre de $(A, 1)$, $(C, 1)$, $(D, -1)$,
C' le barycentre de $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(D, 1)$,
D' le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, -1)$.
Montrez que $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont deux tétraèdres associés au sens de Möbius.

(D'après Irem Strasbourg.)

48 ■■ **Points réciproques**

Soit ABC un triangle. On appelle A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$.
Soit (α, β, γ) un triplet de nombres réels strictement positifs. On note :
G_1 le barycentre du système (A, α), (B, β), (C, γ),
G_2 le barycentre du système $\left(A, \dfrac{1}{\alpha}\right)$, $\left(B, \dfrac{1}{\beta}\right)$, $\left(C, \dfrac{1}{\gamma}\right)$.

On dit que les points G_1 et G_2 sont réciproques.

1° Vérifiez que ces points G_1 et G_2 sont définis et qu'ils sont strictement intérieurs au triangle ABC.

2° On appelle :
A_1 le point d'intersection de (AG_1) et $[BC]$,
A_2 le point d'intersection de (AG_2) et $[BC]$.
On définit de même B_1, B_2, C_1, C_2.
Exprimez le point A_1 comme barycentre des points B et C. Même question avec A_2.

3° Montrez que les points A_1 et A_2 sont symétriques par rapport au point A'.
Exprimez de la même façon des propriétés de symétrie entre B_1 et B_2, puis C_1 et C_2.

4° Montrez que l'isobarycentre G des points A, B, C est le seul point intérieur au triangle confondu avec son point réciproque.

49 ■■■ **Théorème de Desargues**

ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles d'un plan (P) tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en un point I. On suppose de plus que les droites (BC) et $(B'C')$ se coupent en A_1, (CA) et $(C'A')$ en B_1, (AB) et $(A'B')$ en C_1.

1° Montrez qu'il existe des couples (α, α'), (β, β'), (γ, γ') de nombres réels vérifiant :
$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = 1$,
et : I barycentre de (A, α), (A', α'),
I barycentre de (B, β), (B', β'),
I barycentre de (C, γ), (C', γ').

2° a) Montrez que : $\beta\overrightarrow{IB} - \gamma\overrightarrow{IC} = \gamma'\overrightarrow{IC'} - \beta'\overrightarrow{IB'}$.

b) Montrez que $\beta - \gamma$ ne peut être nul.
Montrez alors que A_1 est le barycentre du système (B, β), $(C, -\gamma)$.
Déduisez-en : $\beta\overrightarrow{IB} - \gamma\overrightarrow{IC} = (\beta - \gamma)\overrightarrow{IA_1}$.

c) En utilisant deux relations analogues, montrez que :
$(\beta - \gamma)\overrightarrow{IA_1} + (\gamma - \alpha)\overrightarrow{IB_1} + (\alpha - \beta)\overrightarrow{IC_1} = \vec{0}$.

3° Concluez alors à l'alignement des points A_1, B_1, C_1.
Illustrez ce résultat par une figure.

50 ■■■ **Droite d'Euler et lieux géométriques**

Soit ABC un triangle, G son centre de gravité, H son orthocentre, O le centre de son cercle circonscrit.
On suppose ABC non équilatéral.
On désigne par A', B', C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$.

1° Soit S le point défini par la relation vectorielle : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

a) Montrez que : $\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{OA'}$. Calculez de même $\overrightarrow{BS}$ et $\overrightarrow{CS}$.

b) Montrez que le point S appartient aux trois hauteurs du triangle ABC, et est donc le point H.

c) Déduisez-en la relation vectorielle : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, et l'alignement des points O, H, G.
La droite (OHG) s'appelle la droite d'Euler du triangle ABC.

2° Soit $(\mathcal{C})$ un cercle. On suppose que les points B et C sont fixes sur le cercle $(\mathcal{C})$, A variable sur $(\mathcal{C})$, restant distinct de B et de C.
Déterminez les lieux géométriques des points G et H.

Ensembles de niveau

51 ■■ On considère dans l'espace $(\mathcal{E})$ un carré $ABCD$, de centre O et de côté a, contenu dans un plan (P).
Soit S un point n'appartenant pas au plan (P) et A', B', C', D' les milieux respectifs des segments $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$, $[SD]$.

1° Montrez que :

a) les points A', B', C', D' appartiennent à un même plan (P') parallèle au plan (P), avec (P') distinct de (P) ;

b) le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un carré (on note O' son centre) ;

c) les points S, O, O' sont alignés.

2° Déterminez l'ensemble (Ω) des points M du plan (P) tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4a^2$.
Déterminez l'ensemble décrit par le milieu M' de $[SM]$ quand M décrit (Ω).

(Bac C.)

52 ■■ Soit ABC un triangle rectangle en A du plan (P).
On pose : $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

1° Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

a) Montrez que l'on a :

$b^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\quad c^2 = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CB}$.

b) En orientant la droite (BC), montrez que :

$b^2\,\overline{HB} + c^2\,\overline{HC} = 0$.

c) Montrez que le point H est barycentre du système de points pondérés (B, b^2), (C, c^2).

2° A tout point M du plan on associe le nombre réel $f(M)$ défini par : $f(M) = b^2 MB^2 + c^2 MC^2$.

a) Montrez que : $f(M) = a^2 MH^2 + b^2 HB^2 + c^2 HC^2$.

b) Déduisez du 1° a) que : $HC^2 = \dfrac{b^4}{a^2}$ et $HB^2 = \dfrac{c^4}{a^2}$ et calculez $b^2 HB^2 + c^2 HC^2$.

c) Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = 2b^2c^2$.

53 ■■ Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, d'arête de longueur a $(a > 0)$. On note G l'isobarycentre des points A, B, C, D et G_A l'isobarycentre des points B, C, D.

1° Montrez que G appartient à la droite (AG_A), et précisez la position de G.

2° Montrez que (AG_A) est orthogonale au plan (BCD). Calculez alors les distances AG_A et AG.

3° Pour tout point M de l'espace $(\mathcal{E})$, on définit $f(M)$ par :

$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

Montrez que : $f(M) = 4MG^2 + \dfrac{3}{2}a^2$.

4° Déterminez suivant le nombre réel k, l'ensemble (E_k) des points M tels que $f(M) = ka^2$.
Pour quelle valeur de k cet ensemble est-il la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

54 ■■ a est un nombre réel strictement positif. Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, d'arêtes de longueur a.

1° Soit A' l'isobarycentre du triangle BCD. Déterminez le nombre réel m tel que le point G, milieu de $[AA']$, soit le barycentre du système (A, m), $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$. Placez ces différents points sur une figure.
Calculez GA^2 et GB^2 en fonction de a.

2° Déterminez l'ensemble (Σ) des points M de l'espace tels que :

$6MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 + 2MD^2 = 5a^2$.

3° Déterminez l'ensemble (π) des points M de l'espace tels que :

$MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3MA^2 = a^2$.

Vérifiez que (π) est le plan médiateur de $[AA']$.

4° Déterminez l'intersection $(\mathcal{C})$ de (Σ) et (π) et prouvez que les milieux I, J, K des segments $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ appartiennent à $(\mathcal{C})$. Placez $(\mathcal{C})$ sur la figure.

(Bac C).

55 ■■■ **Barycentres et suites**
Soit (D) une droite, B et C deux points distincts de (D). On munit (D) du repère $(B, \overrightarrow{BC})$.

On désigne par A_0 le barycentre de $\left(B, \dfrac{1}{3}\right)$, $\left(C, \dfrac{2}{3}\right)$, A_1 le barycentre de $\left(A_0, \dfrac{1}{3}\right)$, $\left(B, \dfrac{2}{3}\right)$, A_2 celui de $\left(A_1, \dfrac{1}{3}\right)$, $\left(A_0, \dfrac{2}{3}\right)$, et, pour tout $n \geqslant 2$, A_n celui de $\left(A_{n-1}, \dfrac{1}{3}\right)$, $\left(A_{n-2}, \dfrac{2}{3}\right)$.
On note x_n l'abscisse de A_n.

1° Calculez x_0, x_1, x_2.

2° a) Montrez que, pour tout $n \geqslant 2$, on a la relation : $x_n = \dfrac{1}{3}(x_{n-1} - x_{n-2}) + x_{n-2}$.

b) Déduisez-en : $x_n + x_{n-1} = \dfrac{1}{3}(x_{n-1} - x_0) + x_0 + x_1$, puis calculez x_n en fonction de x_{n-1}. (suite p. 144)

c) Montrez que la suite définie par $v_n = x_n - \frac{2}{5}$ est une suite géométrique. Calculez alors x_n et v_n.

3° Quelle est la position limite des points A_n, lorsque n tend vers l'infini ?

56 Le problème des trois vases

Deux hommes ont un vase de 8 litres plein d'un merveilleux nectar qu'ils veulent partager en deux portions égales. Ils disposent de deux vases vides de contenances respectives 5 litres et 3 litres.
On se propose de résoudre ce problème à l'aide de barycentres.

1° Soit (E) l'ensemble des triplets (x, y, z) de nombres réels vérifiant $x + y + z = 8$. Soit A, B, C trois points non alignés du plan. A tout élément (x, y, z) de (E) on associe le point M barycentre du système (A, x), (B, y), (C, z).
Donnez les coordonnées de M dans le repère $(C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, et montrez que l'on réalise ainsi une bijection de (E) sur le plan.

2° On fait varier y et z, x restant fixe. Montrez que M décrit une droite parallèle à (BC).
Que peut-on dire de M lorsque x et y varient, z restant fixe, ou lorsque x et z varient, y restant fixe ?

3° On considère l'ensemble (E') des triplets (x, y, z) de (E) vérifiant : $0 \leqslant x \leqslant 8$, $0 \leqslant y \leqslant 5$, $0 \leqslant z \leqslant 3$.
Représentez graphiquement les points correspondants du plan.

4° Comment varient les quantités (x, y, z) de liquide lorsque l'on verse du liquide d'un vase dans un autre ?
Donnez alors une solution du problème posé.

(Irem d'Orléans-Tours.)

57 Centre d'inertie d'une plaque homogène

Soit $ABCD$ une plaque homogène, G son centre d'inertie. On note G_a le centre de gravité de la plaque triangulaire BCD, G_b celui de la plaque ACD, G_c celui de la plaque ABD, G_d celui de la plaque ABC.

1° Montrez que G est le point de concours des droites (G_aG_c) et (G_bG_d).

2° On définit les points P, P', Q, Q', R, R', S, S' par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AP'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BQ'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{CR'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD},$$

$$\overrightarrow{DS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{DS'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}.$$

Les droites (PS') et $(P'Q)$ se coupent en I, $(P'Q)$ et $(Q'R)$ en J, $(Q'R)$ et $(R'S)$ en K, $(R'S)$ et $(S'P)$ en L.

a) Montrez que (PS') et $(Q'R)$ sont parallèles à (BD).

b) Prouvez que $IJKL$ est un parallélogramme.

c) En utilisant une homothétie, montrez que G_c est le milieu du segment $[P'S]$.
Que pouvez-vous dire de même de G_a ?

3° a) Montrez alors que (G_aG_c) passe par les milieux de $[IL]$ et de $[JK]$.

b) En raisonnant de façon analogue, montrez que (G_bG_d) passe par les milieux de $[IJ]$ et de $[KL]$.

c) Déduisez-en que la plaque $ABCD$ et la plaque homogène $IJKL$ ont même centre d'inertie.

(Rallye mathématique d'Alsace.)

58 Cercles d'Apollonius

Soit ABC un triangle non isocèle. On note (D_a) la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$, (Δ_a) la bissectrice extérieure. On rappelle que (D_a) et (Δ_a) sont orthogonales.

1° On note I_a le point d'intersection de (D_a) et (BC), J_a celui de (Δ_a) et (BC), A' le pied de la hauteur issue de A, H_B et H_C les projetés orthogonaux de I_a sur $[AC]$ et $[AB]$.
On note $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

a) Exprimez de deux façons différentes les aires des triangles ABI_a et ACI_a. Montrez alors que I_aB et I_aC sont respectivement proportionnels à c et b.

b) Déduisez-en que I_a est le barycentre du système de points pondérés (B, b), (C, c).

c) Faites une étude analogue pour montrer que J_a est le barycentre du système de points pondérés (B, b), $(C, -c)$.

2° On note $(\mathcal{C}_a)$ l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}$.

a) Montrez que $(\mathcal{C}_a)$ est le cercle de diamètre $[I_aJ_a]$, et qu'il passe par A.

b) On note Ω_a le centre de $(\mathcal{C}_a)$. Montrez que Ω_a est le barycentre du système de points (B, b^2), $(C, -c^2)$.

3° On définit de même $(\mathcal{C}_b)$, ensemble des points M du plan tels que $\frac{MC}{MA} = \frac{a}{c}$, de centre Ω_b, et $(\mathcal{C}_c)$, ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = \frac{b}{a}$, de centre Ω_c.

a) Pour tout point M, on définit le vecteur :

$$\overrightarrow{V(M)} = (b^2 - c^2)\overrightarrow{M\Omega_a} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{M\Omega_b} + (a^2 - b^2)\overrightarrow{M\Omega_c}.$$

Exprimez $\overrightarrow{V(M)}$ à l'aide de $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, et montrez que $\overrightarrow{V(M)}$ est le vecteur nul.

b) Concluez alors à l'alignement des centres Ω_a, Ω_b, Ω_c des cercles $(\mathcal{C}_a)$, $(\mathcal{C}_b)$, $(\mathcal{C}_c)$. Faites une figure illustrant ce résultat.

6 Produit vectoriel

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Nécessité d'orienter l'espace 146
AP2 Électromagnétisme et orientation de l'espace 146

COURS

1. Espace orienté 148
2. Produit vectoriel 149

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Équations de plans 152
TP2 Calculs de distances, d'aires, de volumes 152
TP3 Mouvement à accélération centrale 153
TP4 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique 154

FICHE MÉTHODE

FICHE MÉTHODE Comment utiliser le produit vectoriel 156

EXERCICES COMMENTÉS 157
LE JOUR DU BAC 159
EXERCICES ET PROBLÈMES 160

objectifs

- Introduire une nouvelle « opération » sur les vecteurs de l'espace.
- Traduire analytiquement cette « opération » pour effectuer des calculs de distances, d'aires, de volumes et caractériser des plans par des équations.

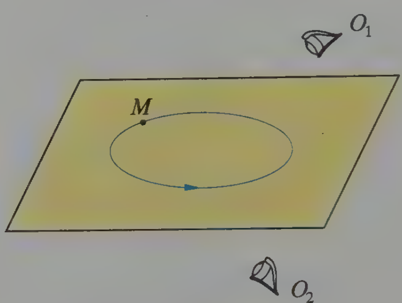
ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Nécessité d'orienter l'espace

Regardées de l'intérieur de l'édifice, les aiguilles de l'horloge du musée d'Orsay tournent dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

L'objectif de cette activité est de montrer que l'orientation d'un plan de l'espace est insuffisante pour décrire un mouvement.

On considère un point matériel M animé d'un mouvement circulaire situé dans un plan de l'espace.
Ce plan partage l'espace en deux demi-espaces qui contiennent chacun un observateur.



1° Faites deux croquis représentant le mouvement de M :
a) vu par l'observateur O_1 ; b) vu par l'observateur O_2.

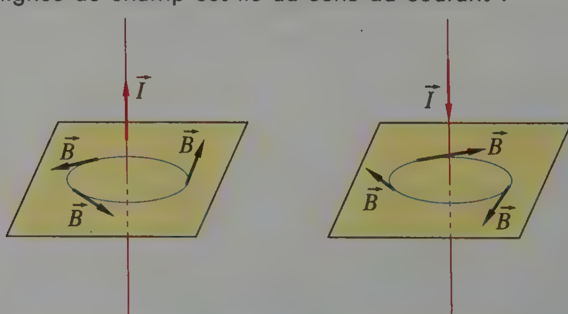
2° Cela a-t-il une signification de dire que M tourne dans le sens direct ?

AP2 Électromagnétisme et orientation de l'espace

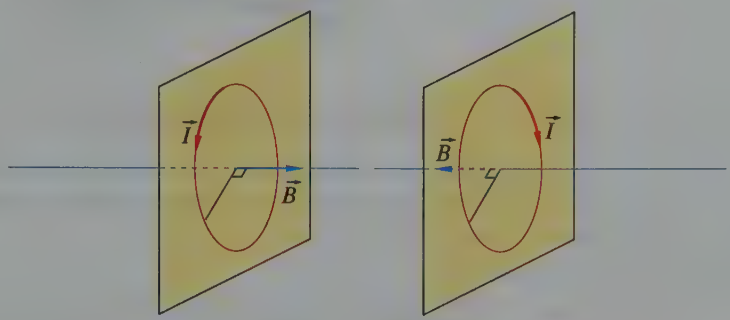
Le but de cette activité est de mettre en relation le choix d'un sens direct, pour une base de l'espace, et les phénomènes électromagnétiques.

- Un courant rectiligne engendre sur tout plan perpendiculaire à sa direction des lignes de champ magnétique circulaires.

Le sens des lignes de champ est lié au sens du courant :



• Un courant circulaire engendre des lignes de champ perpendiculaires au plan de la spire parcourue.
Le sens des lignes de champ est lié au sens du courant :



• On voit qu'à chaque fois un sens de rotation dans un plan est lié à une orientation (ou un sens de parcours) sur les droites perpendiculaires au plan.

1° Dans chacun des quatre cas de figure précédents, dessinez un observateur situé le long de la droite représentée, le vecteur $\vec{I}$ (ou $\vec{B}$ selon le cas) le parcourant **des pieds vers la tête.**
Quel est pour cet observateur le sens de parcours du courant sur la spire (ou de $\vec{B}$ sur la ligne de champ selon le cas) : sens direct ou sens indirect ?

2° Soit un plan de l'espace et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal de ce plan.

a) Faites une figure en perspective représentant $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et le cercle (C) de centre O et de rayon 1 dans ce plan.

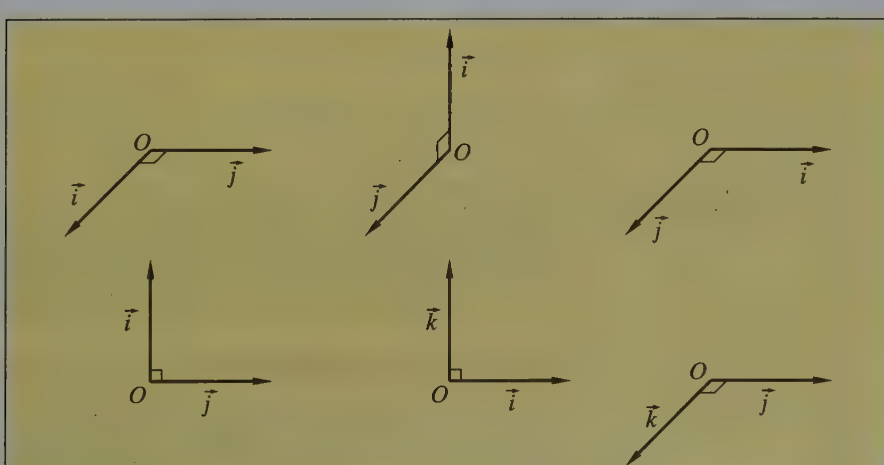
b) Soit $\vec{k}$ un vecteur de l'espace tel que :

• $\|\vec{k}\| = 1$.

• $\vec{k}$ est colinéaire et de même sens que le vecteur champ magnétique engendré en O par un courant parcourant le cercle (C) « de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$ ».
Placez le vecteur $\vec{k}$ sur la figure.

c) Pour un observateur situé sur $[O, \vec{k})$ les pieds en O, quelle est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{j})$?

3° Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que celui défini ci-dessus est appelé **repère orthonormal direct de l'espace.**
Complétez les figures ci-dessous afin de construire des repères orthonormaux directs $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.



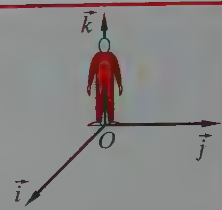
COURS

1. ESPACE ORIENTÉ

1. Repères orthonormaux directs

Définitions 1

- **Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.**
On dit que $\mathcal{R}$ est direct lorsque un observateur situé sur la demi-droite $[O, \vec{k})$, les pieds en O, regardant dans la direction de $\vec{i}$, a le vecteur $\vec{j}$ sur sa gauche.

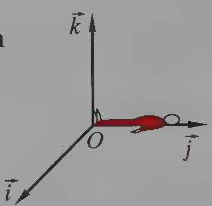


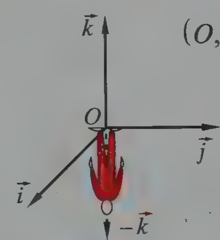
- **Un repère orthonormal de l'espace est indirect s'il n'est pas direct.**

EXEMPLES

1° Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace.

$(O, \vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère direct.



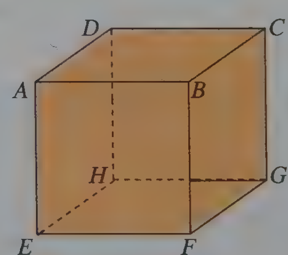


$(O, \vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$ est un repère indirect.

2° Soit $ABCDEFGH$ le cube dessiné ci-dessous, **d'arête 1.**

Les repères orthonormaux suivants sont directs : $(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA})$,
$(F, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FB})$,
$(C, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CB})$.

Les repères orthonormaux suivants sont indirects : $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$,
$(G, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GC})$.



□ *Remarque.* On admet que si $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal direct alors, quel que soit le point Ω de l'espace, $(\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct.

Définition 2

Une base orthonormale de l'espace $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe si, quel que soit le point O de l'espace, le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct.

EXEMPLE

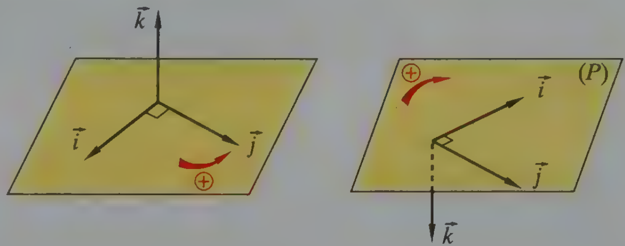
Dans le cube ci-dessus, la base orthonormale $(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{EA})$ est directe ; la base orthonormale $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{AB})$ est indirecte.

COURS

2. Plans orientés dans l'espace orienté

On considère un plan (P) contenu dans l'espace (E).
On oriente positivement une droite orthogonale au plan (P) par le choix d'un vecteur $\vec{k}$ de norme 1. Alors, toute base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$ de (P), telle que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit une base directe de (E), est une base directe de (P).

Orientations induites sur (P) par le choix d'une orientation positive d'une droite orthogonale à (P).

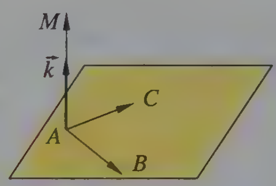


□ *Remarque.*
Tous les plans parallèles à (P) sont ainsi orientés de la même façon.

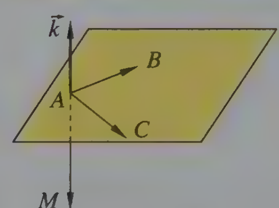
2. PRODUIT VECTORIEL

1. Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.



• **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.**
Soit A, B, C trois points tels que
$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.



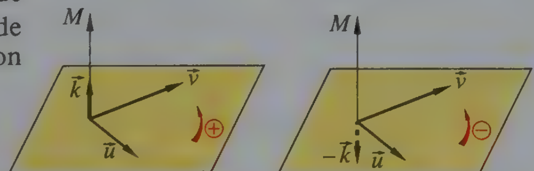
Ces trois points définissent un plan (ABC) puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Le choix d'un vecteur $\vec{k}$ de norme 1, normal au plan (ABC) oriente celui-ci.
On peut donc considérer le sinus de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ dans le plan (ABC).

On appelle alors **produit vectoriel** de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$ le vecteur $\overrightarrow{AM}$ défini par :
$\overrightarrow{AM} = AB \times AC \times \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\vec{k}$.

□ *Remarques :*

1° On admet que l'on obtient un résultat indépendant du choix des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2° Si on choisit $-\vec{k}$ pour orienter (ABC), on ne change pas le produit vectoriel car alors le sinus de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ change aussi de signe par rapport à l'orientation précédente du plan.



• **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.**
Alors le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le vecteur nul.

COURS

Définition 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.
On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur de l'espace noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$ tel que :

- **Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.**
- **Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, soit A, B, C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.**

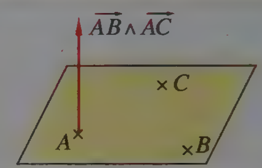
Le choix d'un vecteur $\vec{k}$ de norme 1 normal au plan (ABC) oriente celui-ci ; alors : $\quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})\vec{k}$.

2. Propriétés du produit vectoriel

■ *Vecteur normal à un plan*

Propriété 1

Si A, B et C sont trois points non alignés de l'espace alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

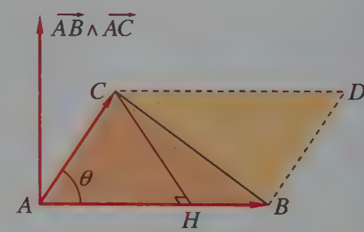


Cela découle immédiatement de la définition.

■ *Produit vectoriel et aires*

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace. Soit θ une mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

On a : $\quad \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \times AC \times \sin\theta.$



Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) : $AC \sin\theta = HC \quad$ donc $\quad \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \times HC.$

Propriété 2

Le nombre $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ est :

- **le double de l'aire du triangle ABC ;**
- **l'aire du parallélogramme $ABDC$ construit sur les segments $[AB]$ et $[AC]$.**

EXEMPLE

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe et les points O, I, J, K tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\quad \overrightarrow{OJ} = \vec{j} \quad$ et $\quad \overrightarrow{OK} = \vec{k}$.

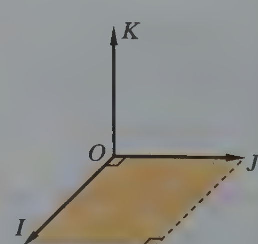
Le parallélogramme construit sur les points O, I et J est un carré de côté 1.

$\|\vec{i} \wedge \vec{j}\| = \|\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ}\| = 1 \quad$ (aire du carré).

Puisque la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe, on a :

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \|\vec{i} \wedge \vec{j}\| \, \vec{k} = \vec{k}.$

On obtient de même : $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad$ et $\quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}.$



COURS

Produit vectoriel et colinéarité

Propriété 3

> **Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.**
> **$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ équivaut à : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires.**

Cela découle immédiatement de la définition.

□ *Remarque.* En particulier, quel que soit le vecteur $\vec{u}$: $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

Produit vectoriel et opérations

Propriété 4 (admise)

> **Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace, quel que soit le nombre réel a :**
> $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$;
> $\vec{u} \wedge (a\vec{v}) = (a\vec{u}) \wedge \vec{v} = a(\vec{u} \wedge \vec{v})$;
> $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

3. Expression dans une base orthonormale directe

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe de l'espace, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans cette base. Appliquons la propriété 4 :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} = {} & xx'\,\vec{i} \wedge \vec{i} + xy'\,\vec{i} \wedge \vec{j} + xz'\,\vec{i} \wedge \vec{k} \\ & + yx'\,\vec{j} \wedge \vec{i} + yy'\,\vec{j} \wedge \vec{j} + yz'\,\vec{j} \wedge \vec{k} \\ & + zx'\,\vec{k} \wedge \vec{i} + zy'\,\vec{k} \wedge \vec{j} + zz'\,\vec{k} \wedge \vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (xy' - yx')\,\vec{i} \wedge \vec{j} + (yz' - zy')\,\vec{j} \wedge \vec{k} + (zx' - xz')\,\vec{k} \wedge \vec{i}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\,\vec{i} + (zx' - xz')\,\vec{j} + (xy' - yx')\,\vec{k}.$$

Propriété 5

> **Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans une base orthonormale directe de l'espace.**
> **Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées dans cette base :**
> **$(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$.**

EXEMPLE

L'espace est rapporté à une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $(1\,;\,-2\,;\,3)$ et $(-1\,;\,1\,;\,-2)$ dans cette base.

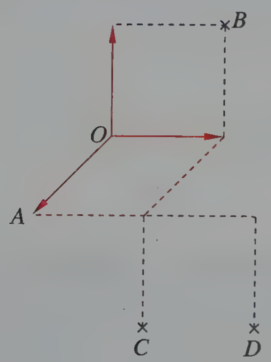
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = ((-2) \times (-2) - 1 \times 3)\,\vec{i} + (3 \times (-1) - 1 \times (-2))\,\vec{j} + (1 \times 1 - (-1) \times (-2))\,\vec{k}\,;$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}.$$

□ *Remarque.* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, ce qui permet un contrôle des calculs. Dans l'exemple précédent, on vérifie facilement que :
$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Équations de plans



L'objet de ce TP est de montrer l'utilité du produit vectoriel pour déterminer des équations de plans dans l'espace.

On considère l'espace muni d'un repère orthonormal direct.
Soit les points A, B, C, D de coordonnées respectives $(1\,;0\,;0)$, $(0\,;1\,;1)$, $(1\,;1\,;-1)$, $(1\,;2\,;-1)$ dans ce repère.

1° *a*) Déterminez un point et un vecteur normal du plan médiateur du segment $[AB]$.

b) Déduisez-en une équation de ce plan.

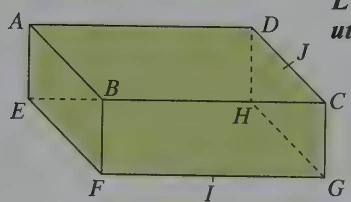
2° *a*) En utilisant un produit vectoriel, déterminez un vecteur normal au plan (ABC).

b) Expliquez pourquoi le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

c) Déduisez-en une équation du plan (ABC).

3° Déterminez le plus simplement possible une équation de chacun des plans (BCD), (ACD), (ABD).

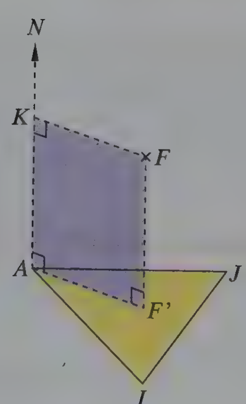
TP2 Calculs de distances, d'aires, de volumes



L'objet de ce TP, outre ce qui est annoncé dans le titre, est de montrer une utilisation d'un repère orthonormal direct de l'espace.

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AB = 2$, $BC = 3$, $AE = 1$.
Soit I le milieu de $[FG]$ et J le milieu de $[CD]$.

1 ■ *Distance d'un point à un plan*



Soit F' le projeté orthogonal du point F sur le plan (AIJ).
On se propose de calculer la distance du point F au plan (AIJ), c'est-à-dire la distance FF'.

1° Soit $\overrightarrow{AN}$ un vecteur normal au plan (AIJ). Soit K le projeté orthogonal de F sur la droite (AN). Exprimez $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overline{AK}$ et $\overline{AN}$.

Déduisez-en que : $FF' = \dfrac{|\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AF}|}{\|\overrightarrow{AN}\|}$.

2° Déterminez un vecteur normal au plan (AIJ) à l'aide d'un produit vectoriel. Déduisez-en que : $FF' = \dfrac{|(\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}) \cdot \overrightarrow{AF}|}{\|\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}\|}$.

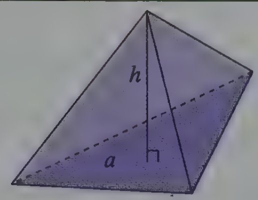
3° En utilisant les coordonnées des différents points dans le repère orthonormal direct $\left(E, \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}, \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA}\right)$, calculez la distance de F au plan (AIJ).

2 ■ *Calcul d'aire. Distance d'un point à une droite*

1° Calculez l'aire du triangle IFJ.

2° Déduisez-en la distance de F à la droite (IJ) (c'est-à-dire la distance FF'' où F'' est le projeté orthogonal de F sur (IJ)).

3 ■ *Calcul de volume*



On rappelle que le volume d'un tétraèdre est :

$$V = \frac{1}{3} \times a \times h$$

où a est l'aire d'une face et h la hauteur associée.

1° Calculez l'aire du triangle AIJ.

2° En utilisant le résultat de la question **1 ■ 3°**, déduisez-en le volume du tétraèdre $AIJF$.

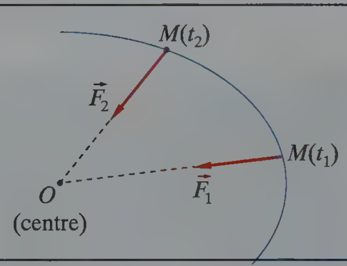
3° En utilisant le résultat du **1 ■ 2°**, montrez que ce volume peut être exprimé par $V = \frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}) \cdot \overrightarrow{AF}|$.

- **La distance d'un point M à un plan (ABC) est $\dfrac{|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$.**
- **La distance d'un point M à une droite (AB) est $\dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$.**
- **Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est $\frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$.**

TP3 Mouvement à accélération centrale

L'objet de ce TP est de montrer une utilisation du produit vectoriel en mécanique.

On appelle **mouvement à accélération centrale** le mouvement d'un point soumis à des forces dont la résultante est un vecteur variant avec le temps, mais tel que sa direction passe par un point fixe.
L'exemple classique de ce type de mouvement est celui d'un corps soumis à une force d'attraction.



1 ■ *Dérivation d'un produit vectoriel*

Vous avez vu en physique la dérivation d'un vecteur fonction du temps.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dont les coordonnées respectives (a, b, c), (α, β, γ) sont des fonctions dérivables du temps.

On notera a' la fonction dérivée de la fonction a, etc., et $\dfrac{d\vec{u}}{dt}$ le vecteur de coordonnées (a', b', c'), appelé vecteur dérivé de $\vec{u}$ par rapport au temps.

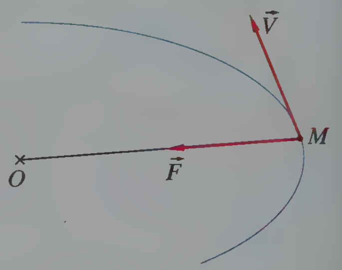
1° Soit $X(t)$ la première coordonnée du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Montrez que :
$X'(t) = (b'\gamma - c'\beta)(t) + (b\gamma' - c\beta')(t)$.

2° Montrez que X' est aussi la première coordonnée du vecteur :
$\dfrac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \dfrac{d\vec{v}}{dt}$.

3° Déduisez-en que : $\dfrac{d}{dt}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \dfrac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \dfrac{d\vec{v}}{dt}$.

2 ■ *Trajectoire plane d'un mouvement à accélération centrale*

On considère un point O fixe dans l'espace. Le point mobile M de masse m est soumis à une seule force $\vec{F}$ colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

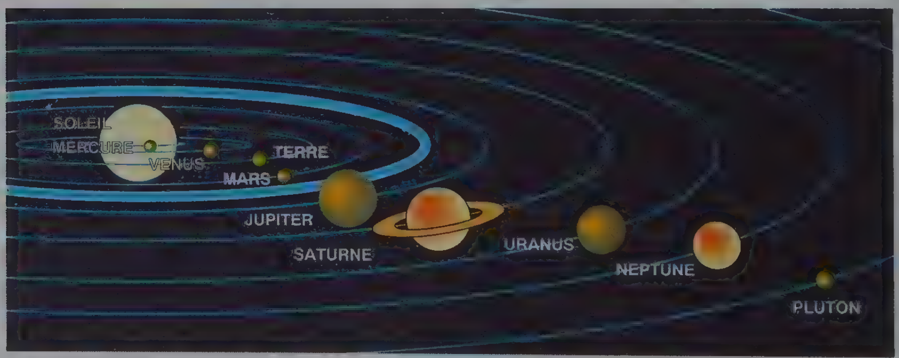


1° Exprimez à l'aide d'un produit vectoriel la colinéarité de $\vec{F}$ et $\overrightarrow{OM}$.

2° Soit $\vec{V}$ la vitesse du point M.
Dérivez par rapport au temps t le vecteur $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}$.

3° Déduisez-en que $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}$ est un vecteur constant $\vec{W}$. (On rappelle que si $\vec{a}$ est l'accélération de M on a : $\vec{F} = m\vec{a}$.)

4° Déduisez-en que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}$ sont toujours dans un plan orthogonal à $\vec{W}$.
Expliquez pourquoi la trajectoire du point M reste plane dans l'espace.



Les planètes, qui décrivent une orbite plane autour du soleil sont soumises à un mouvement à accélération centrale.

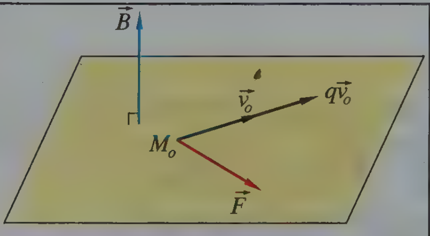
TP4 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique

L'objet de ce TP est de montrer une conséquence de l'action de la force de Laplace sur une particule électrique chargée.

Cette force est $\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ où :
- q est la charge de la particule (en coulombs).
- v est la vitesse de la particule (en mètres par seconde).
- B est l'intensité du champ magnétique (en teslas).

On se restreindra à l'étude du cas d'une particule de charge positive lancée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ orthogonale à $\vec{B}$.

On négligera la masse de la particule.



1 ■ *Dérivation d'un produit scalaire*

En procédant sur les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme au TP3, **1** ■, démontrez la formule suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u}\,.\,\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

2 ■ *La trajectoire est plane*

1° Soit $\vec{a}$ le vecteur accélération. Montrez que $\vec{a} = \frac{q}{m}\,\vec{v} \wedge \vec{B}$.
Déduisez-en que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux.

2° En dérivant $\vec{v}\,.\,\vec{B}$ par rapport au temps, montrez qu'à tout instant : $\vec{v}\,.\,\vec{B} = \vec{v}_0\,.\,\vec{B} = 0$.

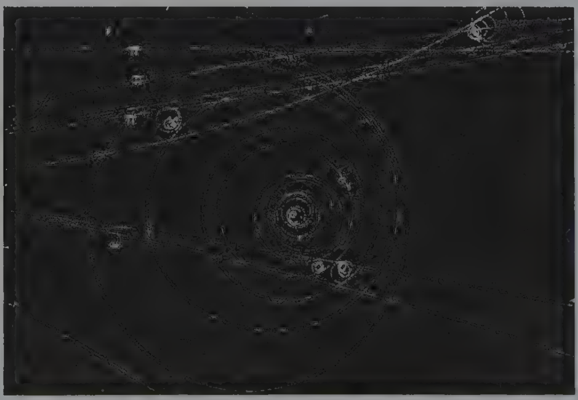
3° Soit M_0 et M les positions occupées par la particule aux instants zéro et t. En dérivant $\overrightarrow{M_0M}\,.\,\vec{B}$ par rapport au temps, montrez que la trajectoire de la particule est contenue dans le plan orthogonal à $\vec{B}$ passant par M_0.

3 ■ *La trajectoire est circulaire*

1° Montrez que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Déduisez-en que la composante tangentielle de l'accélération est nulle.

2° Soit $v = \|\vec{v}\|$. En dérivant $\vec{v}\,.\,\vec{v}$, montrez que v est constante et que le mouvement est uniforme.

3° On rappelle la relation (vue en physique) : $a_n = \frac{v}{R^2}$ où a_n est l'accélération normale et R est le rayon de courbure de la trajectoire.
Montrez que $R = \frac{mv_0}{qB}$.
Déduisez-en que la trajectoire de la particule est circulaire.



Trajectoire en spirale d'un électron soumis à un champ magnétique dans une chambre à bulles. Le liquide de la chambre freine l'électron, modifiant le rayon de courbure de la trajectoire.

FICHE MÉTHODE

Comment utiliser le produit vectoriel pour ...

1 *Prouver une colinéarité*

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à $\quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

2 *Trouver un vecteur normal à un plan*

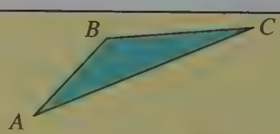
Soit un plan de l'espace déterminé par trois de ses points : A, B et C.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
- Pour trouver une équation du plan (ABC) dans un repère orthonormal direct il suffit d'écrire : $\quad (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \quad$ pour tout point M de coordonnées (x, y, z) de ce plan.

3 *Calculer une aire*

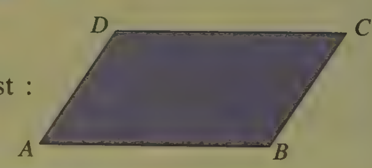
- L'aire d'un triangle ABC est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|.$$



- L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est :

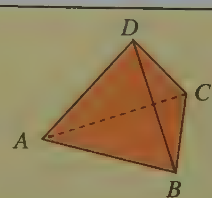
$$\mathcal{A} = \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \|.$$



4 *Calculer un volume*

Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} | (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} |.$$



EXERCICES COMMENTÉS

Exercice 1

Énoncé

Soit A et B deux points distincts de l'espace, I le milieu de $[AB]$.

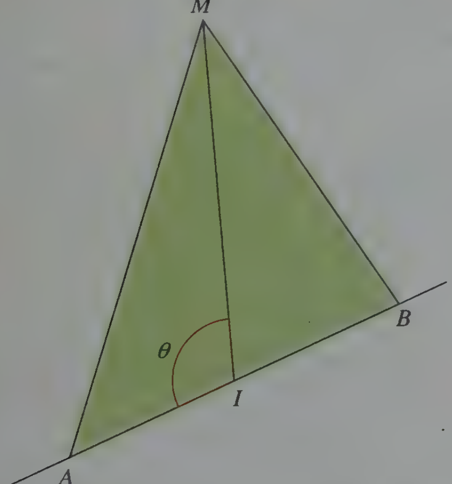
1° Démontrez que pour tout point M de l'espace :
$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB}$.

2° Déduisez-en l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = MI \times AB$.

Solution

Il n'y a pas de repère donné par l'énoncé. Il n'y a pas non plus de configuration apte à porter un repère orthonormal (du genre cube ou parallélépipède rectangle).
On va donc travailler « vectoriellement ».

1° Il est naturel d'utiliser la relation de Chasles :
$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})$,
$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}$,
$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA} = \vec{0}$).
De même :
$\overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI}) \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$).



2° D'après la question **1°** : $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB}\|$.
$(\mathcal{E})$ est donc l'ensemble des points M tels que :
$\|\overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB}\| = MI \times AB$.
Cela doit vous faire penser à la définition :
$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})\,\vec{k}$.
Donc $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$.
Supposons $M \neq I$.
Soit θ une mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{MIA}$ (Voir figure.) On a :
$\|\overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{MI}\|\,\|\overrightarrow{AB}\| \sin\theta$.

Donc si l'angle $\widehat{MIA}$ existe : $M \in (\mathcal{E})$ équivaut à $\sin\theta = 1$, soit $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\widehat{MIA} = \dfrac{\pi}{2}$ est le plan médiateur de $[AB]$, privé de I.
Mais si $M = I$ alors $\|\overrightarrow{II} \wedge \overrightarrow{AB}\| = 0$ et $II \times AB = 0$: l'égalité est encore vraie.

Conclusion : $(\mathcal{E})$ est le plan médiateur du segment $[AB]$.

Exercice 2

Énoncé

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace.
On considère les points A, D et C de coordonnées respectives $(1\,;1\,;0)$, $(0\,;0\,;1)$ et $(-1\,;1\,;0)$ dans ce repère.

1° a) On construit le point B tel que $OABC$ soit un carré. Quelles sont ses coordonnées ?

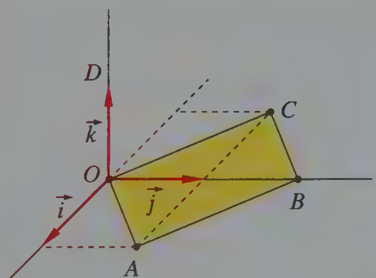
b) On considère le parallélépipède rectangle dont les deux faces carrées sont $OABC$ et $DEFG$. Déterminez les coordonnées des points E, F et G.

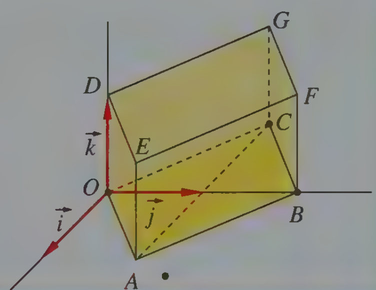
2° Donnez une équation du plan (BCD) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3° Calculez le volume du tétraèdre $DBCG$.

Solution

La première des choses à faire est ... la figure !





EXERCICES COMMENTÉS

1° a) Il est évident que $OA = OC$ et que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$. Donc, il est bien possible de construire le carré $OABC$. De plus : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, donc B a pour coordonnées $(0 ; 2 ; 0)$.

b) Les points E, F et G ont même abscisse et même ordonnée respectivement que A, B et C mais sont de cote 1 :

$E(1 ; 1 ; 1)$, $F(0 ; 2 ; 1)$ et $G(-1 ; 1 ; 1)$.

2° Pour déterminer une équation du plan (BCD), il suffit de trouver un vecteur normal à ce plan. Le produit vectoriel peut être utilisé puisque le repère est orienté, de sens direct.
Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ont pour coordonnées $(-1 ; -1 ; 0)$ et $(0 ; -2 ; 1)$.
La base étant orthonormale directe :

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = ((-1) \times 1 - (-2) \times 0)\vec{i} + (0 \times 0 - (-1) \times 1)\vec{j} + ((-1) \times (-2) - 0 \times (-1))\vec{k},$$

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}.$$

Un vecteur normal au plan (BCD) est donc le vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(-1 ; 1 ; 2)$.

Le plan (BCD) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{BM} \cdot \vec{V} = 0$. Cette égalité équivaut à :

$$-(x-0) + (y-2) + 2(z-0) = 0$$

soit $x - y - 2z + 2 = 0$.

Il n'est pas inutile de rechercher si les coordonnées des points B, C et D vérifient bien l'équation trouvée afin de déceler une erreur éventuelle.

3° Le volume du tétraèdre $DBCG$ est :

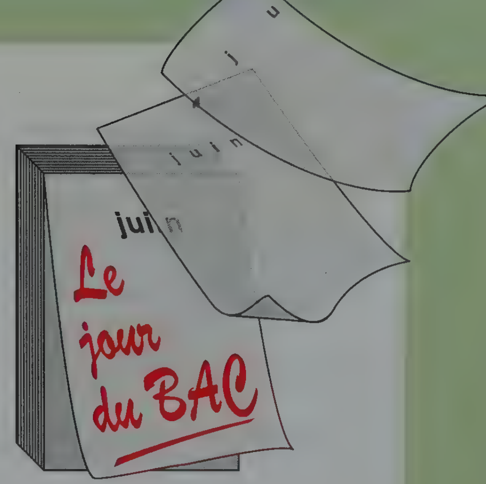
$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} \left|(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BG}\right|.$$

On choisit cette formule, car on a déjà calculé $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

$$(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BG} = (-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}),$$

$$(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BG} = 1 - 1 + 2 = 2.$$

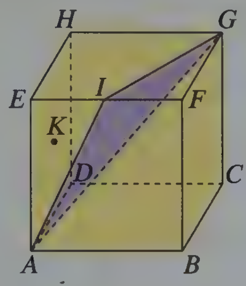
Donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}$.



Énoncé

Bac CE. 1991

Soit le cube *ABCDEFGH* représenté par la figure ci-dessous. L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On désigne par *I* le milieu de [*EF*] et par *K* le centre du carré *ADHE*.



1° *a*) Vérifier que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$.

***b*) En déduire l'aire du triangle *IGA*.**

2° Calculer le volume du tétraèdre *ABIG* et en déduire la distance du point *B* au plan (*AIG*).

MOTS CLÉS
« repères » « produit vectoriel » « aire » « volume »

A la lecture du sujet

Il s'agit ici de tester la connaissance :
— de l'expression d'un produit vectoriel dans une base orthonormale directe,
— de l'utilisation du produit vectoriel dans un calcul d'aire et de volume.

Analyse du problème

A la question **1°** *a*), on peut hésiter entre une preuve « vectorielle » et une preuve « analytique » (c'est-à-dire en utilisant les coordonnées). Cette dernière prévaut puisque l'énoncé nous indique le repère.

A la question **2°**, il faut savoir que $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A} \times h$ où $\mathcal{A}$ est l'aire d'une face et h la hauteur associée. Connaissant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{V}$ on en déduit h.

Une solution

Compte tenu des hypothèses de l'énoncé, dans le repère indiqué, les points *B*, *K*, *I*, *G* et *A* ont pour coordonnées respectives : $(1\,;0\,;0)$, $\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$, $(1\,;1\,;1)$ et $(0\,;0\,;0)$. D'où les coordonnées des vecteurs, dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

$\overrightarrow{BK}\left(-1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IG}\left(\frac{1}{2}\,;1\,;0\right)$,

$\overrightarrow{IA}\left(-\frac{1}{2}\,;0\,;-1\right)$.

1° *a*) La base étant orthonormale directe, les coordonnées (α, β, γ) de $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$ sont :

$\alpha = 1 \times (-1) - 0 \times 0 = -1,$

$\beta = \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0 - \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2},$

$\gamma = \frac{1}{2} \times 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{1}{2}.$

Les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$ ayant mêmes coordonnées dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ sont égaux.

b) L'aire du triangle *IGA* est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\|$, soit

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BK}\|.$

$BK^2 = (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$ donc

$BK = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

L'aire du triangle *IGA* est donc $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

2° • Le volume du tétraèdre *ABIG* est :

$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}) \cdot \overrightarrow{IB}\right|.$

$(\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}) \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IB}.$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IB}$ sont $\left(\frac{1}{2}\,;0\,;-1\right)$ donc :

$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IB} = (-1) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times (-1) = -1.$

On en déduit : $\mathcal{V} = \frac{1}{6}$.

• La distance du point *B* au plan (*AIG*) est la hauteur h du tétraèdre *ABIG* associée à la face *IGA*. Or $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A} \times h$. On en déduit :

$\frac{1}{6} = \frac{1}{3}\mathcal{A} \times h$ soit $h = \frac{1}{2\mathcal{A}}$.

Donc : $h = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Exercices et problèmes

Q.C.M.

Dans chacun des cas, une ou plusieurs réponses sont exactes.

1 On considère le repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

le repère $(O, -\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$ est direct .... ☐

le repère $(O, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ est indirect .... ☐

le repère $(O, \vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ est direct .... ☐

2 On considère les vecteurs $\vec{u}(1\,;2\,;-3)$ et $\vec{v}(-2\,;3\,;2)$ dans un repère orthonormal direct de l'espace. Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées :

$(13\,;-4\,;7)$ .... ☐

$(13\,;4\,;7)$ .... ☐

$(-13\,;-4\,;-7)$ .... ☐

Q.C.M. **3** *à* **5** *: soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe de l'espace ; soit :*
$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{k}$.

3 $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{11}$ .... ☐

$\vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ .... ☐

$\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ .... ☐

4 $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \wedge \vec{u}$ .... ☐

$(\vec{u} + 2\vec{v}) \wedge (\vec{v} - 2\vec{u}) = 5(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ .... ☐

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$ .... ☐

5 On considère de plus, $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$:

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{0}$ .... ☐

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$ .... ☐

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires .... ☐

Q.C.M. **6** *et* **7** *: soit ABC un triangle équilatéral ; soit I le milieu de [BC].*

6 $\vec{IB} \wedge \vec{BC} = \vec{0}$ .... ☐

$\|\vec{BA} \wedge \vec{BI}\| = \text{aire}\,(ABI)$ .... ☐

$\|\vec{BA} \wedge \vec{BC}\| = AB^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .... ☐

7 $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .... ☐

$\vec{AI} \wedge \vec{BC} = \vec{IB} \wedge \vec{IA} + \vec{IA} \wedge \vec{CI}$ .... ☐

$\vec{AI} \wedge \vec{BC} = 2\,\vec{AI} \wedge \vec{BI}$ .... ☐

8 Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est :

$\dfrac{1}{6}\,|(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$ .... ☐

$\dfrac{1}{6}\,|(\vec{BC} \wedge \vec{BD}) \cdot \vec{AB}|$ .... ☐

$\dfrac{1}{6}\,|(\vec{BA} \wedge \vec{BC}) \cdot \vec{BD}|$ .... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Dans les exercices **9** *et* **10**, *déterminez les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ à partir des coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ précisées dans une base orthonormale directe.*

9 ▪ a) $\vec{u}\left(2\,;-\dfrac{1}{2}\,;1\right)$; $\vec{v}(-1\,;0\,;3)$. b) $\vec{u}(3\,;-2\,;1)$; $\vec{v}(7\,;-8\,;2)$.

c) $\vec{u}\left(-\dfrac{1}{4}\,;-\dfrac{1}{2}\,;2\right)$; $\vec{v}(1\,;2\,;-8)$. d) $\vec{u}(1\,;-1\,;-1)$; $\vec{v}(-1\,;1\,;1)$.

10 a) $\vec{u}(-2a\,;\,a\,;\,-a)$, $\vec{v}(a\,;\,-a\,;\,1)$ $(a \in \mathbb{R})$.

b) $\vec{u}(\cos\theta;\,-\sin\theta;\,1)$, $\vec{v}(\sin\theta;\,\cos\theta;\,0)$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

c) $\vec{u}\left(\sin\frac{\theta}{2};\,0\,;\,\cos\frac{\theta}{2}\right)$, $\vec{v}\left(\cos\frac{\theta}{2};\,\cos\frac{\theta}{2};\,\sin\frac{\theta}{2}\right)$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

Dans les exercices ***11*** *à* ***13****, déterminez les produits vectoriels indiqués, à partir des coordonnées des points précisées dans un repère orthonormal direct de l'espace.*

11 On considère $A(1\,;\,0\,;\,2)$, $B(-1\,;\,-1\,;\,1)$, $C(2\,;\,1\,;\,-1)$ et $D(-2\,;\,3\,;\,1)$.

a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}$. b) $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AC}$.

c) $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{DA}$. d) $\overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD})$.

12 On considère $A(2\,;\,-1\,;\,-2)$, $B(1\,;\,0\,;\,-1)$, $C(-1\,;\,1\,;\,-1)$, $D(2\,;\,2\,;\,-3)$ et $E(3\,;\,-2\,;\,2)$.

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \wedge (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC})$.

b) $(\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{CD}) \wedge (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE})$.

c) $\overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE})$.

d) $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{DE}$.

13 On considère $M(x,\,y,\,z)$, $A(2\,;\,2\,;\,-3)$, $B(1\,;\,2\,;\,-3)$ et $C(x\,;\,-1\,;\,1)$.

a) $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$. b) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{MC}$.

Bases orthonormales directes de l'espace

14 Soit $(\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$ une base orthonormale de l'espace. Démontrez l'équivalence des deux affirmations :

- la base $(\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$ est directe ;
- $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$.

15 Soit $(\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$ une base orthonormale directe de l'espace, $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{k})$,

$$\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{w} = \frac{\sqrt{6}}{6}(-\vec{i} - 2\,\vec{j} + \vec{k}).$$

1° Vérifiez que la base $(\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{w})$ est orthonormale.

2° Calculez $\vec{u} \wedge \vec{v}$. La base $(\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{w})$ est-elle directe ?

16 Soit $(\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$ une base orthonormale directe de l'espace, $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$.

1° Montrez que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2° Déterminez $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

3° A partir des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ déterminez trois vecteurs $\vec{u}\,'$, $\vec{v}\,'$ et $\vec{w}\,'$ tels que $(\vec{u}\,',\,\vec{v}\,',\,\vec{w}\,')$ soit une base orthonormale directe de l'espace.

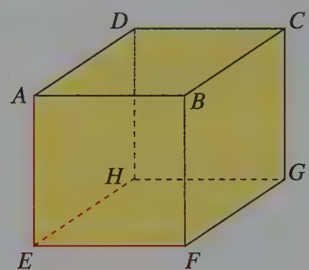
17 Soit $(\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$ une base orthonormale directe de l'espace, $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k})$, $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{k})$ et $\vec{w} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$.

1° Calculez $\cos(\vec{u},\,\vec{v})$, $\cos(\vec{v},\,\vec{w})$ et $\cos(\vec{w},\,\vec{u})$.

2° Déterminez $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$ et $\vec{w} \wedge \vec{u}$.

18 Soit a un nombre réel strictement positif, distinct de 1. On considère le cube $ABCDEFGH$, d'arête a.

1° a) La base $(\mathcal{B})$: $(\overrightarrow{EF},\,\overrightarrow{EH},\,\overrightarrow{EA})$ est-elle directe ?



b) Est-elle orthonormale directe ?

c) Construisez une base orthonormale directe à partir des vecteurs de $(\mathcal{B})$.

2° Soit la base $(\mathcal{B}')$: $\left(\frac{1}{a}\,\overrightarrow{DC},\ \frac{1}{a}\,\overrightarrow{DA},\ \frac{1}{a}\,\overrightarrow{DH}\right)$.

a) Est-elle une base orthonormale directe de l'espace ?

b) Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{GB}$ dans la base $(\mathcal{B}')$.

c) Déterminez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE} \wedge \overrightarrow{GB}$ dans la base $(\mathcal{B}')$.

Propriétés du produit vectoriel

19 Soit A, B, C et D quatre points quelconques de l'espace. Montrez que :

$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$.

20 **Identité de Lagrange**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Démontrez que :

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u}\,.\,\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$.

21 ■■ Soit A, B et C trois points de l'espace.
Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
(Vous pourrez distinguer les deux cas : A, B et C sont alignés ou non alignés.)

22 ■■ Soit A, B et C trois points de l'espace. Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$(2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \wedge \overrightarrow{MA} = \vec{0}$.

23 ■■ Soit A, B et C trois points de l'espace, I le milieu du segment $[BC]$.
Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$\|(3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \wedge \overrightarrow{MA}\| = \|2\,\overrightarrow{AI}\,\|^2$.

24 ■■ 1° Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. Montrez que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- A, B, C et D coplanaires.
- $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \,.\, \overrightarrow{AD} = 0$.

2° Soit un triangle PQR. Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$(\overrightarrow{MP} \wedge \overrightarrow{MR}) \,.\, \overrightarrow{MP} = (\overrightarrow{MR} \wedge \overrightarrow{MP}) \,.\, \overrightarrow{PQ}$.

25 ■■ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace, A le point de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,1)$.
A tout point M de l'espace on associe le point M' défini par : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OM}$.

1° Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que $M' = M$.

2° Calculez les coordonnées (x', y', z') de M' en fonction des coordonnées (x, y, z) de M.
Retrouvez le résultat du 1°.
3° Montrez que pour tout point M situé hors de la droite (OA) :

a) la droite (MM') est perpendiculaire au plan (OAM).

b) $MM' = OA \times MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (OA).

26 ■■ Soit A et B deux points de l'espace.
Soit I le milieu de $[AB]$. On pose $a = AI$.

1° Soit M un point quelconque de l'espace distinct de I.

Soit α l'angle géométrique $\widehat{AIM}$.
Montrez que : $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = 2a\; IM \sin \alpha$:

a) en utilisant la relation de Chasles ;

b) en découpant le triangle AMB en deux triangles et en utilisant les aires.

2° Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\dfrac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\|}{\|\overrightarrow{IM}\|} = 2a$.

3° Démontrez que l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\dfrac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\|}{\|\overrightarrow{IM}\|} = a$ est un cône de révolution de sommet I (privé de I).

27 ■■■ **Double produit vectoriel**
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On se propose de calculer le vecteur $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

1° Expliquez comment on peut choisir une base orthonormale directe de l'espace $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ telle que :

- il existe un nombre a tel que $\vec{u}$ ait pour coordonnées $(a, 0, 0)$
- il existe deux nombres b et c tels que $\vec{v}$ ait pour coordonnées $(b, c, 0)$.

2° On considère l'espace rapporté à la base décrite au 1°. Soit (x, y, z) les coordonnées du vecteur $\vec{w}$.

a) Calculez $\vec{v} \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

b) Vérifiez que :
$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \,.\, \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \,.\, \vec{v})\,\vec{w}$.

3° Démontrez que :
$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$.

28 ■■ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace, A et B de coordonnées respectives $(1\,;\,-1\,;\,0)$ et $(1\,;\,1\,;\,2)$.
Soit M un point de coordonnées (x, y, z).

1° Déterminez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OM})$.

2° Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OM}) = \vec{0}$?

Produit vectoriel et plans de l'espace

29 ■ On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(-1\,;\,0\,;\,2)$, $(3\,;\,-4\,;\,2)$, $(-2\,;\,-1\,;\,1)$ et $(0\,;\,-3\,;\,-1)$ dans un repère orthonormal direct.
Dans chacun des cas proposés, vérifiez que les points cités ne sont pas alignés et calculez un vecteur normal au plan qu'ils déterminent :

1° A, B et C. 2° B, C et D.

3° A, C et D. 4° A, B et D.

30 ■ L'espace étant muni d'un repère orthonormal direct, on considère un plan $(\mathscr{P})$. Précisez un vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$ dans chacun des cas proposés :

1° $(\mathscr{P})$ est déterminé par le point $A(-1\,;\,2\,;\,-2)$ et par la droite de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;\,-1\,;\,2)$ passant par le point $B(3\,;\,3\,;\,2)$;

2° $(\mathscr{P})$ est parallèle au plan déterminé par les trois points : $A(1\,;\,2\,;\,-1)$, $B(-1\,;\,1\,;\,2)$ et $C(1\,;\,0\,;\,-3)$;

3° $(\mathscr{P})$ est déterminé par les deux droites sécantes :

- (AB) avec $A(2\,;\,2\,;\,2)$ et $B(-1\,;\,3\,;\,1)$
- $(B, \vec{u})$ avec $\vec{u}(2\,;\,-2\,;\,1)$.

31 Montrez que les quatre points A, B, C et D de coordonnées respectives $(1\,;\,1\,;\,-2)$, $(0\,;\,1\,;\,0)$, $(-1\,;\,2\,;\,3)$ et $(4\,;\,3\,;\,-6)$ dans un repère orthonormal direct sont coplanaires.

32 L'espace étant muni d'un repère orthonormal direct, on considère les cinq points A, B, C, D et E de coordonnées respectives $(2\,;\,3\,;\,1)$, $(1\,;\,1\,;\,1)$, $(1\,;\,-2\,;\,-1)$, $(1\,;\,-2\,;\,0)$ et $(0\,;\,-1\,;\,1)$.
Déterminez parmi ces points les quatre qui sont coplanaires.

33 Soit les points $A\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $B(2\,;\,0\,;\,1)$ et $C(3\,;\,-2\,;\,-2)$ dans un repère orthonormal direct.

1° a) Calculez $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Déduisez-en que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2° a) Précisez un vecteur normal au plan (ABC).

b) Déduisez-en une équation du plan (ABC).

34 Soit $A(2\,;\,0\,;\,0)$, $B(-4\,;\,0\,;\,0)$, $C(0\,;\,6\,;\,0)$ trois points donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormal direct.

1° Déterminez les équations des plans médiateurs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

2° a) Démontrez que ces trois plans ont une droite commune.

b) Précisez le point d'intersection de cette droite avec le plan (ABC).

3° Déterminez l'ensemble des points de l'espace équidistants des points du cercle circonscrit au triangle ABC.

35 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct, A, B et C tels que :

$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}$, $\quad \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} \quad$ et $\quad \overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

1° Montrez que les plans (OAB) et (ABC) sont perpendiculaires.

2° a) Déterminez les équations des plans médiateurs des segments $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$.

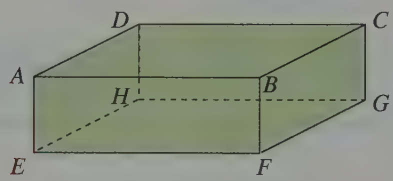
b) Précisez le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $OABC$.

36 Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que : $AB = 3$, $AE = 1$ et $AD = 2$.
Soit P, Q et R les points tels que :

$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$, $\quad \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BF} \quad$ et $\quad \overrightarrow{BR} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{BC}$.

Soit M le point tel que $\quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{AP}$.

1° Dessinez la section de $ABCDEFGH$ par le plan $(\mathscr{P})$ passant par M et parallèle au plan (PQR).



2° a) Choisissez un repère orthonormal direct pratique en utilisant les arêtes du solide.

b) Déterminez dans ce repère une équation du plan $(\mathscr{P})$.

c) Recherchez les coordonnées des points d'intersection du plan $(\mathscr{P})$ avec les arêtes du solide. Comparez avec la figure du **1°**.

Calculs de distances, d'aires et de volumes

37 L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct.
Dans chacun des cas proposés, calculez l'aire du triangle ABC :

1° $A(2\,;\,-1\,;\,1)$,
$B(1\,;\,1\,;\,1)$ et $C(2\,;\,3\,;\,-1)$.

2° $A(0\,;\,1\,;\,0)$,
$B(2\,;\,2\,;\,-3)$ et $C(1\,;\,2\,;\,2)$.

3° $A\left(-1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,2\right)$,
$B\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $C(0\,;\,1\,;\,1)$.

38 L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct. Dans chacun des cas proposés, calculez :

- la distance du point M au plan (ABC),
- la distance du point M à la droite (AB) :

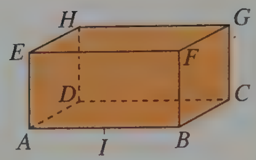
1° $A\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$, $\quad B(1\,;\,1\,;\,1)$, $\quad C\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$,
$M\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$;

2° $A(-1\,;\,-1\,;\,2)$, $\quad B(2\,;\,-1\,;\,1)$,
$C(-1\,;\,2\,;\,1)$, $\quad M(1\,;\,1\,;\,1)$;

3° $A(2\,;\,-3\,;\,-3)$, $\quad B(3\,;\,-2\,;\,2)$, $\quad C(1\,;\,1\,;\,0)$,
$M(-1\,;\,0\,;\,-1)$.

39 Reprenez les données de l'exercice précédent et calculez le volume du tétraèdre $MABC$ dans chacun des trois cas proposés.

40 Soit un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ tel que $AB = 2$, $BC = CG = 1$.
Soit I le milieu de $[AB]$.



1° Déterminez un repère orthonormal direct d'origine A commode pour travailler dans ce solide.

2° Déterminez une équation du plan $(\mathcal{T})$ passant par les points I, F et H.

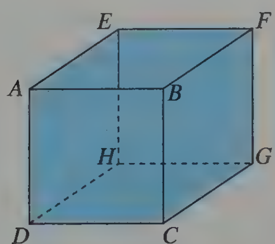
3° Calculez la distance du point G au plan $(\mathcal{T})$.

4° a) Calculez la distance du point G à la droite (IH).

b) Le projeté orthogonal de G sur $(\mathcal{T})$ appartient-il à la droite (IH) ? Justifiez.

41 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête $a\,(a \neq 1)$. Soit K le symétrique du point F par rapport au point A.

1° Déterminez un repère orthonormal direct d'origine A commode pour travailler dans ce solide.



2° a) Donnez une équation du plan (EBD).

b) Calculez les distances des points G et K au plan (EBD).

c) Calculez les distances des points G et K à la droite (BD).

d) Précisez celui des deux points G et K dont le projeté orthogonal sur le plan (EBD) appartient à la droite (BD).

3° a) Déterminez les équations des plans médiateurs des segments $[EB]$, $[ED]$ et $[KD]$.

b) Déduisez-en le centre Ω et le rayon R de la sphère circonscrite au tétraèdre $KEBD$.

4° a) Calculez l'aire du triangle KBD.

b) Calculez le volume du tétraèdre $KEBD$.

42 On considère le cube de l'exercice précédent.

Soit I le milieu de $[AB]$ et J tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

1° Dessinez la section du cube par le plan parallèle au plan (DIJ) et passant par le point H.

2° Calculez l'aire de cette section.

3° Calculez le volume de la pyramide de base cette section et de sommet A.

PROBLÈME

43 **Tétraèdre. Aire de l'intersection avec un plan**

L'objet de ce problème est de démontrer, par le calcul vectoriel, qu'un plan de section d'aire maximale d'un tétraèdre est nécessairement le plan d'une face.

L'espace est orienté. Soit $ABCD$ un tétraèdre ; on pose :

$2\vec{S}_1 = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$; $2\vec{S}_2 = \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$;
$2\vec{S}_3 = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $2\vec{S}_4 = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

I – Sections triangulaires

1° Établissez l'égalité : $\vec{S}_4 = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$.

2° Soit les points M_1, M_2, M_3 définis par :
$\overrightarrow{AM_1} = \alpha\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM_2} = \beta\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AM_3} = \gamma\overrightarrow{AD}$,
où α, β, γ sont trois nombres réels de l'intervalle $]0\,;1[$.

3° On pose $2\vec{T} = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}$.

a) Exprimez $\vec{T}$ comme combinaison linéaire de $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$.

b) Montrez que, pour tout nombre réel ρ :
$\vec{T} = (\beta\gamma - \rho)\vec{S}_1 + (\gamma\alpha - \rho)\vec{S}_2 + (\alpha\beta - \rho)\vec{S}_3 + \rho\vec{S}_4$.

c) En choisissant pour ρ la plus petite des valeurs $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, montrer que $\|\vec{T}\|$ est inférieur ou égal au plus grand des quatre nombres : $\|\vec{S}_1\|$, $\|\vec{S}_2\|$, $\|\vec{S}_3\|$, $\|\vec{S}_4\|$.
Vous pourrez utiliser l'égalité suivante où a, b, c désignent trois nombres réels :
$a(b + c) - bc = a^2 - (a - b)(a - c)$.

4° Interprétez les normes des vecteurs $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$ et $\vec{T}$; résolvez le problème des sections triangulaires d'aire maximale.

II – Sections quadrangulaires.

Soit les points M_1, M_2, M_3, M_4 définis par :
$\overrightarrow{AM_1} = \alpha\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM_2} = \beta\overrightarrow{AC}$;
$\overrightarrow{DM_3} = \lambda\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DM_4} = \mu\overrightarrow{DB}$
où α, β, λ, μ sont quatre nombres réels de l'intervalle $]0\,;1[$.
On suppose que les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 sont coplanaires et on pose : $2\vec{Q} = \overrightarrow{M_1M_3} \wedge \overrightarrow{M_2M_4}$.

1° Interprétez la norme de $\vec{Q}$.

2° Exprimez $\vec{Q}$ comme combinaison linéaire de $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$: $\vec{Q} = k_1\vec{S}_1 + k_2\vec{S}_2 + k_3\vec{S}_3$.
Vérifiez que k_1 et k_2 sont positifs et que :
$1 - k_1 - k_2 + k_3 = (1 - \alpha - \lambda)(1 - \beta - \mu)$.

3° La coplanarité de M_1, M_2, M_3, M_4 s'exprime par une relation entre α, β, λ, μ. Formez cette relation et déduisez-en que le produit précédent $(1 - \alpha - \lambda)(1 - \beta - \mu)$ est positif.

4° a) Dans l'hypothèse $\alpha\beta \leqslant \lambda\mu$, montrez que $\|\vec{Q}\|$ est inférieur ou égal au plus grand des trois nombres $\|\vec{S}_1\|$, $\|\vec{S}_2\|$, $\|\vec{S}_3\|$.

b) Dans le cas où $\alpha\beta > \lambda\mu$, quelle autre expression de $\vec{Q}$ mettriez-vous en œuvre pour conclure ?

7 Isométries du plan

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Triangles isométriques 166

AP2 Composons. Décomposons 167

COURS

1. Réflexions du plan 169
2. Isométries du plan 172
3. Isométries vectorielles 176
4. Déplacements 181

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Étude d'un lieu géométrique 184

TP2 Isométries laissant une figure invariante 185

TP3 Isométries associant deux figures 186

TP4 Composition d'isométries 186

TP5 Caractérisation d'isométries 187

FICHE MÉTHODE

FICHE MÉTHODE Comment déterminer la composée de deux isométries 188

Comment utiliser les isométries 188

EXERCICES COMMENTÉS 189

LE JOUR DU BAC 191

EXERCICES ET PROBLÈMES 192

objectifs

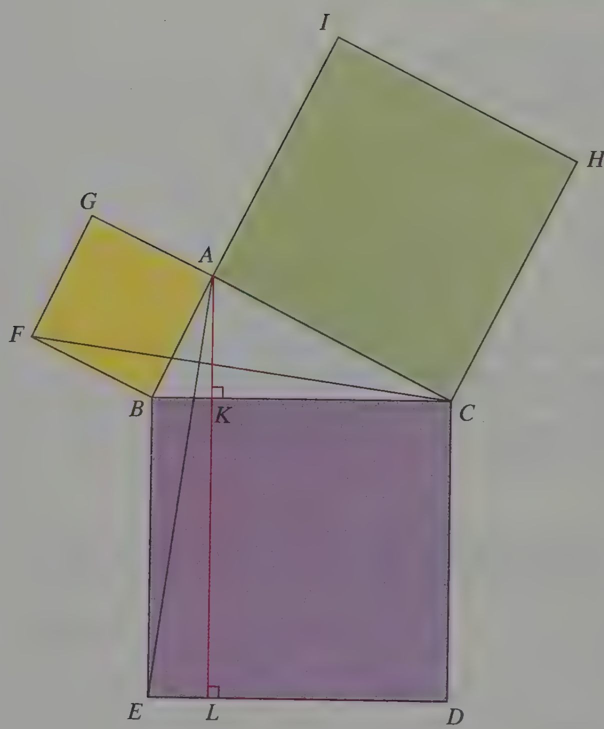
- Étudier les applications bijectives qui conservent les distances (les projections, non bijectives et qui ne conservent pas les distances, ainsi que les homothéties de rapport k, avec $|k| \neq 1$, qui ne conservent pas les distances sont exclues).
- Savoir caractériser une isométrie, connaissant ses points invariants.
- Savoir décomposer « simplement » certaines isométries.

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Triangles isométriques

Au cours de l'étude des propriétés métriques des figures planes (Première S, E) nous avons mis en évidence la notion de triangles isométriques (trois cas d'isométrie des triangles) sans utiliser de transformation du plan associant les deux triangles. Reprenons l'étude de quelques situations en relation avec les transformations du plan.

1 ■ *Théorème de Pythagore. Démonstration d'Euclide*



Le triangle ABC est rectangle en A. Les quadrilatères $BCDE$, $ACHI$ et $ABFG$ sont des carrés, (AK) est perpendiculaire à (BC).

1° En utilisant les éléments de la figure ci-contre justifiez que les triangles FBC et ABE sont isométriques (deuxième cas d'isométrie).

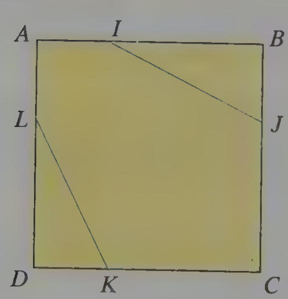
2° Par quelle transformation du plan le triangle FBC est-il l'image du triangle ABE ?

3° Énoncez deux autres triangles isométriques et indiquez une transformation permettant de passer de l'un à l'autre.

4° Pour terminer la démonstration, par Euclide, du théorème de Pythagore, comparez les aires des triangles ABF et CBF d'une part, ABE et KBE d'autre part. Déduisez-en alors que $ABFG$ et $BKLE$ d'une part, $ACHI$ et $KCDL$ d'autre part, ont la même aire. La conclusion : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ s'impose alors.

2 ■ *Trapèze inscrit dans un carré*

Soit $ABCD$ un carré et I, J, K, L les points définis par les égalités :



$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}.$$

1° En utilisant un des cas d'isométrie des triangles démontrez que les triangles BIJ et DKL sont isométriques.

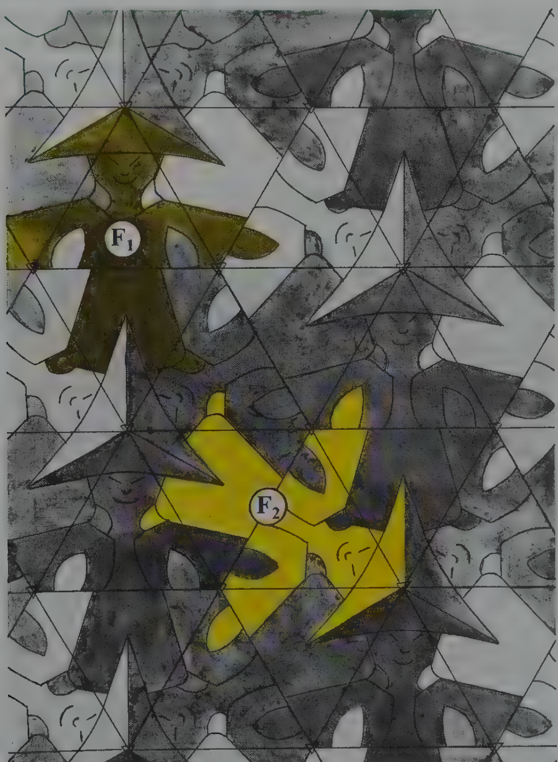
2° Quelle est la médiatrice du segment $[IL]$, du segment $[KJ]$? (Justifiez votre réponse.)

3° Par quelle transformation, déduite de la question **2°**, le triangle DKL est-il l'image du triangle BJI ?

AP2 Composons. Décomposons

Des lectures de figures vont permettre dans cette AP2 de formuler quelques conjectures, qui seront reprises en cours, relatives à la composition et à la décomposition de transformations connues.

1 ■ *«Figures humaines» de M. C. Escher*[1]



1° Déterminez dans le tableau ci-dessus des personnages (nous dirons **motifs**) se correspondant :
— par une translation ; précisez le vecteur de translation ;
— par une rotation ; précisez le centre et l'angle de cette rotation ;
— par une réflexion ; précisez l'axe de cette réflexion.

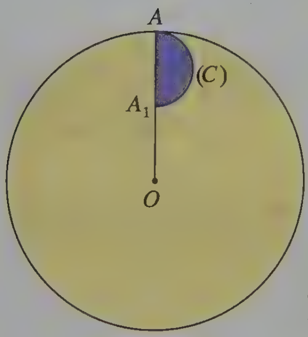
2° Les deux motifs F_1 et F_2 se correspondent globalement par une rotation R et par une réflexion S. Quelle est l'image de la main droite de F_1, notée m_d, par R ? par S ?

3° Déterminez deux réflexions S_1 et S_2 telles que, en appliquant S_1 à m_d, puis S_2 à l'image de m_d par S_1, on obtienne la main droite de F_2.

(1) M. C. Escher. Graveur néerlandais né en 1898 à Leeuwarden.

2 ■ *Réflexions et rotations*

Soit $ABCDEFGH$ un octogone régulier inscrit dans un cercle de centre O ; A_1 est le milieu $[OA]$.



1° Construisez l'image (C') du demi-cercle (C) de diamètre $[AA_1]$ par la composée des deux réflexions $s_{(DH)} \circ s_{(AE)}$. Par quelle transformation passe-t-on directement de (C) à (C') ?

2° Construisez l'image (C'') de (C) par la composée des deux réflexions $s_{(BF)} \circ s_{(CG)}$. Que remarquez-vous ?

3° Pouvez-vous déterminer une réflexion $s_{(\Delta)}$, (Δ) étant une droite de la figure, telle que (C) ait pour image (C') par $s_{(\Delta)} \circ s_{(BF)}$?

4° Pouvez-vous déterminer une réflexion $s_{(\Delta')}$, (Δ') étant une droite de la figure, telle que (C) ait pour image (C') par $s_{(CG)} \circ s_{(\Delta')}$?

Une rotation d'angle de mesure θ a été décomposée de plusieurs façons en deux réflexions $s_{(\Delta)}$ et $s_{(\Delta')}$ d'axes sécants, sous la forme $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$; l'axe de la deuxième réflexion, (Δ') est, dans chaque cas étudié, l'image du premier axe (Δ), par une rotation d'angle de mesure $\theta/2$.

3 ■ *« Les reptiles » de M. C. Escher*

1° Retrouvez dans le dessin ci-dessus l'image R_2 du reptile R_1 par la rotation de centre O_1 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, puis l'image R_3 de R_2 par la rotation de centre O_2 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

2° Déterminez, par lecture du dessin, une transformation permettant de passer directement de R_1 à R_3.

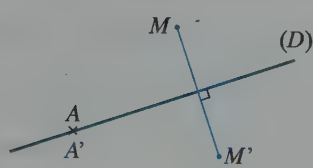
3° Il existe une rotation transformant R_1 en R_4. Construisez géométriquement son centre et déterminez une mesure de son angle.

COURS

1. RÉFLEXIONS DU PLAN

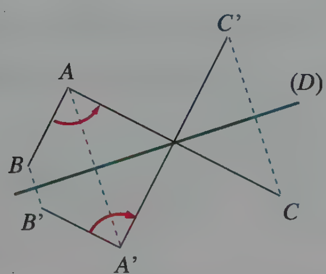
1. Rappels

Les réflexions du plan ont été étudiées dans les classes précédentes.
Rappelons que si f est une réflexion d'axe (D) alors :



- les points de (D) sont invariants ;
- si un point M n'est pas un point de (D) alors son image M' par f est telle que (D) est la médiatrice du segment $[MM']$.

De plus :

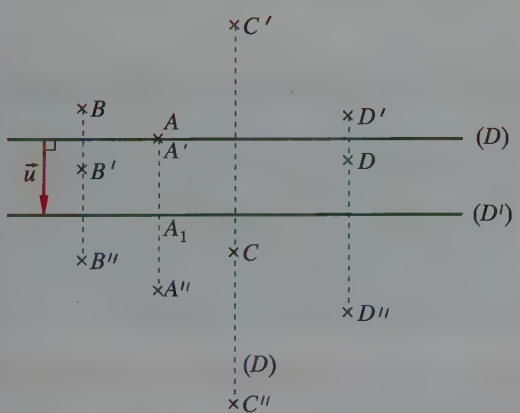


- f conserve les distances.
Quels que soient les points A et B, si on note A' et B' leurs images, alors :
$A'B' = AB$.
- f conserve les angles géométriques.
Quels que soient les points A, B, C, d'images A', B', C', on a :
$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.

Notons que, de plus : $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

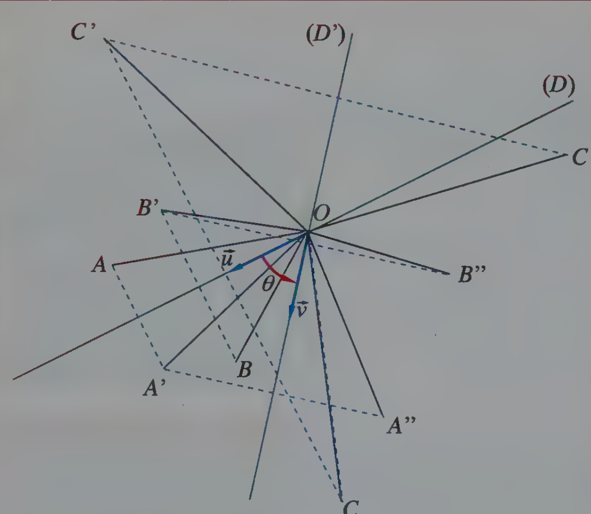
2. Réflexions. Translation. Rotation

■ **Composition de réflexions**
Nous avons vu, en Première, les résultats suivants :



$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''} = \overrightarrow{CC''} = \overrightarrow{DD''}$.

$s_{(D')} \circ s_{(D)} = t_{2\vec{u}}$.



$OA = OA' = OA''$, $OB = OB' = OB''$, $OC = OC' = OC''$.
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA''}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB''}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC''}) = 2\theta$.

$s_{(D')} \circ s_{(D)} = r_{[O,\, 2\theta]}$.

Si $(D) = (D')$ alors $s_{(D')} \circ s_{(D)} = \mathrm{Id}_{(P)}$.

$\mathrm{Id}_{(P)} = t_{\vec{0}} = r_{[I,\, 0]}$, I point quelconque du plan.

COURS

■ **Décomposition d'une translation**

Toute translation peut-elle être décomposée en deux réflexions ?

• ANALYSE DU PROBLÈME (recherche de conditions nécessaires).

Soit $t_{\vec{v}}$ une translation de vecteur $\vec{v}$ non nul. S'il existe deux réflexions $s_{(D)}$ et $s_{(D')}$, d'axes (D) et (D'), telles que $s_{(D')} \circ s_{(D)} = t_{\vec{v}}$ alors (D) et (D') sont nécessairement parallèles.

De plus si on note A un point de (D) et A_1 son projeté orthogonal sur (D') alors $s_{(D')} \circ s_{(D)} = t_{2\overrightarrow{AA_1}}$, donc : $2\overrightarrow{AA_1} = \vec{v}$; $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\vec{v}$.

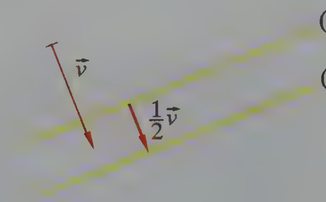
Les deux droites (D) et (D') sont donc telles que l'image de (D) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}$ est (D') et $\vec{v}$ est normal à (D) (donc à (D')).

• SYNTHÈSE

Soit $\vec{v}$ le vecteur de la translation, non nul, (D) une droite telle que $\vec{v}$ soit normal à (D), (D') l'image de (D) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}$.

Alors : $s_{(D')} \circ s_{(D)} = t_{2 \cdot \frac{1}{2}\vec{v}}$

$s_{(D')} \circ s_{(D)} = t_{\vec{v}}$.



Les droites (D) et (D') sont deux droites solutions.

□ *Remarques*

1° On aurait pu choisir (D'), de vecteur normal $\vec{v}$, puis (D), image de (D') par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{v}$.

2° Si $\vec{v} = \vec{0}$ alors quelle que soit la droite (D) on a $s_{(D)} \circ s_{(D)} = t_{\vec{0}}$.

Propriété 1

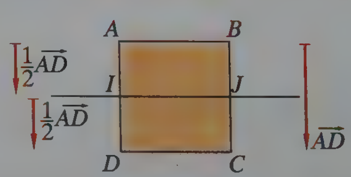
> **Toute translation $t_{\vec{v}}$ de vecteur $\vec{v}$, est décomposable en deux réflexions d'axes (D) et (D') parallèles.**
>
> • **Si $\vec{v} = \vec{0}$, alors quelle que soit (D), $s_{(D)} \circ s_{(D)} = t_{\vec{0}}$, $(D) = (D')$.**
>
> • **Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\begin{cases} (D) \text{ a pour vecteur normal } \vec{v}, \\ (D') \text{ est l'image de } (D) \text{ par } t_{(1/2)\vec{v}}. \end{cases}$**
>
> **(D) ou (D') est arbitrairement choisie, de vecteur normal $\vec{v}$.**

EXEMPLE

$ABCD$ est un carré, I et J sont les milieux de $[AD]$ et $[BC]$.

$t_{\overrightarrow{AD}} = s_{(IJ)} \circ s_{(AB)}$;

$t_{\overrightarrow{AD}} = s_{(DC)} \circ s_{(IJ)}$.



■ **Décomposition d'une rotation**

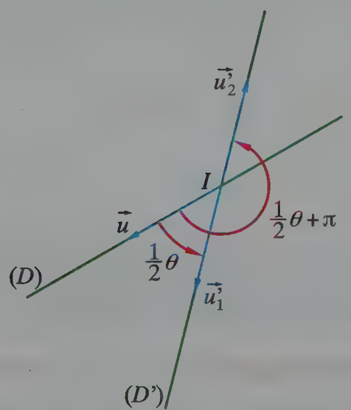
Toute rotation peut-elle être décomposée en deux réflexions ?

• ANALYSE DU PROBLÈME. Soit $r_{[I,\,\theta]}$ une rotation de centre I et d'angle de mesure θ, θ non multiple de 2π.

S'il existe deux réflexions $s_{(D)}$ et $s_{(D')}$ telles que $s_{(D')} \circ s_{(D)} = r_{[I,\,\theta]}$ alors (D) et (D') sont nécessairement sécantes en I.

De plus si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont des vecteurs directeurs de (D) et (D') et si $(\vec{u}, \vec{u}') = \alpha$ alors $s_{(D')} \circ s_{(D)} = r_{[I,\,2\alpha]}$.

(D) et (D') sont donc telles qu'il existe un nombre k de $\mathbb{Z}$ tel que :

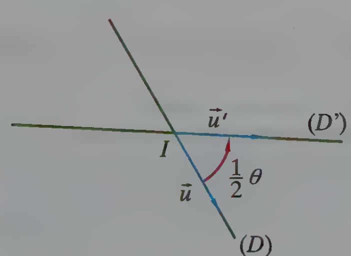


$$2\alpha = \theta + k2\pi \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{1}{2}\theta + k\pi.$$

Si (D) est choisie passant par I alors (D') est l'image de (D) par la rotation de centre I et d'angle de mesure $\frac{1}{2}\theta$.

Notons que l'image de (D) par la rotation d'angle de mesure $\frac{1}{2}\theta + \pi$ est aussi (D').

• SYNTHÈSE. Soit (D) une droite passant par I, (D') l'image de (D) par $r_{[I,\,(1/2)\,\theta]}$. Alors :



$s_{(D')} \circ s_{(D)} = r_{[I,\,2(1/2)\,\theta]}$,

$s_{(D')} \circ s_{(D)} = r_{[I,\,\theta]}$.

Les réflexions d'axes (D) et (D') sont solutions.

□ *Remarques*

1° On aurait pu choisir (D') passant par I puis (D) image de (D') par $r_{[I,\,-(1/2)\,\theta]}$.

2° Si $\theta = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors r est l'application identique du plan et quelle que soit (D), $s_{(D')} \circ s_{(D)} = r_{[I,\,0]}$.

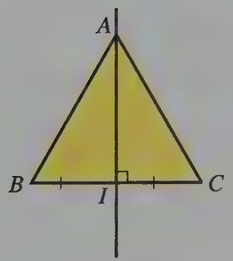
Propriété 2

Toute rotation de centre I et d'angle θ est la composée $s_{(D')} \circ s_{(D)}$ de deux réflexions.

- **Si $\theta = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors $(D) = (D')$.**
- **Si $\theta \notin \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ alors $\begin{cases} (D) \text{ passe par } I \\ (D') = r_{[I,\,(1/2)\,\theta]}(D). \end{cases}$**

(D) ou (D') peut être choisie arbitrairement, passant par I.

COURS



EXEMPLE

ABC est un triangle équilatéral, I est le milieu de $[BC]$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

$r_{[A, \pi/3]} = s_{(AI)} \circ s_{(AB)}$, $\quad r_{[A, \pi/3]} = s_{(AC)} \circ s_{(AI)}$.

□ *Remarque.* Les réflexions, les translations, les rotations conservent les distances. Ces transformations sont-elles les seules à conserver les distances ? Cette question fait l'objet du paragraphe suivant.

2. ISOMÉTRIES DU PLAN

1. Définition

Définition 1

On appelle isométrie du plan toute transformation du plan (application bijective) qui conserve les distances.

EXEMPLES

Les réflexions, translations, rotations sont des isométries.
Les homothéties de rapport différent de 1 et − 1, les projections, ne sont pas des isométries.

2. Composition. Application réciproque

Si f et g sont deux isométries alors f et g sont deux transformations ; par suite, et nous l'admettrons, $g \circ f$ et f^{-1} sont des transformations.
Soit A et B deux points du plan.

Posons : $\quad A \overset{f}{\longmapsto} A' \overset{g}{\longmapsto} A'' \qquad B \overset{f}{\longmapsto} B' \overset{g}{\longmapsto} B''$

Puisque f et g sont des isométries, $AB = A'B'$ et $A'B' = A''B''$; par suite : $AB = A''B''$.
Cette égalité est valable quels que soient les points A et B. L'application $g \circ f$ est donc une isométrie.
Soit C et D deux points du plan, C_0 et D_0 leurs images par f^{-1}.

$C \overset{f^{-1}}{\longmapsto} C_0$ donc $C_0 \overset{f}{\longmapsto} C \qquad D \overset{f^{-1}}{\longmapsto} D_0$ donc $D_0 \overset{f}{\longmapsto} D$

Puisque f est une isométrie, $CD = C_0 D_0$.
Cette égalité est valable quels que soient les points C et D du plan. L'application f^{-1} est donc une isométrie.

Propriétés 3

L'application composée de deux isométries est une isométrie.
L'application réciproque d'une isométrie est une isométrie.

3. Décomposition d'une isométrie

1 ■ Isométries fixant un point et translation

Soit f une isométrie et O un point du plan. Notons O' l'image de O par f et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. Les deux applications f et t sont deux isométries transformant O en O'.

• Posons $u = t^{-1} \circ f$. Alors u, composée de l'isométrie f et de la translation de vecteur $\overrightarrow{O'O}$ est une isométrie. De plus, $t^{-1} \circ f(O) = t^{-1}(O') = O$ donc u est une isométrie fixant O, c'est-à-dire telle que $u(O) = O$.

On a ainsi :

$$t^{-1} \circ f = u,$$
$$t \circ t^{-1} \circ f = t \circ u,$$
$$f = t \circ u.$$

L'isométrie f est décomposée en une isométrie qui fixe O et une translation.

• Montrons que cette décomposition est unique. S'il existe une isométrie u', fixant O, et une translation t' telles que $f = t' \circ u'$ alors on a :

$$O \overset{u}{\longmapsto} O \overset{t}{\longmapsto} O' \qquad\qquad O \overset{u'}{\longmapsto} O \overset{t'}{\longmapsto} O'$$

Le vecteur de la translation t' est donc $\overrightarrow{OO'}$ et par suite $t' = t$.

Ainsi :

$$t \circ u = t \circ u',$$
$$t^{-1} \circ t \circ u = t^{-1} \circ t \circ u',$$
$$u = u'.$$

Les deux décompositions $t \circ u$ et $t' \circ u'$ sont donc identiques, ce qui prouve l'unicité de cette décomposition.

Propriété 4

Étant donné un point O, toute isométrie f se décompose de manière unique sous la forme $t \circ u$ où u est une isométrie fixant O et t une translation.

2 ■ Isométries fixant un point

Nous savons que les rotations et les réflexions admettent au moins un point fixe (invariant). Existe-t-il d'autres isométries admettant au moins un point invariant ?

■ Isométries admettant au moins trois points non alignés invariants

Soit f une isométrie admettant trois points A, B, C invariants. Pour tout point M du plan, d'image M' par f, on a $M'A = MA$, $M'B = MB$, $M'C = MC$ puisque f est une isométrie.

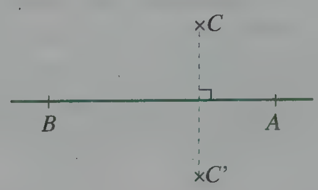
Si M est distinct de M' alors les points A, B, C sont des points de la médiatrice de $[MM']$, ils sont donc alignés, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On a donc, pour tout point M du plan : $f(M) = M$.
L'application f est l'application identique du plan.

COURS

■ **Isométries admettant au moins deux points invariants**
Soit f une isométrie, A et B deux points invariants par f. Soit C un point du plan non situé sur la droite (AB) et C' l'image de C par f.

• Si $C' = C$ alors les trois points A, B, C non alignés sont invariants. L'application f qui admet au moins trois points non alignés invariants est l'application identique du plan.



• Si $C' \neq C$ alors, puisque f est une isométrie, $AC' = AC$ et $BC' = BC$. La droite (AB) est donc la médiatrice du segment $[CC']$.
Notons g la réflexion d'axe (AB). Les points A, B, C, C' sont tels que :

$$\begin{array}{ccccc} A & \overset{f}{\longmapsto} & A & \overset{g}{\longmapsto} & A \\ B & \longmapsto & B & \longmapsto & B \\ C & \longmapsto & C' & \longmapsto & C \end{array}$$

Ainsi les trois points A, B, C, non alignés, sont invariants par l'application $g \circ f$. Composée de deux isométries, $g \circ f$ est une isométrie qui admet au moins trois points non alignés invariants, c'est donc l'application identique :

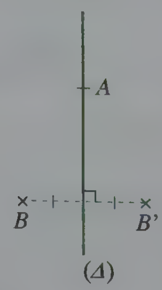
$$\begin{aligned} g \circ f &= \mathrm{Id}_{(P)}, \\ g \circ (g \circ f) &= g \circ \mathrm{Id}_{(P)}, \\ (g \circ g) \circ f &= g, \\ \mathrm{Id}_{(P)} \circ f &= g. \\ f &= g. \end{aligned}$$

f est donc la réflexion d'axe (AB).
Notons alors que tous les points de (AB) sont invariants par f.

■ **Isométries admettant un point unique invariant.**
Soit f une isométrie et A le point invariant par f. Si B est un point du plan, autre que A, alors B n'est pas invariant. Notons B' son image.
Puisque $AB' = AB$, A est un point de la médiatrice de $[BB']$. Notons (Δ) cette médiatrice
et g la réflexion d'axe (Δ).

$$A \overset{f}{\longmapsto} A \overset{g}{\longmapsto} A$$

$$B \overset{f}{\longmapsto} B' \overset{g}{\longmapsto} B$$



Ainsi $g \circ f$ est une isométrie admettant au moins deux points invariants A et B donc, d'après ce qui précède, $g \circ f$ est soit l'application identique soit la réflexion d'axe (AB), notée $s_{(AB)}$

COURS

• Si $g \circ f = \mathrm{Id}_{(P)}$ alors $f = g$.
Dans ce cas, f n'admet pas un unique point invariant, ce qui est contraire à l'hypothèse (A seul point invariant).

• Si $g \circ f = s_{(AB)}$ alors $g \circ g \circ f = g \circ s_{(AB)}$ et $f = g \circ s_{(AB)}$.
Dans ce cas f est la composée de deux réflexions dont les axes (AB) et (Δ) sont sécants en A. C'est donc une rotation de centre A.

Propriété 5

Toute isométrie fixant un point A, est :
— soit l'application identique,
— soit une réflexion dont l'axe contient A,
— soit une rotation de centre A.

Les propriétés 4 et 5 permettent de dire que les isométries du plan sont :

— soit **composées d'une rotation suivie d'une translation,** rotation éventuellement égale à l'application identique,

— soit **composées d'une réflexion suivie d'une translation.**

Dans le premier cas, composée d'une rotation suivie d'une translation, l'isométrie conserve les angles orientés, elle est appelée **déplacement** (voir page 181).

Dans le second cas, composée d'une réflexion suivie d'une translation, l'isométrie transforme un angle orienté en son opposé, elle est appelée **antidéplacement** (exemple : réflexions) ; ces isométries ne feront pas l'objet d'une étude.

4. Propriétés des isométries

Les propriétés 4 et 5 permettent d'énoncer les résultats suivants.

Propriétés 6

Les isométries d'un plan :

- **transforment une droite en une droite (donc elles conservent l'alignement des points) ;**
- **transforment un segment en un segment de même longueur ;**
- **transforment un cercle en un cercle de même rayon (les centres se correspondent par l'isométrie) ;**
- **conservent le contact (deux cercles tangents sont transformés en deux cercles tangents, un cercle et une droite tangents sont transformés en un cercle et une droite tangents) ;**
- **conservent le parallélisme des droites ;**
- **conservent les milieux des segments donc transforment un parallélogramme en un parallélogramme ;**
- **conservent les angles géométriques ;**
- **conservent les aires.**

COURS

3. ISOMÉTRIES VECTORIELLES

1. Applications vectorielles

Les isométries transforment un parallélogramme en un parallélogramme. Soit alors f une isométrie, $\vec{u}$ un vecteur de $(\mathcal{T})$, ensemble des vecteurs du plan.

Si (A, B) et (C, D) sont deux couples de points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$ alors $ABDC$ est un parallélogramme. Notons A', B', C', D' les images de A, B, C, D par f. Le quadrilatère $A'B'D'C'$ est un parallélogramme (propriété 6) donc $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Notons $\vec{u}'$ le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ (donc $\vec{u}' = \overrightarrow{C'D'}$). Ce vecteur $\vec{u}'$ dépend uniquement de f et de $\vec{u}$ et non des points A et B qui permettent de le définir.

Au vecteur $\vec{u}$ on peut donc faire correspondre un unique vecteur $\vec{u}'$ de $(\mathcal{T})$ par une application qui est appelée : application vectorielle associée à f.

Définition 2

On appelle application vectorielle associée à une isométrie f du plan l'application notée φ, définie de la façon suivante :
si $\vec{u}$ est un vecteur de $(\mathcal{T})$ ensemble des vecteurs du plan,
A et B deux points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$,
A' et B' leurs images par f
alors $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}'$ avec $\vec{u}' = \overrightarrow{A'B'}$.

□ *Remarques*

1° $\varphi(\vec{0}) = \varphi(\overrightarrow{AA}) = \overrightarrow{A'A'} = \vec{0}$; $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$.

2° Puisque f est une isométrie, on a $A'B' = AB$, donc $\|\varphi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$, quel que soit le vecteur $\vec{u}$ de $(\mathcal{T})$. L'application φ est dite **isométrie vectorielle** (elle conserve la norme des vecteurs et est bijective).

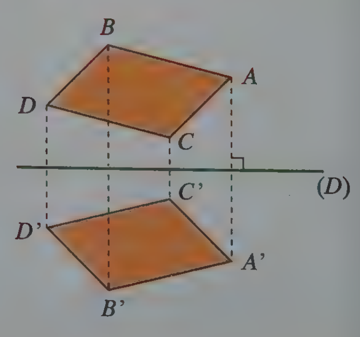
EXEMPLE

f est la réflexion d'axe (D).

$A' = f(A)$; $B' = f(B)$

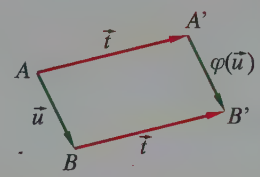
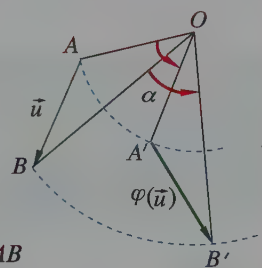
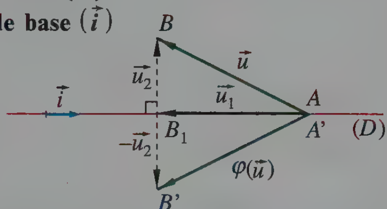
$C' = f(C)$

$\overrightarrow{A'B'} = \varphi(\overrightarrow{AB})$; $\overrightarrow{B'C'} = \varphi(\overrightarrow{BC})$.



COURS

2. Cas particuliers

Translation de vecteur $\vec{t}$  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$	Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$ φ est l'application identique de l'ensemble $(\mathcal{T})$ des vecteurs du plan $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{T}}$
Rotation de centre O d'angle α  $A'B' = AB$ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha$	• Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul : $\begin{cases} \lVert\varphi(\vec{u})\rVert = \lVert\vec{u}\rVert \\ (\vec{u}, \varphi(\vec{u})) = \alpha \end{cases}$ • $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ φ est appelée **rotation vectorielle d'angle α.**
Réflexion d'axe (D) de base $(\vec{i})$  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ $\overrightarrow{A'B'} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$	Pour tout vecteur $\vec{u}$ décomposable en $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$: • $\vec{u}_1$ colinéaire à $\vec{i}$, • $\vec{u}_2$ orthogonal à $\vec{i}$, on a $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$. φ est appelée **réflexion vectorielle.**

3. Composée. Réciproque

■ **Composition de deux isométries du plan.**

Soit f et g des isométries, φ et ψ leurs isométries vectorielles associées. Pour tout couple (A, B) de points, on a :

$$\left.\begin{array}{ll} A \overset{f}{\longmapsto} A' \overset{g}{\longmapsto} A'' & B \overset{f}{\longmapsto} B' \overset{g}{\longmapsto} B'' \\ A \xmapsto{\quad g\circ f \quad} A'' & B \xmapsto{\quad g\circ f \quad} B'' \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par suite :} \\ \overrightarrow{AB} \overset{\varphi}{\longmapsto} \overrightarrow{A'B'} \overset{\psi}{\longmapsto} \overrightarrow{A''B''}\end{array}$$

Puisque, pour tout couple (A, B), $\psi \circ \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A''B''}$, l'isométrie vectorielle associée à $g \circ f$ est $\psi \circ \varphi$.

□ *Conséquence.* Soit f une isométrie : f s'écrit $t \circ g$ où g est une isométrie fixant un point et t une translation.
L'isométrie vectorielle ψ associée à g est une symétrie vectorielle ou une rotation vectorielle donc c'est une bijection.
De plus t a pour isométrie vectorielle associée l'identité de l'ensemble des vecteurs du plan donc ψ est l'isométrie vectorielle associée à f.
L'isométrie vectorielle associée à f est donc une transformation (bijection).

■ **Réciproque d'une isométrie.**

Soit f une isométrie, φ sa transformation vectorielle associée, φ' la transformation vectorielle associée à f^{-1}.
Pour tout couple (A, B) on a :

$$A \overset{f}{\longmapsto} A' \qquad f^{-1} \text{ est telle que : } \qquad A' \overset{f^{-1}}{\longmapsto} A$$

$$B \overset{f}{\longmapsto} B' \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad B' \overset{f^{-1}}{\longmapsto} B$$

$$\overrightarrow{AB} \overset{\varphi}{\longmapsto} \overrightarrow{A'B'} \qquad \varphi' \text{ est telle que : } \qquad \overrightarrow{A'B'} \overset{\varphi'}{\longmapsto} \overrightarrow{AB}$$

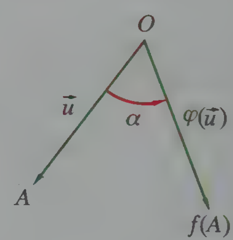
Cela prouve que φ' est la transformation réciproque de φ.

Propriétés 7

- **La transformation vectorielle associée à la composée $g \circ f$ de deux isométries f et g est la composée des transformations vectorielles associées à f et g.**
- **La transformation vectorielle associée à la réciproque d'une isométrie f est la réciproque de la transformation vectorielle associée à f.**

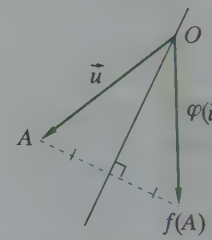
■ **Cas particuliers**

Si on fixe un point O du plan alors à tout vecteur $\vec{u}$ de l'ensemble $(\mathscr{T})$ des vecteurs du plan on peut associer, de façon bijective, le point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.
Nous dirons que, le point O étant choisi, on peut identifier le vecteur $\vec{u}$ et le point A. Alors, si f est une isométrie fixant O et φ son isométrie vectorielle associée :

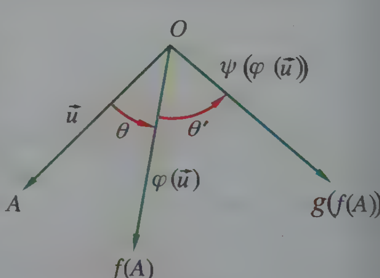


$\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{Of(A)}$ (fig. ci-dessus). Le vecteur $\varphi(\vec{u})$ est défini à l'aide de $f(A)$.

Le point O étant fixé, une même figure permet de représenter $\varphi(\vec{u})$ et $f(A)$. Cette identité de figure incite à identifier une isométrie vectorielle à une isométrie ponctuelle fixant un point donné.



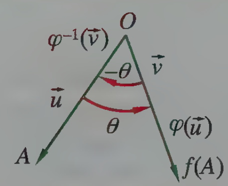
Si φ et ψ sont deux isométries vectorielles, elles sont identifiables aux isométries ponctuelles f et g fixant un point O. Leur composée $\psi \circ \varphi$ est identifiable à l'isométrie $g \circ f$ qui fixe O et transforme A en $g(f(A))$. Dans ce cas de figure, φ et ψ sont les rotations vectorielles d'angles respectifs θ et θ', $\psi \circ \varphi$ est la rotation vectorielle d'angle $\theta + \theta'$.



Ainsi la donnée d'un point O qui conduit à identifier une isométrie fixant O et son isométrie vectorielle associée, permet de déterminer des propriétés des isométries vectorielles.

EXEMPLE

Si φ est la rotation vectorielle d'angle θ alors φ^{-1} est la rotation vectorielle d'angle $-\theta$.
Sur le dessin : $\vec{v} \neq \vec{0}$; $\vec{u} = \varphi^{-1}(\vec{v})$, $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.
f^{-1} est la rotation de centre O et d'angle $-\theta$ donc φ^{-1} est la rotation vectorielle d'angle $-\theta$.



4. Propriétés des isométries vectorielles

■ **Produit scalaire**

Soit f une isométrie du plan, φ son isométrie vectorielle associée. Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $(\mathcal{P})$, d'images $\vec{u}\,'$ et $\vec{v}\,'$ par φ, comparons $\vec{u}\,' \cdot \vec{v}\,'$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Appelons O, A, B des points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, O', A', B' leurs images par f.

Alors : $\vec{u}\,' \cdot \vec{v}\,' = \overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{O'B'}$.

Or : $\overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{O'B'} = \dfrac{1}{2}(O'A'^2 + O'B'^2 - A'B'^2)$.

Donc : $\overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{O'B'} = \dfrac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2)$,

$\overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

Ainsi, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}\,' \cdot \vec{v}\,' = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Propriété 8 **Toute isométrie vectorielle conserve le produit scalaire.**

■ **Linéarité**

Étudions des propriétés des isométries vectorielles en relation avec les opérations définies dans l'ensemble des vecteurs du plan (addition et multiplication par un nombre réel).

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $(\mathcal{P})$ et a un nombre réel. Comparons d'une part $\varphi(\vec{u} + \vec{v})$ et $\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$, d'autre part $\varphi(a\vec{u})$ et $a\varphi(\vec{u})$.

- $$\|\varphi(\vec{u} + \vec{v}) - \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\|^2 = \|\varphi(\vec{u} + \vec{v})\|^2 + \|\varphi(\vec{u})\|^2 + \|\varphi(\vec{v})\|^2 - 2\varphi(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \varphi(\vec{u}) - 2\varphi(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \varphi(\vec{v}) + 2\varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v}).$$

Or, φ conserve la norme et le produit scalaire, donc :

$$\|\varphi(\vec{u} + \vec{v}) - \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} - 2(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

En développant le deuxième membre de cette égalité, ou en remarquant qu'il s'écrit $\|(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} - \vec{v}\|^2$, on obtient :

$$\|\varphi(\vec{u} + \vec{v}) - \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\|^2 = 0$$

donc $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) - \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}) = \vec{0}$, soit $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.

• Un calcul analogue avec $\|\varphi(a\vec{u}) - a\varphi(\vec{u})\|^2$ permettrait de prouver que $\varphi(a\vec{u}) = a\varphi(\vec{u})$.

Propriété 9
Linéarité des isométries vectorielles

Pour toute isométrie vectorielle φ, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et le nombre réel a, on a :
$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$, et $\varphi(a\vec{u}) = a\varphi(\vec{u})$.
φ est dite application linéaire.

☐ *Conséquence : conservation du barycentre.*
Soit f une isométrie et (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n) n points pondérés admettant un barycentre noté G. Notons A'_1, A'_2, ..., A'_n, G' les images par f de A_1, A_2, ..., A_n, G.

Le point G est tel que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ donc $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \varphi(\vec{0})$.

De la linéarité de φ on déduit successivement :

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\alpha_i \overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}, \quad \text{puis} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \varphi(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}, \quad \text{donc} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}.$$

G' est donc le barycentre des points pondérés (A'_1, α_1), ..., (A'_n, α_n).

Propriété 10

L'image du barycentre de n points pondérés (A_1, α_1), ..., (A_n, α_n) par une isométrie f est le barycentre des n points pondérés :
$(f(A_1), \alpha_1)$, ..., $(f(A_n), \alpha_n)$.

■ **Isométries vectorielles et déterminants**
Nous avons signalé, page 175, qu'une isométrie conserve les angles orientés ou transforme tout angle orienté en son opposé. Si l'isométrie f conserve les angles orientés (exemple : translation, rotation), alors son isométrie vectorielle associée φ est telle que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls :
$(\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})) = (\vec{u}, \vec{v})$.
Les sinus des angles orientés sont alors égaux, par suite :
dét $(\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}))$ = dét $(\vec{u}, \vec{v})$.

Si f transforme tout angle orienté en son opposé (exemple : réflexion), alors φ est telle que :
$(\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})) = -(\vec{u}, \vec{v})$,
sin $(\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})) = -$ sin $(\vec{u}, \vec{v})$, dét $(\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})) = -$ dét $(\vec{u}, \vec{v})$.

Propriété 11

Pour toute isométrie vectorielle φ, le déterminant, dét $(\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}))$, des images par φ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls est égal soit à dét $(\vec{u}, \vec{v})$ soit à $-$ dét $(\vec{u}, \vec{v})$.

4. DÉPLACEMENTS

1. Définition. Composition

Nous avons (p. 175) classé les isométries en deux familles de transformations.

Définition 3

On appelle déplacement du plan toute isométrie qui conserve les angles orientés.

EXEMPLE

Les translations, les rotations sont des déplacements. Les réflexions ne sont pas des déplacements.

Il est évident que :

Propriétés 12

L'application composée de deux déplacements est un déplacement.
L'application réciproque d'un déplacement est un déplacement.

2. Réduction d'un déplacement

Les translations et les rotations, dont l'identité du plan, sont des déplacements. Existe-t-il d'autres déplacements ?

Soit f un déplacement autre que l'identité du plan ; f admet donc au moins un point non invariant ; soit A un tel point et A' son image par f.

Appelons s la réflexion transformant A' en A. Alors :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "s\circ f"'] & A' \arrow[r, mapsto, "s"] & A \end{tikzcd}$$

$s \circ f$ est une isométrie qui laisse A fixe. C'est donc une réflexion ou une rotation. Or $s \circ f$ n'est pas un déplacement (non-conservation des angles orientés) donc $s \circ f$ est une réflexion. Notons-la s'.

Alors : $s \circ f = s'$ donc $f = s \circ s'$.

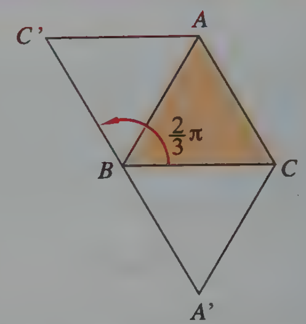
Le déplacement f est donc soit une translation, soit une rotation.

Propriété 13

Tout déplacement est soit une translation soit une rotation.

EXEMPLE

Le triangle ABC est équilatéral direct. Étudions la composée de la rotation r de centre C et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ suivie de la rotation r' de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



- $r' \circ r$ est un déplacement.

- $C \overset{r}{\longmapsto} C \overset{r'}{\longmapsto} C'$ et $C' \neq C$ puisque $C \neq B$. Le point C n'est pas invariant par $r' \circ r$, $r' \circ r$ n'est donc pas l'identité du plan.

- $A \overset{r}{\longmapsto} A' \overset{r'}{\longmapsto} A$, A' étant le symétrique de A par rapport à (BC) (en effet A' est tel que $CA = CA'$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ donc $BA' = BA$ et $\left(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA}\right) = -\left(\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{CA}\right) = \frac{2\pi}{3}\Big)$.
A est donc invariant par $r' \circ r$. $r' \circ r$ est donc une rotation de centre A.

- $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C}) = \frac{2\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{AC'}) = \frac{2\pi}{3}$ donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) = \frac{4\pi}{3}$.
$r' \circ r$ est donc la rotation de centre A et d'angle $\frac{4\pi}{3}$ $\left(\text{ou encore } -\frac{2\pi}{3}\right)$.

3. Détermination d'un déplacement

Un déplacement transforme un segment $[AB]$ en un segment $[A'B']$ de même longueur. Deux segments $[AB]$ et $[A'B']$ de même longueur, non nulle, étant donnés, peut-on trouver un déplacement transformant A en A' et B en B' ?

Existence

Soit r la rotation de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, noté θ. Notons que θ peut être nul.

$$A \overset{r}{\longmapsto} A \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} AB_1 = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB_1}) = \theta. \end{cases}$$
$$B \longmapsto B_1$$

Or $AB = A'B'$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$ donc :
$AB_1 = A'B'$ et $(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{A'B'}) = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB_1}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont donc égaux.
De $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{A'B'}$ on déduit $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{B_1B'}$.
Si on note t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ alors on a :

$$A \overset{r}{\longmapsto} A \overset{t}{\longmapsto} A' \qquad B \overset{r}{\longmapsto} B_1 \overset{t}{\longmapsto} B'$$
$$A \overset{t\circ r}{\longmapsto} A' \qquad B \overset{t\circ r}{\longmapsto} B'$$

Le déplacement $t \circ r$ est un déplacement solution. Pour la suite de l'étude, nou le noterons u.

COURS

■ **Unicité**

Soit d un déplacement transformant A en A' et B en B'.

$$A \xmapsto{d} A' \xmapsto{u^{-1}} A \qquad B \xmapsto{d} B' \xmapsto{u^{-1}} B$$

$$A \xmapsto{u^{-1}\circ d} A \qquad B \xmapsto{u^{-1}\circ d} B$$

$u^{-1}\circ d$ est un déplacement (propriété 12) qui laisse deux points distincts A et B fixes.

D'après la propriété 5, $u^{-1}\circ d$ est donc l'identité du plan.

$$u^{-1}\circ d = \mathrm{Id}_{(P)}$$
$$u\circ u^{-1}\circ d = u\circ \mathrm{Id}_{(P)}$$
$$d = u$$

u est donc l'unique déplacement transformant A en A' et B en B'.

Propriété 14

> **Étant donnés des points A, B, A', B' tels que $A'B' = AB$ et $AB \neq 0$, il existe un déplacement et un seul transformant A en A' et B en B'.**

□ *Remarque.* Si $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ alors ce déplacement est une translation, sinon c'est une rotation.

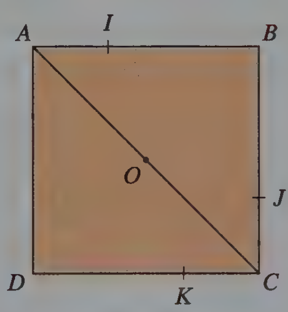
EXEMPLE

$ABCD$ est un carré, $AI = JC = CK$.

$$\begin{cases} AI = KC \\ (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{KC}) = 0 \end{cases} \qquad A \xmapsto{t_{\overrightarrow{AK}}} K \qquad I \xmapsto{t_{\overrightarrow{AK}}} C$$

$$\begin{cases} AI = KC \\ (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CK}) = \pi \end{cases} \qquad A \xmapsto{s_O} C \qquad I \xmapsto{t_O} K$$

$$\begin{cases} AI = JC \\ (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{JC}) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \qquad A \xmapsto{r_{[X,\, -\pi/2]}} J \qquad I \xmapsto{r_{[X,\, -\pi/2]}} C$$



Le centre X de cette rotation, tel que $XA = XJ$ et $XI = XC$ est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AJ]$ et $[IC]$, droites sécantes car (AJ) et (IC) ne sont pas parallèles.

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Étude d'un lieu géométrique

Les transformations du plan, en particulier les isométries, constituent un outil efficace dans la recherche de lieux géométriques de points d'une figure dont certains éléments sont variables. (Voir exercice commenté 1.)

Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles fixes, sécants en A et B, de centres respectifs O et O'. Une droite (D) passant par A rencontre $(\mathcal{C})$ en A et M et $(\mathcal{C}')$ en A et M'. La perpendiculaire (Δ) en M' à (D) coupe la parallèle en M à (OO'), notée (Δ'), en P. Déterminons le lieu géométrique de P quand (D) pivote autour de A.

1 ■ *Questions préliminaires*

a) Justifiez que O et O' définissent une droite.

b) Toute droite (D) passant par A permet-elle :
— de tracer une droite (Δ) ?
— de définir un point P ?

c) Choisissez des droites (D) (au minimum trois) et construisez les points P correspondants. Que pouvez-vous conjecturer pour le lieu géométrique de P ?

2 ■ *Analyse*

1° *a*) Démontrez que (Δ) passe par un point fixe A'.

b) Démontrez que (BA') et (OO') sont parallèles.

2° La droite (BA') coupe $(\mathcal{C})$ en B et A''.

a) Exprimez $\overrightarrow{A''A'}$ à l'aide de $\overrightarrow{OO'}$.

b) Quelle est la nature du quadrilatère $MPA'A''$?

c) Déterminez une transformation f indépendante de M, transformant M en P et donnez une figure $\mathcal{F}$ contenant le lieu géométrique de P.

3 ■ *Synthèse*

1° Tout point P de $\mathcal{F}$ permet-il de construire un point M de $(\mathcal{C})$ et deux droites (Δ) et (Δ') **sécantes** en P ?

2° Quel est le lieu géométrique de P quand (D) pivote autour de A ?

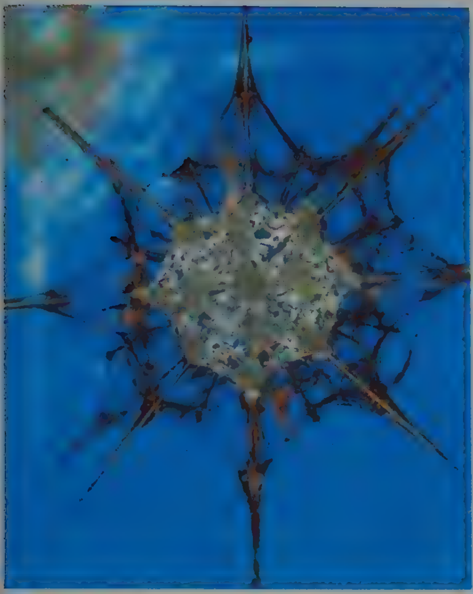
4 ■ *Bilan*

L'analyse a permis de déterminer des conditions nécessaires pour que le point P soit un point solution (P solution $\Rightarrow P \in \mathcal{F}$). Nous avons, pour cela, démontré que si P est un point solution alors P est l'image d'un point M de $(\mathcal{C})$ par une transformation f du plan. Le point P appartient donc à l'image de $(\mathcal{C})$ par f.

La synthèse permet de voir si ces conditions sont suffisantes c'est-à-dire, non pas de voir si tout point de $f(\mathcal{C})$ est l'image par f d'un point de $(\mathcal{C})$, ce qui est évident, mais de voir si tout point de $f(\mathcal{C})$ est l'image par f d'un point M de $(\mathcal{C})$ permettant de construire un point P.

Il s'agit donc de chercher l'ensemble des points M de $(\mathcal{C})$ permettant de construire un point P. Le lieu de P est alors l'image par f de cet ensemble.

TP2 Isométries laissant une figure invariante



La construction de figures présentant des éléments de symétrie peut être un objectif artistique : vitraux, frises... La nature offre aussi des situations illustrant la notion de motif invariant par une isométrie plane. Le radiolaire reproduit ci-contre est quasi invariant par une symétrie centrale, des réflexions et des rotations d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Étudions, dans le plan, le cas de deux figures simples : le triangle équilatéral et le carré.

1 ■ *Triangle équilatéral*

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O. Déterminons l'ensemble, noté $\mathcal{E}$, des isométries laissant ABC invariant.

1° L'identité est un élément de $\mathcal{E}$. Déterminez au moins deux autres isométries de $\mathcal{E}$.

2° Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$ autre que l'identité.

a) Justifiez que O est invariant par f.

b) Démontrez que si A est invariant par f alors f est la réflexion d'axe (OA).

c) Démontrez que si A a pour image B par f alors f est la réflexion d'axe (OC) ou une rotation dont vous préciserez le centre et l'angle.

3° Énoncez toutes les isométries qui laissent le triangle ABC invariant.

2 ■ *Carré*

Soit $ABCD$ un carré de centre O, $\mathcal{F}$ l'ensemble des isométries laissant $ABCD$ invariant. Toute isométrie de $\mathcal{F}$ est une bijection de $\{A, B, C, D\}$ dans lui-même.

1° *a*) Quel est le nombre maximal d'éléments de $\mathcal{F}$?

b) Une bijection g de $\{A, B, C, D\}$ dans lui-même transforme A en B, B en D et C en A. Quelle est l'image de D ? La bijection g est-elle élément de $\mathcal{F}$? Ainsi le nombre d'isométries laissant $ABCD$ invariant est inférieur à 24.

2° Énoncez une rotation et une réflexion laissant $ABCD$ invariant.

3° Soit f une isométrie de $\mathcal{F}$ autre que l'identité.

a) Justifiez que O est invariant par f.

b) Supposons A invariant par f. Quelle est la nature de f ? Précisez les images des points B, C, D.

c) Supposons que A ait pour image B par f.

• f peut-elle être une réflexion ? Si oui précisez son axe et indiquez les images de B, C, D par f.

• f peut-elle être une rotation ? Si oui précisez son centre et son angle et indiquez les images de B, C, D par f.

d) Quelles sont les isométries f pour lesquelles $f(A) = D$?

e) Quelles sont les isométries f pour lesquelles $f(A) = C$?

Bilan : dressez la liste des isométries laissant le carré $ABCD$ invariant.

TP3 Isométries associant deux figures

Les isométries transforment une figure en une figure de même nature (segment en segment, triangle en triangle, cercle en cercle). Étudions, les figures étant données, les isométries transformant l'une en l'autre.

1 ■ *Isométries associant deux cercles*

Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles de centres O et O', de rayons R et R', f une isométrie transformant $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$.

1° Donnez une condition nécessaire pour que f transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$.

2° On suppose que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ ont le même rayon.

a) Quelle est l'image de O par f ?

b) On suppose que f est une isométrie transformant O en O'. Quelle est l'image de $(\mathcal{C})$ par f ?

c) Quelles sont les isométries transformant $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$?

2 ■ *Isométries associant deux triangles*

Soit ABC un triangle tel que la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit positive, O, I et J les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$. Soit D et E les points tels que les triangles ABD et ACE soient rectangles en D et E et isocèles, $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{2}$.

1° *a*) En notant ρ la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$, démontrez que :

$\overrightarrow{OJ} = \rho(\overrightarrow{DI})$ et $\overrightarrow{JE} = \rho(\overrightarrow{IO})$.

b) Quelle est l'image de $\overrightarrow{DO}$ par ρ ?

c) Quelle est la nature du triangle ODE ?

2° Soit Ω le centre de la rotation r d'angle $\frac{\pi}{2}$ transformant I en J.

a) Construisez Ω.

b) Quelle est la rotation vectorielle associée à r ?

c) Déterminez $r(D)$ et $r(O)$.
Ainsi, la rotation r transforme le triangle DIO en le triangle OJE.

TP4 Composition d'isométries

Les composées d'isométries peuvent être étudiées de plusieurs manières (voir fiche méthode). Étudions ici le problème à l'aide de réflexions.

1 ■ *Exercice 1*

Soit ABC un triangle équilatéral direct, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$, O le centre du triangle.
Pour déterminer la composée $r' \circ r$ de la rotation r de centre C et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de la rotation r' de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, répondez aux questions.

1° Caractérisez l'application $s_{(BC)} \circ s_{(AC)}$, composée des réflexions d'axes (AC) et (BC).

2° *a*) Calculez $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

b) Déterminez la droite (D) telle que $r' = s_{(D)} \circ s_{(BC)}$.

3° Déterminez $r' \circ r$ (nature et éléments caractéristiques).

4° Étudiez l'application $r \circ r'$ et comparez les résultats obtenus à ceux de 3°.

2 ■ *Exercice 2*

A. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{3\pi}{4}$. Nous vous proposons de déterminer la composée f des réflexions $s_{(AB)}$, $s_{(BC)}$, $s_{(CD)}$ et $s_{(DA)}$ d'axes (AB), (BC), (CD) et (DA) effectuées dans cet ordre.

1° Posons : $g_1 = s_{(BC)} \circ s_{(AB)}$ et $g_2 = s_{(DA)} \circ s_{(CD)}$.
Alors $f = g_2 \circ g_1$. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de g_1 et g_2.

2° *a*) Construisez deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ telles que :
$g_1 = s_{(BD)} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ et $g_2 = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{(BD)}$.
b) Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de f.

B. Le parallélogramme $ABCD$ est tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \theta$, $\theta \in]-\pi\,;\pi]$. En reprenant une étude analogue à celle de la partie **A**, est-il possible de déterminer une valeur de θ pour laquelle f soit une translation ? Quel est alors le vecteur de la translation ?

TP5 Caractérisation d'isométries

Soit A, B, A', B' des points tels que $AB = A'B'$, $(AB \neq 0)$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$ $(\theta \in]-\pi\,;\pi[)$ et f le déplacement transformant A en A' et B en B'.

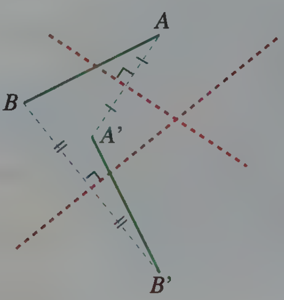
1° Démontrez que si $\theta = 0$, alors f est une translation que vous préciserez.

2° Que pouvez-vous dire de f si $\theta \neq 0$?

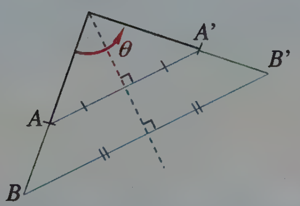
a) Démontrez que le centre X de f vérifie les relations :

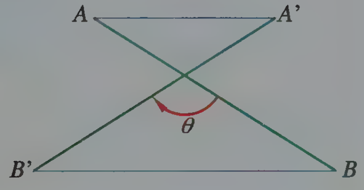
$XA = XA'$,
$XB = XB'$.

b) Déduisez-en une construction de X si (AA') et (BB') ne sont pas parallèles.



c) Démontrez que si (AA') et (BB') sont parallèles, alors $AA'B'B$ est un trapèze isocèle (éventuellement croisé).
Déterminez alors la position du point X.





FICHE MÉTHODE

Les isométries

1 Comment déterminer la composée de deux isométries

■ **Sa nature :**
• utiliser les résultats relatifs à la composition d'isométries (propriétés 3, 12, 13) ; • utiliser les isométries vectorielles associées.
■ **Ses éléments caractéristiques :**
• utiliser des points particuliers et leurs images.
■ **Sa nature et ses éléments caractéristiques simultanément :**
• décomposer les isométries que l'on compose en réflexions dont les axes sont judicieusement choisis (voir TP4).

2 Comment utiliser les isométries

■ **Pour exploiter des configurations :**
Exemples : • ABC est équilatéral équivaut à $B \xmapsto{r_{[A,\, \varepsilon(\pi/3)]}} C$, avec $\varepsilon = \pm 1$. • ABC est rectangle en A et isocèle équivaut à $B \xmapsto{r_{[A,\, \varepsilon(\pi/2)]}} C$, $\varepsilon = \pm 1$. • $IA = IB$ équivaut à B est l'image de A par une rotation de centre I.
■ Pour étudier des configurations : comparer des distances, des angles, démontrer des alignements.
■ Pour étudier un problème de construction.
■ Pour déterminer un lieu géométrique :
• si deux points M et N sont tels que $N = f(M)$, f étant une isométrie, et si le lieu de M est une courbe $(\mathcal{C})$ alors le lieu de N est l'image de $(\mathcal{C})$ par f.

EXERCICES COMMENTÉS

Exercice 1

Énoncé

Soit (C) un cercle de centre O, A et B deux points du plan, non situés sur (C). Construisez deux points C et D de (C) tels que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3} + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{DB}$ soient colinéaires et de même sens.

Précisez le nombre de solutions lorsque A est extérieur à (C) et B intérieur à (C).

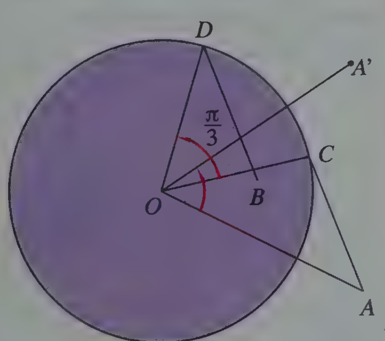
Indication méthodologique

La figure contient les points O, C, D tels que $OC = OD$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3}$. Cette situation incite à utiliser la rotation r de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, rotation qui transforme C en D. Les images par r des éléments donnés sont des éléments connus. Peuvent-ils servir à construire C et D, à situer l'un des points sur une autre courbe que (C)?

Solution

Analyse

Travaillons à l'aide d'une figure supposée réalisée. La rotation r de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ transforme C en D et A en un point A'. On en déduit que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DA'}) = \frac{\pi}{3}$.



Or, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires et de même sens, donc $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CA}) = 0$. Par suite, $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA'}) = \frac{\pi}{3}$.

Les points B et A' sont connus, D appartient donc à l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA'}) = \frac{\pi}{3} + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le point D est donc commun à (C) et à (Γ) et $C = r^{-1}(D)$.

Synthèse

La figure est construite à l'aide des propriétés obtenues dans l'analyse. Sont-elles suffisantes pour construire les points C et D solutions?

(C), A et B étant donnés, on construit A', image de A par r, puis, si A' est distinct de B, l'arc de cercle (Γ). Soit D un point (éventuel) commun à (C) et (Γ), C l'image de D par r^{-1}.

Les points C et D sont-ils solutions, c'est-à-dire sont-ils tels que $C \in (C)$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires et de même sens?

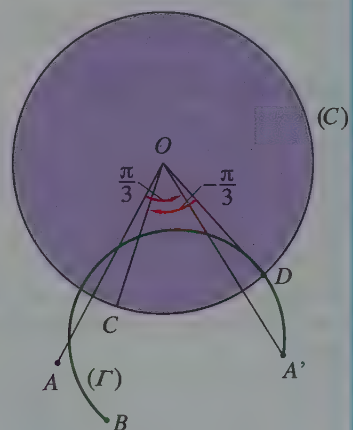
Le cercle (C) est invariant par r donc aussi par r^{-1}. Puisque D est un point de (C), C est aussi un point de (C) et l'on a : $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) = -\frac{\pi}{3}$, donc $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3}$.

De plus $A' = r(A)$ et, puisque $C = r^{-1}(D)$, $D = r(C)$. Ainsi $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DA'}) = \frac{\pi}{3}$.

Or, puisque D est un point de (Γ), $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA'}) = \frac{\pi}{3}$ ou encore $(\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{DB}) = -\frac{\pi}{3}$.

On en déduit que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB}) = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont donc colinéaires et de même sens.

Les points C et D construits sont donc des points solutions.



Discussion

Cette discussion porte sur deux points :

– a-t-on $A' = B$?

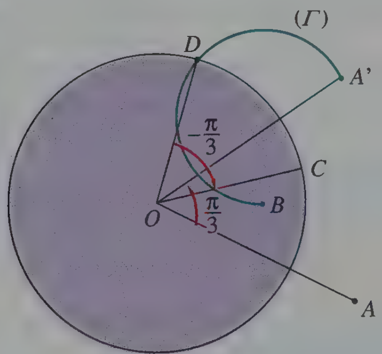
– (C) et (Γ) sont-ils sécants?

Si A et B sont tels que $r(A) = B$ *alors* $A' = B$ et il n'existe pas de point M tel que $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA'}) = \frac{\pi}{3} + k\,2\pi$.

Pour tous points C et D de (C) tels que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3}$ on a $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{3}$.

EXERCICES COMMENTÉS

Le problème de l'intersection de (C) et (Γ) est posé dans le cas où A est extérieur à (C), B intérieur à (C). Dans ce cas, A' est aussi extérieur à (C) (puisque $OA = OA'$). L'arc de cercle (Γ), d'extrémités A' et B, coupe donc le cercle (C) en un seul point. Le problème admet un seul couple (C, D) solution.



Exercice 2

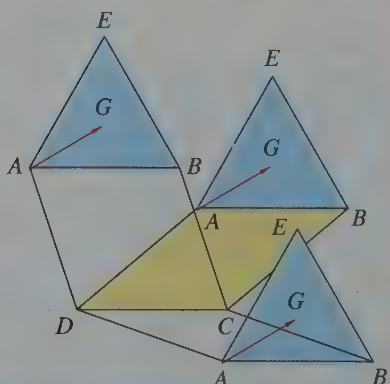
Énoncé

Les sommets C et D d'un losange $ABCD$ sont fixes. On construit sur le côté $[AB]$ un triangle équilatéral ABE, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}$. Quel est le lieu du centre de gravité du triangle ABE quand les sommets A et B varient dans le plan ($ABCD$ pouvant éventuellement être plat) ?

Indications méthodologiques

Peut-on trouver une transformation f, ne dépendant que des éléments fixes de la figure, telle que G, centre de gravité du triangle ABE, soit l'image d'un point variable de la figure par f ? Si oui, le lieu de G est l'image par f du lieu de ce point variable.

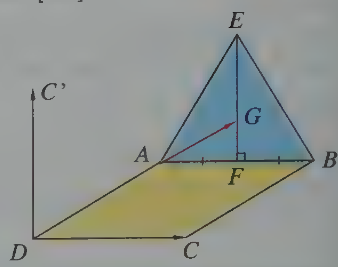
Pour ce faire, recherchons quelques éléments invariants de la figure, éléments que nous détecterons en dessinant, sur une même figure, le triangle ABE pour plusieurs positions de A.



L'observation de la figure montre que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est constant.

Solution

Soit F le milieu du segment $[AB]$.



On a : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}$,

donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{FE}$.

Appelons C' l'image de C par la rotation de centre D et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

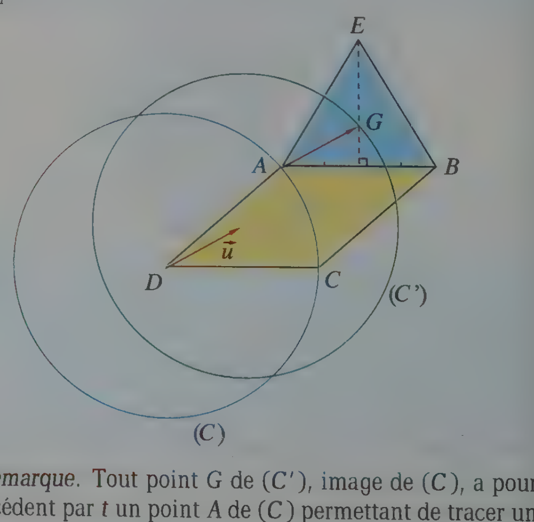
Les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{DC'}$ sont colinéaires et de même sens.

De plus, $FE = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$ et $AB = DC = DC'$ donc $FE = \frac{\sqrt{3}}{2} DC'$.

Donc $\overrightarrow{FE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\overrightarrow{DC'}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DC} + \frac{\sqrt{3}}{6}\,\overrightarrow{DC'}$.

Le vecteur $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{DC} + \frac{\sqrt{3}}{6}\,\overrightarrow{DC'}$, noté $\vec{u}$, est indépendant de E. Le point G est donc l'image de A par la translation t de vecteur $\vec{u}$.

Par ailleurs $DA = DC$ donc DA est constant quand E varie. L'ensemble des points A est donc le cercle de centre D et de rayon DC. Le lieu géométrique de G est donc l'image, par la translation t, du cercle (C) de centre D et de rayon DC.



□ *Remarque.* Tout point G de (C'), image de (C), a pour antécédent par t un point A de (C) permettant de tracer un triangle équilatéral ABE dont le centre de gravité est $t(A)$, donc G. Toute étude de synthèse est donc inutile.

Énoncé

Bac CE, Espagne, 1990. Extrait.

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi/2$ modulo 2π.
Soit I, J, K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
On appelle R la rotation de centre I et d'angle de mesure $\pi/2$ et T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Soit $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

I — 1° Déterminez l'image de K par f et l'image de J par g.

2° Précisez la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.

II — 1° Déterminez la nature de la transformation $g \circ f^{-1}$ (f^{-1} étant l'application réciproque de f).

2° Cherchez l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractérisez alors cette application.

3° Soit M un point quelconque du plan, M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g. Quelle est la nature du quadrilatère ACM_2M_1 ?

Analyse du problème

MOTS CLÉS
« nature » et « éléments caractéristiques »

Pour chacune des composées d'applications à déterminer, le texte **propose** une méthode particulière : **nature** à l'aide des résultats généraux (composées de déplacements, utilisation des applications vectorielles), **éléments caractéristiques** à l'aide de points particuliers. Par exemple, dans le cas d'une translation, on cherche l'image d'un point particulier.

Une solution

I — 1° K et J sont respectivement les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$ donc $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On en déduit que $T(K) = J$. De plus :

d'une part : $IJ = \frac{1}{2}AB$ et $IK = \frac{1}{2}AC$ donc $IJ = IK$,

d'autre part $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$ donc

$(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, soit $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = \pi/2 \quad (2\pi)$.

Ainsi $R(J) = K$. Finalement $f(K) = K$.

Des deux résultats précédents, $R(J) = K$ et $T(K) = J$, on déduit que $g(J) = J$.

2° f et g sont des composées de deux déplacements, ce sont donc des déplacements.
L'isométrie vectorielle associée à f est la composée de l'identité de l'ensemble $(\mathscr{P})$ des vecteurs du plan et de la rotation vectorielle r d'angle de mesure $\pi/2$. C'est donc r. De même pour g. Les deux déplacements f et g sont donc des rotations d'angle de mesure $\pi/2$.

Le point K est fixe par f ; f est donc la rotation de centre K et d'angle $\pi/2$. Le point J est fixe par g ; g est donc la rotation de centre J et d'angle $\pi/2$.

II — 1° L'application f^{-1} est la rotation de centre K et d'angle $-\pi/2$ donc $g \circ f^{-1}$, composée de deux déplacements, est un déplacement.

L'isométrie vectorielle associée à f^{-1} est la rotation vectorielle d'angle $-\pi/2$; l'isométrie vectorielle associée à $g \circ f^{-1}$ est donc la rotation vectorielle d'angle $\pi/2 - \pi/2$ c'est-à-dire 0, c'est donc l'identité de $(\mathscr{P})$. Déplacement associé à l'identité de $(\mathscr{P})$, $g \circ f^{-1}$ est une translation.

2° Cherchons d'abord l'image de A par f^{-1}.

$KI = \frac{1}{2}AC$; $AB = AC$, $KA = \frac{1}{2}BA$, d'où $KA = KI$. (1)

$\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{KA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$,

d'où $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KI}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$ (2π).

Soit $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KI}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \pi \quad (2\pi)$, donc

$(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KI}) = -\pi/2 \quad (2\pi)$. (2)

De (1) et (2), on déduit que $f^{-1}(A) = I$.

Une étude analogue permettrait de démontrer que $g(I) = C$. Par suite $g \circ f^{-1}(A) = C$.

Translation qui transforme A en C, $g \circ f^{-1}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

3° Le schéma

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[dl, shift left, "f^{-1}"'] \\ M \arrow[ur, shift left, "f"'] \arrow[dr, "g"'] & \\ & M_2 \end{tikzcd}$$

permet de visualiser la relation entre M_1 et M_2 : $M_2 = g \circ f^{-1}(M_1)$.

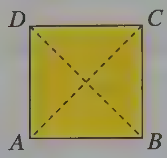
Ainsi $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$. Le quadrilatère ACM_2M_1 est un parallélogramme.

Exercices et problèmes

Q.C.M.

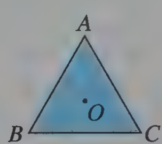
Dans chacun des cas, une ou plusieurs réponses sont exactes.

1 $ABCD$ est un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. $r_{[C, \pi/2]} \circ r'_{[A, \pi/2]}$ est la symétrie de centre :



B .... ☐
D .... ☐
O .... ☐

2 ABC est un triangle équilatéral direct de centre O $\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\right)$.
$r_{[C, \pi/3]} \circ s_{(CO)}$ est :



la réflexion d'axe (CA) .... ☐
la réflexion d'axe (CO) .... ☐
la réflexion d'axe (CB) .... ☐
la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ .... ☐

3 L'application $t_{\vec{u}} \circ r_{[O, \theta]}$, $\vec{u}$ non nul, $\theta \in]0 ; 2\pi[$ est une rotation d'angle θ dont le centre est :

O .... ☐
$t_{\vec{u}}(O)$ .... ☐
autre que O et $t_{\vec{u}}(O)$ .... ☐

4 O et O' sont deux points distincts, $\theta \in]0, \pi[$. L'application $r_{[O', -\theta]} \circ r'_{[O, \theta]}$ est :

une rotation autre que l'identité du plan .... ☐
la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ .... ☐
une translation .... ☐
une isométrie dont l'isométrie vectorielle associée est l'identité de $(\mathscr{T})$, ensemble des vecteurs du plan .... ☐

5 I est le milieu du segment $[OO']$ de longueur non nulle. L'application $r'_{[O', -\pi/2]} \circ t_{\overrightarrow{OO'}} \circ r_{[O, \pi/2]}$ est :

l'identité .... ☐
une rotation de centre I .... ☐
la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ .... ☐
la symétrie de centre I .... ☐

6 Une isométrie associée à une rotation vectorielle d'angle π est :

une translation .... ☐
une symétrie centrale .... ☐
une réflexion .... ☐
une rotation .... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Isométries conservant une figure

7 ■ a) Quelles sont les isométries conservant un segment $[AB]$ de longueur non nulle ?

b) Quelles sont les isométries conservant un triangle ABC isocèle (non équilatéral) ?

c) Quelles sont les isométries conservant un cercle ?

d) Quelles sont les isométries conservant un rectangle (non carré) ?

e) Quelles sont les isométries conservant un losange (non carré) ?

f) Quelles sont les isométries conservant un pentagone régulier ? Un hexagone régulier ?

Isométries associant deux figures

8 ■■ Soit ABC et ABD deux triangles équilatéraux de centres respectifs O et O' et f une isométrie transformant ABC en ABD.

1° Quelle est l'image de O par f ?

2° Quelles sont les isométries transformant ABC en ABD ?

9 ■■ Soit ABC un triangle équilatéral de centre O $\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\right)$, A', B' et C' les symétriques de A, B et C par rapport à O.

1° Quel est le centre du triangle $A'B'C'$?

2° Soit f une isométrie transformant ABC en $A'B'C'$ (exemple : s_O).

a) Quelle est l'image de O par f ?

b) Quelles sont les rotations transformant ABC en $A'B'C'$?

c) Quelles sont les réflexions transformant ABC en $A'B'C'$?

10 Dans le plan, on considère un carré $ABCD$ de centre O et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. Soit $A'B'C'D'$ le carré transformé de $ABCD$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$; quel est son centre?
Soit f une isométrie transformant $\{A, B, C, D\}$ en $\{A', B', C', D'\}$; montrez que $f(O) = O$. Déduisez-en les déplacements et les réflexions transformant $\{A, B, C, D\}$ en $\{A', B', C', D'\}$.

(D'après bac)

Isométries et configurations

11 Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$, I et J les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. On appelle K le point tel que KBI soit un triangle rectangle isocèle, $(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KI}) = \frac{\pi}{2}$.

1° Démontrez que la médiatrice de $[IJ]$ passe par O.

2° Démontrez que le triangle AKJ est rectangle isocèle.

12 Un triangle ABC est rectangle en A et isocèle. Soit O le milieu de $[BC]$, M un point variable de $[BC]$, P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) et (AC). Démontrez que le triangle OPQ est rectangle isocèle.

13 Soit A, I, J trois points du plan et r la rotation de centre I et d'angle α, α non nul et élément de $]-\pi ; \pi[$. r transforme A en B et J en C. La rotation r' de centre A et d'angle α transforme J en D. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.

14 On donne dans le plan orienté un triangle isocèle $OO'A$ avec $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = \frac{\pi}{2}$.
Les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ passant par A et de centres respectifs O et O' se recoupent en B.
A tout point M de $(\mathcal{C})$, on associe le point M' de $(\mathcal{C}')$ tel qu'une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'})$ soit $-\frac{\pi}{2}$.

1° Montrez qu'il existe une rotation r, que l'on caractérisera, transformant O en O' et M en M'.

2° M étant distinct de B, les droites (BM) et (BM') recoupent respectivement $(\mathcal{C}')$ en N' et $(\mathcal{C})$ en N. Montrez que N' est l'image de N par la rotation r.

(D'après bac)

15 Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points A, B, C, D de coordonnées respectives $(1 ; 1)$, $(-3 ; 3)$, $(2 ; 2)$, $(-4 ; 4)$. On appelle E et F les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

1° Démontrez qu'il existe une rotation unique r qui transforme A en B et C en D. Déterminez son angle et son centre I.

2° Démontrez qu'il existe une rotation unique r' qui transforme A en D et C en B. Déterminez son angle et son centre J.

3° Que peut-on dire du quadrilatère $IEJF$?

(D'après bac)

16 Dans un plan (P), on considère un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle (Γ). Soit M un point distinct de A et de C, situé sur celui des arcs $\overset{\frown}{AC}$ dont B n'est pas élément. I est le point du segment $[MB]$ tel que $MI = MA$.

1° Montrez que le triangle IMA est équilatéral.

2° On oriente (P) de façon que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Déterminez les images par r des points B et I. Déduisez-en que $MA + MC = MB$.

(D'après bac)

17 Soit OAB un triangle isocèle $(OA = OB)$, et un point P variable du segment $[AB]$, distinct de A et de B. La parallèle à (OB) passant par P coupe (OA) en A'. La parallèle à (OA) passant par P coupe (OB) en B'.

1° Justifiez qu'il existe une rotation r transformant O en B et A en O.

2° Quelle est l'image de A' par r?

3° Démontrez que les points O, A', B' et le centre Ω de r sont cocycliques.

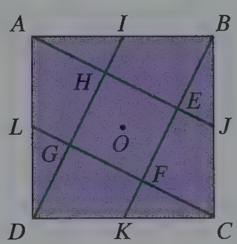
18 1° Soit O un point du plan orienté, r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminez les applications r^2, r^3, r^4 (nature et éléments caractéristiques).

b) A étant un point du plan, autre que O, on appelle A_1, A_2, A_3 les images respectives de A par r, r^2, r^3. Quelle est la nature du quadrilatère $AA_1A_2A_3$?

2° On donne un carré $ABCD$, de centre O, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$.

On appelle I, J, K, L les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, E, F, G, H les points d'intersection des droites (AJ), (BK), (CL), (DI).



1° Quelle est l'image de la droite (AJ) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$?

2° Quelle est la nature du quadrilatère $EFGH$?

Composition de transformations

19 Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 2a$, $AD = a$, a nombre réel strictement positif, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On appelle O le centre du rectangle, r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

1° Dessinez le rectangle $ABCD$ et son image $A'B'C'D'$ par l'application $t \circ r$.

2° a) Caractérisez l'application $t \circ r$.

b) On note Ω le point fixe de $t \circ r$. Donnez une construction de Ω.

Intérêt : ce point Ω est utilisé en ébénisterie pour construire une table rectangulaire dont on veut doubler la surface par déploiement de deux panneaux après rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Ω, le centre de la table restant inchangé.

20 Soit dans le plan orienté quatre points A, B, C, D tels que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$, et :
r_1 la rotation de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$,
r_2 la rotation de centre B et d'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$,
r_3 la rotation de centre C et d'angle $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$,
r_4 la rotation de centre D et d'angle $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.
On pose $f = r_4 \circ r_3 \circ r_2 \circ r_1$.

1° a) Construisez l'image de A par $r_2 \circ r_1$.

b) Caractérisez $r_2 \circ r_1$.

2° Caractérisez $r_4 \circ r_3$, puis f.

3° Pour quel quadrilatère $ABCD$ l'application f est-elle l'application identique du plan?

(D'après bac)

21 Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC. Les points A', B', C' sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1° Montrez qu'il existe un point P et un seul vérifiant les conditions suivantes : $PA = PC$ et $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) = -\frac{\pi}{2}$.

Soit Q le point tel que :

$$QA = QB \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB}) = \frac{\pi}{2}.$$

2° a) On désigne par r_P la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$, par r_Q la rotation de centre Q et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par $s_{A'}$ la symétrie de centre A'. On pose $f = r_Q \circ s_{A'} \circ r_P$.
Étudiez l'image de A par f. Que peut-on dire de f?

b) Quelle est la nature du triangle $A'PQ$?

(D'après bac)

22 Soit ABC un triangle rectangle et isocèle, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. Notons I le milieu de $[BC]$, r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, $f = r_C \circ t \circ r_B$.

1° Déterminez la nature de f.

2° Quelle est l'image de B par f?

3° Caractérisez f.

23 On considère dans le plan orienté (P), deux points distincts A et B. Pour tout point M de (P), on appelle M' l'image de M dans la rotation r_A de centre A, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et M'' l'image de M dans la rotation r_B de centre B, d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1° De l'étude de $r_B \circ (r_A)^{-1}$, déduisez que, pour tout point M de (P), le milieu de $[M'M'']$ est un point fixe J dont on démontrera qu'il appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

2° Le but de cette question est de déterminer l'ensemble des points M pour lesquels M, M', M'' sont alignés.

a) Pour tout point M de (P) distinct de A et B, démontrez que

$$(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Déduisez-en l'ensemble des points M du plan tels que M, M', M'' soient alignés.

Indication. On pourra calculer $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MM''}) + (\overrightarrow{M''M}, \overrightarrow{M''B})$ dans le triangle BMM''.

(D'après bac)

Isométries et constructions

24 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle et $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan. Construisez deux points A et B de $(\mathcal{C})$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

25 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle, I un point intérieur à $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites sécantes en I. Construisez deux points A et A', A sur $(\mathcal{D})$ et A' sur $(\mathcal{C})$, tels que $(\mathcal{D}')$ soit la médiatrice du segment $[AA']$.

26 Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites non perpendiculaires et I un point non situé sur $(\mathcal{D})$ ou $(\mathcal{D}')$. Construisez un triangle AIB rectangle en I et isocèle, tel que A soit sur $(\mathcal{D})$ et B sur $(\mathcal{D}')$.

27 Un parallélogramme $ABCD$ étant donné, on se propose de construire un carré $IJKL$ dont les sommets I, J, K, L soient respectivement sur les côtés (AB), (BC), (CD), (DA) du parallélogramme.

1° Le centre du carré est noté O.

a) Quelles sont les images de (AB) et (BC) par la symétrie de centre O?

b) Quel est le centre du parallélogramme $ABCD$?

2° a) En utilisant une rotation de centre O, construisez le carré $IJKL$.

b) Quel est, suivant la nature du parallélogramme, le nombre de carrés solutions?

28 Dans le plan, on considère deux droites (D) et (D') distinctes et parallèles, et un point A n'appartenant ni à (D), ni à (D').
Construisez, à l'aide d'une transformation géométrique simple, un triangle équilatéral PAP' tel que P soit sur (D) et P' sur (D').
Précisez le nombre de triangles répondant à la question.

(D'après bac)

29 Dans le plan orienté, on trace un triangle ABC non isocèle et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

Soit (d_1) la demi-droite d'origine B contenant A.
Soit (d_2) la demi-droite d'origine C contenant A.
On place sur (d_1) un point P différent de B et sur (d_2) un point Q différent de C, tels que $BP = CQ$.

1° Justifiez l'existence d'une unique rotation r transformant B en C et P en Q. Précisez l'angle de r. Construisez le centre O de r et prouvez que ce point est indépendant de P et Q.

2° Quelle est la nature du triangle OPQ?

3° Construisez les points P sur (d_1) et Q sur (d_2) sachant que $BP = CQ = PQ$.

(D'après bac)

Isométries et lieux géométriques

30 On donne dans un plan un vecteur fixe $\vec{V}$ non nul et un point O fixe.
Étant donné un point M quelconque du plan, M' son image par la translation de vecteur $\vec{V}$, M'' son image par la symétrie de centre O, quel est l'ensemble des points M tels que $M'M'' = \|\vec{V}\|$?

31 On donne un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R dans un plan orienté (P) et $(\mathcal{D})$ une droite ne coupant pas $(\mathcal{C})$.

1° Soit A un point de $(\mathcal{D})$. On note $\mathcal{E}_A$ le lieu des points M de (P) vérifiant la propriété : « Il existe un point N de $(\mathcal{C})$ tel que le triangle AMN soit équilatéral direct $\left((\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \frac{\pi}{3}\right)$ ». Montrez que $\mathcal{E}_A$ est un cercle dont vous déterminerez le centre Ω_A et le rayon R_A. Construisez $\mathcal{E}_A$.

2° Quel est le lieu des points Ω_A lorsque A décrit $(\mathcal{D})$? Construisez cet ensemble.

32 Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$. Les points B et C sont fixes. Le point A est variable sur $(\mathcal{C})$. Quel est le lieu géométrique de l'orthocentre H du triangle ABC?

Isométries et nombres complexes

33 Dans le plan complexe (P) de repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -e^{2i\frac{\pi}{3}} z + i.$$

1° Démontrez que f admet un point unique I invariant.

2° On suppose M distinct de I.

a) Calculez $\frac{IM'}{IM}$.

b) Calculez $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})$.

3° Donnez la nature et les éléments caractéristiques de f.

34 Soit f l'application définie, dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, de la façon suivante : tout point M de (P), d'affixe z, a pour image M', d'affixe z' telle que $z' = i\bar{z} - i + 1$.

1° Déterminez l'ensemble (E) des points invariants par f.

2° a) Démontrez que pour tout point M de (P), le milieu de $[MM']$ est un point de (E) et que (MM') est perpendiculaire à (E).

b) Quelle est la nature de f?

35 Soit ABC un triangle, O un point du plan, distinct de A, B et C, r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$. On appelle A', B', C' les images respectives de A, B, C par R et U, V, W les milieux respectifs des segments $[A'B]$, $[B'C]$, $[C'A]$.
Démontrez que le triangle UVW est équilatéral.

Indication. On pourra utiliser les affixes des points A, B, C, A', ..., W dans un repère orthonormal direct d'origine O.

PROBLÈMES

36 Sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ d'un triangle ABC on construit les triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB'. On suppose que ces trois triangles sont directs

$$\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA'}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB'}) = \frac{\pi}{3}\right).$$

1° Démontrez que les segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ ont la même longueur.

2° Démontrez que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes.

37 Dans le plan orienté, $ABCD$ est un parallélogramme direct de centre O (si α est la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ alors α appartient à $]0\,;\pi[$). On construit les carrés directs $BAFE$, $ADHG$, $DCJI$, $CBLK$ de centres respectifs M, N, P, Q.

1° a) La rotation r de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme B en A. Quelles sont les images des points L, C, K?

b) Déduisez-en que $r(Q) = N$.

c) Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?

2° a) Démontrez que la symétrie de centre O transforme le carré $ABEF$ en $DCJI$.

b) Quel est le centre du carré $MNPQ$?

3° Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$

a) Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de l'application $r \circ t$.

b) Démontrez que le triangle BJG est rectangle isocèle.

38 Dans le plan orienté on suppose donnés deux points distincts O et I. On note r le quart de tour direct de centre O et s la symétrie de centre I.

I – 1° Soit $OJO'G$ le carré direct de centre I $\left(\text{c'est-à-dire que } (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OG}) = \frac{\pi}{2}\right)$. Placez ces différents points sur une figure (on prendra $OI = 4$ cm).

2° Prouvez que $s \circ r$ est la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3° Déduisez-en que J est le seul point du plan tel que $r(J) = s(J)$.
Désormais, pour tout couple (M, N) de points du plan, on note :
– A et B les images de M par r et s;
– C et D les images de N par r et s.

II – Soit M un point distinct de J. On suppose que J est le milieu du segment $[MN]$. Démontrez que $ABCD$ est un carré de centre G. Placez M et N et le carré $ABCD$ sur la figure.

III – Le point M étant toujours donné distinct de J, on suppose inversement que N est tel que $ABCD$ soit un carré. Prouvez que J est le milieu de $[MN]$ et que G est le centre du carré $ABCD$ (on introduira le milieu J' de $[MN]$ et le centre G' du carré; on comparera alors $r(J')$ et $s(J')$).

IV – Soit r' le quart de tour direct de centre G. Prouvez que $r' \circ r = s$. Déduisez-en que sous les hypothèses de la question **II**, le carré $ABCD$ est direct (c'est-à-dire que $r'(A) = B$).

(Bac Paris, 1990)

39 Soit ABC un triangle dont on suppose tous les angles aigus.

1° Soit M un point fixé de $[BC]$, M' et M'' les symétriques de M par rapport à (AB) et (AC) respectivement, P et Q les intersections de $(M'M'')$ avec (AB) et (AC) respectivement. On admettra que P est sur $[AB]$, et Q sur $[AC]$.
Montrez que le triangle PMQ a pour périmètre la longueur du segment $[M'M'']$.

2° Déduisez de la question précédente que, le point M étant toujours fixé sur $[BC]$, parmi tous les triangles dont un sommet est M, un autre est sur $[AB]$ et le troisième sur $[AC]$, l'unique triangle de plus petit périmètre est MPQ. On notera $2p$ le périmètre de MPQ (qui dépend du point M).

3° a) Montrez que le triangle $AM'M''$ est isocèle, de sommet A, et admet pour angle au sommet l'angle $2\widehat{BAC}$.

b) On note h la longueur commune aux deux côtés égaux du triangle isocèle $AM'M''$.

Montrez l'égalité : $p = h \sin(\widehat{BAC})$.
Montrez alors que, lorsque M varie sur $[BC]$, p est minimal lorsque h est minimale.

c) En remarquant que h est égale à AM, montrez que p est minimal lorsque M est le projeté orthogonal de A sur (BC).

4° Montrez, en utilisant ce qui précède, le résultat suivant : parmi tous les triangles inscrits dans le triangle ABC, celui dont le périmètre est le plus petit est nécessairement celui dont les sommets sont les pieds des hauteurs du triangle.

40 Dans un plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit $\frac{\pi}{3}$.

On appelle (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC. La médiatrice de $[BC]$ coupe (Γ) en A et D; on appelle A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1° Démontrez que A' est le symétrique de A par rapport à C.

2° On désigne par $s_{(BD)}$, $s_{(DC)}$, $s_{(CA)}$, $s_{(AB)}$ les symétries orthogonales par rapport aux droites (BD), (DC), (CA), (AB) respectivement.

a) Quelle est la nature des applications $s_{(BD)} \circ s_{(DC)}$ et $s_{(CA)} \circ s_{(AB)}$? On précisera les éléments caractéristiques.

b) Soit (Δ) la parallèle à (DC) menée par A et $s_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale par rapport à (Δ). Démontrez que : $s_{(BD)} \circ s_{(DC)} = s_{(DC)} \circ s_{(DA)}$ et $s_{(CA)} \circ s_{(AB)} = s_{(DA)} \circ s_{(\Delta)}$.

c) Retrouvez le résultat du **1°** en utilisant l'application : $t = s_{(BD)} \circ s_{(DC)} \circ s_{(CA)} \circ s_{(AB)}$ que l'on caractérisera.

8 Similitudes

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Lecture d'un dessin 198
AP2 Figures géométriques semblables 199
AP3 Homothéties. Rotations. Nombres complexes 200

COURS

1. Composée d'une homothétie et d'une rotation 201
2. Similitudes directes 203

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Similitude et géométrie analytique 208
TP2 Théorème de Ménélaüs 209
TP3 Étude d'une configuration du plan à l'aide de similitudes directes 210
TP4 Similitude directe et problème de construction 212

FICHE MÉTHODE

FICHE MÉTHODE Comment reconnaître qu'une application f est une similitude directe 214
Comment caractériser une similitude directe f 214

EXERCICES COMMENTÉS 215
LE JOUR DU BAC 217
EXERCICES ET PROBLÈMES 218

objectifs

- Introduire une nouvelle transformation, composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.
- Donner une interprétation géométrique de la transformation du plan complexe $z \mapsto az + b$, avec a et b nombres complexes (comme cela a été fait pour $z \mapsto z + a$ et $z \mapsto e^{i\theta}z$).
- Utiliser cette transformation pour résoudre des problèmes de lieux géométriques et de constructions.

AP1 Lecture d'un dessin

Le dessin de M.C. Escher « Le cours de la vie, I » *dont est extraite la figure ci-dessous offre une situation intéressante pour aborder la notion de figures semblables et de similitude. Nous procèderons uniquement à une lecture de ce dessin, les observations faites étant éventuellement confortées par quelques mesures de distances et d'angles.*

« Le Monde de M.C. Escher » Dessin 225 Éditions Chêne.

Les deux raies, numérotées 1 et 2, peuvent être dites, au sens commun du terme, semblables. L'une peut être interprétée comme la reproduction de l'autre à une échelle différente. Nous allons préciser cette notion, qualitativement dans cette AP1, quantitativement dans les AP2 et AP3.

1° *a*) Quelle transformation permet de remplacer une raie par une raie située dans le même secteur angulaire ?

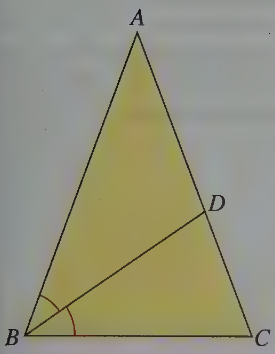
b) Quelle transformation permet de remplacer une raie par une raie située dans une même couronne ?

2° Quelles transformations simples permettent de transformer la raie 1 en la raie 2 ? Précisez les raies intermédiaires utilisées.

Ce dessin met en évidence des composées de rotations et d'homothéties de même centre, « le centre du dessin », la composition de ces transformations étant, on s'en assurera sans peine, commutative. Elles permettent de transformer une figure en une figure de même forme, figure dite semblable à la première.

AP2 Figures géométriques semblables

Le but de cette AP est de montrer quelques situations de figures dites semblables et de dégager les propriétés qui caractérisent de telles situations.



1 ■ *Triangles semblables*

Soit ABC un triangle isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{5}$.

1° Calculez les mesures des angles $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

2° Construisez un tel triangle ABC. (On pourra se reporter à l'exercice 38, chapitre 2, page 57.)

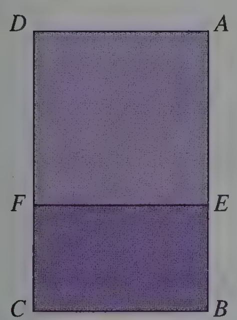
3° La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le segment $[AC]$ en D. La rotation de centre C et d'angle $-\dfrac{3\pi}{5}$, notée r, transforme B en B' et D en D'. Vérifiez que B, C, D' sont alignés.

4° *a*) Calculez les angles du triangle $CB'D'$ et démontrez que les droites (CB') et $(B'D')$ sont respectivement parallèles aux droites (AB) et (AC).

b) Démontrez qu'il existe une homothétie qui transforme le triangle ABC en le triangle $B'CD'$; précisez son centre et démontrez que son rapport est $2 \cos (2\pi/5)$.

c) Comparez les rapports $\dfrac{AB}{BC}$, $\dfrac{BC}{CD}$ et $\dfrac{AC}{BD}$ puis les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ d'une part, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$ d'autre part.

Conclusion. Les triangles ABC et BCD sont tels que les longueurs des côtés du triangle ABC sont les produits des longueurs des côtés du triangle BCD par un même nombre réel et les angles orientés correspondants sont égaux.



2 ■ *Rectangles*

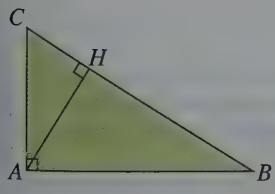
1° Le rectangle $ABCD$ de la figure ci-contre est un rectangle d'or c'est-à-dire que, si on découpe le carré $AEFD$, alors **le rectangle $EBCF$ restant est semblable au rectangle $ABCD$.** Intuitivement, comment traduisez-vous cette expression ?

2° On suppose, dans la suite de l'exercice, que $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{BE}$. Démontrez que le rectangle $ABCD$ est l'image du rectangle $EBCF$ par la composée d'une rotation r de centre E qui transforme F en A, suivie d'une homothétie h de centre A.

3 ■ *Triangles rectangles*

Soit ABC un triangle rectangle direct, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$, H le projeté orthogonal de A sur (BC). Intéressons-nous aux triangles ABC et AHC.

1° Comparez les rapports $\dfrac{AB}{AC}$ et $\dfrac{HA}{HC}$ puis les rapports $\dfrac{AH}{AB}$ et $\dfrac{HC}{AC}$ (pensez aux lignes trigonométriques).



2° Est-il possible de trouver une rotation r et une homothétie h telles que les images de A, B, C par $h \circ r$ soient respectivement H, A, C ? Justifiez votre réponse.

3° Les triangles HBA et HAC se correspondent par la composée d'une rotation et d'une homothétie. Précisez ces deux transformations.

AP3 Homothéties. Rotations. Nombres complexes

L'étude des nombres complexes, en liaison avec les transformations (chap. 2) a permis d'établir une relation entre des rotations et l'application $z \mapsto az$, a étant un nombre complexe de module 1. Cette AP3 propose d'étendre cette étude à des homothéties et des rotations afin de pouvoir traiter, à l'aide des nombres complexes, des situations telles que celles rencontrées dans l'AP2.

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormal direct du plan.

1 ■ *Homothétie et rotation de centre O*

On note h l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$ et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Pour tout point M du plan, on note M_1 son image par r, M_2 l'image de M_1 par h et z, z_1, z_2 les affixes respectives de M, M_1, M_2. Exprimez z_2 en fonction de z.

2 ■ *Étude réciproque*

Soit f une application du plan définie de la façon suivante : si M est un point du plan, d'affixe z, et M', d'affixe z', son image par f alors $z' = (1 + \mathrm{i})z - \mathrm{i}$.

1° Construisez les points A et B d'affixes respectives $2\mathrm{i}$ et $3 + 3\mathrm{i}$ et leurs images A' et B' par f.

2° Calculez le rapport $\dfrac{A'B'}{AB}$ et l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

3° Démontrez que f est une bijection du plan.

4° *a*) Démontrez que f laisse un point unique, noté I, invariant.

b) L'affixe de I est notée z_I. Vérifiez que, quel que soit le point M, on a : $z' - z_I = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z - z_I)$.

c) Calculez, pour M différent de I, le rapport $\dfrac{IM'}{IM}$ et l'angle $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})$.

d) On appelle M'' le point d'affixe z'' telle que $z'' - z_I = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z - z_I)$. Justifiez que M'' est l'image de M par une rotation dont vous préciserez le centre et l'angle.

e) Justifiez que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie de centre commun I.

5° Déduisez-en que si M, N, P sont trois points distincts du plan et M', N', P' leurs images par f alors on a :

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{M'P'}{MP} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}).$$

Ainsi l'application *f*, bijective, transforme les distances dans un rapport donné et conserve les angles orientés. Une telle application est appelée similitude directe.

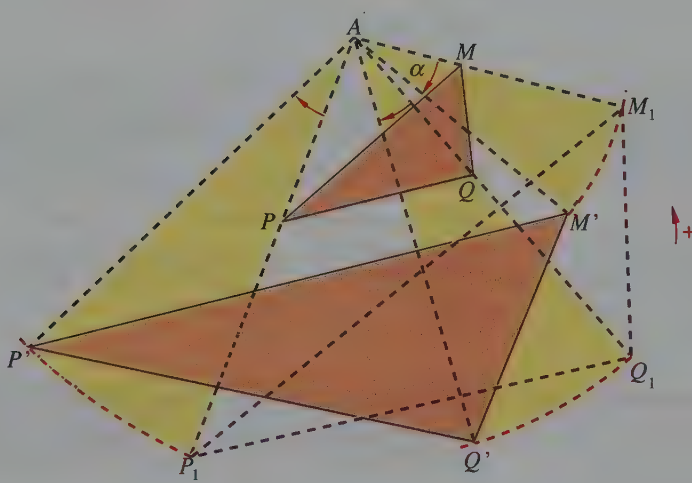
1. COMPOSÉE D'UNE HOMOTHÉTIE ET D'UNE ROTATION

Soit h une homothétie, de rapport k **positif** et de centre A ; et r une rotation de centre A, d'angle α. Intéressons-nous à la composée $r \circ h$.

1. Effet sur les distances et sur les angles

- L'homothétie h multipliant les distances par k, et la rotation r les conservant, $r \circ h$ multiplie les distances par k.

- L'homothétie h et la rotation r conservant les angles orientés de vecteurs, il en est de même de $r \circ h$.



Propriété 1

> **La composée d'une homothétie de rapport k positif et d'une rotation de même centre est une transformation du plan qui multiplie les distances par k et conserve les angles orientés.**

□ *Remarque.* Lorsque les distances sont multipliées par k, on les dit aussi **transformées dans le rapport k.**

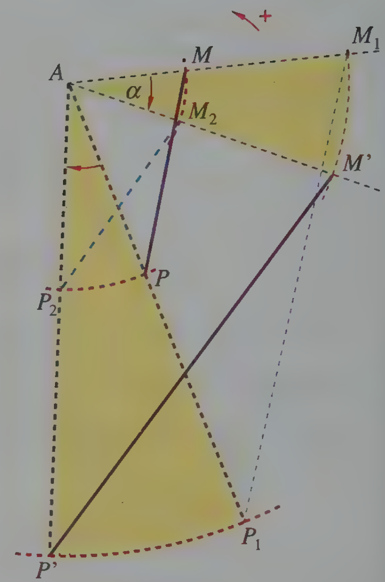
2. Comparaison de $r \circ h$ et $h \circ r$

Il est évident que $r \circ h(A) = h \circ r(A)$.

Soit M un point du plan, autre que A.

Appelons M_1, M', M_2 et M'' les points définis de la façon suivante :

$$M \overset{h}{\mapsto} M_1 \overset{r}{\mapsto} M' \; ; \quad M \overset{r}{\mapsto} M_2 \overset{h}{\mapsto} M''.$$



Comparons M' et M'' :

- $AM' = AM_1$ et $AM_1 = k \times AM$;
$AM'' = k \times AM_2$ et $AM_2 = AM$;
donc : $\boldsymbol{AM' = AM''}$.

- $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM'})$ car $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM_1}$ sont colinéaires de même sens ; de plus :
$(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM'}) = \alpha \ (2\pi)$.
De même : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM''}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM_2})$ car $\overrightarrow{AM''}$ et $\overrightarrow{AM_2}$ sont colinéaires de même sens ; de plus :
$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM_2}) = \alpha \quad (2\pi)$.
D'où : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM''})$,
donc $\overrightarrow{AM'}$ **et** $\overrightarrow{AM''}$ **sont colinéaires de même sens.**

- De même norme, colinéaires et de même sens, les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont égaux ; donc : $M' = M''$.

Ainsi, quel que soit le point M du plan : $r \circ h(M) = h \circ r(M)$.
Donc : $r \circ h = h \circ r$.

Propriété 2

> **Étant données une homothétie h de rapport positif et une rotation r de même centre : $r \circ h = h \circ r$.**

3. Écriture complexe de $r \circ h$

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormal direct du plan. Notons z_M l'affixe d'un point M quelconque du plan ; et $z_{\vec{u}}$ l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$ quelconque du plan.

Reprenons le schéma : $M \overset{h}{\mapsto} M_1 \overset{r}{\mapsto} M'$. Si M est différent de A, alors :

- $\overrightarrow{AM_1} = k \,.\, \overrightarrow{AM}$, donc : $z_{\overrightarrow{AM_1}} = k \times z_{\overrightarrow{AM}}$;

- $AM_1 = AM'$ et $(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM'}) = \alpha \quad (2\pi)$; donc : $\dfrac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{AM_1}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

D'où : $z_{\overrightarrow{AM'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \times k \times z_{\overrightarrow{AM}}$, donc : $z_{M'} - z_A = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z_M - z_A)$, égalité qui est encore vraie lorsque M est en A. Après développement :
$z_{M'} = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z_M + b$,
où b est un nombre complexe qui ne dépend pas de M.

D'où l'énoncé suivant :

Propriété 3

La composée d'une homothétie de rapport positif k et d'une rotation de même centre A et d'angle α a pour écriture complexe :
$z \mapsto k e^{i\alpha} z + b$,
où b est un nombre complexe qui ne dépend que de k, α et A.

2. SIMILITUDES DIRECTES

1. Définition

Définition 1

On appelle similitude directe du plan toute bijection qui transforme les distances dans un rapport donné et qui conserve les angles orientés.

En d'autres termes, si s est une similitude directe, alors s conserve les angles orientés et il existe un nombre réel positif k, nécessairement non nul, tel que, quels que soient les points A et B distincts, d'images A' et B' par s, $A'B' = k \times AB$. Le nombre k est appelé **rapport de la similitude s.**

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

- Les homothéties, les translations, les rotations et leurs composées sont des similitudes directes (AP2, exemples 1 et 2).
- Les réflexions conservent les distances, mais ne conservent pas les angles orientés : ce ne sont pas des similitudes directes.
- Dans l'exemple 3 de l'AP2, les triangles ABC et HAC ne se correspondent pas par une similitude directe.

2. Écriture complexe

Soit s une similitude directe du plan, de rapport k.
Notons A et B deux points, distincts, fixes du plan, A' et B' leurs images par s, M un point quelconque du plan, autre que A, M' son image par s.

D'après la définition de s, on a :

$B' \neq A'$ et $M' \neq A'$, $A'M' = k \times AM$ et

$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$,

donc : $A'M' = k \times AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ est indépendant de M : notons α une de ses mesures.

On a alors quel que soit M :

$$A'M' = k \times AM \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \alpha \quad (2\pi),$$

ce qui, dans le plan complexe, s'écrit : $z_{\overrightarrow{A'M'}} = ke^{i\alpha} \times z_{\overrightarrow{AM}}$,

ce qui équivaut à : $$z_{M'} - z_{A'} = ke^{i\alpha}(z_M - z_A),$$

$$z_{M'} = ke^{i\alpha}z_M + (z_{A'} - ke^{i\alpha}z_A).$$

Donc il existe des nombres complexes a et b, indépendants de M, a non nul, tels que : $z_{M'} = a \times z_M + b$.

Réciproque : soit a et b des nombres complexes, a non nul, et soit f l'application d'écriture complexe $z \mapsto az + b$.

Démontrons que f est une similitude directe : par définition, à tout point du plan d'affixe z, f associe le point d'affixe z' telle que $z' = az + b$.

- Comme a n'est pas nul, nous avons : $z = \frac{1}{a}z' - \frac{b}{a}$, ce qui montre que f **est une bijection.**

- M, P, Q étant des points du plan, d'images respectives M', P', Q' par f, alors :

$$z_{P'} - z_{M'} = a(z_P - z_M) \quad \text{et} \quad z_{Q'} - z_{M'} = a(z_Q - z_M)\,;$$

donc, si P et Q sont distincts de M, alors :

$$\frac{z_{\overrightarrow{M'P'}}}{z_{\overrightarrow{MP}}} = a \quad \text{et} \quad \frac{z_{\overrightarrow{M'Q'}}}{z_{\overrightarrow{MQ}}} = a, \quad \text{d'où :} \quad \frac{M'P'}{MP} = |a|$$

et : $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{M'P'}) = \arg a \quad (2\pi)$ et $(\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{M'Q'}) = \arg a \quad (2\pi)$.

Soit : $M'P' = |a| \times MP$ et $(\overrightarrow{M'P'}, \overrightarrow{M'Q'}) = (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})$.

Donc f **mulitplie les distances par $|a|$ et conserve les angles orientés.**

Propriétés 4

> - **Toute similitude directe de rapport k a une écriture complexe $z \mapsto az + b$ où a et b sont des nombres complexes et où $|a| = k$.**
> - **L'écriture complexe $z \mapsto az + b$, où a et b sont des nombres complexes, a non nul, est celle d'une similitude directe de rapport $|a|$.**

□ *Cas particulier :* Si $|a| = 1$, alors f conserve les distances et les angles orientés : f est donc un déplacement.

3. Forme réduite d'une similitude directe

Soit f la similitude directe d'écriture complexe $z \mapsto az + b$, où a et b sont des nombres complexes donnés, a non nul. L'étude des éventuels points invariants par f conduit à la résolution de l'équation $z = az + b$, équation équivalente à : $(1 - a)z = b$.

COURS

• **Si** $\boldsymbol{a = 1}$, alors f est une translation. En effet : quel que soit le point M, d'image M' par f : $z_{\overrightarrow{MM'}} = b$ (voir chapitre 2, page 39).

• **Si** $\boldsymbol{a \neq 1}$, alors f admet un unique point invariant, notons-le I. Quel que soit le point M du plan, d'image M' par f, on a :

$z_{M'} = az_M + b$ et $z_I = az_I + b$,

donc : $z_{M'} - z_I = a(z_M - z_I)$, c'est-à-dire :

$z_{\overrightarrow{IM'}} = a\, z_{\overrightarrow{IM}}$. (1)

Puisque $a = |a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg a}$, si on note h_1 l'homothétie de centre I et de rapport $|a|$ et r_1 la rotation de centre I et d'angle $\arg a$, alors l'égalité $z_{\overrightarrow{IM'}} = a\, z_{\overrightarrow{IM}}$ traduit que M' est l'image de M par $r_1 \circ h_1$ (cf. **1**. 3, p. 202).

Ainsi, quel que soit M : $f(M) = r_1 \circ h_1(M)$. Donc : $f = r_1 \circ h_1$.

En conclusion :

Propriété 5

Toute similitude directe du plan est soit une translation, soit la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

□ *Cas particulier.* Si a est réel et différent de 1, alors l'égalité (1) équivaut à : $\overrightarrow{IM'} = a \,.\, \overrightarrow{IM}$; f est donc l'homothétie de centre I et de rapport a.

□ *Remarques.*

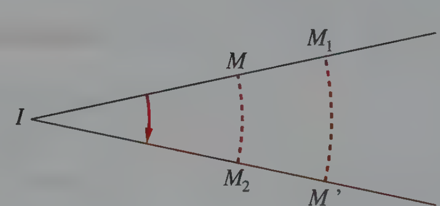
1° Pour tout point M, autre que I, d'image M' par f, on a :

$$(2) \quad \begin{cases} IM' = |a|\, IM \\ (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \arg a \quad (2\pi). \end{cases}$$

$|a|$ est **le rapport de la similitude directe** f ; I est appelé **le centre de** f ; $\arg a$ est appelé **l'angle de** f.

2° Les relations (2) permettent de construire l'image M' de M par f.

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[dr, "r_1"] & \\
M \arrow[ur, "h_1"] \arrow[rr, "r_1 \circ h_1", "h_1 \circ r_1"'] \arrow[dr, "r_1"'] & & M' \\
& M_2 \arrow[ur, "h_1"'] &
\end{tikzcd}$$



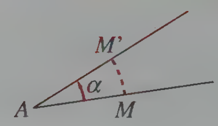
Définitions 2

Toute similitude directe s autre qu'une translation :
— admet un unique point invariant appelé centre de la similitude ;
— est décomposable en une homothétie h de rapport positif et une rotation r, h et r ayant le même centre, celui de s.
La composée $h \circ r$, égale à $r \circ h$, est dite forme réduite de la similitude.
Le rapport de h est appelé le rapport de la similitude. L'angle de r est appelé l'angle de la similitude.

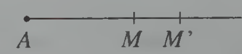
COURS

EXEMPLES

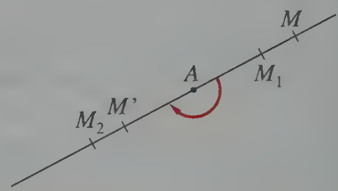
- Une rotation, de centre A et d'angle non nul de mesure α, est la similitude directe de centre A, de rapport 1 et d'angle α.



- Une homothétie, de centre A et de rapport positif k, est la similitude directe de centre A, de rapport k et d'angle nul.



- Une homothétie, de centre A et de rapport négatif k, est la similitude directe de centre A, de rapport $(-k)$ et d'angle plat.



□ *Remarques.*

1° Une translation est une similitude directe dite de rapport 1 et d'angle nul. En effet, si une translation transforme un couple (A, B) en un couple (A', B'), alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, donc, si $A \neq B$ $\begin{cases} A'B' = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = 0 \quad (2\pi). \end{cases}$

2° Pour une similitude directe s, de centre I, de rapport k et d'angle α, si M est un point du plan différent de I, alors :

$$M' = s(M) \quad \text{équivaut à :} \quad \begin{cases} IM' = k \times IM \\ (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \alpha \quad (2\pi) \end{cases}$$

(*cf.* remarque **1°** page 205).

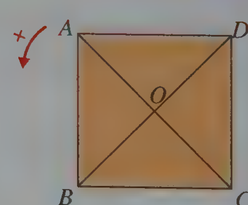
Si A et B sont des points distincts et si $A' = s(A)$ et $B' = s(B)$

alors on a : $\begin{cases} A'B' = k \times AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha \quad (2\pi) \quad (cf.\ \mathbf{2}.2) \end{cases}$

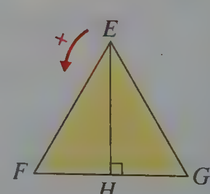
3° Les éléments qui caractérisent une similitude directe peuvent s'obtenir par simple lecture d'un dessin.

EXEMPLES

- *ABCD*, est un carré de centre O.
— C est l'image de B par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
— O est l'image de A par la similitude directe de centre B, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.



- *EFG* est un triangle équilatéral.
H est l'image de F par la similitude directe de centre E, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.



COURS

4. Propriétés d'une similitude directe

1 ■ Résultats immédiats.

De la forme réduite d'une similitude directe et des propriétés connues des translations, homothéties et rotations, il résulte que :

Propriétés 6

• Toute similitude directe
— transforme une droite en une droite ;
— transforme un segment en un segment ;
— conserve le parallélisme et l'orthogonalité ;
— conserve le milieu ;
— transforme un cercle en un cercle ;
— conserve le contact entre une droite et un cercle, entre deux cercles ;
— conserve les angles orientés.

• Toute similitude directe de rapport k multiplie les distances par k et les aires par k^2.

2 ■ Barycentre

• Dans le chapitre sur les isométries, on a vu la propriété : « L'image du barycentre de n points pondérés (A_1, α_1), ..., (A_n, α_n) par une isométrie f est le barycentre des n points pondérés $(f(A_1), \alpha_1)$, ..., $(f(A_n), \alpha_n)$. » On peut traduire ainsi cette propriété : toute isométrie conserve le barycentre.

• Lors de l'étude des homothéties, on a démontré que : « Les images M' et N' de deux points M et N distincts par une homothétie de rapport k sont telles que : $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$. »

• De ces deux propriétés il résulte que :

si $\left\{\begin{array}{l} \text{— } s \text{ est une similitude directe de rapport } k, \\ \text{— } h \text{ et } r \text{ sont l'homothétie et la rotation de la forme réduite de } s, \\ \text{— } G \text{ est le barycentre de } n \text{ points pondérés } (A_1, \alpha_1), ..., (A_n, \alpha_n), \\ \text{— } A'_1, ..., A'_n, G' \text{ sont les images respectives de } A_1, ..., A_n, G \text{ par} \\ s \text{ et } A''_1, ..., A''_n, G'' \text{ les images respectives de } A_1, ..., A_n, G \text{ par } h, \text{ ce que} \\ \text{nous schématisons ainsi : } \quad A_i \overset{h}{\mapsto} A''_i \overset{r}{\mapsto} A'_i, \quad G \overset{h}{\mapsto} G'' \overset{r}{\mapsto} G', \end{array}\right.$

alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{G''A''_i}) = k \cdot \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{GA_i})$,

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \overrightarrow{G''A''_i}) = \vec{0}$.

Ainsi G'' est le barycentre des n points pondérés (A''_1, α_1), ..., (A''_n, α_n).
Or A'_1, ..., A'_n, G' sont les images respectives de A''_1, ..., A''_n, G'' par l'isométrie r, donc G' est le barycentre des n points pondérés (A'_1, α_1), ..., (A'_n, α_n).

Propriété 7

L'image du barycentre de n points pondérés (A_1, α_1), ..., (A_n, α_n) par une similitude directe s est le barycentre des n points pondérés $(s(A_1), \alpha_1)$, ..., $(s(A_n), \alpha_n)$.
Autrement dit : toute similitude directe conserve le barycentre.

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Similitude et géométrie analytique

Ce TP vous propose de faire un bilan des résultats concernant l'expression complexe de certaines transformations ou leur expression analytique en les complétant éventuellement.

1 ■ *Étude générale*

Pour toutes les transformations f envisagées nous noterons $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormal direct du plan, M un point, z son affixe, M' l'image de M par f, z' l'affixe de M', (x, y) et (x', y') les couples de coordonnées de M et M'.
Complétez le tableau ci-dessous en suivant l'exemple de la première ligne (translations) et justifiez les résultats figurant déjà dans le tableau.

Nature de f	Définition géométrique de f	Expression complexe	Expression analytique
Translation de vecteur $\vec{u}$, $z_{\vec{u}} = b = \alpha + i\beta$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$	$\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}$
Homothétie de centre O de rapport k			
Homothétie de centre I de rapport k			
Rotation de centre O d'angle α	Si $M = O$ alors $M' = O$ Si $M \neq O$ alors $\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$		
Rotation de centre I d'angle α			
Similitude de centre O de rapport k d'angle α			
Similitude de centre I de rapport k d'angle α			

□ *Exemple.* Déterminez l'expression analytique de l'homothétie de centre I de coordonnées $(-3\,;\,1)$ et de rapport $-\dfrac{2}{3}$.

2 ■ *Études particulières*

1° Soit f l'application définie analytiquement par $\begin{cases} x' = -3x + 2 \\ y' = -3y - 4. \end{cases}$

a) Exprimez z' en fonction de z.

b) Déduisez-en la nature et les éléments caractéristiques de f.

2° Soit g l'application définie analytiquement par $\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}\,y - \sqrt{3} \\ y' = -\sqrt{3}\,x + y + \sqrt{3}. \end{cases}$

Reprenez une étude analogue à celle de la question **1°**.

□ *Indication.* Si un calcul direct n'aboutit pas, on pourra, après avoir écrit $z' = x' + iy' = (x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}) + i(-\sqrt{3}x + y + \sqrt{3})$, utiliser les égalités $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

TP2 Théorème de Ménélaüs[1]

La composée de deux homothéties de même centre a été étudiée en Première. Étendons cette étude au cas de deux homothéties de centres distincts. La nature et les éléments caractéristiques de l'application composée peuvent être, sans difficulté, déterminés à l'aide de l'expression complexe de chacune des deux homothéties. Nous vous proposons une étude vectorielle du problème, suivie d'une application du résultat obtenu à la démonstration d'un théorème.

1 ■ *Composée de deux homothéties*

Soit h_1 une homothétie, de centre O_1 et de rapport k_1, h_2 une homothétie, de centre O_2, distinct de O_1, et de rapport k_2. Posons $f = h_2 \circ h_1$.
Soit M un point du plan, M_1 l'image de M par h_1, M' l'image de M_1 par h_2.

1° *a*) Écrivez les deux égalités vectorielles traduisant que :
$M_1 = h_1(M)$ et $M' = h_2(M_1)$.

b) Étant donné un point P quelconque du plan, démontrez l'égalité :
$\overrightarrow{PM'} - k_1k_2\,\overrightarrow{PM} = k_2(1 - k_1)\,\overrightarrow{PO_1} + (1 - k_2)\,\overrightarrow{PO_2}$. (1)

c) Déduisez-en l'égalité : $\overrightarrow{MM'} = k_2(1 - k_1)\,\overrightarrow{MO_1} + (1 - k_2)\,\overrightarrow{MO_2}$. (2)

2° L'application f admet-elle des points invariants ?

3° *a*) Justifiez que, si $k_1 k_2 = 1$, alors f est une translation.

b) On suppose que $k_1 k_2$ est différent de 1. Démontrez que f est une homothétie ; précisez son rapport et expliquez pourquoi son centre est aligné avec O_1 et O_2.

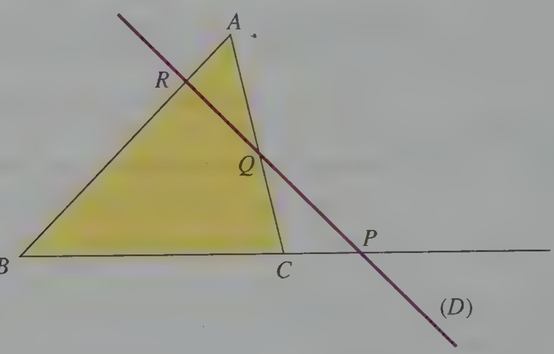
Nous retiendrons que :

• h_1 homothétie de centre O_1 de rapport k_1 • h_2 homothétie de centre O_2 de rapport k_2	$h_2 \circ h_1$	**si $k_1 k_2 = 1$** → **Translation**	
		si $k_1 k_2 \neq 1$ → **Homothétie**	**de rapport k_1k_2 de centre aligné avec O_1 et O_2.**

(1) Mathématicien grec (Alexandrie, vers 100 après J.-C.). Astronome à Rome sous l'empereur Trajan. Auteur de « *Les Sphériques* ».

2 ■ *Théorème de Ménélaüs (étude directe)*

Soit ABC un triangle, (D) une droite coupant les côtés (BC), (CA) et (AB) respectivement en P, Q et R, points distincts des sommets du triangle.



On se propose de calculer le produit $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\,\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\,\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$.

1° *a*) Quel est le rapport de l'homothétie h de centre P qui transforme B en C ?

b) Quel est le rapport de l'homothétie h' de centre Q qui transforme C en A ?

c) Le produit des rapports des homothéties h et h' peut-il être égal à 1 ?

2° Posons $g = h' \circ h$. D'après les résultats du paragraphe **1** ■, g est une homothétie.

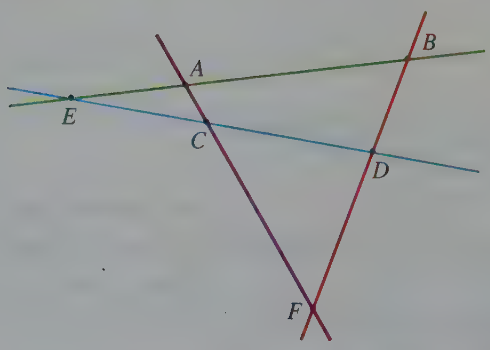
a) Quelle est l'image de B par g ?

b) Quel est le centre de l'homothétie g ? (Utilisez le résultat de la question **1** ■ **3°** *b*)).

c) En écrivant de deux façons le rapport de l'homothétie g, démontrez que :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\,\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\,\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$

TP3 Étude d'une configuration du plan à l'aide de similitudes directes

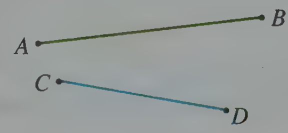


La figure formée par quatre droites du plan, (AB), (CD), (AC) et (BD), deux à deux sécantes, s'appelle un quadrilatère complet : les quatre droites en sont les côtés ; les points A, B, C, D et les points E et F communs aux droites (AB) et (CD) d'une part, (AC) et (BD) d'autre part, sont les six sommets du quadrilatère complet.
Tracez les quatre cercles (EAC), (EBD), (FAB) et (FCD) ; vérifiez sur le dessin qu'ils ont un point commun.

L'objet de ce TP est de montrer comment l'emploi des similitudes directes peut aider à démontrer la propriété ainsi constatée.

1 ■ *Similitude directe transformant (A, B) en (C, D)*

• **Analyse**
Supposons qu'il existe une similitude directe qui transforme A en C et B en D ; notons s cette similitude.



1° Que valent le rapport et l'angle de s ?

2° Notons a le nombre complexe de module $\dfrac{CD}{AB}$ et d'argument $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Exprimez a à l'aide des affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (relativement à un repère orthonormal direct du plan).

3° Déterminez l'écriture complexe de s en fonction des affixes des points A, B, C et D.

• **Réciproque.**
Soit S la similitude directe d'écriture complexe : $z \mapsto az + (z_C - az_A)$, a étant le nombre complexe défini ci-dessus. Démontrez que S transforme A en C et B en D.

Ainsi :

> **Étant donnés deux segments du plan, $[AB]$ et $[CD]$, de longueurs non nulles, il existe une unique similitude directe qui transforme A en C et B en D.**

2 ■ *Centres des similitudes directes transformant (A, B) en (C, D) et (A, C) en (B, D)*

L'étude précédente justifie l'existence d'une unique similitude directe S' qui transforme A en B et C en D.

1° Donnez l'écriture complexe de S' en fonction des affixes de A, B, C, D.

2° Démontrez que S et S' ne sont pas des translations.

3° Calculez et comparez les affixes des centres de S et S'.

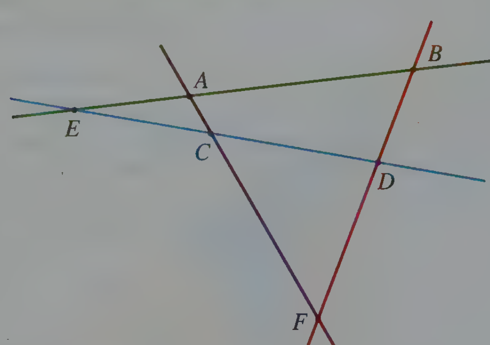
4° Formulez une conclusion.

3 ■ *Construction du centre O de la similitude directe S*

1° Démontrez que O est commun aux deux cercles (EAC) et (EBD).

2° Démontrez que O est distinct de E.

3° Construisez le centre O de S.



4 ■ *Conclusion*

1° Démontrez que O est commun aux quatre cercles (EAC), (EBD), (FAB) et (FCD).

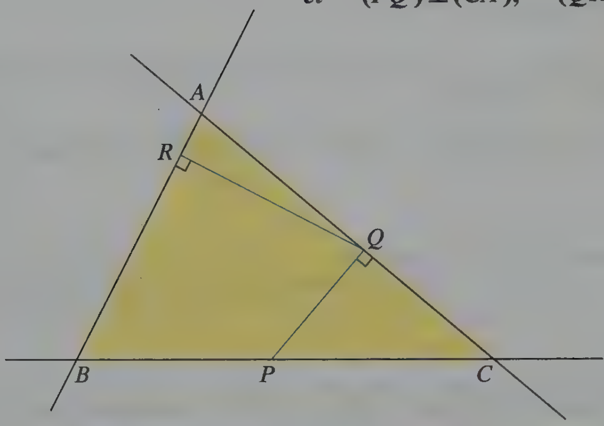
2° Énoncez une propriété du quadrilatère complet.

TP4 Similitude directe et problème de construction

Étant donné un triangle ABC, nous vous proposons de construire un triangle PQR tel que :

$P \in (BC)$, $\quad Q \in (CA)$, $\quad R \in (AB)$

et $\quad (PQ) \perp (CA)$, $\quad (QR) \perp (AB)$, $\quad (RP) \perp (BC)$.



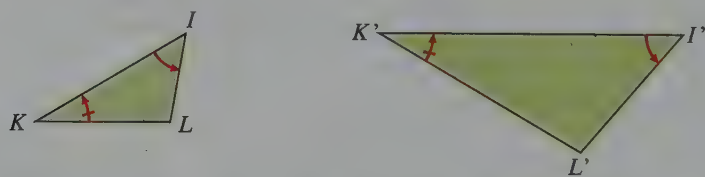
La figure ci-contre illustre le problème :

- ABC est donné ;
- P est un point de (BC) ; Q est son projeté orthogonal sur (CA) ; R est le projeté orthogonal de Q sur (AB).

Est-il possible de trouver P sur (BC) tel que P soit le projeté orthogonal de R sur (BC) ?

1 ▪ *Remarque préliminaire*

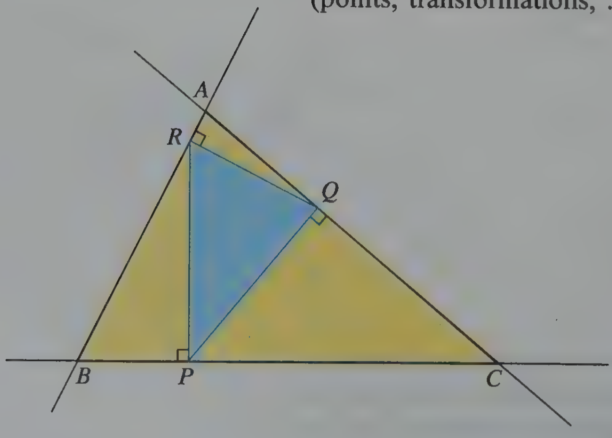
Avant de commencer l'analyse du problème posé, nous vous proposons une étude dont le résultat sera utilisé ultérieurement.
Étant donnés deux triangles IKL et $I'K'L'$ tels que les angles $(\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IL})$ et $(\overrightarrow{I'K'}, \overrightarrow{I'L'})$ d'une part, $(\overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KI})$ et $(\overrightarrow{K'L'}, \overrightarrow{K'I'})$ d'autre part soient égaux, démontrons qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme I, K, L en I', K', L'.



Notons S la similitude directe qui transforme I en I' et K en K' (TP3, **1 ▪**) et L_1 l'image de L par S. Démontrez que : $\quad L_1 = L'$.

2 ▪ *Analyse*

Supposons qu'un triangle PQR soit solution.
L'objet de l'analyse est de définir les points P, Q, R à l'aide d'éléments (points, transformations, ...) ne dépendant que de A, B, C.



La figure ci-contre construite de la façon suivante peut servir de support au raisonnement :

- tracez un triangle PQR ;
- tracez : (AB) perpendiculaire en R à (QR) ;
  (BC) perpendiculaire en P à (RP) ;
  (CA) perpendiculaire en Q à (PQ) ;
- repérez les points A, B, C.

- **Relation entre les triangles *PQR* et *ABC***

En comparant les angles des triangles PQR et ABC, justifiez l'existence d'une similitude directe s qui transforme A, B, C en Q, R, P.

- **Nature de $s \circ s$**

a) Démontrez que l'angle de s est droit.

b) Justifiez que s a un centre. Notons O ce centre.

c) Utilisez la forme réduite de s pour démontrer que $s \circ s$ est une homothétie de centre O.

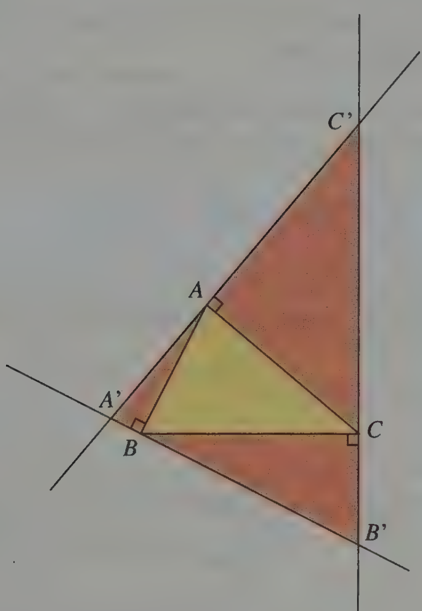
d) Soit A', B', C' les antécédents respectifs de A, B, C par s $(A = s(A'),$ $B = s(B'),\quad C = s(C'))$.

Démontrez que A' est sur la perpendiculaire en A à (AC) et sur la perpendiculaire en B à (AB).

Définissez de même B' et C' à partir de A, B et C.

Cette dernière question met en évidence que, bien que les points A', B' et C' aient été définis à partir de s, donc à partir de P, Q, R, ils ne dépendent, en réalité, que de A, B et C.

- **Relation entre les triangles *PQR* et *A'B'C'***



En admettant que la construction de A', B', C' à partir de A, B, C (figure ci-contre) définisse trois points deux à deux distincts, justifiez alors l'existence et l'unicité d'une similitude directe, s', qui transforme A' en A, B' en B et C' en C.

En conclusion : l'hypothèse de l'existence d'un triangle PQR solution conduit à identifier s' et s ; les points P, Q, R sont alors les images respectives de C', A', B' par l'homothétie $s \circ s$.

3 ■ *Synthèse*

Le triangle ABC étant donné, construisons les points A', B', C' : A' commun à la perpendiculaire en A à (AC) et à la perpendiculaire en B à (AB) ; B' commun à la perpendiculaire en B à (BA) et à la perpendiculaire en C à (BC) ; C' commun à la perpendiculaire en C à (CB) et à la perpendiculaire en A à (CA) (figure ci-dessus) ; et supposons A', B', C' deux à deux distincts. Notons s' la similitude directe qui transforme (A', B', C') en (A, B, C).

La comparaison de la figure page 212 (en bas) et de la figure ci-dessus permet d'affirmer que l'angle de s' est droit et que $s' \circ s'$ est une homothétie de même centre O' que s'. Notons Q, R, P les images respectives de A', B', C' par $s' \circ s'$.

1° Démontrez que PQR est un triangle solution.

2° Construisez les points P, Q et R.

FICHE MÉTHODE

Similitude directe

1 Comment reconnaître qu'une application f est une similitude directe

1° f est une bijection transformant les distances dans un rapport constant et conservant les angles orientés.
2° f est la composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre.
3° f admet pour écriture complexe $z' = az + b$ dans un repère orthonormal direct du plan, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

2 Comment caractériser une similitude directe f

1° Si elle a pour centre I et qu'elle transforme un point A, distinct de I, en un point A', alors : $\begin{cases} \text{son rapport est } \dfrac{IA'}{IA} \\ \text{son angle est } (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}) \end{cases}$

2° Si elle transforme un couple (A, B), $A \neq B$, en (A', B'), alors : $\begin{cases} \text{son rapport est } \dfrac{A'B'}{AB} \\ \text{son angle est } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \end{cases}$

3° Si elle admet pour écriture complexe $z' = az + b$ dans un repère orthonormal direct, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, alors :

Si
- $a = 1$ → f est une translation, le vecteur de translation a pour affixe b
- $a \neq 1$
  - $|a| = 1$ → f est une rotation, l'angle de rotation est $\arg(a)$
  - $a \in \mathbb{R}^*$ → f est une homothétie, le rapport de l'homothétie est a
  - $|a| \neq 1$, $a \notin \mathbb{R}^*$ → f est une similitude $\begin{cases} \text{de rapport } |a| \\ \text{d'angle } \arg(a) \end{cases}$

EXERCICES COMMENTÉS

Exercice 1

Énoncé

Soit A un point, (D) une droite et (C) un cercle du plan. Construisez un triangle ABC équilatéral direct $\left(\text{tel que } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\right)$ tel que B soit sur (D) et le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC soit sur (C).

Indication méthodologique

Le problème consiste à construire B et C.

La nature du triangle ABC cherché permet de restreindre la construction à celle de B.

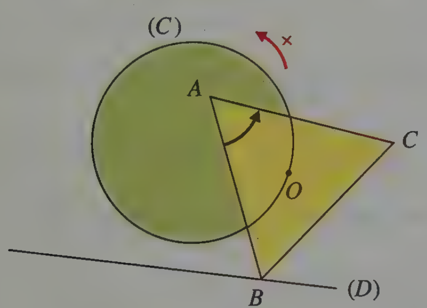
Une analyse de la figure supposée réalisée aura pour but de localiser B sur deux courbes sécantes (éventuellement tangentes) définies à l'aide des éléments donnés.

Une synthèse permettra de s'assurer que tout point B ainsi construit donne bien un triangle ABC solution.

Solution

Analyse

Observation de la figure supposée réalisée (dessinez un triangle équilatéral direct ABC, de centre noté O, puis une droite (D) passant par B et un cercle (C) passant par O).



Les points B et O sont chacun, d'après l'énoncé, situés sur une courbe donnée. Si nous mettons en évidence une transformation f par laquelle l'un est transformé en l'autre, par exemple B en O, alors, B étant sur (D), O est sur l'image de (D) par f.

Le triangle ABC est équilatéral direct, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$

et $\quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{6}$.

De plus $\quad AO = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB, \quad$ ce qui donne, après simplifications : $\quad \frac{AO}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

La similitude directe s de centre A, de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$ transforme donc B en O (Fiche méthode $\boxed{2}$ 1°).

□ *Remarque*. La similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$ transforme O en B : cette similitude est la réciproque de s, notée s^{-1}.

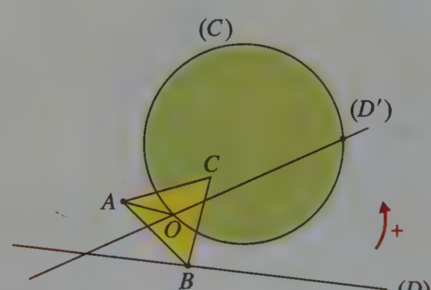
Puisque B est un point de (D), O est un point de l'image (D') de (D) par s.

Ainsi, s'il existe un triangle ABC solution, alors son centre O est un point commun à (C) et à (D'). Le point B est alors l'image de O par s^{-1} et C est l'image de B par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Synthèse

1° *Construction de la figure*. Construisons la droite (D'), image de (D) par s. Soit O un point commun à (C) et (D') : son existence sera étudiée plus loin.

Construisons B, image de O par s^{-1}, puis C, image de B par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



2° *Étude de la figure ainsi construite*. Par construction :

- $O \in (D')$ et $B = s^{-1}(O)$, donc $B \in (D)$;
- $O \in (C)$;
- le triangle ABC est équilatéral direct.

Il reste à vérifier que O est bien le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Or, par construction de B à partir de O et de C à partir de B, $OC = OB$; et, dans le triangle OAB :

$$OB^2 = AO^2 + AB^2 - 2AO \times AB \times \cos\frac{\pi}{6}, \quad \text{donc :}$$

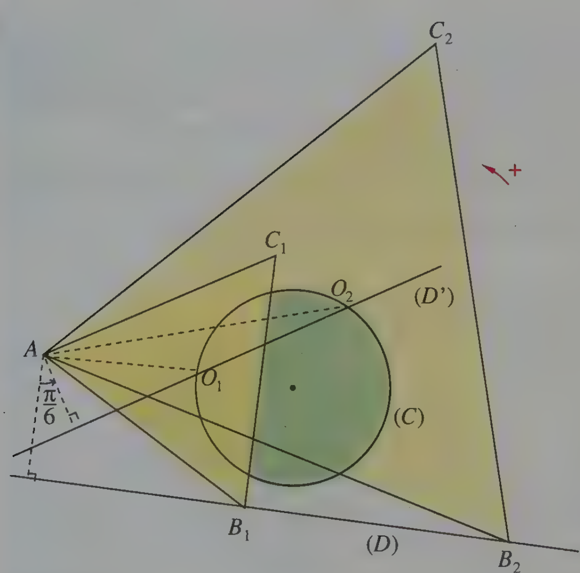
$$OB^2 = AO^2 + 3AO^2 - 2AO \times AO\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

soit $OB^2 = AO^2$,

$OB = OA$.

Par suite : $OA = OB = OC$; ainsi O est bien le centre du cercle (ABC).

3° *Discussion*. Le nombre de triangles ABC solutions est 0,1 ou 2 suivant que la droite (D') est extérieure, tangente ou sécante (fig. ci-dessous) au cercle (C).



Exercice 2

Énoncé

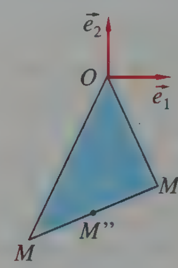
Soit s une similitude directe de centre O, de rapport k et d'angle θ, non réduite à une homothétie. Pour tout point M du plan, on note M' l'image de M par s et M'' le milieu du segment $[MM']$.

Démontrez qu'il existe une similitude directe s', indépendante de M, transformant M en M''. Cette similitude peut-elle être une translation ?

Solution

Il n'est pas facile de démontrer directement que s' conserve les angles et transforme les distances dans un rapport constant. Nous vous proposons donc une étude analytique du problème (Fiche méthode $\boxed{1}$ **3°**).

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormal direct du plan.



Si on note z l'affixe de M et z′ l'affixe de M' alors $z' = ke^{i\theta}z$, ce que nous noterons $z' = az$ en posant $a = ke^{i\theta}$.

Le point M'' est le milieu de $[MM']$ donc son affixe z'' est égale à $\frac{1}{2}(z + z')$.

Ainsi $z'' = \frac{1}{2}(z + az)$, $z'' = \frac{1}{2}(1 + a)z$.

Si $\frac{1}{2}(a + 1) \neq 0$, on reconnaît l'écriture complexe d'une similitude directe (Fiche méthode $\boxed{2}$ **3°**).

Or : $\frac{1}{2}(1 + a) = 0$ équivaut à $a = -1$. Si $a = -1$, alors s est une homothétie, de rapport -1, ce qui est contraire à l'hypothèse ; donc $\frac{1}{2}(a + 1) \neq 0$.

L'écriture complexe $z'' = \frac{1}{2}(a + 1)z$ définit donc une similitude directe s' ; notons que s' laisse O invariant.

Le point M'' est donc l'image de M par une similitude directe.

La similitude directe s' a au moins un point invariant.

Si s' est une translation, alors s' est l'identité, donc : $M = M'' = M'$, et ce, quel que soit M ; donc s est l'identité, ou encore l'homothétie de centre O et de rapport 1, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc s' n'est pas une translation.

Énoncé

Bac CE. 1990, Espagne

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1° Déterminez l'ensemble (C) des points du plan d'affixe z vérifiant : $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 4$.

2° Déterminez l'écriture complexe de la similitude directe S transformant le point A d'affixe i en O, origine du repère, et transformant le point B d'affixe $\sqrt{3}$ en B' d'affixe $-4i$. Précisez le centre, le rapport et l'angle de S.

3° En utilisant les résultats établis au 2°, retrouvez l'ensemble (C) défini au 1°.

MOTS CLÉS
« ensembles de points »,
« similitude directe ».

A la lecture du sujet

Il s'agit de tester chez le candidat :

- son aisance à passer du langage des nombres complexes à celui de la géométrie, et réciproquement ;
- ses connaissances sur les similitudes directes.

Analyse du problème

La première question propose de reconnaître un ensemble de points défini par une équation complexe.

La seconde question met en place une similitude directe définie par deux couples de points homologues.

La troisième question a pour but de retrouver, à l'aide de la transformation étudiée dans la seconde question, le résultat établi dans la première.

Une solution

1° *Remarque.* Quel que soit le nombre complexe z :

$$(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i = (1 - i\sqrt{3})\left[z - \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i\sqrt{3}}\right].$$

Or : $\dfrac{\sqrt{3} + i}{1 - i\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{3} + i)(1 + i\sqrt{3})}{4} = i$

et $|1 - i\sqrt{3}| = 2$;

donc : $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 2\,|z - i|$. D'où :

$|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 4$ équivaut à $|z - i| = 2$.

En conclusion : l'ensemble (C) est le cercle de centre A et de rayon 2.

2° *a)* La similitude directe S transforme $A(i)$ en O et $B(\sqrt{3})$ en $B'(-4i)$; son rapport est donc : $\dfrac{OB'}{AB}$ et son angle est : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB'})$.

Or l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $\sqrt{3} - i$ et l'affixe de $\overrightarrow{OB'}$ est $-4i$, donc :

$$\frac{OB'}{AB} = \frac{|-4i|}{|\sqrt{3} - i|} = \frac{4}{2} = 2$$

et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB'}) = \arg\left(\dfrac{\text{affixe de } \overrightarrow{OB'}}{\text{affixe de } \overrightarrow{AB}}\right)$.

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB'}) = \arg\left(\frac{-4i}{\sqrt{3} - i}\right) = \arg(-i) - \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right);$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB'}) = -\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

L'écriture complexe de S est donc $z \mapsto 2e^{-i\frac{\pi}{3}}z + b$

où b est un nombre complexe tel que : $0 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}i + b$, relation qui traduit que : $S(A) = O$; donc :

$b = -2ie^{-i\frac{\pi}{3}} = -\sqrt{3} - i$.

L'écriture complexe de S est donc :

$z \mapsto 2e^{-i\frac{\pi}{3}}z - \sqrt{3} - i$, ou $z \mapsto (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$.

b) La similitude directe S a pour rapport 2, pour angle $-\dfrac{\pi}{3}$, pour centre le point Ω d'affixe ω telle que :

$\omega = (1 - i\sqrt{3})\,\omega - \sqrt{3} - i$, c'est-à-dire : $\omega = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} + i$.

3° Soit M un point du plan, z son affixe, M' le point $S(M)$. (C) est l'ensemble des points M du plan tels que : $OM' = 4$.

Or : $O = S(A)$ et $M' = S(M)$;

donc $OM' = 2 \times AM$.

Donc (C) est l'ensemble des points M du plan tels que $AM = 2$. (C) est donc le cercle de centre A et de rayon 2.

Exercices et problèmes

Q.C.M.

Dans chacun des cas, une ou plusieurs réponses sont exactes.

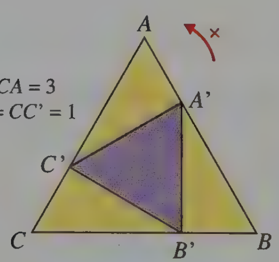
1 L'application du plan d'écriture complexe $z' = -2iz + 1 - i$ est une similitude directe :

de rapport -2 .... ☐
de centre I d'affixe $1 - i$ .... ☐
de rapport 2 et transformant O d'affixe zéro en O' d'affixe $1 - i$ .... ☐

2 S'il existe une similitude directe S transformant (A, B, C) en (A', B', C') (fig. ci-dessous), alors :

le centre de S est le centre du triangle ABC .... ☐
l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$ .... ☐
le rapport de S est $\frac{2}{3}$. .... ☐

• $AB = BC = CA = 3$
• $AA' = BB' = CC' = 1$



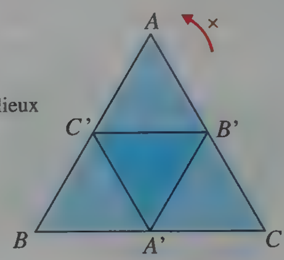
3 S'il existe une similitude directe S transformant (A, B, C) en (A', B', C') (fig. ci-dessus), alors le rapport de S est :

$\frac{2}{3}$ .... ☐
$\frac{1}{\sqrt{3}}$ .... ☐
$\sqrt{3}$ .... ☐

4 Une similitude directe S de rapport k et d'angle θ transforme A en C' et C en B (fig. ci-après). Alors :

$k = \frac{1}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$ .... ☐
$k = 2$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$ .... ☐
$k = \frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$ .... ☐

• ABC est équilatéral
• A', B', C' sont les milieux des côtés



5 La composée d'une rotation de centre O et d'angle θ et d'une homothétie de centre O et de rapport -4 :

n'est pas une similitude directe .... ☐
est une similitude directe de rapport -4 et d'angle θ .... ☐
est une similitude directe de rapport 4 et d'angle $\theta + \pi$ .... ☐

6 Une similitude directe qui n'est pas une translation admet :

un unique point invariant .... ☐
0 ou 1 point invariant .... ☐
plusieurs points invariants .... ☐

7 Si une similitude directe f conserve les distances, alors :

f est une rotation .... ☐
f est un déplacement .... ☐
f est l'identité du plan .... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Similitudes et nombres complexes

Les exercices 8 à 28 utilisent un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Dans les exercices 8 à 17, déterminez les écritures complexes, puis l'expression analytique de l'application f donnée.

8 ■ f est la translation de vecteur d'affixe $-2 + 3i$.

9 f est l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.

10 f est l'homothétie de centre I d'affixe $2-5i$ et de rapport $\frac{3}{4}$.

11 f est l'homothétie de centre I d'affixe $4i$ et de rapport $-\frac{1}{3}$.

12 f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

13 f est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

14 f est la rotation de centre I d'affixe $-3+i$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

15 f est la rotation de centre I d'affixe -2 et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

16 f est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

17 f est la similitude directe de centre I d'affixe $-3-i$, de rapport $\frac{1}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de l'application f définie dans les exercices ***18*** *à* ***23*** *par son écriture complexe, et dans les exercices* ***24*** *à* ***27*** *par son expression analytique.*

18
a) $z' = z - 3$.
b) $z' = z + 1 + i$.
c) $z' = z - \frac{5}{3}i + 4$.
d) $z' = z + 2 - 3i$.

19
a) $z' = -2z + 4 - i$.
b) $z' = \sqrt{2}\, z + i$.
c) $z' = \frac{3}{4}z + 1 - \frac{1}{2}i$.
d) $z' = -3z + 2 - 4i$.

20
a) $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2$.
b) $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
c) $z' = -iz + 2i - 2$.
d) $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z + 5 - 7i$.

21
a) $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 + 2i$.
b) $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z + 2 - 3i$.
c) $z' = iz - 1 - i$.
d) $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z + 2i$.

22 $z' = -(\cos\theta + i\sin\theta)(z+1)$,
où $\theta \in]-\pi\,;\,\pi]$.

23
a) $z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z - 2$.
b) $z' = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}(z - i) + i$.
c) $z' = (2+i)z + (1+i)$; l'angle sera donné par son cosinus et son sinus.
d) $z' = (1-i)z - 1$.
e) $z' = (1 - e^{i\frac{\pi}{6}})z$; l'angle sera donné par son cosinus et son sinus.

24
$$\begin{cases} x' = -5x + 2 \\ y' = -5y - 1. \end{cases}$$

25
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

26
$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 5. \end{cases}$$

27
$$\begin{cases} x' = -\sqrt{3}x + y + \sqrt{3} \\ y' = -x - \sqrt{3}y + 2 + \sqrt{3}. \end{cases}$$

28 On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = u^2z + u$, où u désigne un nombre complexe.

1° Déterminez l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels f est une translation ; caractérisez f pour chacune des valeurs trouvées.

2° Déterminez l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ (en radians); caractérisez f pour chacune des valeurs trouvées.

3° Déterminez l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels f est une homothétie de rapport -2; caractérisez f pour chacune des valeurs trouvées.

4° Caractérisez f lorsque $u = 1 - i$.

29 ■■ Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On appelle (E) l'ensemble des points M, d'affixe z telle que :

$$|(1-i)z + 4i| = 3\sqrt{2}. \qquad (1)$$

1° *Première méthode.*
On pose $z = x + iy$, x et y nombres réels.

a) Déterminez une équation cartésienne de (E).

b) Dessinez (E).

2° *Deuxième méthode.*

a) Vérifiez que l'égalité (1) équivaut à :
$|z - (2-2i)| = 3$.

b) Caractérisez (E).

3° *Troisième méthode.*
Soit s la similitude d'écriture complexe $z \mapsto (1-i)z + 4i$.

a) Déterminez le centre et le rapport de s.

b) Quelle est l'affixe du point O' dont l'image par s est O?

c) Calculez $O'M$ lorsque M est un point de (E) et caractérisez (E).

Similitudes et configurations

Dans les exercices 30 à 34, le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

30 ■■ On appelle A et B les points d'affixes respectives $2+i$ et $4+2i$ et C le point tel que le triangle ABC soit équilatéral direct. Déterminez l'affixe de C.

31 ■■ Soit A le point de coordonnées $(4; 1)$. On appelle M le point de coordonnées (x, y). Déterminez les coordonnées x' et y' du point M' tel que le triangle AMM' soit équilatéral et :

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{3}.$$

32 ■■ Reprenez une étude analogue à celle de l'exercice **31** avec un triangle AMM' :

a) rectangle en A, isocèle et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2}$;

b) rectangle en M, isocèle et $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}$.

33 ■■ Soit $ABCD$ un carré direct $\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}\right)$. Relativement à un repère orthonormal direct du plan, les affixes de A et B sont $-1+i$ et $4-i$. Quelle est l'affixe du centre du carré ?

34 ■■ Soit ABC un triangle équilatéral. Relativement à un repère orthonormal direct du plan, les affixes de A et B sont $1-2i$ et 2. Quelle est l'affixe du centre du triangle ? (Deux cas sont à envisager.)

35 ■■ Dans le plan, on donne deux cercles (C) et (C') de centres respectifs O et O'. Ces deux cercles se coupent en A et B. Une sécante aux deux cercles passe par B, recoupe (C) en M et (C') en M'. Démontrez que la similitude directe de centre A qui transforme O en O' transforme aussi M en M'.

36 ■■■ Soit s une similitude directe, de centre O, de rapport k et d'angle θ. On note M un point du plan autre que O, M' son image par s et G le centre de gravité du triangle OMM'.

1° Démontrez que, si s n'est pas une homothétie, alors G est l'image de M par une similitude directe s' indépendante de M.

2° On suppose que : $k = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$.

a) Démontrez que le triangle OMM' est rectangle isocèle.

b) Caractérisez la similitude s' (l'angle sera donné par son cosinus et son sinus, puis par une valeur approchée à 0,1 rad près).

37 ■■■ Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :

$$AB = 2AC \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Soit $(\mathcal{C}_B)$ et $(\mathcal{C}_C)$ les cercles qui passent par A et de centres respectifs B et C.

1° Démontrez que la similitude directe de centre A qui transforme B en C transforme aussi $(\mathcal{C}_B)$ en $(\mathcal{C}_C)$.

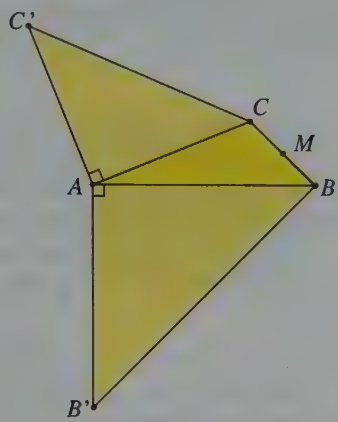
2° Soit s une similitude directe qui transforme $(\mathcal{C}_B)$ en $(\mathcal{C}_C)$.

a) Quelle est la valeur du rapport de la similitude s ?

b) On désigne par I le centre de s. Quelle est la valeur du rapport $\frac{IC}{IB}$?
Quel est l'ensemble (Γ) des centres I des similitudes directes transformant $(\mathcal{C}_B)$ en $(\mathcal{C}_C)$. Représentez cet ensemble.

38 ■■ Le triangle ABC est quelconque ; M est le milieu du segment $[BC]$.

Les triangles BAB' et CAC' sont rectangles et isocèles de sommet A.
Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que : $B'C' = 2AM$.



1° *Méthode géométrique*

a) Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2.
Déterminez les images des points A et M par h.
Trouvez une rotation r telle que $r \circ h$ transforme A en B' et M en C'.

b) Déduisez-en que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que : $B'C' = 2AM$.

2° *Utilisation des nombres complexes*
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine A dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c.
a) Quelles sont les affixes m, b', c' des points M, B', C' ?

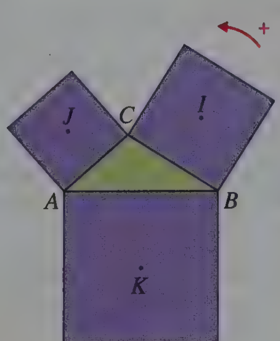
b) Retrouvez alors les résultats du **1°** b).

39 ■■ On considère un triangle ABC tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ait une mesure comprise entre 0 et π.
On construit, à l'extérieur de ce triangle, trois carrés de côtés respectifs $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, et on désigne par I, J et K leurs centres, conformément à la figure.
On a :

$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JA})$

$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB})$

$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.



On se propose de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont orthogonaux et de même norme et que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$; les affixes de B et C sont notées b et c.

1° a) Définissez géométriquement J à partir de C.

b) Calculez l'affixe z_J de J en fonction de c.

2° Calculez les affixes z_K et z_I de K et I en fonction de b et c.

3° a) Calculez en fonction de b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JK}$.

b) Déduisez-en que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont orthogonaux et de même norme.

4° Démontrez que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

40 ■■■ $ABCD$ est un quadrilatère et α est un nombre complexe de module r et d'argument θ; a, b, c, d sont les affixes de A, B, C, D dans un repère orthonormal direct du plan du quadrilatère.

La similitude directe de centre A, de rapport r et d'angle θ transforme B en Q. La similitude directe de centre B, de rapport r et d'angle θ transforme C en M. La similitude directe de centre C, de rapport r et d'angle θ transforme D en N. La similitude directe de centre D, de rapport r et d'angle θ transforme A en P.
On appellera q, m, n et p les affixes de Q, M, N et P.

1° Déterminez q en fonction de α, a et b.

2° a) Démontrez que : « $MNPQ$ est un parallélogramme » équivaut à « $n + q = m + p$ ».

b) Déduisez-en que : « $MNPQ$ est un parallélogramme » équivaut à « $\alpha = \dfrac{1}{2}$ ou $ABCD$ est un parallélogramme ».

3° On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme et que $\alpha = \dfrac{1 + i}{2}$. Déduisez-en que $MNPQ$ est un carré.

41 ■■ Soit ABC un triangle équilatéral direct, D, E, F les points des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ tels que $AD = BE = CF = \dfrac{1}{3} AB$, G le centre de gravité du triangle ABC.

1° Démontrez que G est le centre de gravité du triangle DEF.

2° Justifiez que, s'il existe une similitude directe du plan qui transforme ABC en DEF, alors son centre est G.

3° Démontrez que la rotation de centre G qui transforme A en B conserve les triangles ABC et DEF.

4° Posons $\dfrac{GD}{GA} = k$ et $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GD}) = \theta$.

a) Démontrez que : $GE = kGB$ et $GF = kGC$,
et $(\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GE}) = \theta$ et $(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GF}) = \theta$.

b) Déduisez de toute cette étude que DEF est l'image de ABC par une similitude directe de centre G.

42 ■■■ $ABCD$ est un carré ; $a = AB$; I, J, K, L sont les points situés respectivement sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ tels que : $AI = BJ = CK = DL = \frac{1}{4}a$.

Démontrez qu'il existe une similitude directe, dont vous préciserez le centre, qui transforme $ABCD$ en $IJKL$. (Pour cela, vous pourrez procéder à une étude analytique ou à une étude géométrique analogue à celle de l'exercice **41**.)

Lieux

43 ■ Soit $ABCD$ un carré de centre O : A est fixe et B décrit un cercle qui passe par A.
Quels sont les lieux des points C, D, O ?

44 ■■■ Soit A un point et s, une similitude directe du plan.
Soit M un point du plan, M' son image par s, et P l'orthocentre du triangle AMM'.
Quel est le lieu de P quand M décrit :

a) une droite donnée ? b) un cercle donné ?

45 ■■ Soit A et (D) un point et une droite donnés du plan, α un nombre réel tel que : $0 < \alpha < \pi$. ABC est un triangle tel que B et C soient sur (D) et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ait pour mesure α.
Quel est le lieu du pied de la hauteur issue de B quand B décrit (D) ?

46 ■■■ Dans les deux questions qui suivent, ABC est un triangle dont le sommet A est fixe et dont G est le centre de gravité.

1° Le triangle ABC est équilatéral direct et B décrit un cercle $(\mathcal{C})$.
Quel est le lieu géométrique de G ? Dessinez ce lieu.

2° Le triangle ABC est rectangle en A, isocèle et direct et B décrit une droite $(\mathcal{D})$.
Quel est le lieu géométrique de G ? Dessinez ce lieu.

47 ■■■ Dans le plan, on donne un triangle équilatéral ABC.
A chaque point M du segment $[AC]$, on associe :

– le projeté P de M sur la droite (BC) parallèlement à la droite (AB),

– le point Q vérifiant : $BCQM$ est un parallélogramme,

– le point d'intersection N des droites (MQ) et (AB),

– les points O, I, J et D, milieux respectifs de $[BC]$, $[MQ]$, $[NP]$ et $[AB]$.

1° Démontrez qu'il existe un déplacement d que l'on déterminera tel que, pour tout point M du segment $[AC]$, on ait : $d(M) = I$. Déterminez le lieu géométrique du point I lorsque M décrit $[AC]$.

2° Lorsque M décrit le segment $[AC]$:

a) Déterminez le lieu géométrique du centre de gravité G du triangle MCQ.

b) Déterminez le lieu géométrique du point J.

c) Montrez que la droite (IJ) passe par un point indépendant du choix de M sur le segment $[AC]$.

48 ■■■ Soit A et A' deux points du plan et α un nombre réel, pris dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

1° Déterminez l'ensemble des centres des similitudes directes d'angle α transformant A en A'.

2° Un point P étant fixé, quel est le lieu des images de P par les similitudes directes présentées à la question 1° ?

49 ■■■■ Soit A et A' deux points du plan et k un nombre réel strictement positif.

1° Déterminez l'ensemble des centres des similitudes directes de rapport k qui transforment A en A'.

2° Un point P étant fixé, quel est le lieu des images de P par les similitudes présentées en question 1° ?

Problèmes de construction

50 ■■■ Soit (D) une droite du plan et A un point du plan n'appartenant pas à (D).
Construisez un triangle ABC tel que :

- le côté $[BC]$ soit porté par (D),
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$,
- $AC = 2AB$.

51 ■■ Dans le plan orienté, ABC est un triangle rectangle en A et :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$,

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6}$.

On note A' le symétrique de A par rapport à C.

1° Quels sont le rapport et l'angle de la similitude directe s transformant A' en C et C en B ?

On appelle Ω le centre de s.

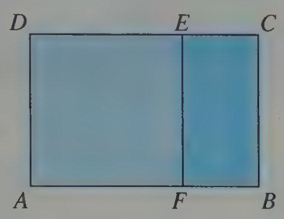
a) Justifiez l'orthogonalité des droites (ΩC) et (BC).

b) Construisez géométriquement Ω.

52 ■■■■ Soit (C) et (C') deux cercles du plan, de centres respectifs O et O', tangents extérieurement en A.
Soit I un point de la tangente en A aux deux cercles tel que $AI = AO'$.
Construisez un triangle IMM' rectangle isocèle dont le sommet M de l'angle droit appartient à (C) et tel que M' appartienne à (C').

PROBLÈMES

53 ■■ Dans le plan orienté, $AFED$ est un carré de côté 1 tel que l'angle $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{2}$.



Soit ℓ ($\ell > 1$) la longueur du segment $[AB]$ du rectangle $ABCD$.

1° On suppose qu'il existe une similitude directe f transformant respectivement A, B, C, D en B, C, E, F.

Établissez qu'alors : $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On suppose dans toute la suite que ℓ a cette valeur.

2° a) Quels sont l'angle et le rapport de la similitude f ?

b) En utilisant la forme réduite de f, justifiez que $f \circ f$ est une homothétie.

c) Montrez que le centre de la similitude f est le point d'intersection des droites (AC) et (BE).

3° A tout point M d'affixe z dans le repère $(A, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$, on fait correspondre le point $g(M)$ d'affixe z', avec :

$z' = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,iz + \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

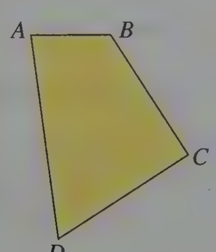
Démontrez que g est une similitude directe dont vous donnerez le centre, l'angle, le rapport. Quelles sont les images par g de A, B, C et D ?

(Bac)

54 ■■ Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère :

– un quadrilatère convexe $ABCD$ (voir figure ci-dessous) ;

– extérieurement au quadrilatère, le point M_1 (respectivement M_2, M_3, M_4) tel que le triangle AM_1B (respectivement BM_2C, CM_3D, DM_4A) soit rectangle et isocèle de sommet M_1 (respectivement M_2, M_3, M_4).



Le but de l'exercice est de démontrer que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ sont orthogonaux et ont même longueur.

1° Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D et z_1, z_2, z_3 et z_4 les affixes respectives des points M_1, M_2, M_3 et M_4.
Exprimez z_1 en fonction de a et b.
Déduisez-en les expressions de z_2, z_3 et z_4 en fonction de a, b, c et d.

2° Démontrez que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ sont orthogonaux et ont même longueur.

55 ■■■ Dans le plan orienté, on considère quatre points A, B, C, D, deux à deux distincts.
On note I le milieu de $[AC]$, J celui de $[BD]$ et O l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D.
On construit les triangles rectangles isocèles MAB, NBC, PCD, QDA tels que les angles orientés $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$, $(\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NC})$, $(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PD})$, $(\overrightarrow{QD}, \overrightarrow{QA})$ aient $\frac{\pi}{2}$ pour mesure.
On note enfin K et L les milieux respectifs des segments $[MP]$ et $[NQ]$.
On se propose d'étudier la configuration $IKJL$.

1° Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O, on note a, b, c, d, m, n, p, q les affixes respectives des points A, B, C, D, M, N, P, Q.

a) Déterminez le rapport et l'angle de la similitude directe de centre A qui transforme B en M.

b) Exprimez m en fonction de a et b.

c) Déterminez de même n, p, q en fonction de a, b, c, d.

d) Déterminez l'isobarycentre des quatre points M, N, P, Q.

e) Démontrez que l'affixe de K est $i\,\dfrac{b+d}{2}$.

2° a) Démontrez que O est le milieu de $[IJ]$.

b) Démontrez que $IKJL$ est un carré.

56 ■■ Soit O et A deux points du plan orienté, distants de a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
Soit s la similitude directe de centre O, de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$. On construit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$A_0 = A$

et, pour tout entier naturel n : $A_{n+1} = s(A_n)$.

1° Construisez les points A_0, A_1, A_2, ..., A_{12}.

2° a) Démontrez que la suite $(A_nA_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

b) Soit S_n la somme des longueurs A_pA_{p+1}, p variant dans $\mathbb{N}$ de 0 à n $\left(S_n = \sum_{p=0}^{n} A_pA_{p+1}\right)$. Calculez S_n en fonction de a et n.

c) Démontrez que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente ; quelle en est la limite ?

57 ■■■ Étant donnés deux nombres complexes a et b tels que : $a \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$, on définit la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$z_0 = 0$

et, pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = az_n + b$.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on notera M_n le point d'affixe z_n.

1° Montrez par récurrence que, pour $n \geqslant 1$, on a : $z_n = \dfrac{b(1-a^n)}{1-a}$.

2° Étant donné un entier naturel p supérieur ou égal à 2, on pose dans cette question : $a = \cos \dfrac{2\pi}{p} + \text{i} \sin \dfrac{2\pi}{p}$.

Démontrez qu'alors la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique de période p.

3° Étant donné un réel α non multiple de π, on pose dans cette question : $a = \cos 2\alpha + \text{i} \sin 2\alpha$ et $b = 2 \sin \alpha$.

Quelle est alors la nature de l'application d'écriture complexe : $z' = az + b$?

Déduisez-en que l'ensemble des points M_n est inclus dans un cercle dont vous déterminerez le centre et le rayon.

Faites une figure pour $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ et placez les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 dans ce cas particulier.

58 ■■■■ Dans le plan orienté, on suppose donnés deux points distincts O et A.

On note r la rotation de centre O et d'angle ayant pour mesure α, où $0 < \alpha < \pi$. Soit A' l'image de A par r, I l'isobarycentre des trois points O, A et A', (C) un cercle de centre A et de rayon R $(R > 0)$.

1° a) Déterminez l'image (C') de (C) par r.

b) Placez les points O, A, A' et les cercles (C) et (C') sur une figure.

(Vous prendrez, pour cette figure : $OA = 8$ cm, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ et $R = 2$ cm.)

2° A tout point M de (C), on associe son image M' par r et l'isobarycentre G des trois points O, M et M'.

a) Placez M, M' et G sur la figure.

b) On suppose M distinct de O. Soit σ la similitude directe de centre O telle que $\sigma(A) = M$. En utilisant la forme réduite de σ, démontrez que $\sigma \circ r = r \circ \sigma$; déduisez-en que $\sigma(A') = M'$, puis que $\sigma(I) = G$.

3° Soit s la similitude directe de centre O telle que $s(A) = I$.

a) En utilisant les formes réduites de s et σ, démontrez que $s \circ \sigma = \sigma \circ s$; déduisez-en que $s(M) = G$.

b) Déterminez l'ensemble (Γ) décrit par G lorsque M parcourt (C). Placez (Γ) sur la figure.

4° Prouvez que les droites (AM) et $(A'M')$ sont sécantes en un point N et que N appartient au cercle circonscrit au triangle OAA' et à celui du triangle OMM'.

(Bac E, 1990)

59 ■■■■ Une similitude directe S_O, de centre O, transforme un couple donné (A, B) de points distincts, autres que O, en un couple (A', B').

La similitude directe S_A de centre A qui transforme B en B' transforme O en P. La similitude directe S_B de centre B qui transforme A en A' transforme O en Q.

Démontrez que O est le milieu de $[PQ]$.
(Vous pourrez procéder à une étude analytique.)

60 ■■■■ On définit, dans le plan orienté, quatre points A, B, C, D tels que $AC = BD$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \dfrac{\pi}{2}$.

On appelle M le milieu de $[AC]$, N le milieu de $[BD]$ et O le point d'intersection des droites (AC) et (BD).

1° a) Justifiez l'existence de rotations transformant le bipoint (A, C) respectivement en (B, D) et (D, B).

On note I et J leurs centres respectifs. Construisez ces points I et J.

b) Démontrez que $IMJN$ est un carré.

2° On note P et R les symétriques de I par rapport aux droites (AB) et (CD) et Q et S les symétriques de J par rapport aux droites (BC) et (AD).

Quelle est la nature des quadrilatères $IAPB$ et $ICRD$? Démontrez que les points P, J, R sont alignés et que J est le milieu de $[PR]$. Démontrez une propriété analogue pour les points S, I, Q.

3° Déterminez une mesure de l'angle $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{SQ})$.

4° On note H et K les projetés orthogonaux de I sur les droites (AC) et (BD).

Quelle est la nature du quadrilatère $OHIK$? Déduisez-en que les points O, P, J, R d'une part et S, O, I, Q d'autre part sont alignés. Quelle est l'intersection des droites (PR) et (QS)?

(Vous pouvez faire soit une étude géométrique, soit une étude analytique du problème.)

9 Transformations de l'espace

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Lecture d'une figure de l'espace 226
AP2 Rotations du plan. Rotations de l'espace 227
AP3 Homothéties de l'espace 229

COURS

1. Translations. Homothéties. Symétries centrales 230
2. Réflexions. Rotations 233
3. Propriétés des réflexions et des rotations 238

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Tétraèdre régulier 239
TP2 Octaèdre 239
TP3 Problèmes de construction et transformations de l'espace 240
TP4 Effet des réflexions et des rotations sur les barycentres et les distances 241

FICHE MÉTHODE

FICHE MÉTHODE
Comment caractériser une rotation 242
Comment utiliser les transformations de l'espace 242

EXERCICES COMMENTÉS 243
LE JOUR DU BAC 244
EXERCICES ET PROBLÈMES 245

objectifs

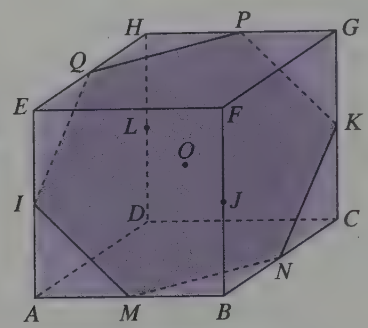
- Étendre à l'espace les transformations rencontrées dans le plan : translations, homothéties, symétries centrales, puis réflexions et rotations.
- Savoir caractériser ces transformations.
- Savoir utiliser ces transformations pour résoudre des problèmes de lieux géométriques, de constructions...

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Lecture d'une figure de l'espace

Nous aborderons dans cette AP1 deux modes d'extension à l'espace des transformations étudiées dans le plan.

La figure ci-dessous représente un cube $ABCDEFGH$ de centre O.
Les points I, J, K, L, M, N, P, Q sont des milieux d'arêtes.



1 ■ *Translations*

1° Comparez les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{DH}$.

2° En prolongeant à l'espace la définition d'une translation donnée dans le plan, énoncez les images des points A, B, C, D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.

3° Construisez les images A', B', C', D' des points A, B, C, D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$.

4° Quel est le vecteur de la translation qui transforme E, F, G, H en A', B', C', D' ?

2 ■ *Symétrie centrale*

1° Déterminez des couples de points (X, X') de la figure ci-dessus dont le milieu soit O.

2° En prolongeant à l'espace la définition d'une symétrie centrale donnée dans le plan, énoncez les images des points A, B, C, D, I, J, K, M, Q, O, par la symétrie de centre O.

3° *a*) Construisez les images des points A, B, F, E, G par la symétrie de centre J.

b) E' et G' étant les images de E et G, comparez les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{E'G'}$.

3 ■ *Réflexions*

1° Déterminez les plans médiateurs des segments :

a) $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$; *b*) $[EF]$, $[HG]$.

2° *a*) Comparez les longueurs des segments $[FM]$ et $[DM]$.

b) Déterminez le plan médiateur de $[DF]$.

La définition d'une réflexion du plan est adaptée à l'espace en remplaçant la notion de *droite* médiatrice de $[MM']$, si M' est l'image de M et $M \neq M'$, par la notion de *plan* médiateur. Ainsi, dans l'exemple présenté, E est l'image de A par la réflexion de plan (IJK).

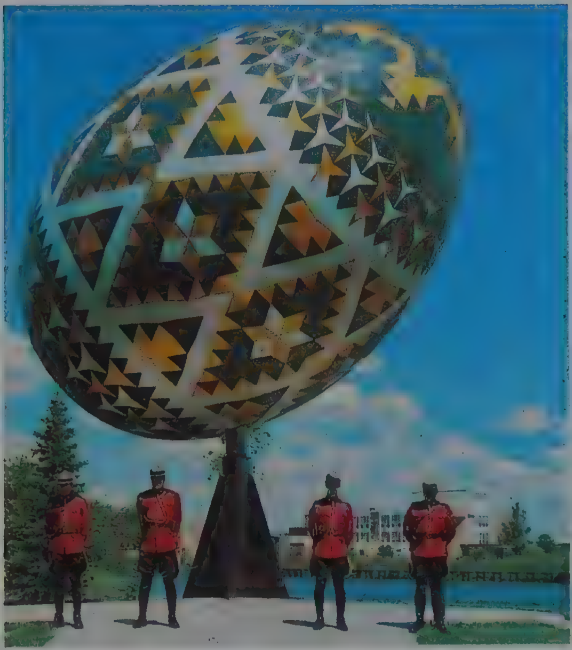
3° Quelles sont les images des points F, B, A, L, par la réflexion de plan (EGC) ?

4° *a*) Le cube est-il invariant par la réflexion S de plan (MNK) ? (On pourra montrer qu'aucun sommet du cube n'est l'image de A par la réflexion S.)

b) Construisez l'image de G par cette réflexion S.

AP2 Rotations du plan. Rotations de l'espace

De nombreux objets, naturels ou créations humaines, présentent des régularités particulières : pour l'Œuf de Pâques de la photo ci-dessous, on peut imaginer un axe autour duquel l'œuf peut pivoter tout en restant en coïncidence avec les positions successives qu'il occupe.
Précisons cette notion sur quelques solides classiques.



L'Œuf de Pâques de Vegreville, Alberta.
Ron Resch, informaticien et artiste, a créé cet œuf polyédrique monumental. L'Œuf a 10,5 m de haut et 5,5 m de large ; il pèse près de 2 300 kg et il a 3 512 facettes visibles. Il est constitué de 524 pièces étoilées de 1,6 mm d'épaisseur en aluminium anodisé et de 2 208 pièces de 3,2 mm d'épaisseur en aluminium.

1 ■ *Tétraèdre extrait d'un cube*

Le tétraèdre $FBEG$ est extrait du cube de l'AP1.

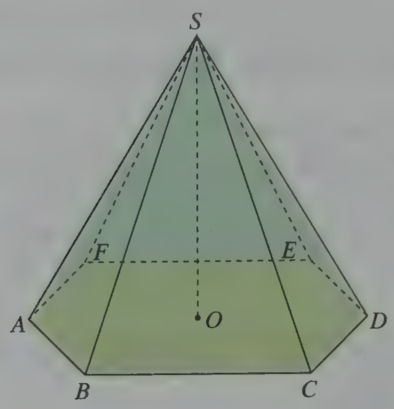
1° On appelle ω le centre de gravité du triangle BEG. Justifiez que $(F\omega)$ est perpendiculaire au plan (BEG).

2° Énoncez des rotations du plan (BEG) conservant le triangle BEG.

3° Réalisez une maquette du cube. Faites pivoter le cube autour de la diagonale (FD) de façon à amener le point B dans la position occupée par G. Quelles sont les positions occupées par les autres sommets du cube ? Le cube est dit invariant par la rotation autour de (FD) qui amène B en G.

2 ■ *Pyramide à base hexagonale*

La figure ci-dessous représente une pyramide à base hexagonale régulière. Le point O est le centre de l'hexagone, (SO) est perpendiculaire au plan de l'hexagone.

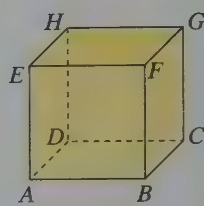


1° Comparez les longueurs des arêtes SA, SB, ..., SF.

2° Énoncez des réflexions du plan (ABC) conservant l'hexagone.

3° On appelle (P) et (P') les plans (SAD) et (SBE), f et f' les réflexions de plans (P) et (P') (voir AP1). Déterminez les images des sommets de la pyramide par f et par $f' \circ f$. Quel nom peut-on donner à l'application $f' \circ f$?

3 ■ *Cube*



La figure ci-contre représente un cube (C).

1° Dessinez, en perspective cavalière, le cube (C) et le (ou les) cube(s) obtenu(s) en faisant tourner (C) de $\frac{3\pi}{4}$ autour de (CG).

2° Dessinez les sections des cubes de la question précédente avec le plan (ABC).

3° Quels sont les paramètres définissant une rotation de l'espace ?

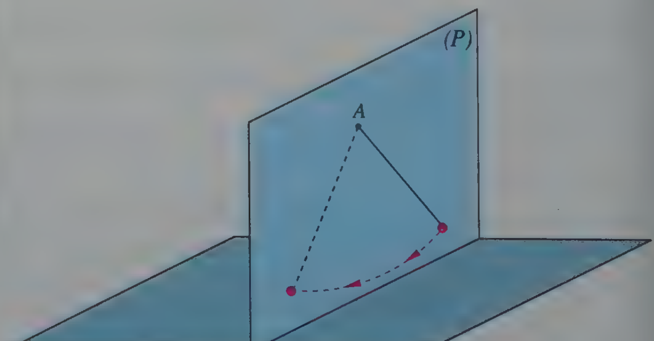
4 ■ *Oscillations d'un pendule*

Le pendule de la figure ci-dessous peut osciller de telle sorte que :
— le plan d'oscillation soit fixe,
— le plan d'oscillation ne soit pas fixe.

Dans le premier cas, le mouvement du pendule est un mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) perpendiculaire en A à (P).

Dans le second cas, seul le point A est fixe, le mouvement du pendule n'est pas un mouvement de rotation.

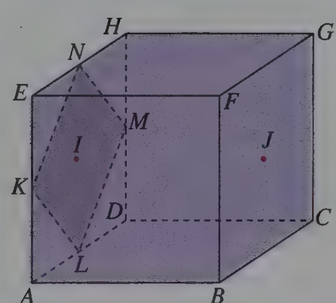
Dans l'expérience du pendule, J. B. Foucault (1819-1868) mit en évidence la lente rotation du plan d'oscillation du pendule.



AP3 Homothéties de l'espace

La définition d'une homothétie de l'espace est obtenue en étendant à l'espace la définition donnée dans un plan. La photo ci-dessous permet d'illustrer la notion d'homothétie.

Adèle Le Breton : *Perspective dans les miroirs.*



Soit $ABCDEFGH$ un cube, les points K, L, M, N sont des milieux d'arêtes, I et J sont les centres des faces $ADHE$ et $BCGF$. Notons S_1 et S_2 les points tels que $\overrightarrow{IS_1} = 3\,\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{HS_2} = 3\,\overrightarrow{HG}$.

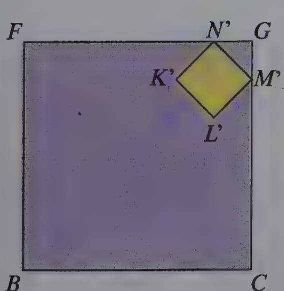
1° Construisez l'intersection $K'L'M'N'$ de la pyramide de sommet S_1 et de base $KLMN$ avec le plan (BCG).

2° Quelle est la nature du quadrilatère $K'L'M'N'$?

3° Calculez le rapport $\dfrac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}}$ de l'aire $\mathcal{A}'$ du polygone $K'L'M'N'$ et de l'aire $\mathcal{A}$ du carré $KLMN$.

4° Justifiez qu'il existe un nombre réel λ tel que l'on ait, simultanément :
$\overrightarrow{S_1K'} = \lambda\overrightarrow{S_1K}$, $\overrightarrow{S_1L'} = \lambda\overrightarrow{S_1L}$, $\overrightarrow{S_1M'} = \lambda\overrightarrow{S_1M}$, $\overrightarrow{S_1N'} = \lambda\overrightarrow{S_1N}$.

5° Reprenez une étude analogue à celle développée dans les questions **1°** à **4°** avec le point S_2.



6° On appelle k un nombre réel et S_3 le point tel que $\overrightarrow{HS_3} = k\,\overrightarrow{HG}$. Déterminez le nombre réel k pour lequel la section de la pyramide de sommet S_3 et de base $KLMN$ par le plan $(BCGF)$ est le quadrilatère $K'L'M'N'$ ci-contre avec $\overrightarrow{GN'} = \dfrac{1}{6}\,\overrightarrow{GF}$.

COURS

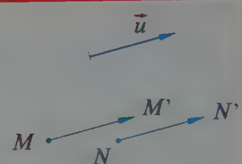
1. TRANSLATIONS. HOMOTHÉTIES. SYMÉTRIES CENTRALES

1. Définitions

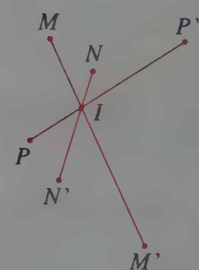
Les translations, homothéties, symétries centrales de l'espace se définissent comme dans le plan.

Définitions 1

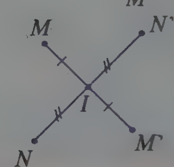
- ***Translation.*** **Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application, de l'espace vers lui-même, qui, à tout point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.**



- ***Homothétie.*** **Soit I un point de l'espace et k un nombre réel non nul. On appelle homothétie de centre I et de rapport k l'application, de l'espace vers lui-même, qui, à tout point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.**

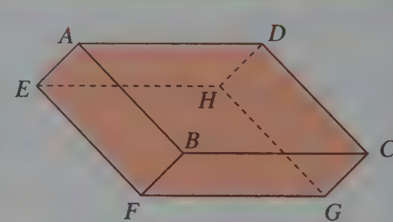


- ***Symétrie centrale.*** **Soit I un point de l'espace. On appelle symétrie de centre I l'application de l'espace vers lui-même, qui, à tout point M, associe le point M' tel que I soit le milieu du segment $[MM']$.**



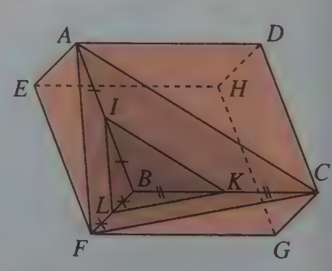
EXEMPLES

Dans le parallélépipède $ABCDEFGH$ de la figure :



a) La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme A en B, et aussi E en F, D en C, H en G, le centre du parallélogramme $ADHE$ en le centre du parallélogramme $BCGF$.

b) En notant O le centre du parallélépipède, isobarycentre des huit sommets, la symétrie de centre O transforme chaque sommet du parallélépipède en un autre sommet : A en G, B en H, C en E, etc.



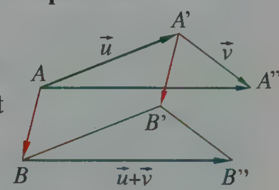
c) Les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[BF]$ étant notés I, K et L, l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ transforme A en I, C en K, F en L, H en O.

COURS

L'analogie des définitions précédentes avec celles données dans le plan conduit tout naturellement aux propriétés suivantes.

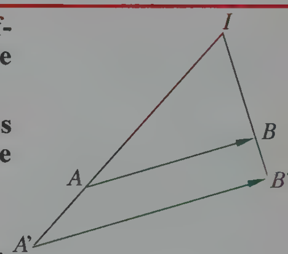
Propriétés 1
Translation

- **Une translation de vecteur non nul n'a aucun point invariant.**
- **Quels que soient les points A et B, d'images respectives A' et B' par une translation : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.**
- **Une translation de l'espace est une bijection.**
- **La bijection réciproque d'une translation est la translation de vecteur opposé.**
- **La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.**



Propriétés 2
Homothétie

- **Le centre d'une homothétie de rapport différent de 1 est le seul point invariant par cette homothétie.**
- **Quels que soient les points A et B, d'images respectives A' et B' par une homothétie de rapport k :**
$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.
- **Une homothétie de l'espace est une bijection.**
- **La bijection réciproque d'une homothétie de centre I et de rapport k est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{k}$.**
- **La composée de deux homothéties de même centre I et de rapports k et k' est l'homothétie de centre I et de rapport kk'.**



□ *Remarque.* Une symétrie centrale est une homothétie de rapport -1. Les propriétés 2 sont donc encore valables pour les symétries centrales ; certaines de ces propriétés s'expriment ainsi :
— Quels que soient les points A et B, d'images respectives A' et B' par une symétrie centrale, les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont opposés.
— Une symétrie centrale est sa propre réciproque : on dit qu'elle est involutive.

2. Effets sur les configurations usuelles de l'espace

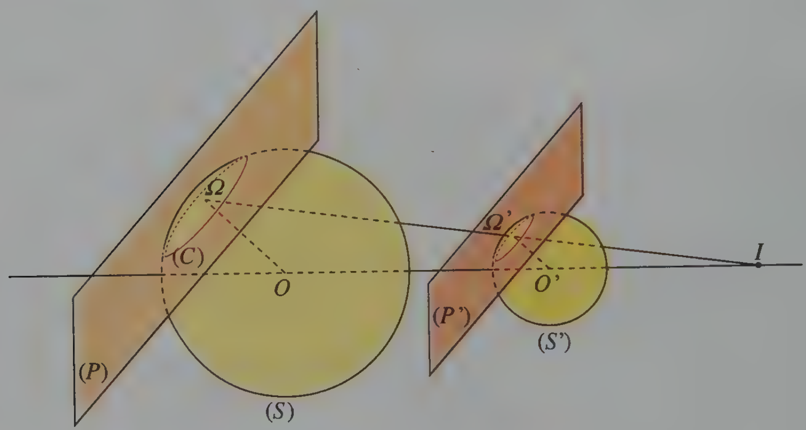
Les propriétés suivantes résultent des propriétés 1 et 2 précédentes.

Propriétés 3

- **Une translation, une homothétie, une symétrie centrale transforment :**
— une droite en une droite parallèle ;
— un plan en un plan parallèle ;
— une sphère en une sphère.
- **Ces transformations conservent le parallélisme : de droites, de droites et plans, de plans.**

EXEMPLE

Un cercle de l'espace s'obtient comme intersection d'une sphère et d'un plan.
Soit (S) une sphère, de centre O et de rayon R, et (P) un plan qui coupe (S) suivant un cercle (C) de centre Ω et de rayon r, h une homothétie, de centre I et de rapport k.



Par l'homothétie h :
— la sphère (S) est transformée en une sphère (S'), de rayon $|k| \times R$ et de centre l'image O' de O par h ;
— le plan (P) est transformé en un plan (P') parallèle à (P) ;
— le cercle (C) est transformé en l'intersection de la sphère (S') et du plan (P'), donc en un cercle (C') ;
— le point Ω est transformé en un point Ω' qui appartient à (P') ;
— tout point M de (C) est transformé en un point M' de (C') et :

$\Omega' M' = |k| \times \Omega M$, donc : $\Omega' M' = |k| \times r$.

Ainsi, l'image par h du cercle (C), de centre Ω et de rayon r, est le cercle (C') du plan (P') de centre Ω' et de rayon $|k| \times r$.

3. Effets sur barycentres, distances, ...

Les propriétés 1 et 2 permettent, comme dans le plan, de démontrer que :

Propriétés 4

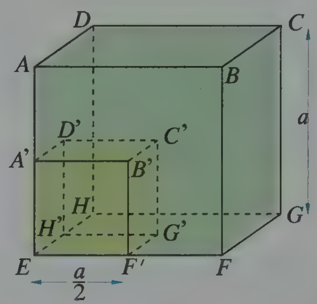
- ***Barycentre :*** **une translation, une homothétie, une symétrie centrale conservent le barycentre.**
- ***Distances :*** **translations et symétries centrales conservent les distances.**
  Une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$.
- ***Aires et volumes :*** **translations et symétries centrales conservent les aires planes et les volumes.**
  Une homothétie de rapport k multiplie les aires planes par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

EXEMPLE

L'homothétie de centre E et de rapport $\frac{1}{2}$ transforme le cube $ABCDEFGH$, de côté a, en le cube $A'B'C'D'EF'G'H'$, de côté $\frac{a}{2}$.

Le volume du cube $ABCDEFGH$ est a^3 ; celui du cube $A'B'C'D'EF'G'H'$ est $\left(\frac{1}{2}\right)^3 a^3$.

L'aire latérale du cube $ABCDEFGH$ est $6a^2$; celle du cube $A'B'C'D'EF'G'H'$ est $6 \times \left(\frac{a}{2}\right)^2$, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 6a^2$.



2. RÉFLEXIONS. ROTATIONS

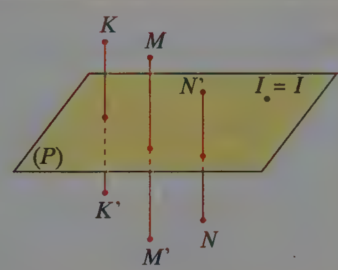
1. Définitions

■ *Réflexions*

Définition 2

Soit (P) un plan de l'espace.
On appelle réflexion de plan (P) l'application qui, à tout point M de l'espace, associe le point M' tel que :

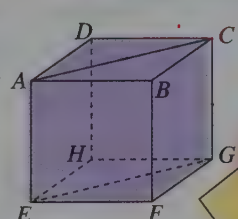
- **si M n'appartient pas à (P), alors (P) est le plan médiateur de $[MM']$;**
- **si M appartient à (P), alors M' est confondu avec M.**

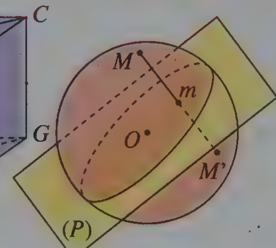


□ *Remarque 1.* Toute réflexion de l'espace est une bijection et est sa propre réciproque (une réflexion de l'espace est involutive).

EXEMPLES

1° Dans le cube $ABCDEFGH$, la réflexion de plan $(ACGE)$ transforme B en D, F en H, D en B, H en F, et laisse invariants les points A, C, G, E, ainsi que le centre O du cube.

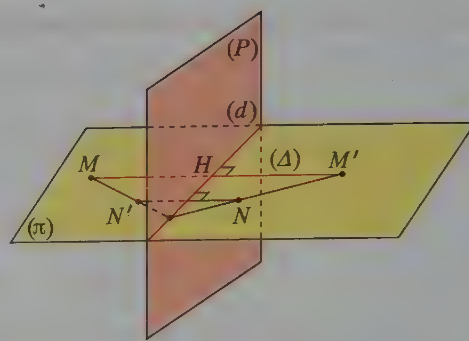




2° Étant donnée une sphère (S) de centre O, tout point M de (S) est transformé, par une réflexion dont le plan (P) passe par O, en un point M' de (S).

□ *Remarque 2.* Soit (P) un plan, f la réflexion de plan (P), (π) un plan perpendiculaire à (P), (d) la droite d'intersection des deux plans (P) et (π).

Pour tout point M de (π), la droite (Δ) passant par M et perpendiculaire à (P) est dans (π) ; c'est la droite de (π) passant par M et perpendiculaire à (d).



L'image M' de M par f est donc dans (π). De plus tout point N' de (π) est l'image par f de $f(N')$ (car f est involutive). Le plan (π) est donc globalement invariant par f.

Par ailleurs, l'intersection H de (Δ) et (d) est le milieu de $[MM']$.

Donc **dans le plan (π)** ; M' est l'image de M par la réflexion d'axe (d) ; cette réflexion du plan (π) est dite **réflexion induite par f dans (π).**

■ *Rotations*

Une orientation de l'espace étant choisie, le fait d'orienter une droite de l'espace induit une orientation de tout plan perpendiculaire à cette droite (chap. 6, p. 149).

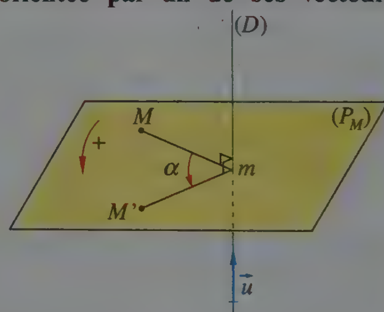
Définition 3

Soit (D) une droite de l'espace, orientée par un de ses vecteurs directeurs, $\vec{u}$, et α un nombre réel.

On appelle rotation de l'espace d'axe $((D), \vec{u})$ et d'angle α l'application qui, à tout point M de l'espace, associe le point M' défini de la façon suivante :

— si (P_M) est le plan passant par M et perpendiculaire à (D) et m le point commun à (P_M) et (D),

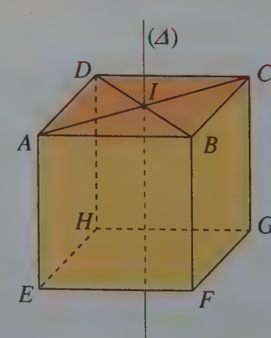
— alors, dans le plan (P_M) orienté par $\vec{u}$, M' est l'image de M par la rotation de centre m et d'angle α.



EXEMPLE

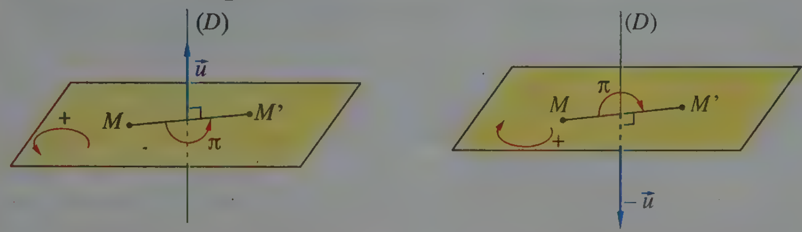
Prenons le cube $ABCDEFGH$ de la figure.

- B est l'image de D par la rotation d'axe $((AE), \overrightarrow{AE})$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
- B est l'image de D par la rotation d'axe $((AE), \overrightarrow{EA})$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
- (Δ) étant la droite parallèle à (AE) qui passe par le centre I du carré $ABCD$, B est l'image de D par la rotation d'axe (Δ) orienté indifféremment et d'angle π.



Propriété 5

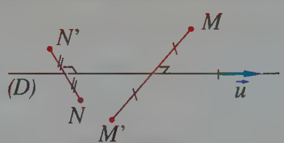
**Soit (D) une droite de l'espace, orientée par un vecteur $\vec{u}$.
La rotation d'axe $\left((D), \vec{u}\right)$ et d'angle π est égale à la rotation d'axe $\left((D), -\vec{u}\right)$ et d'angle π.**



- **Demi-tour**

Définition 4

**Soit (D) une droite de l'espace.
On appelle demi-tour d'axe (D) la rotation d'axe $\left((D), \vec{u}\right)$ et d'angle π, où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D).**



□ *Remarque.* M étant un point de l'espace, d'image M' par le demi-tour d'axe (D) :

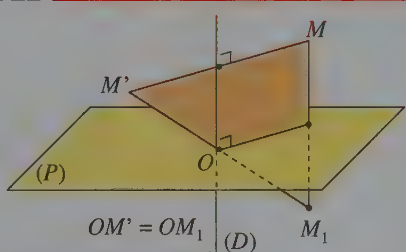
— ou bien M est sur (D) et alors M' est M ;

— ou bien M n'est pas sur (D) et alors (D) est une médiatrice de $[MM']$.

Un demi-tour d'axe (D) est aussi appelé **symétrie orthogonale par rapport à la droite (D).**

EXEMPLE

Soit (P) un plan, O un point de (P), (D) la perpendiculaire en O à (P).
Soit M un point de l'espace, M_1 son image par la réflexion de plan (P), M' l'image de M_1 par la symétrie de centre O.
Alors M' est l'image de M par le demi-tour d'axe (D) (exercice 36).

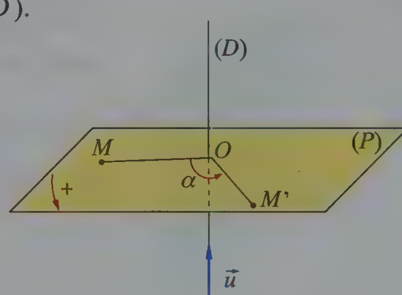


- **Rotation induite**

Soit f une rotation, d'axe $\left((D), \vec{u}\right)$ et d'angle α, (P) un plan perpendiculaire à (D) et O le point commun à (P) et (D).

Pour tout point M du plan (P), le plan passant par M et perpendiculaire à (D) est (P).

D'après la définition 3, l'image M' d'un point M de (P) par f est dans (P) : c'est l'image de M par la rotation r de (P), de centre O et d'angle α, le plan (P) étant orienté par $\vec{u}$.



La rotation r du plan (P) orienté par $\vec{u}$ est appelée **rotation induite par f dans (P).**

EXEMPLE

Dans l'exemple illustré par le cube de la page 234 :

— la rotation d'axe $((AE), \overrightarrow{AE})$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ induit dans le plan $(ABCD)$ orienté par $\overrightarrow{AE}$ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

— le demi-tour d'axe (Δ) induit dans le plan $(ABCD)$ la symétrie de centre I.

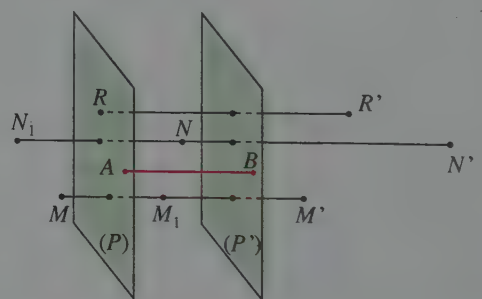
2. Composée de deux réflexions

Rappelons que, dans le plan, toute translation est, d'une infinité de façons, composée de deux réflexions d'axes parallèles et que toute rotation est, d'une infinité de façons, composée de deux réflexions d'axes sécants.
Nous admettrons que ces propriétés s'étendent aux réflexions, translations et rotations de l'espace.

■ *Réflexions de plans parallèles*

Propriété 6 (admise)

La composée $s_{(P')} \circ s_{(P)}$ de deux réflexions de plans parallèles (P) et (P') est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$ où A est un point de (P) et B son projeté orthogonal sur (P').

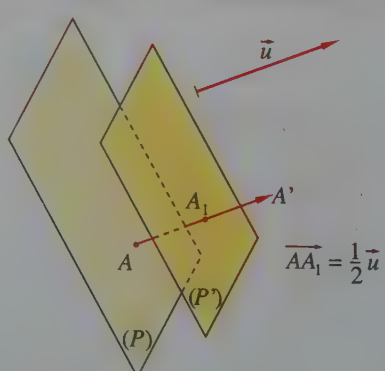


Propriété 7 (admise)

Toute translation est la composée, d'une infinité de façons, de deux réflexions de plans parallèles.

- On choisit (P), de vecteur normal $\vec{u}$; alors : $(P') = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(P)$.

- On choisit (P'), de vecteur normal $\vec{u}$; alors : $(P) = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(P')$.



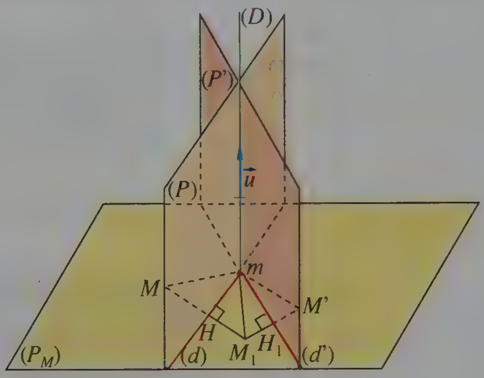
COURS

Réflexions de plans sécants

Propriété 8

La composée de deux réflexions de plans sécants suivant une droite (D) est une rotation d'axe (D).

Notons $S_{(P)}$ (resp. $S_{(P')}$) la réflexion de plan (P) (resp. (P')), et (P_M) le plan passant par M et perpendiculaire à (D). Soit (d) (resp. (d')) l'intersection de (P) (resp. (P')) et (P_M) ; notons $s_{(d)}$ (resp. $s_{(d')}$) la réflexion d'axe (d) (resp. (d')).



$(\overrightarrow{mH}, \overrightarrow{mH_1}) = \alpha \quad (\pi)$

$(\overrightarrow{mM}, \overrightarrow{mM'}) = 2\alpha \quad (2\pi)$

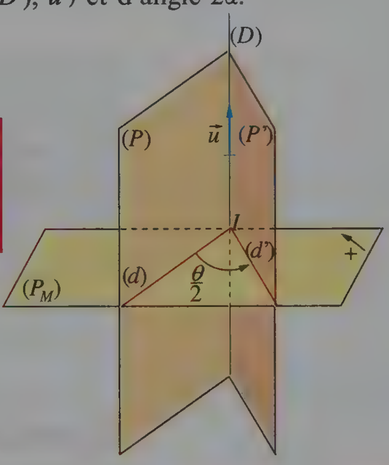
Dans (P_M), le centre de la rotation $s_{(d')} \circ s_{(d)}$ est m, intersection de (D) et (P_M).

Si $\vec{v}$ et $\vec{v}\,'$ sont des vecteurs directeurs respectivement de (d) et (d'), α une mesure de $(\vec{v}, \vec{v}\,')$ dans (P_M) orienté par un vecteur $\vec{u}$ directeur de (D), alors une mesure de l'angle de la rotation $s_{(d')} \circ s_{(d)}$ est 2α (voir chap. 7 p. 169).

Ainsi $S_{(P')} \circ S_{(P)}$ est la rotation d'axe $((D), \vec{u})$ et d'angle 2α.

Propriété 9

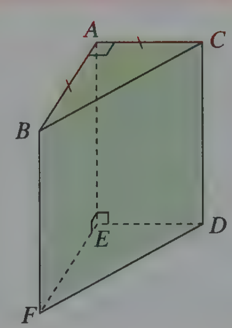
Toute rotation de l'espace, d'axe (D), est la composée, d'une infinité de façons, de deux réflexions dont les plans contiennent (D).



On peut choisir (P) ou (P').

EXEMPLE

ABCDEF est un prisme droit ; sa base *ABC* est un triangle isocèle et rectangle en *A*.
Soit S, S', S'' les réflexions de plans respectifs $(ABFE)$, $(ACDE)$ et $(BCDF)$.



- $S' \circ S$ est le demi-tour d'axe (AE).
- $S'' \circ S$ est un quart de tour d'axe (BF).

COURS

3. PROPRIÉTÉS DES RÉFLEXIONS ET DES ROTATIONS

Les réflexions et les rotations vérifient les propriétés suivantes dont certaines vous sont proposées dans le TP4.

Propriété 10

Les réflexions et les rotations de l'espace sont des transformations qui conservent les barycentres, les distances, les aires planes et les volumes.

L'énoncé suivant résulte de la conservation des barycentres et des distances.

Propriété 11

Les réflexions et les rotations de l'espace transforment :
- **une droite en une droite ;**
- **un plan en un plan ;**
- **une sphère en une sphère de même rayon.**

Conservant les barycentres, réflexions et rotations de l'espace conservent les milieux, donc les parallélogrammes, donc le parallélisme.

Propriété 12

Les réflexions et les rotations transforment :
- **deux droites parallèles en deux droites parallèles ;**
- **une droite et un plan parallèles en une droite et un plan parallèles ;**
- **deux plans parallèles en deux plans parallèles.**

☐ *Remarque.* En utilisant le théorème de Pythagore et sa réciproque, on démontre que, conservant les distances, les réflexions et les rotations conservent l'orthogonalité.

EXEMPLE

Soit (C) un cercle de l'espace, Ω son centre, r son rayon ; notons (π) le plan du cercle (C).

Soit f une réflexion de l'espace, de plan (P).
Par f, le plan (π) est transformé en un plan (π'), le point Ω en un point Ω' de (π'), tout point M de (C) en un point M' du plan (π') tel que : $\Omega' M' = \Omega M = r$.

Donc tout point du cercle (C) est transformé par f en un point du cercle (C'), du plan (π'), de centre Ω' et de rayon r.

Réciproquement, f étant sa propre réciproque, tout point du cercle (C') est l'image par f d'un point du cercle (C).

Ainsi : un cercle de l'espace, de centre Ω, est transformé par une réflexion f en un cercle de centre l'image de Ω par f et de même rayon.

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Tétraèdre régulier

Toute transformation de l'espace conservant un tétraèdre ABCD conserve {A, B, C, D}. A l'aide des permutations des quatre lettres A, B, C, D nous allons procéder à une recherche de symétries, rotations ou réflexions conservant le tétraèdre régulier.

1° *a*) Quel est le nombre des permutations de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$?

b) Énoncez ces permutations à l'aide d'un tableau.

A	A				
B	B				
C	D				
D	C				

2° L'application identique transforme (A, B, C, D) en (A, B, C, D).

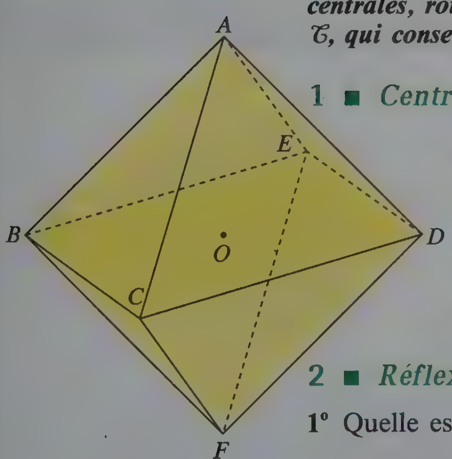
a) Par quelle transformation (symétrie centrale, rotation, réflexion) les points A, B, C, D ont-ils respectivement pour images A, B, D, C ?

b) Par quelle transformation les points A, B, C, D ont-ils respectivement pour images A, C, D, B ?

3° Chaque permutation des points A, B, C, D permet-elle de définir une transformation (symétrie, rotation, réflexion) conservant le tétraèdre ?
Si oui, indiquez, dans chaque cas, la ou les transformations concernées.

TP2 Octaèdre

Déterminons, parmi les transformations suivantes : réflexions, symétries centrales, rotations de l'espace, des transformations, dont l'ensemble est noté $\mathcal{T}$, qui conservent un octaèdre régulier ABCDEF.



1 ■ *Centre de l'octaèdre*

1° Démontrez que le centre O de l'octaèdre $ABCDEF$ est invariant par toute transformation de $\mathcal{T}$.

2° Combien de symétries centrales conservent l'octaèdre ? Précisez laquelle ou lesquelles.

2 ■ *Réflexions conservant l'octaèdre*

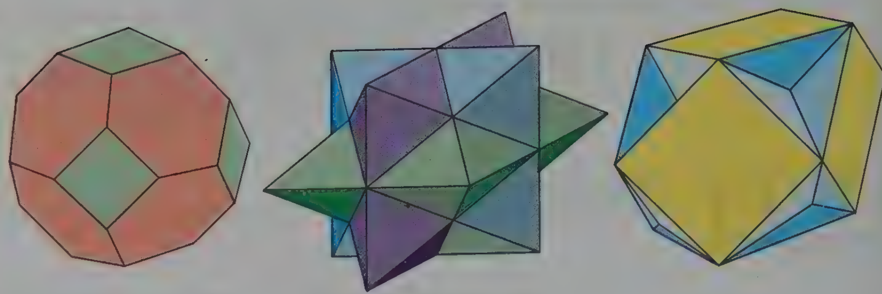
1° Quelle est l'image d'un carré par une réflexion de l'espace ?

2° Quelle est la nature des quadrilatères $ABFD$, $BCDE$, $ACFE$?

3° Les réflexions par rapport aux plans (ABD), (BCD), (ACE) sont-elles dans $\mathcal{T}$?

4° Peut-on trouver des réflexions de $\mathcal{T}$ qui transforment $ABFD$ en $BCDE$?
Donnez d'autres réflexions de $\mathcal{T}$.

Objets admettant des axes de rotation.
Citez-en quelques-uns.



3 ■ *Axes de rotations*

1° *a*) Quelle est l'image d'un triangle équilatéral par une rotation de l'espace ?

b) Démontrez que toute rotation conservant l'octaèdre a pour axe une droite passant par O.
Existe-t-il dans $\mathcal{C}$ une rotation autre que l'identité qui conserve globalement la face ABC ?

c) Déterminez les rotations de $\mathcal{C}$ conservant globalement une face de l'octaèdre.

2° *a*) Quelle est l'image d'un carré par une rotation de l'espace ?

b) Quelles sont les rotations de $\mathcal{C}$ qui conservent globalement le carré $BCDE$?

c) Quelles sont les rotations de $\mathcal{C}$ conservant un des trois carrés de la question **2°** du paragraphe **2 ■** ?

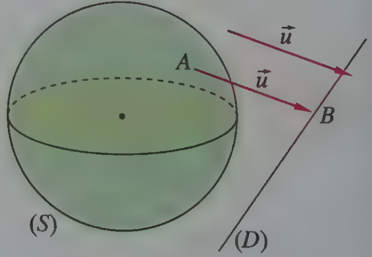
TP3 Problèmes de construction et transformations de l'espace

Comme dans le plan, les transformations permettent de résoudre des problèmes de construction. Étudions deux exemples.

1 ■ *Premier exemple*

Une sphère (S), une droite (D) et un vecteur $\vec{u}$, non nul et non directeur de (D), étant donnés, construisons un point A de (S) et un point B de (D) tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Le problème est analogue au problème plan obtenu en remplaçant la sphère (S) par un cercle (C), les autres éléments n'étant pas modifiés.



1° Analyse du problème
Démontrez que A est nécessairement sur une droite (D') que l'on définira à l'aide des éléments du texte.

2° Construction

a) Construisez l'image (D') de (D) par la translation de vecteur $-\vec{u}$.

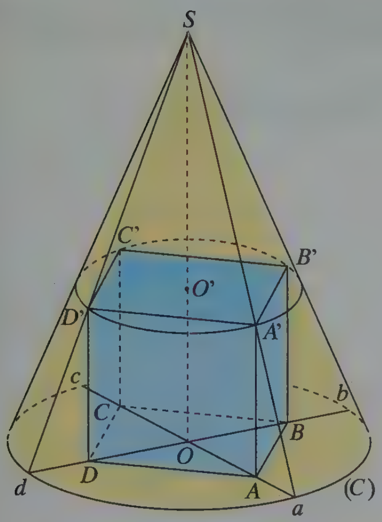
b) Supposons que (S) et (D') ont au moins un point commun A. Démontrez que le point A et son image par la translation de vecteur $\vec{u}$ sont des points solutions du problème.

3° Discussion

Combien le problème admet-il de couples (A, B) solutions ?

2 ■ *Cube inscrit dans un cône de révolution*

Construisons un cube $ABCDA'B'C'D'$ inscrit dans un cône de révolution de sommet S et de base un cercle (C).



1° Analyse
Le cube de la figure ci-contre est supposé construit.

a) Justifiez que le centre de la face $ABCD$ est le centre O du cercle (C). (On pourra utiliser la translation de vecteur $\overrightarrow{A'A}$.)

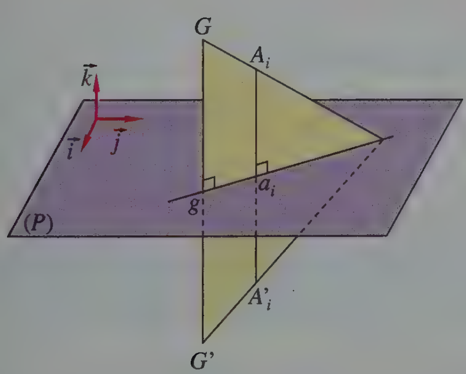
b) On appelle a le point commun à la demi-droite $[OA)$ et au cercle (C) et $abcd$ le carré dont a est un sommet, carré inscrit dans (C). On construit le cube $abcda'b'c'd'$, a' et S étant du même côté du plan de (C).
Démontrez que les points O, A' et a' sont alignés.

2° Construction
Construisez un cube $abcda'b'c'd'$ dont une face $abcd$ est inscrite dans le cercle (C), S et a' étant du même côté du plan de (C).
Construisez l'intersection du cône et de la droite (Oa').
Terminez la construction.

TP4 Effet des réflexions et des rotations sur les barycentres et les distances

L'objectif de ce TP est de démontrer une partie de la propriété 10 (p. 238).

Soit f une réflexion de plan (P) et r une rotation.

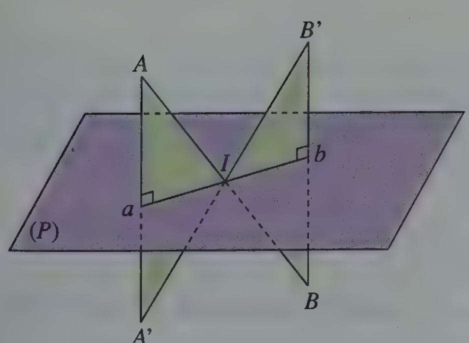


1 ■ *Réflexions et barycentres*

Soit (A_1, α_1), ..., (A_n, α_n) n points pondérés, G leur barycentre, A'_1, ..., A'_n et G' les images de A_1, ..., A_n et G par f.

1° Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale de l'espace telle que $\vec{k}$ soit normal à (P).
Démontrez que $(\overrightarrow{G'A'_1} + \overrightarrow{GA_1})$ est un vecteur de (P) et que $(\overrightarrow{G'A'_1} - \overrightarrow{GA_1})$ est orthogonal à (P).

2° Déduisez-en que $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i(\overrightarrow{G'A'_i}) = \vec{0}$ et concluez.



2 ■ *Réflexions et distances*

Soit A et B deux points de l'espace, A' et B' leurs images par f.

1° Démontrez que A, B, A' et B' sont dans un même plan (π) perpendiculaire à (P).

2° Utilisez alors la réflexion induite par f dans (π) pour démontrer que $A'B' = AB$.

3 ■ *Rotations, barycentres et distances*

Utilisez la propriété 9 du cours (p. 237) pour démontrer que r conserve barycentres et distances.

FICHE MÉTHODE

Transformations de l'espace

1 *Comment caractériser une rotation...*

... à l'aide de la définition.
... comme composée de deux réflexions de plans sécants.
... à l'aide de son axe (D), d'un point A, non élément de (D), et de l'image de A.

2 *Comment utiliser les transformations de l'espace*[1]*...*

... pour résoudre un problème de lieu géométrique :
on définit le point dont on cherche le lieu comme image, par une transformation connue, d'un point décrivant une courbe connue.
... pour résoudre un problème de construction :
on définit le point à construire comme image, par une transformation connue, d'un point localisable dans des ensembles connus.
... pour démontrer une propriété d'une figure :
on définit les éléments (points, droites...) entrant dans la propriété comme images, par une transformation conservant cette propriété, d'éléments de la figure ayant cette propriété.

(1) Cette partie reprend et développe la fiche méthode concernant les isométries du plan (chap. 7, p. 188).

EXERCICES COMMENTÉS

Exercice 1

Énoncé

Soit un tétraèdre $ABCD$. Les points B, C, D sont fixés. Le point A décrit une sphère (S) de centre O et de rayon R tangente en E au plan (BCD). Quel est le lieu géométrique du centre de gravité G du tétraèdre ?

Indications. Les points de la figure sont à répartir en trois familles :

- O, B, C, D, E points fixes ;
- A, point mobile sur une surface connue ;
- G, point dont le lieu géométrique est à déterminer.

Pour déterminer ce lieu géométrique nous chercherons à compléter le schéma :

Point décrivant un ensemble connu : A	→	transformation T à définir à l'aide des points fixes	→	Point dont le lieu est à déterminer : G

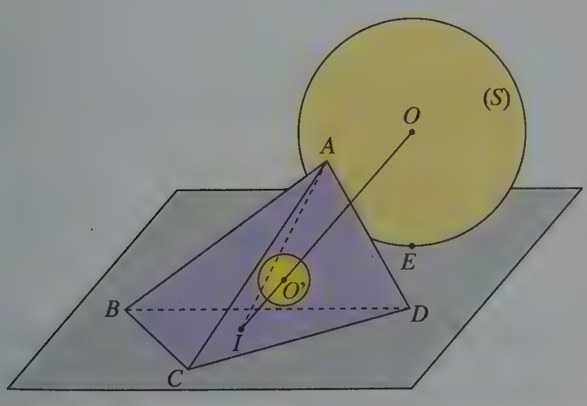
en déterminant, si possible, une transformation T.

Solution

En supposant A non dans (BCD), appelons I le point commun à (AG) et au plan (BCD). Que représente I pour le triangle BCD ? L'isobarycentre G des points A, B, C, D est le barycentre de $(A, 1)$ et $(J, 3)$ où J est l'isobarycentre de B, C, D. Ce barycentre J appartient au plan (BCD) et à la droite (AG). C'est donc le point I. Ainsi I, isobarycentre des points B, C, D est fixe quand A décrit (S) et $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$.

Le point G est donc l'image de A par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{1}{4}$.

Le lieu de G est donc la sphère de centre $O' = h(O)$ et de rayon $\frac{1}{4}R$, privée du point $h(E)$.



Exercice 2

Énoncé

Soit $ABCDEFGH$ un cube (voir cube p. 228). On note f le quart de tour d'axe (EH) qui transforme F en A et g le demi-tour d'axe (AH). Déterminez l'application $g \circ f$; on précisera l'image de A par $g \circ f$.

Indications. Nous utiliserons les deux propriétés :

– toute rotation de l'espace est décomposable en deux réflexions de plans sécants ;

– une réflexion est une involution, c'est-à-dire une transformation f telle que $f \circ f$ soit l'identité de l'espace.

Solution

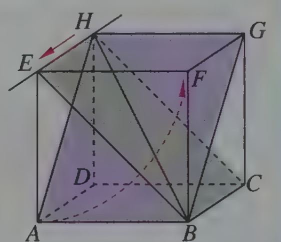
Les axes des rotations f et g sont coplanaires.

Décomposons f et g en réflexions, les deux décompositions faisant intervenir un même plan, le plan des deux axes, (EAH).

Décomposition de f

Le plan (EAF) est orthogonal à (EH). Dans ce plan, la rotation induite par f est la rotation de centre E qui transforme F en A ; elle est aussi la composée de la réflexion d'axe (EB) suivie de la réflexion d'axe (EA).

La rotation f est donc la composée de la réflexion s_1 de plan (EBH), suivie de la réflexion s_2 de plan (EAH).



Décomposition de g

Le demi-tour d'axe (AH) est décomposable en deux réflexions dont les plans sont perpendiculaires et contiennent (AH).

Prenons (EAH) et (AHB). Notant s_3 la réflexion de plan (AHB), nous avons : $g = s_3 \circ s_2$.

Alors : $g \circ f = (s_3 \circ s_2) \circ (s_2 \circ s_1)$,

$g \circ f = s_3 \circ (s_2 \circ s_2) \circ s_1$,

$g \circ f = s_3 \circ s_1$.

Ainsi $g \circ f$, composée de deux réflexions dont les plans sont sécants suivant (HB), est une rotation d'axe (HB).

Pour déterminer complètement cette rotation, donnons un point et son image, ce qui définira la rotation induite dans un plan perpendiculaire à (HB).

De $f(F) = A$ et $g(A) = A$ on déduit : $g \circ f(F) = A$.

La rotation $g \circ f$ est donc la rotation d'axe (HB) qui transforme F en A.

□ *Remarque.* Le cube n'étant pas orienté, il n'est pas possible de donner une mesure de l'angle de la rotation. Pour un cube donné cette mesure est, suivant l'orientation choisie dans le plan (AFC), $\frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$.

Énoncé

Bac E 1990. Problème partiel.

I — Dans l'espace, on donne deux points A et B distincts.

1° Montrez que toute rotation R de l'espace transformant A en B a son axe (D) inclus dans le plan médiateur de $[AB]$.

2° Réciproquement, soit (D) une droite du plan médiateur de $[AB]$. Montrez qu'il existe une rotation R et une seule d'axe (D) transformant A en B. On pourra introduire le projeté orthogonal K de A sur (D).

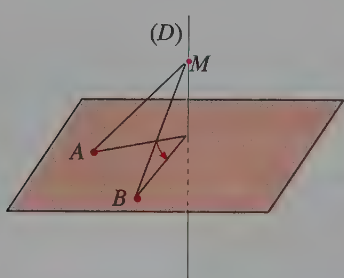
II — Soit $OABC$ un tétraèdre régulier. Montrez qu'il existe une rotation R_1 et une seule d'axe (OC) transformant A en B.

A la lecture du sujet

Une rotation de l'espace est définie par une droite orientée et un nombre réel, angle de la rotation.
L'objet de cet exercice est de remplacer cette caractérisation par une droite et deux points.

Une solution

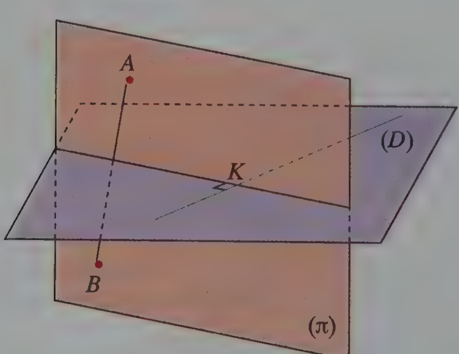
I — 1° Soit R une rotation transformant A en B et (D) son axe. Tout point M de (D) est invariant par la rotation et la rotation conserve les distances donc, puisque $R(A) = B$ et $R(M) = M$, on a : $MA = MB$.



Tout point M de (D) est donc dans le plan médiateur de $[AB]$.
Ainsi (D) est incluse dans le plan médiateur de $[AB]$.

2° La droite (D) est dans le plan médiateur de $[AB]$.

• **Unicité de la rotation.**

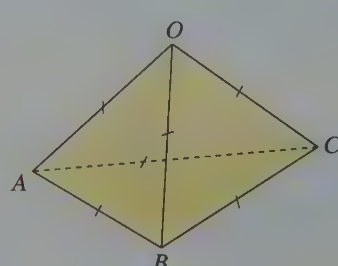


S'il existe une rotation d'axe (D) transformant A en B alors cette rotation induit dans le plan (π) perpendiculaire à (D) et passant par A une rotation qui transforme A en B et dont le centre est le point K commun à (π) et (D).

• **Existence de la rotation.**
Il suffit de démontrer que B est dans le plan (π), perpendiculaire en K à (D) et que $KA = KB$.
Par hypothèse, (D) est dans le plan médiateur de $[AB]$ donc (D) est orthogonale à (AB), donc B est dans (π).
Dans (π), $KA = KB$. Soit r la rotation du plan (π), de centre K et transformant A en B, R la rotation de l'espace, d'axe (D) et ayant pour rotation induite dans (π) la rotation r. Alors R est une rotation d'axe (D) qui transforme A en B.

• **Conclusion.**
Il existe donc bien une rotation et une seule, d'axe (D), transformant A en B.

II — Le tétraèdre $OABC$ est régulier donc $OA = OB$ et $CA = CB$.



Les points O et C sont dans le plan médiateur de $[AB]$ donc la droite (OC) est dans ce plan médiateur.
Il existe donc une et une seule rotation R_1 d'axe (OC) transformant A en B.

Exercices et problèmes

Q.C.M.

Dans chacun des cas, une ou plusieurs réponses sont exactes.

1 Soit f un demi-tour d'axe (Δ) :

si f transforme A en A' et B en B' alors $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ .... ☐
si f transforme A en A' alors (Δ), A et A' sont coplanaires .... ☐
la transformation induite par f dans un plan (P) perpendiculaire à (Δ) est une rotation de (P) .. ☐
la transformation induite par f dans un plan (π) qui contient (Δ) est une réflexion de (π) .... ☐

2 Un demi-tour d'axe (Δ) :

transforme une droite en une droite parallèle ..... ☐
transforme une droite (D) orthogonale à (Δ) en une droite parallèle à (D) .... ☐
est la composée de deux réflexions .... ☐

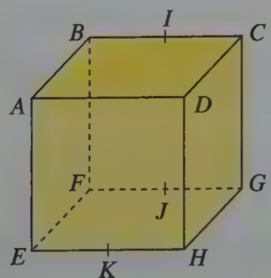
3 Dans l'espace :

une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale .... ☐
une symétrie centrale est une réflexion .... ☐
une homothétie de rapport 1 est une translation .. ☐
une translation est une homothétie de rapport 1 .. ☐

4 Dans l'espace :

toute symétrie est une réflexion .... ☐
une symétrie centrale est une rotation .... ☐
toute symétrie est sa propre réciproque .... ☐
une rotation n'est pas une symétrie .... ☐

5 Dans le cube $ABCDEFGH$ de la figure, I, J et K sont les milieux de $[BC]$, $[FG]$ et $[EH]$.



Le plan (AIJ) est un plan de symétrie du cube .... ☐
Le demi-tour d'axe (IK) transforme A en G .... ☐
La composée de la réflexion de plan (AEI) suivie de la réflexion de plan (DHI) est le quart de tour d'axe (IJ) .... ☐
Le quart de tour d'axe $((IK), \overrightarrow{KI})$ transforme A en D .... ☐

6 Dans l'espace :

Seul le plan d'une réflexion est invariant par cette réflexion .... ☐
Les plans invariants par un demi-tour sont les plans perpendiculaires à son axe .... ☐
Une rotation d'axe (D) laisse invariant tout plan perpendiculaire à (D) .... ☐
Si une droite (D) et un plan (P) sont perpendiculaires et si (P) est invariant par une rotation f, alors (D) est l'axe de f .... ☐

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Transformations conservant une figure

7 ■ Soit $[AB]$ un segment de droite de l'espace.

1° Déterminez les réflexions conservant $[AB]$.

2° Déterminez les demi-tours conservant $[AB]$.

3° Déterminez une ou des symétries centrales conservant $[AB]$.

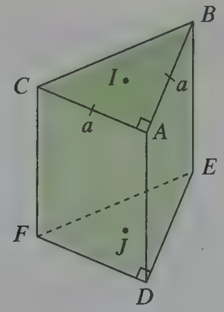
8 ■■ Soit ABC un triangle rectangle isocèle de l'espace. Déterminez les réflexions et, éventuellement, les demi-tours, symétries centrales, rotations conservant le triangle ABC.

9 ■■ Soit ABC un triangle équilatéral de l'espace. Déterminez les éventuelles réflexions, rotations, symétries centrales, demi-tours conservant le triangle ABC.
Aide. On pourra s'intéresser au centre de gravité du triangle.

10 ■ Quelles sont les réflexions, rotations, symétries centrales conservant une sphère ?

11 ■■ Soit $ABCDEF$ un prisme droit tel que le triangle ABC soit un triangle rectangle en A et isocèle.

On appelle I et J les centres de gravité des triangles ABC et DEF.



1° a) Démontrez que, s'il existe une symétrie centrale conservant le prisme, alors son centre est nécessairement le milieu de $[IJ]$.

b) Existe-t-il une symétrie centrale conservant le prisme ?

2° Quelle est l'image d'un triangle rectangle isocèle par une réflexion de l'espace ? par une rotation de l'espace ?

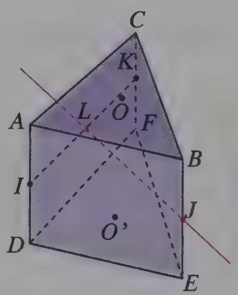
3° a) Quelle peut être l'image de A par une réflexion conservant le prisme ?

b) Quelles sont les réflexions de l'espace qui conservent le prisme et laissent A et D invariants ?

c) Quelles sont les réflexions de l'espace qui conservent le prisme et transforment A en D ?

4° Quelles sont les rotations qui conservent le prisme ?

12 Soit $ABCDEF$ un prisme droit tel que le triangle ABC soit équilatéral, O et O' les centres de gravité des triangles ABC et DEF.



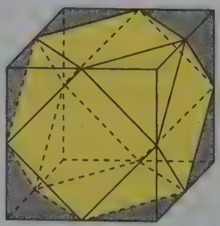
1° Existe-t-il une symétrie centrale conservant le prisme ?

2° Quelles sont les réflexions conservant le prisme ? On pourra montrer que le plan d'une telle réflexion contient la droite (OO') ou est médiateur de $[OO']$.

3° Les points I, J, K sont des milieux d'arêtes, L est le milieu de $[IK]$. Justifiez que le prisme est invariant par le demi-tour d'axe (JL).

4° Énoncez des rotations, demi-tours compris, conservant le prisme.

13 En utilisant des transformations qui conservent un cube, déterminez des transformations (réflexions, symétries centrales, rotations) qui conservent un cuboctaèdre.



Géométrie analytique

Les exercices **14** *à* **18** *utilisent un repère orthonormal* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

14 Soit (P) le plan d'équation :

$x + 2y - 3z + 9 = 0.$

1° Déterminez les coordonnées de l'image A' du point A de coordonnées $(1\,;\,0\,;\,1)$ par la réflexion de plan (P).

2° Déterminez l'expression analytique de la réflexion de plan (P).

15 Soit (D) la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{cases}$

et A le point de coordonnées $(0\,;\,3\,;\,1)$.

Déterminez une représentation paramétrique de la droite (D'), image de (D) par la symétrie de centre A.

16 Soit (S) la sphère d'équation :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 2 = 0$

et I le point de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,0)$.

1° Déterminez le centre et le rayon de (S).

2° Déterminez une équation de la sphère (S') image de (S) par l'homothétie de centre I et de rapport -3.

17 Soit (P) et (P') les plans d'équations respectives :

$x + y - z + 3 = 0$ et $3x - y + 2z = 0.$

On note f et g les réflexions de plans respectifs (P) et (P').

1° Vérifiez que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

2° Caractérisez l'application $g \circ f$.

18 Soit (D) une droite de représentation paramétrique :

$x = 1 + 4\lambda\,; \quad y = 2 - 2\lambda\,; \quad z = 5 + \dfrac{1}{2}\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$

f le demi-tour d'axe (D), et (P) le plan d'équation $2x + 3y - 4z + 12 = 0$.

1° Démontrez que (D) est une droite de (P).

2° Déterminez un plan (P') tel que la composée de la réflexion de plan (P) suivie de la réflexion de plan (P') soit f.

Lieux géométriques

19 Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède $(\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH})$. Les points A, B, C, D sont fixes. On suppose que le point E décrit un plan (P). Déterminez le lieu géométrique :

1° du point G,

2° du centre O du parallélépipède,

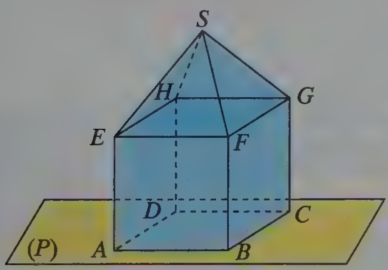
3° du centre de gravité I du triangle ABE,

4° du centre de gravité J du triangle AFH.

20 ■ Soit $ABCD$ un tétraèdre dont les sommets B, C, D sont fixes et le centre de gravité décrit un plan (P) parallèle au plan (BCD). Quel est le lieu géométrique du point A ?

21 ■ Soit $SABCD$ une pyramide à base $ABCD$ carrée fixe. Le sommet S décrit un cercle $(\mathcal{C})$ de l'espace. Déterminez et dessinez le lieu du centre de gravité de la pyramide.

22 ■■ **Solide déformable**
Une pyramide à base carrée $EFGH$ repose sur un cube posé lui-même sur un plan (P). Les faces de la pyramide, autres que $EFGH$, sont des triangles équilatéraux. Des rotules placées aux sommets du cube le rendent déformable, les arêtes gardant une longueur constante a, les points A, B, C, D restant fixes, le solide $ABCDEFGH$ gardant la forme d'un parallélépipède.



Déterminez le lieu géométrique du sommet S de la pyramide.

23 ■■■ Soit (D_1), (D_2), (D_3) trois droites parallèles et non coplanaires. Les sommets A, B, C d'un triangle ABC appartiennent respectivement à (D_1), (D_2), (D_3).
Quel est le lieu géométrique des centres de gravité des triangles ABC quand A, B, C décrivent respectivement (D_1), (D_2), (D_3) ?

Constructions

24 ■■ Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles situés dans deux plans parallèles (P) et (P'), A un point de $(\mathcal{C})$ et A' un point de $(\mathcal{C}')$.
Construisez, lorsque cela est possible, un point M de $(\mathcal{C})$ et un point M' de $(\mathcal{C}')$ tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$.
Discutez le nombre de couples (M, M') solutions.

25 ■ Une sphère (S), une droite (D), un point A étant donnés, construisez un point B de (S) et un point C de (D) tels que A soit le barycentre des points pondérés $(B, 2)$, $(C, -1)$.

26 ■■■ Soit (P) un plan, (S) une sphère tangente à (P), A un point de (P).
Construisez une sphère (S') tangente à (S), en un point I, et tangente en A à (P).

Aide. On pourra utiliser l'homothétie de centre I qui transforme (S') en (S) et chercher l'image de (P) par cette homothétie.

Homothéties, translations

27 ■ Soit A et B deux points de l'espace, O le milieu de $[AB]$, (S) la sphère de diamètre $[AB]$, (S') la sphère de diamètre $[AO]$.
Une droite (Δ) passant par A recoupe (S) en C et (S') en D.
Que représente le point D pour le segment $[AC]$?

28 ■ Soit A, B, C, D quatre points d'un plan (P) et E un point non situé dans (P). Démontrez que les centres des sphères de diamètres $[EA]$, $[EB]$, $[EC]$ et $[ED]$ sont coplanaires.

29 ■■ Un cône de révolution de sommet A a pour base un cercle (C) de rayon 5 cm ; son demi-angle au sommet est noté α.
Une sphère (S) est tangente au cône suivant un cercle (C') et au plan du cercle (C).

1° a) On suppose que α est égal à $\dfrac{\pi}{6}$.

Calculez le rapport de l'homothétie de centre A transformant (C) en (C').

b) Reprenez l'étude de la question **1°** a) avec $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

2° Le nombre α est un élément de l'intervalle $\left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Exprimez, en fonction de α, le rapport de l'homothétie transformant (C) en (C').

30 ■■ Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires, a, b, c, d quatre nombres réels, φ l'application de l'espace définie par :

$M \mapsto M'$ et

$\overrightarrow{MM'} = a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{MC} + d\,\overrightarrow{MD}$.

Déterminez l'application φ dans les cas suivants :

1° $(a, b, c, d) = (2 ; 1 ; 2 ; 1)$.

2° $(a, b, c, d) = (2 ; 1 ; -2 ; -1)$.

3° $(a, b, c, d) = (2 ; 1 ; -1 ; -1)$.

31 Soit $ABCD$ un tétraèdre, A', B', C' les milieux respectifs de $[DA]$, $[DB]$, $[DC]$, A'', B'', C'' les milieux respectifs de $[B'C']$, $[C'A']$ et $[A'B']$.

1° Démontrez que $\overrightarrow{A''B''} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

2° Déterminez le centre O de l'homothétie de rapport $-\frac{1}{4}$ qui transforme A en A''. Quelles sont par cette homothétie les images de B, C et du centre de gravité G du triangle ABC?

3° Démontrez que O, D, G sont alignés. Précisez la position de O sur la droite (DG) en exprimant $\overrightarrow{DO}$ en fonction de $\overrightarrow{DG}$.

32 Soit $ABCD$ un tétraèdre; les faces opposées aux sommets A, B, C, D ont pour centres de gravité respectifs A', B', C', D'.

1° Démontrez que $3\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BA}$.

2° Déterminez sur la droite (AA') le point O tel que $\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$.

3° Démontrez que l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{3}$ transforme le tétraèdre $ABCD$ en le tétraèdre $A'B'C'D'$.

Composées de transformations

33 Soit (D) et (D') deux droites parallèles de l'espace.
Pour tout point M de l'espace on note M_1 son image par le demi-tour d'axe (D) et M' l'image de M_1 par le demi-tour d'axe (D').
Démontrez que, A étant un point de (D) projeté orthogonalement en un point B sur (D') : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$.

34 Soit (D) et (D') deux droites de l'espace, sécantes en un point O.
On note d le demi-tour d'axe (D), d' celui d'axe (D'), f la composée $d' \circ d$.

1° (D) et (D') déterminent un plan (P).

a) Démontrez que (P) est (globalement) invariant par f.

b) Reconnaissez la transformation induite dans (P) par f.

2° Soit (Δ) la perpendiculaire en O à (P).

a) Démontrez que tout point de (Δ) est invariant par f.

b) Démontrez que tout plan (π) perpendiculaire à (Δ) est invariant par f.

3° Démontrez que f est une rotation d'axe (Δ).

35 Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. On appelle I et J les milieux des arêtes $[AB]$ et $[BC]$, f la réflexion de plan (ADJ) et g la réflexion de plan (CDI). Déterminez l'application $g \circ f$ (nature et caractérisation).

36 Dans l'espace, (P) est un plan, O est un point de (P), (D) est la perpendiculaire en O à (P).
On désigne par S_P, S_O, S_D les symétries par rapport respectivement à (P), O et (D), et par f la composée $S_O \circ S_P$.

1° a) Démontrez que (P), O et (D) sont invariants par chacune des transformations S_P, S_O, S_D et f.

b) Quelles sont les transformations induites dans (P) par S_P, S_O, S_D et f ?

c) Quelles sont les transformations induites sur (D) par S_P, S_O, S_D et f ?

2° a) Soit M un point de l'espace qui n'est ni sur (P), ni sur (D). On désigne, dans l'ordre, par M_1, M', m et m' les points $S_P(M)$, $S_O(M_1)$ et les projetés orthogonaux de M sur (P) et sur (D).
Démontrez que les points M, M_1, M', O, m et m' sont dans le plan (P_M) déterminé par M et (D) et que, dans ce plan (P_M), (D) est la médiatrice de $[MM']$.

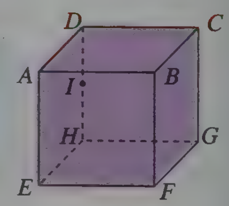
b) Déduisez-en que $f = S_D$.

3° Démontrez que : $S_P \circ S_O = S_D$;
$S_D \circ S_O = S_O \circ S_D = S_P$; $S_P \circ S_D = S_D \circ S_P = S_O$.

PROBLÈMES

37 Dans l'espace, on donne un cube $ABCDEFGH$. I est le milieu de $[DH]$ et K est le symétrique de H par rapport à D.

Démontrez que le plan médiateur de $[FK]$ est le plan (ACI).



38 $ABCD\,A'B'C'D'$ est un cube. On note :
s_1 la réflexion de plan $(AA'BB')$;
s_2 la réflexion de plan $(BB'CC')$;
s_3 la réflexion de plan $(CC'DD')$;
s_4 la réflexion de plan $(DD'AA')$.

I – 1° Montrez que $r' = s_2 \circ s_1$ est un demi-tour dont on précisera l'axe.

2° Déterminez de même la nature de $r'' = s_4 \circ s_3$.

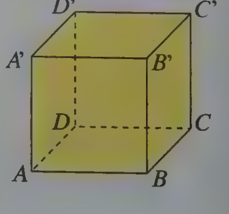
II – 1° On note s la réflexion de plan $(BB'DD')$.

Déterminez les réflexions s' et s'' telles que :

$r' = s \circ s'$

$r'' = s'' \circ s$.

2° Déduisez-en que
$t = r'' \circ r'$
est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BD}$.



39 ■■ On considère dans l'espace quatre points A, B, C, D tels que :

$AC = AB = BC = BD = AD = a$ (a réel positif donné).

1° a) I étant le milieu du segment $[AB]$ montrez que les droites (IC) et (ID) sont perpendiculaires à la droite (AB).

b) Montrez que $IC = ID$, exprimez cette longueur en fonction de a.

2° Soit s_1 la réflexion de plan (ABC) et s_2 la réflexion de plan (ABD).

a) Quelle est la nature de la transformation $r = s_1 \circ s_2$?

b) Déterminez en fonction de a la longueur $x = CD$ pour que r soit une rotation d'angle plat.

(Bac CE)

40 ■■■ Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, G son isobarycentre et H l'isobarycentre du triangle ABD.
On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BC]$, $[AC]$ et $[BD]$.

1° a) Démontrez que les droites (IJ) et (KL) sont concourantes en G.

b) Démontrez que la droite (CG) coupe le plan (ABD) en H.

c) Placez sur une figure les données précédentes.

2° Soit s_1 la réflexion de plan (BIC) et s_2 la réflexion de plan (ALC). On pose : $r = s_2 \circ s_1$.

a) Montrez que (BIC) est le plan médiateur du segment $[AD]$. Déduisez-en les images de A et de D par s_1.
Déterminez les images de B et de D par s_2.

b) Déterminez les images des points A, B, C, D et G par r.

c) Démontrez que r est une rotation dont vous déterminerez l'axe et l'angle.

(Bac E)

41 ■■■ Soit $ABCD$ un carré situé dans un plan (P) de l'espace. On désigne par O le centre du carré, (Δ) la droite passant par O et perpendiculaire à (P), H un point de (Δ) et H' le symétrique de H par rapport à O.
On note E l'ensemble $\{A, B, D\}$, F l'ensemble $\{B, C, D\}$ et on se propose de déterminer les réflexions et rotations qui transforment E en F.

1° Soit f une telle transformation. Démontrez que :

$f(A) = C$; $f(\{B, D\}) = \{B, D\}$; $f(O) = O$

et que : $f(H) = H$ ou $f(H) = H'$.

2° Déterminez les réflexions et rotations qui transforment E en F.

42 ■■ L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (P_1) le plan d'équation $x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$ et (P_2) le plan d'équation $x\sqrt{3} - y + 1 = 0$.

Désignant par s_{P_1} (resp. s_{P_2}) la réflexion de plan (P_1) (resp. (P_2)), on se propose de déterminer $f = s_{P_2} \circ s_{P_1}$.

1° Déterminez :

$(D_1) = (P_1) \cap (xOy)$, $(D_2) = (P_2) \cap (xOy)$

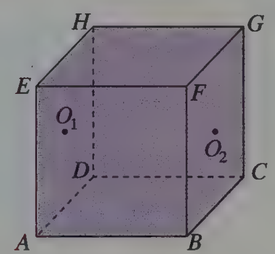
(vous pourrez faire une figure dans le plan (xOy)).

2° Déterminez dans le plan (xOy) muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ une mesure de l'angle $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ où $\vec{u}_1$ (resp. $\vec{u}_2$) est un vecteur directeur de (D_1) (resp. (D_2)).
Déduisez-en la nature et les éléments caractéristiques de : $f = s_{P_2} \circ s_{P_1}$.

(Bac E)

43 ■■ On considère un cube $ABCDEFGH$, on appelle O_1 et O_2 les centres respectifs des faces $ADHE$ et $BCGF$.
Soit N le point du segment $[HF]$ et P le point du segment $[AC]$ définis par :

$\overrightarrow{HN} = k\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$ où $k \in [0 ; 1]$.



1° Montrez que N est barycentre du système de points pondérés $(H, 1-k)$, (F, k) et que P est barycentre du système de points pondérés $(A, 1-k)$, (C, k).

2° Soit d le demi-tour d'axe (O_1O_2). Quelles sont les images par d des points A, C et P ?

3° I étant le milieu du segment $[NP]$, montrez que :

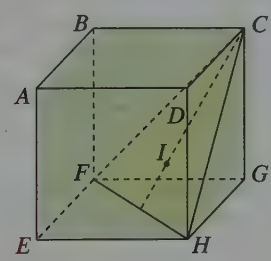
$\overrightarrow{HN} + \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{O_1I}$ puis que $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$.

Déduisez-en que : $\overrightarrow{O_1I} = k\overrightarrow{O_1O_2}$, $k \in [0 ; 1]$.

Quel est l'ensemble des points I lorsque k décrit l'intervalle $[0 ; 1]$?

(Bac)

44 ■■ On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête a. On note I l'isobarycentre du triangle CFH.



1° a) Montrez que le triangle CFH est équilatéral.

b) Prouvez que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur de $[CH]$ et au plan médiateur de $[CF]$.

c) Déduisez-en que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par I.

2° On note (P) le plan contenant les droites (AB) et (HG) et (P') le plan contenant les droites (AD) et (FG).
On désigne par s et s' les réflexions par rapport aux plans (P) et (P').

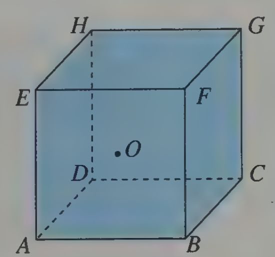
a) Déterminez l'intersection des plans (P) et (P').

b) Déterminez les images des points C, F et H par s et s', puis par $s' \circ s$ et déterminez ses éléments caractéristiques.

(Bac E)

45 ■■■ On se propose de déterminer la section d'un cube par le plan médiateur d'une de ses diagonales et d'étudier l'effet sur cette section de transformations laissant le cube invariant.
On considère un cube de centre O et de diagonales $[AG]$, $[BH]$, $[CE]$ et $[DF]$.
On rappelle que ces diagonales se coupent en leur milieu O.

Soit M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BF]$, $[FG]$, $[GH]$, $[HD]$ et $[DA]$.



1° Montrez que les points M_j appartiennent au plan médiateur (π) de $[CE]$.
Ce plan coupe le cube suivant l'hexagone $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$. Placez cet hexagone sur une figure représentant le cube.

2° Soit σ la symétrie centrale par rapport à O. Montrez que le plan (π) est invariant par σ. Déterminez les images des points M_j par σ.

3° a) Soit s la réflexion transformant A en F. Déterminez les images par s des sommets du cube.

b) Soit s' la réflexion transformant A en H. Déterminez les images par s' des sommets du cube.

c) Soit $r = s' \circ s$. Prouvez que r est une rotation d'axe (CE), et que le plan (π) est invariant par r. Déterminez les images par r des sommets du cube et des points M_j. Montrez que $r \circ r \circ r$ est l'identité.

d) Soit ρ la rotation dans le plan (π) induite par r. On oriente le plan (π) et on note θ une mesure de l'angle de ρ telle que $0 < \theta < 2\pi$.
Déterminez les valeurs possibles de θ. Déduisez-en que $M_1M_3M_5$ et $M_2M_4M_6$ sont des triangles équilatéraux de centre O.

4° A partir de 2° et 3°, prouvez que $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ est un hexagone régulier de centre O.

46 ■■■ **Composée de deux homothéties**

1° Soit h_1 une homothétie de centre O_1 et de rapport k_1 et h_2 une homothétie de centre O_2 et de rapport k_2.

On pose $f = h_2 \circ h_1$, composée de h_1 suivie de h_2.

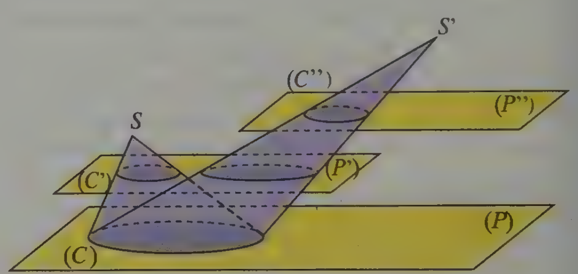
a) Pour tout point M de l'espace, on pose $h_1(M) = M_1$ et $h_2(M_1) = M_2$. Démontrez que : $\overrightarrow{O_1M_2} = k_2k_1\overrightarrow{O_1M} + (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$.

b) On suppose que $k_1k_2 = 1$.
Démontrez que : $\overrightarrow{MM_2} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$.
Quelle est la nature de f ?

c) On suppose que $k_1k_2 \neq 1$. Démontrez qu'il existe un point O unique invariant par f.
Déduisez-en la nature et les éléments caractéristiques de f.

2° Soit $ABCDEFGH$ un cube $(\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH})$.
On note : A', F', C' les symétriques de B par rapport aux points A, F, C; α, β et γ les milieux des segments $[FC]$, $[AC]$, $[AF]$.
Démontrez que les droites $(A'\alpha)$, $(F'\beta)$ et $(C'\gamma)$ sont concourantes.

3° La figure ci-dessous représente deux cônes de sommets respectifs S et S' et de même cercle de base (C), situé dans un plan (P). Les deux plans (P') et (P'') sont parallèles à (P). La distance de S à (P') est notée d, la distance de (P') à (P) est $2d$, la distance de (P'') à (P) est $4d$, la distance de S' à (P'') est $2d$. Les sections de (P') et (P'') avec les cônes sont les cercles (C') et (C'').



Démontrez qu'il existe une homothétie qui transforme (C') en (C''); précisez son rapport et construisez son centre.

47 ■■■ Dans l'espace on considère trois points A, B, C non alignés, O un point, G l'isobarycentre des points A, B, C. Soit A', B', C' les points tels que : $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

1° Démontrez que les segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ ont le même milieu I et exprimez $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OG}$.

2° Retrouvons les résultats de la question 1° à l'aide des transformations et de la propriété établie dans l'exercice **46** question **1°** c).

a) On appelle A_1, B_1, C_1 les milieux des segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Montrez qu'il existe une homothétie f de centre G qui transforme A en A_1, B en B_1 et C en C_1. Précisez son rapport.

b) Démontrez qu'il existe une homothétie g de centre O transformant A_1 en A', B_1 en B' et C_1 en C'. Précisez le rapport de g.

c) Déterminez la nature de $g \circ f$ et concluez.

10 Coniques

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 **Un regard sur les coniques** 252
AP2 **Une construction de la parabole** 253
AP3 **Dessinons des ellipses** 254
AP4 **Où l'on retrouve une hyperbole** 255

COURS

1. **Coniques définies par foyer et directrice** 256
2. **Équations cartésiennes** 258
3. **Équations** $y^2 = 2px$ **et** $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$ 263
4. **Étude particulière de l'ellipse** 266

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 **Tangentes à une conique à centre** 269
TP2 **Définition bifocale d'une conique à centre** 270
TP3 **Roberval et la parabole** 271
TP4 **Situations menant à des coniques** 272

FICHE MÉTHODE

FICHE MÉTHODE **Comment reconnaître et caractériser une conique** 274

EXERCICES COMMENTÉS 275
LE JOUR DU BAC 276
EXERCICES ET PROBLÈMES 277

objectifs

- Connaître la définition par foyer et directrice de la parabole, l'hyperbole et l'ellipse.
- Savoir retrouver une équation cartésienne de ces trois courbes ainsi définies (par foyer et directrice) dans un repère orthonormal adapté.
- Savoir préciser les éléments caractéristiques de la courbe d'équation $y^2 = 2px$ ainsi que ceux de la courbe d'équation $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$.
- Connaître la transformation permettant de passer d'un cercle à une ellipse et réciproquement.

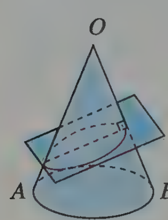
ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

AP1 Un regard sur les coniques

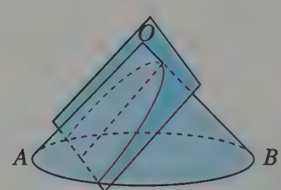
Menechme, mathématicien grec (vers 375-325 av. J.-C.) fut vraisemblablement le premier à considérer les coniques. La résolution du problème de la duplication du cube le conduisit à étudier l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole.
Apollonius simplifiera la définition des coniques et en poursuivra l'étude. Nous les retrouverons chez Galilée, Kepler, Roberval... comme trajectoires de mobiles : projectiles, planètes, point.

1 ■ *Apollonius*[1] *et les coniques*

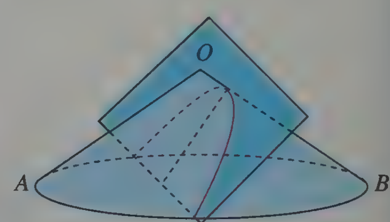
Le vocable « conique » désigne les sections de cônes de révolution par des plans.
Avant Apollonius, les coniques étaient définies comme sections de cônes de révolution par un plan perpendiculaire à une génératrice du cône, la nature de la conique dépendant de l'angle au sommet du cône (fig. ci-dessous).



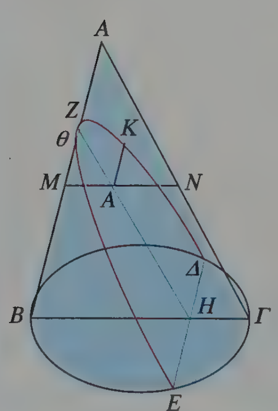
Ellipse
$\widehat{AOB}$ est aigu



Parabole
$\widehat{AOB}$ est droit

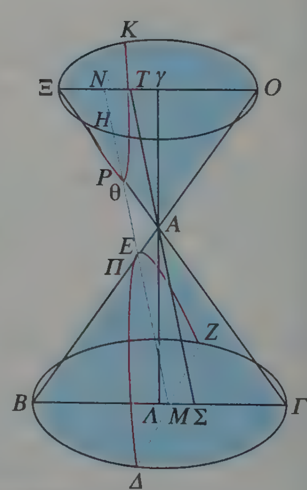


Hyperbole
$\widehat{AOB}$ est obtus



◀ Dans son traité *Des coniques* Apollonius présente les coniques comme sections **d'un même cône,** droit ou oblique, la nature de la conique dépendant de l'inclinaison du plan coupant le cône.

Apollonius est le premier géomètre à considérer la deuxième nappe du cône, permettant ainsi d'obtenir la deuxième branche de l'hyperbole, les deux branches de l'hyperbole ne formant qu'une seule courbe (fig. ci-contre). ▶

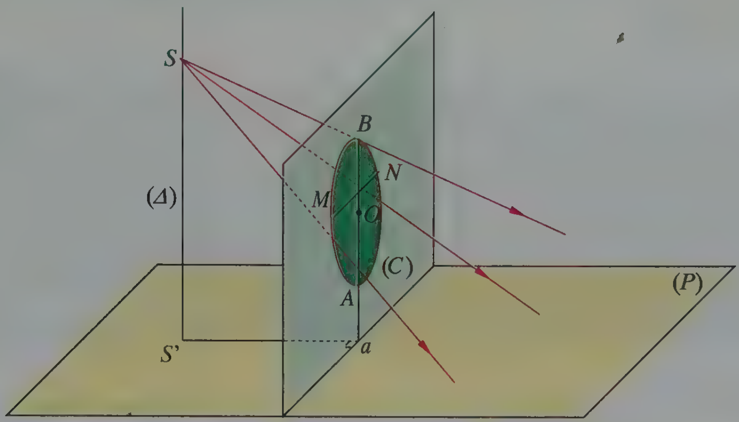


Il semble que l'on puisse attribuer à Apollonius la dénomination, encore utilisée actuellement, des trois coniques : parabole, ellipse, hyperbole.

QUESTION
Retrouvez les définitions, en tant que figure de style, des termes ellipse, parabole, hyperbole.

(1) Apollonius : astronome et mathématicien grec (vers 260-180 av. J.-C.)

2 ■ Visualisation d'une conique



Une visualisation d'une conique peut être réalisée à l'aide d'une source lumineuse ponctuelle S et d'un cercle (C) disposé comme l'indique la figure ci-dessus.

1° Donnez suivant la position de S sur le support (Δ) l'allure de l'ombre du cercle (C) sur le plan (P).

2° *a*) Est-il possible de construire les ombres des points O, A, B lorsque $SS' = aO$? lorsque $SS' = aB$?

b) Lorsque (SB) est parallèle au plan (P), construisez les ombres de A, de O et des extrémités M et N d'une corde de (C) parallèle à (P).

c) Reprenez cette construction lorsque $SS' = aA + 3OA$.

AP2 Une construction de la parabole

La parabole a été définie en Seconde comme courbe d'équation $y = ax^2$ dans un repère orthogonal du plan. Retrouvons cette courbe géométriquement.

1 ■ De la géométrie à l'analytique

Soit dans le plan, une droite (D), A un point situé à 2 cm de (D), B un point de (D). On note (E) l'ensemble des cercles tangents à (D) et passant par A.

1° Construisez un cercle de (E) tangent en B à (D).

2° Construisez des cercles de (E) afin d'obtenir une allure de l'ensemble des centres des cercles de (E).

3° On appelle M le centre d'un cercle (C) de (E) et H le projeté orthogonal de M sur (D). Donnez une propriété géométrique caractérisant M.

4° Soit K le projeté orthogonal de A sur (D) et O le milieu de $[AK]$. On définit un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{j}$ colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ et de même sens.
Déterminez une équation cartésienne de l'ensemble des centres M des cercles (C) de (E). Quelle est la nature de cet ensemble ?

2 ■ De l'analytique vers la géométrie

Soit (P) la parabole d'équation $y = x^2$ et (D) la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Démontrez que, a étant un nombre réel et M_a le point de (P) d'abscisse a, le cercle (C_a) de centre M_a et tangent à (D) passe par un point fixe quand a varie dans $\mathbb{R}$.

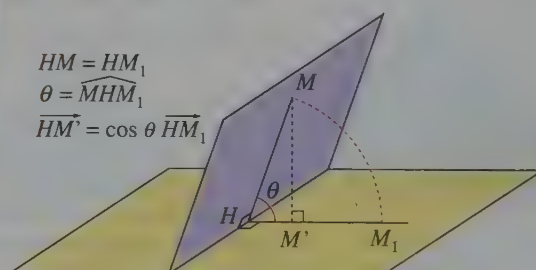
AP3 Dessinons des ellipses

Anamorphose à lire en incidence rasante.

Anamorphose cylindrique. Sa lecture nécessite de poser un miroir cylindrique au centre du dessin.

Nous proposons ici une méthode de construction point par point d'une ellipse ; la validation de cette méthode sera développée en cours.

Les photos ci-dessus et ci-contre représentent deux anamorphoses. Une anamorphose est un « dessin distordu qui, vu dans un miroir cylindrique ou conique, reprend sa forme réelle »[1] ou encore un « effet consistant à déformer un motif graphique ou pictural qui, vu sous un certain angle, reprend son aspect véritable »[1].



Appliquons à un cercle une déformation définie géométriquement. Nous verrons en cours (p. 268) que cette déformation peut être introduite à l'aide d'une projection orthogonale sur un plan, puis généralisée (figure ci-dessus).

1 ■ *Constructions*

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon 3 cm, (D) un diamètre de (C). Aplatissons ou étirons le cercle de la façon suivante : un point M étant pris sur (C), si H est son projeté orthogonal sur (D) alors M', transformé de M, est le point tel que $\overrightarrow{HM'} = k\,\overrightarrow{HM}$, k nombre réel non nul donné.

1° Construisez, point par point, l'image (C_k) de (C) lorsque k a pour valeur : $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, 2.$

2° En regardant la figure (C_2) sous un certain angle, retrouvez « l'image véritable (C) ».

2 ■ *Équation cartésienne de (C_k)*

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan, O le centre du cercle et $\vec{i}$ un vecteur unitaire de (D). Déterminez :

1° une équation de (C) ; **2°** une équation de $(C_{\frac{2}{3}})$; **3°** une équation de (C_2).

(1) *Larousse*, éd. 1980.

AP4 Où l'on retrouve une hyperbole

L'hyperbole a été définie, en Seconde, comme courbe d'équation $y = \dfrac{k}{x}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Étudions deux caractérisations d'une hyperbole.

1 ■ *Définition cartésienne*

Soit (C) la courbe d'équation $y = \dfrac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1° Construisons (C).

a) Démontrez que (C) admet deux droites asympotes : les droites d'équations $y = \dfrac{4}{3}x$ et $y = -\dfrac{4}{3}x$. Voir tome Analyse chap. 8, TP1 (p. 206 et 207).

b) Étudiez la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \dfrac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$ en 3.

c) Dessinez la courbe (C).

2° Complétons (C).

On appelle (C') la courbe symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses, et (Γ) la réunion de (C) et de (C').

Démontrez qu'une équation de (Γ) est $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

3° Changeons de repère.

On pose $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs des asymptotes.

Pour tout point M du plan on pose : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v}$, définissant ainsi les coordonnées de M dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

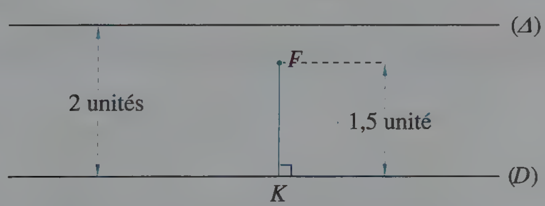
a) Exprimez x et y en fonction de X et Y.

b) Déduisez-en une équation de (Γ) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

c) Quel nom donne-t-on à la courbe (Γ) ?

2 ■ *Un problème de construction*

Étant donnés une droite (D) et un point F non situé sur (D), nous vous proposons de déterminer, à l'aide d'une construction point par point, l'allure de l'ensemble (E) des points M du plan tels que, si H est le projeté orthogonal de M sur (D), alors $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{3}{2}$.



1° Soit (Δ) une droite située à une distance de (D) égale à 2 unités de longueur. Construisez les points communs à (E) et à (Δ).

2° Un nombre d étant choisi dans $\mathbb{R}_+^*$, on note (Δ) et (Δ') les droites situées à la distance d de (D). En faisant varier d dans $\mathbb{R}_+^*$ construisez des points M de (E).

Conjecturez l'allure de la courbe (E). ((E) sera étudiée page 261).

COURS

1. CONIQUES DÉFINIES PAR FOYER ET DIRECTRICE

1. Définition

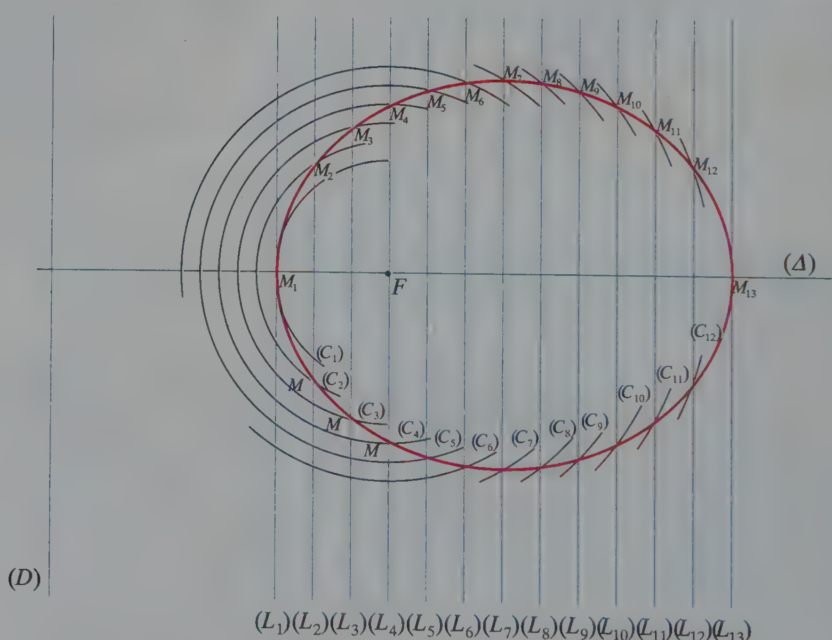
Définition 1

Dans le plan, soit (D) une droite, F un point non situé sur (D), e un nombre réel strictement positif.
On appelle conique, de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e, l'ensemble[(1)] des points M du plan tels que : $\dfrac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

EXEMPLES

- **Prenons** $e = \dfrac{1}{2}$.

Un point M de la conique est tel que $MF = \dfrac{1}{2} MH$; si on note l la distance MH, alors $MF = \dfrac{l}{2}$. Le point M est alors sur une parallèle à (D) située à la distance l de (D) et sur le cercle de centre F et de rayon $\dfrac{l}{2}$.



Il est évident que tout point M ainsi construit est sur la conique.

- **Pour** $e = \dfrac{3}{2}$: voir AP4, **2** ■.

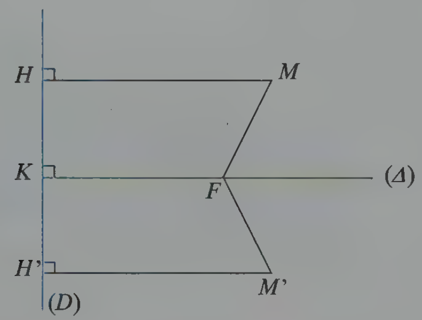
(1) Ensemble encore défini comme ligne de niveau e de l'application $M \mapsto \dfrac{MF}{MH}$.

COURS

□ *Remarque.* Une conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e n'a aucun point commun avec (D).

2. Élément de symétrie

La perpendiculaire (Δ) à (D) passant par F est un axe de symétrie de la figure formée de (D) et F.
De plus, si M et M' sont deux points du plan, symétriques par rapport à (Δ), alors leurs projetés orthogonaux H et H' sur (D) sont, eux aussi, symétriques par rapport à (Δ) et donc : $\dfrac{MF}{MH} = e \Leftrightarrow \dfrac{M'F}{M'H'} = e.$



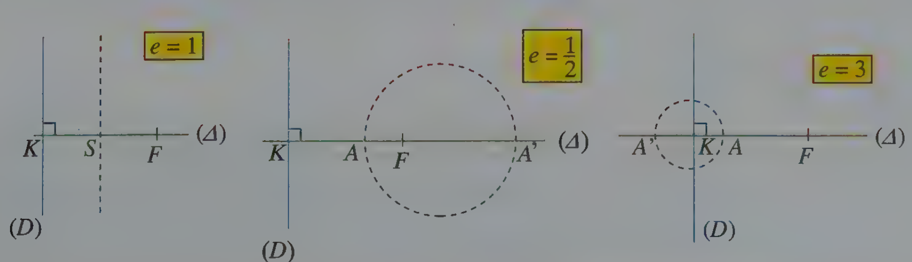
(Δ) est donc un axe de symétrie de la conique (C) de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.

3. Conséquence

Si M est un point de (Δ), alors son projeté orthogonal sur (D) est le point K commun à (D) et (Δ) et : $\quad M \in (C) \Leftrightarrow \dfrac{MF}{MK} = e.$

- **Si** $\boldsymbol{e = 1}$, alors (Δ) contient un point de (C) : le milieu S du segment $[FK]$.
- **Si** $\boldsymbol{e \neq 1}$, alors (Δ) contient deux points de (C) : les points A et A' communs à (Δ) et à la ligne de niveau e de $M \mapsto \dfrac{MF}{MK}$, qui est un cercle centré sur (Δ).

EXEMPLES

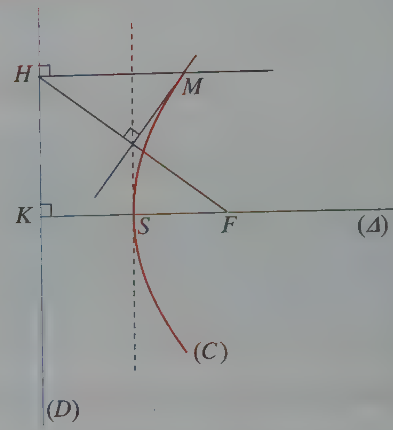


2. ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Soit (C) une conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.

1. La parabole : $e = 1$

La figure ci-contre illustre la construction point par point développée dans l'AP2.



Notons p la distance KF ; p est appelé **le paramètre** de la conique (C) (exercice 23, page 279).

Notons S le milieu de $[FK]$, choisissons un repère orthonormal $(S, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\overrightarrow{KF} = p\vec{i}$.

Soit x et y les coordonnées d'un point M dans ce repère ; on a :

points	S	F	K	M	H
coordonnées	$(0\,;0)$	$\left(\frac{p}{2}\,;0\right)$	$\left(-\frac{p}{2}\,;0\right)$	$(x\,;y)$	$\left(-\frac{p}{2}\,;y\right)$

$M \in (C) \Leftrightarrow MF^2 = MH^2$; donc : $M \in (C) \Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$.

On en déduit, après réduction, que **(C) a pour équation : $y^2 = 2px$.**
Remarquons que, dans le repère $(S, \vec{j}, \vec{i})$, (C) a pour équation $x^2 = 2py$, c'est-à-dire $y = \frac{x^2}{2p}$; nous reconnaissons l'équation d'une parabole (AP2).

Ainsi (C) est une parabole, de sommet S et d'axe (Δ).

Propriété 1

Soit (D) une droite et F un point du plan non situé sur (D). L'ensemble des points du plan équidistants de F et (D) est une parabole ; F en est le foyer, (D) la directrice.

Propriété 2
équation réduite de la parabole

Une équation de la parabole de foyer F et de directrice (D) dans un repère orthonormal $\left(S, \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}, \vec{j}\right)$ du plan, où S est le sommet de la parabole, est :
$y^2 = 2px$ où $p = 2SF$.

2. Conique à centre : $e \neq 1$

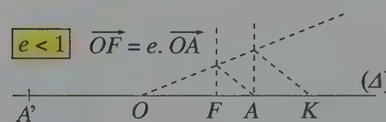
Points communs à (C) et (Δ)

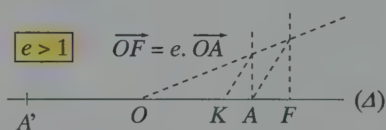
L'intersection de (C) et (Δ) (p. 257) contient deux points A et A' ; ils sont tels que : $\overrightarrow{AF} = -e\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{A'F} = e\overrightarrow{A'K}$, donc barycentres de $(F, 1)$ et (K, e) d'une part et de $(F, 1)$ et $(K, -e)$ d'autre part.

Soit O le milieu de $[AA']$:

$$\overrightarrow{OF} + e\,\overrightarrow{OK} = (1+e)\,\overrightarrow{OA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OF} - e\,\overrightarrow{OK} = (1-e)\,\overrightarrow{OA'}\ ;$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OF} = e\,\overrightarrow{OA} \quad \text{et} \quad e\,\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA}.}$$





□ *Remarque :* $\dfrac{\overline{OK}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OF}}$, donc K est l'image de A par l'homothétie de centre O qui transforme F en A ; en conséquence, les points O, A, A', F, K sont disposés sur (Δ) comme l'indiquent les figures ci-contre.

Équation de (C)

Notons c la distance OF, a la distance OA. Alors : $e = \dfrac{c}{a}$ et $OK = \dfrac{a}{e}$.

Choisissons un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan tel que $\overrightarrow{OF} = c\vec{i}$.
Soit x et y les coordonnées d'un point M dans ce repère, H le projeté orthogonal de M sur (D). On a :

points	O	A	F	K	M	H
coordonnées	$(0\,;0)$	$(a\,;0)$	$(c\,;0)$	$\left(\dfrac{a}{e}\,;0\right)$	$(x\,;y)$	$\left(\dfrac{a}{e}\,;y\right)$

Or : $\quad M \in (C) \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2$;

donc : $\quad M \in (C) \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = e^2\left(x - \dfrac{a}{e}\right)^2$;

$$M \in (C) \Leftrightarrow (x-c)^2 - (ex-a)^2 + y^2 = 0\ ;$$
$$M \in (C) \Leftrightarrow (1-e^2)(x^2-a^2) + y^2 = 0\ ;$$
$$M \in (C) \Leftrightarrow (1-e^2)x^2 + y^2 = a^2(1-e^2).$$

Or : $1 - e^2 = \dfrac{a^2 - c^2}{a^2}$ et $e \neq 1$; donc : $M \in (C) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$

Ainsi, (C) a pour équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$

□ *Remarque :* De cette équation, il résulte que O est centre de symétrie de (C) ; il est appelé **le centre de la conique,** dite **conique à centre.** De plus, la perpendiculaire (Δ') en O à (Δ) est un second axe de symétrie de (C).

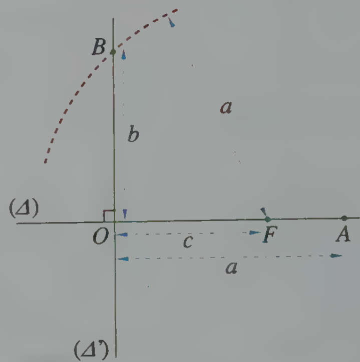
■ *Ellipse : $e < 1$*

Alors : $a > c$; notons b le nombre réel $\sqrt{a^2 - c^2}$:
$b > 0$ **et** $b^2 = a^2 - c^2$ $(a^2 = b^2 + c^2)$.

Une équation de (C) dans le repère $\left(O, \frac{1}{c}\,\overrightarrow{OF}, \vec{j}\right)$ est : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

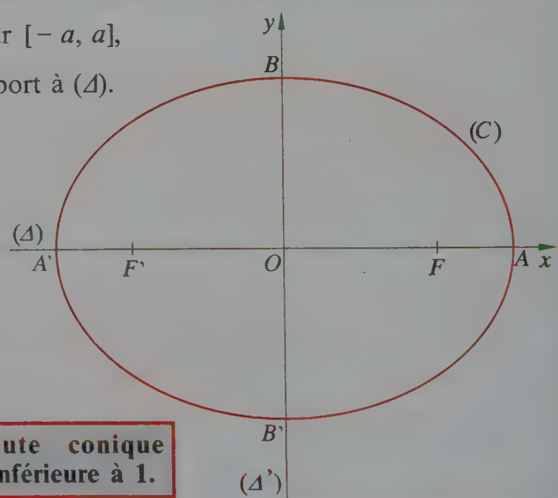
■ De cette équation, il résulte que (C) coupe (Δ') aux points $B(0\,;\,b)$ et $B'(0\,;\,-b)$. Le nombre b est appelé le **demi-axe non focal** de la conique (C).

De plus : $a^2 = b^2 + c^2$; donc : $a > b$ et a est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de sommet O dont les deux côtés de l'angle droit mesurent b et c ; d'où une construction de B à partir de O, F et A (fig. ci-contre).



La conique (C) est la réunion de la courbe représentative de la fonction f :
$x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, définie sur $[-a, a]$,
et de sa symétrique par rapport à (Δ).

■ Une étude de la fonction f conduit au tracé de la conique (C) appelée **ellipse.** A, B, A', B' sont les sommets de l'ellipse.



Définition 2

On appelle ellipse toute conique d'excentricité strictement inférieure à 1.

Propriété 3
équation réduite de l'ellipse

Une équation d'une ellipse de centre O, de demi-axe focal a et de demi-distance focale c, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant des vecteurs directeurs des axes de l'ellipse, est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{où} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

□ *Remarques.*

1° $a > b$: a est dit **demi-grand axe** et b **demi-petit axe** de l'ellipse.

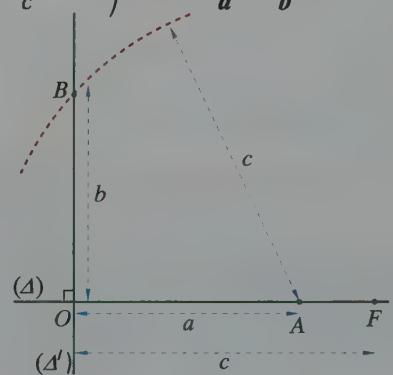
2° L'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ définit le cercle de centre O et de rayon a ; cette courbe ne peut être définie par foyer et directrice car $a = b$ conduirait à $c = 0$, $e = 0$ et OK non défini.

■ *Hyperbole :* $e > 1$

Alors : $a < c$; notons b le réel $\sqrt{c^2 - a^2}$:
$\boldsymbol{b > 0}$ **et** $\boldsymbol{b^2 = c^2 - a^2}$ $(c^2 = a^2 + b^2)$.

Une équation de (C) dans le repère $\left(O, \frac{1}{c}\overrightarrow{OF}, \vec{j}\right)$ est : $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$.

■ De cette équation, il résulte que (C) n'a aucun point en commun avec (Δ') ; on note quand même B le point de coordonnées $(0\,;\,b)$, et B' son symétrique par rapport à O. Alors $AB = c$.



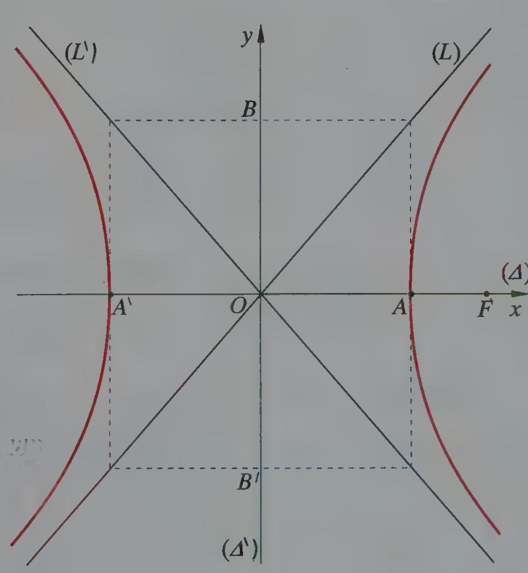
La conique (C) est la réunion de la courbe (C_1) représentative de la fonction $g : x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, définie sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, et de sa symétrique par rapport à (Δ).

■ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$; de plus, pour tout nombre réel x supérieur à a :

$$g(x) - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty}\left[g(x) - \frac{b}{a}x\right] = 0.$$

g étant paire, on déduit : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[g(x) + \frac{b}{a}x\right] = 0$.

Donc les droites (L) et (L') d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ sont asymptotes à (C_1), donc à (C) ; leur réunion admettant (Δ) pour axe de symétrie, (L) et (L') sont les asymptotes de (C).



■ Remarquons que les points d'abscisse a de (L) et (L') se projettent orthogonalement en B et B' sur (Δ'). Les asymptotes de (C) sont donc les diagonales du rectangle dont les milieux des côtés sont A, B, A', B'.

■ Dans le repère $(O, a\vec{i} + b\vec{j}, a\vec{i} - b\vec{j})$, le point M a pour coordonnées X et Y :

$x\vec{i} + y\vec{j} = X(a\vec{i} + b\vec{j}) + Y(a\vec{i} - b\vec{j})$, c'est-à-dire : $\begin{cases} x = a(X+Y) \\ y = b(X-Y). \end{cases}$

Une équation de (C) dans ce nouveau repère est donc : $(X+Y)^2 - (X-Y)^2 = 1$, c'est-à-dire $Y = \dfrac{1}{4X}$.

Ce qui prouve que la conique (C) est une hyperbole, de sommets A et A'.

Propriété 4
équation réduite de l'hyperbole

Une équation d'une hyperbole de centre O, de demi-axe focal a et de demi-distance focale c, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant des vecteurs directeurs des axes de l'hyperbole, est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{où} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Cette équation est dite équation réduite de l'hyperbole.

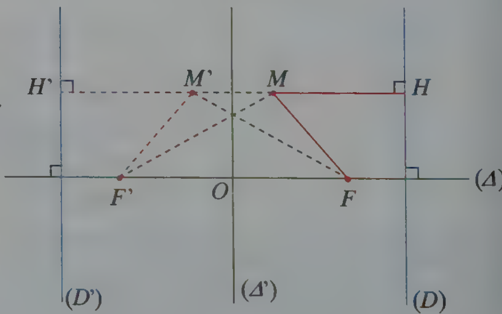
Les équations des asymptotes sont $y = \dfrac{b}{a}x$ et $y = -\dfrac{b}{a}x$.

Les sommets ont pour coordonnées $(a\ ;\ 0)$ et $(-a\ ;\ 0)$.

□ *Remarque :* si $a = b$, alors l'hyperbole est dite **équilatère.** Ses asymptotes sont perpendiculaires.

■ *Foyers et directrices associées*

• Appelons (D') et F' les symétriques de (D) et F par rapport à (Δ'). Soit M un point du plan et M' son symétrique par rapport à (Δ') : $M \in (C) \Leftrightarrow M' \in (C)$.



Le projeté orthogonal H' de M' sur (D') est le symétrique, par rapport à (Δ'), du projeté orthogonal H de M sur (D) ; d'où :

$MF' = M'F$ et $MH' = M'H$,

donc $\dfrac{MF'}{MH'} = \dfrac{M'F}{M'H}$.

Or : $M' \in (C) \Leftrightarrow \dfrac{M'F}{M'H} = e$, donc $M \in (C) \Leftrightarrow \dfrac{MF'}{MH'} = e$.

(C) est donc aussi la conique de foyer F' et de directrice (D').

• La conique (C) admet donc deux foyers, F et F', et deux directrices, (D) et (D'). On dit que (D) est **la directrice associée au foyer** F et (D') celle associée au foyer F'. L'axe de symétrie (Δ) de (C), qui porte les deux foyers F et F', est dit **axe focal** de la conique ; tandis que la droite (Δ') est dite **axe non focal** de la conique, les nombres a et c étant le **demi-axe focal** et **la demi-distance focale** de la conique.

COURS

3. ÉQUATIONS $y^2 = 2px$ ET $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal du plan.

1. Équation $y^2 = 2px$

Soit p un nombre réel non nul, F le point de coordonnées $\left(\frac{p}{2} ; 0\right)$ et (D) la droite d'équation $x = -\frac{p}{2}$. Alors l'étude faite page 258 montre que la parabole de foyer F et de directrice (D) a pour équation : $y^2 = 2px$.

Propriété 5

L'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan est celle de la parabole de foyer $F\left(\frac{p}{2} ; 0\right)$ et de directrice d'équation $x = -\frac{p}{2}$.
Le sommet de la parabole est l'origine O du repère.

EXEMPLES

1° L'équation $y^2 = -3x$ est celle de la parabole de foyer $F\left(-\frac{3}{4} ; 0\right)$ et de directrice (D) d'équation $x = \frac{3}{4}$.

2° L'équation $y = 5x^2$, équivalente à $x^2 = \frac{1}{5}y$, est celle de la parabole de foyer $F\left(0 ; \frac{1}{20}\right)$ et de directrice (D) d'équation $y = -\frac{1}{20}$.

2. Équation $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$

Soit α, β et γ des nombres réels non nuls. **Supposons γ positif.**
Notons (E) l'ensemble d'équation $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$.
L'équation $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$ s'écrit encore : $\dfrac{x^2}{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)} = 1.$

Si $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\beta}$ sont négatifs, c'est-à-dire α et β négatifs, alors (E) est vide.

Si $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\beta}$ sont positifs et égaux, alors (E) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$.

COURS

■ *Supposons $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\beta}$ positifs*

• **Cas où** $\alpha < \beta$. Posons $a = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$, $b = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = \frac{c}{a}$.

Notons F le point de coordonnées $(c\,;\,0)$ et (D) la droite d'équation $x = \frac{a}{e}$.

D'après l'étude faite page 260, l'ellipse de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e a pour équation :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, c'est-à-dire $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$ qui est l'équation de (E).

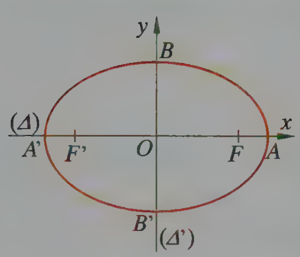
• **Cas où** $\alpha > \beta$. Posons $a = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$ et $b = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$.

(E) est l'ellipse de foyer F de coordonnées $(0\,;\,c)$, de directrice (D) d'équation $y = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité e égale à $\frac{c}{a}$.

EXEMPLES

1° L'équation $4x^2 + 9y^2 = 36$, équivalente à l'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, est celle d'une ellipse de centre O.

Avec les notations utilisées dans le cours : $a = 3$ et $b = 2$, l'axe focal est l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées est l'axe non focal ; les sommets sont : $A(3\,;\,0)$ et $A'(-3\,;\,0)$, $B(0\,;\,2)$ et $B'(0\,;\,-2)$.



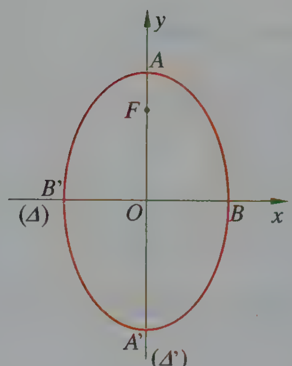
Unité : $\frac{1}{2}$ cm

Puisque $b^2 = a^2 - c^2$, $c^2 = 5$; donc $c = \sqrt{5}$ et $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Les foyers sont $F(\sqrt{5}\,;\,0)$ et $F'(-\sqrt{5}\,;\,0)$.

Les directrices ont pour équations $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$ et $x = -\frac{9}{\sqrt{5}}$.

2° L'équation $2x^2 + y^2 = 3$, équivalente à l'équation $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{y^2}{3} = 1$, est celle d'une ellipse de centre O.



Unité : 1 cm

Ici : $a = \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$; l'axe focal est l'axe des ordonnées, l'axe non focal est l'axe des abscisses ; les sommets sont $A(0\,;\,\sqrt{3})$ et $A'(0\,;\,-\sqrt{3})$, $B\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,;\,0\right)$ et $B'\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\,;\,0\right)$. $c^2 = a^2 - b^2$, donc : $c = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Les foyers sont $F\left(0\,;\,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ et $F'\left(0\,;\,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Les directrices ont pour équations $y = \sqrt{6}$ et $y = -\sqrt{6}$.

COURS

■ Supposons $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\beta}$ de signes contraires

• **Si** $\alpha > 0$ **alors** $\beta < 0$. Posons : $a = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$, $b = \sqrt{\frac{\gamma}{-\beta}}$,

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $e = \frac{c}{a}$.

Notons F le point de coordonnées $(c\,;\,0)$ et (D) la droite d'équation $x = \frac{a}{e}$.
D'après l'étude faite page 261 l'hyperbole de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e a pour équation :

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, c'est-à-dire $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$ qui est l'équation de (E).

• **Si** $\alpha < 0$ **alors** $\beta > 0$.
En échangeant, dans les lignes qui précèdent, x et y d'une part, α et β d'autre part, on obtient le résultat : (E) est l'hyperbole de foyer de coordonnées $(0\,;\,c)$, de directrice la droite d'équation $y = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité e égale à $\frac{c}{a}$, avec : $a = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$ et $b = \sqrt{\frac{\gamma}{-\alpha}}$.

EXEMPLE

L'équation $\left|\frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{2}x^2\right| = 2$ est celle de la réunion des deux hyperboles (H_1) et (H_2) d'équations respectives : $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{4} = 1$ et $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$.

Elles ont même centre O et les mêmes axes.

• Pour (H_1) : l'axe focal est l'axe des ordonnées ; l'axe non focal est l'axe des abscisses :

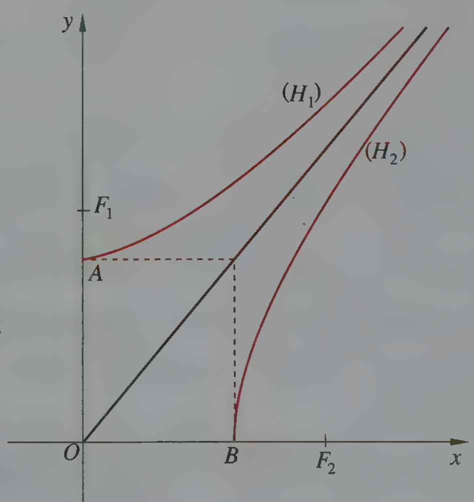
$a_1 = \sqrt{6}$,
$b_1 = 2$;
$c_1^2 = a_1^2 + b_1^2$, donc : $c_1 = \sqrt{10}$;
$e_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}$.

Les sommets sont $A(0\,;\,\sqrt{6})$ et $A'(0\,;\,-\sqrt{6})$.

Les foyers sont $F_1(0\,;\,\sqrt{10})$ et $F_1'(0\,;\,-\sqrt{10})$.

Les directrices ont pour équations :

$y = 3\sqrt{\frac{2}{5}}$ et $y = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$.



La figure sera complétée en effectuant une symétrie orthogonale d'axe (Ox) (resp. (Oy)), suivie d'une symétrie orthogonale d'axe (Oy) (resp. (Ox)).

• Pour (H_2) : l'axe focal est l'axe des abscisses ; l'axe non focal est l'axe des ordonnées : $a_2 = 2$, $b_2 = \sqrt{6}$; $c_2 = c_1$; $e_2 = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Les sommets sont : $B(2\,;0)$ et $B'(-2\,;0)$.

Les foyers sont $F_2(\sqrt{10}\,;0)$ et $F'_2(-\sqrt{10}\,;0)$.

Les directrices ont pour équations : $x = 2\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ et $x = -2\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

Les deux hyperboles ont les mêmes asymptotes, d'équations $y = \dfrac{\sqrt{6}}{2}x$ et $y = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}x$.

Propriété 6

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, l'équation $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$, où α, β et γ sont des nombres réels non nuls, est celle d'un cercle, d'une ellipse ou d'une hyperbole, éventuellement de l'ensemble vide.

4. ÉTUDE PARTICULIÈRE DE L'ELLIPSE

1. Représentation paramétrique d'une ellipse

Soit (E) une ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal du plan.

• Quel que soit le point $M(x, y)$ du plan, si M appartient à (E) alors :

$$\left|\frac{x}{a}\right| \leqslant 1, \quad \left|\frac{y}{b}\right| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

donc il existe au moins un nombre réel t tel que $\dfrac{x}{a} = \cos t$ et $\dfrac{y}{b} = \sin t$,

c'est-à-dire tel que : $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t. \end{cases}$

• **Réciproquement** : si t est un nombre réel, alors le point $M(a\cos t, b\sin t)$ appartient à l'ellipse (E).

Propriété 7

Soit (E) une ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal du plan.

Une représentation paramétrique de l'ellipse (E) est : $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t. \end{cases}$

COURS

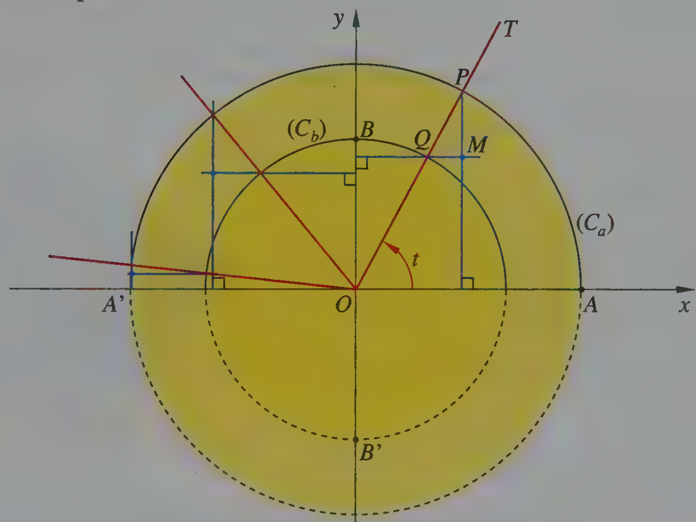
2. Ellipse, cercle et affinité

■ *Construction point par point de l'ellipse*

Reprenons l'ellipse (E) précédente en supposant $0 < b < a$. Appelons (C_a) et (C_b) les cercles de centre O et de rayons respectifs a et b (appelés respectivement **cercle principal** et **cercle secondaire** de l'ellipse).

Une demi-droite $[OT)$ rencontre (C_a) en P et (C_b) en Q ; notons t une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OP})$. Les parallèles en $P(a \cos t, a \sin t)$ à l'axe des ordonnées et en $Q(b \cos t, b \sin t)$ à l'axe des abscisses se coupent en $M(a \cos t, b \sin t)$, point de l'ellipse.

D'où une construction point par point de l'ellipse.



■ *Affinité*

Au point $P(X, Y)$ du cercle (C_a), correspond, par le procédé précédent, le point $M\left(X, \frac{b}{a} Y\right)$.

Plus généralement : soit (L) une droite du plan et k un nombre réel non nul. A tout point M du plan, de projeté orthogonal m sur (L), associons M' tel que $\overrightarrow{mM'} = k\,\overrightarrow{mM}$; M' est l'image de M par une transformation du plan appelée **affinité orthogonale d'axe (L) et de rapport k.**

Ainsi, dans le paragraphe précédent, l'ellipse (E) est l'image du cercle (C_a) par l'affinité orthogonale d'axe (OA) et de rapport $\frac{b}{a}$ ou $\frac{-b}{a}$; elle est aussi l'image du cercle (C_b) par l'affinité orthogonale d'axe (OB) et de rapport $\frac{a}{b}$ ou $-\frac{a}{b}$.

Les cercles (C_a) et (C_b) sont les images de (E) par les affinités orthogonales d'axes respectifs (OA) et (OB) et de rapports respectifs $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$.

Dans l'AP3, **1 ■,** la courbe (C_2) est l'image du cercle (C) par l'affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport 2 ; (C_2) est donc une ellipse.

□ *Remarques.*

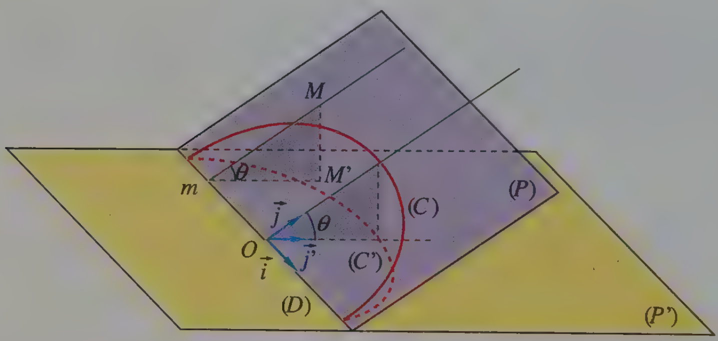
1° Une réflexion d'axe (L) est l'affinité orthogonale d'axe (L) et de rapport -1.

2° L'image d'un cercle par une affinité orthogonale d'axe un diamètre du cercle est une ellipse (éventuellement un cercle).

Projection d'un cercle sur un plan

Soit (C) un cercle d'un plan (P), de centre O et de rayon R, (P') un plan qui n'est ni parallèle à (P) ni perpendiculaire à (P).
La figure obtenue par projection orthogonale de (C) sur (P') est une courbe (C').

Les figures obtenues par projections orthogonales sur deux plans parallèles étant des figures égales, car déduites l'une de l'autre par translation, on peut supposer que le plan (P') passe par le centre O de (C). Alors (P) et (P') se coupent suivant une droite (D) qui passe par O.



Prenons un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de (P) tel que $\vec{i}$ soit un vecteur directeur de (D), et un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}\,')$ de (P') tel que, si I est le point défini par $\overrightarrow{OI} = \vec{j}$, et I' son projeté orthogonal sur (P'), alors $\overrightarrow{OI'}$ et $\vec{j}\,'$, colinéaires, sont de même sens ; notons θ l'angle $\widehat{IOI'}$.

Un point M de (P), de coordonnées x et y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, se projette orthogonalement en m sur (D) et en M' sur (P').

Soit x' et y' les coordonnées de M' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}\,')$ de (P').
Alors : $x = x'$ car M et M' ont même projeté orthogonal m sur (D) ;

$y' = \overrightarrow{mM'} \cdot \vec{j}\,'$; or $\overrightarrow{mM'} \cdot \vec{j}\,' = \overrightarrow{mM} \cdot \vec{j}\,'$ et $\overrightarrow{mM} = y\vec{j}$;

donc $y' = y(\vec{j} \cdot \vec{j}\,')$, c'est-à-dire : $y' = y \cos\theta$.

Ainsi : $x' = x$ et $y' = y\cos\theta$. Or : $M \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2$.

Donc : $M \in (C) \Leftrightarrow \dfrac{x'^2}{R^2} + \dfrac{y'^2}{R^2\cos^2\theta} = 1$.

L'équation $\dfrac{x^2}{R^2} + \dfrac{y^2}{R^2\cos^2\theta} = 1$ est celle d'une ellipse.

Propriété 8 **La figure projetée orthogonale d'un cercle sur un plan est une ellipse.**

TRAVAUX PRATIQUES

TP1 Tangentes à une conique à centre

Dans le chapitre 2 du tome d'Analyse, nous avons vu comment un paramétrage d'une courbe permet, dans certaines conditions, de déterminer la tangente en un point à cette courbe. Intéressons-nous au cas des coniques à centre.

1 ■ *Ellipse*

Soit (E) une ellipse, O son centre, A et A' ses sommets sur l'axe focal, B et B' ses sommets sur l'axe non focal, a et b son demi-grand axe et son demi-petit axe.
On a établi dans le cours qu'un paramétrage de (E) dans le repère orthonormal $\left(O, \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{b}\overrightarrow{OB}\right)$ du plan est $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t. \end{cases}$

1° Justifiez l'existence d'une tangente en chaque point de (E) et déterminez-en un vecteur directeur.

2° La tangente au cercle (C) de centre O et de rayon a au point $P(a\cos t, a\sin t)$ coupe en général (OA) en un point m.
Calculez en fonction de t les coordonnées de m, puis celles de $\overrightarrow{mM}$.

3° Justifiez que, si M est un point de l'ellipse (E) qui n'est pas l'un de ses sommets, alors la tangente en M à (E) est la droite (mM).

Application. Construisez une ellipse point par point et la tangente en chaque point.

2 ■ *Hyperbole*

Soit (H) une hyperbole, de centre O, d'asymptotes (L) et (L').
Dans un repère quelconque dont les axes sont portés par ces asymptotes, (H) a une équation de la forme $xy = k$, où k est un nombre réel non nul.

D'où un paramétrage de (H) : $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{k}{t} \end{cases}$ dans un tel repère du plan.

1° Tangente en un point.

a) Retrouvez l'existence d'une tangente en chaque point de (H) et déterminez-en un vecteur directeur.

b) Démontrez que, si M est un point de (H), alors (L) et (L') coupent la tangente en M à (H) en deux points symétriques par rapport à M.

2° Construction point par point d'une hyperbole.

a) Soit K le point d'abscisse 1 de (H), (d) une droite qui passe par K et qui coupe (L) en P et (L') en P', M le symétrique de K par rapport au milieu de $[PP']$.
Exprimez les coordonnées de M en fonction de k et du coefficient directeur m de (d) et déduisez-en que M est sur (H).

b) Construisez point par point une hyperbole équilatère dont les sommets sont deux points donnés distants de 4 cm.

TP2 Définition bifocale d'une conique à centre

Une conique à centre, définie dans le cours «par foyer et directrice», possède en fait deux foyers (et deux directrices). Nous vous proposons d'établir une autre définition, dite bifocale, d'une telle conique, à partir de ses deux foyers.

Soit (C) une conique à centre, d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. La distance du centre O de (C) à ses deux directrices (D) et (D') est $\frac{a^2}{c}$; les foyers F et F' de (C) sont tels que $\overrightarrow{OF'} = -\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{OF} = c\,\vec{i}$.

1° Démontrez que si (C) est une ellipse alors (C) et les points F et F' sont entre (D) et (D') ; tandis que si (C) est une hyperbole alors (C) et les points F et F' sont hors de la bande de plan délimitée par (D) et (D').

2° Soit M un point de (C), H et H' ses projetés orthogonaux respectifs sur (D) et (D').

a) Démontrez que $\frac{MF + MF'}{MH + MH'} = \frac{c}{a}$ et $\frac{MF - MF'}{MH - MH'} = \frac{c}{a}$.

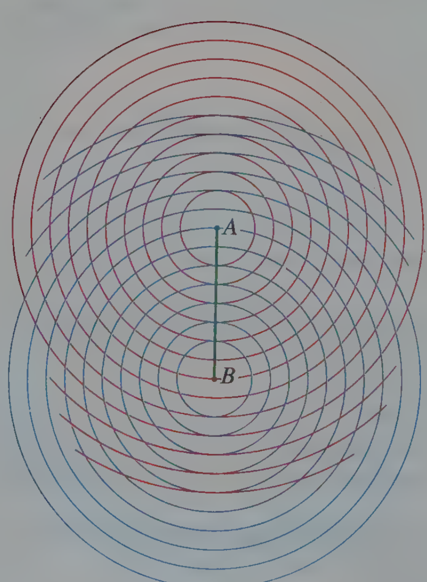
b) Démontrez que si (C) est une ellipse alors $MH + MH' = 2\frac{a^2}{c}$ et si (C) est une hyperbole alors $|MH - MH'| = 2\frac{a^2}{c}$.

c) Déduisez-en que si (C) est une ellipse alors $MF + MF' = 2a$ et si (C) est une hyperbole alors $|MF - MF'| = 2a$.

3° Réciproque. Soit $M(x, y)$ un point du plan et H son projeté orthogonal sur (D).

a) Démontrez que : $\overline{MH} = \frac{a^2}{c} - x$ et $MF^2 - MF'^2 = -4cx$.

b) Déduisez-en que si $MF + MF' = 2a$ alors $MF = a - \frac{c}{a}x$ et si $|MF - MF'| = 2a$ alors $MF = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$.



c) Démontrez alors que :

si $MF + MF' = 2a$ alors $\frac{c}{a} < 1$ et $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$;

si $|MF - MF'| = 2a$ alors $\frac{c}{a} > 1$ et $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$.

4° Proposez une définition bifocale d'une ellipse, d'une hyperbole.

5° Application. Soit A et B deux points du plan tels que : $AB = 2\sqrt{2}$. Reconnaissez la nature des lignes de niveau 6, 2, $2\sqrt{2}$ de $M \mapsto MA + MB$ puis de $M \mapsto |MA - MB|$.

6° Justifiez que le dessin ci-contre permet de construire point par point des ellipses et des hyperboles de foyers A et B.

TP3 Roberval et la parabole

La méthode proposée par Roberval pour construire la tangente à une courbe en l'un de ses points s'appuie sur la composition des mouvements. Appliquée à la parabole, elle permet de retrouver les résultats déjà connus depuis l'antiquité et repris dans le traité d'Apollonius.
Roberval utilise cette cohérence des résultats pour valider sa méthode.

1 ■ *Propriété des tangentes à une parabole*

La parabole (P) de foyer F, de directrice (D), de paramètre p a pour équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que, si K est le projeté orthogonal de F sur (D) alors O est le milieu de $[KF]$ et $\vec{i} = \frac{1}{KF}\overrightarrow{KF}$.

Paramétrons cette parabole en posant, pour t nombre réel $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2p}t^2 \\ y = t. \end{cases}$

1° Retrouvez l'existence d'une tangente à (P) en chacun de ses points.

2° Exprimez, en fonction de t, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ directeur de la tangente à (P) en $M(t)$.

3° On appelle H le projeté orthogonal de M sur (D).

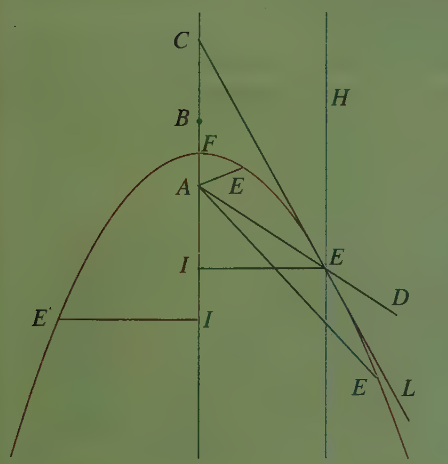
a) Calculez le produit scalaire $\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{V(t)}$.

b) Énoncez une propriété de la tangente à (P) en $M(t)$.

2 ■ *Texte de Roberval*

* Dans ce texte, reproduit du vieux français, certains «*f*» sont à transcrire en «*s*» : « Monsieur », « second »...

Premier éxemple des touchantes de la parabole.
Soit que l'on nous ait donné la parabole EFE, & le moyen de la décrire par la cinquiéme méthode générale de Monfieur Mydorge livre fecond, propofition 25. qui eft telle.
Le fommet & le foyer de la parabole étant donnés de pofition, trouver dans le même plan tant de points qu'on voudra par lefquels la parabole eft décrite. Soit A le foyer, & F le fommet. foit tirée la ligne AF & prolongée de F vers B, & foit FB égale à AF la même ligne BFA fera l'axe de la parabole. Prenez dans FA autant de points I qu'il vous plaira, tirez par ces points des lignes perpendiculaires à FA ; du centre A & de l'intervale d'entre chaque perpendiculaire & le point B, comme BI, décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en E, la parabole paffera par les points E.



Cela pofé fi l'on demande la touchante de la Parabole au point E, foit tirée la ligne AE prolongée comme en D, & la ligne EI perpendiculaire à AB, & encore la ligne HE parallele à l'axe FAI, alors il eft clair par la defcription ci-deffus, que le mouvement du point E décrivant la Parabole, eft compofé de deux mouvemens droits égaux, dont l'un eft la ligne AE, & l'autre eft la ligne HE fur laquelle il fe meût de même viteffe que le point I dans la ligne BA, laquelle viteffe eft pareille à celle de la ligne AE par la conftruction, puifque AE eft toûjours égale à BI. Partant puifque la direction de ces mouvements égaux eft connuë, fçavoir fuivant les lignes droites AED, HE données de pofition, fi vous divifez l'angle AEH en deux également par la ligne LEC qui eft le diamétre d'un rhombe autour de l'angle AEH, (& par conféquent la direction du mouvement compofé des deux HE, EA,) la ligne LEC fera la touchante.

3 ■ *Explication du texte*

1° Vocabulaire, expressions.
« Du centre A & de l'intervale d'entre chaque perpendiculaire et le point B, comme BI... » veut dire : de centre A et de rayon BI...
La « touchante » désigne la tangente.
Les mouvements « droits égaux » sont des mouvements rectilignes et de même vitesse.
Un rhombe est un losange.
Le « diamètre du rhombe » est une diagonale du losange.

2° Construction de la parabole.
Les trois premiers paragraphes : « Soit que l'on ... par les points E » donnent une construction point par point de la parabole.

a) Comment Roberval remplace-t-il la donnée de la directrice de la parabole ?

b) Que représente « l'intervale d'entre chaque perpendiculaire et le point B », c'est-à-dire BI, pour les notations traditionnelles : F, (D), M et H, projeté orthogonal de M sur la directrice (D) ?

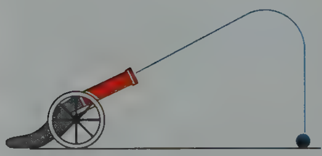
c) Justifiez la construction de E donnée par Roberval.

3° Construction de la tangente.
Le dernier paragraphe « Cela pofé si l'on demande ... fera la touchante », donne une construction de la tangente en E à la parabole. Justifiez, à l'aide du résultat de la question **1** ■, cette construction.

TP4 Situations menant à des coniques

Dans de nombreux domaines : astronomie, cinématique, électricité, optique... les coniques interviennent comme trajectoires d'objets ou de particules élémentaires. Étudions quelques-unes de ces situations.

1 ■ *Particule soumise à une force constante*



Trajectoire du boulet de canon telle qu'elle est décrite au XVe siècle.

Deux problèmes identiques figurent au programme de physique de Terminale C-E : mouvement d'une particule dans un champ de pesanteur uniforme et mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme. Il s'agit, dans les deux cas, de déterminer la trajectoire d'une particule soumise à une* force constante. *Vous avez, au chapitre 6, déterminé la trajectoire d'une particule sous l'action d'une* force centrale *(p. 153).

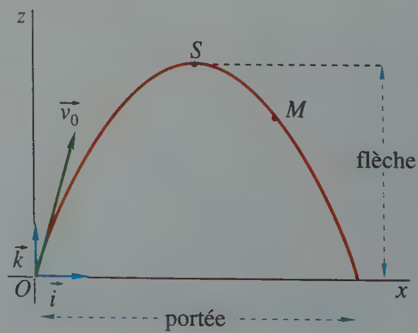
Traitons le cas d'un projectile de masse m lancé avec un vecteur vitesse initial $\vec{v_0}$.

On note α l'angle du vecteur $\vec{v}_0$ avec le plan horizontal. Le repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$ utilisé est un repère du plan de la trajectoire (on admettra que, comme pour les mouvements à force centrale, la trajectoire est plane), le point O coïncide avec la position initiale de la particule.

La masse de la particule est m (en grammes), l'accélération de la pesanteur est g (en m . s^{-2}).

1° Justifiez que les coordonnées x et z du point M s'expriment, en fonction du temps t, par :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \alpha \\ z(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha. \end{cases}$$



2° Exprimez z en fonction de x. Quelle est la nature de la trajectoire ?

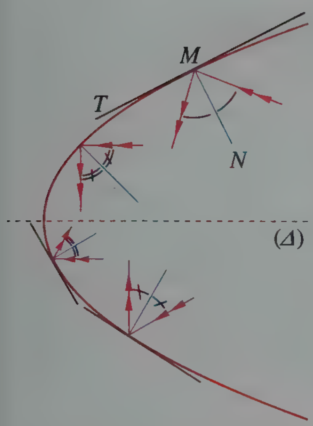
3° *a*) Calculez, en fonction de v_0 et α, l'ordonnée du sommet S de la trajectoire.

b) Calculez l'abscisse x_0 du deuxième point d'intersection de la trajectoire avec l'axe des abscisses.

4° *Application numérique :* $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $v_0 = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Calculer x_0 dans les cas suivants : $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

2 ■ *Optique : four solaire*



Un four solaire est un dispositif permettant de concentrer, en un point fixe, le rayonnement solaire.

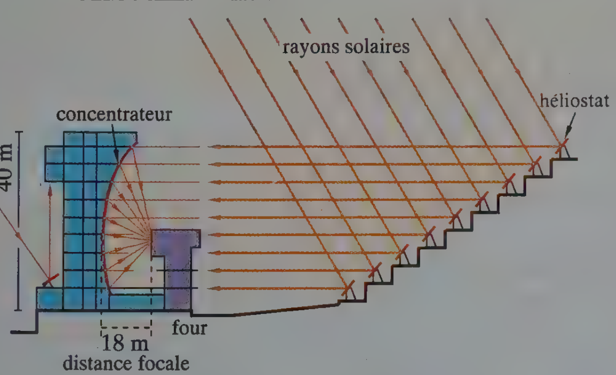
Ce dispositif comprend un miroir ayant la forme d'un paraboloïde, surface de révolution obtenue en faisant tourner une parabole autour de son axe.

Dans un plan contenant l'axe du miroir, un rayon venant frapper en M la parabole, est réfléchi suivant la direction symétrique de la direction incidente par rapport à la normale en M à la parabole.

1° Quelle doit être la direction commune aux rayons incidents pour que les rayons réfléchis soient convergents ?

2° Que représente ce point de convergence pour la parabole ?

Le four solaire d'Odeillo.

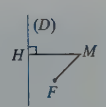


Descriptif du four d'Odeillo.
Le four solaire d'Odeillo (1970), actuellement le four le plus puissant du monde (1 000 kW), permet d'obtenir des températures de l'ordre de 3 500 °C. La direction des rayons solaires n'étant pas fixe par rapport à l'axe de la parabole, un dispositif permet d'obtenir un faisceau de lumière constamment parallèle à l'axe du paraboloïde que constitue le miroir concentrateur. Ce dispositif est composé d'héliostats à orientation variable ; les rayons réfléchis par les héliostats couvrent complètement les 1 830 m^2 du miroir.

FICHE MÉTHODE

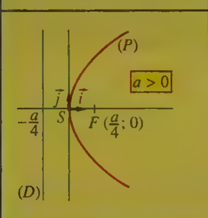
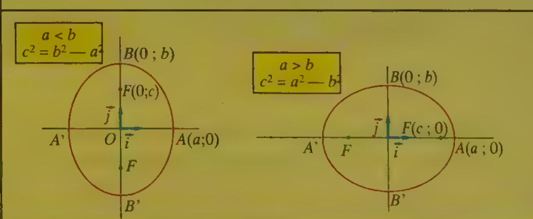
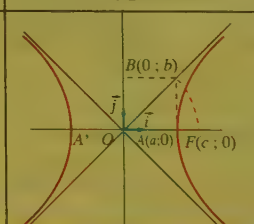
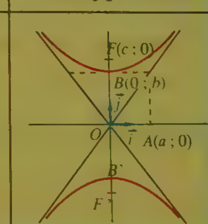
Comment reconnaître et caractériser une conique

1 Retrouver la définition par foyer et directrice : $\dfrac{MF}{MH} = e$



Si	$e = 1$	$0 < e < 1$	$e > 1$
alors la courbe est	une parabole	une ellipse	une hyperbole

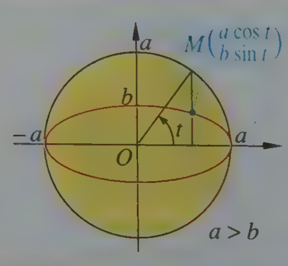
2 Retrouver l'équation réduite de la conique

Équation : $y^2 = ax$	**Équation :** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	**Équation :** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	**Équation :** $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$
Courbe : une parabole	**Courbe :** une ellipse	**Courbe :** une hyperbole	**Courbe :** une hyperbole
			

3 Retrouver un paramétrage de la courbe

Les équations $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ définissent :

- une ellipse si $a \neq b$
- un cercle si $a = b$.



EXERCICES COMMENTÉS

Exercice 1

Énoncé

Soit (Γ) la courbe dont une équation dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est : $3x^2+4y^2-6x+16y+7=0$.

Déterminez la nature de (Γ) et précisez ses éléments caractéristiques : centre, foyers, sommets...

Solution

Si cette courbe est une conique alors l'origine du repère n'est pas le centre de la conique. Nous procéderons à un changement d'origine pour déterminer ce centre. L'utilisation de la forme canonique de $3x^2 - 6x$ et de $4y^2 + 16y$ conduira à une équation du type $3X^2 + 4Y^2 = \gamma$.

L'équation $3x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 7 = 0$ équivaut à :

$3(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 4y) + 7 = 0,$

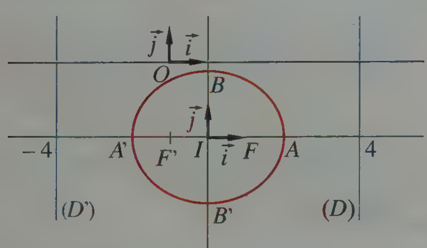
$3\left((x-1)^2 - 1\right) + 4\left((y+2)^2 - 4\right) + 7 = 0,$

$3(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 12, \qquad \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{3} = 1.$

Posons $X = x - 1$ et $Y = y + 2$. Soit I de coordonnées $(1\,;\,-2)$ et M de coordonnées (x, y).

On a : $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{IM} = (x-1)\,\vec{i} + (y+2)\,\vec{j}$.

X et Y sont donc les coordonnées de M dans le repère orthonormal $(I, \vec{i}, \vec{j})$.



La courbe (Γ), d'équation $\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{3} = 1$ dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$ est une ellipse. Le centre de (Γ) est I, les demi-axes a et b sont tels que $a = 2$, $b = \sqrt{3}$. Alors $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ donc $c = 1$. L'excentricité est $1/2$.

Dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$ les foyers ont pour coordonnées $(-1\,;\,0)$ et $(1\,;\,0)$, les sommets $(2\,;\,0)$, $(-2\,;\,0)$, $(0\,;\,\sqrt{3})$, $(0\,;\,-\sqrt{3})$, les directrices ont pour équations $X = 4$ et $X = -4$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les foyers ont pour coordonnées $(0\,;\,-2)$ et $(2\,;\,-2)$, les sommets $(3\,;\,-2)$, $(-1\,;\,-2)$, $(1\,;\,\sqrt{3}-2)$, $(1\,;\,-\sqrt{3}-2)$, les directrices ont pour équations $x = 5$ et $x = -3$.

Exercice 2

Énoncé

Dans le plan, on donne deux points A et B et la perpendiculaire (D) en B à (AB).

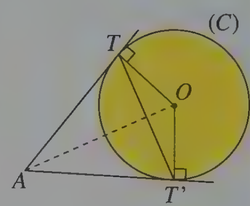
Un cercle (C) du plan est tel que les points de contact T et T' des tangentes menées de A à (C) déterminent avec A un triangle équilatéral.

Déterminez l'ensemble décrit par le centre O du cercle (C), celui-ci variant en restant tangent à (D).

Solution

• La question porte sur le centre O du cercle (C) ; il est donc nécessaire de commencer par traduire la propriété qui définit (C) par une propriété sur O.

• Un triangle équilatéral ATT' étant donné, le centre O d'un cercle tangent en T à (AT) et en T' à (AT') est tel que $OA = 2OT$.

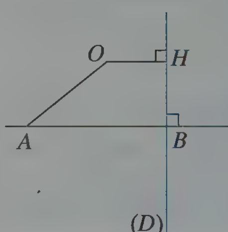


• Si un cercle est tangent à (D), alors son rayon est égal à la distance de son centre à (D).

1° *Analyse.* Si un cercle (C), de centre O et de rayon R, est tangent à (D), alors O se projette orthogonalement en H sur (D) et $OH = R$. De plus :

$R = OT$ et $OA = 2OT$;

donc $\dfrac{OA}{OH} = 2.$



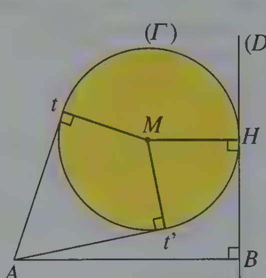
O est sur l'hyperbole (H) de foyer A, de directrice (D) et d'excentricité 2.

2° *Réciproque.* Soit M un point de l'hyperbole (H), (Γ), le cercle de centre M et tangent à (D), ρ le rayon de (Γ). Alors $AM = 2\rho$, donc A est extérieur à (Γ).

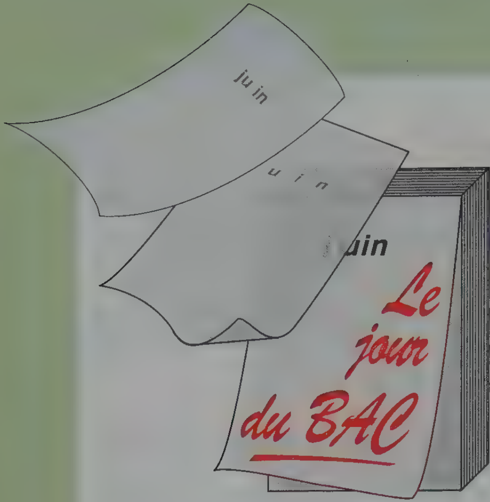
Les tangentes à (Γ) qui passent par A touchent (Γ) en t et t' et sont symétriques par rapport à (AM).

De plus : $\sin \widehat{tAM} = \dfrac{1}{2}$,

donc le triangle tAt' est équilatéral et (Γ) est un cercle (C).



3° *Conclusion.* L'ensemble cherché est l'hyperbole (H).



Énoncé

Bac 1989. Exercice partiel.

L'espace $(\mathcal{E})$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan (P) d'équation $3x + 4z - 5 = 0$ et l'ensemble (Γ) des points du plan (xOy) équidistants du plan (P) et de l'origine.

1° Calculer la distance au plan (P) d'un point M_0 de $(\mathcal{E})$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0). En déduire que (Γ) admet pour équation dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $\quad x^2 + y^2 = \left(\dfrac{3x-5}{5}\right)^2$.

2° Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (xOy). Montrer que (Γ) est une conique de foyer O et de directrice associée (D). Déterminer son excentricité.

A la lecture du sujet

L'objet de l'exercice est la construction d'une conique définie à partir d'éléments géométriques de l'espace.
La résolution nécessite de savoir calculer analytiquement la distance d'un point à un plan, de reconnaître, inversement, la distance d'un point à une droite à partir d'une expression algébrique et enfin de reconnaître une conique à l'aide de sa définition monofocale (un foyer et la directrice associée).

Analyse du problème

La question **1°** a pour but de déterminer une équation de la courbe (Γ). La dernière partie de la question, dans sa formulation, permet de contrôler le résultat obtenu pour la distance de M_0 à (P).
Dans la question **2°**, la courbe (Γ) doit être reconnue géométriquement (foyer, directrice, excentricité). Il s'agit donc d'interpréter géométriquement les termes de l'équation obtenue à la question **1°** : $x^2 + y^2$ et $\dfrac{3x-5}{5}$ qu'il sera bon d'écrire $\dfrac{3}{5}\left(x - \dfrac{5}{3}\right)$ pour faire apparaître la différence de deux abscisses, x et $\dfrac{5}{3}$.
La fin de l'exercice (question **3°**) consistait à dessiner la courbe (Γ) dans le plan (xOy) après en avoir défini les éléments particuliers : centre et sommets.

Une solution

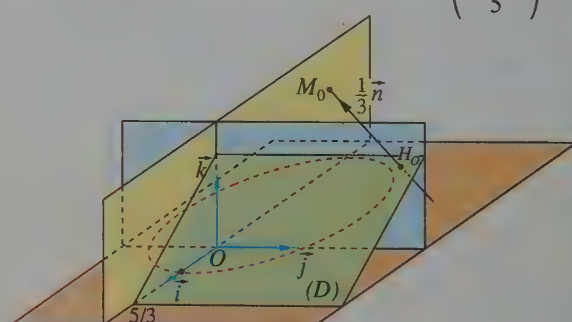
1° Soit H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur (P), A un point de (P), de coordonnées (α, β, γ), et $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3 ; 0 ; 4)$.
$\vec{n}$ étant normal à (P) on a :
$\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M_0H_0} \cdot \vec{n}$ donc $|\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}| = M_0H_0 \times \|\vec{n}\|$,

d'où : $\quad M_0H_0 = \dfrac{1}{\|\vec{n}\|} |\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}|$ c'est-à-dire :

$$M_0H_0 = \frac{1}{5} |3(\alpha - x_0) + 4(\gamma - z_0)|.$$

$3\alpha + 4\gamma - 5 = 0, \quad$ donc $\quad M_0H_0 = \dfrac{1}{5} |3x_0 + 4z_0 - 5|.$

Un point M de coordonnées $(x ; y ; 0)$, puisque situé dans (xOy), appartient à (Γ) si et seulement si $OM^2 = MH^2 \quad$ c'est-à-dire : $\quad x^2 + y^2 = \left(\dfrac{3x-5}{5}\right)^2$.



2° Une équation de (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $3x - 5 = 0$. Si un point M, de coordonnées (x, y) dans ce repère, se projette orthogonalement en H sur (D) alors les coordonnées de H sont $\left(\dfrac{5}{3} ; y\right)$ et :

$\overrightarrow{HM} = \left(x - \dfrac{5}{3}\right)\vec{i} \qquad$ donc $\qquad HM = \left|x - \dfrac{5}{3}\right| \qquad$ et

$\left|\dfrac{3x-5}{5}\right| = \dfrac{3}{5} HM$. L'équation de (Γ) équivaut donc à :

$OM^2 = \dfrac{9}{25} HM^2 \quad$ soit $\quad OM = \dfrac{3}{5} HM.$

La courbe (Γ) est l'ellipse de foyer O, de directrice (D) et d'excentricité $\dfrac{3}{5}$.

Exercices et problèmes

Q.C.M.

Dans chacun des cas, une ou plusieurs réponses sont exactes. Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ utilisé est orthonormal.

1 Une parabole a pour équation : $y^2 = -2x$:

son paramètre est -1 .... ☐

son paramètre est 1 .... ☐

son axe est l'axe des abscisses .... ☐

la directrice est l'axe des ordonnées .... ☐

2 Une ellipse a pour équation $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$:

son axe focal est l'axe des ordonnées .... ☐

son excentricité est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .... ☐

son excentricité est $\frac{1}{2}$ .... ☐

elle est l'image du cercle de centre O et de rayon 2 par l'affinité orthogonale d'axe l'axe des abscisses et de rapport $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .... ☐

3 Une hyperbole a pour équation réduite $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$:

son axe focal est l'axe des abscisses .... ☐

une asymptote a pour équation $y = \frac{a}{b}x$ .... ☐

son excentricité est $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ .... ☐

4 Les points O, F, A, K sont respectivement le centre, un foyer, un sommet et le pied sur l'axe focal de la directrice associée à F (F, A, K situés du même côté de O) d'une hyperbole.
Ces points sont dans l'ordre :

O, A, K, F .... ☐

O, F, A, K .... ☐

O, K, A, F .... ☐

O, A, F, K .... ☐

5 L'équation $y^2 = ax^2 + bx + c$ est celle :

d'un cercle si $a = 1$ .... ☐

d'une parabole si $a = 0$ et $b \neq 0$ .... ☐

d'une ellipse ou un cercle si $a < 0$ .... ☐

d'une hyperbole si $a > 0$ .... ☐

6 Dans une hyperbole, a, b, c (notations du cours) sont tels que :

$a < b < c$ .... ☐

$a < c$ et $b < c$ .... ☐

$b < a$ .... ☐

7 Une conique à centre a pour demi-axe focal a, pour demi-axe non focal b et pour demi-distance focale c :

son excentricité est $\frac{b}{a}$ .... ☐

la distance du centre à la directrice est $\frac{a^2}{c}$ .... ☐

la demi-distance focale est $\sqrt{a^2+b^2}$ .... ☐

8 Soit A et B deux points du plan, (D) une droite perpendiculaire à (AB) en I tel que $I \notin [AB]$ et $IB > IA$.
Une ellipse de foyers A et B et dont (D) est une directrice est :

une ligne de niveau de $M \mapsto \frac{MA}{MB}$ .... ☐

une ligne de niveau de $M \mapsto \frac{MA}{MH}$ (H : projeté orthogonal de M sur (D)) .... ☐

une ligne de niveau de $M \mapsto \frac{MH}{MB}$ .... ☐

une ligne de niveau de $M \mapsto MA^2 + MB^2$ .... ☐

une ligne de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ .... ☐

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Équations cartésiennes

9 Déterminez le foyer et la directrice de la parabole $(\mathcal{P})$ dont une équation dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est la suivante :

1° $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$. 2° $y = 3x^2 + x - 4$.

3° $y^2 = 6x + 3$. 4° $y^2 = -4x + 1$.

5° $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$. 6° $y^2 - 2y - x - 2 = 0$.

7° $y = 4x^2 + 2x - 1$. 8° $y = -6x^2 + 6x - 3$.

10 Déterminez les éléments caractéristiques foyers, sommets, excentricité, directrices, éventuellement asymptotes, des coniques dont une équation, dans un repère orthonormal, est la suivante :

1° $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. 2° $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

3° $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$. 4° $25x^2 + 9y^2 = 225$.

5° $4x^2 + y^2 = 4$. 6° $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$.

7° $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{9} = 1$. 8° $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$.

9° $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$. 10° $y^2 = \frac{16}{9}x^2 - \frac{32}{3}x$.

11 Dans chacun des cas suivants, une courbe $(\mathcal{C})$ est donnée par une équation cartésienne $f(x, y) = 0$. Déterminez l'équation réduite de la courbe $(\mathcal{C})$ et dessinez cette courbe.

1° $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0$.

2° $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$.

3° $x^2 - 9y^2 - 2x + 36y - 44 = 0$.

4° $x^2 + y^2 - x + 2y + 1 = 0$.

5° $\frac{x^2}{4} - x - y + 1 = 0$.

6° $y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$.

7° $3x^2 + 2y^2 + 8y + 2 = 0$.

12 Dessinez la courbe $(\mathcal{C})$ dont une équation dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $16x|x| + 36y|y| = 576$.

13 Dessinez la courbe $(\mathcal{C})$ dont une équation dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $y = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

14 Dessinez la courbe $(\mathcal{C})$ dont une équation dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $y = \frac{2}{3}\sqrt{|x^2 + 4x - 5|}$.

15 Discutez, suivant la valeur du paramètre réel m, la nature de la courbe $(\mathcal{C}_m)$ dont une équation, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$y^2 + mx^2 + (m+1)x - \frac{m}{4} = 0.$$

*Dans les exercices **16** à **18**, F et (D) désignent un point et une droite d'un plan, F n'appartenant pas à (D), e un nombre réel strictement positif, K est le projeté orthogonal de F sur (D), (Γ) est la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.*

16 On pose $FK = \frac{9}{4}$ (unité : le centimètre) et $e = \frac{4}{5}$.

1° Construisez les sommets A et A' de l'axe focal de (Γ).

2° Calculez AA'.

3° Déterminez l'équation réduite de (Γ).

4° Dessinez (Γ).

17 Reprenez une étude analogue à celle de l'exercice **16** dans le cas où $FK = \frac{16}{5}$ et $e = \frac{5}{3}$.

18 Les points F et K sont tels que $FK = 4$. Dessinez les coniques, l'excentricité étant successivement égale à 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

Équations paramétrées

19 Éliminez le paramètre pour obtenir une équation cartésienne, puis l'équation réduite, de la courbe $(\mathcal{C})$ définie par les équations paramétriques suivantes, et dessinez la courbe $(\mathcal{C})$.

1° $\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = 3 + \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2° $\begin{cases} x(t) = 3 + 2\cos t \\ y(t) = -1 + \cos 2t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi]$.

3° $\begin{cases} x(t) = 2 + 3\cos t \\ y(t) = -1 + \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$.

4° $\begin{cases} x(t) = 4 + 2\sin t \\ y(t) = 1 + \cos t, \end{cases} \quad t \in [-\pi; \pi]$.

20 Reprenez une étude analogue à celle de l'exercide **19**.

1° $\begin{cases} x(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

On pourra exprimer, pour commencer, e^t et e^{-t} en fonction de x et y.

2° $\begin{cases} x(t) = 2\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y(t) = t - \dfrac{1}{t}, \quad t \in]0\,;\,+\infty[. \end{cases}$

On pourra exprimer t et $\dfrac{1}{t}$ en fonction de x et y.

21 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan. Les coordonnées d'un point M, mobile, sont données en fonction du temps par :

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}(e^t + e^{-t}) \\ y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^{-t} - e^t). \end{cases}$$

1° Montrez que le point M appartient à la courbe (H) d'équation cartésienne : $3x^2 - y^2 = 2$.

2° Soit h la fonction de t définie par :

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-t} - e^t).$$

Étudiez les variations de h, puis déterminez la trajectoire (T) de M.

3° Construisez (T) en prenant 2 cm pour unité de longueur.

22 Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On considère l'équation (E) d'inconnue complexe z :

$(\cos^2\theta)z^2 - 4(\cos\theta)z + 5 - \cos^2\theta = 0.$

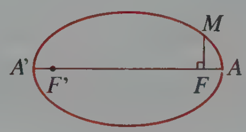
1° Résolvez l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes. Précisez pour quelle valeur de θ l'équation admet une solution double. Donnez la valeur de cette solution double.

2° Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormal. On appelle M' et M'' les points de (P) dont les affixes respectives sont les solutions z' et z'' de l'équation (E).
Montrez que, lorsque θ varie, M' et M'' se déplacent sur une hyperbole (H). Déterminez le centre, les sommets et les asymptotes de (H). Tracez (H).

(D'après bac.)

Paramètre d'une conique

23 On appelle paramètre d'une conique de foyer F la longueur de la demi-corde passant par F et perpendiculaire à l'axe focal.



1° Vérifiez que, dans le cas de la parabole, le paramètre est bien égal à la distance du foyer à la directrice.

2° Les notations étant celles du cours, démontrez que, dans le cas des coniques à centre, le paramètre est égal à $\dfrac{b^2}{a}$.

24 1° Soit (E) l'ellipse d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $0 < b < a$, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, et S le point de coordonnées $(-a\,;\,0)$.

Démontrez que, p étant le paramètre de (E) $\left(p = \dfrac{b^2}{a}\right)$, une équation de (E) dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ est :
$y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$.

2° Soit (H) l'hyperbole d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, et S le point de coordonnées $(a\,;\,0)$.

Démontrez que, p étant le paramètre de (H) $\left(p = \dfrac{b^2}{a}\right)$, une équation de (H) dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ est :
$y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$.

□ *Remarque.* Ces équations, jointes à celle de la parabole, $y^2 = 2px$, justifient le vocabulaire. Le terme y^2 est :
« en comparaison avec $2px$ » pour la parabole,
en excès de $(e^2 - 1)x^2$, positif, pour l'hyperbole,
en défaut de $(e^2 - 1)x^2$, négatif, pour l'ellipse.

Parabole : constructions

25 Construisez une parabole de foyer F donné et passant par deux points donnés A et B du plan.

26 Construisez une parabole de directrice (D) donnée et passant par deux points donnés A et B.

27 Construisez une parabole de foyer donné F et tangente en un point A donné à une droite donnée (L).

28 ■■ Construisez une parabole de directrice (D) donnée et tangente en un point A donné à une droite donnée (L).

29 ■■ Construisez une parabole connaissant la directrice et deux tangentes.

30 ■■■ Construisez une parabole connaissant le foyer et deux tangentes.

31 ■■ Construisez une parabole connaissant la directrice, un point et le paramètre.

32 ■■ On donne dans le plan un point F et deux droites (D) et (L). Soit (P) la parabole de foyer F et de directrice (D).

1° Déterminez un point de (P) en lequel la tangente à (P) est parallèle à (L).

2° Soit E un point de (D). Déterminez les tangentes à (P) qui passent par E et les points de contact de ces tangentes avec (P).

Coniques à centre

33 ■■■ **Construction géométrique des foyers et directrices.**

1° *Cas de l'ellipse*. Soit (E) l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avec $0<b<a$, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A et A' les sommets sur l'axe focal, F et F' les foyers.
La perpendiculaire en F à l'axe focal coupe le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AA']$ en U et U', la tangente en U à $(\mathscr{C})$ coupe l'axe focal en T.
Démontrez que T est le pied, sur l'axe focal, de la directrice associée à F.

2° *Cas de l'hyperbole*. Soit (H) l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A et A' les sommets de (H), F et F' les foyers, $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[AA']$, (Δ) et (Δ') les asymptotes. La tangente en A à $(\mathscr{C})$ coupe (Δ) en E.

a) Calculez OE. Déduisez-en une construction de F et F', à la règle et au compas, à partir de A, A' et des asymptotes.

b) Déterminez les coordonnées des points communs à $(\mathscr{C})$, (Δ) et (Δ'). Déduisez-en une construction des directrices de (H) à partir de A, A', (Δ) et (Δ').

3° Appliquez les résultats précédents à la construction géométrique des foyers et directrices des coniques d'équations :

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ et $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

Lieux géométriques

34 ■■ Soit (D) une droite d'un plan (P), F un point de (P), non situé sur (D), α un nombre réel de l'intervalle $]0\,;\pi[$. Un cercle (C), de centre noté M, passe par F et coupe (D) en deux points A et B tels que $\widehat{AMB}=\alpha$.
Déterminez l'ensemble des centres M de tels cercles (C).

35 ■■■ Un trapèze $ABCD$, $(AB)/\!/(CD)$, est tel que $[AB]$ est fixe et les côtés $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ ont la même longueur. Déterminez l'ensemble des points C et l'ensemble des points D.

PROBLÈMES

36 ■■ Soit (E) l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On appelle A le point de coordonnées $(2\,;0)$ et B le point de coordonnées $(0\,;3)$.
Déterminez, M étant un point de (E), le lieu (E') des centres de gravité des triangles ABM quand M décrit (E).

37 ■■■ Deux cercles (C) et (C'), de même centre O, ont pour rayons respectifs α et β $(0<\alpha<\beta)$. Soit (D) une droite passant par O, $[Ou)$ une demi-droite variable, $[Ov)$ la demi-droite image de $[Ou)$ dans la réflexion d'axe (D). La demi-droite $[Ou)$ coupe (C) en I, $[Ov)$ coupe (C') en J.

1° Quel est, lorsque $[Ou)$ varie, le lieu géométrique (E) du milieu M du segment $[IJ]$?

2° Démontrez que la droite (IJ) est normale en M à (E).

38 ■■ Pour traiter cet exercice vous pourrez utiliser les résultats du TP2.
Soit F et B deux points distincts. Une ellipse (C) a pour foyer F et l'un des sommets du demi petit axe est B.

1° Quel est le lieu géométrique du deuxieme foyer ?

2° Un point M étant donné, discutez le nombre d'ellipses (C) passant par M.

39 ■■ Soit (C) une conique et s une similitude directe du plan.
Déterminez la nature de la courbe image de (C) par s.

40 ■■■ Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1° Pour tout point M du plan, on note z son affixe.

a) Vérifiez que l'ensemble des points M tels que $\bar{z} + z + 4 = 0$ est une droite (D). Tracez (D).

b) Démontrez que, pour tout point M de $(\mathscr{P})$, la distance de M à (D) est $\frac{1}{2}\,|z + \bar{z} + 4|$.

2° On note F le point d'affixe $1 + i$ et $(\mathscr{P}')$ le plan privé de la droite (D). Soit (E) l'ensemble des points M, d'affixe z, de $(\mathscr{P}')$ tels que : $\left|\frac{z - 1 - i}{z + \bar{z} + 4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Démontrez que (E) est une conique à centre dont vous préciserez l'excentricité et la nature. Vérifiez que (E) passe par O.

(Bac)

41 ■■■
Affinité orthogonale
Soit (D) une droite du plan et k un nombre réel non nul et différent de 1.
Soit f l'affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport k.
On choisit un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan où O est un point de (D) et $\vec{i}$ un vecteur directeur de (D).

1° Démontrez que l'expression complexe de f est :

$$z' = \frac{1}{2}[(1 + k)z + (1 - k)\bar{z}].$$

2° Déterminez les points invariants par f.

3° Soit A et B deux points distincts du plan, d'affixes respectives a et b, d'images respectives A' et B' par f.

a) Démontrez que, si M est un point de (AB), alors son image M' par f appartient à $(A'B')$.
Déduisez-en l'image de la droite (AB) par f.

b) Démontrez que si (AB) coupe (D) en I, alors $(A'B')$ coupe (D) en I.

c) Quelle est l'image par f de la parallèle en A à (D)?

42 ■■
Aire de l'intérieur d'une ellipse
L'intérieur d'une ellipse est la surface délimitée par l'ellipse et contenant les foyers.
Soit (E) l'ellipse d'équation :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $0 < b < a$, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1° Définissez l'ellipse comme image d'un cercle (C) de centre O par une affinité.

2° On note (C_1) l'ensemble des points de (C) dont l'ordonnée est positive, (E_1) l'ensemble des points de (E) dont l'ordonnée est positive, f la fonction représentée par (C_1) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Donnez, à l'aide de f, une équation de (E_1).

b) Calculez l'aire de l'intérieur de l'ellipse en fonction de a et b.

43 ■■■
Soit (P) une parabole de foyer F, de directrice (D), K le projeté orthogonal de F sur (D), (Δ) l'axe de la parabole. Un point M de (P), autre que le sommet, se projette orthogonalement en H sur (D), en L sur (Δ). La tangente en M à (P) coupe (Δ) en T, la normale en M à (P) coupe (Δ) en N.

1° Démontrez que le quadrilatère $HMFT$ est un losange.

2° Démontrez que le quadrilatère $HMNF$ est un parallélogramme.

3° Démontrez que LN est égal au paramètre de la parabole ($LN = FK$).

4° Les droites (MT) et (D) se coupent en T_0. Démontrez que $\widehat{T_0FM}$ est un angle droit.

44 ■■■
Soit (P) la parabole d'équation $y = ax^2$, a nombre réel strictement positif dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On appelle d un nombre réel strictement positif, n un nombre entier naturel non nul, A_0, A_1, A_2, ..., A_n les points de la parabole d'abscisses respectives $0, \frac{d}{n}, \frac{2d}{n}, ..., n\frac{d}{n}$, (T_0), (T_1), ..., (T_n) les tangentes à (P) en A_0, A_1, ..., A_n.
Pour i entier variant de 1 à n, on appelle B_i l'intersection de la tangente (T_{i-1}) et de la parallèle en A_i à l'axe des ordonnées.
Démontrez que les segments $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, ... $[A_nB_n]$ ont la même longueur.

(Voir : «Propriété de la parabole», Pascal, *Œuvres complètes*, La Pléiade, p. 319.)

45 ■■■
Soit (P) une parabole, F son foyer, (D) sa directrice, S son sommet.
Soit M et M' deux points de (P), I le point commun aux tangentes à (P) en M et M', H, H' et K les projetés orthogonaux respectifs de M, M' et I sur (D).

1° Démontrez que K est le milieu de $[HH']$.

2° Démontrez que si I est sur (D) alors (MM') passe par F, les droites (IM) et (IM') sont perpendiculaires et les droites (IF) et (MM') sont perpendiculaires.

3° Étant donné un point A de (P) autre que le sommet S, déduisez de l'étude précédente une construction simple du point d'intersection, autre que A, de la droite (AF) avec la parabole (P).

46 ■■■
Soit (P) la parabole d'équation $y = ax^2$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan et (Δ) une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

1° Déterminez l'ensemble des milieux des cordes de la parabole parallèles à (Δ). (On notera m le coefficient directeur de (Δ).)

2° Soit A le point de (P) d'abscisse $\frac{m}{2a}$, $\vec{u}$ un vecteur directeur de la tangente en A à (P). Déterminez une équation de (P) dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{j})$ et retrouvez le résultat de la question **1°**.

47 ■■■ Soit (E) une ellipse, I un point de l'ellipse, distinct des sommets de (E), (T) la tangente en I à (E).

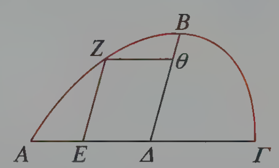
1° Déterminez le lieu des milieux des cordes de (E) parallèles à (T).
(On pourra utiliser le fait que (E) est l'image d'un cercle par une affinité orthogonale.)

2° On appelle J le point symétrique de I par rapport au centre O de l'ellipse, K et L les extrémités de la corde de (E) passant par O et parallèle à (T).
Les axes de l'ellipse sont notés $[AA']$ et $[BB']$.
Démontrez que : $IJ^2 + KL^2 = AA'^2 + BB'^2$.

48 ■■■ Voici deux propriétés ainsi énoncées par Archimède :

Propriété 1. Dans un segment compris entre une droite et une parabole, la droite menée du milieu de la base (parallèlement au diamètre) a une longueur égale aux quatre tiers de celle de la droite menée (parallèlement au diamètre) du milieu de la moitié de la base.

Traduction : $\Delta B = \frac{4}{3} EZ$.



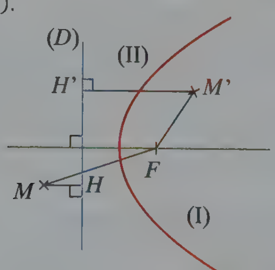
Propriété 2. Si on inscrit dans un segment compris entre une droite et une parabole un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et si on inscrit dans les segments restants d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments, le triangle inscrit dans le segment entier sera octuple de chacun des deux triangles inscrits dans les segments qui restent.

Pour démontrer ces deux propriétés résolvez le problème suivant :
Soit (P) une parabole, A et Γ deux points de (P), B le point de (P) où la tangente à (P) est parallèle à $(A\Gamma)$.
La parallèle en B à l'axe (L) de la parabole (diamètre, dans le texte d'Archimède) coupe $(A\Gamma)$ en Δ.
Notons E le milieu de $[A\Delta]$. La parallèle en E à (L) coupe (P) en Z.

1° Démontrez que $\Delta B = \frac{4}{3} EZ$.

2° Démontrez que l'aire du triangle AZB est le huitième de l'aire du triangle $AB\Gamma$.

49 ■■■ 1° Soit (P) une parabole de foyer F et de directrice (D).



Démontrez que la parabole permet de caractériser trois régions du plan :
– la région I dans laquelle $MF < MH$,
– la parabole sur laquelle $MF = MH$,
– la région II dans laquelle $MF > MH$.

2° On donne une droite (D) et deux points distincts F et M, non situés sur (D). La conique de foyer F, de directrice (D), passant par M est notée (C). Déterminez la nature de (C) suivant la position de M dans le plan.

50 ■■■■ **Point de Frégier d'une ellipse.**

Soit (E) l'ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point de l'ellipse.

1° Déterminez une équation de la normale (M_0N) en M_0 à (E) (la normale en M_0 à l'ellipse est la perpendiculaire en M_0 à la tangente à l'ellipse).

2° On considère deux points $M_1(a \cos t_1, b \sin t_1)$ et $M_2(a \cos t_2, b \sin t_2)$ situés sur (E). Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur t_1 et t_2 pour que les vecteurs $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0M_2}$ soient orthogonaux.

3° On suppose la condition du **2°** réalisée. Déterminez alors les coordonnées du point d'intersection de (M_0N) avec (M_1M_2). Que constatez-vous ?

4° Déduisez-en que les cordes d'une ellipse vues d'un point M_0 de cette ellipse sous un angle droit passent par un point fixe de la normale en M_0 à (E).

51 ■■■■ I – Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct du plan.
Soit f_1 la fonction numérique de variable réelle définie par : $f_1(x) = -2x + \sqrt{3(x^2-1)}$.

1° *a*) Étudiez les variations de f_1.

b) Soit (C_1) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Démontrez que les droites d'équations $y = (-2 + \sqrt{3})x$ et $y = (-2 - \sqrt{3})x$ sont asymptotes à (C_1) et placez (C_1) par rapport à ces deux droites.

c) Précisez les tangentes à (C_1) aux points d'abscisses -1 et 1.

d) Construisez (C_1) (unité : 2 cm).

2° Soit f_2 la fonction numérique de variable réelle définie par : $f_2(x) = -2x - \sqrt{3(x^2-1)}$.

Montrez que sa courbe représentative (C_2) est l'image de (C_1) par la symétrie de centre O. Montrez que la courbe $(C_1) \cup (C_2)$ a pour équation :

$x^2 + 4xy + y^2 + 3 = 0$.

Construisez cette courbe que l'on notera (C).

II – Soit S la transformation du plan qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{\sqrt{6}}{2}(1 + i)z$.

Caractérisez cette transformation.
Trouvez l'équation de la courbe (H) transformée de (C) par cette transformation S.
Donnez la nature de la courbe (H) ainsi obtenue.

Index des mots clés

A

Accélération centrale 153
Affinité 267
Affixe 14
Affixe d'un barycentre 125
Aire d'un parallélogramme 150
Aire d'un triangle 150
Alignement (condition d') 48
Alignement (problème d') 131
Anamorphose 254
Apollonius 252
Apollonius (cercles d') 144
Application linéaire 70
Application réciproque 172
Application vectorielle 176
Argument 38
Argument d'un nombre complexe 17
Associativité de la barycentration 124, 134
Asymptotes 262
Axe focal 262
Axe non focal 262

B

Balance hydrostatique 114
Barycentre 116, 121
Barycentre partiel 117
Barycentre (affixe d'un) 125
Bijection 231
Bijective 172
Bombelli 6
Brunelleschi 60

C

Cardan-Tartaglia (formule de) 6
Centre de gravité 45
Centre d'inertie 144
Centre d'une conique 259
Cercles d'Apollonius 144
Cocyclicité (condition de) 48
Combinaison linéaire 92
Composée 201, 236
Composition 172
Concours (problème de) 131
Conique 252, 256
Conique à centre 259, 269
Conjugué (nombre complexe) 9, 15
Contraintes (polygone des) 100

D

Décomposition 170
Définition bifocale 270
Demi-grand axe 260
Demi-petit axe 260
Demi-tour 235
Démonstration d'Euclide 166
Déplacement 181
Desargues (théorème de) 142
Déterminant 41
Dièdre 79
Directe (similitude) 200, 203
Directrice 256
Distance d'un point à un plan 80
Distance d'un point à une droite 80
Double produit vectoriel 162
Dürer 60

E

Échelonné (système) 93
Écriture complexe 202, 203
Électromagnétisme 146
Ellipse 254, 259
Équation réduite 258
Équation d'un plan 76, 152
Équation d'une sphère 77
Équations du second degré 21
Escher 167, 198
Espace orienté 148
Euclide (démonstration d') 166
Euler 20
Euler (formules d') 20, 25
Excentricité 256

F

Figure invariante 185
Forme algébrique 11
Forme réduite 204
Forme trigonométrique 11, 17
Formule de Moivre 19, 25
Formule du binôme 13
Formules de trigonométrie 24
Formules d'Euler 20, 25
Foucault (pendule de) 228
Foyer 256
Frégier (point de) 282

G

Galilée 114
Gauss 97

H

Homographie 58
Homothétie (de l'espace) 200, 229, 230
Homothétie (du plan) 37, 41
Hydrostatique (balance) 114
Hyperbole 255, 261

I

Identités remarquables 13
Imaginaire (nombre) 12
Inconnue auxiliaire 99
Inégalité triangulaire 16
Inéquation linéaire 100
Intersection de plans 92
Invariance du barycentre 123
Invariant 173
Inverse d'un nombre complexe 9
Isobarycentre 117, 122
Isométrie vectorielle 176
Isométrie du plan 172

J

Joukovski (transformation de) 58

L

Léonard de Vinci 60
Lieu géométrique 184
Lignes de niveau 46, 49, 118, 127
Linéarisation 25
Linéarité 69, 180

M

Médiane (théorème de la) 133
Ménélaüs (théorème de) 209
Méthode de Gauss 94, 97
Möbius (tétraèdres associés) 142
Module d'un nombre complexe 15
Moivre (formule de) 18, 25
Moment d'inertie 119

N

Nombre complexe 200
Nombre imaginaire pur 12
Norme 72
Notation $re^{i\theta}$ 19

O

Opération élémentaire 95
Optimisation 100, 132
Orientation de l'espace 146, 148
Orthogonalité 72, 82
Orthonormal direct (repère) 147

P

Parabole 253, 257
Parallélogramme (aire d'un) 150
Paramètre d'une parabole 258
Partie imaginaire 12
Partie réelle 12
Pendule de Foucault 228
Perspective cavalière 60
Pivot de Gauss 97
Plan projetant 64
Plan tangent 81
Plan (équation d'un) 152
Plans perpendiculaires 73
Point image 14
Point invariant 15
Point fixe 173

Points pondérés 116
Points réciproques 142
Polygone des contraintes 100
Primitives (recherche de) 24, 25
Produit scalaire 42, 71, 75
Produit vectoriel 149
Programmation linéaire 110
Projection 60
Projection ponctuelle 64
Projection vectorielle 68
Projetante 64
Projeté 64
Pythagore (théorème de) 166

Q

Quotient de deux nombres complexes 9, 13

R

Racines n-ièmes 26, 34
Radians 17
$re^{i\theta}$ (notation) 19
Rectiligne d'un dièdre 79
Réduction d'un vecteur 120
Réflexion induite 234
Réflexion (de l'espace) 226, 233
Réflexion (du plan) 167, 169
Repère orthonormal direct 147
Roberval 271
Rotation induite 235
Rotation (de l'espace) 227, 234
Rotation (du plan) 37, 41, 168, 200

S

Semblable 199
Similitude directe 200, 203
Sphère 80, 103
Substitution (méthode de) 104
Symétrie centrale 226, 230
Système échelonné 93
Système de points pondérés 120

T

Tétraèdre 79
Thalès (configuration de) 63
Théorème de Desargues 142
Théorème de Ménélaüs 209
Théorème de Pythagore 166
Théorème de la médiane 133
Transformation 172
Translation (de l'espace) 226
Translation (du plan) 39, 169
Triangle (aire d'un) 150
Triangles isométriques 166
Trigonométrie (formules de) 24
Trigonométrie : factorisation 22, 23

V

Vecteur image 14
Vecteur normal à un plan 73, 150
Vecteurs colinéaires 42

FICHE MÉTHODE

Index des méthodes

1 Comment calculer dans $\mathbb{C}$:
- avec des nombres sous la forme $a + ib$ 28
- avec des nombres sous la forme $re^{i\theta}$ ou $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 28

Comment écrire un nombre $a + ib$ sous forme trigonométrique 28

2 Comment utiliser les nombres complexes :
- Pour évaluer une distance 50
- Pour évaluer un angle 50
- Pour démontrer un alignement 50
- Pour démontrer une orthogonalité 50
- Pour démontrer une cocyclicité 50

3 Comment démontrer des orthogonalités dans l'espace :
- Une droite (D) est orthogonale à une droite (D') si 82
- Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) si 82
- Un plan (P) est perpendiculaire à un plan (P') si 82

4 Comment résoudre simplement un système d'équations linéaires 104

5 Comment utiliser un barycentre 134

6 Comment utiliser le produit vectoriel :
- Pour prouver une colinéarité 156
- Pour trouver un vecteur normal à un plan 156
- Pour calculer une aire 156
- Pour calculer un volume 156

7 Comment déterminer la composée de deux isométries 188
Comment utiliser les isométries 188

8 Comment reconnaître qu'une application f est une similitude directe 214
Comment caractériser une similitude directe f 214

9 Comment caractériser une rotation 242
Comment utiliser les transformations de l'espace 242

10 Comment retrouver la définition par foyer et directrice d'une conique 274
Comment retrouver l'équation réduite d'une conique 274
Comment retrouver un paramétrage de la courbe d'une conique 274

Réponses aux exercices

Les réponses données correspondent aux exercices signalés en bleu.
Les solutions des Q.C.M. sont désignées par A, B, C, ... A correspond à la première réponse proposée, B à la deuxième, C à la troisième...
« **3 BD** » signifie : « dans le Q.C.M. n° 3, les deuxième et quatrième réponses proposées sont vraies ».

1. NOMBRES COMPLEXES

Q.C.M. **1** A; **2** C; **3** B; **4** A; **5** BC; **6** A.

9. a) $-i$. b) $0{,}5 - 0{,}5i$.

10. a) $2 - 3i$. b) -1.

12. a) $0{,}16 - 0{,}12i$.
b) $0{,}28 + 0{,}96i$.

13. a) 0 ; $1 - 2i$; $4 + 4i$.
b) $-i$ et i.

16. 1° $\operatorname{Re}[f(z)] = x^2 + y^2 + 1$; $\operatorname{Im}[f(z)] = 2xy$. 2° $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

20. a) $1/2 \pm i\sqrt{3}/2$.
b) $3/2 \pm 2i$.

21. $z = \pm\, e^{i\pi/3}$ ou $\pm\, e^{-i\pi/3}$.

23. $z = 2$ ou $z = i$ ou $z = -i$.

25. $\Delta' = -2^{2\theta} \sin^2 \theta$; $z = 2^{\theta} e^{i\theta}$ ou $z = 2^{\theta} e^{-i\theta}$.

29. Droite d'équation :
$\sqrt{2}\,x + 2y + 1 = 0$.

35. $z = \sqrt{2}\,(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$;
$z = \sqrt{2} \cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)$;
$z = 2\,(\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3)$;
$z = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\,(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6)$.

42. $2e^{i(-\pi/6)}$; $5\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$; $4\sqrt{3}\,e^{i5\pi/6}$.

43. 2° $|z| = \big||\tan \theta/2|\big|$.

47. a) $\cos^5 x = (1/16) \cos 5x + (5/16) \cos 3x + (5/8) \cos x$.
b) $\sin^4 x \cos^3 x$
$= ((1/8) \cos 4x - (1/2) \cos 2x + (3/8))$
$((1/4) \cos 3x + (3/4) \cos x)$
$= (1/64)(3 \cos x - 3 \cos 3x - \cos 5x + \cos 7x)$.

51. $\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$;
$\sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$.

58. $\cos(x - 2\pi/3) = \cos \pi/4$ soit $x = 11\pi/12\ (2\pi)$ ou $x = 5\pi/12\ (2\pi)$.

65. $8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$. Une solution est $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$. On obtient toutes les solutions en multipliant celle-ci par les racines sixièmes de 1 : 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, -1, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $e^{i\frac{5\pi}{3}}$.
$\cos \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; $\sin \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

2. NOMBRES COMPLEXES

Q.C.M. **1** B; **2** BC; **3** C; **4** ABC; **5** A; **6** C; **7** AB; **8** AB.

9. $h(O, \sqrt{2}) \circ r(O, \pi/4)$; $t_{\vec{v}}$; $r(O, \pi/2)$; $r(O, -\pi/2)$.

11. $h(O, -2)$. $r(O, \theta)$. $r(O, \theta + \pi)$.
$1 + \cos \theta + i \sin \theta = 2 \cos \theta/2\ (\cos \theta/2 + i \sin \theta/2)$:
comme $\theta \neq \pi$: $h(O, 2 \cos \theta/2) \circ r(O, \theta/2)$.

13. $AB = \sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{6}$,
$BC = 3\sqrt{2}$, $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$, $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{2}$, $\widehat{C} = \dfrac{\pi}{6}$.

14. a) $]A ; \vec{w})$ avec $\vec{w}(1 ; 1)$.
b) $]O ; \vec{w})$ avec $\vec{w}(-1 ; 1)$.
c) Droite $(A ; \vec{w})$ privée de A avec $\vec{w}(1 ; 1)$.
d) Cercle centre A rayon 1.
e) Cercle centre O rayon 2.

17. 1° a) $z' = \omega$; b) $r(\Omega, \theta)$.
2° a) $A'((3 - 2\sqrt{3})/2) + i\,(4 + \sqrt{3})/2)$;
b) $B_1(-1 + 2i)$, $B_2(3)$.

19. a) -7. b) 11. c) $2{,}5$.

20. Colinéaires : a et c ; non colinéaires : b.

26. La réunion de trois droites privées du point O, d'équations :
$x = 0$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$, $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

27. 1° a) $h = i$.
b) $h' = -i$; $\dfrac{h' - b}{h' - c} = \dfrac{-1 + 3i}{5}$;
$\dfrac{a - b}{a - c} = \dfrac{1 - 3i}{4}$
donc $(\overrightarrow{H'C}, \overrightarrow{H'B}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})(\pi)$
car $\dfrac{h' - b}{h' - c} : \dfrac{a - b}{a - c}$ est un nombre réel.
2° a) $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})(\pi)$.
b) $(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) = -(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})(2\pi)$.
c) $(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})(\pi)$ donc $H'ABC$ cocycliques car non alignés.

36. 1° a) $p - c = (p - b) + (b - c)$
$= i(a - b) + i(m - a)$
$= i(m - b)$.
b) $\dfrac{p - c}{m - b}$ a pour module 1 et pour argument $\pi/2$.
c) On prouve que $n - b = i(m - c)$ de même qu'au a).
d) Hauteurs de BMC.
2° a) $2k = a + n$.
$2(m - k) = (m - a) + (m - n)$
$= 2(m - a) + a - n$.
Or $a - n = -i(c - k)$ (AKC triangle isocèle rectangle). Donc :
$2(m - k) = 2(m - a) - 2i(c - k)$
$= 2i(c - b) - 2i(c - k)$
$= -2i(b - k)$.
b) Idem en utilisant ALB isocèle rectangle.
c) BKM et MLC sont isocèles rectangles.

3. ESPACE. PRODUIT SCALAIRE.

Q.C.M. **1** AC; **2** CD; **3** AD; **4** C; **5** B; **6** B.

10. 1° $3x + y + 3z - \dfrac{5}{2} = 0$.
2° $7x + y - 12z + 14 = 0$.
3° $z + 1 = 0$.

19. 1° $\vec{u}(1 ; -4 ; 3)$.
2° $A'(1 + t ; -3 - 4t ; 3t)$.
3° a) $t = -\dfrac{6}{13}$, $A'\left(\dfrac{7}{13} ; -\dfrac{15}{13} ; -\dfrac{18}{13}\right)$.
b) $AA' = |t|\,\|\vec{u}\| = \dfrac{6\sqrt{26}}{13}$.

20. 1° $\sqrt{3}$. 2° $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$. 3° $\dfrac{7\sqrt{8}}{8}$.
4° O (le point est dans le plan).

23. 1° $3x + 2y - 3z - 8 = 0$.
2° a) $M\left(1 + t ; -1 + \dfrac{2}{3}t ; -t\right)$.
b) $M\left(\dfrac{43}{22} ; -\dfrac{4}{11} ; -\dfrac{21}{22}\right)$.

33. Plan médiateur de $[AB]$: $2y - 4z - 3 = 0$; de $[AC]$: $x + y = 0$; de $[AD]$: $2y + 4z - 3 = 0$.
La résolution du système formé par ces trois équations conduit à : $x = -3/2$, $y = 3/2$, $z = 0$, coordonnées du centre I de la sphère. Rayon $IA = \sqrt{26}/2$.

Autre méthode : chercher a, b, c, d tels que l'équation :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

soit vérifiée par les coordonnées de A, B, C, D.

35. La distance de A à (P), égale au rayon de la sphère, est $1/\sqrt{3}$ (voir méthode exercice **19**).
Une équation de la sphère est :

$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=1/3$.

41. **1°** *a)* $a^2/2$; $-a^2/2$;
$0\ (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})$. On retrouve l'orthogonalité des arêtes opposées d'un tétraèdre régulier.

c) $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{CD}=a^2/4$; $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{MK}=3a^2/8$; $\overrightarrow{LD}.\overrightarrow{IJ}=0$.

d) $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{IL}=0$; $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{LK}=0$ ($IKNL$ est un carré dont $[IN]$ et $[LK]$ sont les diagonales ou bien décomposer $\overrightarrow{IN}$ en $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$).

2° *a)* $AG=\sqrt{2/3}$ (utilisez le triangle ABG rectangle en G).

b) $\overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{AG}=(1/2)\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AG}$

$=(1/2)\ AG^2=(1/3)\ a^2$;

$\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GK'}\cdot\overrightarrow{AG}$ où K' est le projeté orthogonal de K sur (AG) donc le milieu de $[AG]$;

$\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{AG}=-(1/2)\ AG^2=-a^2/3$.

4. SYSTÈMES LINÉAIRES

Q.C.M. **1** BC ; **2** C ; **3** BC ; **4** A ; **5** BC ; **6** BD ; **7** B.

14. **1°** On trouve H de coordonnées $(7/5\ ;\ 13/5)$.

2° On cherche B sur (D_2) vérifiant : $\overrightarrow{AB}.\vec{u}_3=0$, $\vec{u}_3$ étant un vecteur directeur de (D_3).

B vérifie le système $\begin{cases}x-y-1=0\\3x-2y-5=0\end{cases}$, et a pour coordonnées : $B(3\ ;\ 2)$. De même on trouve $C(5\ ;\ -1)$.

23. *a)* Le système est impossible.
b) Le système admet une infinité de solutions : ce sont les 5-uplets de la forme $(x_5,\ 1-x_5,\ 1+x_5,\ -x_5,\ x_5)$, où x_5 est un paramètre réel.

31. On trouve :
$f(x)=-x^3+2x^2-3x+4$, en traduisant l'appartenance des points à la courbe $(\mathcal{C})$ par le système linéaire :

$$\begin{cases}a+b+c+d=2\\8a+4b+2c+d=-2\\27a+9b+3c+d=-14\\-a+b-c+d=10.\end{cases}$$

38. **1°** L'affixe du milieu de $[M_1M_2]$ est $(z_1+z_2)/2$, celui du milieu de $[M_2M_3]$ est $(z_2+z_3)/2$, celui du milieu de $[M_3M_1]$ est $(z_1+z_3)/2$.

2° On trouve une solution unique $(a_1+a_3-a_2,\ a_1+a_2-a_3,\ a_3+a_2-a_1)$.

3° $z_1=5\mathrm{i}$, $z_2=2-3\mathrm{i}$, $z_3=4+\mathrm{i}$.

4° Par l'associativité de la barycentration, l'isobarycentre du triangle $A_1A_2A_3$ est le barycentre de $(M_1,\ 2)$, $(M_2,\ 2)$, $(M_3,\ 2)$, donc l'isobarycentre de $M_1M_2M_3$.
On a alors $\overrightarrow{GM_1}=-2\overrightarrow{GA_2}$, M_1 est l'image de A_2 par l'homothétie de centre G et de rapport -2. De même pour les autres points, en permutant A_1, A_2, A_3.

39. **1°** *b)* H a pour coordonnées : $H\left(\frac{1}{4}\ ;\ 4\right)$ et vérifie bien $xy=1$.

2° Appelons $(x,\ y)$ les coordonnées de H. $(x,\ y)$ est déterminé par le système :

$$\begin{cases}(x-a)(c-b)+(y-1/a)(1/c-1/b)=0\\(x-b)(c-a)+(y-1/b)(1/c-1/a)=0,\end{cases}$$

qui se simplifie (car $b\neq c$, $c\neq a$) en :

$$\begin{cases}x-y/bc=a-1/abc\\x-y/ac=b-1/abc,\end{cases}$$

solution unique : $(-1/abc,\ -abc)$.

40. Sommets du tétraèdre cherché :
$A(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$; $B(10/3\ ;\ -8/3\ ;\ 4/3)$;
$C(4/3\ ;\ 4/3\ ;\ -2/3)$;
$D(-2/3\ ;\ -2/3\ ;\ 10/3)$.

5. VECTEURS ET BARYCENTRE

Q.C.M. **1** BD ; **2** B ; **3** C ; **4** BCD ; **5** B ; **6** AC ; **7** A ; **8** C ; **9** BCD.

19. **1°** $z_{G_1}=5/2+(7/2)\ \mathrm{i}$; $z_{G_2}=4+5\mathrm{i}$.

2° $\left|\dfrac{z-1-2\mathrm{i}}{z-3-4\mathrm{i}}\right|=\dfrac{MA}{MB}$. L'ensemble cherché est donc le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

23. **3°** $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\ .\ AC\times\cos\widehat{A}$.

D'où : $\cos\widehat{A}=7/9$.

$\cos\widehat{A}=\dfrac{B'A}{BA}$ d'où $B'A=\dfrac{7}{3}\ a$.

On en déduit $B'C=(2/3)\ a$,

puis $\dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}=-\dfrac{7}{2}$.

B' est le barycentre du système $(A,\ 2)$, $(C,\ 7)$.

4° H est le barycentre du système $(A,\ 2)$, $(B,\ 7)$, $(C,\ 7)$.

32. **1°** $\alpha+\beta+2$ non nul.

2° *a)* M invariant équivaut à
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Si $\alpha+\beta$ est non nul, il y a un unique point invariant, le barycentre G du système $(A,\ \alpha)$, $(B,\ \beta)$.

Si $\alpha+\beta=0$:
pas de point invariant si α non nul ;
tous les points sont invariants si $\alpha=\beta=0$.

b) f est la translation de vecteur $(\alpha/2)\ \overrightarrow{BA}$.

c) f est l'homothétie de centre G de rapport $2/(\alpha+\beta+2)$.

34. **1°** $AB^2+b^2=c^2+b^2=AC^2+c^2$, donc A appartient à (Δ_a).
(Δ_a) est une droite orthogonale au vecteur constant $\vec{V}(M)=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}$ (comme ligne de niveau de $M\mapsto MB^2-MC^2$) donc (Δ_a) est la hauteur issue de A du triangle ABC.

2° H est l'orthocentre du triangle ABC.

37. **1°** $AC=4\sqrt{3}$; $AB=6$.

2° *b)* $OG=\sqrt{21}/2$. L'ensemble cherché est la médiatrice de $[GG']$.

4° $(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD})$
$=16\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MG'}$.

$\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MG'}=MO^2-OG^2=MO^2-21/4$.

$16\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MG'}=108$ équivaut à $MO^2=12=OB^2$, soit $MO=OB$.

L'ensemble cherché est le cercle circonscrit au rectangle $ABCD$.

42. (D') a pour système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases}x=-2+\lambda\\y=1+\lambda\\z=-3+2\lambda\end{cases}\quad(\lambda\text{ réel}).$$

50. **1°** $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA'}$,
d'où $\overrightarrow{AS}=2\overrightarrow{OA'}$.
De même, $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. S est sur la hauteur issue de A, et par permutation du rôle des sommets, sur la hauteur issue de B, et donc S est l'orthocentre du triangle ABC.

2° $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.

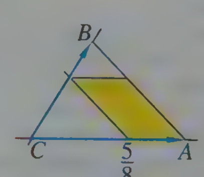
3° $\overrightarrow{A'G}=(1/3)\ \overrightarrow{A'A}$. Le lieu de G est le cercle image de $(\mathcal{C})$ par l'homothétie $h(A',\ 1/3)$, privé des deux points $h(B)$ et $h(C)$.

56. *Indications :*

1° $\overrightarrow{CM}=\dfrac{x}{8}\ \overrightarrow{CA}+\dfrac{y}{8}\ \overrightarrow{CB}$.

Soit $M(X,\ Y)$ un point du plan, de coordonnes $(X,\ Y)$ dans le repère $(C,\ \overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB})$. M a pour antécédent unique par l'application le triplet $(8X,\ 8Y,\ 8-8X-8Y)$.

3° L'ensemble E' est la zone colorée de la figure.



En appelant $(x,\ y,\ z)$ les contenances des trois vases, on peut faire le chemin :
$(8,\ 0,\ 0)\to(3,\ 5,\ 0)\to(3,\ 2,\ 3)$
$\to(6,\ 2,\ 0)\to(6,\ 0,\ 2)\to(1,\ 5,\ 2)$
$\to(1,\ 4,\ 3)\to(4,\ 4,\ 0)$.

6. PRODUIT VECTORIEL

Q.C.M. 1 AC; 2 B; 3 AC; 4 AC; 5 A; 6 AC; 7 AC; 8 ABC.

9. a) $(-3/2\,;\,-7\,;\,-1/2)$;
b) $(4\,;\,1\,;\,-10)$;
c) $(0\,;\,0\,;\,0)$; d) $(0\,;\,0\,;\,0)$.

10. a) $(a-a^2\,;\,2a-a^2\,;\,a^2)$;
b) $(-\cos\theta\,;\,\sin\theta\,;\,1)$;
c) $\big((-1/2)(1+\cos\theta)\,;\,\cos\theta\,;\,(1/2)\sin\theta\big)$.

12. a) $(-28\,;\,-36\,;\,-2)$;
b) $(-7\,;\,24\,;\,-5)$;
c) $(3\,;\,8\,;\,-5)$; d) $(-2\,;\,-11\,;\,-1)$.

16. 1° $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
2° $(-2\,;\,1\,;\,1)$.
3° $\vec{u}\,'=(\sqrt{3}/3)\,\vec{u}$, $\vec{v}\,'=(\sqrt{2}/2)\,\vec{v}$,
$\vec{w}\,'=(\sqrt{6}/6)\,\vec{w}$.

18. 1° a) Oui. b) Non.
c) $\big((1/a)\,\overrightarrow{EF}\,;\,(1/a)\,\overrightarrow{EH}\,;\,(1/a)\,\overrightarrow{EA}\big)$.
2° a) Oui.
b) $\overrightarrow{CE}(-a\,;\,a\,;\,a)$, $\overrightarrow{GB}(0\,;\,a\,;\,-a)$.
c) $(-2a^2\,;\,-a^2\,;\,-a^2)$.

19. $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\wedge(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$ conduit au résultat.

23. $3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AI}$ (Chasles).
$\|(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})\wedge\overrightarrow{MA}\|=2\|\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{MA}\|$.
M est donc tel que sa distance à la droite (AI) est constante et égale à AI. L'ensemble cherché est le cylindre d'axe (AI) de rayon AI.

31. $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

33. 1° a) $(2{,}5\,;\,5\,;\,-2{,}5)$.
b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$.
2° a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. b) $x+2y-z-1=0$.

35. 1° $(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB})\perp(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})$.
2° a) $x=1$; $x+y=1$; $x+y+z=3/2$.
b) $\Omega(1\,;\,0\,;\,1/2)$; $R=\sqrt{5}/2$.

37. 1° $a=3$. 2° $a=(5/2)\sqrt{3}$.
3° $a=(5/8)\sqrt{2}$.

38. 1° $d_1=\sqrt{5}/5$, $d_2=3\sqrt{5}/10$.
2° $d_1=\sqrt{11/11}$, $d_2=\sqrt{4{,}1}$.
3° $d_1=37/\sqrt{378}$, $d_2=\dfrac{1}{3}\sqrt{494/3}$.

40. 1° $\mathcal{R}=(A:\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
2° $x+2y-z-1=0$.
3° $d_1=\sqrt{2/3}$.
4° a) $d_2=2\sqrt{2/3}$; b) Non, car $d_2>d_1$.

42. 2° $a=(3/16)\sqrt{21}a^2$.
3° $\mathcal{V}=(5/16)\,a^3$ (On partage le quadrilatère en 2 triangles et la pyramide en 2 tétraèdres...).

7. ISOMÉTRIES DU PLAN

Q.C.M. 1 A; 2 C; 3 C; 4 CD; 5 C; 6 BD.

10. Le centre du carré $A'B'C'D'$ est O. f transforme l'isobarycentre de A, B, C, D en l'isobarycentre de A', B', C' et D'; rotations de centre O et d'angles $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/7$ et $7\pi/4$; réflexions d'axes les médiatrices de $[AA']$, $[AB']$, $[AC']$ et $[AD']$.

13. $r\circ r'^{-1}$ est une translation et transforme A en B et D en C. Donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

17. 1° $OA=BO$ et $OA\neq 0$.
2° r transforme A', point de $[AO]$, en un point A_1 de $[OB]$ tel que : $OA'=BA_1$; or : $OA'=PB'=BB'$. Donc $r(A')=B'$.
3° Ω est le centre du cercle (OAB); puisque : $r(A')=B'$, on a :
$(\overrightarrow{\Omega A'},\overrightarrow{\Omega B'})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BO})\,[2\pi]$
et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BO})=(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'})\,[\pi]$.
Donc : $(\overrightarrow{\Omega A'},\overrightarrow{\Omega B'})=(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'})\,[\pi]$; de plus O, A, B ne sont pas alignés, donc Ω, O, A' et B' sont cocycliques.

21. 1° La médiatrice de $[AC]$ coupe l'un des demi-cercles de diamètre $[AC]$ en un seul point, le point P.
2° a) $A\overset{r_P}{\mapsto}C\overset{s_{A'}}{\mapsto}B\overset{r_Q}{\mapsto}A$;
donc : $f(A)=A$; f est un déplacement d'angle $\pi/2+\pi+\pi/2$, donc une translation; donc f est l'identité.
b) Soit P' le symétrique de P par rapport à A'; alors : $r_Q(P')=P$, donc le triangle $P'QP$ est rectangle en Q et isocèle et A' est le milieu de son hypoténuse; donc le triangle $A'PQ$ est rectangle en A' et isocèle.

26. Si un triangle AIB est solution alors B est l'image de A par l'une des deux rotations r_1 et r_2 de centre A et d'angle $\pi/2$ et $-\pi/2$, donc B est sur l'image de $(\mathcal{D})$ par une de ces rotations.
Construction : soit $(\mathcal{D}_1)$ la droite $r_1(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}_2)$ la droite $r_2(\mathcal{D})$: $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$, perpendiculaires à $(\mathcal{D})$, coupent $(\mathcal{D}')$ en B_1 et B_2; soit A_1 et A_2 les points $r_1^{-1}(B_1)$ et $r_2^{-1}(B_2)$; les triangles A_1IB_1 et A_2IB_2 sont les solutions.

29. 1° $BP=CQ$ et $P\neq B$; l'angle de r est $(\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CQ})$;
$(\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CQ})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA})=\pi/3\ [2\pi]$, donc l'angle de r vaut $\pi/3$.
$OB=OC$ et $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=\pi/3\ [2\pi]$, donc O ne dépend ni de P ni de Q et est le point commun à la médiatrice de $[BC]$ et à l'arc de cercle $\overset{\frown}{BAC}$.
2° $OP=OQ$ et $(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ})=\pi/3\ [2\pi]$, donc OPQ est équilatéral et direct.
3° Soit Ω le centre du cercle (ABC). Si un couple (P,Q) est solution, alors P est commun à (d_1) et à $(C\Omega)$, et $Q=r(P)$.
Réciproquement : la droite $(C\Omega)$ coupe la demi-droite (d_1) en un point P_0; soit Q_0 le point $r(P_0)$. Alors : $P_0\in(d_1)$ et $Q_0\in(d_2)$ (car $r((d_1))=(d_2)$) et $BP_0=CQ_0=P_0Q_0$ (car OP_0Q_0 est équilatéral et $r([BP_0])=[CQ_0]$).

32. H appartient au cercle $(\mathcal{C}')$ symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à (BC).
Réciproquement : soit H_0 un point de $(\mathcal{C}')$, A_0' le symétrique de H_0 par rapport à (BC), A_0 le symétrique de A_0' par rapport au diamètre $(\mathcal{D})$ de $(\mathcal{C})$ parallèle à (BC).
Alors, si A_0 n'est ni B ni C, H_0 est l'orthocentre du triangle A_0BC; si A_0 est B ou C, son orthocentre n'est pas défini; si t est la translation composée de la réflexion d'axe (BC) suivie de la réflexion d'axe $(\mathcal{D})$, alors : $A_0=B\Leftrightarrow H_0=t^{-1}(B)$.
Le lieu de H est le cercle $(\mathcal{C}')$ privé de ses points $t^{-1}(B)$ et $t^{-1}(C)$.

8. SIMILITUDES

Q.C.M. 1 C; 2 A; 3 B; 4 A; 5 C; 6 A; 7 B.

10. $z'=(3/4)\,z+(1/2)-(5/4)\,\mathrm{i}$;
$x'=(3/4)\,x+1/2$ et $y'=(3/4)\,y-5/4$.

11. $z'=(-1/3)\,z+(16/3)\,\mathrm{i}$; $x'=-(1/3)\,x$ et $y'=(-1/3)\,y+16/3$.

14. $z'=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,z$
$+(1/2)\,[-9+\sqrt{3}+3(1+\sqrt{3})\,\mathrm{i}]$;
$x'=(-x/2)-(\sqrt{3}/3)\,y-(9/2)+\sqrt{3}/2$
et $y'=(\sqrt{3}/2)\,x-(y/2)+(3/2)(1+\sqrt{3})$.

17. $z'=((\sqrt{3}+\mathrm{i})/6)\,z$
$-(1/6)\,[19-3\sqrt{3}+\mathrm{i}(3-\sqrt{3})]$;
$x'=(\sqrt{3})/6)\,x-(y/6)-(19/6)+\sqrt{3}/2$
et $y'=(x/6)+(\sqrt{3}/6)\,y-(1/2)+\sqrt{3}/6$.

20. Rotations d'angles respectifs $2\pi/3$, $\pi/3$, $-\pi/2$ et $-2\pi/3$, de centres d'affixes respectives :
$1+\mathrm{i}(\sqrt{3}/3)$, i, $2\mathrm{i}$
et $\dfrac{5}{2}-\dfrac{7\sqrt{3}}{6}-\mathrm{i}\left(\dfrac{7}{2}+\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\right)$.

22. Si $\theta \neq \pi$: rotation d'angle $\theta + \pi$, de centre d'affixe $(-1/2)(1 + \mathrm{i}\tan(\theta/2))$.

Si $\theta = \pi$: translation de vecteur d'affixe 1.

26. Similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\pi/4$ et de centre d'affixe $5 + \mathrm{i}$.

30. $3 - \sqrt{3}/2 + \mathrm{i}(\sqrt{3} + 3/2)$.

33. $(5/2)(1 + \mathrm{i})$.

36. 1° Affixe de $G = (1/2)(1 + k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \times$ affixe de M.
Si s n'est pas une homothétie, alors θ n'est pas un multiple de π, donc $(1/2)(1 + k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \neq 0$: G est alors l'image de M par la similitude directe d'équation complexe $z' = (1/3)(1 + k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,z$, qui ne dépend que de s.

2° *a)* Ou bien $M = O = M'$;
ou bien $OM' = OM\sqrt{2}$
et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \pi/4 \ [2\pi]$
et le triangle OMM' est rectangle en M et isocèle.

b) $\dfrac{1 + k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{3} = \dfrac{2 + \mathrm{i}}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$

avec : $\cos\theta' = 2/\sqrt{5}$
et $\sin\theta' = 1/\sqrt{5}$; $\theta' \approx 0{,}5$ rad. à 0,1 rad. près.

46. 1° G est l'image de B par la similitude directe S de centre A, de rapport $\sqrt{3}/3$ et d'angle $\pi/6$.
Si $A \notin (\mathcal{C})$, alors le lieu de G est le cercle $(\mathcal{C}')$, image de $(\mathcal{C})$ par S.
Si $A \in (\mathcal{C})$, alors le lieu de G est $(\mathcal{C}')$ privé de A.

2° G est l'image de B par la similitude directe S' de centre A, de rapport $\sqrt{2}/3$ et d'angle $\pi/4$.
Si $A \notin (\mathcal{D})$, alors le lieu de G est la droite $(\mathcal{D}')$, image de $(\mathcal{D})$ par S'.
Si $A \in (\mathcal{D})$, alors le lieu de G est $(\mathcal{D}')$ privée de A.

59. Notons a, b, a', b', p, q les affixes de A, B, A', B', P et Q dans un repère orthonormal direct d'origine O et calculons $p + q$; par hypothèse :

$a' = ka$ et $b' = kb$ avec $k \in \mathbb{C}^*$,

$b' - a = \alpha(b - a)$ et $p - a = \alpha(-a)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$,

$a' - b = \beta(a - b)$ et $q - b = \beta(-b)$ avec $\beta \in \mathbb{C}^*$. En supposant $b \neq a$:

$$p = \frac{ab}{b - a}(1 - k) = -q.$$

9. TRANSFORMATIONS...

Q.C.M. 1 BCD ; 2 BC ; 3 AC ; 4 C ; 5 B ; 6 C.

12. 1° Non.

2° Réflexions de plans (IJK), (AOD), (BOE), (COF).

3° Par le demi-tour d'axe (JL) les points A, B, C, D, E, F ont respectivement pour images F, E, D, C, B, A ($(LJ) \perp (ACF)$ et L est le centre du rectangle $ACFD$).

4° Demi-tour d'axe (JL), deux autres demi-tours du même type : l'un des axes passant par I et perpendiculaire à (CFE), l'autre passant par K et perpendiculaire à (ABE). Rotations d'axe (OO') et d'angles de mesures 0, $2\pi/3$ et $4\pi/3$ (quelle que soit l'orientation de (OO')).

14. 1° Si H est le projeté orthogonal de A sur (P), $\vec{n}$ un vecteur normal à (P) et t le nombre réel tel que $\overrightarrow{AH} = t\vec{n}$ alors $\overrightarrow{AA'} = 2t\vec{n}$. Cherchez t.

$A'(0\,;\,-2\,;\,4)$.

2° $M(x, y, z)$ a pour image :

$$M'\left(\frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}z - \frac{9}{7}\,;\ -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - \frac{18}{7}\,;\ \frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z + \frac{27}{7}\right).$$

18. 1° (D) contient $A(1\,;\,2\,;\,5)$ et $B(9\,;\,-2\,;\,6)$ qui sont des points de (P) donc $(D) \subset (P)$.

2° Le plan (P') est perpendiculaire à (P) et contient (D). Un vecteur $\vec{n}$ normal à (P) est $2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$. Le plan (P') admet pour repère $(A, \overrightarrow{AB}, \vec{n})$.

$M \in (P') \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}) = 0$.

Une équation de (P') est :

$13x + 34y + 32z - 241 = 0$.

25. A est barycentre de $(B, 2)$, $(C, -1)$ équivaut à $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. C est donc l'image de B par l'homothétie h de centre A et de rapport 2. Transformez la sphère par h et discutez l'intersection de $h(S)$ et (D).

35. Soit G le centre de gravité de ABC, intersection de (AJ) et (CI). Les plans (ADJ) et (CDI) se coupent suivant (DG) et (DG) est perpendiculaire à (ABC). $g \circ f$ est une rotation d'axe (DG). Le plan (ABC) est globalement invariant par $g \circ f$ et :

$f(A) = A$, $g(A) = B$ donc $g \circ f(A) = B$;

$g \circ f$ est donc la rotation d'axe (DG) qui transforme A en B.

10. CONIQUES

Q.C.M. 1 BC ; 2 AC ; 3 BC ; 4 C ; 5 B ; 6 B ; 7 B ; 8 B.

11. 1° $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+1)^2}{(25/4)} = 1$, ellipse.

2° $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$, hyperbole.

3° $\dfrac{(x-1)^2}{9} - (y-2)^2 = 1$, hyperbole.

4° $(x - 1/2)^2 + (y+1)^2 = 1/4$, cercle.

5° $y = (1/4)(x-2)^2$, parabole.

6° $(y-1)^2 = -2(x+1)$, parabole.

7° $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(y+2)^2}{3} = 1$, ellipse.

15. Si $m = 0$ alors l'équation s'écrit $y^2 = -x$, $(\mathcal{C}_0)$ est une parabole.
Si $m \neq 0$ alors l'équation équivaut à :

$$\frac{y^2}{\dfrac{2m^2 + 2m + 1}{4m}} + \frac{\left(x + \dfrac{m+1}{m}\right)^2}{\dfrac{2m^2 + 2m + 1}{4m^2}} = 1.$$

Si $m < 0$ alors $(\mathcal{C}_m)$ est une hyperbole, si $m > 0$ alors $(\mathcal{C}_m)$ est une ellipse.

20. 1° $\mathrm{e}^t = x + y$ et $\mathrm{e}^{-t} = y - x$.

De $\mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-t} = 1$ on déduit $y^2 - x^2 = 1$.
De plus x décrit $\mathbb{R}$ et $y \geqslant 1$ donc $(\mathcal{C})$ est une branche d'hyperbole.

2° De $2t = (1/2)\,x + y$

et $\dfrac{2}{t} = (1/2)\,x - y$ on déduit

$x^2/16 - y^2/4 = 1$. De plus x admet un minimum égal à 4 et y varie de $+\infty$ à $-\infty$ donc $(\mathcal{C})$ est une branche d'hyperbole.

23. 1° La perpendiculaire en F à l'axe de la parabole d'équation $y^2 = 2px$ coupe cette parabole en M_1 et M_2 de coordonnées $(p/2\,;\,p)$ et $(p/2\,;\,-p)$; $M_1M_2 = 2p$, $p = (1/2)\,M_1M_2$.

25. Utiliser le fait que la directrice (D) est tangente au cercle de centre A et de rayon AF et au cercle de centre B et de rayon BF. Tracer une tangente commune à ces deux cercles.

26. Utiliser le fait que le foyer F est sur le cercle de centre A et tangent à (D) et sur le cercle de centre B et tangent à (D), F n'appartenant pas à (D).

44. A_{i-1} a pour coordonnées $\left((i-1)(d/n)\,;\,a(i-1)^2(d^2/n^2)\right)$. La tangente en A_{i-1} a pour équation :

$y = 2a(i-1)(d/n)\,x - a(i-1)\,(d^2/n^2)$,

B_i a pour coordonnées

$\left(i\,(d/n)\,;\,a(i^2 - 1)\,(d^2/n^2)\right)$.

Ainsi : $B_iA_i = a\,(d^2/n^2)$, indépendant de i.

Impression : AUBIN IMPRIMEUR Ligugé, Poitiers. P 40165 / Achevé d'imprimer en avril 1992.

Totalement conforme au programme en vigueur à partir de septembre 1992, ce nouveau manuel de la collection **FRACTALE** a été conçu en fonction des objectifs propres aux sections C et E.

Destiné à des élèves qui ont choisi une filière scientifique, ce manuel se devait d'être particulièrement riche et structuré : d'où notre souci d'une présentation claire alliée à un texte concis.
Tout au long du manuel, les auteurs se sont efforcés de transmettre l'aspect culturel des mathématiques ainsi que de proposer des situations issues des Sciences physiques.

Tous les chapitres, qui débutent par la présentation des objectifs à acquérir, ont la même organisation simple :

- **Les activités préparatoires**

Les élèves utilisent leurs connaissances antérieures ou découvrent de nouveaux outils mathématiques.

- **Le cours**

Bref et illustré d'exemples, il porte sur les notions essentielles.

- **Les travaux pratiques**

Travaux de recherche que les élèves peuvent effectuer individuellement ou en groupe.

- **La fiche méthode**

Les méthodes pour montrer une propriété, suivies d'exercices commentés où toutes les étapes du raisonnement sont détaillées.

- **"Le jour du Bac"**

A partir d'un exercice du Bac, on apprend à analyser un énoncé, à détecter les mots clés et à rédiger une solution simple.

- **Les exercices et problèmes**

Nombreux et variés, ils sont classés par genre, par thème et par niveau de difficulté.

Pour les élèves de Terminales C et E dans la collection FRACTALE :
Mathématiques Terminales C et E - ANALYSE/PROBABILITÉS.

La photographie de couverture, qui représente un objet fractal, a été créée par J.F. Colonna (GSV, Lactamme, Ecole Polytechnique, CNET).

9 782040 194703

ISBN 2-04-019470-3