Collection Maths faciles

- Rappel du cours et points méthodes
- Exercices pour comprendre le cours
- Exercices corrigés pour s'auto-évaluer.

BAMPENA YONG E.

Mieux comprendre le cours de maths par les exercices

MATHEMATIQUES

Terminale SM

Volume 2

(arithmétique, Nombres complexes et géométrie)

479 exercices et problèmes corrigés et commentés par objectifs pour réussir :

- le baccalauréat SM
- la préparation aux concours d'entrée dans les grandes écoles

AFECAM
2013

MATHEMATIQUES

Terminale SM

Volume 2

Collection **Maths Faciles**

Mieux comprendre le cours de Maths par les exercices.

- Rappel du cours et points méthodes
- Exercices pour comprendre le cours
- Exercices corrigés pour s'auto-évaluer.

479 exercices et problèmes corrigés et commentés, proposés par objectifs, pour :

- les baccalauréats C et E
- les concours d'entrée dans les grandes écoles

Conforme au programme

Terminale SM

Volume 2

(Arithmétiques – Nombres complexes - Géométrie)

Par M. BAMPENA YONG. E.
Enseignant de mathématiques

Avec les conseils de :

- M. BITJOKA ETOUA Samuel	Inspecteur national de Maths
- Mme Alice KAMGA	Inspectrice nationale de maths
- M. Charles FOGUE	Inspecteur régional de maths (littoral)
- M. Emmanuel KENGNE	AP mathématiques – lycée des palmiers

Collection Maths faciles

BAMPENA YONG E.

MATHEMATIQUES

Terminale SM

Volume 2

Editions OPECAM

2012

ISBN 978 - 9956 - 40 - 0

Sommaire :

Scanned by CamScanner

Présentation du manuel

Ce livre a pour objectif la préparation des épreuves écrites aux baccalauréats scientifiques de spécialité mathématiques ainsi que la préparation à une entrée dans l'enseignement supérieur.

Il a deux volumes :

- ✓ Le premier volume porte sur l'analyse et les probabilités
- ✓ Et le second porte sur la géométrie, l'arithmétique et les nombres complexes.

Ce dernier volume contient un complément sur la géométrie vectorielle et les applications affines.

Le second volume que voici, contient une synthèse du cours par chapitre et 479 exercices de niveaux variés entièrement corrigés, regroupés par objectifs et couvrant tous les programmes de mathématiques des classes de Terminales SM. Les exercices sans triangle, applications directes du cours, demandent à l'élève d'exercer des capacités exigibles ; ceux indiqués par un triangle nécessitent une technique plus élaborée et enfin, ceux indiquées par deux triangles sont particulièrement difficiles et demandent à l'élève un effort de recherche important.

L'esprit de ce manuel est d'apporter aux élèves des Terminales SM, les techniques usuelles de calculs, l'acquisition de méthodes de raisonnement en répondant à deux exigences :

- apporter une préparation efficace à l'examen du baccalauréat SM
- donner des exercices d'un niveau supérieur (mais accessible) pour se préparer à une entrée dans l'enseignement supérieur.

Chaque chapitre est découpé en savoir-faire fondamentaux pour permettre à l'élève de s'entraîner sur des situations précises et pour faciliter sa période de révision.

Je compte sur les professeurs et sur les élèves pour me faire part de leurs commentaires, de leurs critiques et de leurs suggestions ; je les en remercie d'avance.

Remerciements à tous les inspecteurs pédagogiques, collègues et élèves qui par leurs remarques m'ont accompagné durant l'élaboration de cette collection.

INTRODUCTION

AVANT L'EXAMEN, UNE METHODE DE TRAVAIL EFFICACE

Si, par chance (.. !!) vous lisez ce texte alors que l'année scolaire n'est pas encore trop avancée, voici *quelques conseils pour être plus performant.*

- **A la fin de chaque chapitre traité en cours, faites une <u>fiche de synthèse.</u>**

Certes il existe des résumés tout prêts dans les manuels mais aussi excellents soient-ils, ils ne remplacent pas votre propre travail : la réalisation de cette fiche sera l'occasion d'apprendre votre cours, d'en faire ressortir les points importants et de le réactiver.

- **Faites des fiches de méthodes.**

Par exemple : « comment étudier le sens de variation d'une suite ? ». Vous y dresserez la liste de toutes les méthodes dont vous disposez pour résoudre ce type de question. Ainsi face à une question de ce type, vous saurez ce qu'il convient de mettre en œuvre pour y répondre.
De plus, notez toutes les "astuces" que votre professeur ne manquera pas de vous indiquer au cours de l'année.

- **Faites une correction active.**

A chaque remise d'un devoir corrigé, repérez vos erreurs et **<u>analysez-les</u>**.
Commencez par en déterminer la nature :

- erreur de calcul,
- manque de connaissances,
- affirmation non démontrée,
- erreur de raisonnement,
- rédaction incorrecte,
- erreur d'étourderie...

Analysez-les sans complaisance. Trop d'élèves considèrent comme des étourderies des erreurs qui ne sont que la traduction d'une incompréhension plus profonde.

Ensuite, cherchez à les comprendre, seul d'abord, puis, si cela ne suffit pas à vous éclairer, essayez le travail en binôme, souvent fructueux. N'hésitez pas à demander, avec diplomatie, un complément d'information à votre professeur si vous avez l'impression d'avoir "tout comme dans le corrigé"... sans pour autant avoir les points correspondants. Il y a certainement quelque chose qui vous a échappé !

Enfin, corrigez-les.
Une correction efficace comprend non seulement la bonne réponse à la question (établie éventuellement avec plusieurs méthodes) mais aussi des éléments d'analyse de l'erreur commise destinés à éviter qu'elle ne se reproduise.

PENDANT L'EXAMEN, UNE STRATÉGIE GAGNANTE

Lire le problème en entier.

Procédez à deux lectures successives : la première globale, la seconde pas à pas pour effectuer le décryptage de l'énoncé.
Contrairement à une idée trop répandue parmi les élèves, ce n'est pas du temps perdu ! Bien au contraire, c'est un investissement profitable.
Ainsi, vous pourrez :

- comprendre l'esprit du sujet pour voir quelles méthodes vont être mises en jeu ;
- percevoir la structure du problème, les liens logiques, les questions indépendantes etc ;
- Vous faire une idée relative de la difficulté des questions : application directe du cours, question de réflexion, question déjà rencontrée au cours de l'année ?
- voir si les questions placées plus bas dans un exercice ne fournissent pas la réponse à une question ou une indication sur une méthode à utiliser pour une question placée en début de l'exercice.

➢ **Utilisez deux sortes de brouillons.**

Non, un brouillon n'est pas un instrument préhistorique et son emploi peut se révéler fort utile.
La première feuille vous **servira à stocker les hypothèses et réponses successives.** Ainsi vous n'aurez plus besoin de rechercher dans vos multiples copies la réponse de la question 2)b) lorsque vous en aurez besoin !
Une seconde feuille **servira pour les calculs intermédiaires, les essais...**
En revanche, il est indispensable de rédiger directement au propre. Si votre travail au brouillon est assez approfondi, il n'y aura pas de problème.

➢ **Soigner la rédaction.**

Ne négligez pas les qualités matérielles du devoir.
Certes une copie bien présentée mais remplie d'inepties ne vous permettra pas d'atteindre la moyenne. Néanmoins, certaines copies à peine lisibles risquent d'être sous-évaluées par un examinateur exaspéré et migraineux. Alors veillez à :

- l'écriture ;
- au soin (on peut barrer, mais proprement...) ;
- aérer votre devoir en sautant des lignes entre les questions ;
- faire des figures claires et assez grandes.

Trois critères d'une rédaction correcte :

- Les réponses aux questions sont clairement formulées et mises en évidence (soulignées, encadrées) ;
- le fil conducteur de la démonstration et les étapes intermédiaires apparaissent clairement ;
- tout ce qui est affirmé est justifié.

Néanmoins, gardez toujours à l'esprit que pour une question donnée, il existe plusieurs rédactions correctes. Vous l'aviez certainement déjà constaté au lycée ou au collège si au cours de ces années, vous avez eu différents enseignants de mathématiques.
Vous le retrouverez dans cet ouvrage : pour certains exercices, plusieurs corrections seront proposées.
Cela peut différer de vos propres habitudes. Cependant, c'est un repère intéressant pour vous indiquer quels niveaux d'exigence vous pourrez rencontrer le jour de l'examen.

➢ **Mettez à profit les dernières minutes avant de rendre votre copie pour :**

- relire globalement et faire la chasse aux étourderies ;
- vérifier la cohérence des résultats et corriger ou signaler toute anomalie ;
- dans la mesure du possible s'auto-vérifier. Cette démarche sera mise en évidence le plus souvent possible dans cet ouvrage.

RÉPONSES A UN CERTAIN NOMBRE DE QUESTIONS

Voici, pêle-mêle, les réponses à quelques questions que vous n'avez jamais osé poser en classe.

Tous les résultats du cours sont-ils dans le formulaire ?
Non ! C'est pour cela qu'il est important de se familiariser avec le formulaire au cours de l'année afin d'en connaître le contenu et les limites.

Ainsi, on pourra apprendre par cœur les formules qui n'y figurent pas et se familiariser avec les énoncés dont la formulation est différente de celle à laquelle on est habitué.
N'oublier pas cependant qu'il ne s'agit que d'un aide-mémoire et que cela ne vous dispense pas d'apprendre votre cours.

Peut-on admettre un résultat seulement conjecturé?

Cette situation est différente de celle que nous avons déjà évoquée : admettre un résultat donné par le texte.
Prenons un exemple. Dans la situation précédente, le texte dirait :
« Montrer que pour tout réel x, f '(x) est positif » alors que dans le cas actuel, la question reste ouverte : « quel est le signe de f '(x) ? ».
Or, grâce à votre calculatrice, vous pensez que f '(x) est positif mais vous êtes incapable de le démontrer. Si ce résultat bloque votre poursuite du problème, alors, sans hésiter, admettez-le (en le disant clairement) et continuez votre résolution.

Comment rédiger la démonstration d'une équivalence ?

Point délicat s'il en est, la démonstration d'équivalences fait souvent des ravages dans les copies d'élèves.
On y rencontre principalement deux types d'écueils.

- L'élève considère comme équivalentes des propositions qui ne le sont pas. Ainsi, pour a et b réels quelconques, $a^2 = b^2$ n'est pas équivalent à $a = b$ puisque $a^2 = b^2$ implique $a = b$ ou $a = -b$.
- Le fond mathématique semble correct mais l'emploi malencontreux d'un "donc" sème le doute dans l'esprit du correcteur : implication ? équivalence ?

Une solution sage consiste alors à rédiger en deux temps.
Pour montrer que les propositions P et Q sont équivalentes, on montrera successivement que P implique Q, puis que Q implique P.
Un seul inconvénient à signaler : une telle rédaction est souvent assez longue ce qui conduit certains élèves à y renoncer, à tort.
Attention aussi à l'emploi des symboles logiques $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.
Ils ont connu leur heure de gloire dans les programmes antérieurs lorsqu'une initiation à la logique figurait au programme de seconde.
Comme ce n'est plus le cas, le programme actuel précise :
« Les élèves peuvent utiliser les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ mais il convient d'éviter tout recours systématique à ces symboles ».
En conséquence, dans cet ouvrage, il leur sera souvent préféré une rédaction plus littéraire.

Le correcteur peut-il me retirer des points si je ne respecte pas la méthode demandée ?

Dans un certain nombre d'exercices, on trouve des questions débutant par « en déduire que ». Ainsi dans l'exercice suivant :

a) Montrer que le point K est le milieu des segments [BD] et [AC].

b) Montrer que $\dfrac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$.

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

L'examinateur attend alors clairement que vous exploitiez les réponses des questions a) et b). Si vous ne le faites pas, vous serez pénalisé même si votre démonstration est par ailleurs correcte.
En effet, l'évaluation porte ici sur deux points : la détermination de la nature de ABCD et votre aptitude à exploiter les résultats des questions antérieures dans ce but. Si vous procédez autrement, même avec une démonstration plus simple à vos yeux, vous ne remplissez pas le contrat ; d'où une pénalisation.

Un cas un peu différent, du moins en apparence : l'énoncé n'emploie pas l'expression "déduire" mais après la question mentionne "on pourra utiliser..." ou "en remarquant que" là aussi, il vous est très fortement conseillé d'exploiter la suggestion du texte.
En bref, exploiter au maximum les indications données par l'énoncé sur les méthodes à mettre en œuvre. En vous en éloignant, vous prenez le risque d'une pénalisation facilement évitable.

Dois-je rédiger plusieurs fois une démonstration identique ?

Il arrive que dans certains problèmes, on soit confronté plusieurs fois à des démonstrations identiques.
Commencez par vous assurez qu'on est réellement dans la même situation.
N'y a-t-il pas un détail subtil qui vous a échappé ?
Si vraiment c'est le cas, rédigez de manière précise la première démonstration puis abrégez les démonstrations suivantes en utilisant une formule comme "on démontrerait de même que.. !!

Faut-il recopier le texte ?

NON ! Certains élèves confondent à tort recopiage du texte et rédaction.
Vous pouvez, si vous le souhaitez présenter les hypothèses d'un problème avant de commencer la rédaction mais un recopiage mot à mot du texte n'apporte rien.
En revanche, l'examinateur appréciera que la réponse à chaque question débute par un titre. Il pourra ainsi se repérer facilement dans la progression du problème. Cette démarche sera utilisée dans certaines solutions de cet ouvrage.

ET ENFIN, LES ERREURS A NE PAS COMMETTRE

Voici, enfin, le récapitulatif de quelques erreurs qui peuvent vous coûtez cher.

- **Mal comprendre le préambule d'un problème.**

Un certain nombre de problèmes commencent par une phrase destinée à planter le décor. Ainsi "on se propose de placer les points A, B et C dans un repère à l'aide d'un compas" ne doit pas vous inciter à vous jeter sur votre propre compas pour construire immédiatement la figure. La construction effective des points A, B et C n'interviendra que plusieurs questions plus loin après une étude sur une rotation ...
Il ne s'agissait que d'annoncer le but recherché. Il fallait ensuite se laisser guider par l'énoncé.

- **Anticiper la réponse à une question ;**

On ne le répètera jamais assez ! Si on vous demande de prouver à la question 5) qu'une fonction f est croissante, ce n'est pas normal de l'avoir prouvé à la question 2). Il y avait alors certainement une autre manière de procéder qui vous éviterait de donner trop tôt la réponse à une question postérieure. Vous risquez alors une double pénalisation : à la question 2) pour ne pas avoir respecté la méthode attendue puis à la question 5) pour ne pas y donner la réponse prévue !
Normalement, il y a un conducteur logique dans un problème et si votre résolution ne le respecte pas, cela vaut la peine d'y réfléchir.

- **Laissez subsister des incohérences.**

Contradiction entre le tableau de variation d'une fonction et sa courbe représentative, probabilité supérieur à 1, cosinus d'un angle égal à $2+\sqrt{3}$ ...

Les examinateurs au baccalauréat en rencontre chaque année. Or, dans la majorité des cas, les élèves sont conscients qu'il y a un problème mais ne retrouvent pas leur erreur et continuent...
Traquez les incohérences sans pitié. Relisez-vous, recherchez l'erreur et si vous ne la retrouvez pas dans le temps imparti, signaler que vous avez conscience du problème. Il y aura certes encore une erreur mais pas une absurdité.

- **Ne maltraiter pas (trop) l'orthographe, en particulier les noms des mathématiciens.**

Entendre parler de la relation de Shall est encore amusant chez un collégien de troisième mais plutôt ridicule chez un presque bachelier.
Renoncez définitivement à employer des abréviations. Ni nbre, ni fct, ni Mq, ni Dq ... n'ont leur place dans une copie d'examen.

- **Eviter le gaspillage de points.**

Une copie à trous où l'élève a papillonné à la recherche des points faciles devient vite lassante pour l'examinateur qui a bien du mal à évaluer le niveau réel du candidat.

Mais soyez sans crainte, après avoir travaillé d'arrache-pied les exercices proposés qui suivent et les méthodes qui s'y rattachent, l'avenir ne peut être que radieux !

BON COURAGE !

Cette introduction est inspirée du « GUIDE pour la préparation au BAC » de Bénédicte BOURGEOIS, Marc LANGLET, Bernard MEYSSIREL et Claire TCHOBROUTSKY. Des éditions ellipses.

Du même Auteur et de la même collection :

1. Maths types Terminale SM – Volume 1- Analyse & Probabilités
2. Maths types Terminale SE
3. Maths types Première SM – Volume 1- Analyse, Dénombrements & Statistiques
4. Maths types Première SM – Volume 2- Géométrie & Algèbre linéaire
5. Maths types Première SE
6. Maths types Seconde S
7. Maths types Troisième

8 ARITHMETIQUE

RAPPEL DU COURS

A. Divisibilité - Division euclidienne

A_1 – Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

a) Définition et notation :

On appelle multiple d'un entier relatif a, tout entier relatif b, tel qu'il existe un entier relatif q, vérifiant l'égalité b = qa.
On dit aussi, lorsque a est non nul, que a divise b, ou que a est un diviseur de b, ou que b est divisible par a.
L'ensemble des multiples de a est noté $a\mathbb{Z}$.
D'où $a\mathbb{Z}=\{aq, q\in\mathbb{Z}\}$

Remarque :
- $0\mathbb{Z}=\{0\}$
- $1\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$
- *Soit a un entier relatif,* $(-a)\mathbb{Z}=a\mathbb{Z}$

b) Propriétés :

Soit a un entier relatif.
P_1) L'ensemble $a\mathbb{Z}$, muni de l'addition des entiers relatifs est un groupe abélien.
Donc, soit x et y deux multiples de l'entier a.
- x + y est un multiple de a
- 0 est un multiple de a
- -x est un multiple de a.

P_2) Toute combinaison linéaire à coefficients entiers de multiples de a est un multiple de a.
C'est-à-dire, si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n multiples de a, alors pour n entiers relatifs $k_1, k_2, \dots, k_n$ quelconques, $k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n$ est aussi un multiple de a.

c) Propriétés de la division dans $\mathbb{Z}$:

P_1) Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et c un entier relatif.
- a divise a
- Si a divise b et b divise a, alors a = b ou a = -b.
- Si a divise b et b divise c, alors a divise c.

P_2) Soit a un **entier naturel non nul** et b un **entier naturel**.
- Si a divise b, alors b = 0 ou a ≤ b.
- Si a divise b et b divise a, alors a = b. (b est non nul)

P_3) $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n entiers relatifs, $k_1, k_2, \dots, k_n$ sont aussi n entiers relatifs.
Si un entier relatif non nul a divise $x_1, x_2, \dots$ et x_n, alors a divise $k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n$.

A_2 – Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

a) Division euclidienne dans $\mathbb{N}$:

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul.
Il existe un unique couple (q , r) d'entiers naturels tels que **a = bq + r, avec 0 ≤ r < b.**
Cette écriture est la division euclidienne de a par b, où a, b, q et r sont respectivement le dividende, le diviseur, le quotient et le reste.

Remarque :
Dans l'écriture $a = bq + r$, *avec* $0 \le r < b$.
- ***bq est le plus grand multiple de b inférieur ou égal à a.***
- ***Si r = 0, alors a = bq : a est alors un multiple de b.***

b) Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$:

Soit a un entier relatif et b un entier relatif non nul.

Il existe exactement un entier relatif q et un entier naturel r tels que a = bq + r, avec $0 \leq r < |b|$.

Cette écriture est la division euclidienne de a par b, où a, b, q et r sont respectivement le dividende, le diviseur, le quotient et le reste.

A_3 – Numération

Soit b un entier naturel strictement plus grand que 1.

- Tout entier naturel non nul N peut s'écrire de façon unique sous la forme $N = r_p b^p + r_{p-1} b^{p-1} + \ldots + r_1 b + r_0$, où r_p, r_{p-1}, . . ., r_1 et r_0 sont des entiers naturels strictement inférieurs à b, avec $r_p \neq 0$.
- La connaissance des p + 1 entiers r_p, r_{p-1}, . . ., r_1 et r_0 détermine N.

On note alors $N = \overline{r_p r_{p-1} \ldots r_1 r_0}^{\,b}$ qui est l'écriture de N en base b.

- Tout entier naturel strictement inférieur à b est appelé un chiffre dans le système de numération de base b.
- Nous utilisons habituellement la numération de base b = 10 ou système décimal.

Dans ce système, les chiffres sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

La numération binaire utilisée notamment en informatique est la numération en base deux.

Dans ce système, on a deux chiffres : 0 et 1.

Lorsque la base est strictement supérieure à dix, on peut utiliser des lettres pour représenter les chiffres plus grands que 9.

A_4 – Congruences dans $\mathbb{Z}$

a) Définition et notation :

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

L'entier relatif a est congru à l'entier relatif b modulo n, lorsque b – a est un multiple de n.

On note alors $a \equiv b[n]$ ou encore $a \equiv b \bmod(n)$.

Remarque :

Soit a, b et c trois entiers relatifs et n un entier naturel strictement supérieur à 1. On a :

- $a \equiv a[n]$
- Si $a \equiv b[n]$, alors $b \equiv a[n]$.
- Si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$, alors $a \equiv c[n]$.
- $a \equiv b[n]$ *avec* $0 \leq b < n$, *si et seulement si, b est le reste de la division euclidienne de a par n.*
- $a \equiv 0[n]$ *si et seulement si n divise a.*

b) Propriété fondamentale :

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

L'entier relatif a est congru à l'entier relatif b modulo n, si et seulement si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

c) Congruences et opérations :

n est un entier naturel strictement supérieur à 1.

P_1) Soit a, b, a' et b' quatre entiers relatifs, p un entier naturel et x un entier relatif.

Si $a \equiv a'[n]$ et $b \equiv b'[n]$, alors on a :

- $a + b \equiv a' + b'[n]$
- $ab \equiv a'b'[n]$
- $xa \equiv xa'[n]$
- $a^p \equiv a'^p[n]$.

P_2) De façon générale.

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ étant k entiers relatifs, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ étant k entiers relatifs, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ k étant entiers relatifs et $p_1, p_2, \ldots, p_k$ étant k entiers naturels.

Si pour tout i appartenant à {1, 2, . . ., k} on a $a_i \equiv b_i[n]$,

alors on a aussi $x_1 a_1^{p_1} + x_2 a_2^{p_2} + \ldots + x_k a_k^{p_k} \equiv x_1 b_1^{p_1} + x_2 b_2^{p_2} + \ldots + x_k b_k^{p_k} [n]$.

d) Critères de divisibilité :

Soit $N = \overline{r_p r_{p-1} \ldots r_1 r_0}$ un entier naturel écrit en base 10.

- N est divisible par 2 si et seulement si, r_0 est pair.
- N est divisible par 3 si et seulement si, $r_p + r_{p-1} + \ldots + r_1 + r_0$ est divisible par 3.
- N est divisible par 4 (reps. par 25) si et seulement si, $10r_1 + r_0$ est divisible par 25.
- N est divisible par 5 si et seulement si, r_0 est divisible par 5 (c'est-à-dire $r_0 = 0$ ou $r_0 = 5$).
- N est divisible par 9 si et seulement si, $r_p + r_{p-1} + \ldots + r_1 + r_0$ est divisible par 9
- N est divisible par 11 si et seulement si, $r_0 - r_1 + r_2 - r_3 \ldots + (-1)^p r_p$ est divisible par 11.

B. Diviseurs et multiples communs

B_1 – Diviseurs communs

a) Définition :
Soit a et b deux entiers relatifs.
Tout entier d qui divise à la fois a et b est un **diviseur commun** de a et b.

b) Propriétés :
Soit a et b deux entiers naturels non nuls, avec $a \leq b$.
- Si a divise b, alors l'ensemble des diviseurs communs à a et à b est l'ensemble des diviseurs de a.
- Si a ne divise pas b.
  Notons r le reste de la division euclidienne de b par a.
  Alors l'ensemble des diviseurs communs à a et à b est l'ensemble des diviseurs communs à a et r.

c) Recherche des diviseurs communs d'entiers naturels : l'algorithme d'Euclide.
Soit a et b **deux entiers naturels** non nuls, avec $a \leq b$.
- **Si a divise b**, alors l'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de a.
- **Si a ne divise pas b**, alors on réalise la division euclidienne de b par a. Soit r_1 le reste.
  L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs communs à a et r_1.

On applique la même méthode à a et r_1.
- **Si r_1 divise a**, alors l'ensemble des diviseurs communs à a et r_1, donc à a et b, est l'ensemble des diviseurs de r_1.
  Si r_1 ne divise par a, alors on effectue la division euclidienne de a par r_1. Soit r_2 le reste.
  L'ensemble des diviseurs communs à a et r_1, donc à a et b, est l'ensemble des diviseurs communs à r_1 et r_2.

On réitère ce raisonnement jusqu'au dernier reste non nul $\mathbf{r_n}$.
L'ensemble des diviseurs communs à a et b est alors l'ensemble des diviseurs de $\mathbf{r_n}$.
Cette méthode a le nom d'algorithme d'Euclide.

Remarque :
Soit a et b deux entiers relatifs.
L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs communs à $|a|$ ***et*** $|b|$.

d) Définition : Plus grand diviseur commun
Soit a et b deux entiers relatifs non tous nuls.
On appelle plus grand diviseur commun de a et b, que l'on note PGCD(a, b), le plus grand entier naturel de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.

e) Recherche du plus grand diviseur commun de deux entiers relatifs :
- Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

- Si a divise b, alors PGCD(a , b) = a.
- Si a ne divise pas b, alors le PGCD(a , b) est le dernier reste non nul r_n dans l'algorithme d'Euclide.

- Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. $PGCD(a\ ,b) = PGCD(|a|\ ,|b|)$

Remarques :
- ***Tout diviseur commun à a et b divise le*** $PGCD(a\ ,b)$ ***et est inférieur ou égal au*** $PGCD(a\ ,b)$.
- ***Soit a, b et k trois entiers relatifs non nuls.*** $PGCD(ka\ ,kb) = |k|\,PGCD(a\ ,b)$.
- ***Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et d un diviseur commun à a et b.*** $PGCD\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{PGCD(a\ ,b)}{|d|}$.

B_2 – Nombres premiers entre eux ou étrangers

a) Définition :
Deux entiers relatifs a et b sont dits **premiers entre eux ou étrangers** lorsque le PGCD(a , b) = 1.

Remarque :
Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et d le plus grand diviseur commun de a et b.

On a : $PGCD\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

b) Théorème de Bézout :

Identité de Bézout :

Soit a et b deux entiers relatifs.

Si PGCD(a , b) = d, alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que au + bv = d.

Enoncé du théorème de Bézout :

Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que au + bv = 1.

Remarque :

L'algorithme d'Euclide permet de déterminer un couple (u , v) de l'identité de Bézout.

Conséquences :

P_1) Soit a, b et c trois entiers relatifs, m et n deux entiers naturels.

- Si a et b d'une part, a et c d'autre part sont premiers entre eux, alors a et bc sont premiers entre eux.
- Si a et b sont premiers entre eux, alors a et b^n d'une part, a^m et b^n d'autre part, sont premiers entre eux.

P_2) Si a est premier avec chacun des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_k$, alors a et $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_k$ sont premiers entre eux.

c) Théorème de Gauss :

Enoncé du théorème de Gauss :

Soit a, b et c trois entiers relatifs.

Si a divise bc et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Conséquence :

Soit a, b et c trois entiers relatifs.

Si a et b divisent c et a et b sont premiers entre eux, alors ab divise c.

B_3 – Multiples communs

a) Définition :

Soit a et b deux entiers relatifs.

- Tout entier m multiple à la fois de a et de b est un **multiple commun** de a et b.
- On appelle plus petit multiple commun de a et b, que l'on note PPCM(a , b), le plus petit entier naturel non nul, multiple commun de a et b.

b) Recherche du plus petit multiple commun de deux entiers relatifs :

- Soit a et b **deux entiers naturels** non nuls.
  Si a divise b, alors PPCM(a , b) = b.
  En général, PPCM(a , b)×PGCD(a , b) = ab
- Soit a et b deux entiers relatifs :

$$PPCM(a, b) = PPCM(|a|, |b|).$$

Remarque :

- *Soit a et b deux entiers relatifs.*
L'ensemble des multiples communs à a et b est l'ensemble des multiples du PPCM(a , b).
- *Tout multiple commun à a et b est multiple du PPCM(a , b).*
- *Soit a, b et k trois entiers relatifs.* $PPCM(ka, kb) = |k| PPCM(a, b)$.
- *Soit a et b deux entiers relatifs et d un diviseur commun à a et b.* $PPCM\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{PPCM(a, b)}{|d|}$.
- *Soit a et b deux entiers naturels. m = PPCM(a , b) et d = PGCD(a , b).*
Si on pose a = da' et b = db', alors $m = a' \times b' \times d$.
- *Soit a et b deux entiers relatifs.* $PPCM(a, b) \times PGCD(a, b) = |a| \times |b|$.

C. Les nombres premiers

C_1 – Les nombres premiers

a) Définition :
Un entier relatif p est dit premier lorsqu'il a exactement quatre diviseurs : 1, -1, p et -p.

b) Théorème :
Il existe une infinité de nombres premiers.

c) Critère de primalité :
Un entier naturel n supérieur ou égal à 2 est premier si et seulement si aucun nombre premier positif inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ ne divise n.

C_2 – Nombres premiers et divisibilité

P_1) Soit p un nombre premier et a un nombre relatif.
Deux situations peuvent se présenter :
- p divise a ou alors
- p et a sont premiers entre eux.

P_2) Soit p et q deux nombres premiers.
Deux situations peuvent se présenter :
- $|p| = |q|$ ou alors
- p et q sont premiers entre eux.

P_3) Soit p un entier naturel premier et a un entier naturel non nul.
Si a < p, alors a et p sont premiers entre eux.

P_4) Soit p un nombre premier, a et b deux entiers relatifs.
Si p divise ab, alors p divise a ou p divise b.

C_3 – Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers d'un entier naturel

P_1) Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède au moins un diviseur premier.

P_2) Tout entier naturel a supérieur ou égal à 2 est premier ou est décomposable en un produit de facteurs premiers positifs et cette décomposition de a est unique à l'ordre près des facteurs.

P_3) Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Notons $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\ldots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition de a en produit de facteurs premiers positifs.

a possède $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_k+1)$ diviseurs.

P_4) Soit a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Pour que b divise a, il faut et il suffit que tous les facteurs premiers de la décomposition de b figurent dans la décomposition de a avec les exposants au plus égaux.

P_5) Soit a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

Notons $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\ldots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition de a en produit de facteurs premiers et $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}p_3^{\beta_3}\ldots p_k^{\beta_k}$ la décomposition de b en produit de facteurs premiers.

Si $\boldsymbol{\delta_i}$ désigne le plus petit nombre entre $\boldsymbol{\alpha_i}$ et $\boldsymbol{\beta_i}$ et $\boldsymbol{\mu_i}$ désigne le plus grand nombre entre $\boldsymbol{\alpha_i}$ et $\boldsymbol{\beta_i}$, alors :
$\mathrm{pgcd}(a,b) = p_1^{\delta_1}p_2^{\delta_2}p_3^{\delta_3}\ldots p_k^{\delta_k}$ et $\mathrm{ppcm}(a,b) = p_1^{\mu_1}p_2^{\mu_2}p_3^{\mu_3}\ldots p_k^{\mu_k}$.

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Calculer dans d'autres systèmes de numération

1 – Changer de système de numération

Exercice 1

Ecrire l'entier x donné dans le système décimal en base b dans chacun des cas suivants :

a) $x = 144127$ et $b = 12$. b) $x = 177$ et $b = 2$.

Solution 1

Méthode 1 :

a) On a : $144127 = 6\times12^4 + 11\times12^3 + 4\times12^2 + 10\times12 + 7$. (Développement de x suivant les puissances de 12).

D'où, $x = 144127 = \overline{6B4A7}^{douze}$, où B = 11 et A = 10.

b) Le développement de $x = 177$ suivant les puissances de $b = 2$ est :

$177 = 1\times2^7 + 0\times2^6 + 1\times2^5 + 1\times2^4 + 0\times2^3 + 0\times2^2 + 0\times2 + 1$. D'où, $x = 177 = \overline{10110001}^{deux}$.

Méthode 2 :

Pour écrire un nombre x donné en base 10, dans une base b autre, on peut aussi procéder par des divisions :

a) 144127 | 12
7 | 12010 | 12
10 | 1000 | 12
4 | 83 | 12
11 | 6 | 12
6 | 0

En lisant les restes de bas en haut, on a l'écriture de x = 144127 en base 12, et l'on note : $144127 = \overline{6B4A7}^{douze}$.

b) 177 | 2
1 | 88 | 2
0 | 44 | 2
0 | 22 | 2
0 | 11 | 2
1 | 5 | 2
1 | 2 | 2
0 | 1 | 2
1 | 0

D'où $177 = \overline{10110001}^{deux}$.

Exercice 2

Ecrire en base dix les entiers naturels suivants : $\overline{21201}^{trois}$; $\overline{A8C}^{seize}$.

Solution 2

- $\overline{21201}^{trois} = 2\times3^4 + 1\times3^3 + 2\times3^2 + 0\times3^1 + 1\times3^0 = 208$.
- $\overline{A8C}^{seize} = 10\times16^2 + 8\times16^1 + 12\times16^0 = 2700$.

Exercice 3

En utilisant la numération décimale comme intermédiaire, écrire :

a) $\overline{120212}^{trois}$ en base huit. b) $\overline{1200}^{cinq}$ en base deux.

Solution 3

a) $\overline{120212}^{trois} = 1\times3^5 + 2\times3^4 + 0\times3^3 + 2\times3^2 + 1\times3 + 2 = 428$.

D'où $\overline{120212}^{\text{trois}} = 428$ (système décimal).

Or $428 = 6\times 8^2 + 5\times 8^1 + 4\times 8^0 = \overline{654}^{\text{huit}}$, alors $\overline{120212}^{\text{trois}} = \overline{654}^{\text{huit}}$.

b) $\overline{1200}^{\text{cinq}} = 1\times 5^3 + 2\times 5^2 + 0\times 5 + 0 = 175$. D'où $\overline{1200}^{\text{cinq}} = 175$ (système décimal).

Or, $175 = 1\times 2^7 + 0\times 2^6 + 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1 = \overline{10101111}^{\text{deux}}$, alors $\overline{1200}^{\text{cinq}} = \overline{10101111}^{\text{deux}}$.

Exercice 4

Ecrire le nombre $\overline{4207}^{\text{huit}}$ dans le système binaire :

1) En passant par le système décimal.
2) Directement.

Définition : ***le système de base 8 est appelé le système octal.***

Solution 4

1) $\overline{4207}^{\text{huit}} = 4\times 8^3 + 2\times 8^2 + 0\times 8 + 7 = 2183$. D'où $\overline{4207}^{\text{huit}} = 2183$ (système décimal) ;

Or $2183 = 1\times 2^{11} + 0\times 2^{10} + 0\times 2^9 + 0\times 2^8 + 1\times 2^7 + 0\times 2^6 + 0\times 2^5 + 0\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2 + 1 = \overline{100010000111}^{\text{deux}}$.

D'où $\overline{4207}^{\text{huit}} = \overline{100010000111}^{\text{deux}}$.

2) Directement :

$\overline{4207}^{\text{huit}} = 4\times 8^3 + 2\times 8^2 + 0\times 8 + 7 = 2^2\times(2^3)^3 + 2\times(2^3)^2 + 1\times(2^2 + 2 + 1) = 2^{11} + 2^7 + 2^2 + 2 + 1 = \overline{100010000111}^{\text{deux}}$.

D'où $\overline{4207}^{\text{huit}} = \overline{100010000111}^{\text{deux}}$.

Exercice 5

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à un.

a) Quelle est l'écriture de $2^n - 1$ dans le système de numération binaire ?

b) Prouver que l'entier qui s'écrit avec n chiffres $\overline{111...11}^{b}$ dans le système de numération de base b est égal à $\dfrac{b^n - 1}{b - 1}$

Solution 5

a) Notons que $2^n - 1 = (2-1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1) = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 = \overline{111...11}^{\text{deux}}$ (avec n fois le chiffre 1).

b) $\overline{111...11}^{b} = b^{n-1} + b^{n-2} + b^{n-3} + \ldots + b + 1 = \dfrac{b^n - 1}{b - 1}$.

Exercice 6

Classer les entiers suivants du plus petit au plus grand :

a) $\overline{100101}^{\text{deux}}$; $\overline{1010001}^{\text{deux}}$; $\overline{1000100}^{\text{deux}}$.

b) $\overline{B1C49}^{\text{seize}}$; $\overline{A0561D}^{\text{seize}}$; $\overline{F1054B}^{\text{seize}}$.

Solution 6

a) $\overline{100101}^{\text{deux}}$; $\overline{1000100}^{\text{deux}}$; $\overline{1010001}^{\text{deux}}$.

b) $\overline{B1C49}^{\text{seize}}$; $\overline{A0561D}^{\text{seize}}$; $\overline{F1054B}^{\text{seize}}$.

Point méthode :

Les nombres se classent comme en base décimale :

- ***Si les deux nombres n'ont pas le même nombre de chiffres, le plus grand est celui qui a le plus de chiffres.***
- ***Si les nombres ont le même nombre de chiffres, on compare les chiffres de même rang à partir de la gauche. Dès qu'on rencontre deux chiffres différents, le plus grand nombre est celui qui a le plus grand de ces chiffres.***

2 – Effectuer l'addition et la multiplication dans une base donnée

Exercice 7

Effectuer les opérations suivantes :

a) $\begin{array}{rl} 101 & \text{(base 2)} \\ +\ 11 & \text{(base 2)} \\ \hline \end{array}$

b) $\begin{array}{rl} 111 & \text{(base 2)} \\ \times\ 101 & \text{(base 2)} \\ \hline \end{array}$

Solution 7

- Commençons par donner les tables d'addition et de multiplication en base deux.

Les chiffres en base deux sont : 0 et 1

L'addition :

+	0	1
0	0	1
1	1	10

la multiplication :

×	0	1
0	0	0
1	0	1

a) $\begin{array}{rl} 101 & \text{(base 2)} \\ +\ 11 & \text{(base 2)} \\ \hline 1000 & \text{(base 2)} \end{array}$

b) $\begin{array}{rl} 111 & \text{(base 2)} \\ \times\ 101 & \text{(base 2)} \\ \hline 111 & \\ +\ 1110 & \\ \hline 100011 & \text{(base 2)} \end{array}$

Notons que, ces opérations s'effectuent comme dans le système décimal.

- Pour effectuer ces opérations, on peut d'abord ramener les nombres en base dix, y effectuer les opérations, puis écrire les résultats obtenus en base deux.

On aura alors : $\overline{101}^{\text{deux}} = 1\times 2^2 + 0\times 2 + 1 = 5$; $\overline{11}^{\text{deux}} = 2+1=3$ et $5+3=8$.

Or $8 = 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 0\times 2 + 0 = \overline{1000}^{\text{deux}}$. D'où $\overline{101}^{\text{deux}} + \overline{11}^{\text{deux}} = \overline{1000}^{\text{deux}}$.

On a aussi, $\overline{111}^{\text{deux}} = 1\times 2^2 + 1\times 2 + 1 = 7$; $\overline{101}^{\text{deux}} = 1\times 2^2 + 0\times 2 + 1 = 5$ et $7\times 5 = 35$.

Or $35 = 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2 + 1 = \overline{100011}^{\text{deux}}$. D'où $\overline{111}^{\text{deux}} \times \overline{101}^{\text{deux}} = \overline{100011}^{\text{deux}}$.

Exercice 8

1) Vérifier que : $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x+1)^2$ pour tout réel x.

2) En déduire que dans toute base supérieure à 3, on a : $\overline{10}\times\overline{11}\times\overline{12}\times\overline{13}+1 = (\overline{131})^2$.

Solution 8

1) Le lecteur vérifiera cette égalité.

2) Soit n un entier naturel strictement supérieur à 3.

$$\begin{aligned} \overline{10}^n \times \overline{11}^n \times \overline{12}^n \times \overline{13}^n + 1 &= n(n+1)(n+2)(n+3)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2 \quad \text{d'après la question 1)} \\ &= (\overline{131}^n)^2 \end{aligned}$$

D'où $\overline{10}^n \times \overline{11}^n \times \overline{12}^n \times \overline{13}^n + 1 = (\overline{131}^n)^2$, pour tout entier naturel strictement supérieur à 3.

3 – Retrouver le système de numération

Exercice 9

Soit a, b, n trois entiers supérieurs à 3.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que: $n = \overline{300}^a = \overline{33}^b$.

Solution 9

Soit a et b entiers strictement supérieurs à 3.

$\overline{300}^a = \overline{33}^b \Leftrightarrow 3a^2 = 3b + 3 \Leftrightarrow a^2 = b + 1$. b + 1 est donc un carré parfait supérieur à 9 (car a > 3).
La plus petite valeur possible de b + 1 est 16, donc $a^2 = 16$ et $b + 1 = 16$.
C'est-à-dire a = 4 et b = 15. D'où la plus petite valeur de n est : $n = 3\times16 = 48$.

Exercice 10

Existe-t-il une base dans laquelle on a : $\overline{18}+\overline{14}=\overline{31}$?

Si oui, calculer dans cette base : $\overline{81}+\overline{41}$; $\overline{81}\times\overline{41}$; $\overline{18}\times\overline{14}$.

Solution 10

- Soit a une telle base, a est un entier strictement supérieur à 8.

Et $\overline{18}^a + \overline{14}^a = \overline{31}^a \Leftrightarrow (a+8)+(a+4) = 3a+1 \Leftrightarrow a = 11$.

D'où $\overline{18}^{\text{onze}} + \overline{14}^{\text{onze}} = \overline{31}^{\text{onze}}$.

- **Effectuons les opérations :**

$$\begin{array}{r} 81 \\ +\ 41 \\ \hline 112 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81 \\ \times\ 41 \\ \hline 81 \\ +\ 2A4 \\ \hline 3011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18 \\ \times\ 14 \\ \hline 6A \\ +\ 18 \\ \hline 23A \end{array}$$

> **Point méthode :**
> *On peut aussi ramener les opérations en base décimale, les y effectuer, puis faire une conversion du résultat obtenu en base onze.*

Noter que : A remplace 10 qui en base 11 est un chiffre.

Exercice 11 BAC C – Maroc

1) Trouver tous les entiers naturels dont le cube divise 18360.
2) En déduire dans $\mathbb{N}$, la résolution de l'équation : $b^3(b^2 + (b+1)^2) = 18360$ d'inconnue b.
3) Existe-t-il un naturel b tel que 36723 s'écrive $\overline{442003}^b$?

Solution 11

1) On a : $18360 = 2^3\times 3^3\times 5\times17$. Les entiers dont le cube divise 18360 sont donc : 1, 2, 3 et 6.
2) L'égalité $b^3(b^2 + (b+1)^2) = 18360$ entraîne que b^3 divise 18360.
Donc d'après la question 1), b appartient à {1, 2, 3, 6}.
Or $1^3(1^2 + (1+1)^2) = 5$, Pour b = 1
$2^3(2^2 + (2+1)^2) = 104$. Pour b = 2
$3^3(3^2 + (3+1)^2) = 675$. Pour b = 3
$6^3(6^2 + (6+1)^2) = 18360$. Pour b = 6
D'où b = 6

3) $\overline{442003}^b = 36723 \Leftrightarrow 4b^5 + 4b^4 + 2b^3 + 3 = 36723$
$\Leftrightarrow 2b^5 + 2b^4 + b^3 = 18360$
$\Leftrightarrow b^3(b^2 + (b+1)^2) = 18360$
$\Leftrightarrow b = 6$ d'après la question 2).

D'où b = 6.

Exercice 12

Soit x, y et z trois entiers naturels tels que : $y = \overline{131}^x$ et $z = \overline{101}^x$, avec x > 3.
1) Calculer le produit xyz en base x.
2) Déterminer x, sachant que : x + y + z = 50. Calculer alors xyz en base dix.

Solution 12

1) On a $xyz = x(x^2+3x+1)(x^2+1) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 0 = \overline{132310}^x$. D'où $xyz = \overline{132310}^x$.

2) • On note que x est un entier naturel strictement supérieur à 3.
$x + y + z = 50 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 48 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -6$. D'où x = 4.

- $xyz = \overline{132310}^{\text{quatre}} = 1972$.

B. Effectuer la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

1 – Effectuer la division euclidienne dans l'ensemble des entiers relatifs

Exercice 13

Dans l'écriture $a = bq + r$ représentant la division euclidienne de a par b ; a, b, q et r sont des entiers naturels.

a) Calculer b et q sachant que : $a = 557$, $r = 89$.

b) Calculer b et r sachant que : $a = 1517$, $q = 75$.

Solution 13

a) $a = bq + r$ avec $0 \le r < b$. On a donc $b > 89$.

Or $557 = bq + 89 \Leftrightarrow bq = 468$. b est donc un diviseur de 468, supérieur à 89.

D'où b appartient à {117, 156, 234, 468}.

Comme $q = \frac{468}{b}$, alors les couples (b , q) solutions sont donc les suivants : (468 , 1), (234 , 2), (156 , 3) et (117 , 4).

b) $1517 = 75b + r$, c'est-à-dire $r = 1517 - 75b$.

Or $0 \le r < b \Leftrightarrow 0 \le 1517 - 75b < b \Leftrightarrow \frac{1517}{76} < b \le \frac{1517}{75} \Leftrightarrow 19 < b < 21$.

D'où $b = 20$ et $r = 17$.

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation $4231 = 713x + y$ d'inconnues x et y.

Solution 14

La division euclidienne de 4231 par 713 donne : $4231 = 713 \times 5 + 666$.

D'où la plus grande valeur possible de x est 5 et x prend la valeur 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

Les couples (x , y) solutions sont donc : (0 , 4231), (1 , 3518), (2 , 2805), (3 , 2092), (4 , 1379) et (5 , 666).

Exercice 15

Soit $a = bq + r$ représentant la division euclidienne de a par b.

Calculer q sachant que q et r restent invariants si l'on augmente a de 52 et b de 4.

Solution 15

On a $\begin{cases} a = bq + r & (E1) \\ a + 52 = (b+4)q + r & (E2) \end{cases}$.

En faisant (E2) – (E1), on obtient : $4q = 52$. C'est-à-dire $q = 13$.

Exercice 16

On effectue la division euclidienne de deux entiers x et y par leur différence $x - y$, supposée strictement positive.

Trouver entre les quotients d'une part et entre les restes obtenus d'autre part.

Solution 16

On a supposé $x - y > 0$, donc $x > y$.

Soit q_1 et r_1 respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de x par $x - y$.

q_2 et r_2 respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de y par $x - y$:

On a : $\begin{cases} x = q_1(x-y) + r_1 \\ y = q_2(x-y) + r_2 \end{cases}$. Donc $x - y = (q_1 - q_2)(x - y) + r_1 - r_2$.

Or on a : $0 \le r_1 < x - y$ et $0 \le r_2 < x - y$. Donc $y - x < -r_2 \le 0$. Et donc $y - x < r_1 - r_2 < x - y$.

Par conséquent, on a le système ci-dessous : $\begin{cases} (x-y)(1 - q_1 + q_2) = r_1 - r_2 \\ y - x < r_1 - r_2 < x - y \end{cases}$.

D'où $r_1 - r_2$ est divisible par $x - y$ et $|r_1 - r_2| < x - y$.

Alors $r_1 - r_2 = 0$, c'est-à-dire $r_1 = r_2$.

Comme $r_1 = r_2$, alors on a : $(x-y)(1-q_1+q_2) = 0$ avec $x > y$.
Et donc par suite, $q_1 - q_2 = 1$. Finalement, on a $r_1 = r_2$ et $q_1 - q_2 = 1$.

2 – Déterminer le reste dans la division euclidienne d'un entier relatif

Exercice 17

Déterminer le reste de la division euclidienne :

a) par 5 de 8^{1974}.

b) par 5 de $35(487)^{200} + 42(523)^{100} - 224$

Solution 17

a) On a : $8 \equiv 3[5]$; $8^2 \equiv 4[5]$; $8^3 \equiv 2[5]$; $8^4 \equiv 1[5]$.
$1974 = 493\times4 + 2$ et $8^{1974} = (8^4)^{493}\times8^2$.
Or $8^4 \equiv 1[5]$, donc $(8^4)^{493} \equiv 1[5]$, donc $(8^4)^{493}\times8^2 \equiv 8^2[5]$, donc $8^{1974} \equiv 4[5]$.
Donc le reste dans la division euclidienne par 5 de 8^{1974} est 4.

b) On a $35 \equiv 0[5]$, donc $35\times(487)^{200} \equiv 0[5]$.
On a $523 \equiv 3[5]$; $523^2 \equiv 4[5]$; $523^3 \equiv 2[5]$; $523^4 \equiv 1[5]$
$100 = 4\times25$, donc $523^{100} = ((523)^4)^{25} \equiv 1[5]$.
De plus on a : $42 \equiv 2[5]$. D'où $42\times(523)^{100} \equiv 2[5]$.
Et comme $224 \equiv 4[5]$, on peut donc conclure que :
$35(487)^{200} + 42(523)^{100} - 224 \equiv 3[5]$.
Ce qui permet de conclure que le reste de la division euclidienne par 5 de $35(487)^{200} + 42(523)^{100} - 224$ est 3.

Point méthode :

- *$a \equiv b[n]$ équivaut à $a \equiv n + b[n]$.*
Cette remarque est importante : elle permet de passer d'un b négatif à une autre valeur n + b positive et inversement.
On peut par exemple écrire :
$20 \equiv -1[7]$ ou encore $20 \equiv 6[7]$.
$35(487)^{200} + 42(523)^{100} - 224 \equiv -2[5]$
ou encore
$35(487)^{200} + 42(523)^{100} - 224 \equiv 3[5]$.
- *r est le reste de la division euclidienne par n de a, lorsque $a \equiv r[n]$, avec $0 \le r < n$.*

Exercice 18

1) En remarquant que : $999 = 27\times37$, montrer que pour tout entier naturel **n**, on a : $10^{3n} \equiv 1[37]$.
2) En déduire le reste de la division euclidienne par 37 de : $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$.

Solution 18

1) $1000 = 27\times37 + 1$. D'où $1000 \equiv 1[37]$, c'est-à-dire $10^3 \equiv 1[37]$.
Et comme, pour tout entier naturel n, on a : $10^{3n} = (10^3)^n$ alors $10^{3n} \equiv 1[37]$.

2) On a : $10^{30} = 10^{3\times10}$, donc $10^{30} \equiv 1[37]$.
$10^{10} = 10^{3\times3}\times10$, donc $10^{10} \equiv 10[37]$.
$10^{20} = 10^{3\times6}\times10^2$, alors puisque $10^2 \equiv 26[37]$. On peut écrire $10^{20} \equiv 26[37]$.
Et par suite $10^{10} + 10^{20} + 10^{30} \equiv 0[37]$.
Le reste de la division euclidienne de $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ par 37 est 0.
C'est-à-dire $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ est divisible par 37.

Exercice 19

1) Déterminer pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 2^n par 3.
2) Déterminer, pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de $(275423)^n$ par 3.
3) Déterminer, l'ensemble des entiers naturels n tels que $(275423)^n + (372121)^n$ soit divisible par 3.

Solution 19

1) On a : $2 \equiv 2[3]$ et $2^2 \equiv 1[3]$.
D'où **si n est pair**, on a : $n = 2k$, k entier naturel, et $2^n = (2^2)^k$ donc $2^n \equiv 1[3]$.
Si n est impair, on a : $n = 2k+1$, k entier naturel, et $2^n = (2^2)^k\times2$ donc $2^n \equiv 2[3]$.
D'où $2^n \equiv 1[3]$ si n pair et $2^n \equiv 2[3]$ si n impair.

2) On a $275423 \equiv 2[3]$, d'où $(275423)^n \equiv 2^n[3]$ pour tout entier naturel n.
Donc $(275423)^n$ et 2^n ont le même reste dans la division euclidienne par 3.
Par conséquent, **si n est impair**, alors $(275423)^n \equiv 2[3]$.
Si n est pair, alors $(275423)^n \equiv 1[3]$.

3) On a $372121 \equiv 1[3]$, d'où $(372121)^n \equiv 1[3]$ pour tout entier naturel n.
Ainsi, **si n est impair**, alors $(275423)^n + (372121)^n \equiv 0[3]$.
Si n est pair, alors $(275423)^n + (372121)^n \equiv 2[3]$.
D'où $(275423)^n + (372121)^n$ est divisible par 3 si et seulement si, n est impair.

Exercice 20

Pour tout entier naturel n, on fait correspondre le reste U_n de la division euclidienne de 4^n par 7.
Montrer qu'il existe un entier naturel non nul a tel que l'on ait : $U_n = U_{n+a}$ et $U_n \neq U_{n+k}$ si $0 < k < a$.

Solution 20

Soit n entier naturel et U_n le reste de la division euclidienne de 4^n par 7, on a : $4^n \equiv U_n[7]$.
Or on a : $4 \equiv 4[7]$. $4^2 \equiv 2[7]$ et $4^3 \equiv 1[7]$ et soit n entier naturel, $4^{n+3} = 4^n \times 4^3$, alors $4^{n+3} \equiv 4^n[7]$.
D'où 4^{n+3} et 4^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7, c'est-à-dire $U_{n+3} = U_n$ pour tout naturel n.
Les valeurs possibles de U_n sont 1, 2 et 4.
Or $4^{n+2} = 4^n \times 4^2$, donc $4^{n+2} \equiv 2\times 4^n [7]$. Donc $4^{n+2} \equiv 2U_n[7]$.
Ainsi, si $U_n = 1$, alors on a $U_{n+2} = 2$
si $U_n = 2$, alors on a $U_{n+2} = 4$.
si $U_n = 4$, alors on a $U_{n+2} = 1$.
On a alors $U_{n+2} \neq U_n$.
On a aussi, $4^{n+1} = 4^n \times 4$, donc $4^{n+1} \equiv 4\times 4^n[7]$. Donc $4^{n+1} \equiv 4U_n[7]$.
Ainsi, si $U_n = 1$, alors on a $U_{n+1} = 4$
si $U_n = 2$, alors on a $U_{n+1} = 1$
si $U_n = 4$, alors on a $U_{n+1} = 2$.
On a alors $U_{n+1} \neq U_n$.
Donc pour tout entier naturel n, on a : $U_n = U_{n+3}$, $U_{n+2} \neq U_n$ et $U_{n+1} \neq U_n$.
D'où l'entier naturel a = 3 est tel que pour tout entier naturel n, on a : $U_n = U_{n+a}$ et $U_n \neq U_{n+k}$ si $0 < k < a$.

3 – Prouver que deux entiers ont le même reste dans la division euclidienne par un entier donné

Exercice 21

1) Démontrer que, pour tout entier naturel p, 3^p et 3^{p+6} ont le même reste dans la division euclidienne par 7.
2) Montrer que, pour tout entier naturel n, les entiers $(2103)^n$ et 3^n ont le même reste dans la division par 7.
Déterminer n pour que ce reste soit égal à 5.

Solution 21

1) On a $3 \equiv 3[7]$, $3^2 \equiv 2[7]$, $3^3 \equiv 6[7]$, $3^4 \equiv 4[7]$, $3^5 \equiv 5[7]$, $3^6 \equiv 1[7]$.
Et pour tout entier naturel p, on a : $3^{p+6} = 3^p \times 3^6$, donc $3^{p+6} \equiv 3^p[7]$.
D'où 3^{p+6} et 3^p ont le même reste dans la division euclidienne par 7.
2) On a $2103 \equiv 3[7]$, d'où $2103^n \equiv 3^n[7]$.
D'où $(2103)^n$ et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7.

Valeur de n pour que $(2103)^n \equiv 5[7]$:

On a $3^6 \equiv 1[7]$, donc pour tout entier naturel p,
$3^{6p} \equiv 1[7]$, $3^{6p+1} \equiv 3[7]$, $3^{6p+2} \equiv 2[7]$, $3^{6p+3} \equiv 6[7]$, $3^{6p+4} \equiv 4[7]$ et $3^{6p+5} \equiv 5[7]$.
On en déduit que le reste de la division euclidienne de $(2103)^n$ par 7 est 5 si et seulement si n = 6p+5, où p est un entier naturel.

> **Point méthode :**
> *Pour montrer que deux entiers relatifs a et b ont le même reste dans la division euclidienne par l'entier naturel $n > 1$, il faut et il suffit de montrer que $b \equiv a[n]$.*

4 – Vérifier qu'un entier relatif est divisible par un entier donné

Exercice 22

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :
a) $5^{2n} - 3^n$ divisible par 11
b) $3\times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ divisible par 17

Solution 22

a) On a : $5 \equiv 5[11]$ et $5^2 \equiv 3[11]$. Donc $(5^2)^n \equiv 3^n[11]$. Par conséquent, on a : $5^{2n} - 3^n \equiv 0[11]$.
C'est-à-dire que $5^{2n} - 3^n$ est divisible par 11.
b) On a : $5 \equiv 5[17]$, $5^2 \equiv 8[17]$. C'est-à-dire $5^2 \equiv 2^3[17]$.
Donc $(5^2)^n \equiv (2^3)^n[17]$, donc $5\times 5^{2n} \equiv 5\times 2^{3n}[17]$, donc $3\times 5^{2n+1} \equiv 15\times 2^{3n}[17]$.
Or on a $15 \equiv -2[17]$, donc $15\times 2^{3n} \equiv -2\times 2^{3n}[17]$. C'est-à-dire $15\times 2^{3n} \equiv -2^{3n+1}[17]$

> **Point méthode :**
> *Pour montrer qu'un entier naturel non nul n divise l'entier relatif a, il faut et il suffit de montrer que $a \equiv 0[n]$.*

Comme $3\times5^{2n+1} \equiv 15\times2^{3n}[17]$ et $15\times2^{3n} \equiv -2^{3n+1}[17]$, alors on a $3\times5^{2n+1} \equiv -2^{3n+1}[17]$.
C'est-à-dire $3\times5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$. Finalement, $3\times5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17

Exercice 23

Montrer que :
a) Pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2\times 4^{3n+1}$ est divisible par 11.
b) Pour tout entier naturel n, $n^2(n^4-1)$ est divisible par 60.

Solution 23

a) On a : $4 \equiv 4[11]$; $4^2 \equiv 5[11]$; $4^3 \equiv 9[11]$, donc $4^3 \equiv 3^2[11]$.
Donc pour tout entier naturel n, on a : $4^{3n} \equiv 3^{2n}[11]$.
Donc $4^{3n}\times4 \equiv 4\times3^{2n}[11]$. C'est-à-dire, $4^{3n+1} \equiv 4\times3^{2n}[11]$.
On a donc $2\times4^{3n+1} \equiv 8\times3^{2n}[11]$.
Or on a $8 \equiv -3[11]$, alors on peut écrire $8\times3^{2n} \equiv -3^{2n+1}[11]$. On en déduit $2\times4^{3n+1} \equiv -3^{2n+1}[11]$.
D'où pour tout entier naturel n, on a $3^{2n+1} + 2\times4^{3n+1} \equiv 0[11]$. C'est-à-dire $3^{2n+1} + 2\times4^{3n+1}$ est divisible par 11.
b) On a : $60 = 4\times3\times5$ et $n^2(n^4-1) = n^2(n-1)(n+1)(n^2+1)$.
- Or, **si n est pair**, alors n^2 est divisible par 4, par conséquent, $n^2(n^4-1)$ est donc divisible par 4.
  Si n est impair, alors $n-1$ et $n+1$ sont pairs et alors $(n-1)(n+1)$ est divisible par 4.

Par conséquent, $n^2(n^4-1)$ est divisible par 4. D'où pour tout entier naturel n, on a $n^2(n^4-1)$ est divisible par 4.
- De plus $n-1$, n et $n+1$ sont trois entiers consécutifs. D'où l'un d'entre eux est multiple de 3.

Par conséquent, $n^2(n-1)(n+1)(n^2+1) = n^2(n^4-1)$ est divisible par 3.
$n^2(n^4-1)$ étant divisible par 4 et par 3 est divisible par 12. Il suffit de vérifier que $n^2(n^4-1)$ est divisible par 5.
Or les restes possibles dans la division euclidienne de n par 5 sont 0, 1, 2, 3 et 4.
Si $n \equiv 0[5]$, alors $n^2(n^4-1) \equiv 0[5]$.
Si $n \equiv 1[5]$, alors $n^4 \equiv 1[5]$, donc $n^4-1 \equiv 0[5]$; et par conséquent, on a $n^2(n^4-1) \equiv 0[5]$.
Si $n \equiv 2[5]$, on a $n^4 \equiv 1[5]$, donc $n^4-1 \equiv 0[5]$; par conséquent, on a $n^2(n^4-1) \equiv 0[5]$.
Si $n \equiv 3[5]$, on a $n^4 \equiv 1[5]$, donc $n^2(n^4-1) \equiv 0[5]$.
Si $n \equiv 4[5]$, on a $n^4 \equiv 1[5]$, donc $n^2(n^4-1) \equiv 0[5]$.
D'où pour tout entier naturel n, on a $n^2(n^4-1)$ est divisible par 5.
On peut donc conclure que pour tout entier naturel n, on a : $n^2(n^4-1)$ est divisible par 60.
Notons que nous pouvons conclure que $n^2(n^4-1)$ étant divisible par 3, 4 et 5 est divisible par $3\times4\times5$, car 3, 4 et 5 sont deux à deux premiers entre eux. (Conséquence du théorème de Gauss).

Exercice 24

Trouver l'ensemble des entiers naturels n tels que l'entier n^3-3n^2-2 soit multiple de 7.

Solution 24

Les restes possibles de n dans la division par 7 sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
Si $n \equiv 0[7]$, alors $n^3 \equiv 0[7]$, $n^2 \equiv 0[7]$ et donc $n^3-3n^2-2 \equiv 5[7]$.
Si $n \equiv 1[7]$, alors $n^3 \equiv 1[7]$, $n^2 \equiv 1[7]$ et donc $n^3-3n^2-2 \equiv 3[7]$.
Si $n \equiv 2[7]$, alors $n^2 \equiv 4[7]$, $n^3 \equiv 1[7]$ et donc $n^3-3n^2-2 \equiv 1[7]$.
Si $n \equiv 3[7]$, alors $n^2 \equiv 2[7]$, $n^3 \equiv 6[7]$ et donc $n^3-3n^2-2 \equiv 5[7]$.
Si $n \equiv 4[7]$, alors $n^2 \equiv 2[7]$, $n^3 \equiv 1[7]$ et donc $n^3-3n^2-2 \equiv 0[7]$.
Si $n \equiv 5[7]$, alors $n^2 \equiv 4[7]$, $n^3 \equiv 6[7]$ et donc $n^3-3n^2-2 \equiv 6[7]$.
Si $n \equiv 6[7]$, alors $n^2 \equiv 1[7]$, $n^3 \equiv 6[7]$ et donc $n^3-3n^2-2 \equiv 1[7]$.
En conclusion, n^3-3n^2-2 est divisible par 7 si et seulement si $n = 7k+4$ avec k appartenant à $\mathbb{N}$.

5 – Etudier et utiliser les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9 et 11

Exercice 25

Soit $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ un entier naturel écrit en base décimale. Démontrer que :

1) $a \equiv a_0[2]$
2) $a \equiv 10a_1 + a_0[4]$
3) $a \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0\,[3]$.
4) $a \equiv a_0\,[5]$
5) $a \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0\,[9]$.
6) $a \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i [11]$.

En déduire les critères de divisibilité de a par 2, 3, 4, 5, 9 et 11.

Solution 25

- On a : $a = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i$.

1) Pour tout entier naturel non nul i, on a : $10^i \equiv 0[2]$, d'où $a_i 10^i \equiv 0[2]$ et donc $\sum_{i=1}^{n} a_i 10^i \equiv 0[2]$.

Comme $a = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \times 10^i$ et $a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \times 10^i \equiv a_0[2]$, alors on a : $a \equiv a_0[2]$.

2) Pour tout entier naturel i différent de 0 et 1, on a : $10^i \equiv 0[4]$, d'où $a_i 10^i \equiv 0[4]$ et donc $\sum_{i=2}^{n} a_i 10^i \equiv 0[4]$.

Comme $a = a_0 + 10a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \times 10^i$ et $a_0 + 10a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \times 10^i \equiv a_0 + 10a_1[4]$, alors on a : $a \equiv a_0 + 10a_1[4]$.

3) Pour tout entier naturel i, on a $10^i \equiv 1[3]$, d'où $a_i 10^i \equiv a_i[3]$ et donc $\sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i[3]$.

Par conséquent, on a : $a \equiv a_n + a_{n+1} + ... + a_1 + a_0[3]$.

4) Pour tout entier naturel non nul i, on a $10^i \equiv 0[5]$, alors $a_i 10^i \equiv 0[5]$ et donc, $\sum_{i=1}^{n} a_i 10^i \equiv 0[5]$.

Comme $a = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \times 10^i$ et $a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \times 10^i \equiv a_0[5]$, alors on a : $a \equiv a_0[5]$.

5) Pour tout entier naturel i, on a $10^i \equiv 1[9]$, alors $a_i 10^i \equiv a_i[9]$ et donc $\sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i[9]$.

Donc $a \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0[9]$.

6) Pour tout entier naturel i, on a : $10 \equiv -1[11]$, donc $10^i \equiv (-1)^i[11]$, alors $a_i 10^i \equiv (-1)^i a_i[11]$.

Donc on a $\sum_{i=0}^{n} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i[11]$. C'est-à-dire $a \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i[11]$.

- Des résultats précédents, on déduit les critères de divisibilité qui suivent :

Par 2 : a est divisible par 2 si et seulement si a_0 est divisible par 2.
Par 4 : $a \equiv 0[4]$ si et seulement si, $a_0 + 10a_1$ est divisible par 4.
Par 3: $a \equiv 0[3]$ si et seulement si, $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ est divisible par 3.
Par 5 : $a \equiv 0[5]$ si et seulement si, a_0 est divisible par 5.
Par 9 : $a \equiv 0[9]$ si et seulement si, $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ est divisible par 9.
Par 11 : $a \equiv 0[11]$ si et seulement si, $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$ est divisible par 11.

Exercice 26

Soit un nombre entier naturel N qui s'écrit $N = \overline{r_p r_{p-1} \cdots r_1 r_0}^{dix}$ dans le système décimal.

1)a) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel k qu'il existe un entier naturel q tel que : $10^{2k} = 11q + 1$.
En déduire que pour tout entier naturel k, il existe un entier naturel q' tel que : $10^{2k+1} = 11q' - 1$.
b) En déduire que les entiers naturels N et $r_0 - r_1 + r_2 - r_3 + \dots + (-1)^p r_p$ ont le même reste dans la division par 11.
c) Enoncer un critère de divisibilité par 11.

2) applications :
a) Indiquer, sans utiliser la calculatrice, si les entiers suivants sont divisibles par 11 :
764 888 921 787 2563 350 008 et 152 669 325 145 222 258.
b) Trouver, sans poser l'opération, le reste de la division euclidienne de 273 541 par 11.
c) Déterminer x pour que $\overline{3x1x19}^{dix}$ soit divisible par 11.
d) Comment faut-il choisir l'entier naturel n, pour que $10^n + 1$ soit divisible par 11 ?

Solution 26

1)a) • Considérons la propriété P_k : « il existe un entier naturel q, tel que $10^{2k} = 11q + 1$ »

Pour k = 0, $10^{2\times 0} = 1 = 11\times 0 + 1$, donc P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un entier naturel n (c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel q tel que $10^{2n} = 11q + 1$), montrons alors que P_{n+1} est aussi vraie (c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel q' tel que $10^{2n+2} = 11q' + 1$).

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $10^{2n} = 11q + 1$, donc :

$10^{2n+2} = 100(11q + 1) = 1100q + 100 = 1100q + 99 + 1 = 11(100q + 9) + 1 = 11q' + 1$, avec $q' = 100q + 9$.

Notons que, q étant un entier naturel, $q' = 100q + 9$ est aussi un entier naturel. Donc P_{n+1} est aussi vraie.

Finalement, pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel q, tel que $10^{2k} = 11q + 1$.

• Soit k un entier naturel, d'après ce qui précède, il existe un entier naturel q, tel que $10^{2k} = 11q + 1$.

Donc $10^{2k+1} = 10(11q + 1) = 110q + 10 = 110q + 11 - 1 = 11(10q + 1) - 1 = 11q' - 1$, avec $q' = 10q + 1$.

Notons que q étant un entier naturel, il en est de même pour 10q + 1, donc de q'.

Finalement, pour tout entier naturel k, il existe un entier naturel q' tel que : $10^{2k+1} = 11q' - 1$.

b) D'après la question a), pour tout entier naturel k, $10^{2k} \equiv 1[11]$, c'est-à-dire $10^{2k} \equiv (-1)^{2k}[11]$.

Et $10^{2k+1} \equiv -1[11]$, c'est-à-dire $10^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1}[11]$.

En d'autres termes, pour tout entier naturel n, on a : $10^n \equiv (-1)^n[11]$.

Donc Pour tout entier naturel n, on a $10^n r_n \equiv (-1)^n r_n[11]$.

Donc $\sum_{n=0}^{p} r_n 10^n \equiv \sum_{n=0}^{p} (-1)^n r_n [11]$. C'est-à-dire $N \equiv \sum_{n=0}^{p} (-1)^n r_n [11]$.

Donc les entiers naturels N et $r_0 - r_1 + r_2 - r_3 + \ldots + (-1)^p r_p$ ont le même reste dans la division par 11.

c) D'après la question 1b), $N = \overline{r_p r_{p-1} \cdots r_1 r_0}^{dix}$ et $r_0 - r_1 + r_2 - r_3 + \ldots + (-1)^p r_p$.

Alors un entier naturel $N = \overline{r_p r_{p-1} \cdots r_1 r_0}^{dix}$ est divisible par 11 si et seulement si, l'entier $r_0 - r_1 + r_2 - r_3 + \ldots + (-1)^p r_p$ est divisible par 11.

2)a) $8 - 0 + 0 - 0 + 5 - 3 + 3 - 6 + 5 - 2 + 7 - 8 + 7 - 1 + 2 - 9 + 8 - 8 + 8 - 4 + 6 - 7 = 11$ qui est un multiple de 11, donc le nombre 764888921725633500088 est divisible par 11

$8 - 5 + 2 - 2 + 2 - 2 + 5 - 4 + 1 - 5 + 2 - 3 + 9 - 6 + 6 - 2 + 5 - 1 = 10$ qui n'est pas divisible par 11, donc le nombre 52669325145222258 n'est pas divisible par 11.

b) D'après la question 1)b), les nombres 273 541 et $1 - 4 + 5 - 3 + 7 - 2$ ont le même reste dans la division euclidienne par 11.

Or $1 - 4 + 5 - 3 + 7 - 2 = 4$ qui a pour reste 4 dans la division euclidienne par 11, donc le nombre 273 541 a pour reste 4 dans la division euclidienne par 11.

c) $\overline{3x1x19}^{dix}$ est divisible par 11 si et seulement si $9 - 1 + x - 1 + x - 3 = 2x + 4$ est divisible par 11.

Or x est un chiffre en base dix, donc x est un entier naturel inférieur ou égal à 9.

Or le seul entier naturel x tel que $2x + 4$ soit divisible par 11 est 9. Donc x = 9.

d) Nous savons que $10^n \equiv (-1)^n[11]$, donc $10^n + 1 \equiv (-1)^n + 1[11]$. Donc :

si n est pair, alors $10^n + 1 \equiv 2[11]$.

si n est impair, alors $10^n + 1 \equiv 0[11]$.

Finalement, $10^n + 1$ est divisible par 11 si et seulement si n est impair.

6 – Déterminer le chiffre des unités d'un entier naturel

Exercice 27

a) Dans le système décimal, déterminer le chiffre des unités de 2^n et 7^n, suivant les valeurs de l'entier naturel n.

b) ***application :*** Trouver le chiffre des unités de $3548^9 \times 2537^{31}$.

Solution 27

a) Pour 2^n :

On a : $2^0 \equiv 1[10]$, $2^1 \equiv 2[10]$, $2^2 \equiv 4[10]$, $2^3 \equiv 8[10]$, $2^4 \equiv 6[10]$ et $2^5 \equiv 2[10]$.

Remarquons que, le reste 2 revient, donc les restes formeront une suite périodique de période 4.

Donc **Si n = 0,** on a, $2^n \equiv 1[10]$. Le chiffre des unités est donc 1.

Si n = 4k (k entier naturel non nul), on a, $2^n \equiv 6[10]$, donc le chiffre des unités de 2^n est 6.

Si $n = 4k + 1$, on a, $2^n \equiv 2[10]$, donc le chiffre des unités est 2.
Si $n = 4k + 2$, on a, $2^n \equiv 4[10]$, donc le chiffre des unités est 4.
Si $n = 4k + 3$, on a, $2^n \equiv 8[10]$, donc le chiffre des unités est 8.

Pour 7^n :
On a : $7^0 \equiv 1[10]$, $7^1 \equiv 7[10]$, $7^2 \equiv 9[10]$, $7^3 \equiv 3[10]$ et $7^4 \equiv 1[10]$.
Donc Si $n = 4k$ (k entier naturel), on a, $7^n \equiv 1[10]$, donc le chiffre des unités de 7^n est 1.
Si $n = 4k + 1$, on a, $7^n \equiv 7[10]$, donc le chiffre des unités est 7.
Si $n = 4k + 2$, on a, $7^n \equiv 9[10]$, donc le chiffre des unités est 9.
Si $n = 4k + 3$, on a, $7^n \equiv 3[10]$, donc le chiffre des unités est 3.

> **Point méthode :**
> *Le chiffre des unités d'un entier n son reste dans la division par 10*

b) On a : $3548 \equiv 8[10]$ donc $3548 \equiv 2^3[10]$, donc $(3548)^9 \equiv 2^{27}[10]$.
Or $27 = 4\times6 + 3$, donc $2^{27} \equiv 8[10]$, donc $(3548)^9 \equiv 8[10]$.
On a : $2537 \equiv 7[10]$, donc $(2537)^{31} \equiv 7^{31}[10]$.
Or $31 = 4\times7 + 3$, donc $7^{31} \equiv 3[10]$. $(3548)^9 \equiv 8[10]$ et $(2537)^{31} \equiv 3[10]$.
D'où $(3548)^9\times(2537)^{31} \equiv 8\times3[10]$, c'est-à-dire $(3548)^9\times(2537)^{31} \equiv 4[10]$.
D'où le chiffre des unités de $(3548)^9\times(2537)^{31}$ est 4.

Exercice 28

Trouver le chiffre des unités de $7^{9^{9^9}}$

Solution 28

On a : $9 \equiv 1[4]$ d'où pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on aura $9^n \equiv 1[4]$. D'où en particulier, on a : $9^{9^9} \equiv 1[4]$.
Or on a : $7 \equiv 7[10]$, $7^2 \equiv 9[10]$, $7^3 \equiv 3[10]$ et $7^4 \equiv 1[10]$. D'où si $n \equiv 1[4]$ alors $7^n \equiv 7[10]$
Puisque $9^{9^9} \equiv 1[4]$, alors $7^{9^{9^9}} \equiv 7[10]$. Le chiffre des unités de $7^{9^{9^9}}$ est donc 7.

C. Déterminer le PGCD et le PPCM d'entiers relatifs

1 – Déterminer le pgcd et le ppcm

Exercice 29

Déterminer :
a) pgcd(588 , -165672)
b) pgcd(n – 1 , n + 1), où n est un entier supérieur ou égal à 2.

Solution 29

a) On rappelle que pgcd(588 , -165672) = pgcd(588 , 165672).
Méthode 1 :
En utilisant l'algorithme d'Euclide.

$$165672 = 588\times281 + 444$$
$$588 = 444\times1 + 144$$
$$444 = 144\times3 + 12$$
$$144 = 12\times12 + 0.$$

> **Point méthode :**
> *Soit a, b, q et r quatre nombres relatifs non nuls.*
> *Si $a = bq + r$, alors $pgcd(a , b) = pgcd(b , r)$.*

D'où pgcd(165672 , 588) = 12 (car 12 est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives).
Et pgcd(588 , -165672) = 12.
Méthode 2 :
Décomposition en produit de facteurs premiers : $165672 = 2^2\times3^2\times13\times59$ et $588 = 2^2\times3\times7^2$.
Les facteurs communs à 165672 et 588 sont 2 et 3 avec pour plus petits exposants respectifs 2 et 1.
D'où pgcd (588 , -165672) = $2^2\times3 = 12$.
b) On a : $n + 1 = (n – 1)\times1 + 2$, d'où pgcd(n + 1 , n – 1) = pgcd(n – 1 , 2).
Si n est impair, alors n – 1 est pair, donc 2 divise n – 1.
D'où pgcd(n + 1, n – 1) = pgcd(n – 1, 2) = 2.
Si n est pair, alors n – 1 est impair et donc n – 1 et 2 sont premiers entre eux.
D'où pgcd(n + 1 , n – 1) = pgcd(n – 1 , 2) = 1.

> **Point méthode :**
> *Tout nombre impair et 2 sont premiers entre eux.*

Exercice 30

Déterminer : a) ppcm(588 , -165672). b) ppcm(n – 1 , n + 1), où n est un entier supérieur ou égal à 2.

Solution 30

On rappelle qu'on a déterminé à l'exercice précédent, le pgcd(588 , -165672) et le pgcd(n – 1 , n + 1).

a) **Méthode 1 :**

pgcd(588 , -165672) = 12. D'où,

$$\begin{aligned}\text{ppcm}(588\,,-165672) &= \text{ppcm}(588\,,165672)\\ &= \frac{588\times165672}{\text{pgcd}(588\,,165672)} \quad (\text{car pgcd}(a\,,b)\times\text{ppcm}(a\,,b)=ab)\\ &= \frac{588\times165672}{12}\\ &= 8117928\end{aligned}$$

D'où ppcm (588 , -165672) = 8 117 928

Méthode 2 :

$165672 = 2^3\times3^3\times13\times59$ et $588 = 2^2\times3\times7^2$.

Les facteurs premiers qui apparaissent dans les décompositions de 165672 et 588 sont : 2, 3, 7, 13, 59 avec pour plus grands exposants respectifs 3, 3, 2, 1, 1. D'où ppcm (588, -165672) = $2^3\times3^3\times13\times59\times7^2$ = 8 117 928

b) $\text{ppcm}(n-1\,,n+1)=\dfrac{(n-1)(n+1)}{\text{pgcd}(n-1\,,n+1)}$.

Si n est impair, pgcd(n – 1 , n + 1) = 2, d'où $\text{ppcm}(n-1\,,n+1)=\dfrac{n^2-1}{2}$.

Si n est pair, pgcd(n – 1 , n + 1) = 1, d'où ppcm(n – 1 , n + 1) = (n – 1)(n + 1).

Exercice 31

Soit a et b deux entiers relatifs. On pose A = 4a + 3b et B = 5a + 4b. Montrer que pgcd(a , b) = pgcd(A , B).

Solution 31

On pose : δ = pgcd(a , b) et Δ = pgcd(A , B) ;

- δ = pgcd (a , b), donc δ divise a et δ divise b. Ainsi, δ divise 4a + 3b et δ divise 5a + 4b. C'est-à-dire δ divise A et B. On en déduit que δ ≤ Δ.
- Comme $\begin{cases}A=4a+3b\\B=5a+4b\end{cases}$, alors on a $\begin{cases}a=4A-3B\\b=-5A+4B\end{cases}$.

> **Point méthode :**
> *Si un entier naturel non nul d divise deux entiers relatifs a et b, alors d ≤ pgcd(a , b).*

On a : Δ = pgcd (A , B), donc Δ divise A et Δ divise B. Ainsi, Δ divise 4A – 3B et Δ divise -5A + 4B.
C'est-à-dire, Δ divise a et Δ divise b. On en déduit que Δ ≤ δ.
On a montré que δ ≤ Δ et Δ ≤ δ, on peut alors conclure que Δ = δ. C'est-à-dire pgcd(A , B) = pgcd(a , b).

Exercice 32

Soit n entier naturel, on pose : A = n + 1 et B = n^2 + 3n + 6.

1)a) Montrer que pgcd(A , B) = pgcd(A , 4).
b) Déterminer suivant les valeurs de n, pgcd(A , B).

2) Pour quelles valeurs de n, $\dfrac{B}{A}$ est un entier relatif ?

Solution 32

1)a) On a n^2 + 3n + 6 = (n + 1)(n + 2) + 4. C'est-à-dire B = (n + 2) A + 4. Donc pgcd(A , B) = pgcd(A , 4).

b) Comme pgcd(A , B) = pgcd(A , 4), alors d = pgcd (A , B) si et seulement si, d = pgcd (A , 4). Ainsi,

si n est pair, alors A = n + 1 est impair et donc pgcd (A , 4) = 1.

si n est impair, alors n ≡ 1[4] ou n ≡ 3[4].

Si n ≡ 1[4], alors A ≡ 2[4] et pgcd(A , 4) = 2.
si n ≡ 3[4], alors A ≡ 0[4] et pgcd(A , 4) = 4.

En conclusion :

Si n ≡ 0[4] ou n ≡ 2[4], alors pgcd(A , B) = 1.

Si $n \equiv 1[4]$, alors $\text{pgcd}(A, B) = 2$.
Si $n \equiv 3[4]$, alors $\text{pgcd}(A, B) = 4$.

2) On a : $\frac{B}{A} = \frac{n^2+3n+6}{n+1} = n+2+\frac{4}{n+1}$.

$\frac{B}{A}$ appartient à $\mathbb{Z}$ signifie $\frac{4}{n+1}$ appartient à $\mathbb{Z}$. C'est-à-dire n + 1 divise 4. Or, n + 1 divise 4 si et seulement si, n + 1 appartient à {- 4, - 2, -1, 1, 2, 4}. C'est-à-dire n appartient à {-5, -3, -2, 0, 1, 3}.
Finalement, comme n est un entier naturel, alors $\frac{B}{A}$ appartient à $\mathbb{Z}$ si et seulement si, n appartient à {0, 1, 3}.

2 – *Déterminer deux nombres connaissant leur pgcd ou leur ppcm*

Exercice 33

Déterminer les couples (a , b) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que : $\begin{cases} a+b=360 \\ \text{pgcd}(a,b)=18 \end{cases}$.

Solution 33

On pose $a' = \frac{a}{18}$ et $b' = \frac{b}{18}$.

Notons que, a' et b' sont des entiers naturels, car 18 étant le pgcd(a , b),18 divise a et b.

Donc : $\begin{cases} a+b=360 \\ \text{pgcd}(a,b)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'+b'=20 \\ \text{pgcd}(a',b')=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ a' et b' sont entier naturel premiers entre eux, dont la somme est 20.
$\Leftrightarrow$ (a' , b') appartient à {(1, 19), (3, 17), (7, 13), (9, 11), (11, 9), (13, 7), (17, 3), (19, 1)}
$\Leftrightarrow$ (a , b) appartient à {(18 , 342), (54 , 306), (126 , 234), (162 , 198), (198, 162), (234 , 126) , (306 , 54) , (342 , 18)}.

D'où les couples (a , b) cherchés sont : (18 , 342), (54 , 306), (126 , 234), (162 , 198), (198 , 162), (234 , 126), (306 , 54), (342 , 18).

Exercice 34

Soit a et b entiers naturels non nuls, on pose d = pgcd(a , b) et m = ppcm(a , b).

Déterminer a et b pour que : $\begin{cases} m=d^2 \\ m+d=156 \\ b \leq a \end{cases}$.

Solution 34

On pose $a' = \frac{a}{d}$ et $b' = \frac{b}{d}$, on a alors pgcd (a' , b') = 1 et md = ab (c'est-à-dire m = a'b'd).

On obtient alors : $\begin{cases} m=d^2 \\ m+d=156 \\ b \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'b'=d \\ (a'b'+1)d=156 \\ b' \leq a' \\ \text{pgcd}(a',b')=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'b'=d \\ (d+1)d=156 \\ b' \leq a' \\ \text{pgcd}(a',b')=1 \end{cases}$ (E_1).

En résolvant dans $\mathbb{N}$ l'équation : (d + 1)d = 156, qui est équivalente à $d^2 + d - 156 = 0$, on obtient d = 12.

D'où $(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} d=12 \\ a'b'=12 \\ b' \leq a' \\ \text{pgcd}(a',b')=1 \end{cases} \Leftrightarrow$ (a', b') appartient à {(12 , 1), (4 , 3)} $\Leftrightarrow$ (a , b) appartient à {(144 , 12), (48 , 36)}

Donc les couples (a , b) cherchés sont : (144 , 12) et (48 , 36).

Exercice 35 ►

1) Donner tous les diviseurs positifs de 30.

2) Trouver les couples (x , y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $3M - 2\Delta = 30$, où M = ppcm(x , y) et Δ = pgcd (x , y).

Solution 35

1) Les diviseurs positifs de 30 sont : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

2) Soit $a = \dfrac{x}{\Delta}$ et $b = \dfrac{y}{\Delta}$.

On a $M\Delta = xy$, d'où $M = ab\Delta$. On obtient donc que :

$$3M - 2\Delta = 30 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{pgcd}(a,b) = 1 \\ 3ab\Delta - 2\Delta = 30 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{pgcd}(a,b) = 1 \\ (3ab - 2)\Delta = 30 \end{cases}.$$

Puisque $(3ab - 2)\Delta = 30$ alors Δ divise 30. On en déduit que : Δ appartient à{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}.

Si Δ = 1, on a 3ab = 32 impossible, car 3 ne divise pas 32.

Si Δ = 2, on a 3ab = 17 impossible, car 3 ne divise pas 17

Si Δ = 3, on ab = 4.

Si Δ = 6, on a 3ab = 7 impossible, car 3 ne divise pas 7.

Si Δ = 10, on a 3ab = 5 impossible, car 3 ne divise pas 5.

Si Δ = 15, on a 3ab = 4 impossible, car 3 ne divise pas 4.

Si Δ = 30, on a ab = 1.

D'où Δ = 3 ou Δ = 30.

Si Δ = 3, alors on a : ab = 4 et pgcd(a , b) = 1.

Or les couples (a , b) vérifiant ces conditions sont : (1 , 4) et (4 , 1).

Et les couples (x , y) correspondants à ces couples (a , b) sont : (3 , 12) et (12 , 3).

Si Δ = 30, alors on a : ab = 1 ; d'où a = b = 1 et alors x = y = 30.

Finalement, les couples (x , y) vérifiant 3M – 2Δ = 30 sont : (3 ,12) et (12 , 3) et (30 , 30).

D. Reconnaître et utiliser les nombres premiers entre eux

1 – Utiliser l'identité de Bézout

Exercice 36

1) En appliquant le théorème de Bézout, démontrer que :

a) pour tout n entier naturel, n et n + 1 sont premiers entre eux.

b) Si a et b sont entiers naturels premiers entre eux, alors a et a + b sont premiers entre eux.

2) Que peut-on en déduire pour les fractions : $\dfrac{n}{n+1}$ et $\dfrac{n}{2n+1}$?

Solution 36

1)a) $1\times(n+1) - 1\times n = 1$, alors d'après la réciproque de l'identité de Bézout, n et n + 1 sont premiers entre eux.

b) Supposons que a et b sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v, tels que au + bv = 1. Donc on a : au – av + av + bv = 1, donc a(u – v) + (a + b)v = 1.

u – v et v sont des entiers relatifs, donc d'après la réciproque de Bézout, a et a + b sont premiers entre eux.

2) n et n + 1 sont premiers entre eux, d'après la question 1)a), et donc d'après la question 1)b),

n et n + (n + 1) = 2n + 1 sont premiers entre eux. Donc les fractions : $\dfrac{n}{n+1}$ et $\dfrac{n}{2n+1}$ sont irréductibles.

Exercice 37 ►►

Soit x un nombre réel.

1) Montrer que x appartient à $\mathbb{Q}$ si et seulement si x^7 et x^{12} appartiennent à $\mathbb{Q}$. (Utiliser l'identité de Bézout)

2) Est-il nécessairement vrai que x appartient à $\mathbb{Q}$ si x^4 et x^6 le sont ?

Solution 37

1) Soit x un nombre réel.
Si x appartient à $\mathbb{Q}$, alors x^7 et x^{12} appartiennent à $\mathbb{Q}$.
Réciproquement, soit x appartenant à $\mathbb{R}$, supposons que x^7 et x^{12} appartiennent à $\mathbb{Q}$.
Puisque pgcd (7 , 12) = 1, alors d'après l'identité de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que 7u + 12v = 1.
(On peut prendre u = -5 et v = 3).
On a alors $x = x^{7u+12v} = (x^7)^u(x^{12})^v$ appartient à $\mathbb{Q}$ (car $(x^7)^u$ et $(x^{12})^v$ appartiennent à $\mathbb{Q}$).
D'où x appartient à $\mathbb{Q}$ si et seulement si x^7 et x^{12} appartiennent à $\mathbb{Q}$.
2) On a $(\sqrt{2})^4 = 4$ et $(\sqrt{2})^6 = 8$ appartiennent à $\mathbb{Q}$, mais $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

2 – Utiliser le théorème de Gauss

Exercice 38

En utilisant le théorème de Gauss, déterminer deux entiers naturels a et b tels que :
a et b sont premiers entre eux et 33a – 45b = 0.

Solution 38

33a – 45b = 0 équivaut à 11a = 15b. Donc a divise 15b et b divise 11a.
Or a et b sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss, a divise 15 et b divise 11.
De même, 11 divise 15b, 15 divise 11a et 11 et 15 sont premiers entre eux. Donc d'après le théorème de Gauss, 11 divise b et 15 divise a. Finalement, a = 15 et b = 11.

Exercice 39

En utilisant le théorème de Gauss, déterminer deux entiers naturels a et b tels que la fraction $\frac{a}{b}$ soit irréductible et que $\frac{a+21}{b+15} = \frac{a}{b}$.

Solution 39

Soit a et b deux entiers naturels, $\frac{a}{b}$ est irréductible, donc a et b sont premiers entre eux.

Or $\frac{a+21}{b+15} = \frac{a}{b}$ équivaut à ab + 21b = ab + 15a, c'est-à-dire 7b = 5a. Alors, 7 divise 5a et 5 divise 7b.
Comme 7 et 5 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise b et 7 divise a donc $5 \leq b$ et $7 \leq a$.
Mais aussi, a divise 7b, b divise 5a et a et b sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, a divise 7 et b divise 5, donc $b \leq 5$ et $a \leq 7$. Et donc finalement, a = 7 et b = 5.

Exercice 40

En utilisant le théorème de Gauss, démontrer que si b et c divisent a, et b et c sont premiers entre eux, alors bc divise a (a, b, c étant des entiers).

Solution 40

On suppose que b et c premiers entre eux, divisent a :
b divise a, alors il existe un entier naturel k tel que a = kb.
De plus, c divise a, donc c divise kb. Or b et c sont premiers entre eux, alors d'après Gauss, c divise k.
C'est-à-dire qu'il existe un entier h tel que k = hc. On a alors a = h(bc). Donc bc divise a.

3 – Résoudre et utiliser l'équation ax + by = c, d'inconnues les entiers relatifs x et y, à coefficients entiers

Exercice 41

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: a) 7x – 14y = 3 b) 23x + 56y = 3.

Solution 41

a) 7 divise 14, d'où pgcd (7 , 14) = 7.

Or 7 ne divise pas 3, alors l'équation $7x - 14y = 3$ n'a pas de solution.

b) pgcd (23 , 56) = 1, alors l'équation $23x + 56y = 3$ admet des solutions.

Cherchons une solution particulière, en utilisant l'algorithme d'Euclide :

On a : $56 = 23\times2 + 10$

$23 = 2\times10 + 3$

$10 = 3\times3 + 1$

D'où $1 = 10 - 3\times3$

$= 10 - (23 - 2\times10)\times3$

$= 7\times10 - 23\times3$

$= 7\times(56 - 2\times23) - 23\times3$

$= 7\times56 - 17\times23.$

On a donc $23\times(-17) + 56\times7 = 1$ Par suite on a : $23\times(-51) + 56\times21 = 3$. Une solution particulière est alors (-51 , 21).

Ainsi, (x , y) est solution de l'équation $23x + 56y = 3$ équivaut à $23x + 56y = 3$.

C'est-à-dire $23x + 56y = 23\times(-51) + 56\times21$. En d'autres termes, $23(x + 51) + 56(y - 21) = 0$.

Finalement, on a : $23(x + 51) = 56(21 - y)$

De cette dernière égalité, on peut dire que 23 divise $56(21 - y)$ et 56 divise $23(x + 51)$.

Or 23 et 56 sont premiers entre eux, d'où d'après le théorème de Gauss, on peut dire que :

23 divise $21 - y$ et 56 divise $x + 51$. D'où

$23(x + 51) = 56(21 - y) \iff \dfrac{x+51}{56} = \dfrac{21-y}{23} = k$, où k est un entier relatif.

$\iff x = 56k - 51$ et $y = 21 - 23k$ k étant un entier relatif.

Vérification : Soit k, entier relatif, $23(56k - 51) + 56(21 - 23k) = 3$.

D'où l'ensemble solution est : $S = \{(56k - 51 ,\ 21 - 23k)$; k appartenant à $\mathbb{Z}\}$.

Exercice 42

On se propose de déterminer les relatifs n tels que : $\begin{cases} n \equiv 1[5] \\ n \equiv 5[7] \end{cases}$ (S).

1) Montrer que n est solution de (S), si et seulement si : $\begin{cases} 4n+1 \equiv 0[5] \\ 4n+1 \equiv 0[7] \end{cases}$.

2) En déduire que si n est solution de (S) alors on a $35k - 4n = 1$, où k appartenant à $\mathbb{Z}$ (1).

3) Résoudre (1), puis (S).

Solution 42

1) Soit n une solution de (S). On a : $n \equiv 1[5] \iff 4n \equiv 4[5] \iff 4n + 1 \equiv 0[5]$.

$n \equiv 5[7] \iff 4n \equiv 6[7] \iff 4n + 1 \equiv 0[7]$.

D'où $\begin{cases} n \equiv 1[5] \\ n \equiv 5[7] \end{cases} \iff \begin{cases} 4n+1 \equiv 0[5] \\ 4n+1 \equiv 0[7] \end{cases}$.

2) Si n est solution de (S), alors $4n + 1$ est divisible par 5 et par 7.

Or pgcd (5 , 7) = 1, donc $4n + 1$ est divisible par 35.

D'où pour tout entier relatif n, il existe un entier relatif k tel que $4n+1 = 35k$.

D'où enfin on a : $35k - 4n = 1$, k appartenant à $\mathbb{Z}$.

3) Résolution de (1) :

Le lecteur résoudra cette équation et devra trouver $k = 4\alpha - 1$ et $n = 35\alpha - 9$, où α appartient à $\mathbb{Z}$.

Résolution de (S) :

Si n est solution de (S), alors $n = 35\alpha - 9$, avec α appartient à $\mathbb{Z}$.

Vérification :

On a $35\alpha - 9 \equiv 1[5]$ et $35\alpha - 9 \equiv 5[7]$. D'où l'ensemble des solutions du système (S) :

$S = \{35\alpha - 9,\ \alpha$ appartenant à $\mathbb{Z}\}$.

Exercice 43

1) Montrer que pour tout entier relatif n, $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2) Soit l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
Vérifier en utilisant la question 1) que 87 et 31 sont premiers entre eux.
En déduire l'existence et déterminer un couple (u , v) d'entiers relatifs tels que $87u + 31v = 1$, puis déterminer une solution particulière (x_0, y_0) de (E).
3) Soit (E') l'équation : $87x + 31y = 0$, x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.
a) Démontrer que « (x , y) est solution de (E) » si et seulement si « $(x - x_0, y - y_0)$ est solution de (E') ».
b) Résoudre l'équation (E').
c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution 43

1) Soit n entier relatif quelconque, on a : $5(14n + 3) - 14(5n + 1) = 1$.
Donc d'après la réciproque de l'identité de Bézout, on a : $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
2) • Pour $n = 6$, on a $14n+3 = 87$ et $5n+1 = 31$.
D'où d'après la question 1), 87 et 31 sont premiers entre eux.
• Puisque 87 et 31 sont premiers entre eux, alors d'après l'identité de Bézout, il existe au moins un couple (u , v) d'entiers tels $87u + 31v = 1$.
Détermination d'un couple (u , v) :
On peut prendre (u , v) = (5 , -14) (d'après la question 1)).
• **Une solution particulière (x_0, y_0) de (E) :**
(10 , - 28).
3)a) On a d'abord : $87\times10 + 31\times(-28) = 2$
Ensuite, (x , y) solution de (E) $\Leftrightarrow$ $87x + 31y = 2$
$\Leftrightarrow$ $87x + 31y = 87\times10 + 31\times(-28)$
$\Leftrightarrow$ $87(x - 10) + 31(y + 28) = 0$
$\Leftrightarrow$ $(x - 10, y + 28)$ est solution de (E').
D'où le couple (x , y) est solution de (E), si et seulement si $(x - 10, y + 28)$ est solution de.(E').
b) $87x + 31y = 0 \Leftrightarrow 87x = -31y$. D'où 87 divise $-31y$ et 31 divise $87x$.
Or 87 et 31 étant premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss, 87 divise y et 31 divise x. D'où
$87x = -31y \Leftrightarrow \frac{x}{31} = -\frac{y}{87} = k$, avec k appartenant à $\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ $x = 31k$ et $y = -87k$, avec k appartenant à $\mathbb{Z}$.
On vérifie que $87(31k) + 31(-87k) = 0$ pour tout entier relatif k.
D'où l'ensemble des couples (x , y) solutions de (E') est : $S' = \{(31k, -87k)$, k appartenant à $\mathbb{Z}\}$.
c) D'après les questions 3)a) et 3)b), l'ensemble solution de (E) est $S = \{(31k - 10, -87k + 28)$, k dans $\mathbb{Z}\}$.

Exercice 44

Soit a et b deux entiers naturels.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$, le système : $\begin{cases} x \equiv a[9] \\ x \equiv b[11] \end{cases}$, d'inconnue x.

1) Démontrer que toutes les solutions de ce système sont congrues à un même nombre modulo 99.
(On pourra utiliser l'identité de Bézout).
2) Déterminer toutes les solutions de ce système.

Solution 44

1) On a $\begin{cases} x \equiv a[9] \\ x \equiv b[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9k + a \\ x = 11k' + b \end{cases}$, k et k' étant des entiers relatifs.

On a alors : $9k + a = 11k' + b$. Ce qui revient à résoudre l'équation $9k - 11k' = b - a$ (E_1) d'inconnues k et k'.
Or pgcd(9 , -11) = 1, d'où d'après l'identité de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $9u - 11v = 1$.
On peut même prendre $u = 5$ et $v = 4$. Ainsi $9\times5 - 11\times4 = 1$, et donc $9\times5(b - a) - 11\times4(b - a) = b - a$.
$(5(b - a), 4(b - a))$ est une solution particulière de l'équation (E_1).

On a donc : $\begin{cases} 9k - 11k' = b - a \\ 9\times5(b-a) - 11\times4(b-a) = b - a \end{cases}$. Ce qui nous conduit à l'équation :

$9(k - 5(b - a)) - 11(k' - 4(b - a)) = 0 \Leftrightarrow 9(k - 5(b - a)) = 11(k' - 4(b - a))$. (E_2)
D'où 9 divise $11(k' - 4(b - a))$ et 11 divise $9(k - 5(b - a))$.

Or 9 et 11 sont premiers entre eux. Alors d'après le théorème de Gauss, 9 divise $k' - 4(b-a)$ et 11 divise $k - 5(b-a)$.

D'où $(E_2) \Leftrightarrow \dfrac{k-5(b-a)}{11} = \dfrac{k'-4(b-a)}{9} = h$, h étant un entier relatif.

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 11h + 5(b-a) \\ k' = 9h + 4(b-a) \end{cases}$, h étant un entier relatif.

Vérifions que les valeurs de k et k' trouvées satisfont l'équation (E_1).
En effet, $9(11h + 5(b-a)) - 11(9h + 4(b-a)) = b - a$.
Alors $x = 99h + 45(b-a) + a = 99h + 45b - 44a$. D'où $x \equiv 45b - 44a[99]$.
Par conséquent toutes les solutions du système sont congrues à $45b - 44a$ modulo 99.
2) Il suffit de vérifier si tous les entiers de la forme $99k + 45b - 44a$, k appartenant à $\mathbb{Z}$, sont solutions du système.
On a $99 \equiv 0[9]$, $45 \equiv 0[9]$ et $44 \equiv -1[9]$; donc $99k + 45b - 44a \equiv a[9]$.
De même, on a $99 \equiv 0[11]$, $45 \equiv 1[11]$ et $44 \equiv 0[11]$; donc $99k + 45b - 44a \equiv b[11]$.
D'où x est solution du système ci-dessus si et seulement si $x = 99k + 45b - 44a$.
L'ensemble solution de ce système est donc : $S = \{99k + 45b - 44a$, k appartenant à $\mathbb{Z}\}$.

E. Reconnaître et utiliser les nombres premiers

1 – Reconnaître un nombre premier

Exercice 45

Reconnaître si 937 et 1933 sont des nombres premiers.

Solution 45

- Les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{937}$ sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Mais aucun de ces nombres ne divise 937, donc 937 est un nombre premier.

- Les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{1933}$ sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 et 43.

Mais aucun de ces nombres premiers ne divise 1933, alors 1933 est premier.

Exercice 46

1) Soit n entier naturel, $n \geq 3$. Démontrer que si n est premier, alors $n + 1$ n'est pas premier.
2) Déterminer deux entiers naturels consécutifs, tous les deux premiers.
   Combien y'a-t-il de réponses possibles ?

Solution 46

1) Soit n un nombre premier supérieur ou égal à 3, n est impair. Donc $n + 1$ est pair et $n + 1 \geq 4$.
   Donc $n + 1$ n'est pas premier.
2) Soit n entier naturel premier, si $n + 1$ est premier, alors d'après la question 1), on a $n < 3$.
   Donc $n = 2$ et $n + 1 = 3$. 2 et 3 sont premiers. Donc les seuls entiers consécutifs premiers sont 2 et 3.

Exercice 47

Soit n entier naturel premier, $n \geq 3$. Démontrer que $n^2 + 1$ et $n^2 - 1$ ne sont pas premiers.

Solution 47

n étant premier et supérieur où égal à 3, alors n est impair.
Donc n^2 est impair et par conséquent, $n^2 - 1$ et $n^2 + 1$ sont pairs.
Or on a $n \geq 3$, alors $n^2 \geq 9$ donc $n^2 - 1 \geq 8$ et $n^2 + 1 \geq 10$.
Finalement $n^2 - 1$ et $n^2 + 1$ sont deux entiers naturels pairs autres que 2, donc ils ne sont pas premiers.

> **Point méthode :**
> *Le seul entier naturel pair et premier est 2.*

Exercice 48

Prouver que pour tout k appartenant à $\{2, 3, 4, 5\}$, $5! + k$ n'est pas un nombre premier.

Solution 48

$5! = 2\times3\times4\times5$ et k appartient à {2, 3, 4, 5}, donc $\frac{5!}{k}$ appartient à $\mathbb{N}$.

Or $5!+k = k\left(\frac{5!}{k}+1\right)$, et $k \geq 2$, alors $5! + k$ n'est pas premier.

2 – Décomposer un nombre en facteurs premiers

Exercice 49

Déterminer les diviseurs :
a) de 45 sans utiliser la décomposition de 45 en facteurs premiers.
b) de 420 en utilisant la décomposition de 420 en facteurs premiers.

Solution 49

a) 1 et 45 sont des diviseurs de 45.
45 n'est pas divisible par 2 ; 3 divise 45 et le quotient est 15 qui divise 45.
5 divise 45 et le quotient est 9.
Les diviseurs de 45 sont donc 1, 3, 5, 9, 15 et 45.
b) La décomposition de 420 en facteurs premiers est : $420 = 2^2\times3\times5\times7$.
1 est un diviseur de 420. Les diviseurs premiers de 420 sont 2, 3, 5 et 7.
Les produits de deux facteurs premiers diviseurs de 420 sont : 2^2, 2×3, 2×5, 2×7, 3×5, 3×7, 5×7.
Les produits de trois facteurs premiers diviseurs de 420 sont : $2^2\times3$, $2^2\times5$, $2^2\times7$, $2\times3\times5$, $2\times3\times7$, $2\times5\times7$, $3\times5\times7$.
Les produits de quatre facteurs premiers diviseurs de 420 sont : $2^2\times3\times5$, $2^2\times3\times7$, $2^2\times5\times7$, $2\times3\times5\times7$
Et enfin le produit de cinq facteurs premiers diviseur de 420 est : $2^2\times3\times5\times7$.
On obtient alors les diviseurs de 420 qui sont : 1, 2, 3, 5, 7, 4, 6, 10, 14, 15, 21, 35, 12, 20, 28, 30, 42, 70, 105, 60, 84, 140, 210 et 420.

Exercice 50

Déterminer le plus petit entier naturel ayant 15 diviseurs

Solution 50

Puisque 15 est produit de (14 + 1) =15 et (0 + 1) = 1 ou de (4 + 1) = 5 et (2 + 1) = 3.
L'entier naturel cherché a 15 diviseurs s'il s'écrit sous la forme p^k où k = 14 et p le plus petit entier naturel premier possible soit 2 ou sous la forme p^kq^h où k = 4 et h = 2, p et q distincts et les plus petits entiers premiers possibles donc p = 2 et q = 3. Le plus petit entier ayant 15 diviseurs est donc le petit nombre entre 2^{14} et $2^4\times3^2$ soit 144.

3 – Nombres premiers et divisibilité

Exercice 51

Démontrer que si n est un entier naturel premier, alors (n – 1)! n'est pas divisible par n.

Solution 51

$(n-1)! = 1\times2\times\ldots\times(n-2)\times(n-1)$.
Puisque n étant premier, si n divise le produit $1\times2\times\ldots\times(n-2)\times(n-1)$, alors n divise au moins un des facteurs du produit. Or tous les facteurs de ce produit sont non nuls et inférieurs à n qui est premier, alors ils sont premiers avec n.
Donc n ne divise aucun facteur du produit et par conséquent ne divise pas ce produit.
Donc (n – 1)! n'est pas divisible par n.
Remarque : ***si n est premier, alors (n – 1)! et n sont premiers entre eux.***

Point méthode :
Soit p un nombre premier entier naturel, on a les propriétés suivantes :
- pour a et b deux entiers relatifs, si p divise ab, alors p divise a ou p divise b.
- Si q est un entier naturel non nul inférieur à p, alors p et q sont premiers entre eux.

Exercice 52

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

a) Démontrer que si $p-1$ est multiple de 2 et non multiple de 4, alors $p+1$ est multiple de 4, et si $p-1$ est multiple de 4, alors $p+1$ est multiple de 2 et non multiple de 4.
b) Démontrer que 3 divise $p-1$ ou bien $p+1$.
c) En déduire que 24 divise p^2-1.

Solution 52

a) • Supposons que $p-1$ est multiple de 2 et non multiple de 4.
Alors il existe un entier naturel impair k tel que $p-1=2k$.
On a donc $p+1=2k+2=2(k+1)$. Puisque k est impair, alors $k+1$ est pair.
Alors il existe un entier naturel h tel que $k+1=2h$. Et finalement, $p+1=4h$. Donc $p+1$ est multiple de 4.
• Supposons $p-1$ multiple de 4, alors il existe un entier naturel k tel que $p-1=4k$.
On a donc $p+1=4k+2=2(2k+1)$. $2k+1$ étant impair, $p+1$ est multiple de 2 et non multiple de 4.
b) Puisque p est premier et supérieur ou égal à 5, alors 3 ne divise pas p.
Donc les restes possibles dans la division euclidienne de p par 3 sont 1 et 2.
Or, si $p \equiv 1[3]$, alors $p-1 \equiv 0[3]$ et $p+1 \equiv 2[3]$. Alors $p-1$ est multiple de 3 mais pas $p+1$.
Et si $p \equiv 2[3]$, alors $p-1 \equiv 1[3]$ et $p+1 \equiv 0[3]$. Alors $p+1$ est multiple de 3, mais pas $p-1$.
Donc $p-1$ est multiple de 3 ou bien $p+1$ est multiple de 3.
c) p est premier et supérieur à 4, alors d'après ce qui précède, l'un des nombres $p-1$ et $p+1$ est multiple de 2 et l'autre est multiple de 4, donc $(p-1)(p+1)$ est multiple de 8.
De plus, d'après la question b), $p-1$ ou $p+1$ est multiple de 3, donc $(p-1)(p+1)$ est multiple de 3.
Comme 3 et 8 divisent p^2-1, et 3 et 8 sont premiers entre eux, alors $24=8\times3$ divise p^2-1.

Exercice 53

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
a) Montrer que 4^n-1 est divisible par 3.
b) Démontrer que si 2^n+1 est un nombre premier, alors 2^n-1 n'est pas un nombre premier.

Solution 53

a) Puisque $4 \equiv 1[3]$, alors $4^n \equiv 1[3]$. Et finalement $4^n-1 \equiv 0[3]$. Donc 4^n-1 est divisible par 3.
b) Notons que, puisque $n \geq 3$, alors $2^n+1 \geq 9$.
Ainsi, puisque 2^n+1 est premier alors 3 et 2^n+1 sont premiers entre eux.
Or $4^n-1=(2^n+1)(2^n-1)$ et 3 divise 4^n-1, alors d'après le théorème de Gauss, 3 divise 2^n-1.
Et comme $n \geq 3$, alors $2^n-1 \geq 7$. Donc 2^n-1 n'est pas premier.

Exercice 54

Soit p un nombre premier, $p \geq 5$.
a) Démontrer que p^2-1 est divisible par 3.
b) En déduire que $64p^2-1$ est divisible par 3.
c) Démontrer que si $8p-1$ est un nombre premier, alors $8p+1$ ne l'est pas, et que si $8p+1$ est un nombre premier, alors $8p-1$ ne l'est pas

Solution 54

a) Voir l'exercice 52 question b). Puisque 3 divise $p-1$ ou $p+1$, alors 3 divise $p^2-1=(p+1)(p-1)$.
b) Puisque $64 \equiv 1[3]$, alors $64p^2 \equiv p^2[3]$. Donc $64p^2-1 \equiv p^2-1[3]$.
Or $p^2-1 \equiv 0[3]$, alors $64p^2-1 \equiv 0[3]$. Finalement $64p^2-1$ est divisible par 3.
c) Notons que pour $p \geq 5$, on a $8p-1>3$ et $8p+1>3$.
Alors si $8p-1$ est premier alors $8p-1$ et 3 sont premiers entre eux.
De même si $8p+1$ est premier alors $8p+1$ et 3 sont premiers entre eux.
Or $64p^2-1=(8p-1)(8p+1)$ est divisible par 3. Alors d'après le théorème de Gauss :
Si $8p-1$ est premier alors 3 divise $8p+1>3$, donc $8p+1$ n'est pas premier.
Si $8p+1$ est premier alors 3 divise $8p-1>3$, donc $8p-1$ n'est pas premier.

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 55 — 25 minutes

Soit b est un entier supérieur à 1. On considère dans toute la suite le système de numération de base b.

1) Montrer que $\overline{10101}$ est divisible par $\overline{111}$. (On pourra calculer $(b^2+b+1)(b^2-b+1)$)

2) Montrer que $\overline{100010001}$ est divisible par $\overline{10101}$ et divise $\overline{10000000100000001}$.

Exercice 56 — 25 minutes

Démontrer que, si aucun des trois entiers naturels a, b, c n'est multiple de 3, alors $a^2+b^2+c^2$ est multiple de 3.

Exercice 57 — 25 minutes

1) Montrer que, soit x entier relatif, si $x \equiv 1[2]$, alors $x^2 \equiv 1[4]$

2) Montrer que, soit x et y entiers relatifs, si $x \equiv 1[2]$, alors x^2-3y^2 n'est pas divisible par 4.

Exercice 58 — 20 minutes

Montrer que si p est un entier naturel premier, alors $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Exercice 59 — 40 minutes

Démontrer que si la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, il en est de même pour les fractions :

a) $\frac{a+b}{ab}$ b) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ c) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ d) $\frac{ab}{a^2+b^2}$.

Exercice 60 — 30 minutes

Soit n entier naturel non nul.

1) Montrer que tout diviseur commun à $5n-3$ et $n+1$ divise 8.

2) En déduire que $5n-3$ et $n+1$ sont premiers entre eux si n est pair.

3) Déterminer l'entier naturel n tel que : $\mathrm{pgcd}(5n-3, n+1) = 8$.

Exercice 61 — 35 minutes

Soit k entier relatif, on pose : $x = 7k^2+3k+1$ et $y = 8k+3$.

1) Vérifier que $64x-(56k+3)y = 55$.

2) Quelles sont les valeurs possibles de $d = \mathrm{pgcd}(x, y)$.

3) Montrer que $d = 55$ si et seulement si 55 divise y. En déduire les valeurs de k pour que $d = 55$.

Exercice 62 — 35 minutes

1) Déterminer selon n appartenant à $\mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.

2) Même question pour $A = 851^{3n}+851^{2n}+851^n+2$.

3) soit $B = \overline{2103211}^{\text{quatre}}$. Déterminer dans le système décimal, le reste de la division euclidienne de B par 7

Exercice 63 — 30 minutes

Soit p entier naturel non nul et x entier relatif différent de 0 et 1.

1) Démontrer que, si x^2-x est multiple de p, alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'entier relatif x^n-x est multiple de p.

2) Déterminer l'ensemble des valeurs de x telles que, pour tout n appartient à $\mathbb{N}^*$, l'entier relatif x^n-x soit un multiple de 6.

Exercice 64 — 30 minutes

1) Montrer que, pour tout entier relatif a, on a : $a^4 \equiv 0[16]$ ou $a^4 \equiv 1[16]$.

2) En déduire que pour tout entier naturel non nul k, $k < 15$, il existe une infinité d'entiers naturels qui ne sont pas somme de k puissances quatrième d'entiers.

Exercice 65 — 20 minutes

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Démontrer que si a^2 divise b^2, alors a divise b.

Exercice 66 — 35 minutes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α, et α appartient à $]0\ ,\ 1[$.

2) Montrer que si $f(x) = 0$ admet une racine rationnelle $\frac{p}{q}$, p et q étant premiers entre eux, alors p divise 3 et q divise 4.

Quels sont les rationnels vérifiant cette dernière condition ?

3) Trouver une solution rationnelle de l'équation $f(x) = 0$.
Achever la résolution de cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Exercice 67 — 40 minutes

On considère la suite $(U_n)_{n>0}$ telle que : $U_1 = 1$, $U_2 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n, $U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n$.

1) Calculer U_3, U_4, U_5 et U_6.
2) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, U_n est un entier impair.
3) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $\text{pgcd}(U_n\ ,\ U_{n+1}) = 1$ et $\text{pgcd}(U_n\ ,\ U_{n+2}) = 1$.

Exercice 68 — BAC C – Cameroun – 2001 — 45 minutes

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et $E = \{z \in \mathbb{Z}\ ;\ z = ax + by$, x et y appartenant à $\mathbb{Z}\}$.

1) Montrer que E contient au moins un entier naturel non nul.
2) On note d le plus petit entier naturel non nul élément de E.
   a) Démontrer que tout multiple de d appartient à E.
   b) Démontrer que tout élément z de E est multiple de d (on pourra envisager la division euclidienne de z par d).
   c) En déduire que E est l'ensemble des multiples de d.
3) Démontrer que d est le plus grand diviseur commun de a et b.
4) ***Application numérique :***

Démontrer que l'ensemble des entiers relatifs z où $z = 9801x + 11664y$ est égal à l'ensemble des multiples de 81.

Exercice 69 — 35 minutes

Soit a et b deux entiers relatifs.

1) Développer $(a + b)^7$. En déduire que $(a + b)^7$ est congru à $a^7 + b^7$ module 7.
2) En déduire que $(a + b)$ est multiple de 7 si et seulement si $a^7 + b^7$ est divisible par 7.
3) Trouver tous les entiers relatifs x tels que : $\begin{cases} -10 \leq x \leq 10 \\ x^7 + 128 \text{ est multiple de } 7 \end{cases}$.

Exercice 70 — 25 minutes

Soit E un ensemble fini à n éléments, F l'ensemble des parties de E, et G l'ensemble des parties de F.
On rappelle que $\text{card}F = 2^n$. On pose $m = \text{card}G$.
Trouver, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne par 5 de l'entier m.

Exercice 71 — 25 minutes

Montrer qu'il n'existe pas quatre entiers relatifs x, y, z et k tels que l'on ait : $x^2 + y^2 + z^2 = 8k + 7$.

Exercice 72 — 35 minutes

Soit N = abcd en base décimal, et $\overline{bcda}$ un entier naturel divisible par 7.

1)a) Montrer que, si a = 0 ou a = 7, alors N est divisible par 7.
b) Montrer que 10N – 3a est divisible par 7. En déduire que, si N est divisible par 7, alors a = 0 ou a =7
2) On suppose que l'on a : a = 7, b = d et c = 0. Déterminer N pour qu'il soit divisible par 3.

Exercice 73 — 35 minutes

Soit n entier naturel, on considère l'entier $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

1) Démontrer que l'on a : pour tout entier naturel n, $A_{n+3} \equiv A_n [7]$.
2) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que A_n soit divisible par 7.

3) Soit a, b, c entiers naturels tels que $a = \overline{1110}$, $b = \overline{1010100}$ et $c = \overline{1001001000}$ en base deux.
Ces nombres sont-ils divisibles par 7 ?

Exercice 74
30 minutes

1) Quels sont les diviseurs positifs de 72 ?
2) Soit p entier naturel, mettre $p^2 - 6p - 63$ sous la forme d'une différence de deux entiers naturels tels que l'un soit carré parfait et l'autre ne dépende pas de p.
En déduire tous les couples (p , q) d'entiers naturels, solutions de l'équation $p^2 - 6p - 63 = q^2$.

Exercice 75
50 minutes

Soit n entier naturel non nul, on pose : $a_n = 4\times10^n - 1$, $b_n = 2\times10^n - 1$ et $c_n = 2\times10^n + 1$.
1)a) Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.
b) Montrer que 3 divise a_n et c_n.
c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnés ci-dessous, que b_3 est premier.
d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.
En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.
e) Montrer que le pgcd de b_n et c_n est égal au pgcd de b_n et 2. En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.
2) On considère l'équation (E) : $b_3x + c_3y = 1$, d'inconnues x et y dans $\mathbb{Z}$.
a) Justifier le fait que l'équation (E) possède au moins une solution.
b) En appliquant l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3, déterminer une solution particulière de (E).
c) Résoudre l'équation (E).
Liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 83, 89, 97.

Exercice 76
BAC C – Cameroun – 2002
45 minutes

1)a) Démontrer par récurrence la propriété suivante : pour tous réels a et b et pour tout entier naturel n différent de 0 et 1, on a $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$.
b) Démontrer que si p et q appartiennent à $\mathbb{N}$, alors $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et $2^q - 1$.
2)a) On note P l'ensemble des nombres premiers.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, si $(2^n - 1)$ appartient à P, alors n appartient à P.
b) Démontrer que $2^{11} \equiv 1[23]$.
c) La réciproque de la proposition de la question 2)a) est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

Exercice 77
30 minutes

1) On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$, où x et y sont des entiers relatifs.
a) Déterminer un couple dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, solution de l'équation : $6x + 7y = 1$.
b) En déduire les couples d'entiers relatifs, solutions de l'équation (E).
2) Soient (a_n) et (b_n) les suites arithmétiques définies par : $a_0 = -25$ et $b_0 = -32$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = a_n + 6$, $b_{n+1} = b_n + 7$. Déterminer tous les couples (p , q) d'entiers naturels inférieurs à 15 tels que $a_p = b_q$.
3) Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthogonal de l'espace. On considère le plan (P) d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.
Montrer qu'il existe un seul point de (P) de l'espace, dont les coordonnées sont des entiers naturels, qui appartient au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer les coordonnées de ce point.

Exercice 78
25 minutes

Soit n un entier naturel.
1) Démontrer que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n + 1$.
2) Déterminer l'ensemble des valeurs de n telles que $n + 1$ divise $3n^2 + 15n + 9$.
3) En déduire que, pour tout entier naturel n, $3n^2 + 15n + 9$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

Exercice 79
40 minutes

Soit n entier naturel supérieur ou égal à 2.
1) Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
2) On pose $\alpha = n + 3$, $\beta = 2n + 1$ et $\delta = \text{pgcd}(\alpha, \beta)$.
a) Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.
b) Démontrer que : « α et β sont multiples de 5 » si et seulement si « $n - 2$ est multiple de 5 ».

3) On considère : $a = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $b = 2n^2 - n - 1$.
Montrer, après factorisation que $n - 1$ divise a et b.
4)a) On note $d = \text{pgcd}(n(n + 3), 2n + 1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.
b) En déduire le pgcd, Δ, de a et b en fonction de n.
c) Application : déterminer Δ pour $n = 2001$.
déterminer Δ pour $n = 2002$.

Exercice 80 **25 minutes**

Soit a, b et k trois entiers naturels non nuls.
Démontrer que : $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a + b, b)$.
$\text{pgcd}(ka, kb) = k \times \text{pgcd}(a, b)$.

Exercice 81 **35 minutes**

1) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.
a) Donner une solution particulière de (E).
b) Résoudre (E).

2) Soit N entier tel qu'il existe deux entiers a et b vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$.

a) Montrer que le couple (a , -b) est solution de (E).
b) Quel est le reste dans la division euclidienne de N par 40 ?
3)a) Résoudre l'équation (E') : $8x + 5y = 100$ où x et y sont des entiers relatifs.
b) Au VIII[e] siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 82 **15 minutes**

Soit p et q deux entiers naturels tels que $p^2 - 2q^2 = 1$.
1) Démontrer que p est impair.
2) Démontrer que q est pair.

Exercice 83 **40 minutes**

1) On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1) : $ax + by = 60$ (avec a, b étant deux entiers naturels non nuls). On note $d = \text{pgcd}(a, b)$.
a) On suppose que l'équation (1) a au moins une solution (x_0, y_0). Montrer que d divise 60.
b) On suppose que d divise 60.
Prouver qu'il existe alors au moins une solution (x_0, y_0) à l'équation (1).
2) On considère l'équation (2) : $24x + 36y = 60$, où x et y sont des entiers relatifs.
a) Donner le pgcd de 24 et 36, en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).
b) Trouver une solution particulière pour l'équation (2) et résoudre cette équation.
On appelle S l'ensemble des couples (x , y) solutions de (2).
c) Trouver tous les couples solutions de (2) tels que $-10 \le x \le 10$.
Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.
d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les points A(1 , 1) et B(4 , -1).
Représenter l'ensemble (E) des points M(x , y) tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, k étant un nombre réel.
e) Montrer que les points ayant pour coordonnées les couples solutions (x , y) de l'équation (2) appartiennent à (E).
Comment peut-on caractériser S ?

Exercice 84 **BAC – Liban – 2000** **40 minutes**

Soit x et y deux entiers naturels tels que : $1 \le x \le 8$ et $1 \le y \le 8$.
On pose $x' = 3y + 2$, $y' = 3x - 1$ et $m = x'^2 - y'^2$.
On se propose de déterminer tous les couples (x', y') pour lesquels m est multiple non nul de 60.
1) Montrer que la somme et la différence de deux nombres entiers α et β quelconques ont la même parité.
2) On appelle G l'ensemble des valeurs prises par x' et H l'ensemble des valeurs prises par y'.
Ecrire la liste des éléments de G et la liste des éléments de H.
3) Montrer que $x' - y'$ est multiple de 3.

4) On suppose dans cette question que m est un multiple non nul de 60.

a) Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 6.

b) Le nombre $x' - y'$ peut-il être multiple de 60 ?

c) En déduire que $x' + y'$ est un multiple de 10.

5) Déterminer l'ensemble Γ de tous les couples (x', y') de G×H pour lesquels m est multiple non nul de 60.

Exercice 85 — 25 minutes

1) Ecrire la division euclidienne de 1000 par 13.

Soit n entier naturel, déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13.

2) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de $10^{3n+1} + 10^{3n}$ par 13.

3) En déduire le reste de la division euclidienne de 11.000.000.000.000 par 13.

4) Quel est le reste de la division euclidienne par 13 de $25\times10^{15} + 1$.

Exercice 86 — 35 minutes

Dans cet exercice, x et y sont des entiers naturels non nuls.

1) On suppose qu'il existe un couple (x_0, y_0) solution de l'équation : pgcd (x , y) + ppcm (x , y) = x + 6.

On pose $p = \text{pgcd}(x_0, y_0)$ et $m = \text{ppcm}(x_0, y_0)$. Montrer que p divise 6.

2) Déterminer toutes les solutions du système : $\begin{cases} \text{pgcd}(x,y) + \text{ppcm}(x,y) = x+6 \\ \text{pgcd}(x,y) = 5 \end{cases}$.

3) Même question pour le système : $\begin{cases} \text{pgcd}(x,y) + \text{ppcm}(x,y) = x+6 \\ \text{pgcd}(x,y) = 2 \end{cases}$.

Exercice 87 — 25 minutes

Soit $p(n) = n^6 - 1$, où n est un entier naturel.

1) Calculer p(n) pour n appartenant à {1, 2, . . ., 10}.

Pour quelles valeurs de n comprises entre 1 et 10, le nombre p(n) est-il divisible par 9 ?

2) Factoriser p(n) en produit de facteurs du premier ou du second degré à coefficient entiers.

3) Déterminer tous les entiers n pour que p(n) soit divisible par 9.

Exercice 88 — 30 minutes

1) n et p sont des entiers naturels non nuls avec $n > p^2$. Démontrer que si d divise n et p, alors d divise $n - p^2$.

2) Démontrer, en utilisant la définition du pgcd, que $\text{pgcd}(n, p) = \text{pgcd}(n - p^2, p)$.

3) Déterminer alors le pgcd(10829 , 104).

4) Soit k entier naturel non nul. Démontrer que : $\text{pgcd}(4k^2 + 4k + 6, 2k + 1) = 5$ si et seulement si, $k \equiv 2[5]$.

Exercice 89 — 25 minutes

1) Donner tous les diviseurs naturels de 15.

2) Démontrer que si x et y sont deux entiers relatifs tels que $x^2y - y = 15$, alors y divise 15.

3) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x , y) tels que $x^2y - y = 15$.

Exercice 90 — 35 minutes

1) Soit a entier relatif. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de a^2 par 7 ?

2) Soit a et b deux entiers relatifs.

Déduire de la question 1) que si 7 divise $a^2 + b^2$, alors 7 divise a et 7 divise b.

Justifier alors que : « 7 divise $a^2 + b^2$ » si et seulement si, « 49 divise $a^2 + b^2$ ».

3) On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 7.

Déterminer tous les points à coordonnées entières de ce cercle.

Exercice 91 — BAC C – Cameroun – 1990 — 30 minutes

1) Soit N un entier naturel s'écrivant $\overline{xyyx}$ dans le système décimal.

Déterminer x et y tels que N soit un multiple de 105.

2) Soit M un entier naturel s'écrivant $\overline{xyzzyx}$ dans le système décimal.

a) Montrer que M est un multiple de 11.

b) Déterminer x et z tels que M soit multiple de 35.

c) Déterminer y tel que M soit également multiple de 3.

Exercice 92 **20 minutes**

Déterminer tous les entiers naturels n et p pour lesquels $15^n - 21^p$ est divisible par 12.

Exercice 93 **60 minutes**

On rappelle que $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, avec n et k entiers naturels tels que $k \leq n$. Soit p entier naturel premier.

1)a) Enoncer le théorème de Gauss.

b) Si $1 \leq k \leq p-1$, montrer que p divise C_p^k (on pourra utiliser la question 1)a)).

2) En déduire, par un raisonnement par récurrence sur n appartenant à $\mathbb{N}^*$, que p divise l'entier $n^p - n$.

3) Montrer que si n et p sont premiers entre eux, alors p divise $n^{p-1} - 1$.

4) En utilisant la question précédente, montrer que, si les entiers p et q ainsi que pq et n sont premiers entre eux, alors pq divise $n^{(p-1)(q-1)} - 1$.

Exercice 94 **60 minutes**

Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par : $\begin{cases} x_0 = 3 \text{ et } y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{6}{5}x_n + \dfrac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = \dfrac{2}{5}x_n + \dfrac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$.

1) Démontrer par récurrence que les points $M_n(x_n ; y_n)$ sont sur la droite (D) d'équation : $2x - y - 5 = 0$.

2) En déduire x_{n+1} en fonction de x_n.

3) Démontrer que (x_n) et (y_n) sont des suites d'entiers relatifs.

4) Soit n un entier naturel.

a) Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5.

b) Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors ils sont premiers entre eux.

5)a) Démontrer par récurrence que : pour tout entier naturel n, on a : $x_n = 2^{n+1} + 1$.

b) Soit n un entier naturel. Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4}.

c) En déduire les valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont divisibles par 5.

Exercice 95 **BAC C – Cameroun – 2008** **35 minutes**

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $12x - 5y = 3$.

2) On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par : $\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)z_n \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$

On désigne par M_n le point image de z_n dans le plan complexe d'origine O.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$.

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels M_n appartient à la demi droite [Ox).

Exercice 96 **BAC C – Cameroun – 2009** **50 minutes**

L'entier naturel S désigne la somme des diviseurs positifs de p^4, où p est un nombre premier plus grand que 2.

1) Exprimer S en fonction de p.

2) Démontrer que $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$.

3) On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$ où n est un entier naturel.

a) Etablir l'existence et l'unicité de n lorsque p est fixé. (On pourra utiliser la question 2)

b) Exprimer n en fonction de p.

c) Etablir que p vérifie la relation $3 + 2p - p^2 = 0$. (On utilisera le fait que $4S = 4n^2$)

d) Déduire de c), p et puis n.

Exercice 97 BAC C – BAC étranger – 2005 60 minutes

A) Soit N un entier naturel, impair et non premier.

On suppose que $N = a^2 - b^2$, où a et b sont deux entiers naturels.

1) Montrer que a et b n'ont pas la même parité.

2) Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.

3) Quelle est la parité de p et de q ?

B) On admet que 250 507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels (a , b) vérifiant la relation (E) : $a^2 - 250\,507 = b^2$.

1) Soit X un entier naturel.

a) Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

b) Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$.
En déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.

c) Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2) Justifier que, si le couple (a , b) vérifie la relation (E), alors on a $a \geq 501$.
Montrer qu'il n'existe pas de solution du type (501 , b).

3) On suppose que le couple (a , b) vérifie la relation (E).

a) Démontrer que a est congru à 503 ou 505 modulo 9.

b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple (505 + 9k , b) soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Exercice 98 60 minutes

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparait périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1) Soit u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1.
Montrer que le couple (u , v) est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2)a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (x_0 , y_0) solution particulière de l'équation (E_2) : $35x - 27y = 1$.

b) En déduire une solution particulière (u_0 , v_0) de (E_1).

c) Déterminer les solutions de l'équation (E_1).

d) Déterminer le couple solution (u , v) permettant de déterminer J_1.

3)a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

b) Le jour J_0 était mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (Rappelons que l'an 2000 était une année bissextile)

c) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il encore attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

Solution 55

1) $\overline{10101}^b = b^4 + b^2 + 1$ et $\overline{111}^b = b^2 + b + 1$.
Or $b^4 + b^2 + 1 = (b^2 + b + 1)(b^2 - b + 1) = (b^2 + b + 1)[b(b - 1) + 1]$.
Posons $w = b - 1$. Notons que dans la base b, w est un chiffre car $0 \leq w < b$.
Alors $\overline{10101}^b = \overline{111}^b \times \overline{w1}^b$. Donc $\overline{111}^b$ divise $\overline{10101}^b$.

2) $\overline{100010001}^b = b^8 + b^4 + 1 = (b^4 + b^2 + 1)(b^4 - b^2 + 1) = (b^4 + b^2 + 1)[b^3(b-1) + b^2(b-1) + 1] = \overline{10101}^b \times \overline{ww01}^b$.
D'où $\overline{10101}^b$ divise $\overline{100010001}^b$.

Le lecteur montrera de façon analogue que : $\overline{10000000100000001}$ est divisible par $\overline{100010001}^b$.

Solution 56

Les restes possibles dans la division euclidienne par 3 d'un entier naturel x, sont : 0, 1 et 2.
Si $x \equiv 0[3]$, alors $x^2 \equiv 0[3]$.
Si $x \equiv 1[3]$, alors $x^2 \equiv 1[3]$.
Si $x \equiv 2[3]$, alors $x^2 \equiv 1[3]$.
On remarque que si x n'est pas divisible par 3, alors x^2 a pour reste 1 dans la division par 3.
Puisque a, b et c ne sont pas divisibles par 3, alors on a :
$a^2 \equiv 1[3]$, $b^2 \equiv 1[3]$ et $c^2 \equiv 1[3]$ et par suite on aura $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0[3]$.
Ainsi si a, b, et c ne sont pas multiples de 3, alors $a^2 + b^2 + c^2$ est multiple de 3.

Solution 57

1) Si $x \equiv 1[2]$, alors on a : $x = 2k + 1$, avec k appartenant à $\mathbb{Z}$. Et par suite, on a : $x^2 = 4(k^2 + k) + 1$. D'où $x^2 \equiv 1[4]$.
2) Soit x et y deux entiers relatifs.
Si x et y sont impairs, alors on a : $x^2 \equiv 1[4]$ et $y^2 \equiv 1[4]$ (d'après 1)). Donc $x^2 - 3y^2 \equiv 2[4]$.
Si x est impair et y pair alors on a : $x^2 \equiv 1[4]$ et $y^2 \equiv 0[4]$. Donc $x^2 - 3y^2 \equiv 1[4]$.
D'où si $x \equiv 1[2]$ (c'est-à-dire x est impair), alors $x^2 - 3y^2$ n'est pas multiple de 4 pour tout entier y.

Solution 58

Soit p un entier naturel premier. Supposons que $\sqrt{p}$ est rationnel.

Alors il existe deux entiers naturels a et b premiers entre eux tels que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$.

Alors $pb^2 = a^2$. Donc p divise a^2. Donc comme p est premier, alors p divise a. Donc il existe un entier naturel h tel que $a = ph$. On a alors $pb^2 = p^2h^2$, c'est-à-dire $ph^2 = b^2$; ce qui implique que p divise b^2. Donc p étant premier, p divise q.
Donc p divise a et b. Or d'après l'hypothèse, a et b sont premiers entre eux. Ce qui est contradictoire.
Donc $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Solution 59

On suppose que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

a) Il suffit de montrer que pgcd(a + b , ab) = 1.
Soit d = pgcd(a + b , ab), notons que $d \geq 1$.
Puisque pgcd(a + b, ab) = d, alors d divise a + b et d divise ab. Donc d divise a(a + b) – ab et d divise b(a + b) – ab.
C'est-à-dire, d divise b^2 et d divise a^2. Donc d divise pgcd(a^2 , b^2).
Puisque a et b sont premiers entre eux, alors a^2 et b^2 sont premiers entre eux. Donc d divise 1, donc $d \leq 1$.

Comme $d \leq 1$ et $d \geq 1$, alors d = 1. Finalement, ab et a + b sont premiers entre eux, et $\frac{a+b}{ab}$ est irréductible.

b) Il suffit de montrer que a^2b^2 et $a^2 + b^2$ sont premiers entre eux.

Puisque a et b sont premiers entre eux, alors a^2 et b^2 sont premiers entre eux.
Et d'après la question a), a^2b^2 et $a^2 + b^2$ sont premiers entre eux.

Par conséquent, $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ est une fraction irréductible.

c) Il suffit de montrer que a + b et $a^2 + ab + b^2$ sont premiers entre eux.
Remarquons que $a^2 + ab + b^2 = (a + b)(a + b) - ab$.

D'où $\text{pgcd}(a^2 + ab + b^2 , a + b) = \text{pgcd}(a + b , ab) = 1$ (d'après la question a)). D'où $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ est irréductible.

d) Il suffit de montrer que $a^2 + b^2$ et ab sont premiers entre eux.
Remarquons que $a^2 + b^2 = -2ab + (a + b)^2$, alors $\text{pgcd}(a^2 + b^2 , ab) = \text{pgcd}(ab , (a + b)^2)$.
Or d'après la question a), ab et a + b sont premiers entre eux, donc ab et $(a + b)^2$ sont aussi premiers entre eux.

Alors $\text{pgcd}(a^2 + b^2 , ab) = \text{pgcd}(ab , (a + b)^2) = 1$. Finalement, $\frac{ab}{a^2+b^2}$ est irréductible.

Solution 60

1) On remarque que : $5(n + 1) - (5n - 3) = 8$.
Or si d divise n + 1 et 5n – 3, alors d divise toute combinaison linéaire de n + 1 et 5n – 3, alors en particulier d divise $5(n + 1) - (5n - 3)$, donc d divise 8. D'où tout diviseur commun à 5n – 3 et n + 1 divise 8.

2) Soit $\delta = \text{pgcd}(n + 1 , 5n - 3)$.
Puisque tout diviseur commun à n + 1 et 5n – 3 divise 8, alors δ divise 8.
Par conséquent, δ appartient à {1, 2, 4, 8}.
Or si n est pair, alors n + 1 et 5n – 3 sont impairs, donc ne peuvent être divisibles par un nombre pair.
D'où δ n'appartient pas à {2, 4, 8}. D'où δ = 1.
En conclusion, n + 1 et 5n – 3 sont premiers entre eux si n est pair.

3) Méthode 1 :
$\text{pgcd}(n + 1 , 5n - 3) = 8$ si et seulement si 8 divise n + 1 et 8 divise 5n – 3. (Car 8 est le plus grand diviseur commun possible de n + 1 et 5n – 3). Or,

$$\begin{cases} n+1 \equiv 0[8] \\ 5n-3 \equiv 0[8] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+1 = 8k \\ 5n-3 = 8k' \end{cases}$$ k et k' étant des entiers naturels non nuls.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 8k-1 \\ 40k-8 = 8k' \end{cases}$$ k et k' étant des entiers naturels non nuls.

La résolution de l'équation $40k - 8 = 8k'$, c'est-à-dire $5k - k' = 1$ aboutit aux solutions $k = h + 1$ et $k' = 5h + 4$, où h est un entier naturel. On obtient alors $n = 8h + 7$, h appartenant à $\mathbb{N}$.

Vérifions si les $n = 8h + 7$ où h est un entier, sont solutions du système $\begin{cases} n+1 \equiv 0[8] \\ 5n-3 \equiv 0[8] \end{cases}$.

En effet, on a $n + 1 = 8h + 7 + 1 = 8(h + 1)$ et $5n - 3 = 40h - 32 = 8(5h - 4)$.
Donc on a bel et bien : $n + 1 \equiv 0[8]$ et $5n - 3 \equiv 0[8]$.
D'où $\text{pgcd}(n + 1 , 5n - 3) = 8$ si et seulement si $n = 8h + 7$, h étant un entier naturel quelconque.

Méthode 2 :
D'après la question 2), si n est pair, alors $\text{pgcd}(n + 1, 5n - 3) = 1$.
Donc si $\text{pgcd}(n + 1 , 5n - 3) = 8$, alors n est impair.
Les restes possibles dans la division euclidienne de n par 8 sont alors 1, 3, 5 et 7.

Si n ≡ 1[8], alors $\begin{cases} n+1 \equiv 2[8] \\ 5n-3 \equiv 2[8] \end{cases}$.

Si n ≡ 3[8], alors $\begin{cases} n+1 \equiv 4[8] \\ 5n-3 \equiv 4[8] \end{cases}$.

Si n ≡ 5[8], alors $\begin{cases} n+1 \equiv 6[8] \\ 5n-3 \equiv 6[8] \end{cases}$.

Si n ≡ 7[8], alors $\begin{cases} n+1 \equiv 0[8] \\ 5n-3 \equiv 0[8] \end{cases}$.

Or $\text{pgcd}(n + 1 , 5n - 3) = 8$ si et seulement si 8 divise n + 1 et 5n – 3.
D'après ce qui précède, on peut conclure que $\text{pgcd}(n + 1 , 5n - 3) = 8$ si et seulement si $n \equiv 7[8]$.
C'est-à-dire $n = 8h + 7$ avec h entier naturel quelconque.

Solution 61

1) *Le lecteur le vérifiera.*

2) $d = pgcd(x\ ,\ y)$. Donc d divise x et d divise y. Par conséquent, d divise $64x - (56k + 3)y$.
Or $64x - (56k + 3)y = 55$. On conclut alors que d divise 55.
D'où $d = 1$ ou $d = 5$ ou $d = 11$ ou $d = 55$.

3) **Montrons que d = 55 si et seulement si 55 divise y :**

- Supposons que $d = 55$.

Puisque $d = pgcd(x\ ,\ y)$, alors 55 divise x et 55 divise y. D'où 55 divise y.

- Réciproquement, supposons que 55 divise y.

Nous avons $64x = 55 + (56k + 3)y$.
Puisque 55 divise y, alors 55 divise $55 + (56 + 3k)y$; c'est-à-dire , 55 divise 64x.
Or 55 et 64 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss, 55 divise x et y, donc $55 \leq d$.
Or d'après la question 2), on a $d \leq 55$. D'où $d = 55$.
On conclut donc que $d = 55$ si et seulement si, 55 divise y.

Les valeurs de k :

55 divise y $\Leftrightarrow$ $y = 55h$ h appartenant à $\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ $8k + 3 = 55h$ h appartenant à $\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow$ $8k - 55h = -3$ h appartenant à $\mathbb{Z}$. (1)

La résolution de l'équation (1) nous amène à conclure que : $k = 55\alpha - 21$ et $h = 8\alpha - 3$, avec α dans $\mathbb{Z}$.
D'où $pgcd(x\ ,\ y) = 55$ si et seulement si $k = 55\alpha - 21$, avec α entier relatif.

Solution 62

1) Puisque $4 \equiv 4[7]$, $4^2 \equiv 2[7]$ et $4^3 \equiv 1[7]$, alors :
Si $n = 3k$, alors on a $4^n \equiv 1[7]$.
Si $n = 3k + 1$, alors on a $4^n \equiv 4[7]$.
Si $n = 3k + 2$, alors on a $4^n \equiv 2[7]$.

2) On a : $851 \equiv 4[7]$ donc $A \equiv 4^{3n} + 4^{2n} + 4^n + 2[7]$.
Si $n \equiv 3k$, alors $4^{3n} \equiv 1[7]$, $4^{2n} \equiv 1[7]$ et $4^n \equiv 1[7]$, donc $A \equiv 5[7]$.
Si $n \equiv 3k+1$, alors $4^{3n} \equiv 1[7]$, $4^{2n} \equiv 2[7]$ et $4^n \equiv 4[7]$, donc $A \equiv 2[7]$.
Si $n \equiv 3k+2$, alors $4^{3n} \equiv 1[7]$, $4^{2n} \equiv 4[7]$ et $4^n \equiv 2[7]$, donc $A \equiv 2[7]$.

3) On a : $B = \overline{2103211}^{\text{quatre}} = 2\times4^6 + 1\times4^5 + 3\times4^3 + 2\times4^2 + 1\times4 + 1$.
Donc $B \equiv 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 1[7]$. D'où $B \equiv 2[7]$.
Le reste de la division euclidienne de B par 7 est donc 2.

Solution 63

1) **Supposons que p divise $x^2 - x$, et montrons que p divise $x^n - x$.**
Pour $n = 1$, on a $x^1 - x = 0$ qui est divisible par $x^2 - x$.
Pour n entier naturel différent de 0 et 1, $x^2 - x = x(x-1)$ et $x^n - x = x(x-1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1)$.
D'où pour tout entier naturel non nul n, $x^2 - x$ divise $x^n - x$ et puisque p divise $x^2 - x$, alors p divise $x^n - x$.

2) $x^2 - x = x(x-1)$ est pair car x et $x - 1$ sont de parités contraires.
D'où $x^2 - x$ est divisible par 6 si et seulement si $x^2 - x$ est divisible par 3.
Or les restes possibles de la division euclidienne de x par 3 sont : 0, 1 et 2.
Si $x \equiv 0[3]$, alors $x^2 - x \equiv 0[3]$;
Si $x \equiv 1[3]$, alors $x^2 - x \equiv 0[3]$;
Si $x \equiv 2[3]$, alors $x^2 - x \equiv 2[3]$.
D'où 6 divise $x^2 - x$ si et seulement si, $x \equiv 0[3]$ ou $x \equiv 1[3]$.
Or si p divise $x^2 - x$, alors p divise $x^n - x$, pour tout entier naturel non nul n. Car $x^2 - x$ divise $x^n - x$.
Par contre, si $x \equiv 2[3]$, alors $x^2 - x$ n'est pas divisible par 6.
D'où il existe un entier naturel non nul n, tel que si $x \equiv 2[3]$, alors $x^n - x$ n'est pas divisible par 3.
D'où $x^n - x \equiv 0[3]$ pour tout entier naturel non nul si et seulement si, $x \equiv 0[3]$ ou $x \equiv 1[3]$.
Par conséquent, $x^n - x \equiv 0[6]$ si et seulement si $x = 3k$ ou $x = 3k + 1$; où k est un entier relatif.

Solution 64

1) Soit a un entier relatif.
Si a est pair, alors $a = 2k$ et $a^4 = 16k^4$. Alors $a^4 \equiv 0[16]$.

Si a est impair, alors $a = 4k + 1$ ou $a = 4k + 3$.

Pour $a = 4k + 1$, on a : $a^4 = 16(16k^4 + 16k^3 + 16k^2 + k) + 1$, donc $a^4 \equiv 1[16]$.

Pour $a = 4k + 3$, on a : $a^4 = 16(16k^4 + 48k^3 + 54k^2 + 27k + 5) + 1$, donc $a^4 \equiv 1[16]$.

D'où pour tout entier relatif a, on a : $a^4 \equiv 0[16]$ ou $a^4 \equiv 1[16]$.

2) d'après la question 1), toute puissance quatrième a pour reste 1 ou 0 dans la division euclidienne par 16.
Notons $a_1, a_2, ..., a_k$ (avec $k < 15$), k entiers relatifs.
Notons $r_1, r_2, ..., r_k$ les restes respectifs de la division euclidienne de $a_1^4, a_2^4, ..., a_k^4$ par 16.
Le reste de la division euclidienne de $a_1^4 + a_2^4 + ... + a_k^4$ par 16 est $r_1 + r_2 + ... + r_k$.
On a pour tout i appartenant à $\{1, 2, ..., k\}$, $r_i = 0$ ou $r_i = 1$.
C'est-à-dire $r_i \leq 1$ et donc $r_1 + r_2 + ... + r_k \leq k < 15$. Donc le reste de la division euclidienne de $a_1^4 + a_2^4 + ... + a_k^4$ par 16 est strictement inférieur à 15.
Or tous les nombres de la forme $16h + 15$, avec h appartenant à $\mathbb{N}$, ont pour reste 15 dans la division euclidienne par 16. Ils ne peuvent donc pas s'écrire comme somme de k puissances quatrièmes d'entiers.
On sait qu'il existe une infinité de nombres qui s'écrivent sous la forme $16h + 15$, avec h appartenant à $\mathbb{N}$.
Finalement, il existe une infinité d'entiers naturels qui ne sont pas somme de k puissances quatrième d'entiers.

Solution 65

Si a^2 divise b^2, alors il existe un entier naturel k tel que $b^2 = ka^2$ et k est un carré parfait car sinon $b = a\sqrt{k}$, avec $\sqrt{k}$ irrationnel. Ce qui est impossible.
Posons $k = q^2$, $b^2 = ka^2$ équivaut alors successivement à $b^2 = (qa)^2$, puis à $(b - qa)(b + qa) = 0$. a et b étant des entiers naturels non nuls, on a $b + qa$ non nul et donc $b - qa = 0$ soit $b = qa$. Ce qui prouve que a divise b.

Point méthode :
Notons que, si un entier naturel k n'est pas un carré parfait, alors sa racine carrée est un nombre irrationnel.

Solution 66

1) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car fonction polynôme et pour tout réel x, $f'(x) = 12x^2 + 2x + 1 > 0$.
D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty}, \lim_{x\to-\infty}\right[= \mathbb{R} \text{ et } 0 \text{ appartient à } \mathbb{R}.$$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
De plus, $f(0) = -3$ et $f(1) = 3$; alors, puisque $f(0)\times f(1) < 0$, on peut dire que α appartient à $]0 , 1[$.

2) • $\frac{p}{q}$ est solution de l'équation $f(x) = 0$ si et seulement si, $4\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} - 3 = 0$.

C'est-à-dire $4p^3 + p^2q + pq^2 - 3q^3 = 0$. On en déduit que : $\begin{cases} 4p^3 = q(-p^2 - pq + 3q^2) & (1) \\ \text{et} & \\ 3q^3 = p(4p^2 + pq + q^2) & (2) \end{cases}$

D'après l'égalité (2), p divise $3q^3$ et d'après l'égalité (1), q divise $4p^3$.
Or p et q sont premiers entre eux, alors p et q^3 d'une part, q et p^3 d'autre part, sont premiers entre eux.
D'où d'après le théorème Gauss, p divise 3 et q divise 4.

• **Les rationnels qui vérifient la dernière condition.**

p divise 3 et q divise 4, d'où p appartient à $\{-3, -1, 1, 3\}$ et q appartient à $\{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$.

D'où $\frac{p}{q}$ appartient à $\left\{-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 3\right\}$.

3) • D'après la question 1), la seule solution réelle de l'équation $f(x) = 0$ est dans l'intervalle $]0 , 1[$.

Ainsi, si cette solution est rationnelle, d'après la question précédente, alors elle appartient à $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$.

Or la seule valeur de cet ensemble vérifiant l'équation $f(x) = 0$ est $x = \frac{3}{4}$.

D'où la seule solution rationnelle de l'équation $f(x) = 0$ est $x = \frac{3}{4}$.

- Le lecteur résoudra cette équation qui a pour solution : $\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solution 67

1) $U_3 = 3$; $U_4 = 5$, $U_5 = 11$, $U_6 = 21$.

2) Soit P_n la propriété : « U_n est entier impair ».

$U_1 = 1$ et $U_2 = 1$ sont deux entiers impairs, d'où P_1 et P_2 sont vraies.

Supposons que P_n vrai, jusqu'à un certain rang $n \geq 2$. Montrons qu'alors P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que U_{n+1} est un entier impair.

On a $U_{n+1} = U_n + 2U_{n-1}$. Or $2U_{n-1}$ est un entier pair et U_n est un entier impair d'après l'hypothèse de récurrence.

Alors $U_{n+1} = U_n + 2U_{n-1}$ est un entier impair (somme d'un entier pair et d'un entier impair). D'où P_{n+1} est aussi vraie.

On peut alors dire d'après le principe de récurrence que U_n est un entier impair pour tout entier naturel non nul n.

3) • $U_1 = 1$ et $U_2 = 1$, d'où pgcd $(U_1 , U_2) = 1$.

Supposons pgcd$(U_n , U_{n+1}) = 1$ pour un entier naturel non nul n, montrons qu'alors on a : pgcd$(U_{n+1} , U_{n+2}) = 1$.

Il suffit de montrer que pgcd$(U_{n+1} , U_{n+2}) \leq 1$.

Soit δ = pgcd(U_{n+1} , U_{n+2}), δ divise U_{n+1} et δ divise U_{n+2}.

D'où δ divise toute combinaison linéaire de U_{n+1} et U_{n+2}

Or $U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n$, alors $2U_n = U_{n+2} - U_{n+1}$ et donc δ divise $2U_n$.

Puisque U_{n+1} est impair (d'après la question 2)), et δ divise U_{n+1}, alors δ est impair.

Par conséquent, δ et 2 sont premiers entre eux. Et donc d'après le théorème de Gauss, δ divise U_n.

On vient de montrer δ = pgcd(U_{n+1} , U_{n+2}) divise U_n et U_{n+1}.

D'où δ divise pgcd$(U_n , U_{n+1}) = 1$. D'où $\delta \leq 1$.

Or δ étant le pgcd (U_{n+1} , U_{n+2}), δ est un entier naturel non nul, c'est-à-dire $\delta \geq 1$.

Alors $1 \leq \delta \leq 1$, donc $\delta = 1$. Et par suite, pgcd$(U_{n+1} , U_{n+2}) = 1$.

On peut conclure d'après le principe du raisonnement par récurrence que, pgcd$(U_n , U_{n+1}) = 1$ pour tout entier naturel non nul.

• Notons d = pgcd(U_n , U_{n+2}). D'après ce qui précède, on a : pgcd$(U_n , U_{n+1}) = 1$

Or on a : $U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n$, ce qui implique que $U_{n+1} = U_{n+2} - 2U_n$.

Puisque d = pgcd (U_n , U_{n+2}) , alors d divise U_n et U_{n+2}.

D'où d divise toute combinaison linéaire de U_n et U_{n+2}. Donc d divise $U_{n+2} - 2U_n = U_{n+1}$.

On vient de montrer que d divise U_n et U_{n+1}. donc d $\leq$ pgcd$(U_n , U_{n+1}) = 1$ (d'après ce qui précède).

Or d est un entier naturel non nul, d'où $d \geq 1$. Dire que $1 \leq d \leq 1$ signifie d = 1. D'où pgcd$(U_n , U_{n+2}) = 1$.

Solution 68

1) a = 1×a + 0×b. D'où a appartient à E. Or a est non nul, alors il existe un entier naturel non nul dans E.

(Note : on pouvait plutôt écrire b = 0×a + 1×b, donc b appartient à E).

2)a) Soit m = kd, k appartenant à $\mathbb{Z}$.

Puisque d appartient à E, alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que d = ua + vb. Ainsi kd = (ku)a + (kv)b.

Or ku et kv sont des entiers relatifs, alors m appartient à E.

Par conséquent, tout multiple de d est élément de E.

b) soit z un élément de E.

Il existe deux entiers relatifs q et r tels que : $\begin{cases} z = dp + r \\ 0 \leq r < d \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} r = z - dq \\ 0 \leq r < d \end{cases}$.

Vérifions que si z_1 et z_2 appartiennent à E, alors $z_1 - z_2$ appartient à E :

$\begin{cases} z_1 = au_1 + bv_1 \\ z_2 = au_2 + bv_2 \end{cases}$ u_1, u_2, v_1 et v_2 étant des entiers relatifs, alors $z_1 - z_2 = a(u_1 - u_2) + b(v_1 - v_2)$.

D'où $z_1 - z_2$ appartient à E (car $u_1 - u_2$ et $v_1 - v_2$ sont dans $\mathbb{Z}$).

Puisque z et dq sont dans E (dq appartient à E car multiple de d), alors z – dq appartient à E, donc r appartient à E (car r = z – dq).

Ainsi on a $0 \leq r < d$ et d est le plus petit entier naturel non nul élément de E, alors r = 0.

Par conséquent, z = dq, donc z est multiple de d.

c) D'après les questions a) et b), z appartient à E signifie z = dq, où d est un entier relatif.

C'est-à-dire z appartient à E si et seulement si z appartient à $d\mathbb{Z}$. D'où $E = d\mathbb{Z}$.

3) Si δ divise a et b, alors δ divise toute combinaison linéaire de a et b.

D'où δ divise d (car d étant élément de E, d est une combinaison linéaire de a et b).
D'où $\delta \leq d$. C'est-à-dire, si δ divise a et b, alors δ est plus petit ou égal à d.
Réciproquement, d'après la question 1), a et b appartiennent à E. D'où a et b sont des multiples de d.
Donc d est un diviseur commun de a et b et d est plus grand que tous les diviseurs communs de a et b.
Donc d = pgcd(a , b).
4) L'ensemble des relatifs $z = 9801x + 11664y$ est l'ensemble des multiples du pgcd(9801 , 11664).
Or pgcd(9801 , 11664) = 81, alors E = {z élément de $\mathbb{Z}$; $z = 9801x + 11664y$, x et y appartenant à $\mathbb{Z}$ } = $81\mathbb{Z}$.

Solution 69

1) $(a+b)^7 = a^7 + b^7 + 7(a^6b + 3a^5b^2 + 5a^4b^3 + 5a^3b^4 + 3a^2b^5 + ab^6)$.
Puisque $7(a^6b + 3a^5b^2 + 5a^4b^3 + 5a^3b^4 + 3a^2b^5 + ab^6)$ est multiple de 7, alors $(a+b)^7 \equiv a^7 + b^7\ [7]$.
2) Supposons a + b multiple de 7. Alors $(a+b)^7$ est multiple de 7.
Or on a : $(a+b)^7 \equiv a^7 + b^7[7]$, alors comme $(a+b)^7 \equiv 0[7]$, on a aussi $a^7 + b^7 \equiv 0[7]$.
En conclusion, si $a + b \equiv 0[7]$, alors $a^7 + b^7 \equiv 0[7]$.
Réciproquement, supposons $a^7 + b^7 \equiv 0[7]$, alors puisque $(a+b)^7 \equiv a^7 + b^7[7]$, on peut écrire que $(a+b)^7 \equiv 0[7]$.
On en déduit que $a + b \equiv 0[7]$ (car 7 est un nombre premier)
D'où $a + b \equiv 0[7]$ si et seulement si $a^7 + b^7 \equiv 0[7]$.
3) $x^7 + 128 \equiv 0[7] \Leftrightarrow x^7 + 2^7 \equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow x + 2 \equiv 0[7]$ (d'après la question 2)

$\Leftrightarrow x = 7k - 2$, avec k appartenant à $\mathbb{Z}$.

Or on a ; $-10 \leq x \leq 10$. C'est-à-dire $-10 \leq 7k - 2 \leq 10$. C'est-à-dire $\frac{-8}{7} \leq k \leq \frac{12}{7}$.
Donc les valeurs de k sont : -1, 0 et 1.
Par conséquent, les valeurs possibles de x cherchées sont : -9, -2, 5.

Point méthode :
- *Si un nombre premier p divise un produit ab d'entiers, alors p divise a ou p divise b.*
- *En particulier, si p est premier et p divise a^n, alors p divise a.*

Solution 70

On a $m = 2^{2^n}$.
Reste de la division euclidienne par 5 de m :
On a : $2 \equiv 2[5]$; $2^2 \equiv 4[5]$; $2^3 \equiv 3[5]$; $2^4 \equiv 1[5]$. Et de façon générale :
Si $n \equiv 0[4]$, alors $2^n \equiv 1[5]$.
Si $n \equiv 1[4]$, alors $2^n \equiv 2[5]$.
Si $n \equiv 2[4]$, alors $2^n \equiv 4[5]$.
Si $n \equiv 3[4]$, alors $2^n \equiv 3[5]$.
Or on a : $2^n \equiv 0[4]$ si n > 1. Alors,

si n > 1, alors $2^{2^n} \equiv 1[5]$. Donc le reste de la division euclidienne de m par 5 est 1.

Si n = 1, alors $2^{2^n} = 2^2 = 4$ et par suite, $2^{2^n} \equiv 4[5]$. Donc le reste de la division euclidienne de m par 5 est 4.

Si n = 0, alors $2^{2^0} = 2^1 = 2$ et par suite, $2^{2^0} \equiv 2[5]$. Donc le reste de la division euclidienne de m par 5 est 2.

Solution 71

Soit a un entier relatif, les restes possibles dans la division euclidienne de a par 4 sont : 0, 1, 2, 3.
Si a = 4k, alors on a : $a^2 = 16k^2$, d'où $a^2 \equiv 0[8]$.
Si a = 4k + 1, alors on a : $a^2 = 8(2k^2 + k) + 1$, d'où $a^2 \equiv 1[8]$.
si a = 4k + 2, alors on a : $a^2 = 8(2k^2 + 2k) + 4$, d'où $a^2 \equiv 4[8]$.
si a = 4k + 3, alors on a : $a^2 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1$, d'où $a^2 \equiv 1[8]$.
D'où les restes possibles d'un carré dans la division par 8 sont : 0, 1 et 4.
Donc, les restes possibles dans la division euclidienne par 8 de la somme de trois carrés sont : 0,1, 2, 3, 4, 5 et 6.
D'où le reste de la division euclidienne de la somme de trois carrés par 8, ne peut être 7.
C'est-à-dire, pour trois entiers relatifs x, y et z, $x^2 + y^2 + z^2$ ne peut avoir pour reste 7 dans la division par 8.
D'où il n'existe pas un quatrième entier relatif k tel que $x^2 + y^2 + z^2 = 8k + 7$.

Solution 72

1)a) Si a = 0, alors $\overline{bcd0} = 10^3b + 10^2c + 10d = 10(10^2b + 10c + d) = 10\overline{0bcd} = 10N$.

Puisque 7 divise $\overline{bcd0}$, alors 7 divise 10N.
Or 7 et 10 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss, 7 divise N.
Si a = 7,

$$\begin{aligned}\overline{bcd7} &= 10(10^2b + 10c + d) + 7\\ &= 10(7\times10^3 + b\times10^2 + c\times10 + d - 7\times10^3) + 7\\ &= 10(7\times10^3 + b\times10^2 + c\times10 + d) - 7\times10^4 + 7\\ &= 10N - 7(10^4 - 1).\end{aligned}$$

D'où $10N = \overline{bcd7} + 7(10^4 - 1) = \overline{bcd7} + 7\times9999$.

Or 7 divise $\overline{bcd7}$ (d'après l'énoncé) et 7 divise 7×9999, alors 7 divise $10N = \overline{bcd7} + 7\times9999$.

Or 7 et 10 sont premiers entre eux, d'où 7 divise N.

b) • $10N - 3a = 10^4a + (10^3b + 10^2c + 10d) - 3a = (10^4 - 4)a + (10^3b + 10^2c + 10d + a) = 9996a + \overline{bcda}$.

Or $9996 \equiv 0[7]$ et $\overline{bcda} \equiv 0[7]$ (d'après l'énoncé), alors $10N - 3a = 9996a + \overline{bcda}$ est divisible par 7.

On conclut donc que $10N - 3a$ est divisible par 7.

• Posons $M = 10N - 3a$, c'est-à-dire, $3a = 10N - M$.

On a $N \equiv 0[7]$ et $M \equiv 0[7]$, d'où $3a = 10N - M \equiv 0[7]$. D'où 7 divise 3a.
Or pgcd(7 , 3) = 1, alors d'après le théorème de Gauss, 7 divise a qui appartient à {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.
D'où a = 0 ou a = 7. Donc si N est divisible par 7, alors a = 0 ou a = 7.
2) Pour a = 7, b = d, c = 0.
Déterminons N pour qu'il soit divisible par 3 :

$$\begin{aligned}N \text{ est divisible par } 3 &\Leftrightarrow a + b + c + d \equiv 0[3]\\ &\Leftrightarrow 2b + 7 \equiv 0[3]\\ &\Leftrightarrow 2b + 1 \equiv 0[3]\\ &\Leftrightarrow b = 1 \text{ ou } b = 4 \text{ ou } b = 7. \text{ (car b appartient à } \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})\end{aligned}$$

Pour b = 1, on a $\overline{bcda} = 1017 \equiv 2[7]$.

Pour b = 4, on a $\overline{bcda} = 4047 \equiv 1[7]$.

Pour b = 7, on a $\overline{bcda} = 7077 \equiv 0[7]$.

D'où N = 7077 puisque par hypothèse, on a $\overline{bcda} \equiv 0[7]$.

Solution 73

1) Soit n entier naturel, $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$ et $A_{n+3} = 2^3\times2^n + 2^6\times2^{2n} + 2^9\times2^{3n}$.
Or on a : $2^3 \equiv 1[7]$, donc $2^n.2^3 \equiv 2^n[7]$.
$2^6 \equiv 1[7]$, donc $2^{2n}.2^6 \equiv 2^{2n}[7]$.
$2^9 \equiv 1[7]$, donc $2^{3n}.2^9 \equiv 2^{3n}[7]$.
D'où $2^n.2^3 + 2^{2n}.2^6 + 2^{3n}.2^9 \equiv 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$ [7]. On en déduit que $A_{n+3} \equiv A_n[7]$.
2) On a : $A_0 = 3 \equiv 3[7]$, $A_1 = 14 \equiv 0[7]$ et $A_2 = 84 \equiv 0[7]$.
D'où soit k entier naturel, d'après la question 1), on a : $A_{3k} \equiv 3[7]$, $A_{3k+1} \equiv 0[7]$ et $A_{3k+2} \equiv 0[7]$.
D'où $A_n \equiv 0[7]$ si et seulement si n = 3k + 1 ou n = 3k + 2 pour tout k entier naturel.

3) $a = \overline{1110}^{deux} = 2 + 2^2 + 2^3 = A_1$, donc $A_1 \equiv 0[7]$.

$b = \overline{1010100}^{deux} = 2^2 + 2^4 + 2^6 = A_2$, donc $A_2 \equiv 0[7]$.

$c = \overline{1001001000}^{deux} = 2^3 + 2^6 + 2^9 = A_3$, donc $A_3 \equiv 3[7]$.

a et b sont divisibles par 7 et c ne l'est pas.

Solution 74

1) Les diviseurs positifs de 72 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.
2) • $p^2 - 6p - 63 = (p - 3)^2 - 72$.
• **Les couples (p , q) d'entiers naturels solutions de l'équation : $p^2 - 6p - 63 = q^2$:**
$p^2 - 6p - 63 = q^2 \Leftrightarrow (p - 3)^2 - 72 = q^2 \Leftrightarrow (p - q - 3)(p + q - 3) = 72$.
On peut remarquer que : $p - q - 3 \leq p + q - 3$ d'une part, $p - q - 3$ et $p + q - 3$ sont deux diviseurs de 72, dont le produit est 72 d'autre part. Ainsi,

$(p-q-3)(p+q-3)=72 \Leftrightarrow (p-q-3,\ p+q-3)\in\{(1,72),(2,36),(3,24),(4,18),(6,12),(8,9)\}$

$\Leftrightarrow (p-q,\ p+q)\in\{(4,75),(5,39),(6,27),(7,21),(9,15),(11,12)\}$

$\Leftrightarrow (2p,\ 2q)\in\{(44,34),(28,14),(24,6)\}$, car p et $q \in \mathbb{N}$.

$\Leftrightarrow (p,q)\in\{(22,17),(14,7),(12,3)\}$.

D'où les couples (p, q) cherchés sont : $(22, 17)$, $(14, 7)$, $(12, 3)$.

Solution 75

1)a) $a_1 = 39$, $a_2 = 399$, $a_3 = 3999$.
$b_1 = 19$, $b_2 = 199$, $b_3 = 1999$
$c_1 = 21$, $c_2 = 201$, $c_3 = 2001$.

> **Point méthode :**
> *D'après le théorème ci-contre, l'entier b_3 est premier si tout nombre premier positif dont le carré est inférieur ou égal à b_3 ne peut être un diviseur de b_3.*

b) On a : $10 \equiv 1[3]$, d'où soit n un entier naturel, on a $10^n \equiv 1[3]$.
Donc on a : $4\times10^n \equiv 1[3]$ et $2\times10^n \equiv 2[3]$.
Et par suite, $4\times10^n - 1 \equiv 0[3]$ et $2\times10^n + 1 \equiv 0[3]$.
D'où a_n et c_n sont multiples de 3.

c) Enoncé d'un théorème qui nous sera utile :

Théorème :

Soit a un entier relatif quelconque non premier et distinct de 1 et de -1.

L'entier a admet au moins un diviseur positif p premier tel que l'on ait : $p^2 \le |a|$.

En effet les nombres premiers dont le carré est inférieur ou égal à b_3 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 et 43. Or aucun de ces nombres ne divise 1999, alors b_3 est premier.

d) $b_n\times c_n = (2\times10^n - 1)(2\times10^n + 1) = (2\times10^n)^2 - 1 = 4\times10^{2n} - 1 = a_{2n}$. D'où $b_n\times c_n = a_{2n}$.

Décomposition de a_6 en produit de facteurs premiers :

$a_6 = b_3\times c_3 = 1999\times2001$. Or $2001 = 3\times23\times29$ et b_3 est premier. D'où $a_6 = 3\times23\times29\times1999$.

e) • Posons $d_n = \text{pgcd}(b_n, c_n)$ et $\delta_n = \text{pgcd}(b_n, 2)$.

$d_n = \text{pgcd}(b_n, c_n) \Rightarrow d_n$ divise b_n et d_n divise c_n
$\Rightarrow d_n$ divise b_n et d_n divise $c_n - b_n$
$\Rightarrow d_n$ divise b_n et d_n divise 2
$\Rightarrow d_n$ divise $\text{pgcd}(b_n, 2)$
$\Rightarrow d_n \le \delta_n$.

De même $\delta_n = \text{pgcd}(b_n, 2) \Rightarrow \delta_n$ divise b_n et δ_n divise 2
$\Rightarrow \delta_n$ divise b_n et δ_n divise $b_n + 2$
$\Rightarrow \delta_n$ divise b_n et δ_n divise c_n
$\Rightarrow \delta_n$ divise $\text{pgcd}(b_n, c_n)$
$\Rightarrow \delta_n \le d_n$.

Puisque $\delta_n \le d_n$ et $d_n \le \delta_n$, alors $\delta_n = d_n$. D'où $\text{pgcd}(b_n, c_n) = \text{pgcd}(b_n, 2)$.

• b_n étant impair, b_n et 2 sont premiers entre eux, donc $\text{pgcd}(b_n, 2) = 1$.

Puisque $\text{pgcd}(b_n, c_n) = \text{pgcd}\ \text{pgcd}(b_n, 2)$, alors $\text{pgcd}(b_n, c_n) = 1$. D'où b_n et c_n sont premiers entre eux.

2)a) Soit (E) : $b_3x + c_3y = 1$.
D'après la question 1)e), b_3 et c_3 sont premiers entre eux.
D'après l'identité de Bézout, il existe au moins un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que : $b_3u + c_3v = 1$.
D'où l'équation (E) admet au moins une solution.

b) $2001 = 1999\times1 + 2$
$1999 = 999\times2 + 1$

Donc $1 = 1999 - 999\times2$
$= 1999 - 999\times(2001 - 1999)$
$= -999\times2001 + 1000\times1999$. D'où $1000b_3 + (-999)c_3 = 1$.

Une solution particulière de (E) est donc le couple : $(1000, -999)$.

c) La résolution de (E), donne pour ensemble solution :

$S = \{(c_3k + 1000,\ -b_3k - 999),\ k \text{ appartenant à } \mathbb{Z}\}$.

Exercice 76

1)a) Soit P_n la proposition : « $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$ ».

Pour n = 2 :

Le membre de gauche : $a^2 - b^2$ et le membre de droite : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. D'où P_2 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel n strictement supérieur à 1, montrons alors que P_{n+1} est vraie (c'est-à-dire $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + b^n)$) :

$$\begin{aligned}(a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + b^n) &= (a-b)[a^n + b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})]\\ &= a^n(a-b) + b(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})\\ &= a^n(a-b) + b(a^n - b^n) \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence).}\\ &= a^{n+1} - a^n b + ba^n - b^{n+1}\\ &= a^{n+1} - b^{n+1}.\end{aligned}$$

D'où P_{n+1} est vraie.

D'où, pour tous réels a et b, et pour tout entier naturel $n > 1$, $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$.

b) $2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)[(2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \dots + 1]$.

De même, on a : $2^{pq} - 1 = (2^q - 1)[(2^q)^{p-1} + (2^q)^{q-2} + \dots + 1]$. D'où $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et $2^q - 1$.

2)a) Supposons que n n'appartient pas à P.

On a alors $n = pq$ avec p et q entiers naturels différents de 0 et de 1.

Ainsi $2^n - 1 = 2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et $2^q - 1$.

Puisque $p > 1$ et $q > 1$, alors $2^p - 1$ et $2^q - 1$ sont strictement supérieur à 1. D'où $2^n - 1$ n'est pas premier.

Conclusion, si $2^n - 1$ appartient à P, alors n appartient à P.

b) on a : $2 \equiv 2[23]$, $2^2 \equiv 4[23]$, $2^3 \equiv 8[23]$, $2^4 \equiv 16[23]$, $2^5 \equiv 9[23]$, $2^6 \equiv 18[23]$, $2^7 \equiv 13[23]$, $2^8 \equiv 3[23]$, $2^9 \equiv 6[23]$, $2^{10} \equiv 12[23]$ et $2^{11} \equiv 1[23]$. D'où $2^{11} \equiv 1[23]$.

c) La réciproque est fausse, car 11 est premier ; or $2^{11} - 1 \equiv 0[23]$ d'après la question 2)b).

D'où n appartient à P n'implique pas que $2^n - 1$ appartient à P.

Solution 77

1)a) Par exemple (-1 , 1) est un couple solution de l'équation $6x + 7y = 1$.

b) On a : $6\times(-1) + 7\times1 = 1$. D'où $6\times(-57) + 7\times57 = 57$.

Alors : $6x + 7y = 57 \Leftrightarrow 6x + 7y = 6\times(-57) + 7\times57 \Leftrightarrow 6(x+57) = 7(57-y)$

D'où 6 divise $57 - y$ et 7 divise $x + 57$ (car pgcd(6 , 7) = 1). D'où

$$6(x+57) = 7(57-y) \Leftrightarrow \frac{x+57}{7} = \frac{57-y}{6} = k,\ k \text{ appartenant à } \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow x = 7k - 57 \text{ et } y = -6k + 57, \text{ avec } k \text{ appartenant à } \mathbb{Z}.$$

D'où les couples solutions de l'équation (E) sont les couples : $(7k - 57 , -6k + 57)$, avec k entier relatif.

2) (a_n) est une suite arithmétique de raison 6 et de premier terme -25.

D'où $a_n = 6n - 25$, pour tout entier naturel n.

De même $b_n = 7n - 32$, pour tout entier naturel n.

Or $a_p = -b_q \Leftrightarrow 6p - 25 = -7q + 32 \Leftrightarrow 6p + 7q = 57$.

D'après la question 1)b), on a : $p = 7k - 57$ et $q = -6k + 57$, k appartenant à $\mathbb{Z}$.

Or on a : $0 \le p < 15$ et $0 \le q < 15$. C'est-à-dire $0 \le 7k - 57 < 15$ et $0 \le -6k + 57 < 15$.

Ce qui équivaut à $\frac{57}{7} \le k < \frac{72}{7}$ et $7 < k \le \frac{57}{6}$. On déduit alors que $\frac{57}{7} \le k < \frac{57}{6}$.

On obtient alors k = 9. Par suite, p = 6 et q = 3. D'où le couple (p , q) cherché est (6 , 3).

3) $M(x , y , z)$ appartient à $(P)\cap(O ; \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 7y + 8z = 57 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 7y = 57 \\ z = 0 \end{cases}$.

Ce qui amène à résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation $6x + 7y = 57$.

D'après 1)b), on aura : $x = 7k - 57$ et $y = -6k + 57$, k appartenant à $\mathbb{Z}$.

Or on a : $x \ge 0$ et $y \ge 0$. Ce qui équivaut à : $7k - 57 \ge 0$ et $-6k + 57 \ge 0$. D'où $\frac{57}{7} \le k < \frac{57}{6}$.

On en déduit que k = 9. Et donc x = 6 et y = 3.

En conclusion, il existe un unique point, donc les coordonnées sont des entiers naturels, commun aux plans (P) et $(O ; \vec{i}, \vec{j})$: c'est le point A(6 , 3 , 0).

Solution 78

1) $n^2 + 5n + 4 = (n+1)(n+4)$ et $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$. D'où n + 1 divise $n^2 + 5n + 2$ et $n^2 + 3n + 2$.

2) $\frac{3n^2 + 15n + 9}{n+1} = 3n + 12 - \frac{3}{n+1}$.

$n + 1$ divise $3n^2 + 15n + 9 \Leftrightarrow n + 1$ divise $3 \Leftrightarrow n + 1$ appartient à $\{-3, -1, 1, 3\} \Leftrightarrow n$ appartient à $\{-4, -2, 0, 2\}$
D'où les entiers naturels n pour lesquels $n + 1$ divise $3n^2 + 15n + 9$ sont 0 et 2.

3) Soit n un entier naturel.
Comme $n + 1$ divise $n^2 + 3n + 2$, alors (si $n^2 + 3n + 2$ divise $3n^2 + 15n + 9$, alors $n + 1$ divise $3n^2 + 15n + 9$).
Or $n + 1$ divise $n^2 + 3n + 2$, si et seulement si n appartient à $\{0, 2\}$ (d'après la question 2)).
Pour n = 0 : $n^2 + 3n + 2 = 2$, $3n^2 + 15n + 9 = 9$ mais 2 ne divise pas 9.
Pour n = 2 : $n^2 + 3n + 2 = 12$, $3n^2 + 15n + 9 = 51$, mais 12 ne divise pas 51.
D'où il n'existe pas d'entier naturel n pour lequel $n^2 + 3n + 2$ divise $3n^2 + 15n + 9$.

Solution 79

1) $(2n + 1) - 2n = 1$, d'où d'après la réciproque de l'identité de Bézout, on a $\text{pgcd}(2n + 1, 2n) = 1$.
D'où $2n + 1$ et $2n$ sont premiers entre eux.

2)a) • $2\alpha - \beta = 5$.

• **Valeurs possibles de δ :**

$\delta = \text{pgcd}(\alpha, \beta)$, donc δ divise α et δ divise β. Donc δ divise $2\alpha - \beta$. **Donc** δ divise 5. Par conséquent, $\delta = 1$ ou $\delta = 5$.
D'où les valeurs possibles de δ sont 1 et 5.

b) Démontrons que α et β sont multiples de 5 si et seulement si, n – 2 est multiple de 5.

• Supposons que α et β sont multiples de 5.
Alors $\beta - \alpha$ est multiple de 5. C'est-à-dire $n - 2$ est un multiple de 5.

• Réciproquement, Supposons que $n - 2$ est un multiple de 5.
Alors $(n - 2) + 5$ et $2(n - 2) + 5$ sont aussi des multiples de 5. C'est-à-dire $n + 3$ et $2n + 1$ sont des multiples de 5. D'où α et β sont aussi des multiples de 5.
On peut alors conclure que α et β sont multiples de 5, si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.

3) $a = n(n - 1)(n + 3)$ et $b = (2n + 1)(n - 1)$. D'où a et b sont divisibles par $n - 1$.

4)a) On note $\text{pgcd}(n(n + 3), 2n + 1) = d$.

• Montrons que δ divise d :

$$\begin{aligned}\delta = \text{pgcd}(\alpha, \beta) &\Rightarrow \delta \text{ divise } n + 3 \text{ et } \delta \text{ divise } 2n + 1\\ &\Rightarrow \delta \text{ divise } n(n + 3) \text{ et } \delta \text{ divise } 2n + 1\\ &\Rightarrow \delta \text{ divise pgcd}(n(n + 3), 2n + 1)\\ &\Rightarrow \delta \text{ divise } d.\end{aligned}$$

D'où δ divise d.

• Montrons que $d = \delta$:

Puisque δ divise d, alors on a : $\delta \le d$.

• Il suffit de montrer que $d \le \delta$.

$d = \text{pgcd}(n(n + 3), 2n + 1)$, donc d divise $n(n + 3)$ et d divise $2n + 1$.
Or $\text{pgcd}(2n + 1, n) = 1$, ainsi, puisque d divise $2n + 1$ et $n(n + 3)$, alors d divise $n + 3$ (d et n seront aussi premiers entre eux). D'où d divise $2n + 1$ et $n + 3$.
Par conséquent d divise $\text{pgcd}(2n + 1, n + 3) = \delta$. Et par conséquent, $d \le \delta$.
Comme $d \le \delta$ et $\delta \le d$, alors on peut conclure que $d = \delta$.

b) $\Delta = \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(n(n - 1)(n + 3), (2n + 1)(n - 1)) = (n - 1)\text{pgcd}(n(n + 3), 2n + 1) = (n - 1)d = (n - 1)\delta$ car $d = \delta = \text{pgcd}(\alpha, \beta)$.
Or les valeurs possibles de δ sont 1 et 5.

$$\begin{aligned}\text{Et } \delta = 5 &\Leftrightarrow \alpha \text{ et } \beta \text{ sont multiples de 5 (car 5 est la plus grande valeur possible de } \delta)\\ &\Leftrightarrow 5 \text{ divise } n - 2 \text{ (d'après la question 2)b))}\\ &\Leftrightarrow n - 2 \equiv 0[5].\\ &\Leftrightarrow n \equiv 2[5]\\ &\Leftrightarrow n = 5k + 2, \text{ où k est un entier naturel.}\end{aligned}$$

D'où : **si n = 5k + 2,** alors $\delta = 5$ donc $\text{pgcd}(a, b) = 5(n - 1)$.
si n ≠ 5k + 2, alors $\delta = 1$ donc $\text{pgcd}(a, b) = n - 1$.

c) Pour n = 2001, on a $2001 = 5\times500 + 1$, alors d'après la question précédente, $\Delta = 2000$.
Pour n = 2002, on a $2002 = 5\times500 + 2$, alors d'après la question précédente, $\Delta = 5\times2000 = 10.000$.

Solution 80

• Posons $c = a + b$, $\delta = \text{pgcd}(a, b)$ et $\Delta = \text{pgcd}(a + b, b)$.
δ divise a et δ divise b. Donc δ divise $a + b$ et δ divise b. Donc δ divise $\text{pgcd}(a + b, b) = \Delta$.

On en déduit alors que $\delta \leq \Delta$ (1)
Réciproquement, Δ divise a + b = c et Δ divise b, donc Δ divise c – b et Δ divise b. Donc Δ divise a et Δ divise b.
D'où Δ divise pgcd(a , b). Finalement on a, $\Delta \leq \delta$ (2)
Des inégalités (1) et (2) on déduit que $\Delta = \delta$. D'où pgcd(a , b) = pgcd(a + b , b).

- Posons δ = pgcd(a , b) et d = pgcd(ka , kb). Démontrons que d = kδ, c'est-à-dire $d\mathbb{Z} = (k\delta)\mathbb{Z}$.

Des définitions de d et de δ, il résulte les égalités : $\delta\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ et $d\mathbb{Z} = (ka)\mathbb{Z} + (kb)\mathbb{Z}$.

Soit x un élément quelconque de $d\mathbb{Z}$.

x appartient à $d\mathbb{Z}$, donc il existe deux entiers relatifs u et v tels que , x = (ka)u + (kb)v. Donc il existe deux entiers relatifs u et v tels que x = k(au + bv).
L'entier au + bv appartient à $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, donc appartient à $\delta\mathbb{Z}$.
Il existe donc un entier relatif w tel que au + bv = δw.
On vient donc de montrer que : si x appartient à $d\mathbb{Z}$, alors il existe un entier relatif w tel que x = kδw = (kδ)w.
Donc x appartient à $(k\delta)\mathbb{Z}$.
On vient de montrer que tout élément x de $d\mathbb{Z}$ est aussi élément de $(k\delta)\mathbb{Z}$. C'est-à-dire $d\mathbb{Z} \subset (k\delta)\mathbb{Z}$.
Réciproquement :
Soit x appartenant à $(k\delta)\mathbb{Z}$, il existe un entier relatif w tel que x = (kδ)w.
Or δ appartient à $\delta\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, alors il existe u et v entiers relatifs tels que δ = au + bv. Alors :
x appartient à $(k\delta)\mathbb{Z}$, donc il existe u, v et w entiers relatifs tels que x = kw(au + bv). Donc il existe u, v et w entiers relatifs tels que x = (ka)(uw) + (kb)(vw). Donc il existe u' et v' entiers relatifs tels que x = (ka)u' + (kb)v', (u' = uw et v' = vw appartiennent à $\mathbb{Z}$). Donc x appartient à $d\mathbb{Z}$.
On en déduit que $(k\delta)\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$.
Puisque $d\mathbb{Z} \subset (k\delta)\mathbb{Z}$ et $(k\delta)\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$, alors $(k\delta)\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. D'où d = k$\delta$, c'est-à-dire pgcd(ka , kb) = k×pgcd(a , b).

Solution 81

1)a)
$$\begin{aligned} 8 &= 5\times1 + 3 \\ 5 &= 3\times1 + 2 \\ 3 &= 2\times1 + 1 \end{aligned} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{aligned} 1 &= 3 - 2\times1 \\ &= 3 - (5 - 3\times1) \\ &= -5 + 2\times3 \\ &= -5 + 2(8 - 5\times1) \\ &= 2\times8 - 3\times5. \end{aligned}$$

Puisque 8×2 + 5×(-3) = 1, alors un couple solution de (E) est (2 , -3).
b) On a après résolution : x = 5k + 2 et y = -8k – 3, avec k appartenant à $\mathbb{Z}$. ***(Le lecteur fera les calculs).***

2)a) On a : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$. Ce qui implique que 8a + 1 = 5b + 2. Donc 8a – 5b = 1. C'est-à-dire 8a + 5(-b) = 1.
D'où (a , -b) est solution de (E).
b) (a , -b) est solution de (E), d'où a et – b sont sous la forme : a = 5k + 2 et -b = -8k – 3, avec k appartient à $\mathbb{Z}$.
D'où N = 8(5k + 2) + 1 = 40k + 17.
D'où N ≡ 17[40]. Par conséquent, le reste de la division euclidienne de N par 40 est 17.
3)a) On a d'après la question 1)a) : 2×8 – 3×5 = 1, d'où 200×8 + (-300)×5 = 100.
D'où un couple solution particulier de (E') est (200 , -300).
La solution générale de (E') est donc :
(5k + 200 , -8k – 300), k étant un entier relatif quelconque. ***(Le lecteur prendra la peine de résoudre l'équation)***
b) Soit x le nombre d'hommes et y le nombre de femmes. x et y sont des entiers naturels non nuls.
En traduisant l'énoncé, on aura : 8x + 5y = 100.
D'où x = 5k + 200 et y = -8k – 300, avec k appartenant à $\mathbb{Z}$. (D'après la question 3)a)).
Or on doit avoir x > 0 et y > 0.

Et $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5k + 200 > 0 \\ -8k - 300 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -40 \\ k < -37,5 \end{cases} \Leftrightarrow -40 < k < -37,5.$

k peut donc prendre les valeurs : -39, -38.
Pour k = -39, x = 5 et y = 12.
Pour k = -38, x = 10 et y = 4.
On pouvait y avoir 5 hommes et 12 femmes, ou alors 10 hommes et 4 femmes.

Solution 82

1) $p^2 - 2q^2 = 1$ si et seulement si, $p^2 = 1 + 2q^2$.
Or $2q^2$ est pair, c'est-à-dire $1 + 2q^2$ est impair. D'où p^2 est impair.
Supposons p pair, alors $p = 2k$ où k est un entier naturel. Par suite, on aurait $p^2 = 4k^2$, qui est un nombre pair.
Donc le carré d'un entier n'est impair que si cet entier est impair. D'où p est impair

2) $p^2 - 2q^2 = 1 \Leftrightarrow 2q^2 = (p - 1)(p + 1)$.
p étant impair, $p - 1$ et $p + 1$ sont pairs. D'où $2q^2$ est multiple de 4.
Par conséquent, 2 divise q^2. Or 2 est premier, donc 2 divise q. D'où q est pair.

Solution 83

1)a) (x_0, y_0) est solution de (E), d'où $ax_0 + by_0 = 60$.
Or d divise a et d divise b, alors d divise $ax_0 + by_0$. D'où d divise 60.

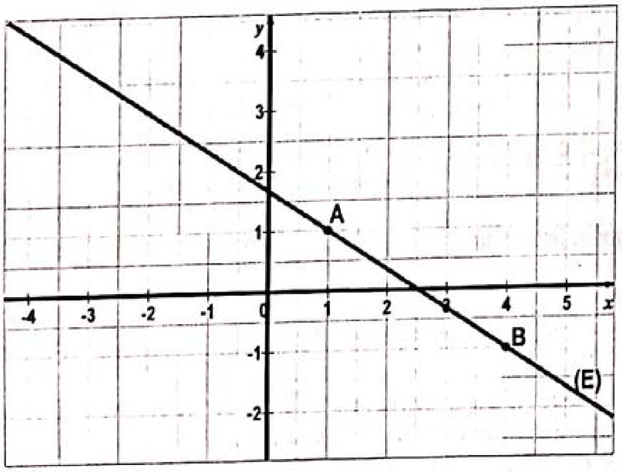
b) d = pgcd(a , b), d'où il existe un couple (u , v) d'entiers relatifs tels que : $au + bv = d$.
Or d divise 60, alors il existe k entier non nul tel que $60 = kd$. Donc :
$au + bv = d \Leftrightarrow k(au + bv) = kd \Leftrightarrow a(ku) + b(kv) = 60 \Leftrightarrow$ (ku , kv) est solution de (1).
D'où l'équation (1) admet au moins un couple solution, qui est le couple (ku , kv).

2)a) • $24 = 3\times2^3$ et $36 = 2^2\times3^3$. D'où pgcd(24 , 36) = $2^2\times3 = 12$.
• On a $24x + 36y = 60 \Leftrightarrow 2x + 3y = 5$.

b) • Un couple solution de (2) est : (1 , 1).
• Résolution de (2) :
La résolution de (2) donne comme ensemble solution $S = \{(3k + 1, 1- 2k), k$ appartient à $\mathbb{Z}\}$. ***(Le lecteur fera la résolution de l'équation).***

c) • **Les couples solutions tels que : $-10 \leq x \leq 10$**
Or $-10 \leq x \leq 10 \Leftrightarrow -\frac{11}{3} \leq k \leq 3$. D'où k prend les valeurs : -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.
Et les couples solutions de (E) cherchés sont : (- 8 , 7), (-5 , 5), (-2 , 3), (1 , 1), (4 , -1), (7 , -3), (10 , -5).
• Ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5 sont : (-5 , 5) et (10 , -5).

d) (E) est la droite (AB).



e) • (E) est la droite d'équation $2x + 3y = 5$.
(a , b) est solution de (2) si et seulement si $2a + 3b = 5$; c'est-à-dire le point M(a , b) appartient à (E).
D'où les points du plan, de coordonnées les couples solutions (x , y) de (2) appartiennent à (E).
• S est l'ensemble des couples de coordonnées des points de (E) ayant des coordonnées entières.

Solution 84

1) Soit α et β deux nombres entiers.
Si $\alpha = 2k$ et $\beta = 2k'$: k et k' appartiennent à $\mathbb{Z}$. Alors $\alpha - \beta = 2(k - k')$ et $\alpha + \beta = 2(k + k')$ sont pairs.
Si $\alpha = 2k$ et $\beta = 2k' + 1$: k et k' appartiennent à $\mathbb{Z}$.
Alors $\alpha - \beta = 2(k - k' - 1) + 1$ et $\alpha + \beta = 2(k + k') + 1$ sont impairs.
Si $\alpha = 2k + 1$ et $\beta = 2k'$: k et k' appartiennent à $\mathbb{Z}$.
Alors $\alpha - \beta = 2(k - k') +1$ et $\alpha + \beta = 2(k + k') + 1$ sont impairs.
Si $\alpha = 2k + 1$ et $\beta = 2k' + 1$: k et k' appartiennent à $\mathbb{Z}$.

Alors $\alpha - \beta = 2(k - k')$ et $\alpha + \beta = 2(k + k' + 1)$ sont pairs.

En conclusion $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ ont la même parité pour tous nombres entiers α et β.

2) • y appartient à $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $\Leftrightarrow$ $3y + 2$ appartient à $\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26\}$.

D'où $G = \{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26\}$.

• x appartient à $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $\Leftrightarrow$ $3x - 1$ appartient à $\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23\}$.

D'où $H = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23\}$.

3) $x' - y' = (3y + 2) - (3x - 1) = 3(y - x + 1)$. D'où $x' - y'$ est un multiple de 3.

4)a) $(x' - y')(x' + y')$ est un multiple de 60. D'où $(x' - y')(x' + y')$ est pair.

Ainsi l'un au moins des nombres $x' - y'$ ou $x' + y'$ est pair.

Or $x' - y'$ et $x' + y'$ ont la même parité, d'où $x' - y'$ et $x' + y'$ sont pairs. D'où 2 divise $x' - y'$.

Puisque de plus, 3 divise $x' - y'$ d'après la question 3), et 2 et 3 sont premiers entre eux, alors 6 divise $x' - y'$.

D'où $x' - y'$ est un multiple de 6.

b) Si $x' - y'$ est multiple de 60, alors $|x' - y'|$ est supérieur ou égal à 60, ou $x' - y'$ est nul.

- $x' - y'$ est différent de 0, car $m \neq 0$.
- Si $x' - y' \geq 60$ alors $x' \geq 60$ (x' et y' étant positifs). Ce qui est impossible car $x' \leq 26$.
- Si $x' - y' \leq -60$, alors $x' \leq -60 + y'$. Et comme on a $y' \leq 23$, alors $x' \leq -37$. Ce qui est impossible car $x' \geq 5$.

Or la plus grande valeur possible de x' est 26. D'où $x' - y'$ ne peut être un multiple de 60.

c) • $x' - y'$ étant pair, $x' + y'$ l'est aussi.

• $(x' - y')(x' + y')$ étant divisible par 60, est divisible par 5.

Or 5 est premier, donc 5 divise $x' - y'$ ou 5 divise $x' + y'$.

Si 5 divise $x' - y'$, alors $x' - y'$ est un multiple de 30 (puisque 6 divise $x' - y'$, et 5 et 6 sont premiers entre eux).

Ce qui est impossible, car sinon, on aurait $x' - y' \geq 30$ ou $x' - y' \leq -30$. Donc $x' \geq 30$ ou $x' \leq -7$.

(Ce qui est impossible car $5 \leq x' \leq 26$). D'où 5 ne divise pas $x' - y'$. Par conséquent, 5 divise $x' + y'$.

$x' + y'$ est multiple de 2 et 5, et $\text{pgcd}(2, 5) = 1$. D'où $x' + y'$ est multiple de 10.

5) Dressons le tableau ressortant les valeurs de $x' - y'$:

$x'-y'$	2	5	8	11	14	17	20	23
5	3	0	-3	-6	-9	-12	-15	-18
8	6	3	0	-3	-6	-9	-12	-15
11	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12
14	12	9	6	3	0	-3	-6	-9
17	15	12	9	6	3	0	-3	-6
20	18	15	12	9	6	3	0	-3
23	21	18	15	12	9	6	3	0
26	24	21	18	15	12	9	6	3

Les couples (x', y') tels que $x' - y'$ soit un multiple non nul de 6 sont : (5 , 11), (5 , 17), (5 , 23), (8 , 2), (8 , 14), (8 , 20), (11 , 5), (11 , 17), (11 , 23), (14 , 2), (14 , 8), (14 , 20), (17 , 5), (17 , 11), (17 , 23), (20 , 2), (20 , 8), (20 , 14), (23 , 5), (23 , 11), (23 , 17), (26 , 2), (26 , 8), (26 , 14), (26 , 20).

Parmi ces couples, ceux pour lesquels $x' + y'$ est multiple de 10 sont : (8 , 2), (17 , 23), (23 , 17), (26 , 14).

D'où $\Gamma = \{(8, 2), (17, 23), (23, 17), (26, 14)\}$.

Solution 85

1) $1000 = 13 \times 76 + 12$.

Reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13 :

On a $10^3 \equiv 12[13]$, c'est-à-dire aussi $10^3 \equiv -1[13]$. D'où $10^{3n} \equiv (-1)^n[13]$.

Ainsi : **Si n est pair,** alors $10^{3n} \equiv 1[13]$.

Si n est impair, alors $10^{3n} \equiv 12[13]$.

2) Si n est pair, alors, $10^{3n} \equiv 1[13]$ et $10^{3n+1} \equiv 10[13]$. D'où $10^{3n+1} + 10^{3n} \equiv 11[13]$.

Si n est impair, alors, $10^{3n} \equiv 12[13]$ et $10^{3n+1} \equiv 3[13]$. D'où $10^{3n+1} + 10^{3n} \equiv 2[13]$.

3) $11.000.000.000.000 = 10^{13} + 10^{12} = 10^{3\times4+1} + 10^{3\times4}$.

Puisque 4 est pair, alors, d'après la question 2), on a $10^{3\times4+1} + 10^{3\times4} \equiv 11[13]$.

D'où le reste de la division euclidienne de 11.000.000.000.000 par 13 est 11.

4) $10^{15} = 10^{3\times5}$, et puisque 5 est impair, alors $10^{15} \equiv 12[13]$.

Or on a $25 \equiv 12[13]$, alors $25 \times 10^{15} + 1 \equiv 2[13]$.

Solution 86

1) Posons $a_0 = \frac{x_0}{p}$ et $b_0 = \frac{y_0}{p}$. Notons que a_0 et b_0 sont des entiers puisque p divise x_0 et y_0.

On aura $mp = x_0y_0$, donc $mp = a_0pb_0p$. Et par conséquent $m = a_0b_0p$.
Or $p + m = x_0 + 6$, donc $p + a_0b_0p = a_0p + 6$, c'est-à-dire $p(1 + a_0b_0 - a_0) = 6$. D'où p divise 6.
2) Si ce système admet une solution (a , b), alors d'après la question 1), pgcd (a , b) divise 6.
Or pgcd(a , b) = 5 et 5 ne divise pas 6, alors le système n'a pas de solution.
3) Posons x = ap et y = bp, avec p = pgcd (x , y) et m = ppcm(x , y).

Le système devient : $\begin{cases} p + abp = ap + 6 \\ p = 2 \\ \text{pgcd}(a,b) = 1 \end{cases}$, qui équivaut à $\begin{cases} 2 + 2ab = 2a + 6 \\ p = 2 \\ \text{pgcd}(a,b) = 1 \end{cases}$. C'est-à-dire $\begin{cases} a(b-1) = 2 \\ p = 2 \\ \text{pgcd}(a,b) = 1 \end{cases}$.

Or : $a(b - 1) = 2$ $\Leftrightarrow$ (a , b – 1) appartient à {(1 , 2), (2 , 1)} $\Leftrightarrow$ (a , b) appartient à {(1 , 3) , (2 , 2)}.
Or pgcd(a , b) = 1, alors (a , b) = (1 , 3).

D'où le couple solution du système $\begin{cases} \text{pgcd}(x,y) + \text{ppcm}(x,y) = x + 6 \\ \text{pgcd}(x,y) = 2 \end{cases}$ est : (2 , 6).

Solution 87

1) p(1) = 0, p(2) = 63, p(3) = 728, p(4) = 4 095, p(5)= 15 624,
p(6) = 46 655, p(7) = 117 648, p(8) = 262 143, p(9) = 531 440, p(10) = 999 999.
p(n) est divisible par 9 pour les valeurs de n suivantes : 1, 2, 4, 5, 7, 8 et 10.
2) $p(n) = (n - 1)(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$.
3) Si n ≡ 0[3], alors $n - 1 \equiv 2[3]$; $n + 1 \equiv 1[3]$; $n^2 - n + 1 \equiv 1[3]$ et $n^2 + n + 1 \equiv 1[3]$.
D'où $(n - 1)(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) \equiv 2[3]$.
Donc $n^6 - 1$ n'est pas divisible par 3, donc par 9.
Si n ≡ 1[3], alors $n - 1 \equiv 0[3]$ et $n^2 + n + 1 \equiv 0[3]$.
D'où $(n - 1)(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) \equiv 0[9]$.
C'est-à-dire, $p(n) = n^6 - 1$ est divisible par 9.
Si n ≡ 2[3], alors $n + 1 \equiv 0[3]$ et $n^2 - n + 1 \equiv 0[3]$.
D'où $(n - 1)(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) \equiv 0[9]$. C'est-à-dire p(n) est divisible par 9.
En conclusion, P(n) est divisible par 9 si et seulement si n n'est pas divisible par 3.

Solution 88

1) Si d divise n et d divise p, alors d divise n et d divise p^2. D'où d divise $n - p^2$.
2) Posons $d = \text{pgcd}(n , p)$ et $\delta = \text{pgcd}(n - p^2, p)$.
d = pgcd(n , p), donc d divise n et d divise p. Donc d divise $n - p^2$ (d'après la question 1)) et d divise p.
Donc d divise pgcd $(n - p^2 , p)$. On peut alors écrire $d \leq \delta$.
De même, $\delta = \text{pgcd}(n - p^2 , p)$, donc δ divise $n - p^2$ et δ divise p. Donc δ divise $n - p^2$, δ divise p et δ divise p^2.
Donc δ divise $(n - p^2) + p^2$ et δ divise p. Ce qui implique δ divise n et δ divise p.
On peut alors écrire que δ divise pgcd(n , p). C'est-à-dire δ divise d. Par conséquent, on a $\delta \leq d$.
Puisque $d \leq \delta$ et $\delta \leq d$, alors $d = \delta$. D'où $\text{pgcd}(n , p) = \text{pgcd}(n - p^2 , p)$.
3) pgcd(10829 , 104) = pgcd $(10829 - 104^2 , 104)$ (d'après la question 2)).
= pgcd (13 , 104)
= 13 (car 13 divise 104).
4) On sait d'après la question 2) que :
$\text{pgcd}(4k^2 + 4k + 6 , 2k + 1) = \text{pgcd}(4k^2 + 4k + 6 - (2k + 1)^2 , 2k + 1) = \text{pgcd}(5 , 2k + 1)$
Et pgcd(5 , 2k + 1) = 5 si et seulement si $2k + 1 \equiv 0[5]$. Or
si k ≡ 0[5], alors $2k + 1 \equiv 1[5]$.
si k ≡ 1[5], alors $2k + 1 \equiv 3[5]$.
si k ≡ 4[5], alors $2k + 1 \equiv 4[5]$.
Si k ≡ 2[5], alors $2k + 1 \equiv 0[5]$.
Si k ≡ 3[5], alors $2k + 1 \equiv 2[5]$.
D'où pgcd(5 , 2k + 1) = 5 si et seulement si $k \equiv 2[5]$.
On peut donc conclure que $\text{pgcd}(4k^2 + 4k + 6 , 2k + 1) = 5$ si et seulement si, $k \equiv 2[5]$.

Solution 89

1) Les diviseurs naturels de 15 sont : 1, 3, 5 et 15.

2) $x^2y - y = 15$ si et seulement si, $y(x^2 - 1) = 15$. Donc y divise 15.

En conclusion si $x^2y - y = 15$, alors y divise 15.

3) D'après la question 2), y divise 15, donc y appartient à {-15, -5, -3, -1, 1, 2, 3, 15}.

Si $y = -15$, alors $x^2 - 1 = -1$. Donc $x = 0$.

Si $y = -5$, alors $x^2 - 1 = -3$. Donc $x^2 = -2$. (Impossible)

Si $y = -3$, alors $x^2 - 1 = -5$. Donc $x^2 = -4$. (Impossible)

Si $y = -1$, alors $x^2 - 1 = -15$. Donc $x^2 = -14$. (Impossible)

Si $y = 1$, alors $x^2 - 1 = 15$. Donc $x = 4$ ou $x = -4$.

Si $y = 3$, alors $x^2 - 1 = 5$. Donc $x^2 = 6$. (Impossible dans $\mathbb{N}$).

Si $y = 5$, alors $x^2 - 1 = 3$. Donc $x = 2$ ou $x = -2$.

Si $y = 15$, alors $x^2 - 1 = 1$. Donc $x^2 = 2$ (impossible dans $\mathbb{N}$).

D'où les couples d'entiers relatifs tels que $x^2y - y = 15$ sont : (0 ,-15), (-4 , 1), (4 , 1), (2 , 5) et (-2 , 5).

Solution 90

1) Les restes possibles de la division euclidienne de a par 7 sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Si $a \equiv 0[7]$, alors $a^2 \equiv 0[7]$.

Si $a \equiv 1[7]$, alors $a^2 \equiv 1[7]$.

Si $a \equiv 2[7]$, alors $a^2 \equiv 4[7]$.

Si $a \equiv 4[7]$, alors $a^2 \equiv 2[7]$.

Si $a \equiv 5[7]$, alors $a^2 \equiv 4[7]$.

Si $a \equiv 6[7]$, alors $a^2 \equiv 1[7]$.

D'où les restes possibles de la division euclidienne de a^2 par 7 sont : 0, 1, 2 et 4.

2) Le tableau ci-dessous ressort les restes possibles de la division euclidienne de $a^2 + b^2$ par 7, connaissant les restes des divisions euclidiennes de a^2 et b^2 par 7.

b^2 \ a^2	***0***	***1***	***2***	***4***
0	0	1	2	4
1	1	2	3	5
2	2	3	4	6
4	4	5	6	1

De ce tableau, on déduit que les restes possibles de la division euclidienne de $a^2 + b^2$ par 7 sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Et si $a^2 + b^2 \equiv 0[7]$ alors $a^2 \equiv 0[7]$ et $b^2 \equiv 0[7]$.

Or d'après la question 1), le carré d'un entier relatif n'est divisible par 7 que si et seulement si cet entier est divisible par 7. Donc $a^2 \equiv 0[7]$ et $b^2 \equiv 0[7]$, si et seulement si, $a \equiv 0[7]$ et $b \equiv 0[7]$.

Par conséquent, si $a^2 + b^2 \equiv 0[7]$, alors $a \equiv 0[7]$ et $b \equiv 0[7]$.

Justifions que « $a^2 + b^2 \equiv 0[7]$ » si et seulement si « $a^2 + b^2 \equiv 0[49]$ » :

Si $a^2 + b^2 \equiv 0[49]$, alors $a^2 + b^2 \equiv 0[7]$ (car 7 divise 49)

Or d'après ce qui précède,

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 \equiv 0[7] &\Rightarrow a \equiv 0[7] \text{ et } b \equiv 0[7]\\
&\Rightarrow a = 7k \text{ et } b = 7k' \text{ k et k' appartenant à } \mathbb{Z}\\
&\Rightarrow a^2 = 49k^2 \text{ et } b^2 = 49k'^2, \text{ k et k' appartenant à } \mathbb{Z}\\
&\Rightarrow a^2 \equiv 0[49] \text{ et } b^2 \equiv 0[49]\\
&\Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 0[49].
\end{aligned}
$$

D'où $a^2 + b^2 \equiv 0[7]$, si et seulement si $a^2 + b^2 \equiv 0[49]$.

3) Le cercle de centre O et de rayon 7 a pour équation : $x^2 + y^2 = 49$.

$x^2 + y^2 = 49 \Rightarrow$ 49 divise $x^2 + y^2 \Rightarrow$ 7 divise $x^2 + y^2 \Rightarrow$ 7 divise x et 7 divise y.

Or si M(x , y) appartient au cercle de centre O et de rayon 7, alors on a : $-7 \leq x \leq 7$ et $-7 \leq y \leq 7$.

D'où x et y sont des multiples de 7 compris entre -7 et 7 inclus.

C'est-à-dire x et y appartiennent à {-7, 0, 7}.

Si $x = -7$, $x^2 + y^2 = 49$, donc $y = 0$.

Si $x = 0$, $x^2 + y^2 = 49$, donc $y = 7$ ou $y = -7$.

Si $x = 7$, $x^2 + y^2 = 49$, alors $y = 0$.

D'où les points du cercle de centre O et de rayon 7 à coordonnées entières sont :

A(-7 , 0), B(0 , -7), C(0 , 7) et D(7 , 0).

Solution 91

1) $N=\overline{xyyx}^{dix}=x\times10^3+y\times10^2+y\times10+x \quad 1001x+110y$.

Nous remarquons que 105 = 3×5×7 et 3, 5 et 7 sont deux à deux premiers entre eux.
Donc N est multiple de 105 si et seulement si 3, 5 et 7 divisent N.
N est divisible par 5 si et seulement si x appartient à {0, 5}.
Si x = 0, on a N = 110y.
3 divise N, donc 3 divise 110y. Or 3 et 110 sont premiers entre eux. D'où 3 divise y.
7 divise N, donc 7 divise 110y. Or 7 et 110 sont premiers entre eux. D'où 7 divise y.
On sait que y appartient à {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} et y est divisible par 3 et 7.
Dans cet ensemble y = 0 est la seule valeur convenable. Alors x = 0 et y = 0.
Si x = 5, on a N = 5005 + 110y.
Or 7 divise 5005, donc 7 divise N si et seulement si 7 divise y (car 7 et 110 sont premiers entre eux).
D'où y = 0 ou y = 7. Donc N = 5005 ou N = 5775.
3 ne divise pas 5005, or 3 divise 5775. D'où la seule valeur convenable de y est 7. Dans ce cas, N = 5775.
Finalement, les valeurs de x et y cherchées sont : (x = 0 et y = 0) ou (x = 5 et y = 7).

2)a) $M=\overline{xyzzyx}^{dix}=x\times10^5+y\times10^4+z\times10^3+z\times10^2+y\times10+x$.

Puisque 10 ≡ -1[11], alors $10^n \equiv (-1)^n[11]$.
D'où M ≡ -x + y – z + z – y + x [11]. C'est-à-dire M ≡ 0[11]. D'où M est un multiple de 11.

b) 35 = 5×7 et 5 et 7 sont premiers entre eux.
D'où M est divisible par 35 si et seulement si M est divisible par 5 et par 7.
M est divisible par 5 donc x = 0 ou x = 5.
Si x = 0 : M = 10010y + 1100z.
7 divise 10.010, donc 7 divise M si et seulement si 7 divise 1100z. Or 7 et 1100 sont premiers entre eux.
Donc 7 divise M si et seulement si 7 divise z. D'où z = 0 ou z = 7.
Le lecteur vérifiera que si (x , z) = (0 , 0) ou (x , z) = (0 , 7), alors M est multiple de 35.
Si x = 5 : M = 500005 + 10010y + 1100z.
Or 10010 est divisible par 7, alors M est divisible par 7, si et seulement si 7 divise 500005 + 1100z.
Dans l'ensemble {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, seule la valeur z = 5 est telle que 7 divise 500005 + 1100z.
On vérifie que pour le couple (x , z) = (5 , 5), 35 divise M.
D'où M est multiple de 35 si et seulement si (x , z) appartient à {(0 , 0), (0 , 7), (5 , 5)}.

c) Si x = 0 et z = 0 : alors $M=\overline{y00y0}$.

M est divisible par 3 si et seulement si 0 + y + 0 + 0 + y + 0 est divisible par 3. C'est-à-dire 3 divise 2y.
Or 2 et 3 sont premiers entre eux, alors y ≡ 0[3]. D'où y appartient à {0, 3, 6, 9}.

Si x = 0 et z = 7, alors $M=\overline{y77y0}$.

M ≡ 0[3] ⇔ 14 + 2y ≡ 0[3] ⇔ 2y ≡ -2[3] ⇔ y ≡ 2[3] ⇔ y appartient à {2, 5, 8}.

Si x = 5 et z = 5, alors $M=\overline{5y55y5}$.

M ≡ 0[3] ⇔ 20 + 2y ≡ 0[3] ⇔ y appartient à {2, 5, 8}.

Solution 92

On a : 15 ≡ 3[12], $15^2 \equiv 9[12]$, $15^3 \equiv 3[12]$.
D'où **Si n = 0**, alors $15^n \equiv 1[12]$.
Si n est pair et non nul, alors $15^n \equiv 9[12]$.
Si n est impair, $15^n \equiv 3[12]$.
Or pour tout entier naturel non nul p, on a : $21^p \equiv 9[12]$ et $21^0 \equiv 1[12]$.
D'où **si n = 0**, alors :
pour p = 0, on aura $15^n - 21^p = 0$. D'où $15^n - 21^p$ divisible par 12.
pour p ≠ 0, on aura $15^n - 21^p \equiv 4[12]$.
si n est pair et non nul.
pour p = 0, on aura $15^n - 21^p \equiv 8[12]$.
pour p ≠ 0, on aura $15^n - 21^p \equiv 0[12]$ (car $15^n \equiv 9[12]$ et $21^p \equiv 9[12]$).
si n est impair,
pour p = 0, on aura $15^n - 21^p \equiv 2[12]$.

pour $p \neq 0$, on aura $15^n - 21^p \equiv 6[12]$.
D'où $15^n - 21^p$ est divisible par 12, si et seulement si, $(n , p) = (0 , 0)$ ou (n est pair et non nul et p non nul).

Solution 93

1)a) Enoncé du théorème de Gauss :
Soient a, b et c trois entiers relatifs.
Si a divise bc et a et b premiers entre eux, alors a divise c.

b) Soit k et p appartenant à $\mathbb{N}$, avec $1 \leq k \leq p-1$ et p premier, on a : $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$.

p est premier avec 1, 2, 3, ..., k d'une part et avec 1, 2, ..., p – k d'autre part (car les nombres 1, 2, ..., k d'une part et 1, 2, ..., p – k d'autre part sont inférieurs à p et p est premier). D'où p est premier avec $1\times2\times3\times\ldots\times k = k!$ et avec $1\times2\times3\times\ldots\times(p-k) = (p-k)!$. Par conséquent $\text{pgcd}(p , k!(p-k)!) = 1$.

Or $C_p^k = \dfrac{p.(p-1)!}{k!(p-k)!}$ et C_p^k est un entier naturel, alors $k!(p-k)!$ divise $p(p-1)!$.

Comme en plus $\text{pgcd}(p , k!(p-k)!) = 1$, alors d'après le théorème de Gauss, $k!(p-k)!$ divise $(p-1)!$.

Donc $\dfrac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$ est un entier naturel d.

En conclusion, $C_p^k = pd$, avec d entier naturel. D'où p divise C_p^k.

2) Notons P_n la propriété : « p divise $n^p - n$ ».
Pour n = 0, on a $0^p - 0 = 0$. Comme p divise 0, alors P_0 est vraie.
Supposons P_n vraie (c'est-à-dire p divise $n^p - n$) pour un certain entier naturel n, montrons qu'alors P_{n+1} l'est aussi (c'est-à-dire p divise $(n+1)^p - (n+1)$).

On a $(n+1)^p - (n+1) = \sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k n^k - n - 1 = n^p + \sum\limits_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k + 1 - n - 1 = n^p - n + \sum\limits_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k$.

D'après l'hypothèse de récurrence, p divise $n^p - n$ (1).

D'après la question 1)b), p divise C_p^k pour tout k entier naturel compris entre 1 et p – 1, inclus.

D'où p divise $\sum\limits_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k$ (2).

De (1) et (2), on déduit que p divise $n^p - n + \sum\limits_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k$. C'est-à-dire p divise $(n+1)^p - (n+1)$.

D'où p_{n+1} est vraie. Et finalement, pour tout entier naturel n, p divise $n^p - n$.
3) D'après la question 2), p divise $n^p - n$.
Or $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$ et p et n sont premiers entre eux, alors p divise $n^{p-1} - 1$.
4) Soit n entier naturel, p et q deux entiers premiers entre eux tels que pq et n soient premiers entre eux.
Supposons p et n non premiers entre eux, alors il existe d, entier strictement supérieur à 1 tel que d divise p et d divise n. Alors d divise pq et d divise n. Alors pq et n ne seraient pas premiers entre eux.
Ce qui est contraire à l'hypothèse pq et n sont premiers entre eux ; donc p et n sont premiers entre eux.
On montre de même que q et n sont premiers entre eux.
Finalement, p et n d'une part, q et n d'autre part sont premiers entre eux.
On a $n^{(p-1)(q-1)} - 1 = (n^{p-1})^{q-1} - 1 = (n^{q-1})^{p-1} - 1$.
Comme p et n sont premiers entre eux, alors p et n^{q-1} sont premiers entre eux.
Et d'après la question précédente, on peut conclure que p divise $(n^{q-1})^{p-1} - 1$.
De même, q et n sont premiers entre eux, donc q et n^{p-1} sont premiers entre eux.
Alors q divise $(n^{p-1})^{q-1} - 1$.
p et q divisent $n^{(p-1)(q-1)} - 1$ et p et q sont premiers entre eux, d'où pq divise $n^{(p-1)(q-1)} - 1$.

Solution 94

1) On considère la propriété P_n : « M_n de coordonnées $(x_n ; y_n)$ est sur la droite (D) : $2x - y - 5 = 0$ ».

Pour $n = 0$, $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$, donc $2x_0 - y_0 - 5 = 0$. D'où P_0 est vraie.
Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel k, montrons alors que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire que M_{k+1} appartient à (D).

On a $2x_{k+1} - y_{k+1} - 5 = 2\left(\frac{6}{5}x_k + \frac{2}{5}y_k + 1\right) - \left(\frac{2}{5}x_k + \frac{9}{5}y_k + 2\right) - 5 = 2x_k - y_k - 5 = 0$ (d'après l'hypothèse de récurrence). D'où P_{k+1} est vraie.
D'où pour tout entier naturel n, les points M_n de coordonnées $(x_n ; y_n)$ sont sur la droite (D) d'équation : $2x - y - 5 = 0$.
2) Soit n entier naturel, M_n appartient à la droite (D), alors $2x_n - y_n - 5 = 0$. Donc $y_n = 2x_n - 5$.

Or par définition, $x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1$, alors en remplaçant y_n par sa valeur $2x_n - 5$, on a $x_{n+1} = 2x_n - 1$.

3) • Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, x_n est un entier relatif.
Considérons la propriété Q_n : « x_n est un entier relatif ».
Par définition, $x_0 = 3$, alors x_0 est entier relatif, donc Q_0 est vraie.
Supposons Q_k vraie pour un entier naturel k, alors x_k est un entier relatif, donc $2x_k$ est un entier relatif, donc $2x_k - 1$ est un entier relatif. C'est-à-dire x_{k+1} est un entier relatif.
D'où Q_{k+1} est vraie. Finalement, pour tout entier naturel n, x_n est un entier relatif.
• D'après la question 1), on a $y_n = 2x_n - 5$.
Ainsi puisque x_n est un entier relatif, alors y_n est aussi un entier relatif.
4)a) Supposons que x_n est divisible par 5, alors 5 divise $2x_n - 5$, donc 5 divise y_n.
Donc si x_n est divisible par 5 alors y_n est divisible par 5.
Réciproquement, supposons que y_n est divisible par 5.
Alors 5 divise $y_n + 5$, c'est-à-dire 5 divise $2x_n$. Or 5 et 2 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss, 5 divise x_n. Donc si y_n est divisible par 5 alors x_n est divisible par 5.
Finalement, x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5.
b) Supposons que x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5.
Soit $d = \text{pgcd}(x_n , y_n)$. d divise x_n et d divise y_n, alors d divise $2x_n - y_n$, donc d divise 5 (car d'après la question 1), $2x_n - y_n = 5$). Donc $d = 1$ ou $d = 5$. Or x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors $d = 1$.
Donc si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors ils sont premiers entre eux.
5)a) $x_0 = 3$ (par définition) et $2^1 + 1 = 3$. Donc $x_0 = 2^{0+1} + 1$.
Supposons que $x_k = 2^{k+1} + 1$, pour un certain entier naturel k,
Or d'après la question 2), $x_{k+1} = 2x_k - 1$, alors $x_{k+1} = 2(2^{k+1} + 1) - 1 = 2^{k+2} + 1$.

Finalement, pour tout entier naturel n, on a : $x_n = 2^{n+1} + 1$.

b) Soit n entier naturel, on a $x_{n+4} = 2^{n+1} \times 2^4 + 1$.
Or $2^4 \equiv 1[5]$, alors $2^{n+1} \times 2^4 \equiv 2^{n+1}[5]$, donc $2^{n+1} \times 2^4 + 1 \equiv 2^{n+1} + 1[5]$. Soit $x_{n+4} \equiv x_n[5]$.
On en déduit que x_{n+4} et x_n ont le même reste dans la division euclidienne par 5.
Par conséquent, 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4}.
c) D'après la question précédente, les restes de la division euclidienne de x_n par 5 forment une suite périodique de période 4.
Or $x_0 = 3$, $x_1 = 5$, $x_2 = 9$ et $x_3 = 17$. Alors x_n est divisible par 5 si et seulement si $n = 4k + 1$.
Or d'après la question 4)a), x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5, alors x_n et y_n sont divisibles par 5 si et seulement si $n = 4k + 1$, avec k entier naturel.

Solution 95

1) $\text{pgcd}(12 , 5) = 1$, alors l'équation $12x - 5y = 3$ admet des solutions.
Remarquons que $12 \times 4 - 5 \times 9 = 3$. Alors,
$12x - 5y = 3 \iff 12x - 5y = 12 \times 4 - 5 \times 9 \iff 12(x - 4) - 5(y - 9) = 0$.
Finalement, on a : $12(x - 5) = 5(y - 9)$
De cette dernière égalité, on peut dire que 12 divise $5(y - 9)$ et 5 divise $12(x - 4)$.
Or 12 et 5 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss, on dit que : 12 divise $y - 9$ et 5 divise $x - 5$.

D'où $12(x - 4) = 5(y - 9) \iff \frac{x-4}{5} = \frac{y-9}{12} = k$, où k est un entier relatif.

$\iff x = 5k + 4$ et $y = 12k + 9$ k étant un entier relatif.

Vérification : Soit k un entier relatif, $12(5k + 4) - 5(12k + 9) = 3$.

D'où l'ensemble solution est : S = {(5k + 4 , 12k + 9) ; k appartenant à $\mathbb{Z}$ }.

2)a) On considère la propriété P_n : « $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$ ».

D'après l'énoncé, on a $z_0 = i$, or $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\times 0\times\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i = z_0$. Donc P_0 est vraie.

Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel k, montrons qu'alors P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire $z_{k+1} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(k+1)\pi}{6}\right)}$.

En effet, D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5k\pi}{6}\right)}$, donc :

$z_{k+1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z_n = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5k\pi}{6}\right)} = e^{\frac{5\pi}{6}} \times e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5k\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(k+1)\pi}{6}\right)}$. D'où P_{k+1} est vraie.

Finalement, pour tout entier naturel n, $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$.

b) En effet, M_n est sur la demi droite [Ox) $\Leftrightarrow$ $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$ appartient à [0 , +∞[.

$\Leftrightarrow$ $\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6} = 2m\pi$ où m est un entier relatif

$\Leftrightarrow$ 12m – 5n = 3.

$\Leftrightarrow$ m = 5k + 4 et n = 12k + 9, k dans $\mathbb{Z}$ (d'après la question précédente).

Notons, que, 12k + 9 ≥ 0 si et seulement si k ≥ 0 (car k est un entier).
Or n est un entier naturel, donc n = 12k + 9, où k est un entier naturel.
L'ensemble des entiers naturels n pour lesquels M_n est sur la demi droite [Ox) est l'ensemble des entiers n qui s'écrivent sous la forme : n = 12k + 9 où k est un entier naturel.

Solution 96

1) p étant premier, les diviseurs positifs de p^4 sont : 1, p, p^2, p^3 et p^4. Donc $S = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4$.

2) On a : $4S - (2p^2 + p)^2 = 3p^2 + 4p + 4 > 0$, car p > 2. Donc $(2p^2 + p)^2 < 4S$.

$4S - (2p^2 + p + 2)^2 = -5p^2 < 0$, car p > 2. Donc $4S < (2p^2 + p + 2)^2$.

De ce qui précède, on a : $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$.

3)a) Si $S = n^2$, alors : $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$. C'est-à-dire $(2p^2 + p)^2 < 4n^2 < (2p^2 + p + 2)^2$.

Donc $\frac{2p^2+p}{2} < n < \frac{2p^2+p+2}{2}$.

Or p étant un nombre premier plus grand que 2, alors p et $2p^2 + p$ sont impairs. $\frac{2p^2+p}{2}$ n'est donc pas un entier.

Comme $\frac{2p^2+p+2}{2} - \frac{2p^2+p}{2} = 1$ et $\frac{2p^2+p}{2}$ non entier alors il existe un entier naturel n et un seul tel que

$\frac{2p^2+p}{2} < n < \frac{2p^2+p+2}{2}$.

Donc il existe un entier naturel n et un seul tel que $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$, avec $S = n^2$.

b) Puisque p est impair, alors $2p^2 + p$ et $2p^2 + p + 2$ sont nombres impairs consécutifs.
Et $2p^2 + p + 1$ est un entier naturel pair compris entre $2p^2 + p$ et $2p^2 + p + 2$.

Donc $\frac{2p^2+p+1}{2}$ est un entier compris entre $\frac{2p^2+p}{2}$ et $\frac{2p^2+p+2}{2}$.

Comme d'après la question précédente il existe un seul tel entier qui est n, alors $n = \frac{2p^2+p+1}{2}$.

c) D'après la question 2), on a $4S = 4n^2$. Or d'après la question 3)b), on a : $n = \frac{2p^2+p+1}{2}$.

On peut alors écrire : $4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = (2p^2 + p + 1)^2$.
Ce qui équivaut après avoir développé et simplifié à : $3 + 2p - p^2 = 0$.
d) Ceci revient à résoudre l'équation : $3 + 2p - p^2 = 0$. Qui a pour solutions : -1 et 3.
Or p est positif, alors p = 3.

Comme $n=\dfrac{2p^2+p+1}{2}$ et p = 3, alors $n=\dfrac{2\times9+3+1}{2}=11$.

Solution 97

A)1) Notons que tout nombre a la même parité que son carré.
Supposons a et b de même parité, alors a^2 et b^2 ont la même parité. Comme la différence de deux nombre de même parité est paire, alors $a^2 - b^2$ est pair. C'est-à-dire N est pair. Ce qui est contraire à l'énoncé qui dit que N est impair. D'où a et b n'ont pas la même parité.

2) $N = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Posons $p = a - b$ et $q = a + b$.
Puisque a et b sont des entiers naturels, alors $q = a + b$ est un entier naturel et $a - b$ est un entier relatif.
Notons que N est un entier naturel, donc N est positif. Or $a + b$ est positif, donc le signe de N est celui de $a - b$.
Donc $a - b$ est positif. Donc p est aussi un entier naturel.
Par conséquent, N est un produit de deux entiers naturels p et q.

3) Comme a et b sont de parités contraires, alors p et q sont impairs.

B)1)a) Dressons un tableau donnant les restes de X et X^2 modulo 9 :

Restes de X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Restes de X^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1

b) Les restes possibles de $a^2 - 250\,507$ modulo 9 :
Comme $a^2 - 250\,507 = b^2$, alors d'après la question B)1)a), les restes possibles de $a^2 - 250\,507$ modulo 9 sont : 0, 1, 4 et 7.

Restes possibles de a^2 modulo 9 :
Comme $a^2 = b^2 + 205\,507$, alors les restes possibles de a^2 sont 1, 2, 5 et 8. Or d'après la question B)1)a), les restes possibles modulo 9 d'un carré sont 0, 1, 4 et 7. Alors le reste de a^2 modulo 9 est 1.

c) D'après la question B)1)a), les nombres dont les carrés ont pour reste 1 modulo 9 ont pour restes 1 ou 8 modulo 9
Alors comme a^2 a pour reste 1 modulo 9, alors les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2) Justifions que si le couple (a , b) vérifie (E), alors $a \geq 501$:
Supposons que (a , b) est solution de (E), alors on a $a^2 - 250\,507 \geq 0$. Donc $a^2 \geq 250\,507$. Donc $a \geq 501$.

Montrons qu'il n'existe pas de couple solution de (E) de la forme (501 , b) :
Supposons qu'il existe un tel couple. Alors on a $501^2 - 250507 = b^2$. C'est-à-dire $b^2 = 494$. Ce qui est impossible car 494 n'est pas un carré parfait. Donc b n'existe pas. Donc il n'existe pas de couple (501 , b) solution de (E).

3)a) Notons qu'on a : $a \equiv 1[9]$ ou bien $a \equiv 8[9]$.
Or on a $503 \equiv 8[9]$ et $505 \equiv 1[9]$, alors a est congru à 505 ou à 503 modulo 9.

b) Le couple (505 + 9k , b) est solution de (E) signifie $(505 + 9k)^2 - 250\,507 = b^2$.
Pour k = 0, on a : $505^2 - 250\,507 = b^2$. C'est-à-dire $4518 = b^2$. Ce qui est impossible car 4518 n'est pas un carré parfait
Pour k = 1, on a : $514^2 - 250\,507 = b^2$. C'est-à-dire $13\,689 = b^2$. Ce qui équivaut à b = 117.
Le couple solution correspondant est (514 , 117).

Solution 98

1) Soit u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1.
On a $J_1 - J_0 = 105u$ et $J_1 - (J_0 + 6) = 81v$. C'est-à-dire $J_1 - J_0 = 105u$ et $J_1 - J_0 = 81v + 6$.
On en déduit que $105u = 81v + 6$. C'est-à-dire $105u - 81v = 6$. Soit $35u - 27v = 2$.
Finalement, le couple (u , v) est solution de l'équation (E_1).

2)a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, on a :

$$35 = 27\times1 + 8$$
$$27 = 8\times3 + 3$$
$$8 = 3\times2 + 2$$
$$3 = 2\times1 + 1$$

d'où

$$\begin{aligned}1 &= 3 - 2\times1\\ &= 3 - (8 - 3\times2)\\ &= -8 + 3\times3\\ &= -8 + 3(27 - 8\times3)\\ &= -10\times8 + 3\times27.\\ &= -10(35 - 27\times1) + 3\times27\\ &= -10\times35 - 27\times(-13)\end{aligned}$$

D'où le couple (-10 , -13) est une solution particulière de l'équation (E_2).

b) Puisque $-10\times35 - 27\times(-13) = 1$, alors $-20\times35 - 27\times(-26) = 2$.

Ainsi, le couple (-20 , -26) est une solution de l'équation (E_1).

c) On a d'abord : $35\times(-20) - 27\times(-26) = 2$

Ensuite, (x , y) solution de (E_1) $\Leftrightarrow$ $35x - 27y = 2$

$\Leftrightarrow$ $35x - 27y = 35\times(-20) - 27\times(-26)$

$\Leftrightarrow$ $35(x + 20) = 27(y + 26)$.

Alors 35 divise $27(y + 26)$ et 27 divise $35(x + 20)$.

Or 35 et 27 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss, 35 divise $(y + 26)$ et 27 divise $(x + 20)$.

D'où $35(x + 20) = 27(y + 26)$ $\Leftrightarrow$ Il existe un entier relatif k tel que $\dfrac{x+20}{27}=\dfrac{y+26}{35}=k$.

$\Leftrightarrow$ $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$.

Vérification : Soit k un entier relatif, $35(27k - 20) - 27(35k - 26) = 2$.

D'où les couples solutions de l'équation (E_1) sont les couples $(27k - 20 , 35k - 26)$; k appartenant à $\mathbb{Z}$.

d) Le couple (u , v) permettant de déterminer J_1 est le couple (u , v) de plus petits entiers naturels solution de (E_1).

Or $27k - 20 \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $k \geq \dfrac{20}{27}$ et $35k - 26 \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $k \geq \dfrac{26}{35}$. La plus petite valeur possible de k est donc k = 1.

Qui donne le couple cherché (u , v) = (7 , 9). Et donc $J_1 = J_0 + 105\times7 = J_0 + 735$

3)a) Le nombre de jours qui se sont écoulés est $J_1 - J_0 = 735$ jours.

b) Remarquons que $735 = 7\times105$. Donc le jour J_1 arrive exactement 105 semaines plus tard. Soit un mardi aussi.

Puisque nous sommes le 7 décembre, il reste 24 jours pour finir l'année 1999.

L'année 2000 étant bissextile, elle a 366 jours. Ainsi, au 31 décembre 2000, on aura passé 24 + 366 = 390 jours après le jour J_0. Il nous reste donc 735 – 390 = 345 jours pour atteindre le jour J_1. Soit 20 jours avant le 31 décembre 2001.

On sera alors le 11 décembre 2001.

Finalement, La date du jour J_1 sera le mardi 11 décembre 2001.

c) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, il devra attendre le rendez-vous qui suit et qui correspond à la valeur k = 2, donc à u = 34 et au jour $J_2 = J_0 + 105\times34 = J_0 + 3570$. Soit 3570 jours après le jour J_0.

C'est-à-dire 3570 – 735 = 2835 jours après le jour J_1.

9 GEOMETRIE DANS L'ESPACE

RAPPEL DU COURS

A. Rappels sur les angles orientés du plan

A_1 – Angles orientés et cercle

a) Théorème fondamental :
Etant donné un cercle (C) de centre O et deux points A et B de (C).

Pour tout point M de (C), on a : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv 2\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})[2\pi]$.

b) Condition de cocyclicité de quatre points :
Soit A, B, C et D quatre points non alignés.

A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si, $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})[\pi]$.

Remarque :

Si $mes(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv mes(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})[\pi]$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv 0[\pi]$, alors les points A, B, C et D sont alignés.

Ainsi, de façon générale, $mes(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv mes(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})[\pi]$ si et seulement si les points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés.

A_2 – Angles orientés et lignes de niveau

a) Ensemble des points M du plan tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \alpha[2\pi]$ où α appartient à $]-\pi, \pi]$:
Soit A et B deux points distincts du plan.

- L'ensemble des points M du plan tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv 0[2\pi]$ est la droite (AB) privée du segment [AB].
- L'ensemble des points M du plan tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \pi[2\pi]$ est le segment [AB] privé des points A et B.
- L'ensemble des points M du plan tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \alpha[2\pi]$ (où α est différent de 0 et π) est un arc de cercle (C) de corde [AB], privé des points A et B.

Le centre de ce cercle est le point de rencontre de la médiatrice du segment [AB] et la perpendiculaire en A de la demi-droite [AT) ; où T est un point tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = \alpha$.

Remarque : ***Soit C un point du plan tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = \alpha$, cet arc de cercle est l'arc du cercle circonscrit au triangle ABC, d'extrémités A et B, contenant C, privé des points A et B.***

b) Ensemble des points M du plan tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \alpha[\pi]$, où α appartient à $]-\pi, \pi]$:
Soit A et B deux points distincts du plan.

- L'ensemble des points M du plan tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv 0[\pi]$ est la droite (AB) privée des points A et B.
- L'ensemble des points M du plan tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \alpha[\pi]$ (où α est différent de 0 et π) est un cercle (C) passant par A et B, privé des points A et B.

Remarque : ***Soit C un point du plan tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = \alpha$, cet ensemble est le cercle circonscrit au triangle ABC, privé des points A et B.***

Dans toute la suite, E désigne l'espace (affine) et W son espace vectoriel associé.

B. Le produit scalaire dans l'espace

B_1 – Expressions du produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de W. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **réel** noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et défini comme suit :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.
- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Soit A, B et C trois points distincts de l'espace E.

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AH}$, où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$.

Supposons l'espace E muni d'un repère orthonormé.

- Soit $\vec{u}\,(x\,,y\,,z)$ et $\vec{v}\,(x'\,,y'\,,z')$ deux vecteurs de l'espace vectoriel W.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

- Soit $A(x_A\,,y_A\,,z_A)$ et $B(x_B\,,y_B\,,z_B)$ deux points de l'espace E.

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

Remarques :

Soit A et B deux points de E, on a : $AB^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ***si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.***
- $\|\vec{u}\|=0$ ***si et seulement si*** $\vec{u}=\vec{0}$.

B_2 – Equations et représentations paramétriques de plans et de droites

a) Le plan :

- Soit A un point de E et $\vec{u}$ un vecteur non nul de W.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$ est le plan passant par A et dont un vecteur normal est $\vec{u}$.

- L'espace E étant muni **d'un repère.**

L'ensemble des points M(x , y , z) de l'espace tels que ax + by + cz + d = 0 (avec (a , b , c) ≠ (0 , 0 , 0)) est un plan P.
L'égalité ax + by + cz + d = 0 est appelée une équation cartésienne de P dans le repère donné.
Si le repère est orthonormé, alors un vecteur normal de P est $\vec{u}\,(a\,,b\,,c)$.

- Soit A un point de E, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de W.

L'ensemble des points M de l'espace E tels qu'il existe deux réels a et b vérifiant $\overrightarrow{AM}=a\vec{u}+b\vec{v}$, est le plan passant par A, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- L'espace étant muni **d'un repère.**

L'ensemble des points M(x , y , z) de l'espace tels qu'il existe deux réels k et k' vérifiant $\begin{cases} x=ka+k'a'+x_0 \\ y=kb+k'b'+y_0 \\ z=kc+k'c'+z_0 \end{cases}$; (où (a , b , c) ≠ (0 , 0 , 0) et (a' , b' , c') ≠ (0 , 0 , 0)) est le plan P passant par $A(x_0\,,y_0\,,z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\,(a\,,b\,,c)$ et $\vec{v}\,(a'\,,b'\,,c')$.
Le système ci-dessus est une représentation paramétrique du plan P dans le repère donné.

b) La droite :

- Soit A un point de E et $\vec{u}$ un vecteur non nul de W.

L'ensemble des points M de l'espace E tels qu'il existe un réel a vérifiant $\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$, est la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$.

- L'espace étant muni d'un **repère.**

L'ensemble des points M(x , y , z) de l'espace tels qu'il existe un réel k vérifiant $\begin{cases} x = ka + x_0 \\ y = kb + y_0 \\ z = kc + z_0 \end{cases}$; (où (a , b , c) ≠ (0 , 0 , 0)) est la droite D passant par A(x_0 , y_0 , z_0) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}$ (a , b , c).

Le système ci-dessus est une représentation paramétrique de la droite D dans le repère donné.

N.B : ***Une droite ne peut pas avoir une équation de la forme*** $\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$.

B_3 – Distance d'un point à un plan

L'espace étant muni d'un repère orthonormé.

Soit P le plan dont une équation est ax + by + cz + d = 0 et A(x_0 , y_0 , z_0) un point de E.

La distance de A à P est donnée par la formule : $d(A, P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

B_4 – La sphère

a) Définition :

Soit A un point de E et R un réel strictement positif.

- L'ensemble des points M de l'espace E tels que AM = R est la sphère de centre A et de rayon R.
- L'ensemble des points M de l'espace E tels que AM ≤ R est la boule de centre A et de rayon R.

Remarque :

L'ensemble des points M de l'espace E tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ ***est la sphère de diamètre [AB].***

b) Intersection d'une sphère et d'un plan :

Soit S la sphère de centre A et rayon de R et P un plan. Notons d la distance de A à P.

- Si d > R, alors S et P ne se rencontrent pas.
- Si d = R, alors S et P se rencontrent en un seul point B. P est alors tangent à S en B.
- Si d < R, alors P coupe S suivant un cercle de centre H, projeté orthogonal de A sur P et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

c) Equation d'une sphère :

L'espace étant muni d'un **repère orthonormé.**

L'ensemble des points M(x , y , z) de E tels que $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, où R est un réel strictement positif, est la sphère S de centre A(a , b , c) et de rayon R.

L'égalité $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ est une équation cartésienne de la sphère S.

d) L'ensemble des points M(x , y , z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$:

L'espace étant muni d'un repère orthonormé.

L'ensemble des points M(x , y , z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ est : soit une sphère, soit un singleton, soit l'ensemble vide.

B_5 – Le cône et le cylindre de révolution

a) Le cylindre :

Soit (D) une droite de l'espace et R un réel strictement positif.

Le cylindre d'axe (D) et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que : d(M , (D)) = R ; où d(M , (D)) désigne la distance de M à la droite (D).

b) Le cône :

Soit (D) et (D') deux droites de l'espace, sécantes en un point A.

Soit B un point de (D') autre que A et C le projeté orthogonal de B sur (D), l'angle $\widehat{BAC}$ a une mesure constante θ.

Le cône de sommet A, d'axe (D) et de génératrice (D') est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $MH = AH\tan\theta$, où H est le projeté orthogonal de M sur (D). θ est le demi angle au sommet A du cône.

C. Le barycentre

C_1 – Théorème et définition

Soit $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_n, a_n)$, n points pondérés et $m = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Si $m \neq 0$, alors il existe un point G et un seul tel que : $a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

Le point G est le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_n, a_n)$.

En particulier, si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n \neq 0$, alors G est appelé l'isobarycentre des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Remarque : ***Si G est le barycentre de trois points non (A , a), (B , b) et (C , c), alors les points A, B, C et G sont coplanaires.***

C_2 – Propriétés

- On peut permuter l'ordre des points pondérés d'un système, son barycentre ne change pas.
- On peut multiplier ou diviser les coefficients des points pondérés d'un système par un même réel non nul, son barycentre ne change pas.
- On peut subdiviser un système en de sous-systèmes de masses totales non nulles. Le barycentre du système initial est le barycentre des barycentres des sous-systèmes, affectés de leurs masses totales.

C_3 – Coordonnées du barycentre

L'espace étant muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit G le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_n, a_n)$.

Notons (x_G, y_G, z_G) les coordonnées de G, (x_i, y_i, z_i) les coordonnées de A_i, avec $1 \leq i \leq n$.

On a : $x_G = \dfrac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$; $y_G = \dfrac{a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$; $z_G = \dfrac{a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots + a_nz_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$

C_4 – Caractérisation du plan et de la droite

a) La droite :

Soit A et B deux points distincts de l'espace.

- La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B.
- Le segment [AB] est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients de même signe.

b) Le plan :

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

- Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points A, B et C.
- L'intérieur du triangle ABC est l'ensemble des barycentres des points A, B et C affectés de coefficients de même signe.

D. Le produit vectoriel

D_1 – orientation de l'espace

Les bases de l'espace peuvent être reparties en deux groupes :

a) Le groupe formé des bases dont les vecteurs respectent la règle du bonhomme d'Ampère.

b) Et le groupe formé des bases dont les vecteurs ne la respectent pas.

Orienter l'espace, c'est distinguer ces deux groupes de bases et choisir l'un comme étant formé des bases de sens positif ou direct. Les autres seront donc formés des bases indirectes ou de sens négatif.
Par convention, les bases du groupe a) seront dites directes et celles du groupe b) seront dites indirectes.
Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit direct (resp. indirect) lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe (resp. indirecte)

Remarques :

- ***Les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ ont le même sens.***
- ***Si on permute les positions de deux vecteurs d'une base, alors son sens change.***
- ***Si on multiplie un vecteur d'une base par un réel négatif non nul, alors son sens change.***

D_2 – Le produit vectoriel

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini comme suit :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\alpha . \vec{n}$, où α est la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ (lorsque $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$) et $\vec{n}$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est une base directe.

Remarques :

- ***Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de l'espace :***

On a : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ ***et*** $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$.

$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$; $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$ ***et*** $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$.

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ***est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.***
- ***Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe.***
- ***Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée directe.***
- ***Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de l'espace, alors on a : $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{w} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.***

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ ***lorsque $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe et $\vec{w} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$ lorsque $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée indirecte.***

D_3 – Propriétés algébriques du produit vectoriel

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, k un nombre réel.

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
- $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

D_4 – Coordonnées du produit vectoriel

L'espace vectoriel étant muni d'une base orthonormée directe.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (x , y , z) et (x' , y' , z').
$\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$.

D_5 – Utilisations du produit vectoriel

a) Colinéarité et alignement :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) Caractérisation du plan :

Soit P le plan passant par un point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- Un vecteur normal du plan P est : $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
- Le plan P est donc l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.
- Quatre points A, B, C et D de l'espace sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$.

c) Position relative de plans et droites dans l'espace :

Position relative de deux droites :

Soit (D) et (D') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- (D) est parallèle à (D') si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- (D) est orthogonale à (D') si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Position relative de deux plans :

Soit (P) et (P') deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

- (P) et (P') sont parallèles si et seulement si $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$.
- (P) et (P') sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.
- (P) et (P') sont sécants si et seulement si $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}$.

  Dans ce cas, (P) et (P') sont sécants suivant une droite dont un vecteur directeur est $\vec{n} \wedge \vec{n}'$.

Position relative d'une droite et d'un plan :

Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et (P) un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}$.

- (D) est parallèle à (P) si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.
- (D) et (P) sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

d) Distance d'un point à une droite – distance d'un point à un plan :

- Soit (D) la droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

La distance $d(M_0, (D))$ de (D) à un point M_0 de l'espace est donnée par : $d(M_0, (D)) = \dfrac{\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM_0}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

- Soit (P) le plan passant par un point A et de directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (de vecteur normal $\vec{n}$).

La distance $d(M_0, (P))$ d'un point M_0 au plan (P) est donnée par :

$$d(M_0, (P)) = \frac{\left|\overrightarrow{M_0A} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} \quad \text{ou} \quad d(M_0, (P)) = \frac{\left|\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} .$$

e) Calcul d'aires et de volumes :

- L'aire d'un triangle ABC est : $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \times \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.
- L'aire d'un parallélogramme ABCD est : $\text{Aire}(ABCD) = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.
- Le volume d'un tétraèdre ABCD est : $\text{volume}(ABCD) = \frac{1}{6} \times \left|\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\right|$.
- Le volume d'un pavé (parallélépipède) ABCDFGHI est : $\text{volume}(ABCDFGHI) = \left|\overrightarrow{AF} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\right|$.

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Dans le plan

1 – Calculer le produit scalaire

Exercice 1

ABC est un triangle équilatéral direct de côté 2, d'un plan P.

1) Calculer de 3 façons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

2) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$. Calculer la distance AD.

3) On considère le point O milieu de [AB]. Soit $\vec{i}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{j}=\alpha\overrightarrow{OC}$, où α est un réel strictement positif.

a) Déterminer α pour que le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ soit orthonormé.

b) Déterminer les coordonnées des points O, A, B et C dans ce repère.

c) Calculer alors le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Solution 1

1) 1ère méthode : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC})$.

Or ABC est un triangle équilatéral direct, alors $\text{mes}(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2\cos\frac{\pi}{3}=2$

2e méthode :

Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AH}\times\overline{AC}$.

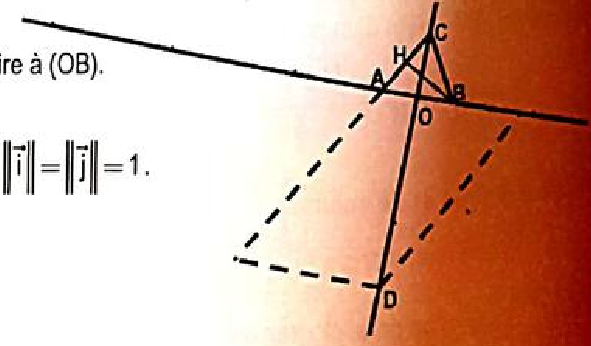
H est le milieu de [AC] donc $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Par conséquent, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}AC^2=2$.

3e méthode :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=\frac{1}{2}(2^2+2^2-2^2)=2$.

2) $AD^2=\overrightarrow{AD}^2=(2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC})^2=4AB^2+9AC^2-12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times2^2+9\times2^2-12\times2=28$.

Finalement, $AD=2\sqrt{7}$.



3)a) (OC) étant la médiatrice de [AB], (OC) est perpendiculaire à (OB).

D'où $\vec{i}$ est orthogonal à $\vec{j}$.

$(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ est alors un repère orthonormé si et seulement si $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$.

Or on a $\|\vec{i}\|=OB=1$ et $\|\vec{j}\|=|\alpha|OC=\alpha OC$.

On en déduit que, $\|\vec{j}\|=1$ si et seulement si $\alpha=\frac{1}{OC}$.

Mais, $OC^2=BC^2-\frac{1}{4}BC^2=\frac{3}{4}BC^2$. D'où $OC=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\sqrt{3}$ et $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) O est l'origine du repère, d'où O a pour coordonnées (0 , 0).

$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}=-\vec{i}$, d'où A a pour coordonnées (-1 , 0). $\overrightarrow{OB}=\vec{i}$, d'où B a pour coordonnées (1 , 0).

$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{\alpha}\vec{j}=\sqrt{3}\vec{j}$, d'où C a pour coordonnées $(0\,,\sqrt{3})$.

c) On a : $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (2 , 0) et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(1\,,\sqrt{3})$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times1+0\times\sqrt{3}=2$.

Exercice 2

On considère un rectangle ABCD de côtés AD = a et AB = 3a, a > 0.

Soit I le point défini par $\overrightarrow{DI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ et J le milieu de [BC]. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$

Solution 2

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}AD^2+\frac{2}{3}AB^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}(9a^2)=\frac{13}{2}a^2$.

Or $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=AI\times AJ\times\cos\widehat{IAJ}$.

Pour calculer les distances AI et AJ, on utilisera le théorème de Pythagore.

On aura $AI^2=a^2+4a^2=5a^2$ et $AJ^2=9a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{37a^2}{4}$.

Finalement, $\cos\widehat{IAJ}=\frac{\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}}{AI\times AJ}=\frac{\frac{13a^2}{2}}{a\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{37}}{2}a}=\frac{13\sqrt{185}}{185}$.

Une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$ est 0,3 radians ou 17,1°.

2 – *Calculer la distance d'un point à une droite*

Exercice 3

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ les points A(-1 , 1) , B(1 , 3) et C(4 , 0).
Déterminer l'aire du triangle ABC.

Solution 3

- On peut chercher une équation de la droite (AC).

Soit M(x , y) un point du plan.

M appartient à (AC) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC})=0$. C'est-à-dire $\begin{vmatrix} x+1 & 5 \\ y-1 & -1 \end{vmatrix}=0$.

Ce qui équivaut à x + 5y – 4 = 0. Une équation de la droite (AC) est donc : x + 5y – 4 = 0.

- On calcule la distance de B à (AC) en utilisant la formule : $d(B\,,(AC))=\frac{|x_B+5y_B-4|}{\sqrt{1^2+5^2}}=\frac{12}{\sqrt{26}}=\frac{6\sqrt{26}}{13}$.

Nous pouvons alors calculer l'aire du triangle ABC : $\text{Aire}(ABC)=\frac{d(B,(AC))\times AC}{2}=\frac{6\sqrt{26}}{2\times 13}\times\sqrt{26}=6$.

D'où l'aire du triangle ABC est égale à : 6 u.a.

Exercice 4

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, le cercle (C) de centre Ω(2 , 3) et de rayon 2 et la droite (D) d'équation 2x – y + 1 = 0. La droite et le cercle sont-ils sécants ?

Solution 4

Calculons la distance du centre du cercle à la droite :

$$d(\Omega\,,(D))=\frac{|2x_\Omega-y_\Omega+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Cette distance est strictement inférieure au rayon du cercle, donc (C) et (D) se coupent en deux points distincts.

3 – Déterminer des lieux géométriques

Exercice 5

Dans un plan, ABCD est un rectangle dont les diagonales se coupent en O. On pose AB = 4 et BC = 2.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=1$.

Solution 5

Commençons par chercher une solution particulière.

Existe-t-il un point H de la droite (OA) tel que $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AH}=1$?

Si un tel point existe, alors les points A, O et H seraient alignés. Donc il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AH}=\alpha\overrightarrow{AO}$.

Et puisque $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AH}=1$, alors on a $\overrightarrow{AO}\cdot(\alpha\overrightarrow{AO})=1$. C'est-à-dire, $\alpha OA^2=1$. On en déduit que $\alpha=\dfrac{1}{AO^2}$.

Or $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16 + 4 = 20$, alors $AO^2 = 5$. Alors $\alpha=\dfrac{1}{5}$. Et par suite, $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AO}$.

D'où le point H tel que $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AO}$ est solution de $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM})=1\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{HM}=1\\ &\Leftrightarrow 1+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{HM}=1\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{HM}=0\end{aligned}$$

> **Point méthode :**
> *Soit A et B deux points du plan et R un réel strictement positif.*
> *L'ensemble des points M du plan tels que :*
> - $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ *est la droite passant par A dont un vecteur normal est* $\vec{n}$
> - $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ *est le cercle de diamètre [AB].*
> - *AM = BM est la médiatrice du segment [AB].*
> - *AM = R est le cercle de centre A et de rayon R.*

Alors l'ensemble des points M est la droite passant par H et perpendiculaire à (AO).

Exercice 6

Soit A et B deux points distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

1) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA}=0$.

2) $(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA}=0$.

Solution 6

1) Soit I le milieu de [AB].

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA}=0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MA}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MA}=0$.

D'où l'ensemble des points M est le cercle de diamètre [IA].

2) $(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MA}=0$.

D'où l'ensemble des points M est la droite passant par A et perpendiculaire à (AB).

Exercice 7

Soit A et B deux points distincts du plan.

Déterminer, selon les valeurs du réel k, l'ensemble des points M tels que : $\dfrac{MA}{MB}=k$.

Solution 7

Si k < 0 : alors l'ensemble des points M est l'ensemble vide.

Si k = 0 : alors $\dfrac{MA}{MB}=0 \Leftrightarrow MA=0 \Leftrightarrow M=A$. L'ensemble des points M est le singleton {A}.

Si k = 1 : alors $\dfrac{MA}{MB}=1 \Leftrightarrow MA=MB$. D'où l'ensemble des points M est la médiatrice du segment [AB].

Si k est un réel positif différent de 0 et de 1 : alors

$\frac{MA}{MB}=k \Leftrightarrow MA=k\times MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-k^2\overrightarrow{MB}^2=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB})=0$.

Soit $G_1=\text{bar}\{(A,1),(B,-k)\}$ et $G_2=\text{bar}\{(A,1),(B,k)\}$.

On a $\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB}=(1-k)\overrightarrow{MG_1}$ et $\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=(1+k)\overrightarrow{MG_2}$.

Ainsi, $\frac{MA}{MB}=k \Leftrightarrow (1-k^2)\overrightarrow{MG_1}\cdot\overrightarrow{MG_2}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1}\cdot\overrightarrow{MG_2}=0$. (Car on a $k^2\neq 1$)

D'où l'ensemble des points M est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

4 – Angles orientés dans le plan

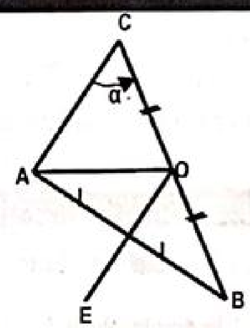
Exercice 8

ABC est un triangle rectangle en A et $\text{mes}(\overline{CA},\overline{CB})\equiv\alpha+k2\pi$, où k est un entier relatif, dans le plan orienté.

O étant le milieu de [BC] et E le point tel que $\overline{OE}=\overline{CA}$.

Evaluer la mesure de l'angle $(\overline{OA},\overline{OB})$ en fonction de α.

Solution 8



Soit E le point tel que $\overline{OE}=\overline{CA}$, on a :

$\overline{OB}=\overline{CO}$, $\overline{OE}=\overline{CA}$ et $\text{mes}(\overline{CA},\overline{CB})=\text{mes}(\overline{CA},\overline{CO})=\text{mes}(\overline{OE},\overline{OB})=\alpha+k2\pi$.

La droite (OE) est perpendiculaire à (AB), O est le milieu de [BC], d'où la droite (OE) est médiatrice de [AB].

[OA] et [OB] sont donc symétriques par rapport à (OE).

On obtient alors : $\text{mes}(\overline{OA},\overline{OE})=\text{mes}(\overline{OE},\overline{OB})+k2\pi$.

Or $(\overline{OA},\overline{OB})=(\overline{OA},\overline{OE})+(\overline{OE},\overline{OB})=2(\overline{OA},\overline{OE})$, alors $\text{mes}(\overline{OA},\overline{OB})=2\alpha+k2\pi$.

Exercice 9

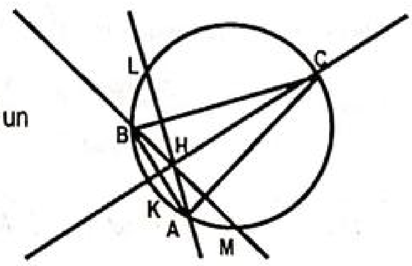
Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC non rectangle.

Démontrer que les points symétriques de H par rapport aux côtés du triangle sont des points du cercle circonscrit à ABC.

Solution 9

Soit K le symétrique orthogonal de H par rapport à (AB).

On veut montrer que A, B, C et K sont cocycliques.



On a $(\overline{KA},\overline{KB})=-(\overline{HA},\overline{HB})+k\pi$, k est un entier relatif. (Car les deux angles sont symétriques par rapport à (AB)).

Or (HA) est perpendiculaire à (BC), alors $\text{mes}(\overline{HA},\overline{BC})=\frac{\pi}{2}+k\pi$, où k est un entier relatif.

Et (HB) est perpendiculaire à (AC), alors $\text{mes}(\overline{AC},\overline{HB})=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Finalement, on a : $(\overline{HA},\overline{HB})=(\overline{HA},\overline{BC})+(\overline{BC},\overline{AC})+(\overline{AC},\overline{HB})$.

Alors, $\text{mes}(\overline{HA},\overline{HB})=\text{mes}(\overline{BC},\overline{AC})+\pi+k\pi=-\text{mes}(\overline{CA},\overline{CB})+k\pi$. Donc $\text{mes}(\overline{KA},\overline{KB})=\text{mes}(\overline{CA},\overline{CB})+k\pi$.

Or on a $\text{mes}(\overline{CA},\overline{CB})\neq k\pi$ puisque A, B et C ne sont pas alignés, alors les points A, B, C et K sont cocycliques.

De façon analogue, on montre que A, B, C et L (L est le symétrique de H par rapport à (BC)), d'une part, A, B, C et M (M est le symétrique de H par rapport à (AC)) d'autre part, sont cocycliques.

D'où K, L et M sont sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 10

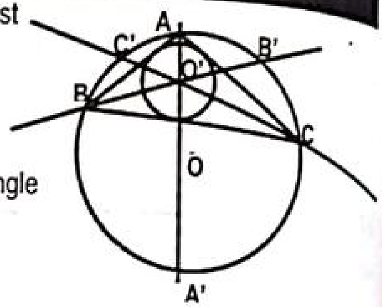
Un triangle ABC est inscrit dans un cercle de centre O.
On appelle A' le milieu de l'arc de corde [BC] ne contenant pas A, B' le milieu de l'arc de corde [AC] ne contenant pas B et C' le milieu de l'arc de corde [AB] ne contenant pas C.
Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Solution 10

A' est le milieu de l'arc de corde [BC], B' est le milieu de l'arc de corde [AC] et C' est le milieu de l'arc de corde [AB], d'où :

$(\widehat{\overline{AB}, \overline{AA'}}) = (\widehat{\overline{AA'}, \overline{AC}})$; $(\widehat{\overline{BC}, \overline{BB'}}) = (\widehat{\overline{BB'}, \overline{BA}})$ et $(\widehat{\overline{CA}, \overline{CC'}}) = (\widehat{\overline{CC'}, \overline{CB}})$.

Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont donc les bissectrices du triangle ABC.
Elles sont par conséquent concourantes au point O' centre du cercle inscrit au triangle ABC.



Exercice 11

Soit A et B deux points distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \alpha[2\pi]$, dans chacun des cas suivants :

a) $\alpha = 0$ b) $\alpha = \pi$ c) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ n'est pas un multiple de π.

Construire avec précision cet ensemble, lorsque $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Solution 11

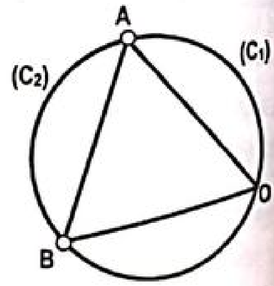
a) L'ensemble des points M du plan, tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv 0[2\pi]$ est la droite (AB) privée du segment [AB].

b) L'ensemble des points M du plan tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \pi[2\pi]$ est le segment [AB], privé des points A et B.

c) L'ensemble des points M tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ est le demi-cercle de diamètre [AB] contenant le point C, privé des points A et B tel que ABC soit un triangle rectangle et isocèle de sens direct.

1) Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$, soit O le point du plan tel que OAB soit un triangle équilatéral direct, on a :

$mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ équivaut à $mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv mes(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})[2\pi]$.



L'ensemble des points M tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ est l'arc (C_1) de cercle circonscrit au triangle OAB, d'extrémités A et B, contenant le point O, privé de A et B.

2) Si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, soit O le point du plan, OAB soit un triangle équilatéral direct, on a :

$mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ équivaut à $mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \pi - mes(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})[2\pi]$.

L'ensemble des points M tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ est l'arc (C_2) de cercle circonscrit au triangle OAB, d'extrémités A et B, ne contenant pas le point O, privé de A et B.

Exercice 12

Soit A et B deux points distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \alpha[\pi]$, dans chacun des cas suivants :

a) $\alpha = 0$. b) α n'est pas un multiple de π.

Construire avec précision cet ensemble, pour chacune des valeurs de α suivantes : $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

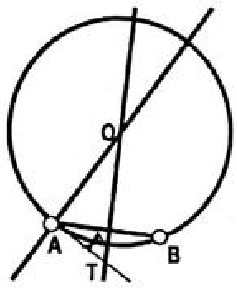
Solution 12

a) L'ensemble des points M du plan, tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv 0[\pi]$ est la droite (AB) privée des points A et B.

b) L'ensemble des points M tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \alpha[\pi]$ est un cercle passant par A et B privé des points A et B.

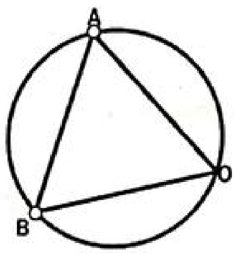
Pour avoir son centre, considérons un point T tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = \alpha$.
Son centre est le point d'intersèction de la médiatrice [AB] et de la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AT).

Pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$:



Pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$: soit O le point du plan tel que OAB soit un triangle équilatéral direct, on a :

$mes(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$ équivaut à $mes(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})[\pi]$.



L'ensemble des points M tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{3}[\pi]$ est le cercle circonscrit au triangle OAB, privé de A et B.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$: l'ensemble des points M tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ est le cercle de diamètre [AB], privé des points A et B.

B. Calculer le produit scalaire dans l'espace

Exercice 13

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé.
On considère les points $A(1,1,3)$, $B(\sqrt{2}+1,0,2)$ et $C(\sqrt{2}+1,2,2)$.
Calculer AB, AC et l'angle $\widehat{CAB}$. Que peut-on dire du triangle ABC ?

Solution 13

- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(\sqrt{2},-1,-1)$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(\sqrt{2},1,-1)$. Donc :

$AB = \sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2+1^2} = 2$ et $AC = \sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2+(-1)^2} = 2$. D'où AB = AC = 2.

- D'une part on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \sqrt{2}\times\sqrt{2}+(-1)\times1+(-1)\times(-1) = 2$.

et d'autre part on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\cos CAB = 4\cos CAB$.

D'où $4\cos CAB = 2$. Donc $\cos CAB = \frac{1}{2}$. Par conséquent, $mes CAB = \frac{\pi}{3}$.

- AB = AC = 2 et $mes CAB = \frac{\pi}{3}$, d'où le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 14

ABCDEFGH est un cube d'arête a. I est le milieu de [FG].

1) Calculer les différents produits scalaires : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AF}$.

2) Reprendre les calculs ci-dessus en considérant le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB},\frac{1}{AD}\overrightarrow{AD},\frac{1}{AE}\overrightarrow{AE}\right)$.

Solution 14

1) • $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=a^2$ (B est le projeté orthogonal de C sur (AB)).

• La droite (AB) est orthogonale aux droites (AD) et (AE), donc (AB) est orthogonale au plan (AED) qui contient la droite (AH). D'où (AB) est orthogonale à (AH). D'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=0$.

Autre méthode :

On peut écrire : $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

Alors on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=0+0=0$.

• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=AB^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=a^2+0+0=a^2$.

• $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})=AB^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+AE^2=2a^2$.

2) Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB},\frac{1}{AD}\overrightarrow{AD},\frac{1}{AE}\overrightarrow{AE}\right)$.

On a : A(0 , 0 , 0), B(a , 0 , 0), C(a , a , 0), F(a , 0 , a), G(a , a , a), H(0 , a , a) et $I\left(a,\frac{a}{2},a\right)$.

On obtient alors :
- $\overrightarrow{AB}(a,0,0)$ et $\overrightarrow{AC}(a,a,0)$. Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a\times a+0\times a+0\times 0=a^2$.
- $\overrightarrow{AB}(a,0,0)$ et $\overrightarrow{AH}(0,a,a)$. Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=a\times 0+0\times a+0\times a=0$.
- $\overrightarrow{AB}(a,0,0)$ et $\overrightarrow{AG}(a,a,a)$. Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=a\times a+0\times a+0\times a=a^2$.
- $\overrightarrow{AI}\left(a,\frac{a}{2},a\right)$ et $\overrightarrow{AF}(a,0,a)$. Donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AF}=a\times a+\frac{a}{2}\times 0+a\times a=2a^2$.

Exercice 15

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Déterminer une équation cartésienne :

a) du plan (P) passant par A(1 , 0 , 1) et de vecteur normal $\vec{n}(1,-1,0)$.

b) du plan (Q) médiateur du segment [DB], avec D(- 4 , 1 , 7) et B(2 , 3 , -5).

Solution 15

a) Soit M(x, y, z) un point de l'espace.

M appartient à (P) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ $\Leftrightarrow$ $x-y-1=0$.

Une équation cartésienne de (P) est donc : $x-y-1=0$.

b) Soit I milieu de [DB]. On a : I (-1, 2, 1) et $\overrightarrow{DB}(6,2,-12)$.

Soit M(x, y, z) un point de l'espace.

M appartient à (Q) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{DB}=0$ $\Leftrightarrow$ $6x+2y-12z+14=0$.

Une équation cartésienne de (Q) est : $3x+y-6z+7=0$.

C. Utiliser le barycentre dans l'espace pour démontrer

Exercice 16

Soit ABCD un tétraèdre.

1) Montrer que les droites passant par un sommet et le centre de gravité de la face opposée sont concourantes.

2) Montrer que les segments joignant les milieux des arêtes opposées se coupent en un même point.

Solution 16

1) Notons A', B', C' et D' les centres de gravité respectifs des faces BCD, ACD, ABD et ABC.

Soit G = bar{(A , 1), (B , 1), (C , 1), (D , 1)}.
On a : G = bar{(A , 1), (A' , 3)}, G = bar{(B , 1), (B' , 3)}, G = bar{(C , 1), (C' , 3)} et G = bar{(D , 1), (D' , 3)}.
D'où G appartient aux droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD'). (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont donc concourantes en G.
2) Notons I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [BC], [AD], [AC], et [BD].
G = bar{(A , 1), (B , 1), (C , 1), (D, 1)}.
On a : G = bar{(I , 2), (J , 2)}, G = bar{(K , 2), (L , 2)} et G = bar {(M , 2), (N , 2)}.
D'où G est milieu des segments [IJ], [KL] et [MN].
Les segments joignant les milieux des arêtes opposés se coupent donc en leur milieu G.

Exercice 17

Soit ABCD un tétraèdre. On considère les points E, F, G, H, I et J définis par :

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.

Démontrer que les droites (EF), (GH) et (IJ) sont concourantes en un même point.

Solution 17

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, donc E = bar{(B , 3), (C , 1)}; $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$, donc F = bar{(A , 5), (D , 3)};

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$, donc G = bar{(A , 5), (C , 1)}; $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, donc H = bar{(B , 1), (D , 1)} = bar {(B , 3), (D , 3)};

$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$, donc I = bar{(A , 5), (B , 3)}; $\overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$, donc J = bar{(C , 1), (D , 3)}.

Soit K = bar {(A , 5), (B , 3), (C , 1), (D , 3)}.
On a : K = bar {(I , 8), (J , 4)}, K = bar {(E , 4), (F , 8)} et K = bar {(G , 6), (H , 6)}.
D'où K appartient aux droites (IJ), (EF) et (GH). Les droites (IJ), (EF) et (GH) sont donc concourantes en K.

Exercice 18

Soit ABCD un tétraèdre. On note G le centre de gravité de la face BCD et on considère les points I, E et F définis par :

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les points I, E, F et D sont coplanaires.

Solution 18

G est le centre de gravité de la face BCD, c'est-à-dire G = bar {(B , 1), (C , 1), (D , 1)}.

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AG}$ donc, I = bar{(A , 3), (G , 1)} = bar{(A , 9), (G , 3)} = bar{(A , 9), (B , 1), (C , 1), (D , 1)}.

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ donc, E = bar {(A , 5), (B , 1)}. $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ donc, F = bar{(A , 4), (C , 1)}.

On a alors : I = bar {(A , 9), (B , 1), (C , 1), (D , 1)} = bar{(A , 5), (B , 1), (A , 4), (C , 1), (D , 1)}.
Il en résulte que I = bar {(E , 6), (F , 5), (D , 1)}. Par conséquent les points I, E, F et D sont coplanaires.

Exercice 19

Soit ABCD un parallélogramme et M un point quelconque de l'espace.
Démontrer que M, A, C d'une part et M, B, D d'autre part ont même isobarycentre.

Solution 19

Soit G = bar {(M , 1), (A , 1), (C , 1)}.
ABCD est un parallélogramme, donc C = bar {(A , -1), (B , 1), (D , 1)}. ***(le lecteur le vérifiera)***
D'où G = bar {(M , 1), (A , 1), (A , -1), (B , 1), (D , 1)} = bar {(M , 1), (B , 1), (D , 1)}.
Les points M, A, C d'une part et M, B, D d'autre part ont le même isobarycentre.

Exercice 20

Soit ABCD un parallélogramme. On appelle E le barycentre de {(A , 2), (B , 1)}, F le barycentre de {(B , 2), (C , 1)}, G le barycentre de {(C , 2), (D , 1)} et H le barycentre de {(D , 2), (A , 1)}.
Montrer que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.

Solution 20

Soit Ω = bar {(F , 1), (G , -1), (H , 1)}.

On a Ω = bar {(F , 3), (G , -3), (H , 3)} = bar {(B , 2), (C , 1), (C , -2), (D , -1), (D , 2), (A , 1)}
= bar {(A , 1), (B , 2), (C , -1), (D , 1)}.

Or ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$. Donc $-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

Par conséquent D est le barycentre de {(A , 1), (B , -1), (C , 1)}. On en déduit que :

Ω = bar{(A , 1), (B , 2), (C , -1), (A , 1), (B , -1), (C , 1)} = bar {(A , 2), (B , 1)} = E.

Donc E est le barycentre de {(F , 1), (G , -1), (H , 1)}, c'est-à-dire $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EH}=\vec{0}$.

Ce qui est équivalent à $\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{EH}=\vec{0}$. D'où $\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{HE}$. On en conclut que EFGH est un parallélogramme.

Exercice 21

Soit ABCD un parallélogramme et M le milieu [DC]. Les droites (AM) et (BD) se coupent en N, La parallèle à (AD) passant par N coupe (AB) en P. Soit I le milieu de [NP]. Démontrer que les points A, I et C sont alignés.

Solution 21

Notons Ω le barycentre de {(A , 1), (M , 2)}, Ω appartient à (AM).

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ donc $-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

Par conséquent, A est le barycentre du système {(B , 1), (C , -1), (D , 1)}.

On en déduit que Ω = bar{(C , -1), (B , 1), (D , 1), (M , 2)} et M est le milieu de [DC] donc,

Ω = bar{(C , -1), (B , 1), (D , 1), (D , 1), (C , 1)} = bar{(B , 1), (D , 2)}. D'où Ω appartient à (BD).

Ω est donc le point de rencontre des droites (AM) et (BD) qui est N.

D'où N = bar{(B , 1), (D , 2)} et N = bar{(A , 1), (M , 2)}.

Les projections conservent les barycentres donc, en projetant sur la droite (AB) parallèlement à la droite (AD), on obtient : P est le barycentre de {(B , 1), (A , 2)}.

I est le barycentre de {(N , 1), (P , 1)}.

I est le barycentre de {(N , 3), (P , 3)}.

I est le barycentre de {(B , 1), (D , 2), (B , 1), (A , 2)}.

I est le barycentre de {(B , 2), (D , 2), (A , 2)}.

I est le barycentre de {(B , 1), (D , 1), (A , 1)}.

ABCD étant un parallélogramme, D = bar {(B , -1), (C , 1), (A , 1)}.

On en déduit que : I = bar {(B , 1), (B , -1), (A ,1), (C , 1), (A , 1)} = bar {(A , 2), (C, 1)}.

Les points A, I et C sont donc alignés.

D. Déterminer une équation d'une sphère, d'un cône, d'un cylindre

Exercice 22

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A (6 , 0 , 0) et B(0 , 6 , 0).

1) Déterminer le barycentre G du système (O , 1), (A , 2) et (B , 3).

2) Soit C(0, 0, 4).

Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MC}=0$.

Donner une équation cartésienne de (S). Préciser ses éléments caractéristiques.

3) Soit (P), le plan d'équation x = 0. Déterminer l'intersection de (S) et (P)

Solution 22

1) $x_G=\dfrac{x_O+2x_A+3x_B}{6}=\dfrac{0+12+0}{6}=2$, $y_G=\dfrac{y_O+2y_A+3y_B}{6}=\dfrac{0+0+18}{6}=3$, $z_G=\dfrac{z_O+2z_A+3z_B}{6}=0$.

D'où G est le point de coordonnées (2 , 3 , 0).

2) • Soit M un point de l'espace.

On a : $\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=6\overrightarrow{MG}$. D'où :

M appartient à (S) $\Leftrightarrow$ $6\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MC}=0$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MC}=0$. D'où (S) est la sphère de diamètre [GC].

- Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

M appartient à (S) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MC}=0$ $\Leftrightarrow$ $(2-x)(-x)+(3-y)(-y)-z(4-z)=0$

$\Leftrightarrow$ $x^2+y^2+z^2-2x-3y-4z=0$

$\Leftrightarrow$ $(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{29}{4}$ ***(Le lecteur fera les calculs).***

D'où une équation de (S) est : $(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{29}{4}$.

(S) est la sphère de centre $\Omega\left(1,\frac{3}{2},2\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{29}}{2}$.

3) Méthode 1 :

La distance de Ω à P est : $d(\Omega,P)=\frac{|1+0+0|}{\sqrt{1+0+0}}=1$. Comme $d(\Omega,P)<\frac{\sqrt{29}}{2}$, alors (S) et (P) se rencontrent suivant un cercle de rayon $r=\sqrt{\frac{29}{4}-1}=\frac{5}{2}$ et de centre $\Omega'\left(0,\frac{3}{2},2\right)$ le projeté orthogonal de Ω sur (P).

Méthode 2 :

Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

M(x , y , z) appartient à (S)∩(P) $\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{29}{4}\\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{25}{4}\\ x=0\end{cases}$.

D'où (S) et (P) se rencontrent suivant le cercle de centre $\Omega'\left(0,\frac{3}{2},2\right)$ et de rayon $r=\frac{5}{2}$, dans le plan $(O;\vec{j},\vec{k})$.

Exercice 23

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne A(6 , -6 , 6), B(-6 , 0 , 6) et C(-2 , -2 , 11).

1)a)Déterminer une équation de la sphère (S) de centre B et passant par A.

b) Déterminer une équation du plan (Γ) tangent à (S) en A.

2)a)Déterminer les coordonnées du pied D de la perpendiculaire (D) à (Γ) passant par C.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AD) et (BC).

Solution 23

1)a) Le rayon de (S) est : $AB=\sqrt{(-6-6)^2+(0+6)^2+(6-6)^2}=6\sqrt{5}$.

Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

M(x , y , z) appartient à (S) $\Leftrightarrow$ BM = AB $\Leftrightarrow$ $BM^2=AB^2$ $\Leftrightarrow$ $(x+6)^2+y^2+(z-6)^2=180$.

D'où une équation de (S) est : $(x+6)^2+y^2+(z-6)^2=180$

b) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (-12 , 6 , 0). Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

M appartient à (Γ) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ $\Leftrightarrow$ $-12(x-6)+6(y+6)+0=0$ $\Leftrightarrow$ $2x-y-18=0$.

D'où le plan (Γ) a pour équation $2x-y-18=0$.

2)a) Déterminons une représentation paramétrique de (D) :

Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

M(x , y , z) appartient à (D) $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{CM}=k\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x=-12k-2\\ y=6k-2\ ,\ k\in\\ z=11\end{cases}$.

Une représentation paramétrique de (D) est donc : $\begin{cases}x=-12k-2\\ y=6k-2\ ,\ k\in\\ z=11\end{cases}$.

Déterminons les coordonnées de D :

M(x , y , z) appartient à (D)∩(Γ) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-18=0 \\ x=-12k-2 \\ y=6k-2 \\ z=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -24k-4-6k+2-18=0 \\ x=-12k-2 \\ y=6k-2 \\ z=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-\frac{2}{3} \\ x=6 \\ y=-6 \\ z=11 \end{cases}$.

D'où D(6 , - 6 , 11).

b) Les représentations paramétriques de (AD) et (BC) sont : (AD): $\begin{cases} x=6 \\ y=-6 \\ z=5k+6 \end{cases}$, k∈ et (BC): $\begin{cases} x=4k'-6 \\ y=-2k' \\ z=5k'+6 \end{cases}$, k∈ .

Soit M(x , y , z) un point de l'espace,

M appartient à (AD)∩(BC) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-6 \\ z=5k+6 \\ x=4k'-6 \\ y=-2k' \\ z=5k'+6 \end{cases}$. On a alors : $\begin{cases} 4k'-6=6 \\ -2k'=-6 \\ 5k'+6=5k+6 \end{cases}$. C'est-à-dire $\begin{cases} k'=3 \\ k=3 \end{cases}$.

D'où x = 6, y = -6 et z = 21. D'où (AD) et (BC) se rencontrent en E(6 , -6 , 21).

Exercice 24

On considère l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω(1, 2 , 3) et tangente au plan d'équation 2x – y + z + 2 = 0.

Solution 24

- Le rayon de la sphère est la distance de son centre Ω au plan d'équation 2x – y + z + 2 = 0, qui est :

$\frac{|2\times1-2+3+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$. D'où le rayon de la sphère est $R=\frac{5}{\sqrt{6}}$.

- Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

M(x , y , z) appartient à (S) $\Leftrightarrow \quad \Omega M=\frac{5}{\sqrt{6}} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega M^2=\frac{25}{6} \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{25}{6}$.

Une équation de la sphère de centre Ω et de rayon $\frac{5}{\sqrt{6}}$ est : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{25}{6}$.

Exercice 25

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a les points A(-3, 0, 1) , B(-2, 5, 1) et C(1, -1, 2).

Montrer que OABC est un tétraèdre.

Déterminer une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre OABC.

Solution 25

- Soit x, y et z trois nombres réels.

$$x\overline{OA}+y\overline{OB}+z\overline{OC}=\overline{0} \Leftrightarrow (-3x,0,x)+(-2y,5y,y)+(z,-z,2z)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (-3x-2y+z,5y-z,x+y+2z)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x-2y+z=0 \\ 5y-z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$$

La résolution de système aboutit à : x = y = z = 0.

Alors les vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ et $\overline{OC}$ sont non coplanaires. Finalement, les points O, A, B et C sont non coplanaires. Alors OABC est un tétraèdre.

- Soit (S) la sphère circonscrite à OABC, une équation de (S) est sous la forme, $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

O appartient à (S) donc $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + d = 0$, soit $d = 0$.
A appartient à (S) donc $9 + 0 + 1 - 3a + 0 + c = 0$, soit $3a - c = 10$
B appartient à (S) donc $4 + 25 + 1 - 2a + 5b + c = 0$, soit $2a - 5b - c = 30$
C appartient à (S) équivaut à $1 + 1 + 4 + a - b + 2c = 0$, soit $a - b + 2c = -6$.

D'où le système d'équations : $\begin{cases} 3a - c = 10 \\ 2a - 5b - c = 30 \\ a - b + 2c = -6 \end{cases}$.

La résolution de ce système permet de trouver : $a = \frac{25}{18}$, $b = -\frac{77}{18}$ et $c = -\frac{35}{6}$.

Donc une équation cartésienne de (S) est : $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{25}{18}x - \frac{77}{18}y - \frac{35}{6}z = 0$.

Exercice 26

Soit A(1 , 2 , 3), B(-2 , 1 , 4), C(2 , 0 , 3) et D(-1 , 2 , 3).
Déterminer l'intersection de la droite (CD) et de la sphère de diamètre [AB].

Solution 26

Déterminons une équation de la sphère (S) de diamètre [AB] :
Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

M(x , y , z) appartient à(S) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ $\Leftrightarrow$ $(x - 1)(x + 2) + (y - 2)(y - 1) + (z - 3)(z - 4) = 0$
$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y - 7z + 12 = 0$.

Une équation de (S) est donc : $x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y - 7z + 12 = 0$.
Déterminons une représentation paramétrique de la droite (CD) :

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées (-3 , 2 , 0).

M(x , y , z) appartient à (DC) $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = -3k + 2 \\ y = 2k \\ z = 3 \end{cases}$, $k \in$.

(DC) est donc l'ensemble des points M(-3k + 2 , 2k , 3) avec k variant dans $\mathbb{R}$.
M(-3k + 2 , 2k , 3) appartient à (S) si et seulement si $(2 - 3k)^2 + (2k)^2 + 9 + 2 - 3k - 3(2k) - 7\times3 + 12 = 0$.

C'est-à-dire $13k^2 - 21k + 6 = 0$. Cette équation a pour solutions : $k' = \frac{21 + \sqrt{129}}{26}$ et $k'' = \frac{21 - \sqrt{129}}{26}$.

D'où la droite (CD) et la sphère (S) se rencontrent en deux points :
$M_1\left(\frac{-11 - 3\sqrt{129}}{26}, \frac{21 + \sqrt{129}}{13}, 3\right)$ et $M_2\left(\frac{-11 + 3\sqrt{129}}{26}, \frac{21 - \sqrt{129}}{13}, 3\right)$.

Exercice 27

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

A –1) Déterminer une équation cartésienne du cylindre d'axe $(O ; \vec{i})$ et de rayon 2.

2) Déterminer une équation cartésienne du cylindre d'axe $(O ; \vec{i})$, passant par le point A(1 , 2 , 3).

B – 1) Déterminer une équation cartésienne du cône obtenu par la rotation de la droite (OB) autour de l'axe $(O ; \vec{k})$. Où B est le point de coordonnées (0 , 5 , 5).

2)a) Montrer que les plans (P) et (P') d'équations respectives $x + y - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D), intersection de (P) et (P').

c) Déterminer une équation du cône (C) de génératrice (D) et d'axe $(O ; \vec{i})$.

Solution 27

A –1) Soit M(x , y , z) un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $(O ; \vec{i})$.

H a pour coordonnées (x , 0 , 0).

La distance de M à $(O;\vec{i})$ est : $HM=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{y^2+z^2}$.

M appartient à notre cylindre si et seulement si, HM = 2. C'est-à-dire $HM^2 = 4$. Ce qui équivaut à $y^2 + z^2 = 4$.
D'où notre cylindre a pour équation $y^2 + z^2 = 4$.

2) Soit A' le projeté orthogonal de A sur $(O;\vec{j})$.

A' a pour coordonnées (0 , 2 , 0) et le rayon du cylindre est $AA'=\sqrt{(0-1)^2+(2-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{10}$.

Soit M(x , y , z) un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $(O;\vec{j})$.
H a pour coordonnées (0 , y , 0).

La distance de M à $(O;\vec{j})$ est : $HM=\sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+z^2}$.

M appartient à notre cylindre si et seulement si, $HM=\sqrt{10}$. C'est-à-dire $HM^2 = 10$. Ce qui équivaut à $x^2 + z^2 = 10$.
D'où notre cylindre a pour équation $x^2 + z^2 = 10$.

B – 1) Soit B' le projeté orthogonal de B sur $(O;\vec{k})$.

On a : B'(0 , 0 , 5), $BB'=\sqrt{(0-0)^2+(0-5)^2+(5-5)^2}=5$ et $OB'=\sqrt{(0-0)^2+(0-0)^2+(5-0)^2}=5$.

Notons θ l'angle $\widehat{BOB'}$, $\tan\theta=\dfrac{BB'}{OB'}=\dfrac{5}{5}=1$

Soit M(x , y , z) un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $(O;\vec{k})$.
H a pour coordonnées (0 , 0 , z).

La distance de M à $(O;\vec{k})$ est : $HM=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$ et $OH=\sqrt{z^2}=|z|$.

M appartient à notre cône si et seulement si, $HM=OH\tan\theta$. C'est-à-dire $HM^2=OH^2\times 1$.

Ce qui équivaut à $x^2+y^2=z^2$. D'où notre cône a pour équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

2)a) Les vecteurs $\vec{n}(1,1,-2)$ et $\vec{n}'(2,0,-1)$ sont les vecteurs normaux respectifs des plans (P) et (P').
Soit a un nombre réel.

$\vec{n}'=a\vec{n} \;\Leftrightarrow\; (0,2,-1)=(a,a,-2a) \;\Leftrightarrow\; a=0$ et $a=2$ et $-2a=-1$. Ce qui est absurde.

Donc a n'existe pas. Et par conséquent, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont non colinéaires. Finalement, (P) et (P') ne sont pas parallèles.

b) Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

M(x , y , z) appartient à $(P)\cap(P')$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=k \\ y=3k, \quad k\in \\ z=2k \end{cases}$.

Donc une représentation paramétrique de la droite (D), intersection de (P) et (P') est : $\begin{cases} x=k \\ y=3k, \quad k\in \\ z=2k \end{cases}$.

c) Le sommet du cône (C) est le point de rencontre de (D) et l'axe $(O;\vec{i})$ qui est O(0 , 0 , 0).
Un point de (D) est E(1 , 3 , 2) (en posant k = 1).

(C) est donc le cône d'axe $(O;\vec{i})$, de sommet O et passant par E.

Soit E' le projeté orthogonal de E sur $(O;\vec{i})$.

On a : E'(1 , 0 , 0), $EE'=\sqrt{(1-1)^2+(0-3)^2+(0-2)^2}=\sqrt{13}$ et $OE'=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2+(0-0)^2}=1$.

Notons θ l'angle $\widehat{EOE'}$, $\tan\theta=\dfrac{EE'}{OE'}=\dfrac{\sqrt{13}}{1}=\sqrt{13}$.

Soit M(x , y , z) un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $(O;\vec{i})$.
H a pour coordonnées (x , 0 , 0).

La distance de M à $(O\,;\,\vec{i})$ est : $HM=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{y^2+z^2}$ et $OH=\sqrt{x^2}=|x|$.

M appartient à (C) si et seulement si, $HM=OH\tan\theta$. C'est-à-dire $HM^2=OH^2\times 13$.

Ce qui équivaut à $y^2+z^2=13x^2$. D'où notre cône a pour équation $13x^2-y^2-z^2=0$.

E. Déterminer des lieux géométriques

Exercice 28

Dans l'espace euclidien, on considère deux points A et B de l'espace tels que AB = 6.

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=3$.

Solution 28

Soit I le milieu de [AB] et M un point quelconque de l'espace.

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=3 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=3 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=3 \Leftrightarrow MI^2-IA^2=3 \Leftrightarrow MI^2-9=3 \Leftrightarrow MI=2\sqrt{3}$

D'où l'ensemble cherché est la sphère de centre I et de rayon $2\sqrt{3}$.

Exercice 29

Dans l'espace euclidien, on considère les points A et B tels que AB = 6.

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\dfrac{MA}{MB}=3$.

Solution 29

Soit M un point de l'espace.

$\dfrac{MA}{MB}=3 \Leftrightarrow MA=3MB \Leftrightarrow MA^2=9MB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB})=0$.

Soit $G_1=\text{bar}\{(A\,,1),(B\,,-3)\}$ et $G_2=\text{bar}\{(A\,,1),(B\,,3)\}$.

On a $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MG_1}$ et $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MG_2}$. Ainsi, $\dfrac{MA}{MB}=3 \Leftrightarrow -8\overrightarrow{MG_1}\cdot\overrightarrow{MG_2}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1}\cdot\overrightarrow{MG_2}=0$.

D'où l'ensemble cherché est la sphère de diamètre $[G_1G_2]$.

Exercice 30

ABCDEFGH est un cube de côté a. Soit O le centre de la face ABCD.

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{OE}=-2a^2$.

Indication : ***On pourra vérifier que A appartient à cet ensemble.***

Solution 30

Soit G' barycentre des points pondérés (A , 1), (B , 2) et (C , 1). On a :
G' = bar{(A , 1), (C , 1) , (B , 2)} = bar{(O , 2), (B , 2)}. D'où G' est milieu de [OB].
Et $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MG'}$.

Ainsi $(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{OE}=-2a^2 \quad\Leftrightarrow\quad 4\overrightarrow{MG'}\cdot\overrightarrow{OE}=-2a^2 \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{G'M}\cdot\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}a^2$.

Montrons que A est une solution particulière de : $\overrightarrow{G'M}\cdot\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}a^2$.

On a : $\overrightarrow{G'A}=-\dfrac{1}{4}(3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$ et $\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AE})$.

Donc : $\overrightarrow{G'A}\cdot\overrightarrow{OE}=-\dfrac{1}{4}(3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot\dfrac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AE})=-\dfrac{1}{8}(-3AB^2-AD^2)=\dfrac{1}{2}AB^2=\dfrac{1}{2}a^2$.

D'où A vérifie bel et bien l'égalité $\overrightarrow{G'A}\cdot\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}a^2$. D'où :

$\overrightarrow{G'M}\cdot\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{G'M}\cdot\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{G'A}\cdot\overrightarrow{OE} \Leftrightarrow \overrightarrow{G'M}\cdot\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{G'A}\cdot\overrightarrow{OE}=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{G'M}-\overrightarrow{G'A})\cdot\overrightarrow{OE}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{OE}=0.$

D'où l'ensemble cherché est le plan passant par A et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{OE}$.

Exercice 31

On considère dans l'espace E, le carré ABCD de côté a.

1) Déterminer le barycentre G du système S = {(A , 2), (B , -1), (C , 1)}.

2) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

a) $\Gamma : \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|$.

b) $P : (2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{AD}=0$.

c) $Q : (2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})=0$.

d) $R : \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$.

3) Soit f est l'application de E vers E qui à tout point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{GM'}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

g est l'application de E vers E qui à tout point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f et g.

Solution 31

1) G = bar{(A , 2) , (B , -1) , (C ,1)} $\Leftrightarrow\ 2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$. D'où $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

2) On a $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$, où I est le milieu de [AB]. Ainsi :

a) M appartient à Γ $\Leftrightarrow$ 2MG = DA $\Leftrightarrow$ $GM=\frac{1}{2}AD$ $\Leftrightarrow$ $GM=\frac{1}{2}a$.

D'où Γ est la sphère de centre G et de rayon $\frac{1}{2}a$.

b) M appartient à P $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{AD}=0$. D'où P est le plan passant par G perpendiculaire à la droite (AD).

c) M appartient à Q $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{IM}=0$. D'où Q est la sphère de diamètre [GI].

d) M appartient à R $\Leftrightarrow$ GM = IM. D'où R est le plan médiateur du segment [IG].

3) • f(M) = M' $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$. D'où f est l'homothétie de centre G et de rapport -2.

• $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$.

g(M) = M' $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MM'}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. D'où g est la translation de vecteur $-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

Exercice 32

On considère un cube ABCDEFGH de côté a.

Montrer que, pour tout point M de l'espace $MA^2 - MD^2 + MG^2 = MF^2$.

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

1) $MA^2 - MD^2 + MG^2 = a^2$.

2) $MA^2 - MD^2 + MG^2 = -a^2$.

3) $MA^2 - MD^2 + MG^2 = 0$.

Solution 32

$$MA^2-MD^2+MG^2=(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA})^2-(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FD})^2+(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FG})^2$$
$$=MF^2+2\overrightarrow{MF}(\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FG})+FA^2-FD^2+FG^2$$

Or on a d'une part $\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{FG}=\vec{0}$

et d'autre part, $FA^2 - FD^2 + FG^2 = FA^2 - (FA^2 + AD^2) + FG^2 = FG^2 - AD^2 = 0$.

D'où $MA^2 - MD^2 + MG^2 = MF^2$.

1) $MA^2 - MD^2 + MG^2 = a^2$ $\Leftrightarrow$ $MF^2 = a^2$ $\Leftrightarrow$ FM = a.

L'ensemble cherché est donc la sphère de centre F et de rayon a. Elle passe par B, E et G.

2) $MA^2 - MD^2 + MG^2 = -a^2$ $\Leftrightarrow$ $MF^2 = -a^2$ (on a $-a^2 < 0$) . L'ensemble cherché est vide.

3) $MA^2 - MD^2 + MG^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $MF^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ M = F. D'où L'ensemble cherché est le singleton {F}.

F. Le produit vectoriel

1 – Calculer le produit vectoriel

Exercice 33

Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $\vec{u}\left(2, -\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\vec{v}(-1, 0, 3)$. Déterminer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Solution 33

Soit $p = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}$, $q = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$ et $r = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$.

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur de coordonnées $\left(-\frac{3}{2}, -7, -\frac{1}{2}\right)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 34

On donne les points A(-1 , 1 , 2), B(1 , 2 , 0) et C(0 , 4 , 6) dans un repère orthonormé direct.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, AB et AC. En déduire $\cos\widehat{BAC}$.

Peut-on déduire de la valeur de $\cos\widehat{BAC}$, la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$? Si oui quelle est cette mesure ?

2) Calculer la norme du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire $\sin\widehat{BAC}$.

Peut-on déduire de la valeur de $\sin\widehat{BAC}$ la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$?

Solution 34

1) On a : $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (2 , 1 , -2) et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (1 , 3 , 4).

- Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\times1 + 1\times3 + (-2)\times4 = -3$
- $AB = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$ et $AC = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}$.

Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$, d'où $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = -\dfrac{\sqrt{26}}{26}$.

- $\text{mes}\widehat{BAC}$ appartient à $[0, \pi]$, alors connaissant $\cos\widehat{BAC}$, on peut déduire $\text{mes}\widehat{BAC}$.

A l'aide de la calculatrice, on a $\text{mes}°\widehat{BAC} \approx 101{,}30°$.

2) • $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (10 , -10 , 5), donc $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{100 + 100 + 25} = 15$.

- Or $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = AB \times AC \times \sin\widehat{BAC}$, D'où $\sin\widehat{BAC} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{AB \times AC} = \dfrac{5\sqrt{26}}{26}$.
- Il y a deux réels dans $[0, \pi]$ dont le sinus est $\dfrac{5\sqrt{26}}{26}$.

D'où connaissant seulement $\sin\widehat{BAC}$, on ne peut pas déduire $\text{mes}\widehat{BAC}$.

2 – Prouver qu'une base est orthonormée

Exercice 35

Dans une base orthonormé directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on donne :

$\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{k})$, $\vec{v}=\frac{\sqrt{3}}{3}(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ et $\vec{w}=\frac{\sqrt{6}}{6}(-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$.

Montrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormé de l'espace. Préciser son sens.

Solution 35

On a : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\frac{2}{4}+0+\frac{2}{4}}=1$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{\frac{3}{9}+\frac{3}{9}+\frac{3}{9}}=1$

et $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+0\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=0$. D'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Déterminons les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$:

Méthode 1 :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{k})\wedge\frac{\sqrt{3}}{3}(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=\frac{\sqrt{6}}{6}(-\vec{i}\wedge\vec{i}+\vec{i}\wedge\vec{j}+\vec{i}\wedge\vec{k}-\vec{k}\wedge\vec{i}+\vec{k}\wedge\vec{j}+\vec{k}\wedge\vec{k})$$

D'où $\vec{u}\wedge\vec{v}=\frac{\sqrt{6}}{6}(\vec{0}+\vec{k}-\vec{j}-\vec{j}-\vec{i}+\vec{0})=\frac{\sqrt{6}}{6}(-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})=\vec{w}$.

Méthode 2 :

Soit $p=\begin{vmatrix}0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{vmatrix}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$; $q=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{vmatrix}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ et $r=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,

on a : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\frac{\sqrt{6}}{6}(-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})=\vec{w}$.

Puisque $\begin{cases}\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1\\ \vec{u}\perp\vec{v}\\ \vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}\end{cases}$, alors $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée directe de l'espace.

3 – Montrer que trois points sont alignés ou que deux vecteurs sont colinéaires

Exercice 36

Soit $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, B(2 , 0 , 1) et C(3 , -2 , -2).

Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Solution 36

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (1 , -2 , -3).

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2},5,-\frac{5}{2}\right)$. *(Le lecteur fera les calculs).*

Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$, alors A, B et C sont non alignés.

4 – Déterminer un vecteur normal et une équation cartésienne d'un plan

Exercice 37

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC), où A(-1 , 1 , 0) , B(1 , 1 , -2) et C(3 , 1 , -1) dans un repère orthonormé direct.

Solution 37

Vérifions d'abord si (ABC) est un plan, c'est-à-dire si A, B et C sont non alignés.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (2 , 0 , -2), $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (4 , 0 , -1).

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (0 , -6 , 0). ***(Le lecteur fera les calculs).***

Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$, alors A, B et C sont non alignés.

Et par conséquent, (ABC) est un plan et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
Ainsi, soit M(x , y , z) un point de l'espace,

M(x , y , z) appartient à (ABC) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$ $\Leftrightarrow$ $0\times(x+1)-6\times(y-1)+0\times z=0$ $\Leftrightarrow$ $y=1$.
D'où (ABC) est le plan d'équation y = 1.

5 – Prouver que quatre points ou trois vecteurs sont coplanaires

Exercice 38

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.

1) Les vecteurs $\vec{u}$ (2 , -3 , 1), $\vec{v}$ (-1 , 2 , 4) et $\vec{w}$ (3 , -2 , 1) sont-ils coplanaires ?

2) Les vecteurs $\vec{u}$ (2 , - 3 , 1) , $\vec{v}$ (-1 , 2 , 4) et $\vec{w}$ (3 , - 4 , 6) sont-ils coplanaires ?

Solution 38

1) $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}\right)$. Donc $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées (-14 , -9 , 1).

$(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}=-14\times3-9\times(-2)+1\times1=-23$.

Puisque $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}\neq0$, alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

2) $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}\right)$. Donc $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées (-14 , -9 , 1).

$(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}=-14\times3-9\times(-4)+1\times6=0$.

Puisque $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}=0$, alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exercice 39

Les points A(1 , 0 , -1), B(2 , 1 , 0), C(0 , 1 , -1) et D(-1 , 0 , 4) sont-ils coplanaires dans un repère orthonormé direct ?

Solution 39

Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

On a $\overrightarrow{AB}$ (1 , 1 , 1), $\overrightarrow{AC}$ (-1 , 1 , 0) et $\overrightarrow{AD}$ (-2 , 0 , 5). D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)$.

C'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (-1 , -1 , 2).

$(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=-1\times(-2)-1\times0+2\times5=12$. Puisque $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\neq0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non coplanaires. Par conséquent, les points A, B, C et D sont non coplanaires.

6 – Etudier la position relative de plans et de droites

Exercice 40

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O , I , J , K). Dire si les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles.

1) (P_1) : 2x – 3y + 4z + 2 = 0 et (P_2) : 3x + 2y + 2z – 1 = 0.

2) (P_1) : -x + 3y + 8z – 1 = 0 et (P_2) : $\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}y-\frac{4}{3}z+3=0$.

Solution 40

1) $\overrightarrow{n_1}(2,-3,4)$ et $\overrightarrow{n_2}(3,2,2)$ sont respectivement des vecteurs normaux à (P_1) et (P_2).

Or on a $\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}(-14,8,13)$ (le lecteur fera les calculs). Comme $\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}\neq\vec{0}$, alors $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont non colinéaires. D'où (P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles.

2) $\overrightarrow{n_1}(-1,3,8)$ et $\overrightarrow{n_2}\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{2},-\frac{4}{3}\right)$ sont respectivement des vecteurs normaux à (P_1) et (P_2).

Or on a $\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}(0,0,0)$ (le lecteur fera les calculs). Comme $\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}=\vec{0}$, alors $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont non colinéaires. D'où (P_1) et (P_2) sont parallèles.

Exercice 41

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, I, J, K). Dire si les plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

1) $(P_1): 2x-y+3z-1=0$ et $(P_2): -x+4y+2z-4=0$.

2) $(P_1): -x+3y+4z+2=0$ et $(P_2): 2x+y-z-6=0$.

Solution 41

1) $\overrightarrow{n_1}(2,-1,3)$ et $\overrightarrow{n_2}(-1,4,2)$ sont des vecteurs normaux respectifs de (P_1) et (P_2).

On a $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ (le lecteur fera les calculs). D'où $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n_2}$. Par conséquent (P_1) est orthogonal à (P_2).

2) $\overrightarrow{n_1}(-1,3,4)$ et $\overrightarrow{n_2}(2,1,-1)$ sont des vecteurs normaux respectifs de (P_1) et (P_2).

On a $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=-3\neq 0$ (le lecteur fera les calculs).

Donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas orthogonaux et les plans (P_1) et (P_2) ne sont pas perpendiculaires.

7 – Calculer l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme, le volume d'un tétraèdre et la distance d'un point à une droite ou à un plan

Exercice 42

ABCDEFGH est un cube de côté 1. L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

On désigne par I, le milieu de [EF] et par K le centre du carré ADHE.

1)a) Vérifier que $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$.

b) En déduire l'aire du triangle IGA.

2) Calculer le volume du tétraèdre ABIG et en déduire la distance du point B au plan (AIG).

Solution 42

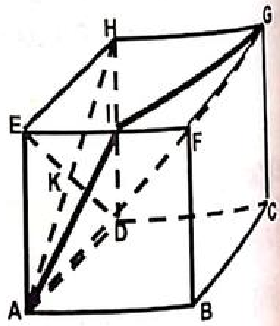
1)a) On a : $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{IA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Alors :

$$\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BK}.$$

Par conséquent, $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$.

Autre méthode:

On peut aussi utiliser les coordonnées des sommets du cube dans le repère donné.



b) L'aire du triangle IGA est : $\text{Aire(IGA)}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\right\|=\frac{1}{2}BK=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+AK^2}$.

Or $AK^2=\frac{1}{4}AH^2=\frac{1}{4}(AE^2+EH^2)=\frac{2}{4}$, alors $\text{Aire(IGA)}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ u.a.

2) • Le volume du tétraèdre ABIG est : $\text{Volume(ABIG)}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}).\overrightarrow{IB}\right|$.

Dans le repère donné, on a : B(1 , 0 , 0), $K\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $I\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

Donc $\overrightarrow{BK}$ a pour coordonnées $\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IB}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$.

D'où $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = -1$.

Et finalement, Volume(ABIG) $= \frac{1}{6}$ u.v..

Autre méthode :

Pour le calcul de $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IB}$, on peut aussi écrire : $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$.

Alors : $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}AE^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$.

- Soit O le projeté orthogonal de B sur le plan (AIG).

Volume(ABIG) $= \frac{1}{3}$OB $\times$ Aire(AIG), d'où $OB = \frac{3V(ABIG)}{aire(AIG)} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

La distance de B au plan (AIG) est : $OB = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Exercice 43

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct (O , I , J , K), on considère les points A(1 , 2 , 3), B(2 , - 3 , 4) et le vecteur $\vec{u}$ (1 , 2 , -3).

On note H le projeté orthogonal de B sur la droite D(A ; $\vec{u}$), passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1) Calculer $\left|\overrightarrow{AB}.\vec{u}\right|$, puis montrer que $AH\sqrt{14} = \left|\overrightarrow{AB}.\vec{u}\right|$.

2) En déduire la distance du point B à la droite D(A ; $\vec{u}$).

3) Calculer d(B, (D)), la distance de B à la droite D(A ; $\vec{u}$) en utilisant la formule : $d(B, (D)) = \frac{\left\|\overrightarrow{BA} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

Solution 43

1) • On a $\overrightarrow{AB}$ (1 , -5 , 1), $\vec{u}$ (1 , 2 , -3). Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 1\times1 + (-5)\times2 + 1\times(-3) = -12$. D'où $\left|\overrightarrow{AB}.\vec{u}\right| = 12$.

- Or $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u}$; H étant le projeté orthogonal de B sur la droite D(A ; $\vec{u}$).

On a, $\overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = 0$, d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = AH \times \left\|\vec{u}\right\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AH}, \vec{u}})$.

Puisque H appartient à D(A ; $\vec{u}$), alors on a mes$(\widehat{\overrightarrow{AH}, \vec{u}}) \equiv 0[\pi]$.

D'où $\left|\overrightarrow{AB}.\vec{u}\right| = AH \times \left\|\vec{u}\right\| \times \left|\cos(\widehat{\overrightarrow{AH}, \vec{u}})\right| = AH \times \left\|\vec{u}\right\|$. Comme $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{14}$, alors $AH\sqrt{14} = \left|\overrightarrow{AB}.\vec{u}\right|$.

2) D'après la question 1), on a : $AH = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\vec{u}\right|}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{7}$.

Le triangle ABH est rectangle en H, d'où $BH^2 = AB^2 - AH^2 = \frac{117}{7}$. D'où $BH = \sqrt{\frac{117}{7}}$.

La distance de B à la droite D(A ; $\vec{u}$) est $BH = \sqrt{\frac{117}{7}}$.

3) $\overrightarrow{BA} \wedge \vec{u}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \right)$.

C'est-à-dire $\overrightarrow{BA} \wedge \vec{u}$ a pour coordonnées (-13 , -4 , -7). Par suite $\left\| \overrightarrow{BA} \wedge \vec{u} \right\| = \sqrt{169+16+49} = \sqrt{234}$.

D'où la distance de B à (D) est : $d(B , (D)) = \dfrac{\sqrt{234}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{117}{7}}$.

Exercice 44

L'espace est muni à un repère orthonormé (O , I , J , K). Soit A(1, 2, 3), B(-1, 4, 3), C(2, 0, 1) et D(0, 4, 15).

1) Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).
2) Déterminer une équation du plan (ABC).
3) Montrer que le point D n'appartient pas au plan (ABC).
4) Calculer la distance de D au plan (ABC).
5) Calculer le volume du tétraèdre ABCD. En déduire l'aire du triangle ABC.

Solution 44

1) Un vecteur normal au plan (ABC) est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (-2 , 2 , 0) et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (1 , -2 , -2),

donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right)$.

D'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ de coordonnées (-4 , -4 , 2) est un vecteur normal au plan (ABC).

2) M(x , y , z) appartient à (ABC) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$ $\Leftrightarrow$ $-4(x-1) - 4(y-2) + 2(z-3) = 0$.

$\Leftrightarrow$ $-2x - 2y + z + 3 = 0$.

D'où une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + 2y - z - 3 = 0$.

3) $2\times0 + 2\times4 - 1\times15 - 3 = -10 \neq 0$. D'où D n'appartient pas au plan (ABC).

4) La distance de D au plan (ABC) est donnée par la formule : $d(D , (ABC)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{DA}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\right|}{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}$.

Or on a : $\overrightarrow{DA}$ (1 , -2 , -12), $\overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = -4 + 8 - 24 = -20$ et $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{16+16+4} = 6$.

D'où $d(D , (ABC)) = \dfrac{10}{3}$. La distance de D au plan (ABC) est donc $\dfrac{10}{3}$.

Autre méthode :

On peut aussi utiliser l'équation cartésienne du plan (ABC). On aura : $d(D , (ABC)) = \dfrac{|2x_D + 2y_D - z_D - 3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{10}{3}$.

5) • Le volume du tétraèdre ABCD est donné par la formule : $\text{Volume}(ABCD) = \dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{1}{6}\times 20 = \dfrac{10}{3}$.

Le volume du tétraèdre ABCD est donc : $\dfrac{10}{3}$ u.v..

• Notons V le volume du tétraèdre ABCD ; Aire(ABC) l'aire du triangle ABC et h la hauteur du tétraèdre issue de D.

On a alors : $V = \dfrac{1}{3}h \times \text{Aire}(ABC)$, d'où $\text{Aire}(ABC) = \dfrac{3V}{h} = \dfrac{3\times\frac{10}{3}}{\frac{10}{3}} = 3$.

D'où l'aire du triangle ABC est Aire(ABC) = 3 u.a.

8 – Déterminer les lieux géométriques

Exercice 45

Soit A, B et C trois points de l'espace orienté.

Déterminer l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

Solution 45

Soit I milieu de [AB]. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$, donc :

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

D'où l'ensemble cherché est la droite passant par I et parallèle à (AC).

Exercice 46

Soit A et B deux points distincts de l'espace orienté, I le milieu de [AB].

1) Démontrer que pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{AB}$.

2) En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|=MI\times AB$.

Solution 46

1) $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\wedge(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MA}=\vec{0}$).

De même $\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AI})\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}$).

D'où $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{AB}$.

2) D'après la question 1), on a $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|$.

L'ensemble (E) est donc l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|=MI\times AB$.

Or **si M ≠ I**, alors $\left\|\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|=MI\times AB\times\sin\widehat{MIA}$.

Donc M appartient à (E) si et seulement si $\sin\widehat{MIA}=1$, c'est-à-dire $mes\widehat{MIA}=\frac{\pi}{2}$.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $mes\widehat{MIA}=\frac{\pi}{2}$ est le plan médiateur de [AB], privé du point I.

Mais **si M = I**, alors $\left\|\overrightarrow{II}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|=0$ et II×AB = 0, d'où l'égalité $\left\|\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|=MI\times AB$ est encore vraie.

Finalement, l'ensemble (E) des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|=MI\times AB$ est le plan médiateur de [AB].

Exercice 47

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit A, B, C les points tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{k}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}\right\|$.

2) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}\right\|$.

Solution 47

1) Soit M point de l'espace de coordonnées (x , y , z).

On a A(1 , 0 , 0) , B(0 , 1 , 0) et C(0 , 0 , 1).

Le vecteur $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}$ a pour cordonnées (z , z , 1 – x – y) (le lecteur fera les calculs).

Le vecteur $\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}$ a pour coordonnées (1 – y – z , x , x) (le lecteur fera les calculs).

Donc $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}\right\|$ équivaut à $z^2 + z^2 + (1 - x - y)^2 = (1 - y - z)^2 + x^2 + x^2$, puis à

$z^2 - x^2 - 2x + 2z + 2xy - 2yz = 0$, ensuite à $(z - x)(z + x) - 2(x - z) + 2y(x - z) = 0$, ensuite à $(z - x)(z + x - 2y + 2) = 0$ et enfin à $x - z = 0$ ou $x - 2y + z + 2 = 0$.

Par conséquent, l'ensemble des points $M(x , y , z)$ tels que $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}\right\|$ est la réunion des plans d'équations respectives $x - z = 0$ et $x - 2y + z + 2 = 0$.

2) D'après ce qui précède, $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}\right\|$ si et seulement si, $x - z = 0$ ou $x - 2y + z + 2 = 0$.

Comme à la question 1), on montre que :

$\left\|\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}\right\|$ si et seulement si, $x - y = 0$ ou $x + y - 2z + 2 = 0$ (le lecteur fera les calculs).

Alors, $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}\right\|$ est équivalent à $\begin{cases} x=z \text{ ou } x-2y+z+2=0 \\ x=y \text{ ou } x+y-2z+2=0 \end{cases}$, puis à $\begin{cases} x=z \\ x=y \end{cases}$ ou

$\begin{cases} x=z \\ x+y-2z+2=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-2y+z+2=0 \\ x=y \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-2y+z+2=0 \\ x+y-2z+2=0 \end{cases}$.

Enfin à $\begin{cases} x=k \\ y=k \quad k\in\mathbb{R} \\ z=k \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=k \\ y=k-2 \quad k\in\mathbb{R} \\ z=k \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=k \\ y=k \quad k\in\mathbb{R} \\ z=k-2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=k-2 \\ y=k \quad k\in\mathbb{R} \\ z=k \end{cases}$.

Finalement, l'ensemble des points $M(x , y , z)$ de l'espace tels que :

$\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}\right\|$ est la réunion des quatre droites passant respectivement par O, $A(0 , -2 , 0)$, $B(0 , 0 , -2)$ et $C(-2 , 0 , 0)$ et ayant toutes pour vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Exercice 48

Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace orienté.

1) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

2) Soit I le milieu de [AC], démontrer que l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}$ est la droite (IB).

Solution 48

1) Soit M un point de l'espace, on a :

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AB}\wedge(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC})=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

Donc l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est la droite passant C et parallèle à la droite (AB).

2) Soit M un point de l'espace, $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}$ équivaut successivement à $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, puis $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})\wedge\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, ensuite $2\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ et enfin $\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Ce qui signifie que les points M, I et B sont alignés. En d'autres termes, M appartient à la droite (IB).

Finalement, l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}$ est la droite (IB).

Exercice 49

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, soit A et B deux points tels que AB = 5.

1) Si M est un point de l'espace, interpréter géométriquement $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|$.

2) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|=20$.

Solution 49

1) $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|$ représente le double de l'aire du triangle ABM.

2) L'aire du triangle ABM est aussi égale à : $\dfrac{AB \times d(M,(AB))}{2}$.

D'où d'après la question 1), $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = 20$ équivaut à $AB \times d(M, (AB)) = 20$. C'est-à-dire $d(M, (AB)) = 4$.

D'où l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = 20$ est le cylindre d'axe (AB) et de rayon 4.

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 50 — 25 minutes

1) On donne dans l'espace E, trois points non alignés A, B, C et le point I défini par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

De quels coefficients a, b, c faut-il affecter respectivement A, B et C pour que I soit leur barycentre ?

2) On suppose maintenant que ABC est un triangle rectangle en A et que AB = 2 et AC = 1.

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

a) (S) : $MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3$.   b) (P) : $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = -3$.

Exercice 51 — BAC Etranger — 25 minutes

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1 , 0 , -1), B(2 , 1 , 0), C(0 , 1 , -1) et D(-1 , 0 , 4).

1)a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires.

c) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

2) Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 + MD^2 = 29$.

a) Vérifier que les points B et C appartiennent à (S).

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S).

Exercice 52 — BAC C et E – Cameroun – 2000 — 30 minutes

O, A, B et C désignent quatre points non coplanaires de l'espace affine euclidien, P et Q les milieux respectifs des segments [AC] et [OB].

On note D le barycentre des points O, A, B et C affectés des coefficients respectifs 3, 2, 3 et -2.

1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DQ}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires. Placer les points A, B, C, O et D sur une figure.

Dans la suite de l'exercice, on note M un point de l'espace,

$$\vec{v} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \quad \text{et} \quad \vec{w} = 3\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}.$$

2)a) Vérifier que $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$ et que $\vec{w} = 6\overrightarrow{MD}$.

b) En déduire la nature de Δ ainsi que celle de S, où Δ est l'ensemble des points M tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires. S est l'ensemble des points M tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont la même norme.

3) On suppose (pour cette question) que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et que les points A, B et C ont pour coordonnées (2 , 0 , 0), (0 , 2 , 0) et (0 , 0 , 1) respectivement.

Ecrire une équation cartésienne de S et un système d'équations paramétriques de Δ.

Exercice 53 — 35 minutes

ABC est un triangle. On pose BC = a, AC = b et AB = c.

A' est le milieu du segment [BC], B' celui de [AC], C' celui de [AB], G l'isobarycentre du triangle ABC.

1) Montrer que, pour tout point M du plan, $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

2) En calculant de deux façons différentes : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$, établir que :

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}.$$

3) On considère les points communs aux cercles de diamètres respectifs [AA'] et [BC].

Montrer que, lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on précisera le rayon en fonction de a, b et c.

Exercice 54 — BAC sportifs de haut niveau – France – 1995 — 25 minutes

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A(3 , 2 , -1) et H(1 , -1 , 3).

1) Calculer la longueur AH.
2) Déterminer une équation du plan (P) passant par H et orthogonal à la droite (AH).
3) On donne les points B(-6 , 1 , 1), C(4 , -3 , 3) et D(-1 , -5 , -1).
Démontrer que B, C et D appartiennent au plan (P).
Démontrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.
Démontrer que le volume du tétraèdre ABCD est égal à $\frac{145}{3}$.

Exercice 55 — 45 minutes

A, B, C et D sont quatre points non coplanaires de l'espace ; I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD] ; m est un réel non nul et G_m = bar {(A , 1), (B , 1), (C , m – 2), (D , m)}.
1) Construire G_m dans les cas particuliers.
a) m = 2. b) m = 1. c) En déduire que G_2 est le milieu du segment [G_1J].
2) Montrer que $\overrightarrow{IG_m} = \left(\frac{m-2}{2m}\right)\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$.

En déduire que l'ensemble (S) des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$ est inclus dans un plan que l'on précisera.
3) Montrer que $m\,\overrightarrow{JG_m}$ est un vecteur constant. En déduire l'ensemble (S).

Exercice 56 — 20 minutes

Soit P un plan affine, A et B deux points distincts de P.
A tout réel α et pour tout point M du plan, on associe le système : S_α = {(A, α), (B, α + 1), (M , -α)}.
1) Déterminer l'ensemble E des réels α pour lesquels le système S_α admet un barycentre.
2) Soit α appartenant à E, on note Φ_α l'application de P vers P, qui à tout point M, associe le point M', barycentre de S_α. Quelle est la nature de Φ_α ?

Exercice 57 — Extrait d'un BAC étranger — 45 minutes

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives (-1 , 0 , 2), (3 , 2 , -4), (1 , -4 , 2) et (5 , -2 , 4).
On considère les points I, J et K définis comme suit : I milieu de [AB], K milieu de [CD] et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
1) Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2) Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.
Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est 8x + 9y + 5z – 12 = 0.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées. Montrer que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
3) Plus généralement, dans l'espace E, on considère un tétraèdre ABCD ainsi que les points I, J, K et L définis par I milieu du segment [AB], K milieu du segment [CD], $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
Soit G le barycentre de {(A , 3), (B , 3), (C , 1), (D , 1)}.
Déterminer le barycentre de {(A , 3), (D , 1)} et le barycentre de {(B , 3), (C , 1)}.
En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que G appartient aux droites (IK) et (JL).
En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

Exercice 58 — Extrait d'un BAC étranger — 45 minutes

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace et k un réel de l'intervalle [-1 , 1].
On note G_k le barycentre du système {(A , k^2 + 1), (B , k), (C , -k)}.
1) Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}.
2) Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle [-1 , 1], on a l'égalité : $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

MBITA

Etablir le tableau de variation de la fonction f définie sur [-1 , 1] par : $f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$.

En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle [-1 , 1].

3) Déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que : $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$.

4) Déterminer l'ensemble (F) des points M de l'espace tels que : $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$

5) L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (0 , 0 , 2), (-1 , 2 , 1) et (-1 , 2 , 5).
Le point G_k et les ensembles (E) et (F) sont définis comme ci-dessus.
Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}.
Montrer que les ensembles (E) et (F) sont sécants. Calculer le rayon du cercle (C), intersection de (E) et (F).

Exercice 59 — 25 minutes

Soit P un plan. ABC est un triangle rectangle en A et isocèle tel que AB = AC = a, où a est un réel positif.
Soit m un paramètre réel.
1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que le système de points pondérés {(A , 2), (B , -1), (C , m)} admette un barycentre G_m.

2) Construire G_0, puis G_2. Vérifier que $G_0G_2=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

3) Déterminer l'ensemble (Γ_1) des points M tels que : $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

Exercice 60 — 35 minutes

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(1 , 2 , 2), B(3 , 2 ,1) et C(1 , 3 , 3).
1) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan. Donner une équation de ce plan.
2) On considère les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives (P_1) : $x-2y+2z-1=0$ et (P_2) : $x-3y+2z+2=0$.
Montrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.
On notera (Δ) leur droite d'intersection. Montrer que le point C appartient à la droite (Δ).
Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ (2 , 0 , -1) est un vecteur directeur de la droite (Δ).
Déduire une représentation paramétrique de la droite (Δ).

3) Pour déterminer la distance du point A à la droite (Δ) d'équation paramétrique : $\begin{cases}x=2k+1\\ y=3\\ z=-k+3\end{cases}, k\in\mathbb{R}$.

On considère le point M de paramètre k de la droite (Δ).
Déterminer la valeur de k pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.
En déduire la distance du point A à la droite (Δ).

Exercice 61 — 30 minutes

On considère dans le plan orienté un triangle non aplati ABC.
On note G le barycentre des points pondérés (A , 3) , (B , 1) et (C , 1).
Q le barycentre des points pondérés (A , 3) et (C , 1),
Et enfin R le barycentre des points pondérés (A , 3) et (B , 1).
1) Démontrer que les droites (BQ) et (CR) passent par G
2) Soit P le milieu du segment [BC].
Démontrer que les points A, P et G sont alignés. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{PG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{PA}$.

3) Soit Δ l'ensemble des points M du plan tels que : $mes(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$.

On suppose que B et C sont fixes et que A décrit l'ensemble Δ. Déterminer l'ensemble Γ décrit par le point G

Exercice 62 25 minutes

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté.

1) Démontrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.

2) En déduire que : $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{CA}{\sin\widehat{CBA}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{ACB}}$.

Exercice 63 45 minutes

L'espace est muni d'un repère orthogonal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points A(1 , 0 , 0), B(1 , -1 , 1), C(-2 , 0 , 1), D(-2 , 1 , 0) et M(x , y , z).

1) On considère le vecteur $\vec{V}$ tel que $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Déterminer le triplet (x , y , z) de coordonnées de M pour que l'on ait simultanément $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{V} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{V} = 0$.

2) Déterminer le lieu géométrique des points G_λ, barycentres des points pondérés (A, λ) ; $(B, \lambda - 1)$; $(C, 1 - 2\lambda)$; $(D, 1)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$

(Indication : ***ABCD est un parallélogramme non aplati).***

3) Soit H un point de l'espace tel que ABCH soit un tétraèdre, I le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le milieu de [CH].

Soit α un réel différent de -1, 0 et 1 et H_α le barycentre lorsqu'il existe des points pondérés $(A, 2\alpha + 1)$, (B, α), $(C, \alpha - 2)$, $(H, -3)$.

a) Montrer que H_α est un point du plan (IJK).

b) Soit E le milieu de [IJ] et F le barycentre des points pondérés (J , 1) ; (K , -3).

Montrer que H_α est un point de la droite (EF).

Exercice 64 **Extrait d'un BAC français – 1987** 50 minutes

L'espace est muni d'un repère orthogonal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On donne les points $A\left(-\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$, $B\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$ et F(0 , 1 , 0).

1) Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$. Déterminer le point M_0 tel que $\overrightarrow{M_0A} \wedge \overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{M_0F}$.

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$ tel que : $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MF}\|$.

En interprétant $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\|$ comme une aire, montrer que ces points M sont à égale distance du point F et de la droite (AB). En déduire une solution géométrique.

3) Résoudre les mêmes questions qu'à la question 2) en remplaçant le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$ par le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 65 **Extrait d'un BAC français – 1981** 25 minutes

1) ABC est un triangle du plan P tel que AB = AC = 5 et BC = 6

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) On désigne par G le barycentre de (A , 2), (B , 3) et (C , 3).

Construire le point G et calculer la distance GA.

3) On considère l'application f de P dans $\mathbb{R}$ qui, à tout point M de P, associe le réel :

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

Démontrer que l'on a, pour tout point M de P, $f(M) = f(G) + 4MG^2$. Calculer numériquement f(A) et f(G).

4) Déterminer et construire l'ensemble E des points M tels que : f(M) = f(A).

Exercice 66 **Concours d'entrée à l'ENSP de Yaoundé – Cameroun – 2007** 25 minutes

ABCDE est une pyramide de base ABCD, carré de centre O et EA = EB = EC = ED = 2a et OA = a.

1) Montrer que la droite (EO) est orthogonale au plan (ABCD).

2) Déterminer suivant les valeurs du réel k, l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = ka^2.$$

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

Solution 50

1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CI} = \vec{0}$. D'où I = bar {(A , 1), (B , -2), (C , -1)}.

2)a) $MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2$.

$= -2MI^2 - 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}) + IA^2 - 2IB^2 - IC^2$.

$= -2MI^2 + IA^2 - 2IB^2 - IC^2$.

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $IA^2 = (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC})^2 = AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 = \frac{17}{4}$.

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $BI^2 = \frac{1}{4}AC^2 = \frac{1}{4}$.

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $CI^2 = (\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC})^2 = AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 = \frac{17}{4}$.

D'où $MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -2MI^2 + \frac{17}{4} - \frac{2}{4} - \frac{17}{4} = -2MI^2 - \frac{1}{2}$. Ainsi,

$MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3 \Leftrightarrow -2MI^2 - \frac{1}{2} = -3 \Leftrightarrow MI = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

D'où (S) est la sphère de centre I, de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) • $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = MA^2 - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})^2 = 2\overrightarrow{MA}(-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - 2AB^2 + AC^2$.

$= 2\overrightarrow{MA}(-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - 7$

Considérons le point D tel que $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, on aura alors $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} - 7$.

Donc $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = -3 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} = 2$.

• Soit H le point de (AD) tel que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AD} = 2$.

On a $\overrightarrow{HA} = \alpha\overrightarrow{AD}$. Donc $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AD} = \alpha AD^2$.

Puisque $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, alors $AD^2 = (-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = 4AB^2 + AC^2 = 17$.

On en déduit $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AD} = \alpha AD^2 = 17\alpha$. Comme $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AD} = 2$, alors on a $17\alpha = 2$. Alors $\alpha = \frac{2}{17}$ et $\overrightarrow{HA} = \frac{2}{17}\overrightarrow{AD}$.

• On obtient alors $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = -3 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{AD} = 0$.

(P) est le plan passant par H et orthogonal à (AD).

Solution 51

1)a) Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont (1 , 1 , 1) et celles de $\overrightarrow{AC}$ sont (-1 , 1 , 0).

D'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}\right)$. C'est-à-dire $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (-1 , -1 , 2).

b) A, B, C et D sont non coplanaires lorsque $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non coplanaires. C'est-à-dire $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

Or $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées (-2 , 0 , 5), alors $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 2 + 0 + 10 = 12 \neq 0$.

A, B, C et D sont donc non coplanaires.

c) Le volume du tétraèdre ABCD est donné par la formule : $\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right| = 2$ u.v..

2)a) • $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées (-1 , -1 , -1), $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées (-3 , -1 , 4),

$BA=\sqrt{3}$, $BD=\sqrt{9+1+16}=\sqrt{26}$. Donc $BA^2 + BD^2 = 3 + 26 = 29$. D'où B appartient à (S).

- $\overrightarrow{CA}$ a pour coordonnées (1 , -1 , 0), $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées (-1 , -1 , 5),

$CA=\sqrt{2}$, $CD=\sqrt{27}$ et $CA^2+ CD^2 = 2 + 27 = 29$. D'où C appartient à (S).

b) Soit I le milieu de [AD], et M un point de l'espace. On a :

$$MA^2+MD^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID})^2=2MI^2+2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID})+2IA^2=2MI^2+\frac{AD^2}{2}=2MI^2+\frac{29}{2}.$$

Ainsi, M appartient à (S) $\Leftrightarrow$ $2MI^2+\frac{29}{2}=29$ $\Leftrightarrow$ $IM^2=\frac{29}{4}$ $\Leftrightarrow$ $IM=\frac{\sqrt{29}}{2}$.

D'où (S) est la sphère de centre I, de rayon $\frac{\sqrt{29}}{2}$,

Solution 52

1) D = bar {(O, 3), (A, 2), (B, 3), (C , -2)} = bar {(O , 3), (B , 3), (A , 4), (A , -2), (C , -2)} = bar {(Q , 6), (A , 4), (P , - 4)}.

D'où $6\overrightarrow{DQ}+4\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DP}=\vec{0}$, c'est-à-dire $6\overrightarrow{DQ}+4\overrightarrow{PA}=\vec{0}$.

Donc $\overrightarrow{DQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$. D'où les vecteurs $\overrightarrow{DQ}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires.

2)a) $\vec{v}=\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MB}-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})$

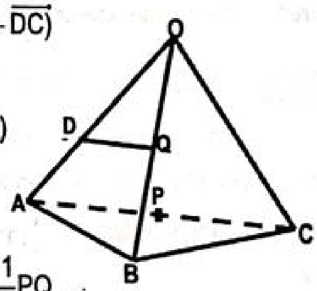
$=2\overrightarrow{MQ}-2\overrightarrow{MP}$ (car Q est milieu de [OB] et P celui de [AC])

$=2\overrightarrow{PQ}$

$\vec{w}=3\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=3(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DO})+2(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA})+3(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB})-2(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC})$

$=6\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{DO}+2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}$

$=6\overrightarrow{MD}$ (car $D=bar\{(O,3),(A,2),(B,3),(C,-2)\}$)



D'où $\vec{v}=2\overrightarrow{PQ}$ et $\vec{w}=6\overrightarrow{MD}$.

b) • Δ est la droite passant par D et de vecteur directeur $\overrightarrow{PQ}$.

- $\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|$ $\Leftrightarrow$ $DM=\frac{1}{3}PQ$. Donc (S) est la sphère de centre D et de rayon $\frac{1}{3}PQ$.

3) On a : $P\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$, $Q(0,1,0)$, $\overrightarrow{PQ}\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right)$, $D\left(\frac{2}{3},1,-\frac{1}{3}\right)$ et $PQ=\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$.

Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

- M(x , y , z) appartient à (S) $\Leftrightarrow$ $DM^2=\frac{1}{9}PQ^2$ $\Leftrightarrow$ $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Donc une équation de (S) est : $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{4}$.

- M(x , y , z) appartient à Δ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{DM}=k\overrightarrow{PQ}$ avec k réel $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x=-k+\frac{2}{3} \\ y=k+1 \\ z=-\frac{1}{2}k-\frac{1}{3} \end{cases}$ avec k réel.

Donc une représentation paramétrique de la droite Δ est $\begin{cases} x=-k+\frac{2}{3} \\ y=k+1 \\ z=-\frac{1}{2}k-\frac{1}{3} \end{cases}$ avec k réel quelconque.

Solution 53

1) Soit M un point du plan,

- $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$
$= 3MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+GA^2+GB^2+GC^2$
$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ (1) (car $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$).

- $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, donc $AG^2=\frac{1}{9}(AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$.

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}$, alors $AG^2=\frac{1}{9}(c^2+b^2+c^2+b^2-a^2)=\frac{1}{9}(-a^2+2b^2+2c^2)$.

- $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}(-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, donc :

$$BG^2=\frac{1}{9}(4AB^2+AC^2-4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{9}(4c^2+b^2-2c^2-2b^2+2a^2)=\frac{1}{9}(2a^2-b^2+2c^2).$$

- $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})$, donc :

$$CG^2=\frac{1}{9}(AB^2+4AC^2-4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{9}(c^2+4b^2-2c^2-2b^2+2a^2)=\frac{1}{9}(2a^2+2b^2-c^2).$$

D'où $AG^2+BG^2+CG^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

En remplaçant cette valeur de $AG^2 + BG^2 + CG^2$ dans (1), on obtient bien :

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

2) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2=MA^2+MB^2+MC^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$.

Donc, d'après la question 1, on a :

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2=3MG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+2\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$

$=3MG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+4\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$ (A' est milieu de [BC],donc $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA'}$)

De plus, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$, alors $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2=9MG^2$.

En égalant les deux expressions de $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2$, on obtient :

$$3MG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+4\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=9MG^2.$$

Et finalement, $2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=3MG^2-\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)$.

3) Supposons qu'il existe un point M commun aux cercles de diamètres [AA'] et [BC].

On a alors $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$.

En remplaçant dans l'égalité $2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=3MG^2-\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)$, on a :

$$3MG^2-\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)=0. \text{ C'est-à-dire, } GM=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}.$$

M appartient donc au cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$.

Solution 54

1) $AH=\sqrt{(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2+(z_H-z_A)^2}=\sqrt{29}$.

2) Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ de coordonnées (-2 , -3 , 4), est un vecteur normal de (P).
Ainsi, soit M(x , y , z) un point de l'espace.
M(x, y , z) appartient à (P) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AH}=0$ $\Leftrightarrow$ $-2(x-1)-3(y+1)+4(z-3)=0$ $\Leftrightarrow$ $2x+3y-4z+13=0$.
Une équation du plan (P) est donc : $2x + 3y - 4z + 13 = 0$.
3) • Le lecteur vérifiera que les coordonnées des points B, C et D satisfont bel et bien l'égalité $2x + 3y - 4z + 13 = 0$.
Donc B, C et D appartiennent à (P).

• L'aire du triangle BCD est donnée par la formule : $\text{Aire(BCD)}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|$.

Or on a $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (10, -4, 2) et $\overrightarrow{BD}$, (5, - 6, -2). Alors $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées (20, 30, -40).
Donc $\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|=10\sqrt{29}$ et $\text{Aire(BCD)}=5\sqrt{29}$ u.a..

• Le volume du tétraèdre ABCD est donné par la formule : $\text{Volume(ABCD)}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD})\right|$.

Et comme $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées (9, 1, -2), alors on a : $\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD})=180+30+80=290$.

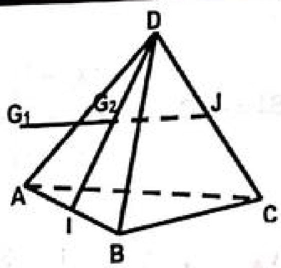
D'où $\text{Volume(ABCD)}=\frac{145}{3}$ u.v..

Autre méthode:

On peut aussi calculer la distance h de A au plan (BCD) = (P) et alors on aurait : $\text{Volume(ABCD)}=\frac{1}{3}h\times\text{Aire(BCD)}$.

Or $h=\frac{|2x_A+3y_A-4z_A+13|}{\sqrt{2^2+3^2+(-4)^2}}=\frac{29}{\sqrt{19}}=\sqrt{29}$, alors $\text{Volume(ABCD)}=\frac{1}{3}\sqrt{29}\times5\sqrt{29}=\frac{145}{3}$ (unité de volume).

Solution 55



1)a) G_2 = bar {(A , 1), (B , 1), (D , 2)} = bar {(I , 2), (D , 2)}. Donc G_2 est le milieu de [ID].
b) G_1 = bar {(A, 1), (B, 1), (C, -1), (D, 1)} = bar {(I, 2), (C, -1), (D, 1)}.
Donc $2\overrightarrow{IG_1}-\overrightarrow{CG_1}+\overrightarrow{DG_1}=\vec{0}$ donc $2\overrightarrow{IG_1}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{IG_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

c) G_1 = bar {(I , 2), (C , -1), (D , 1)}.
G_2 = bar{(I , 2), (D , 2)} = bar{(I , 2), (C , -1), (D , 1), (C , 1), (D , 1)} = bar {(G_1 , 2), (J , 2)}.
D'où G_2 est le milieu de [G_1J].
2) • Soit m un réel non nul.
G_m = bar{(A , 1), (B , 1), (C , m – 2), (D , m)} $\Leftrightarrow$ G_m = bar{(I , 2), (C, m – 2), (D , m)}
$\Leftrightarrow$ $2\overrightarrow{IG_m}+(m-2)\overrightarrow{CG_m}+m\overrightarrow{DG_m}=\vec{0}$.
$\Leftrightarrow$ $2\overrightarrow{IG_m}+(m-2)(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IG_m})+m(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IG_m})=\vec{0}$.
$\Leftrightarrow$ $2m\overrightarrow{IG_m}=(m-2)\overrightarrow{IC}+m\overrightarrow{ID}$.

D'où $\overrightarrow{IG_m}=\frac{m-2}{2m}\overrightarrow{IC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$.
• D'où G_m appartient au plan passant par I et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ (I, C et D sont non alignés).
D'où G_m appartient au plan (ICD). Par conséquent, (S) est contenu dans le plan (ICD).
3) • G_m = bar{(A , 1), (B , 1), (C , m – 2), (D , m)} = bar {(A , 1), (B , 1), (C , m), (D , m), (C , -2)}
= bar{(I , 2), (J , 2m), (C , - 2)}

D'où, $2\overrightarrow{G_mI}+2m\overrightarrow{G_mJ}-2\overrightarrow{G_mC}=\vec{0}$; c'est-à-dire $(\overrightarrow{G_mJ}+\overrightarrow{JI})+m\overrightarrow{G_mJ}-\overrightarrow{G_mJ}-\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.
Donc $m\overrightarrow{G_mJ}=\overrightarrow{IC}$. D'où le vecteur $m\overrightarrow{G_mJ}$ est constant.

• $\overrightarrow{G_mJ}=\frac{1}{m}\overrightarrow{IC}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{JG_m}=-\frac{1}{m}\overrightarrow{IC}$.

Soit m réel non nul, on a d'après ce qui précède, $\overrightarrow{JG_m}=-\frac{1}{m}\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IC}$, k variant dans $\mathbb{R}^*$.

Alors G_m décrit la droite passant par J et parallèle à la droite (CI), privée du point J.
D'où (S) est la droite passant par J parallèle à la droite (IC), privée de J.

Solution 56

1) S_α admet un barycentre si et seulement si $\alpha + \alpha + 1 - \alpha \neq 0$; c'est-à-dire $\alpha \neq -1$. Donc $E = \mathbb{R} - \{-1\}$.

2) M' = bar{(A , α), (B , α + 1), (M , -α)} signifie que $\alpha\overrightarrow{M'A} + (\alpha+1)\overrightarrow{M'B} - \alpha\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$.

C'est-à-dire $\alpha\overrightarrow{MA} + (\alpha+1)\overrightarrow{M'B} = \vec{0}$.

Or $\alpha + (\alpha + 1) = 0$ équivaut à $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Alors :

- Si $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, alors on a $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{M'B} = \vec{0}$. C'est-à-dire $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

  $\Phi_{-\frac{1}{2}}$ est alors la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- Si $\alpha \neq -\dfrac{1}{2}$, alors considérons le point G = bar {(A , α), (B , α + 1)}. On a :

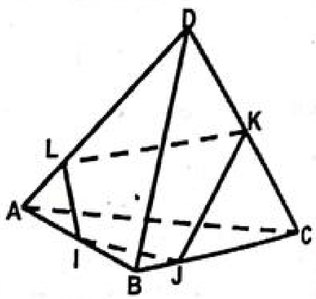
$$\alpha\overrightarrow{MA} + (\alpha+1)\overrightarrow{M'B} = \vec{0} \iff \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\alpha+1)(\overrightarrow{M'G} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0} \iff \alpha\overrightarrow{MG} + (\alpha+1)\overrightarrow{M'G} = \vec{0}$$

$$\iff \overrightarrow{GM'} = -\frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{GM}.$$

Φ_α est l'homothétie de centre G et de rapport $-\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$ (si $\alpha \neq 0$) et Φ_0 est l'application identique.

Solution 57

1) Les coordonnées de I sont (1 , 1 , -1) et celles de K sont (3 , -3 , 3).



$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \iff \begin{pmatrix} x_J - 3 \\ y_J - 2 \\ z_J + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_J = \frac{5}{2} \\ y_J = \frac{1}{2} \\ z_J = -\frac{5}{2} \end{cases}. \text{ D'où } J\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right).$$

2) • On a : $\overrightarrow{IJ}\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{IK}(2, -4, 4)$ donc $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}(-8, -9, -5) \neq \vec{0}$.

D'où $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont non colinéaires et les points I, J et K sont donc non alignés.

- Les coordonnées des points I, J et K vérifient l'équation $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.

D'où I, J et K appartiennent au plan d'équation $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.
De plus, les points I, J et K sont non alignés, alors le plan (IJK) existe et a pour équation : $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.

- M(x , y , z) appartient à (AD) $\iff$ il existe un réel k tel que, $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD} \iff \begin{cases} x = 6k - 1 \\ y = -2k \\ z = 2k + 2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

- M(x , y , z) appartient à (IJK)∩(AD) $\iff \begin{cases} x = -1 + 6k \\ y = -2k \\ z = 2 + 2k \\ 8x + 9y + 5z - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 + 6k \\ y = -2k \\ z = 2 + 2k \\ -8 + 48k - 18k + 10 + 10k - 12 = 0 \end{cases}$

On en déduit que $k = \dfrac{1}{4}$, $x = \dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$ et $z = \dfrac{5}{2}$. D'où (IJK) et (AD) sont sécants en $L\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

- $\overrightarrow{AL}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, de même que $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. D'où $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

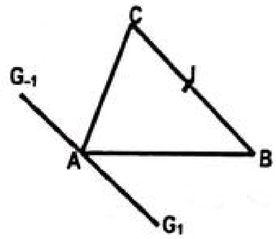
3) • $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{LD} + 3\overrightarrow{LA} = \vec{0}$. D'où L = bar {(A , 3), (D , 1)}.

• $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$. D'où J = bar {(B , 3), (C , 1)}.

• D'une part, G = bar{(A , 3), (B , 3), (C , 1), (D , 1)} = bar{(I , 6), (K , 2)}. D'où G appartient à (IK)
• D'autre part, G = bar{(A, 3), (B, 3), (C, 1), (D, 1)} = bar{(A , 3), (D, 1), (B, 3), (C, 1)} = bar{(L, 4), (J, 4)}.

D'où G appartient à (LJ).
Les droites (IK) et (JL) sont alors sécantes en G, donc coplanaires. D'où les points I, J, L et K sont coplanaires.

Solution 58



1) G_1 = bar{(A, 2), (B, 1), (C, -1)}. D'où $\overrightarrow{AG_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

G_{-1} = bar{(A, 2), (B, -1), (C, 1) }. D'où $\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

2) • G_k = bar{(A , k^2 + 1), (B , k), (C , -k)} $\Leftrightarrow (k^2+1)\overrightarrow{AG_k} + k\overrightarrow{BG_k} - k\overrightarrow{CG_k} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow (k^2+1)\overrightarrow{AG_k} + k\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$. D'où $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

• f est une fonction définie, continue et dérivable sur [-1 , 1] et pour tout x élément de [-1 , 1], $f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

Pour tout x appartenant à]-1 , 1[, on a f '(x) < 0 avec f '(1) = f '(-1) = 0.
f est donc strictement décroissante sur [-1 , 1] et on a le tableau de variation de f qui suit :

x	-1		1
f '(x)	0	-	0
f(x)	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$

• De l'étude de f, on déduit que, quand k décrit [-1 , 1], f(k) décrit $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

L'ensemble des points G_k quand k décrit [-1 , 1] est donc le segment $[G_1G_{-1}]$.

3) M appartient à (E) $\Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MG_{-1}}\right\| \Leftrightarrow MG_1 = MG_{-1}$

D'où (E) est le plan médiateur du segment $[G_1G_{-1}]$.

4) M appartient à (F) $\Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|$

$\Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{AI}\right\|$

$\Leftrightarrow G_1M = AI$.

Donc (F) est la sphère de centre G_1 et de rayon AI.

5) • D'après la question 1), on a : $\overrightarrow{AG_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC}(0,0,4)$ donc $\overrightarrow{AG_1}(0,0,-2)$ et $G_1(0 , 0 , 0)$.

$\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{AG_{-1}}(0,0,2)$ et $G_{-1}(0,0,4)$.

• On constate que $\overrightarrow{AG_{-1}} = -\overrightarrow{AG_1}$, donc A est le milieu de $[G_1G_{-1}]$

Déterminons une équation cartésienne du plan (E) :
Soit M(x , y , z) un point de l'espace.
M appartient à (E) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{G_1G_{-1}} = 0 \Leftrightarrow 0\times(x-0) + 0\times(y-0) + 4\times(z-2) = 0 \Leftrightarrow z - 2 = 0$.

Donc le plan (E) a pour équation z = 2.

Le rayon de la sphère (F) est : $AI = \sqrt{6}$ (le lecteur fera les calculs).

La distance du centre de la sphère au plan (E) est : $\frac{|0\times 0+0\times 0+1\times 0-2|}{\sqrt{1}} = 2 < AI$.

D'où (F) et (E) se rencontrent suivant un cercle de rayon $\sqrt{AI^2-4} = \sqrt{2}$.

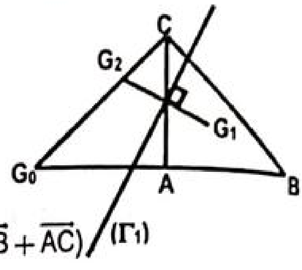
Solution 59

1) Le système {(A , 2), (B , -1), (C , m)} admet un barycentre si et seulement si : 2 – 1 + m ≠ 0. C'est-à-dire m ≠ -1.

2) • G_0 = bar {(A , 2), (B , -1)} donc $2\overrightarrow{G_0A} - \overrightarrow{G_0B} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{G_0A} = \overrightarrow{AB}$.

G_0 est donc le symétrique de B par rapport à A.

• G_2 = bar{(A, 2), (B, -1), (C, 2)} = bar{(G_0, 1), (C, 2)}.



Donc $\overrightarrow{G_2G_0} + 2\overrightarrow{G_2C} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{CG_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CG_0}$.

• Or $2\overrightarrow{G_2A} - \overrightarrow{G_2B} + 2\overrightarrow{G_2C} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{G_2C} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{G_2C} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Donc $G_2C^2 = \frac{1}{9}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{9}(a^2 + a^2 + 0) = \frac{2}{9}a^2$. D'où $G_2C = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Puisque $\overrightarrow{G_2G_0} + 2\overrightarrow{G_2C} = \vec{0}$, alors $\overrightarrow{G_2G_0} = -2\overrightarrow{G_2C}$.

Par conséquent $G_0G_2 = 2G_2C = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Finalement $G_0G_2 = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

3) G_2 est barycentre de {(A, 2), (B, -1), (C, 2)}. Donc $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG_2}$.

Soit G le centre de gravité du triangle ABC. On a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

D'où M appartient à (Γ_1) ⇔ $MG_2 = MG$. (Γ_1) est donc la médiatrice du segment [G_2G].

Solution 60

1) • On a $\overrightarrow{AB}(2\,,0\,,-1)$, $\overrightarrow{AC}(0\,,1\,,1)$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1\,,-2\,,2) \neq \vec{0}$. (Le lecteur fera les calculs).

D'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires.

Les points A, B et C sont par conséquent non alignés, et déterminent un plan.

• Soit M(x , y , z) un point de l'espace,

M appartient à (ABC) ⇔ $\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}) = 0$ ⇔ $1\times(x-1) - 2\times(y-2) + 2\times(z-2) = 0$ ⇔ $x - 2y + 2z - 1 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc : $x - 2y + 2z = 1$.

2) • $\vec{n_1}$ (1 , -2 , 2) et $\vec{n_2}$ (1 , -3 , 2) sont des vecteurs normaux respectifs de (P_1) et (P_2).

Or on a $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}(2\,,0\,,-1) \neq \vec{0}$. (Le lecteur fera les calculs)

D'où les plans (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (Δ) dont un vecteur directeur est $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}(2\,,0\,,-1)$.

• $1 - 2\times3 + 2\times3 - 1 = 0$, d'où C appartient à ($P_1$).
$1 - 3\times3 + 2\times3 + 2 = 0$, d'où C appartient à ($P_2$).

Puisque C appartient à (P_1) et à (P_2), alors C appartient à (Δ).

• On constate que $\vec{u} = \vec{n_1}\wedge\vec{n_2}$ qui est un vecteur directeur de (Δ). Donc $\vec{u}$ est vecteur directeur de (Δ).

• (Δ) est la droite passant par C(1 , 3 , 3) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2 , 0 ,-1).

Une représentation paramétrique de (Δ) est : $\begin{cases} x = 2k+1 \\ y = 3 \\ z = -k+3 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

3) • M est un point de (Δ) de paramètre k, d'où M a pour coordonnées (2k + 1 , 3 , -k + 3) k étant un réel.

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4k+k-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad k=\frac{1}{5}$.

D'où $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{u}\,(2\,,0\,,-1)$ si et seulement si $k=\frac{1}{5}$.

- Soit H le projeté orthogonal de A sur (Δ).

H est le point de (Δ) de paramètre $\frac{1}{5}$ (d'après ce qui précède). Donc la distance du point A à la droite (Δ) est AH.

Or on a $\overrightarrow{AH}\left(\frac{2}{5},1,\frac{4}{5}\right)$, donc $AH=\sqrt{\frac{4}{25}+\frac{25}{25}+\frac{16}{25}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Finalement, la distance de A à (Δ) est $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Solution 61

1) • G est le barycentre des points pondérés (A , 3), (B , 1) et (C , 1) et Q le barycentre des points pondérés (A , 3) et (C , 1). Donc G est le barycentre de (Q , 4) et (B , 1). On en déduit que G appartient à la droite (BQ).
• G est le barycentre des points pondérés (A , 3), (B , 1) et (C , 1) et R le barycentre des points pondérés (A , 3) et (B , 1). Donc G est le barycentre de (R , 4) et (C , 1). On en déduit que G appartient à (CR).
Finalement, les droites (BQ) et (CR) passent par G.

2) • G est le barycentre des points pondérés (A , 3), (B , 1) et (C , 1) et P est le milieu de [BC].
Donc G est barycentre des points pondérés (A , 3) et (P , 2). On en déduit que A, P et G sont alignés.

- $G=\text{bar}\{(A\,,3),(P\,,2)\} \quad\Leftrightarrow\quad 3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GP}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad 5\overrightarrow{GP}+3\overrightarrow{PA}=\vec{0}$. D'où $\overrightarrow{PG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{PA}$.

3) • L'ensemble Δ est le cercle de diamètre [BC], privé des points B et C.
• P est le milieu de [BC], P est donc le centre de ce cercle.

De plus, $\overrightarrow{PG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{PA}$, donc G est l'image de A par l'homothétie de centre P et de rapport $\frac{3}{5}$.

Si A décrit le cercle de centre P et de rayon PB, alors G décrit le cercle de centre P (car P est invariant par cette homothétie) et de rayon $\frac{3}{5}PB$, privé des points images de B et C par l'homothétie définie ci-dessus.

Solution 62

1) Soit A , B et C trois points de l'espace.

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}$.

De même, $\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

D'où $\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$. Finalement, on a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$.

2) Soit A, B et C trois points de l'espace.

On a d'après ce qui précède, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$. Donc $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}\right\|=\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}\right\|$.

C'est-à-dire $AB\times AC\times\sin\widehat{BAC}=CA\times CB\times\sin\widehat{ACB}=BC\times BA\times\sin\widehat{ABC}$.

Donc $\frac{1}{AB\times AC\times\sin\widehat{BAC}}=\frac{1}{CA\times CB\times\sin\widehat{ACB}}=\frac{1}{BC\times BA\times\sin\widehat{ABC}}$.

En multipliant par AB×AC×BC, on a : $\frac{AB\times AC\times BC}{AB\times AC\times\sin\widehat{BAC}}=\frac{AB\times AC\times BC}{CA\times CB\times\sin\widehat{ACB}}=\frac{AB\times AC\times BC}{BC\times BA\times\sin\widehat{ABC}}$.

Ce qui permet d'écrire après simplification, $\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=\frac{AB}{\sin\widehat{ACB}}=\frac{AC}{\sin\widehat{ABC}}$.

Solution 63

1) Soit G le barycentre des points (A , 2), (B , -2) et (C , 1).

G a pour coordonnées $\left(\frac{2\times1-2\times1+1\times(-2)}{2-2+1}, \frac{2\times0-2\times(-1)+1\times0}{2-2+1}, \frac{2\times0-2\times1+1\times1}{2-2+1}\right)$, soit (-2 , 2 , -1).

Soit M(x , y , z) un point de l'espace, on a $\vec{V}=\overrightarrow{MG}$.

Donc $\vec{V}$ a pour coordonnées (-2 – x , 2 – y , -1 – z).

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (0 , -1 , 1) et $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{V}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix}-1 & 2-y\\ 1 & -1-z\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -1-z\\ 0 & -2-x\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & -2-x\\ -1 & 2-y\end{vmatrix}\right)$

soit (y + z – 1 , - x – 2 , -2 – x).

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{V}=\overrightarrow{OA}$ équivaut à $\begin{cases} y+z-1=1\\ -x-2=0\\ -x-2=0\end{cases}$ (1).

Et $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{V}=0$ équivaut à 0×(-2 – x) – 1×(2 - y) + 1×(- 1 – z) = 0, soit y – z – 3 = 0 (2).

Des relations (1) et (2), on obtient le système $\begin{cases} y+z=2\\ x+2=0.\\ y-z=3\end{cases}$

La résolution de ce système permet de conclure que x = -2, $y=\frac{5}{2}$ et $z=-\frac{1}{2}$.

Donc le point M tel que $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{V}=\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{V}=0$ est le point de coordonnées $\left(-2, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

2) Notons qu'on a λ + (λ - 1) + (1 - 2λ) + 1 = 1 et 1 ≠ 0, donc pour tout réel λ, G_λ existe.

ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

G_λ est barycentre des points pondérés (A , λ) ; (B , λ - 1) ; (C , 1 – 2λ) ; (D , 1) équivaut à $\lambda\overrightarrow{G_\lambda A}+(\lambda-1)\overrightarrow{G_\lambda B}+(1-2\lambda)\overrightarrow{G_\lambda C}+\overrightarrow{G_\lambda D}=\vec{0}$. Donc $\overrightarrow{AG_\lambda}=(\lambda-1)\overrightarrow{AB}+(1-2\lambda)\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

Donc $\overrightarrow{AG_\lambda}=(\lambda-1)\overrightarrow{AB}+(1-2\lambda)(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AD}=-\lambda\overrightarrow{AB}+(2-2\lambda)\overrightarrow{AD}$.

Donc lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, G_λ décrit le plan (ABC).

3)a) I est milieu [AB] donc I = bar{(A , α), (B , α)} ;

J est milieu de [AC] donc J = bar{(A , α + 1), (C , α + 1)} ;

K est milieu de [CH] donc K = bar{(C , -3) , (H , -3)}. Alors,

H_α = bar{(A , 2α + 1), (B , α), (C , α - 2), (H , - 3)}

= bar{(A , α), (B , α), (A , α + 1), (C , α + 1), (C , -3), (H , -3)}

= bar{(I , 2α), (J , 2α + 2), (K , -6)}.

Puisque H_α = bar{(I , 2α), (J , 2α + 2), (K , - 6)}, alors H_α est un point du plan (IJK) .

b) E est le milieu de [IJ] donc E = bar{(I , 2α), (J , 2α)} ;

F est le barycentre (J , 1), (K , -3), donc F = bar{(J , 2), (K ; - 6)}. Alors

H_α = bar{(I , 2α), (J , 2α + 2), (K , - 6) }

= bar{(I , 2α), (J , 2α), (J , 2), (K , -6)}

= bar{(E , 4α), (F , - 4)}.

Puisque H_α = bar{(E , 4α), (F , - 4)}, alors H_α est un point de la droite (EF).

Solution 64

1) Soit M(x , y , z) un point de l'espace,

- On a $\overrightarrow{MA}\left(-\frac{1}{2}-x,-y,-z\right)$ et $\overrightarrow{MB}\left(\frac{1}{2}-x,-y,-z\right)$,

donc $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix}-y & -y\\ -z & -z\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-z & -z\\ -\frac{1}{2}-x & \frac{1}{2}-x\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-\frac{1}{2}-x & \frac{1}{2}-x\\ -y & -y\end{vmatrix}\right)$ soit (0 , -z , y).

- Soit M_0(x , y , z) un point de l'espace,

$\overrightarrow{M_0A} \wedge \overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{M_0F} \Leftrightarrow (0\,,-z\,,y) = (-x\,,1-y\,,-z) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1-y=-z \\ y=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Il existe donc un seul point M_0 de l'espace tel que $\overrightarrow{M_0A} \wedge \overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{M_0F}$, il s'agit du point $M_0\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

2) • Soit $M(x\,,y\,,z)$ un point de l'espace.
M est dans le plan $(O\,;\vec{j}\,,\vec{k})$, donc $x = 0$.

Nous avons donc, $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \sqrt{y^2+z^2}$ et $\left\|\overrightarrow{MF}\right\| = \sqrt{(1-y)^2+z^2}$.

Ainsi, $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MF}\right\| \Leftrightarrow y^2+z^2 = (1-y)^2+z^2 \Leftrightarrow y^2 = 1-2y+y^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$.

L'ensemble des points M du plan $(O\,;\vec{j}\,,\vec{k})$ tels que $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MF}\right\|$ est donc la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$ dans le plan $(O\,;\vec{j}\,,\vec{k})$.

Notons que cette droite est la médiatrice du segment [OF] dans le plan $(O\,;\vec{j}\,,\vec{k})$.

• Notons Λ l'aire du triangle MAB, on a $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = 2\Lambda$.

Or, $\Lambda = \frac{1}{2}AB \times MH$, où H est le projeté orthogonal de M sur (AB) et AB = 1, alors $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = MH$ avec MH représentant la distance de M à la droite (AB).
A et B étant symétriques par rapport à O, on a H = O. D'où $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = OM$.

Ainsi, soit M un point du plan $(O\,;\vec{j}\,,\vec{k})$, $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MF}\right\|$ si et seulement si, MF = OM.

Alors les points M du plan $(O\,;\vec{j}\,,\vec{k})$, tels que $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MF}\right\|$ sont à égale distance de F et de la droite (AB).

• Finalement, l'ensemble des points M du plan $(O\,;\vec{j}\,,\vec{k})$ tels que $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MF}\right\|$ est la médiatrice du segment [OF] dans le plan $(O\,;\vec{j}\,,\vec{k})$.

3) • Soit $M(x\,,y\,,z)$ un point de l'espace.
M est dans le plan $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, donc $z = 0$.

Nous avons donc, $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \sqrt{y^2}$ et $\left\|\overrightarrow{MF}\right\| = \sqrt{x^2+(1-y)^2}$.

Ainsi, $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MF}\right\| \Leftrightarrow y^2 = x^2+(1-y)^2 \Leftrightarrow x^2-2y+1=0 \Leftrightarrow y=\frac{x^2+1}{2}$.

L'ensemble des points M du plan $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ tels que $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MF}\right\|$ est donc la parabole d'équation $y=\frac{x^2+1}{2}$ dans le plan $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

• Comme à la question 2), on montre que : $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MF}\right\|$ si et seulement si, MF = HM, où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).
Finalement, l'ensemble des points M du plan $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ tels que $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MF}\right\|$ est la parabole de foyer F et de directrice (AB).

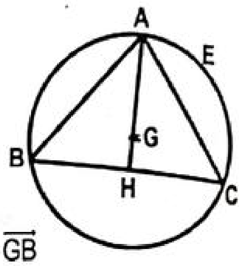
Solution 65

1) On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}=\dfrac{25+25-36}{2}$. Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=7$.

2) • Soit H le milieu du segment [BC], on a G = bar{(A , 2), (B , 3), (C , 3)} = bar{(A , 2), (H , 6)}.

C'est-à-dire $2\overrightarrow{GA}+6\overrightarrow{GH}=\vec{0}$, donc $2\overrightarrow{GA}+6\overrightarrow{GA}+6\overrightarrow{AH}=\vec{0}$. Finalement, $\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AH}$.

• ABC est un triangle isocèle de sommet A, et H est le milieu de [BC], donc le triangle ABH est rectangle en H.
On peut alors écrire $AB^2 = AH^2 + BH^2$. C'est-à-dire $25 = 9 + AH^2$. Donc AH = 4.



Par suite, $AG=\dfrac{3}{4}AH=3$. Donc AG = 3.

3) • Soit M un point du plan, on a :

$$f(M)=2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$$

$$=2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})\cdot(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})\cdot(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})\cdot(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})$$

$$=4MG^2+\overrightarrow{MG}\cdot(2\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA})+2\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$$

$$=4MG^2+\overrightarrow{MG}\cdot(2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC})+f(G).$$

Comme $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, alors on a : $f(M) = 4MG^2 + f(G)$.

• En utilisant la définition de f, on a :
$f(A)=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, donc f(A) = 14.

• En remplaçant M par A dans l'égalité $f(M) = 4MG^2 + f(G)$, on a :
$f(A) = f(G) + 4AG^2$. Donc 14 = f(G) + 36. Finalement, f(G) = -22.

4) Soit M un point du plan.
M appartient à E $\Leftrightarrow$ f(M) = f(A) $\Leftrightarrow$ $f(A) = f(G) + 4MG^2$ $\Leftrightarrow$ $14 = -22 + 4MG^2$ $\Leftrightarrow$ GM = 3.
Donc E est le cercle de centre G et de rayon 3.

Solution 66

1) EAC et EBD sont des triangles équilatéraux et O est milieu des segments [AC] et [BD].

Donc la droite (OE) est médiatrice de [AC] et [BD].

Donc la droite (OE) est orthogonale aux droites (AC) et (BD) qui sont sécantes en O.

Donc (OC) est orthogonale au plan (ABCD).

2) Soit M un point de l'espace, on a : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MO^2 + 4OA^2$. ***(Le lecteur fera les calculs).***

Ainsi, $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = ka^2$ équivaut à $4MO^2 + 4OA^2 = ka^2$. C'est-à-dire $OM^2=\dfrac{a^2(k-4)}{4}$.

Ainsi : **si k > 4**, alors, l'ensemble des points M cherché est la sphère de centre O et de rayon $\dfrac{a\sqrt{k-4}}{2}$.

si k < 4, alors, l'ensemble des points M cherché est l'ensemble vide.
si k = 4, alors, l'ensemble des points M cherché est le singleton {O}.

10 NOMBRES COMPLEXES

RAPPEL DU COURS

A. Forme algébrique d'un nombre complexe

A_1 – Historique

- L'ensemble des nombres complexes a été introduit pour repondre au problème suivant :
« Existe-t-il un ensemble contenant l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, dans lequel les règles d'addition et de multiplication sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ et l'équation $x^2 = m$ a des solutions même lorsque m est un réel négatif ? ».
- Pour resoudre ce problème, les algébristes ont construit un nombre « imaginaire » i, vérifiant l'égalité **fondamentale : $i^2 = -1$.**
- Les nombres qui s'écrivent sous la forme a + ib, où a et b sont des nombres réels, permettent de résoudre le problème posé. Ces nombres sont appelés les **nombres complexes.** Ils sont regroupés dans un ensemble noté $\mathbb{C}$: c'est l'ensemble des nombres complexes.

A_2 – Forme algébrique d'un nombre complexe

- Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme z = a + ib, où a et b sont des nombres réels : c'est la **forme algébrique** du nombre complexe z.
- Dans l'écriture z = a + ib, avec a et b réels :
  Le réel a est **la partie réelle** de z : on la note Re(z).
  Le réel b est **la partie imaginaire** de z : on la note Im(z).
  Si a = 0, on dit que z est **un imaginaire pur.**
  Si b = 0, z est **un réel.**

A_3 – Opérations dans $\mathbb{C}$

- L'addition, la multiplication, la soustraction, la division, le calcul des puissances se font dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$.
Il faut juste se rappeler que : $i^2 = -1$.
- Soit z = a + ib et z' = a' + ib', a, b, a' et b' étant des nombres réels.
  z = z' si et seulement si a = a' et b = b'.
  z = 0 si et seulement si a = 0 et b = 0.

A_4 – Conjugué d'un nombre complexe

a) Définition et notation :

Le **conjugué** d'un complexe z = a + ib, où a et b sont des réels, est le complexe noté $\bar{z}$, défini par : $\bar{z} = a - ib$.

b) Propriétés du conjugué d'un complexe :

Soit z et z' deux nombres complexes.
- z est un **réel** si et seulement si, $\bar{z} = z$.
  z est un **imaginaire pur** si et seulement si $\bar{z} = -z$.
- $\text{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $\text{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.
- $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z'}$; $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$; $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ (n est un entier naturel) ;

$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$ (z' est un complexe non nul) ; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (z' est un complexe non nul).

A_5 – Module d'un nombre complexe

a) Définition et notation :

Le **module** d'un complexe z est le réel positif noté $|z|$, défini par : $|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$.

On remarque si, comme z = a + ib, a et b étant des nombres réels, alors $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

b) Propriétés du module d'un nombre complexe :

Soit z et z' deux nombres complexes.

- Le module d'un nombre réel est sa valeur absolue.
- $|\overline{z}|=|-z|=|z|$
- $|z|=0$ si et seulement si z = 0.
- $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$; $|z^n|=|z|^n$; $\left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|}$; $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$, z' est un complexe nn nul.
- **Inégalité triangulaire :** $|z+z'|\leq|z|+|z'|$.

B. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

B_1 – Affixe et point image

A tout nombre complexe z = a + ib, a et b étant des nombres réels, on peut faire correspondre un point M(a , b) du plan et un seul, et réciproquement.

Le point M est appelé **le point image** du nombre complexe z et le complexe z est appelé **l'affixe du point M.** On écrit parfois M_z pour désigner le point M et z_M pour désigner le complexe z.

De façon analogue, le vecteur $\vec{u}(a , b)$ a pour affixe le complexe z = a + ib.

On peut remarquer que :
M est sur l'axe des abscisses si et seulement si z est un réel.
M est sur l'axe des ordonnées si et seulement si z est un imaginaire pur.
L'axe des abscisses est alors appelé l'axe des réels et l'axe des ordonnées est l'axe des imaginaires purs.
On parle alors du plan complexe ou plan de Cauchy pour désigner le plan.
Deux points sont confondus lorsqu'ils ont la même affixe.
De même, deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont la même affixe.

B_2 – Interprétation géométrique d'un complexe et du module d'un complexe

a) Complexe et vecteur :

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B.

- Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour affixe z_A.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$ et a un nombre réel

- L'affixe du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est $z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}$.
- L'affixe du vecteur $a\vec{u}$ est $a.z_{\vec{u}}$.

b) L'affixe du milieu, l'affixe du barycentre :

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B.

I d'affixe z_I, le milieu de [AB].

On a : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Soit $(A_i , \alpha_i)_{1 \le i \le n}$, n points pondérés du plan tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$.

G le barycentre des points pondérés $(A_i , \alpha_i)_{1 \le i \le n}$.

z_{A_i} l'affixe du point A_i et z_G celle de G.

On a : $z_G = \dfrac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \ldots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$.

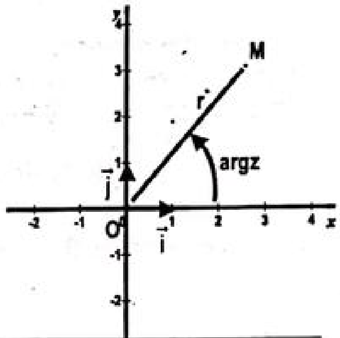
c) Interprétation géométrique du module :.

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B.

On a : • $OA = |z_A|$ • $AB = |z_B - z_A|$

C. Formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul

Dans ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.



C_1 – Argument d'un nombre complexe

a) Vocabulaire et notation :

Soit z un complexe non nul, et M son point image.

On appelle argument de z, que l'on note arg(z), toute mesure de l'angle orienté $(\vec{i},\widehat{\overrightarrow{OM}})$.

Remarque :
Si α est un argument de z, alors tout réel de la forme α + k2π, k étant un entier relatif, est aussi un argument de z.
Et tout argument de z sera aussi de la forme α + k2π, k entier relatif.
Donc tout nombre complexe a une infinité d'arguments.

Lorsque α est un argument de z, on écrira alors : $\arg z = \alpha + k2\pi$ (k étant un entier relatif) ou $\arg z \equiv \alpha\ [2\pi]$.

b) Propriétés sur l'argument

Soit z un nombre complexe non nul.

- z est un réel non nul si et seulement si $\arg z \equiv 0[\pi]$
  z est un réel strictement positif si et seulement si, $\arg z \equiv 0[2\pi]$
  z est un réel strictement négatif si et seulement si, $\arg z \equiv \pi[2\pi]$
  z est un imaginaire pur non nul, si et seulement si, $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.
- Si $\arg z \equiv \alpha\ [2\pi]$, alors on a :
  $\arg\bar{z} \equiv -\alpha[2\pi]$ et $\arg(-z) \equiv \pi + \alpha\ [2\pi]$.
- Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, on a :
  z = z' si et seulement si, $\begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z' = \arg z + k2\pi \end{cases}$, k entier relatif.
- Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.
  $\arg\bar{z} \equiv -\arg z[2\pi]$ $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi]$. $\arg(z^n) \equiv n\arg z\ [2\pi]$
  $\arg\dfrac{1}{z} \equiv -\arg z[2\pi]$ $\arg\dfrac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'[2\pi]$.

C_2 – Formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul

a) Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires :

Tout point M du plan est déterminé par la donnée de ses coordonnées cartésiennes (x , y) ou lorsqu'il est différent de l'origine O, par la donnée de ses coordonnées polaires (r , θ). ; où $r = OM = \sqrt{x^2+y^2}$, et θ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$.

De même tout nombre complexe est parfaitement déterminé par sa forme algébrique x + iy ou lorsqu'il est non nul, par la donnée de son module r et l'un de ses arguments θ. On notera alors z = [r ; θ].

b) Formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul :

Soit z un complexe non nul, de forme algébrique x + iy, x et y étant des réels, de module r et dont un argument est θ.

On a : $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

Donc **z = r(cosθ + isinθ) : cette écriture est une forme trigonométrique de z.**

(Notons que dans cette écriture, on a r > 0)

c) Propositions :

Soit z = r(cosθ + isinθ) et z' = r'(cosθ' + isinθ'), où r et r' sont deux réels strictement positifs, θ et θ' deux réels.

On a :
- $zz' = rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$
- $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ où n est un entier relatif.
- $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{r'}(\cos(-\theta') + i\sin(-\theta'))$.
- $\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$
- $-z = r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$.
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}(\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta'))$

C_3 – Notation exponentielle d'un complexe non nul

a) Notation :

- Soit θ un nombre réel.

Le complexe de module 1 et dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ et se lit « exponentielle iθ ».

Donc : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

- Si un complexe non nul z a pour module r et pour argument θ. Alors $z = re^{i\theta}$: c'est **une forme exponentielle de z.**

b) Propriétés :

- Soit θ un nombre réel et r un réel strictement positif.

  $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg e^{i\theta} \equiv \theta[2\pi]$.

- $z = re^{i\theta}$ si et seulement si, $\begin{cases} |z| = r, \\ \arg z \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$.

- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\quad -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$ $\quad e^{i(\theta+k2\pi)} = e^{i\theta}$

  $e^{i0} = 1$ $\quad e^{i\pi} = -1$ $\quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $\quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

- Soit θ et θ' deux réels et n un entier relatif.

  $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ $\quad \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\quad \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

c) Formule de Moivre :

Soit n un entier relatif et x un nombre réel.

- $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$.
- $(\cos x - i\sin x)^n = \cos nx - i\sin nx$.

d) Formules d'Euler :

Soit x un nombre réel et n un entier relatif.

- $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
- $\cos nx = \dfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$ et $\sin nx = \dfrac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$

C_4 – Interprétation géométrique d'un argument

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan d'affixes respectives a, b, c et d. On a :

- $\text{mes}(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \arg(b-a)[2\pi]$
- $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \arg\dfrac{c-a}{b-a}[2\pi]$
- $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv \arg\dfrac{d-c}{b-a}[2\pi]$

D. Equations dans $\mathbb{C}$

Les équations et systèmes d'équations se résolvent dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$.
Dans $\mathbb{C}$, les équations de la forme P(z) = 0, d'inconnue complexe z, où P est un polynôme de degré n, admettent n solutions distinctes ou confondues.

D_1 – Racines carrées complexes

a) Théorème et définition :

Soit Δ un nombre complexe.
L'équation $z^2 = \Delta$ admet deux solutions opposées δ et –δ dans $\mathbb{C}$.
δ et -δ sont appelés **les racines carrées complexes** de Δ.

b) Détermination des racines carrées complexes :

Soit Δ un nombre complexe.

- Si Δ est un réel positif, alors les racines carrées complexes de Δ sont : $\sqrt{\Delta}$ et $-\sqrt{\Delta}$.
- Si Δ est un réel strictement négatif, alors les racines carrées complexes de Δ sont : $i\sqrt{-\Delta}$ et $-i\sqrt{-\Delta}$.
- Si Δ n'est pas un nombre réel. On pose z = x + iy, x et y étant des nombres réels et y est non nul.

Alors résoudre l'équation $z^2 = \Delta$, revient à résoudre le système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = \text{Re}(\Delta) \\ x^2 + y^2 = |\Delta| \\ 2xy = \text{Im}(\Delta) \end{cases}$.

Les couples solutions (x , y) de ce système sont les couples (partie réelle, partie imaginaire) des racines carrées δ et -δ.
Attention ***: Il est strictement interdit d'écrire $\sqrt{\Delta}$ lorsque Δ n'est un réel positif.***

c) Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, dans $\mathbb{C}$.

Cette équation se résoud dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$:

- On calcule le discriminant Δ.
- On cherche les racines carrées complexes de Δ : δ et –δ.
- On choisit une des racines carrées complexes comme étant la racine carrée de Δ, et on applique les formules

usuelles dans $\mathbb{R}$: $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.

D_2 – Racines n-ièmes d'un complexe non nul

a) Théorème et définition :

Soit Δ un complexe non nul et n un entier naturel non nul.
L'équation $z^n = \Delta$ admet n solutions distinctes.

Si $\Delta = re^{i\theta}$, où r est un réel strictement positif et θ un nombre réel, alors les solutions de cette équation sont les n complexes $u_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{k2\pi}{n})}$, k variant dans {0 , 1 , . . . , n – 1}.
Les n complexes u_k sont **les racines n-ièmes de Δ.**

b) Détermination des racines n-iémes :

Soit $\Delta = re^{i\theta}$, où r est un réel strictement positif et θ un nombre réel.
On pose $z = xe^{iy}$, où x est un réel strictement positif et y un nombre réel.

Alors résoudre l'équation $z^n = \Delta$, c'est-à-dire $x^n e^{iny} = re^{i\theta}$, revient à résoudre le système $\begin{cases} x^n = r \\ ny = \theta + k2\pi \end{cases}$, k appartient à $\mathbb{Z}$.

La résolution de ce système permet d'écrire : $\begin{cases} x = \sqrt[n]{r} \\ y = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{k2\pi}{n} \end{cases}$, où k varie dans {0 , 1 , . . . , n – 1}.

Par conséquent, les n solutions de l'équation $z^n = \Delta$ sont les $u_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{k2\pi}{n})}$, où k varie dans {0 , 1 , . . . , n – 1} ; qui sont les racines n-ièmes de Δ.

c) Remarque importante :

Soit M_k, où k est dans {0, 1, . . ., n}, les n points images des n racines n-ièmes u_k de Δ.
On remarque que : • $OM_k = \sqrt[n]{r}$. Donc les points M_k sont sur un même cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

• $\text{mes}(\overrightarrow{OM_k};\overrightarrow{OM_{k+1}}) \equiv \dfrac{2\pi}{n}[2\pi]$.

Donc les points M_k forment un polygône régulier à n côtés.

d) Les racines n-ièmes de l'unité :

- Les racines n-ièmes de l'unité sont les racines n-ièmes de 1.

  Ce sont les n complexes $u_k = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, où k varie dans {0 , 1 , . . . , n – 1}.
- Si on connaît une racine n-ème z_0 d'un complexe Δ, alors pour avoir toutes les racines n-ièmes de Δ, Il suffit de multiplier z_0 par les n racines n-ièmes de l'unité.

C'est-à-dire les n racines n-ièmes de Δ sont les complexes $z_0e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, k varie dans {0 , 1 , . . . , n – 1}.

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Forme algébrique d'un nombre complexe

1 – Calculer dans l'ensemble des nombres complexes

Exercice 1

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = (1+i)(3+2i)(3-i)$ b) $z_2 = (1-i)^3$ c) $z_3 = \dfrac{1}{1+i}$

d) $z_4 = \dfrac{2-5i}{2-i}$ e) $z_5 = \left(\dfrac{1+i}{3+2i}\right)^2$. f) $z_6 = \dfrac{-2+i}{i} + (1-2i)^2 + \dfrac{2i}{3-i}$.

Solution 1

a) $z_1 = (1+i)(3+2i)(3-i) = (1+5i)(3-i) = 8+14i$.

b) $z_2 = (1-i)^3 = (1-i)^2(1-i) = -2i(1-i) = -2-2i$.

c) $z_3 = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

d) $z_4 = \dfrac{2-5i}{2-i} = \dfrac{(2-5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{9-8i}{5} = \dfrac{9}{5} - \dfrac{8}{5}i$.

e) $z_5 = \left(\dfrac{1+i}{3+2i}\right)^2 = \dfrac{(1+i)^2}{(3+2i)^2} = \dfrac{2i}{5+12i} = \dfrac{2i(5-12i)}{(5+12i)(5-12i)} = \dfrac{24}{169} + \dfrac{10}{169}i$.

f) $z_6 = (-2+i)(-i) + (-3-4i) + \dfrac{2i(3+i)}{10} = 1+2i-3-4i+\dfrac{3}{5}i - \dfrac{1}{5} = -\dfrac{11}{5} - \dfrac{7}{5}i$.

Exercice 2

1) Calculer i^2 , i^3 , i^4 , i^{4n} , i^{4n+1} , i^{4n+2} , i^{4n+3} où n est un entier naturel.

2) Calculer alors : $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{1995}$.

Solution 2

1) $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$;
$i^{4n} = (i^4)^n = 1$; $i^{4n+1} = i^{4n}.i = i$; $i^{4n+2} = i^{4n}.i^2 = -1$; $i^{4n+3} = i^{4n}.i^3 = -i$.

2) $1+i+i^2+\ldots+i^{1995} = \dfrac{1-i^{1996}}{1-i} = \dfrac{1-1}{1-i} = 0$ (car $1996 = 4\times 499$).

Exercice 3

On pose $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Calculer j^2. En déduire les relations : $1 + j + j^2 = 0$; $j^3 = 1$ et $\dfrac{1}{j} = j^2 = \overline{j}$.

Solution 3

Calcul de j^2 : $j^2 = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vérification des relations :

- $1+j+j^2 = 1 - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$.
- $j^3 = j^2 \times j = \left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$.

- $\frac{1}{j} = \frac{j^2}{j^3} = \frac{j^2}{1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où $\frac{1}{j} = j^2 = \bar{j}$.

Exercice 4

Calculer $(1 + i)^2$; en déduire $(1 + i)^{100}$.

Solution 4

- $(1 + i)^2 = 2i$
- $(1 + i)^{100} = [(1+ i)^2]^{50} = (2i)^{50} = 2^{50}.\ i^{50} = -2^{50} = -1\ 125\ 899\ 906\ 842\ 624$ (d'après l'exercice 2) $i^{50} = -1$).

2 – Déterminer les parties réelle et imaginiaire d'un nombre complexe

Exercice 5

On pose $z = x + iy$ avec x et y réels. Déterminer en fonction de x et y les parties réelle et imaginaire de :
1) $Z_1 = z^2 - 3z + 2 + i$ 2) $Z_2 = (1 + z)^2 + (1 + z)i$.

Solution 5

1) $Z_1 = (x + iy)^2 - 3(x + iy)+ 2 + i = (x^2 - y^2 - 3x + 2) + i\,(2xy - 3y + 1)$
D'où $Re(Z_1) = x^2 - y^2 - 3x + 2$ et $Im(Z_1) = 2xy - 3y + 1$.
2) $Z_2 = (1 + x + iy)^2 + (1+ x + iy)i = (1+ x)^2 - y^2 - y + i[2y(1+ x) + 1 + x] = x^2 - y^2 + 2x - y + 1 + i(1+ x)(2y + 1)$
D'où $Re(Z_2) = x^2 - y^2 + 2x - y + 1$ et $Im(Z_2) = (1 + x)(2y + 1)$.

Exercice 6

Déterminer le réel x tel que: $x^2 - 3x + 2 + i(2x^2 + x - 10) = 0$.

Solution 6

Puisque x est réel, $x^2 - 3x + 2$ et $2x^2 + x - 10$ sont réels.
Donc $x^2 - 3x + 2$ et $2x^2 + x - 10$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $x^2 - 3x + 2 + i(2x^2 + x - 10)$.

Ainsi : $(x^2 - 3x + 2) + i(2x^2 + x - 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ 2x^2 + x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = 2 \\ x = 2 \text{ ou } x = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Finalement, $x^2 - 3x + 2 + i(2x^2 + x - 10) = 0$ si et seulement si $x = 2$.

Exercice 7

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $z = \frac{1+z}{1+i-2z}$, lorsque $z = x + iy$, x et y étant des réels.

Solution 7

Z existe si et seulement si, z est différent de $0,5 + 0,5i$

$$Z = \frac{(1+x)+iy}{(1-2x)+i(1-2y)} = \frac{[(1+x)+iy][(1-2x)-i(1-2y)]}{[(1-2x)+i(1-2y)][(1-2x)-i(1-2y)]} = \frac{-2x^2-2y^2-x+y+1+i(-1+3y-x)}{(1-2x)^2+(1-2y)^2}$$

Finalement, $Z = \frac{-2x^2-2y^2-x+y+1}{(1-2x)^2+(1-2y)^2} + i\frac{-1+3y-x}{(1-2x)^2+(1-2y)^2}$.

D'où $Re(Z) = \frac{-2x^2-2y^2-x+y+1}{(1-2x)^2+(1-2y)^2}$ et $Im(Z) = \frac{-1+3y-x}{(1-2x)^2+(1-2y)^2}$.

3 – Déterminer le conjugué d'un nombre complexe

Exercice 8

Soit $\alpha = \frac{3-i}{5+7i}$ et $\beta = \frac{3+i}{5-7i}$.

1) Montrer que $\overline{\alpha}=\beta$.

2) Montrer que $\alpha+\beta$ est un réel et $\alpha-\beta$ est un imaginaire pur.

Solution 8

1) $\overline{\alpha}=\overline{\left(\dfrac{3-i}{5+7i}\right)}=\dfrac{\overline{3-i}}{\overline{5+7i}}=\dfrac{3+i}{5-7i}=\beta$.

2) Puisque $\beta=\overline{\alpha}$, alors : $\alpha+\beta=\alpha+\overline{\alpha}=2\mathrm{Re}(\alpha)$ et $\alpha-\beta=\alpha-\overline{\alpha}=2i\mathrm{Im}(\alpha)$.

D'où $\alpha+\beta$ est réel et $\alpha-\beta$ est imaginaire pur.

Exercice 9

Soit z un complexe non nul. Ecrire plus simplement $\overline{\left(z+\dfrac{1}{z}\right)}-\dfrac{\overline{(1+z)}}{\overline{z}}$.

Solution 9

$$\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}-\frac{\overline{(1+z)}}{\overline{z}}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1+\overline{z}}{\overline{z}}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{\overline{z}}-1=\overline{z}-1.$$

Exercice 10

Soit P un polynôme complexe à coefficients réels.

a) Montrer que $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$.

b) En déduire que, si z est racine de P, alors $\overline{z}$ est aussi racine de P.

Solution 10

a) Soit P, polynôme de degré n, à coefficients réels.

On peut trouver n + 1 réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$, tels que $a_n \neq 0$ et pour tout nombre complexe z,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n.$$

On a alors

$$\overline{P(z)}=\overline{a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n}=\overline{a_0}+\overline{a_1z}+\overline{a_2z^2}+\ldots+\overline{a_nz^n}=a_0+a_1\overline{z}+a_2\overline{z^2}+\ldots+a_n\overline{z^n}$$
$$=a_0+a_1\overline{z}+a_2\overline{z}^2+\ldots+a_n\overline{z}^n$$
$$=P(\overline{z})$$

D'où pour tout nombre complexe z, $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$.

b) Si z est une racine de P, alors P(z) = 0 et donc $\overline{P(z)}=0$. Et par suite, $P(\overline{z})=0$ (car $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$).

C'est-à-dire $\overline{z}$ est une racine de P. Finalement, si z est racine de P alors $\overline{z}$ est aussi racine de P.

Remarque :
Cet exercice démontre une propriété importante qui stipule que :
Soit P un polynôme à coefficients réels.
Si z est racine de P, alors le conjugué de z est aussi racine de P

4 – Calculer le module d'un nombre complexe

Exercice 11

Déterminer le module du complexe :

1)a) $\dfrac{5}{2}i$ b) -3 c) $-4i$.

2)a) $1-i\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}+i\sqrt{2}$ c) $\cos\alpha+i\sin\alpha$.

3)a) $(3+2i)^5$ b) $(-1+i)(-3+i)(-5+i)$ c) $\dfrac{7}{(2-i)^2}$ d) $\dfrac{1}{1-i}+\dfrac{1}{1-i}$.

Solution 11

1)a) $\left|\frac{5}{2}i\right|=\frac{5}{2}$; b) $|-3|=3$; c) $|-4i|=4$.

2)a) $|1-i\sqrt{3}|=\sqrt{1+3}=2$; b) $|\sqrt{3}+i\sqrt{2}|=\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$.

c) $|\cos\alpha+i\sin\alpha|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$;

3)a) $|(3+2i)^5|=|3+2i|^5=\sqrt{9+4}^{\,5}=\sqrt{13}^{\,5}=169\sqrt{13}$;

b) $|(-1+i)(-3+i)(-5+i)|=|-1+i|\times|-3+i|\times|-5+i|=\sqrt{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{26}=2\sqrt{130}$;

c) $\left|\frac{7}{(2-i)^2}\right|=\frac{7}{|2-i|^2}=\frac{7}{5}$; d) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}=\frac{1-i+1+i}{1+1}=1$; d'où $\left|\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}\right|=1$.

Attention : *On a en général pour deux nombres complexes z et z',* $|z+z'|\neq|z|+|z'|$.

Exercice 12

Déterminer les complexes z tels que: $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-1|$.

Solution 12

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels non tous nuls, on a :

d'une part $|z|=\left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$

et d'autre part

$$|z|=|z-1| \Leftrightarrow |x+iy|=|x-1+iy| \Leftrightarrow x^2+y^2=(x-1)^2+y^2 \Leftrightarrow -2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Or, $x^2 + y^2 = 1$ et $x=\frac{1}{2}$, alors $\frac{1}{4}+y^2=1$. Ce qui équivaut à $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les nombres complexes tels que $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-1|$ sont : $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z+3\bar{z}=(2+i\sqrt{3})|z|$.

Solution 13

Soit $z = x + iy$, x et y étant réels.

$$z+3\bar{z}=(2+i\sqrt{3})|z| \Leftrightarrow (x+iy)+3(x-iy)=(2+i\sqrt{3})\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow 4x-2iy=2\sqrt{x^2+y^2}+i\sqrt{3(x^2+y^2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2+y^2}=4x \\ \sqrt{3(x^2+y^2)}=-2y \end{cases}$$

Ainsi, $z+3\bar{z}=(2+i\sqrt{3})|z| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4x^2 \\ 3x^2+3y^2=4y^2 \\ x\geq 0 \text{ et } y\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-y^2=0 \\ x\geq 0 \text{ et } y\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x\sqrt{3} \text{ ou } y=-x\sqrt{3} \\ x\geq 0 \text{ et } y\leq 0 \end{cases}$

Finalement, on a $y=-x\sqrt{3}$, avec $x \geq 0$ (car puisque $x \geq 0$, alors on a $-x\sqrt{3}\leq 0$ et $x\sqrt{3}\geq 0$).

C'est-à-dire, $z=x-ix\sqrt{3}$ avec $x \geq 0$.

On peut alors conclure que l'ensemble solution de cette équation est : $S = \{x(1-i\sqrt{3}),\ \text{avec } x\in[0,+\infty[\}$.

Exercice 14

Soit α un nombre réel, déterminer le module de $z = \dfrac{1+\alpha i}{1-\alpha i}$.

Solution 14

On a : $\overline{1+\alpha i} = 1-\alpha i$, d'où $|1+\alpha i| = |1-\alpha i|$. Et $|z| = \left|\dfrac{1+\alpha i}{1-\alpha i}\right| = \dfrac{|1+\alpha i|}{|1-\alpha i|} = 1$.

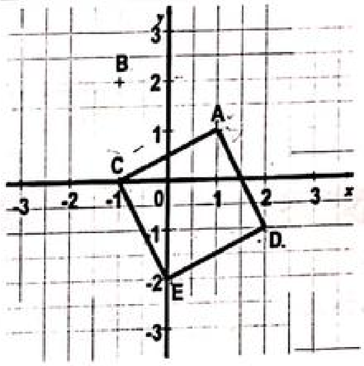
B. Représenter géométriquement un nombre complexe

1 – Déterminer l'affixe d'un point, l'affixe d'un vecteur

Exercice 15

Dans la figure ci-dessous, $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct.

1) Déterminer les affixes :
   a) des points O, A, B, C, D et E.
   b) des vecteurs $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{EB}$
2) Vérifier que ADEC est un parallélogramme.



Solution 15

1)a) $z_O = 0$; $z_A = 1+i$; $z_B = -1+2i$; $z_C = -1$; $z_D = 2-i$ et $z_E = -2i$.

b) $z_{\overrightarrow{OB}} = z_B = -1+2i$; $z_{\overrightarrow{CB}} = z_B - z_C = 2i$; $z_{\overrightarrow{AD}} = z_D - z_A = 1-2i$;

$z_{\overrightarrow{EB}} = z_B - z_E = -1+4i$; $z_{\overrightarrow{EC}} = z_C - z_E = -1+2i$.

2) On remarque que : $z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{CE}} = 1-2i$. D'où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$.

On peut donc conclure que ADEC est un parallélogramme.

Exercice 16

A, B et C sont les points d'affixes respectives $1+i$, $-2-i$ et $-3i$.
Déterminer les affixes de G, barycentre du système (A, 2), (B, -1) et (C, 1) et du milieu I de [AB].

Solution 16

- L'affixe du barycentre G : $z_G = \dfrac{2z_A - z_B + z_C}{2} = \dfrac{2(1+i)-(-2-i)-3i}{2} = 2$.
- L'affixe du milieu I : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{1+i-2-i}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 17

Soit M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont des réels. On considère le nombre complexe $z' = z^2$.
Soit M d'affixe z = x + iy où x et y sont des réels. On considère le nombre complexe z' = z².

a) Exprimer en fonction de x et y, les parties réelle et imaginaire de z'.
b) Déterminer et dessiner les ensembles des points M tels que z' soit un réel, puis un imaginaire pur.

Solution 17

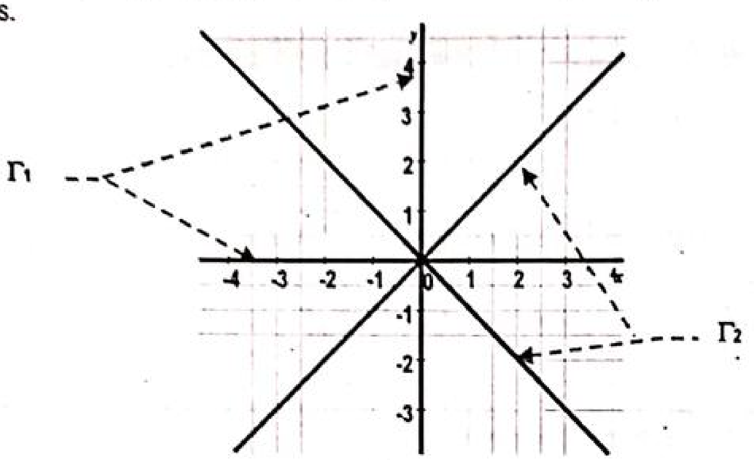
a) On a $z' = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.
D'où $Re(z') = x^2 - y^2$ et $Im(z) = 2xy$

b) • z' est réel $\Leftrightarrow$ $2xy = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$ ou $y = 0$

D'où l'ensemble Γ_1 des points d'affixe z pour lesquels z' soit un réel est la réunion des axes de coordonnées.

- z' est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $x^2 - y^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $y = x$ ou $y = -x$

D'où l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que z' soit un imaginaire pur est la réunion des première et seconde bissectrices.



Exercice 18

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2+2i\sqrt{3}$, -4 et $-1+i\sqrt{3}$.
Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Solution 18

On a $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -6 - 2i\sqrt{3}$ et $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -3 - i\sqrt{3}$.

On constate que $z_{\overrightarrow{AB}} = 2z_{\overrightarrow{AC}}$. Ce qui signifie que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$. D'où les points A, B et C sont alignés.

Exercice 19

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{1+z}{1+i-2z}$ soit imaginaire pur.

Solution 19

On pose z = x + iy, avec x et y réels.

$\dfrac{1+z}{1+i-2z}$ n'existe que si et seulement si $1 + i - 2z \neq 0$, c'est-à-dire $z \neq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Par conséquent, on doit avoir : $(x, y) \neq \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Et pour tout couple de réels $(x, y) \neq \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\frac{1+z}{1+i-2z} = \frac{(1+x)+iy}{(1-2x)+i(1-2y)} = \frac{-2x^2-2y^2-x+y+1}{(1-2x)^2+(1-2y)^2} + \frac{-1-x+3y}{(1-2x)^2+(1-2y)^2}i.$$

$\dfrac{1+z}{1+i-2z}$ est un imaginaire pur, si et seulement si $\dfrac{-2x^2-2y^2-x+y+1}{(1-2x)^2+(1-2y)^2} = 0$. Ce qui signifie que

$$\begin{cases} -2x^2-2y^2-x+y+1 = 0 \\ (x, y) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x^2+\frac{1}{2}x+y^2-\frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \\ (x,y) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \text{ et enfin } \begin{cases} \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{8} \\ (x,y) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}.$$

On reconnaît une équation du cercle de centre Ω d'affixe $z = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}i$ et de rayon $\sqrt{\dfrac{5}{8}}$.

On peut aussi voir que le point d'affixe $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ est un point de ce cercle.

D'où l'ensemble cherché est le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$, privé du point d'affixe $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

2 – *Interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe*

Exercice 20

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives 2, 2i et $(1+\sqrt{3})(1+i)$.

a) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
b) Calculer les distances AB, AC et BC.
c) Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

Solution 20

a) • $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -2+2i$ • $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = (1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i-2 = (-1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$.

• $z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = (1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i-2i = (1+\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})i$.

b) **Calcul des distances**

• $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ • $AC = |z_C - z_A| = \sqrt{(-1+\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$.

• $BC = |z_C - z_B| = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(-1+\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$.

c) On remarque que AB = AC = BC. D'où ABC est un triangle équilatéral.

Exercice 21

Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectives a = -1 + i, b = -1 – i, c = 2i et d = 2 – 2i.
a) Calculer les distances BC, BD et CD. Quelle est la nature du triangle BCD.
b) Déterminer l'affixe w du milieu Ω du segment [CD]. Calculer la distance ΩA.
c) Justifier que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle, dont on précisera le centre et le rayon
d) Déterminer l'affixe e du point E symétrique de B par rapport à Ω.
Quelle est la nature du quadrilatère CBDE.

Exercice 21

a) • $BC = |c-b| = |1+3i| = \sqrt{10}$ • $BD = |d-b| = |3-i| = \sqrt{10}$ • $CD = |d-c| = |2-4i| = 2\sqrt{5}$

On remarque que : $BC^2 + BD^2 = 10 + 10 = 20 = CD^2$ et BC = BD.
D'où BCD est un triangle rectangle et isocèle en B.

b) L'affixe du milieu de [CD] est : $w = \frac{c+d}{2} = 1$. Ω a pour affixe w = 1.

Et $\Omega A = |a-w| = |-2+i| = \sqrt{5}$.

c) BCD est un triangle rectangle en B, d'où le cercle circonscrit à BCD a pour diamètre [CD].

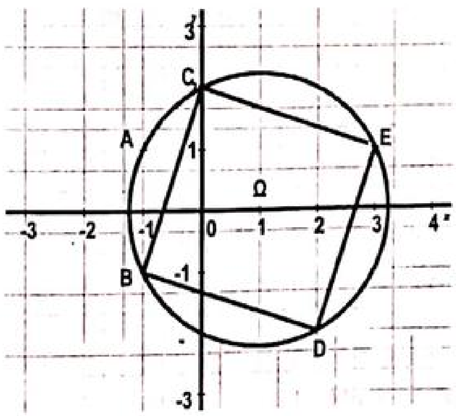
Donc pour centre Ω milieu de [CD] et pour rayon $\frac{CD}{2} = \sqrt{5}$.

Puisque $\Omega A = \sqrt{5}$, alors A appartient aussi au cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$.
D'où les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$.

d) E est symétrique de B par rapport à Ω signifie, Ω est milieu de [BE].

D'où $w = \frac{e+b}{2}$ et donc e = 2w – b = 3 + i.

Ω étant milieu de [EB] et [CD], CBDE est un parallélogramme.
Puisque de plus, BCD est rectangle et isocèle en B, alors CBDE est un carré.



Exercice 22

Déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition imposée, de deux manières :

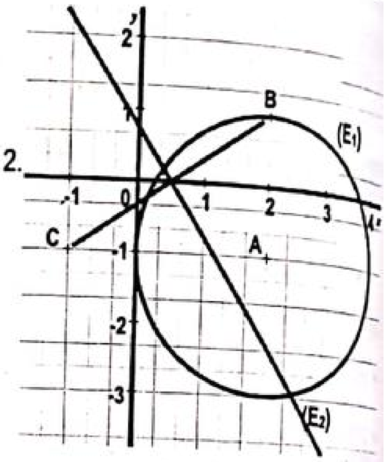
- algébriquement, en utilisant z = x + iy, x et y étant réels.
- géométriquement, en interprétant le module en terme de distance.

a) $|z-2+i|=2$ b) $|z+1+i|=|z-2-i|$.

Solution 22

Méthode algébrique:

Soit z = x + iy. x, y appartenant à $\mathbb{R}$



a) $|z-2+i|=2 \Leftrightarrow |(x-2)+i(y+1)|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=4$

D'où l'ensemble (E_1) cherché est le cercle de centre A d'affixe 2 – i et de rayon 2.

b) $|z+1+i|=|z-2-i| \Leftrightarrow |(x+1)+i(y+1)|=|(x-2)+i(y-1)|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow 6x+4y-3=0$

D'où l'ensemble (E_2) cherché est la droite d'équation 6x + 4y – 3 = 0.

Méthode géométrique :

a) Soit point A d'affixe 2 – i.

$|z-2+i|=2 \Leftrightarrow |z-z_A|=2 \Leftrightarrow AM=2$. L'ensemble cherché (E_1) est le cercle de centre A et de rayon 2.

b) Soit C d'affixe -1 – i et B d'affixe 2 + i.

$|z+1+i|=|z-2-i| \Leftrightarrow |z-z_C|=|z-z_B| \Leftrightarrow CM=BM$.

L'ensemble cherché (E_2) est la médiatrice du segment [BC].

Exercice 23

Déterminer, en utilisant la méthode géométrique, l'ensemble des points M d'affixe z telle que:

a) $|z-2+i|=|\bar{z}+3i|$

b) $\left|\dfrac{z+i}{1+i-z}\right|=1$

c) $|(1+i)z+2|=|\bar{z}-2|$

d) $|2iz+1-4i|=8$.

Solution 23

a) $|z-2+i|=|\bar{z}+3i| \Leftrightarrow |z-2+i|=|\overline{\bar{z}+3i}|$ (car $|z|=|\bar{z}|$)

$\Leftrightarrow |z-2+i|=|z-3i|$

Soit A et B d'affixes respectives 2 + i et 3i.

On a : $|z-2+i|=|\bar{z}-2+i| \Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow AM=BM$.

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [AB]

b) $\left|\dfrac{z+i}{1+i-z}\right| \Leftrightarrow \dfrac{|z+i|}{|1+i-z|}=1 \Leftrightarrow |z+i|=|z-1-i|$ avec $z\neq 1+i$

$\Leftrightarrow |z-z_C|=|z-z_D|$ avec C et D d'affixes respectives $-i$ et $1+i$

$\Leftrightarrow CM=DM$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [CD].

c) $|(1+i)z+2|=|\bar{z}-2| \Leftrightarrow \left|(1+i)\left(z+\dfrac{2}{1+i}\right)\right|=|\overline{\bar{z}-2}| \Leftrightarrow |1+i|\times|z+1-i|=|z-2| \Leftrightarrow \sqrt{2}|z+1-i|=|z-2|$.

Soit E le point d'affixe -1+ i et F le point d'affixe 2.

On a : $\sqrt{2}EM=FM \Leftrightarrow 2EM^2=FM^2 \Leftrightarrow 2EM^2-FM^2=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{FM}-\sqrt{2}\overrightarrow{EM})(\overrightarrow{FM}+\sqrt{2}\overrightarrow{EM})=0$.

Soit $G_1=\{(F,1),(E,-\sqrt{2})\}$ et $G_2=\{(F,1),(E,\sqrt{2})\}$.

On obtient alors : $\sqrt{2}EM=FM \Leftrightarrow (1-\sqrt{2})\overrightarrow{G_1M}.(1+\sqrt{2})\overrightarrow{G_2M}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{G_1M}.\overrightarrow{G_2M}=0$.

L'ensemble cherché est donc le cercle de diamètre $[G_1G_2]$, où G_1 et G_2 ont pour affixes respectives

$z_1=\dfrac{z_F-\sqrt{2}z_E}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}i$ et $z_2=\dfrac{z_F+\sqrt{2}z_E}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}i$.

d) $|2iz+1-4i|=8 \Leftrightarrow \left|2i\left(z-\dfrac{1}{2}i-2\right)\right|=8 \Leftrightarrow 2\left|z-2-\dfrac{1}{2}i\right|=8 \Leftrightarrow \left|z-2-\dfrac{1}{2}i\right|=4$

Posons H, le point d'affixe $2+\dfrac{1}{2}i$, on a : $|z-z_H|=4$, c'est-à-dire HM = 4.

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre H et de rayon 4.

Exercice 24

A tout réel x, on associe le nombre complexe $z=\dfrac{2+15ix}{1-5ix}$.

On note M, A, B les points d'affixes respectives z, 2, -3. On désigne par I le milieu de [AB].

a) Démontrer que $\|\overrightarrow{IM}\|$ ne dépend pas de x.

b) En déduire la courbe à laquelle appartiennent tous les points M lorsque x décrit $\mathbb{R}$.

Solution 24

a) L'affixe de I est $\dfrac{2-3}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{IM}$ est : $z_M-z_I=\dfrac{2+15ix}{1-5ix}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5(1+5ix)}{2(1-5ix)}$.

Alors $\|\overrightarrow{IM}\|=\left|\dfrac{5(1+5ix)}{2(1-5ix)}\right|=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{|1+5ix|}{|1-5ix|}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{\sqrt{1+25x^2}}{\sqrt{1+25x^2}}=\dfrac{5}{2}$. D'où la distance IM est indépendante de x.

b) On a pour tout réel x, $IM=\dfrac{5}{2}$. D'où lorsque x décrit $\mathbb{R}$, M appartient au cercle de centre I et de rayon $\dfrac{5}{2}$.

Exercice 25

Pour tout complexe $z\neq 1$, on pose $z'=\dfrac{z-1}{\bar{z}-1}$, et on appelle A, B, M et M' les points d'affixes respectives 1, -1, z et z' dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

a) Comparer $|z-1|$ et $|\bar{z}-1|$ et en déduire $|z'|$. Traduire géométrique ce résultat pour le point M'.

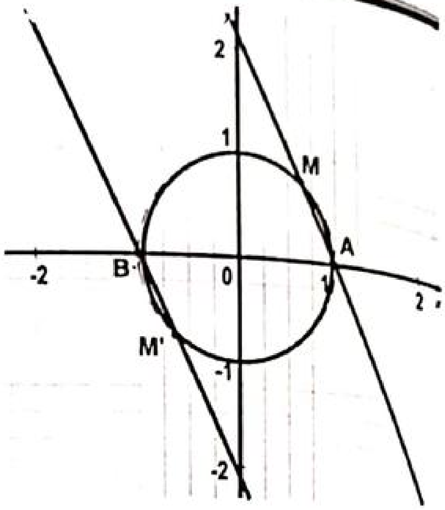
b) Calculer en fonction de z et $\bar{z}$ le complexe $r=\dfrac{z'+1}{z-1}$ et déduire que r est un réel.

c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.

d) Utiliser ce qui précède pour donner une construction géométrique de M' connaissant M. Faire une figure.

Solution 25

a)
- Soit z un nombre complexe, on a $|\bar{z}-1|=|\overline{z-1}|=|z-1|$.
- Ainsi, pour $z\neq 1$, $|z'|=\left|\dfrac{z-1}{\bar{z}-1}\right|=\dfrac{|z-1|}{|\bar{z}-1|}=\dfrac{|z-1|}{|z-1|}=1$.
- Or $|z'|=1$ signifie que OM' = 1, alors le point M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1.



b) • Soit $z \neq 1$, $r = \dfrac{z'+1}{z-1} = \dfrac{\dfrac{z-1}{\bar{z}-1}+1}{z-1} = \dfrac{z-1+\bar{z}-1}{(z-1)(\bar{z}-1)} = \dfrac{z+\bar{z}-2}{(z-1)(\bar{z}-1)}$.

D'où $r = \dfrac{z+\bar{z}-2}{(z-1)(\bar{z}-1)}$.

• Ainsi, pour $z \neq 1$, $r = \dfrac{z+\bar{z}-2}{(z-1)(\bar{z}-1)} = \dfrac{2\text{Re}(z)-2}{|z-1|^2}$.

Comme $2\text{Re}(z) - 2$ et $|z-1|^2$ sont des réels, alors r est un réel.

c) $r = \dfrac{z'+1}{z-1}$, donc $z' + 1 = r(z-1)$. Il en découle que $\overrightarrow{BM'} = r\overrightarrow{AM}$.

r étant un réel, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.

d) Remarquons d'abord que A et B sont des points du cercle de centre O et de rayon 1.
Pour Re(z) ≠ 1, d'après la question a), M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1.
D'après la question c) M' appartient à la droite passant par B et parallèle à la droite (AM). Alors M' est le point de rencontre du cercle de centre O et de rayon 1 et la droite passant par B et parallèle à la droite (AM) autre que B.
Pour Re(z) = 1, M' et B sont confondus.

C. Ecrire un nombre complexe non nul sous forme trigonométrique

1 – Passer de la forme algébrique à une forme trigonométrique d'un réel non nul ou d'un imaginaire pur non nul

Exercice 26

En remarquant que les complexes suivants sont réels ou imaginaires purs, préciser pour chacun, une forme trigonométrique :

1)a) $\frac{1}{2}i$ b) -3 c) π d) $-\pi i$.

2)a) $\cos x$ $\left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ b) $\sin\frac{x}{2}$ $\left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, x \neq 0\right)$ c) ix (x réel non nul)

d) $-i\sin 2x$ $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Solution 26

1)a) $\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. **b)** $-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$

c) $\pi = \pi(\cos 0 + i\sin 0)$. **d)** $-\pi i = \pi\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

2)a) Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\cos x > 0$.

D'où $\cos x = \cos x(\cos 0 + i\sin 0)$.

b) • Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, alors $\frac{x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$ et $\sin\frac{x}{2} < 0$.

D'où $\sin\frac{x}{2} = -\left(\sin\frac{x}{2}\right)(\cos\pi + i\sin\pi)$.

> **Point méthode :**
> *Soit a un nombre réel non nul :*
> • *Si $a < 0$, alors $|a| = -a$ et $\arg a \equiv \pi[2\pi]$*
> $|ai| = -a$ et $\arg(ai) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
> • *Si $a > 0$, alors $|a| = a$ et $\arg a \equiv 0\ [2\pi]$.*
> $|ai| = a$ et $\arg(ai) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

- Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $\frac{x}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $\sin\frac{x}{2} > 0$. D'où $\sin\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2}\right)(\cos 0 + i\sin 0)$.

c) • Si $x < 0$, $ix = -x\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

- Si $x > 0$, $ix = x\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

d) • Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $2x \in \left]0, \pi\right[$ d'où $\sin 2x > 0$. On a alors, $-i\sin 2x = (\sin 2x)\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

2 – Passer de la forme algébrque à une forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Exercice 27

Ecrire sous forme trigonométrique, chacun des complexes suivants :

1) a) $2 - 2i\sqrt{3}$; b) $-3 - 3i$; c) $\sqrt{3} + i$.

2) a) $(\sqrt{3} + i)^3$; b) $(2 - 2i\sqrt{3})(-3 - 3i)$; c) $\dfrac{-3-3i}{\sqrt{3}+i}$.

Solution 27

1)a) Posons $z_1 = 2 - 2i\sqrt{3}$. On a : $|z_1| = \sqrt{4+12} = 4$.

Soit θ_1 un argument de z_1, on a : $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. On peut prendre $\theta_1 = -\frac{\pi}{3}$.

D'où $2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

b) Posons $z_2 = -3 - 3i$. On a : $|z_2| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$.

Soit θ_2 un argument de z_2, on a : $\begin{cases} \cos\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. On peut prendre $\theta_2 = -\frac{3\pi}{4}$.

D'où $-3 - 3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

c) Posons $z_3 = \sqrt{3} + i$. On a : $|z_3| = \sqrt{3+1} = 2$.

Soit θ_3 un argument de z_3, on a : $\begin{cases} \cos\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$. On peut prendre $\theta_3 = \frac{\pi}{6}$. Donc $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

2)a) $(\sqrt{3}+i)^3 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^3 = 2^3\left(\cos\left(3\times\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(3\times\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

b) $(2-2i\sqrt{3})(-3-3i) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \times 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$$= 12\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

D'où $(2-2i\sqrt{3})(-3-3i)=12\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right)$.

c) $$\frac{-3-3i}{\sqrt{3}+i}=\frac{3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{-11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-11\pi}{12}\right)\right)$$

Exercice 28

Soit θ un réel dans $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, écrire sous forme trigonométrique, chacun des complexes suivants :

a) $-\cos\theta-i\sin\theta$; b) $\sin\frac{\pi}{7}+i\cos\frac{\pi}{7}$; c) $-\cos\theta+i\sin\theta$; d) $-\sin\theta-i\cos\theta$; e) $\cos\theta+i\cos\theta$.

Solution 28

a) $-\cos\theta-i\sin\theta=-(\cos\theta+i\sin\theta)=(\cos\pi+i\sin\pi)(\cos\theta+i\sin\theta)$ (car $-1=\cos\pi+i\sin\pi$).
$=\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)$

b) $$\sin\frac{\pi}{7}+i\cos\frac{\pi}{7}=i\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)\quad \text{car } i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)$$
$$=\cos\frac{5\pi}{14}+i\sin\frac{5\pi}{14}$$

c) $-\cos\theta+i\sin\theta=-(\cos\theta-i\sin\theta)=(\cos\pi+i\sin\pi)(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))=\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)$

d) $-\sin\theta-i\cos\theta=-i(\cos\theta-i\sin\theta)=\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$.

e) $\cos\theta+i\cos\theta=(\cos\theta)(1+i)$. Puisque $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, alors on a $\cos\theta<0$.

Posons $z=1+i$, on a $|z|=\sqrt{2}$ et soit α un argument de z, on a : $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$, donc on peut prendre $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Et donc $z=(\sqrt{2}\cos\theta)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Par conséquent, $\cos\theta+i\cos\theta=(-\cos\theta)(\cos\pi+i\sin\pi)\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=(-\cos\theta)\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

3 – Passer d'une forme trigonométrique à la forme algébrique

Exercice 29

1) Ecrire sous forme trigonométrique: a) $(1+i)^6$ b) $(2\sqrt{3}-2i)^4$.

2) En déduire les formes algébriques de ces complexes.

Solution 29

1)a) $(1+i)^6=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6=(\sqrt{2})^6\left(\cos\left(6\times\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(6\times\frac{\pi}{4}\right)\right)=8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

b) $(2\sqrt{3}-2i)^4=\left[4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]^4=256\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$.

2)a) $(1+i)^6=8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ (d'après question 1)a)). D'où, $(1+i)^6=-8i$.

b) $(2\sqrt{3}-2i)^4=4^4\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$ (d'après question 1)b))

$$=256\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=-128-128i\sqrt{3}$$

Exercice 30

Calculer $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2003}$.

Solution 30

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2003}=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{2003}=\cos\frac{4006\pi}{3}+i\sin\frac{4006\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4 – Utiliser une forme trigonométrique

Exercice 31

On considère les nombres complexes: $z_1=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$, $z_2=1+i$ et $z=\frac{z_1}{z_2}$.

a) Déterminer le module et un argument de z_1, z_2 et z.

b) Ecrire z sous forme algébrique. En déduire $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Solution 31

a) • $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ • $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

• $z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$. D'où $z=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

On a donc : $|z_1|=\sqrt{2}$, $|z_2|=\sqrt{2}$ et $|z|=1$.

$\arg z_1\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$; $\arg z_2\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\arg z\equiv-\frac{\pi}{12}[2\pi]$.

b) • **Forme algébrique de z :**

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2(1+i)}=\frac{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(1-i)}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i.$$

• Comme d'après ce qui précède $z=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i$, alors en identifiant les parties réelles et imaginaires de z, on a : $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Puisque $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, alors : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice 32

Soit $u=\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Calculer u^2. En déduire le module et un argument de u.

Solution 32

- $u^2=2\sqrt{3}-2i$.
- On a : $|u^2|=\sqrt{12+4}=4$.

Or $|u^2|=|u|^2$, alors $|u|^2=4$. Par conséquent $|u|=2$.

Point méthode :
Soit ρ et r deux réels strictement positifs, θ et α deux réels ; $\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ si et seulement si $\begin{cases}\rho=r\\ \theta=\alpha+k2\pi\end{cases}$ où $k\in\mathbb{Z}$.

$\arg u^2=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $2\arg u=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

On en déduit que $\arg u=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Or, on a : $\mathrm{Re}(u)>0$ et $\mathrm{Im}(u)<0$, alors, soit θ un argument de u, on peut prendre θ dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Comme $-\frac{\pi}{2}\le-\frac{\pi}{12}+k\pi\le\frac{\pi}{2}$, entraîne à dire que : $-\frac{5}{12}\le k\le\frac{7}{12}$. D'où $k=0$.

D'où on peut prendre $\theta=-\frac{\pi}{12}$. D'où $\arg u=-\frac{\pi}{12}+k2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 33

1) Déterminer suivant les valeurs du réel x, différent de 2, le module et un argument de :

$$z=(x-2)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

2) Montrer que z^{1972} est un réel, préciser son signe.

Solution 33

1) Si $x<2$: on a $x-2<0$. Donc $x-2=(2-x)(\cos\pi+i\sin\pi)$. Donc

$z=(2-x)(\cos\pi+i\sin\pi)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=(2-x)\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

D'où $|z|=2-x$ et $\arg z\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]$.

Si $x>2$: on a $x-2>0$.

Donc $z=(x-2)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ est une forme trigonométrique de z.

D'où $|z|=x-2$ et $\arg z\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Point méthode :
- *Si $\arg z\equiv\pi[2\pi]$, alors z est un réel strictement négatif.*
- *Si $\arg z\equiv0[2\pi]$, alors z est un réel strictement positif.*
- *Si $\arg z\equiv0[\pi]$, alors z est un réel non nul.*
- *Si $\arg z\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$, alors z est un imaginaire pur.*

2) Si $x<2$: on a $\arg z\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]$. Donc $\arg z^{1972}\equiv493\times5\pi[2\pi]$, c'est-à-dire $\arg z^{1972}\equiv\pi[2\pi]$.

Si $x>2$: on a $\arg z\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$. Donc $\arg z^{1972}\equiv493\times\pi[2\pi]$, c'est-à-dire $\arg z^{1972}\equiv\pi[2\pi]$.

Puisque pour tout réel x différent de 2, on a $\arg z^{1972}\equiv\pi[2\pi]$, alors z^{1972} est un réel négatif.

Autre méthode :

$$z^{1972}=(x-2)^{1972}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{1972}=(x-2)^{1972}\left(\cos\left(1972\times\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(1972\times\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Ainsi, $z^{1972}=(x-2)^{1972}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{1972}=(x-2)^{1972}(\cos 493\pi+i\sin 493\pi)=-(x-2)^{1972}$.

Comme x est un réel et 1972 est pair, alors z^{1972} est un réel negatif.

5 – Donner l'écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul

Exercice 34

Donner la forme algébrique de : a) $e^{i\pi}$ b) $e^{i\frac{\pi}{2}}$ c) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ d) $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Solution 34

a) $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$.

b) $e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$.

c) $e^{-i\frac{\pi}{2}}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i$.

d) $e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 35

Ecrire sous forme exponentielle :

a) $1+i$ b) -3 c) $-\frac{1}{2}i$ d) π e) ei.

Solution 35

- $|1+i|=\sqrt{2}$ et $\arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$, d'où $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- $-3=3e^{i\pi}$.
- $-\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
- $\pi=\pi e^{i0}$.
- $ei=e\times e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 36

Ecrire sous forme exponentielle les complexes suivants :

a) $z_1=\frac{2+2i}{1-i\sqrt{3}}$ b) $z_2=-5\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ c) $z_3=\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{4}}}{\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2}$

Solution 36

a) $2+2i=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ *(le lecteur verifier ces resultats)*, alors :

$$z_1=\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}.$$

b) $-5=5e^{i\pi}$ et $\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=e^{-i\frac{\pi}{12}}$. D'où $z_2=5e^{i\pi}\times e^{-i\frac{\pi}{12}}=5e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)}=5e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

c) $z_3=\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{4}}}{\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2}=\frac{e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\pi}}=\frac{e^{-i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\pi}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{12}-\pi\right)}=e^{-i\frac{13\pi}{12}}=e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

Exercice 37

Ecrire sous forme exponentielle: $1-i$ puis $(1-i)^8$. En déduire la forme algébrique de $(1-i)^8$.

Solution 37

- $|1-i|=\sqrt{2}$ et $\arg(1-i)\equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ *(le lecteur vérifiera ces résultats).*

D'où $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Donc $(1-i)^8=16e^{-2i\pi}$.

- Par suite, on a : $(1-i)^8=16e^{-2i\pi}=16(\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi))=16$.

6 – Utiliser les formules de Moivre et d'Euler

Exercice 38

Ecrire cos3x et sin3x en fonction de cosx et sinx.

Solution 38

Soit x un nombre réel,

$\text{Cos}3x + i\sin 3x = (\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x.\sin x - 3\cos x.\sin^2 x - i\sin^3 x$

$= (\cos^3 x - 3\cos x.\sin^2 x) + i(3\cos^2 x.\sin x - \sin^3 x)$

D'où en identifiant les parties réelles et imaginaires, on a :

$\text{Cos}3x = \cos^3 x - 3\cos x.\sin^2 x$ et $\sin 3x = 3\sin x.\cos^2 x - \sin^3 x$.

Exercice 39

1) Montrer que $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=0$.

En déduire que $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$.

2) Montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=4\cos^2\frac{\pi}{5}-2$, puis que $\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}=-2\cos\frac{\pi}{5}$.

En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Solution 39

1)• $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4=\dfrac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}=\dfrac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}=\dfrac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}=0$

- Un complexe est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont nulles. Or

$$1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=1+\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right)$$

$$=1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+i\left(\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{5}\right)$$

D'où $\text{Re}\left(1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}\right)=1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}$

Et comme $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=0$, alors $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$.

2) • On sait que :

$\cos\frac{8\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}=2\cos^2\frac{\pi}{5}-1$ (car $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$), alors :

$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=2\cos\frac{2\pi}{5}=4\cos^2\frac{\pi}{5}-2$.

- On sait que $\cos\frac{4\pi}{5}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{6\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}$, alors

$\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}=2\cos\frac{4\pi}{5}=-2\cos\frac{\pi}{5}$. .

- On a :

$1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$ donc $1+\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}\right)=0$

donc $1+4\cos^2\frac{\pi}{5}-2-2\cos\frac{\pi}{5}=0$

donc $4\cos^2\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}-1=0$.

On en déduit que, $\cos\frac{\pi}{5}$ est donc solution de l'équation $4X^2-2X-1=0$ qui a deux solutions :

$$X_1=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad X_2=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Or $\frac{\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, alors on a $\cos\frac{\pi}{5}>0$. On peut alors conclure que $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 40

Soit (U_n) la suite définie par : $u_n=\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}$, avec θ réel différent de $2p\pi$ (où p est un entier relatif).

1) Montrer que : $u_n=\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}$, puis que $u_n=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{n\theta}{2}}$.

2) Montrer que : $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right).\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

3) Résoudre dans $[0\,,2\pi[$, l'équation : $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$.

Solution 40

1) • On sait que $1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, pour tous nombre complexe q différent de 1 et entier naturel n.

Or soit $\theta\in\mathbb{R}-\{k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, alors $e^{i\theta}$ est différent de 1. Ainsi, $u_n=\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}=\sum_{k=0}^{n}(e^{i\theta})^k=\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}$.

- $u_n=\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}=\frac{e^{i(n+1)\theta}-e^{i0}}{e^{i0}-e^{i0}}=\frac{e^{i\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}\left(e^{i\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}-e^{-i\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}=\frac{e^{i\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}\times 2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\times 2i\sin\frac{\theta}{2}}$.

> **Point méthode :**
> Soit a et b deux nombres réels, on a :
> - $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2e^{i\frac{a+b}{2}}\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.
> - $e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2ie^{i\frac{a+b}{2}}\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

D'où $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{n\theta}{2}}$.

2) $u_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n}\cos k\theta + i\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta$. (1)

Mais aussi $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{n\theta}{2}} = \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} + i\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$. (2)

De l'égalité (1), on déduit que : $\mathrm{Re}(u_n) = \sum_{k=0}^{n}\cos k\theta$ et $\mathrm{Im}(u_n) = \sum_{k=0}^{n}\sin k\theta$.

De l'égalité (2), on déduit que : $\mathrm{Re}(u_n) = \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$ et $\mathrm{Im}(u_n) = \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

En égalant les parties réelle et imaginaire de u_n, on déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

3) On peut remarquer que 0 n'est pas solution de l'équation $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

On peut alors écrire : $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = \dfrac{\sin\left(\frac{5}{2}x\right)\cos 2x}{\sin\frac{x}{2}}$, (puisque la seule valeur qui annule $\sin\frac{x}{2}$ est 0 dans $[0\,,2\pi[$, on est sûr que $\sin\frac{x}{2} \neq 0$). Alors

$$\begin{aligned} 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0 &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{5x}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos 2x = 0. \\ &\Leftrightarrow \frac{5x}{2} = k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- $\dfrac{5x}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{2k\pi}{5}$.

Puisque x appartient à $[0\,,2\pi[$, alors $x = \dfrac{2k\pi}{5}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ équivaut à $x \in \left\{\dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}, \dfrac{6\pi}{5}, \dfrac{8\pi}{5}\right\}$.

- $2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$.

Puisque x appartient à $[0\,,2\pi[$, alors $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ équivaut à $x \in \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

Finalement, l'ensemble des solutions est : $\left\{\dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}, \dfrac{6\pi}{5}, \dfrac{8\pi}{5}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

Exercice 41

Soit $w = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $S = w + w^2 + w^4$ et $T = w^3 + w^5 + w^6$.

1) Montrer que $S = \overline{T}$.

2) Calculer $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6$, $S + T$ et $S \times T$.

3) En déduire S et T.

Solution 41

1) $\overline{T} = \overline{w^3 + w^5 + w^6} = \overline{e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{i\frac{10\pi}{7}} + e^{i\frac{12\pi}{7}}} = e^{-i\frac{6\pi}{7}} + e^{-i\frac{10\pi}{7}} + e^{-i\frac{12\pi}{7}}$ (car $\overline{e^{ia}} = e^{-ia}$)

C'est-à-dire $\overline{T} = e^{i\frac{8\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{2\pi}{7}}$ (car $\frac{8\pi}{7} = 2\pi - \frac{6\pi}{7}, \frac{4\pi}{7} = 2\pi - \frac{10\pi}{7}, \frac{2\pi}{7} = 2\pi - \frac{12\pi}{7}$)

$$= w^4 + w^2 + w$$
$$= S$$

D'où $S = \overline{T}$.

2) • $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = \dfrac{1 - w^7}{1 - w} = \dfrac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^7}{1 - w} = \dfrac{1 - e^{i2\pi}}{1 - w} = \dfrac{1 - 1}{1 - w} = 0$.

D'où $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = 0$

• $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = 1 + (w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6) = 1 + S + T$

Et puisque $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = 0$, alors $1 + S + T = 0$.

• $ST = (w + w^2 + w^4)(w^3 + w^5 + w^6) = w^4 + w^5 + w^6 + 3w^7 + w^8 + w^9 + w^{10}$.

Or $w^7 = 1$, alors $w^8 = w$, $w^9 = w^2$, $w^{10} = w^3$.

D'où $ST = w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 + 3 = -1 + 3 = 2$. Finalement, $ST = 2$.

3) On a $\begin{cases} S + T = -1 \\ ST = 2 \end{cases}$, alors S et T sont les solutions de l'équation $X^2 + X + 2 = 0$.

Résolvons l'équation $X^2 + X + 2 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = -7 = (i\sqrt{7})^2$ et ses solutions sont :

$$X_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}.$$

Remarquons que : $\mathrm{Im}S = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}$.

La fonction sinus étant croissante et positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\frac{2\pi}{7}$ et $\frac{\pi}{7}$ appartiennant à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ avec $\frac{2\pi}{7} > \frac{\pi}{7}$, alors on a $\sin\frac{2\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$. C'est-à-dire $\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$. De plus $\frac{4\pi}{7}$ appartient à $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, donc on a aussi $\sin\frac{4\pi}{7} > 0$

On peut alors conclure que $\mathrm{Im}S = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$.

Finalement, $T = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $S = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 42

Linéariser $\cos^4 x$ et $\cos^2 x \sin^2 x$.

Solution 42

• Pour tout réel x, on a : $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

$$\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{1}{2^4}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})$$

$$=\frac{1}{16}\left[(e^{4ix}+e^{-4ix})+4(e^{2ix}+e^{-2ix})+6\right]$$ (en regroupant les termes conjugués entre eux)

$$=\frac{1}{16}(2\cos 4x+8\cos 2x+6)$$

Finalement, $\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$.

- Pour tout réel x, on a : $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

$$\cos^2 x\sin^4 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2^6\times i^4}(e^{2ix}+e^{-2ix}+2)(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix})$$

$$=\frac{1}{64}(e^{6ix}-2e^{4ix}-e^{2ix}+4+e^{-2ix}-2e^{-4ix}+e^{-6ix})$$

$$=\frac{1}{64}\left[(e^{6ix}+e^{-6ix})-2(e^{4ix}+e^{-4ix})-(e^{2ix}+e^{-2ix})+4\right]$$

$$=\frac{1}{64}(2\cos 6x-4\cos 4x-2\cos 2x+4)$$

Finalement, $\cos^2 x\sin^4 x=\frac{1}{32}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{32}\cos 2x+\frac{1}{16}$.

Exercice 43

Ecrire sous forme exponentielle :

1) $z_1 = 1 + e^{i\alpha}$, avec α appartenant à]0, π[

2) $z_2=\frac{e^{i\alpha}+1}{e^{i\alpha}-1}$, avec α appartenant à]0, π[.

3) $z_3=\overline{(e^{i\alpha}+1)^2}$, avec α appartenant à]0, π[

4) $z_4 = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$. avec α et β appartenant à]0, π[.

Solution 43

1) $z_1=1+e^{i\alpha}=e^{i0}+e^{i\alpha}=e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)=2\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

Puisque α appartient à]0 , π[, alors $\frac{\alpha}{2}$ appartient à $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Et par suite, on a $\cos\frac{\alpha}{2}>0$.

D'où sous forme exponentielle, $z_1=\left(2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

2) $z_2=\frac{e^{i\alpha}+1}{e^{i\alpha}-1}=\frac{e^{i\alpha}+e^{i0}}{e^{i\alpha}-e^{i0}}=\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}{e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{2i\sin\frac{\alpha}{2}}=-i\cot\text{an}\frac{\alpha}{2}$ qui est un imaginaire pur.

Comme $\frac{\alpha}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, alors $\cot\text{an}\frac{\alpha}{2}>0$. Donc $-i\cot\text{an}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\left(\cot\text{an}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

D'où sous forme exponentielle, $z_2=\left(\cot\text{an}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

3) $z_3 = \overline{z_1}^{\,2} = \left(4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)e^{-i\alpha}$. D'où sous forme exponentielle, $z_3 = \left(4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)e^{-i\alpha}$.

4) $z_4 = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Or α et β appartiennent à $]0, \pi[$, alors $\frac{\alpha}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{-\beta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. Donc $\frac{\alpha-\beta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

D'où on a $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) > 0$. Par conséquent, l'écriture exponentielle de z_4 est : $\left(2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

7 – Retrouver des formules connues de trigonométrie grâce aux nombres complexes

Exercice 44

Démontrer que pour tous réels p et q, on a : $e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$.

En déduire que : $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Solution 44

- $e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$. D'où $e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$.
- Or on a d'une part, $e^{ip} + e^{iq} = (\cos p + \cos q) + i(\sin p + \sin q)$, (1)

et d'autre part,

$$2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\left(\cos\frac{p+q}{2} + i\sin\frac{p+q}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\frac{p+q}{2} + 2i\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\frac{p+q}{2} \quad (2).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires dans les égalités (1) et (2), on aura:

$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Exercice 45

Soit a, b et x trois nombres réels.

1) Démontrer que la partie réelle de (a – ib)(cosx + isinx) est acosx + bsinx.

2) Mettre sous la forme $\rho\cos(x-\theta)$ ($\rho > 0$ et θ est un réel) les nombres complexes :

$\cos x + \sin x$, $3\cos x - 3\sqrt{3}\sin x$ et $\sqrt{6}\cos x + \sqrt{2}\sin x$.

Solution 45

1) (a – ib)(cosx + isinx) = (acosx + bsinx) + i(asinx – bcosx). Donc Re[(a – ib)(cosx + isinx)] = acosx + bsinx.

2) On utilise la question précédente :

- On pose a = 1 et b = 1, alors :

$$\cos x + \sin x = \mathrm{Re}((1-i)e^{ix}) = \mathrm{Re}(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{ix}) = \mathrm{Re}(\sqrt{2}e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

- On pose a = 3 et $b = -3\sqrt{3}$, alors :

$$3\cos x - 3\sqrt{3}\sin x = \mathrm{Re}((3+3i\sqrt{3})e^{ix}) = \mathrm{Re}(6e^{i\frac{\pi}{3}}e^{ix}) = \mathrm{Re}(6e^{i\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}) = 6\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

- On pose $a = \sqrt{6}$ et $b = \sqrt{2}$, alors :

$$\sqrt{6}\cos x+\sqrt{2}\sin x=\mathrm{Re}\left[(\sqrt{6}-i\sqrt{2})e^{ix}\right]=\mathrm{Re}\left[2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}e^{ix}\right]=\mathrm{Re}\left[2\sqrt{2}\,e^{i\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\right]=2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice 46

En utilisant la notation exponentielle, retrouver les formules suivants :

$\cos(\theta+\theta')=\cos\theta.\cos\theta'-\sin\theta.\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta')=\sin\theta.\cos\theta'+\cos\theta.\sin\theta'$.

Solution 46

$\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')=e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}e^{i\theta'}=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')$

$=(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')$

En identifiant les parties réelles et imaginaires de $\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$, on a :

$\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'$.

8 – Interprétation géométrique de l'argument d'un nombre complexe non nul

Exercice 47

Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectives $a=1+i$, $b=3+i$, $c=3+3i$ et $d=2+\sqrt{2}+2i$.

Calculer $\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ et $\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$.

Montrer que A, B, C et D sont cocycliques.

Solution 47

- $\dfrac{b-c}{a-c}=\dfrac{1}{2}(1+i)$ donc on a $\arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$. C'est-à-dire $\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]\equiv\dfrac{\pi}{4}$

et $\dfrac{b-d}{a-d}=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}(1+i)$ donc on a $\arg\left(\dfrac{b-d}{a-d}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$. C'est-à-dire $\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

- Puisque $\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})\equiv\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})[2\pi]$, avec $\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})\neq k\pi$, k appartenant à $\mathbb{Z}$, alors les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 48

Montrer que les points A, B et C, d'affixes respectives 1, -i et $-1-2i$, sont alignés.

Solution 48

$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{-2-2i}{-1-i}=2$. D'où $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv0[2\pi]$.

Or $\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$, alors $\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv0[2\pi]$. On conclut alors que A, B et C sont alignés.

Exercice 49

Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectives $a=-1+i$, $b=-1-i$, $c=2i$ et $d=2-2i$.

Calculer les nombres complexes $\dfrac{c-a}{d-a}$ et $\dfrac{c-b}{d-b}$. En déduire la nature des triangles ACD et BCD.

Solution 49

- On a : $\dfrac{c-a}{d-a}=\dfrac{2i+1-i}{2-2i+1-i}=\dfrac{1}{3}i$ et $\dfrac{c-b}{d-b}=i$.
- Puisque $\dfrac{c-a}{d-a}=\dfrac{1}{3}i$, alors on a $\arg\left(\dfrac{c-a}{d-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $|d-a|=3|c-a|$.

C'est-à-dire, $mes(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AD = 3AC.

On conclut alors que ACD est un triangle rectangle en A.

De même, puisque $\frac{c-b}{d-b} = i$, alors $\arg\left(\frac{c-b}{d-b}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $|d-b| = |c-b|$.

C'est-à-dire $mes(\widehat{\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et BD = BC.

D'où BCD est un triangle rectangle isocèle en B.

Exercice 50

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2+2i\sqrt{3}$, $2-2i\sqrt{3}$ et $-1+i\sqrt{3}$.
Démontrer que les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires.

Solution 50

$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = -i\sqrt{3}$, donc $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

C'est-à-dire $mes(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$. D'où les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires.

Exercice 51

Déterminer et représenter le lieu géométrique des points M d'affixe z du plan vérifiant :

a) $\arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ b) $\arg(3i-z) \equiv 0[2\pi]$ c) $\arg((1+i)z+1) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$

d) $\arg(\bar{z}+5i) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$; e) $\frac{z+i}{z-1}$ est un réel strictement positif ; f) $\frac{z+i}{z-1}$ est un imaginaire pur non nul.

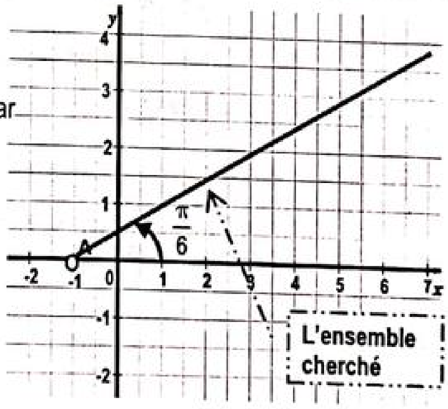
Solution 51

a) Soit A le point du plan d'affixe -1.

$\arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow mes(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{AM}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la demi-droite d'origine A, dirigée par le vecteur unitaire $\vec{u}\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$ privée du point A.

D'où le lieu géométrique des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ est la demi-droite d'origine A, dirigée par le vecteur unitaire $\vec{u}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ privée de A.



b) $\arg(3i-z) \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \arg[-(z-3i)] \equiv 0[2\pi]$

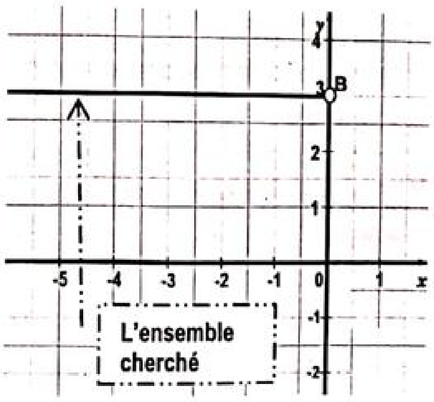
$\Leftrightarrow \pi + \arg(z-3i) \equiv 0[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z-3i) \equiv \pi[2\pi]$

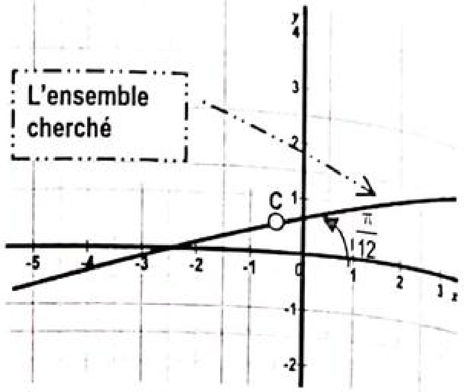
$\Leftrightarrow mes(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{BM}}) \equiv \pi[2\pi]$, où B est le point d'affixe 3i.

$\Leftrightarrow$ M appartient à la demi-droite d'origine B, dirigée par $\vec{u}(\cos\pi, \sin\pi)$, privée de B.

D'où le lieu géométrique des point M d'affixe z telle que $\arg(3i-z) \equiv 0[2\pi]$ est la demi-droite d'origine B, dirigée par le vecteur de coordonnées (-1 , 0) et privée de B.



c) Pour tout complexe z, on a $(1+i)z+1=(1+i)\left[z+\frac{1}{2}(1-i)\right]$. Ainsi,



$\arg[(1+i)z+1]\equiv\frac{\pi}{3}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left[(1+i)\left(z+\frac{1}{2}(1-i)\right)\right]\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(1+i)+\arg\left(z+\frac{1}{2}(1-i)\right)\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]$

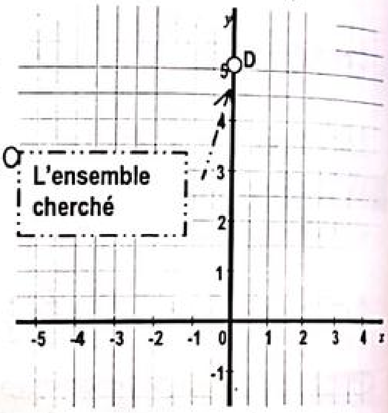
$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+\arg\left(z+\frac{1}{2}(1-i)\right)\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(z+\frac{1}{2}(1-i)\right)\equiv\frac{\pi}{12}[\pi]$

$\Leftrightarrow \text{mes}(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{CM}})\equiv\frac{\pi}{12}[\pi]$, où C est le point d'affixe $-\frac{1}{2}(1-i)$.

$\Leftrightarrow$ M appartient à la droite passant par C dirigée par le vecteur $\vec{v}\left(\cos\frac{\pi}{12},\sin\frac{\pi}{12}\right)$ et privée du point C.

D'où le lieu géométrique des point M d'affixe z telle que $\arg[(1+i)z+1]\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]$ est la droite passant par C, dirigée par le vecteur $\vec{v}\left(\cos\frac{\pi}{12},\sin\frac{\pi}{12}\right)$ et privée de C.



d) Pour tout complexe z, on a : $\bar{z}+5i=\overline{z-5i}$.

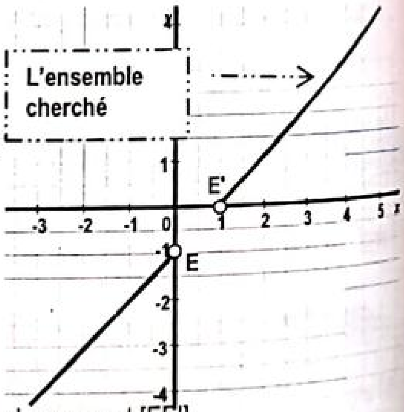
$\arg(\bar{z}+5i)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg(\overline{z-5i})\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

$\Leftrightarrow \pi+\arg(z-5i)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

$\Leftrightarrow \text{mes}(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{DM}})\equiv-\frac{\pi}{2}[\pi]$ où D est le point d'affixe 5i.

$\Leftrightarrow$ M est sur la droite passant par D, de vecteur normal $\vec{i}$ (dirigée par $\vec{j}$), privée de D.

D'où le lieu géométrique des point M d'affixe z telle que $\arg(\bar{z}+5i)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ est l'axe des ordonnées privé du points D(0 , 5).



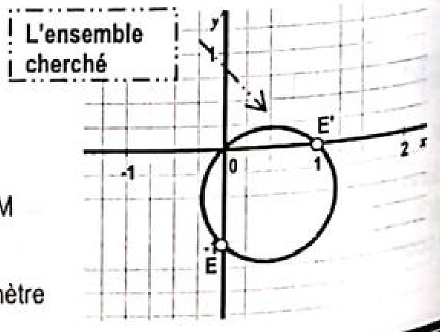
e) Soit E d'affixe – i et E' d'affixe 1.

$\frac{z+i}{z-1}$ est un réel strictement positif $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z+i}{z-1}\right)\equiv 0[2\pi]$

$\Leftrightarrow \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{E'M},\overrightarrow{EM}})\equiv 0[2\pi]$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la droite (EE') privée du segment [EE'].

D'où le lieu géométrique des point M d'affixe z telle que $\frac{z+i}{z-1}$ est un réel strictement positif est la droite (EE') privée du segment [EE'].



f) $\frac{z+i}{z-1}$ est un imaginaire pur non nul $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z+i}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ avec z différent de 1 et -i.

$\Leftrightarrow \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{E'M},\overrightarrow{EM}})\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ avec M différent de E et E'.

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de diamètre

[EE'], privé des points E et E'.

D. Caractériser une transformation usuelle du plan par une expression complexe

Exercice 52

Déterminer la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

1) f est la translation de vecteur $\vec{u}(-5\,,2)$.

2) f est l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ et de centre Ω d'affixe – 4 + i.

3) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et de centre O.

4) f est la rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$ et de centre Ω d'affixe – 4 + i.

Solution 52

1) La traduction complexe de la translation f de vecteur $\vec{u}(-5\,,2)$ est : $f: M_z \mapsto M'_{z'}$ tel que $z'=z-5+2i$.

2) La traduction complexe de l'homothétie f de rapport $-\frac{1}{2}$ et de centre Ω d'affixe – 4 + i est :

$f: M_z \mapsto M'_{z'}$ tel que $z'-(-4+i)=-\frac{1}{2}(z-(-4+i))$. C'est-à-dire $z'=-\frac{1}{2}z-6+\frac{3}{2}i$.

3) La traduction complexe de la rotation f de centre O d'angle $\frac{3\pi}{4}$ est $f: M_z \mapsto M'_{z'}$ tel que $z'=e^{i\frac{3\pi}{4}}z$.

4) La traduction complexe de la rotation f de centre Ω d'affixe -4 + i, d'angle $\frac{4\pi}{3}$ est :

$f: M_z \mapsto M'_{z'}$ tel que $z'-(-4+i)=e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-(-4+i))$.

C'est-à-dire $z'=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-\frac{12+\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{3-4\sqrt{3}}{2}\right)$. *(le lecteur vérifiera les calculs)*

Exercice 53

A tout complexe z, on associe le nombre : $z'=(1+i\sqrt{3})z+\sqrt{3}$.

On considère la transformation t du plan qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe z'.

On note I le point d'affixe i et A le point d'affixe 1 + i.

1) Calculer z' pour, successivement, z = 0, z = i et z = 1 + i.
   Construire, sur un même graphique, les points I, A puis O' = t (O), I' = t (I) et A' = t (A).

2) On pose z = x + iy et z' = x' + iy' où x, y, x' et y' sont des réels.
   a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   b) Soit (D) la droite d'équation $y=x\sqrt{3}+1$.

Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que le point M' d'affixe z' appartienne à la droite (D).
Construire (D) et (E) sur le graphique du 1).

Solution 53

1) • Pour z = 0, on a : $z'=\sqrt{3}$.

- Pour z = i, on a : $z'=(1+i\sqrt{3})i+\sqrt{3}=i$
- Pour z = 1 + i, on a : $z'=(1+i\sqrt{3})(1+i)+\sqrt{3}=1+(1+\sqrt{3})i$.

2)a) $z' = x' + iy' = (1+i\sqrt{3})(x+iy)+\sqrt{3}$

$$= (x - y\sqrt{3}+\sqrt{3}) + i(y + x\sqrt{3})$$

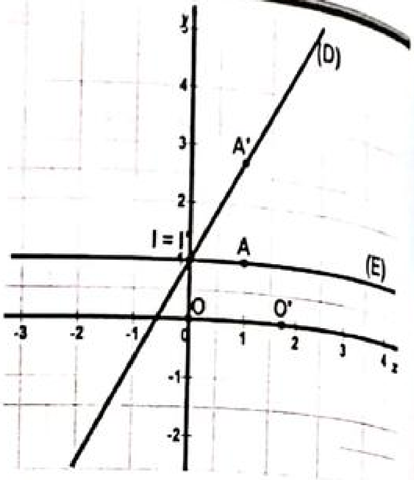
D'où $x' = x - y\sqrt{3}+\sqrt{3}$ et $y' = y + x\sqrt{3}$.

b) $M' \in (D) \Leftrightarrow y' = x'\sqrt{3}+1$

$\Leftrightarrow y + x\sqrt{3} = (x - y\sqrt{3}+\sqrt{3})\sqrt{3}+1$

$\Leftrightarrow y + x\sqrt{3} = x\sqrt{3} - 3y + 3 + 1$

Finalement, y = 1. D'où (E) est la droite d'équation y = 1.



Exercice 54

On considère dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives 1 + i et – 1 + 2i.

1) Déterminer l'affixe du point C tel que AOBC soit un parallélogramme.

2) Déterminer l'affixe de D, image de C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

3) Déterminer l'affixe de E antécédent de C par rapport à la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

4) Démontrer que D est image de E par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

En déduire la nature du triangle ODE.

Solution 54

1) AOBC est un parallélogramme $\Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OA}}(B) = C$

Or $t_{\overrightarrow{OA}}(B) = C \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{BC}} \Leftrightarrow z_A = z_C - z_B \Leftrightarrow z_C = z_B + z_A = 3i$. D'où l'affixe de C est 3i.

2) La traduction complexe de la rotation f de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$ est :

$f : M_z \mapsto M'_{z'}$, avec $z' - (-1+2i) = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - (-1+2i))$.

C'est-à-dire $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z + (-1+2i)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$.

Or f(C) = D. C'est-à-dire $z_D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z_C + (-1+2i)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\times 3i + (-1+2i)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$.

Après calculs, on trouve que : $z_D = \frac{\sqrt{3}-3}{2} + \frac{\sqrt{3}+5}{2}i$

3) La traduction complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$ est :

$r : M_z \mapsto M'_{z'}$, avec $z' - (1+i) = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - (1+i))$. C'est-à-dire $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}(z-(1+i)) + (1+i)$.

Or r(E) = C. C'est-à-dire $z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}(z_E - (1+i)) + (1+i)$. Donc

$$z_E = e^{-i\frac{\pi}{6}}(z_C - 1 - i) + 1 + i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(3i - 1 - i) + 1 + i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)(-1+2i) + 2 + i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + i\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right).$$

4) • La traduction complexe de la rotation R de centre O d'angle $\frac{\pi}{6}$ est, $R : M_z \mapsto M'_{z'}$, avec $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z$.

Soit E' = R(E), on a :

$$z_{E'} = e^{i\frac{\pi}{6}} z_E = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+2+i\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)\right) = -\frac{3}{4}+\sqrt{3}+i\left(\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}i+i-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}-3}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}+5}{2}\right)$$

$$= z_D$$

D'où D est image de E par la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{6}$.

- D est image de E par rotation de centre O, d'où OD = OE.

Par conséquent, le triangle ODE est isocèle de sommet O.

E. Equations dans $\mathbb{C}$

1 – Déterminer les racines carrées complexes d'un nombre complexe

Exercice 55

Déterminer les racines carrées complexes de $z = -7 - 24i$.

Solution 55

Déterminer les racines carrées complexes de $z = -7 - 24i$, c'est déterminer les complexes u tels que $u^2 = -7 - 24i$.
Posons $u = x + iy$ où x, y sont des nombres réels. On a $u^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Par conséquent,

$u^2 = -7 - 24i$ signifie $\begin{cases} x^2 - y^2 = -7 & L_1 \\ x^2 + y^2 = 25 & L_2 \\ 2xy = -24 & L_3 \end{cases}$ $(|-7-24i| = 25)$. Ce qui équivaut à $\begin{cases} 2x^2 = 18 & L_1 + L_2 \\ 2y^2 = 32 & L_2 - L_1 \\ xy = -12 & 0{,}5 \times L_3 \end{cases}$.

C'est-à-dire $\begin{cases} x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3 \\ y = 4 \quad \text{ou} \quad y = -4 \\ xy = -12 \end{cases}$.

Puisque $xy = -12 < 0$, alors x et y sont de signes contraires. D'où ($x = 3$ et $y = -4$) ou ($x = -3$ et $y = 4$).
Les racines carrées complexes de $-7 - 24i$ sont alors $\delta = 3 - 4i$ et $-\delta = -3 + 4i$.

Exercice 56

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 = -3 + 4i$.

Solution 56

Posons $z = x + iy$ avec x et y réels. On a $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, ainsi :

$z^2 = 3 + 4i$ signifie $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$. Ce qui équivaut à $\begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 8 \\ xy = 2 \end{cases}$. C'est-à-dire $\begin{cases} x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1 \\ y = 2 \quad \text{ou} \quad y = -2 \\ xy = 2 \end{cases}$.

Puisque $xy = 2 > 0$, x et y sont du même signe. D'où ($x = 1$ et $y = 2$) ou ($x = -1$ et $y = -2$).
Donc $z = 1 + 2i$ ou $z = -1 - 2i$.
L'ensemble solution de cette équation est donc $S = \{1 + 2i, -1 - 2i\}$.

2 – Résoudre une équation du second degré

Exercice 57

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

a) $z^2 + iz + 6 = 0$

b) $z^2 + (i\sqrt{7})z - 6i = 0$.

Solution 57

a) Considérons l'équation : $z^2 + iz + 6 = 0$. Son discriminant est $\Delta = -25 = (5i)^2$.

D'où les racines de cette équation sont : $z_1 = \dfrac{-i-5i}{2} = -3i$ et $z_2 = \dfrac{-i+5i}{2} = 2i$.

D'où l'ensemble solution de cette equation est : $S = \{-3i, \ 2i\}$.

b) Considérons l'équation : $z^2 + (i\sqrt{7})z - 6i = 0$.

Son discriminant est $\Delta = -7 + 24i$. On cherche les racines carrées complexes de Δ :

Soit u complexe tel que $u^2 = \Delta$. Posons $u = x + iy$, où x et y sont des nombres réels. Ainsi,

$u^2 = \Delta$ signifie $\begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = 24 \end{cases}$. Ce qui équivaut à $\begin{cases} x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3 \\ y = 4 \quad \text{ou} \quad y = -4 \\ xy = 12 \end{cases}$.

Puisque $xy = 12 > 0$, alors x et y sont de même signe.

D'où les racines carrées complexes de Δ sont : $\delta = 3 + 4i$ et $-\delta = -3 - 4i$.

On choisit $\delta = 3 + 4i$ une racine carrée de Δ et on applique les formules habituelles connues dans $\mathbb{R}$:

On aura : $z = \dfrac{-i\sqrt{7}+3+4i}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{4-\sqrt{7}}{2}i$ ou $z = \dfrac{-i\sqrt{7}-3-4i}{2} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{4+\sqrt{7}}{2}i$.

L'ensemble solution de cette équation est : $S = \left\{\dfrac{3}{2} + \dfrac{4-\sqrt{7}}{2}i, -\dfrac{3}{2} - \dfrac{4+\sqrt{7}}{2}i\right\}$.

Exercice 58

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

1) $(z^2 + 2)(z^2 + 1) = 0$

2) $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$, où θ appartient à $]0, \pi[$.

Solution 58

1) $(z^2 + 2)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2 = 0$ ou $z^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 = (i\sqrt{2})^2$ ou $z^2 = i^2$

$\Leftrightarrow z = i\sqrt{2}$ ou $z = -i\sqrt{2}$ ou $z = i$ ou $z = -i$.

Les solutions de cette équation sont donc : i, $-i$, $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

2) Le discriminant de l'équation est : $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$.

Alors les racines de cette équation sont :

$$z_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

Exercice 59

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(z^2 - 4z + 5) + i(z + 1) = 0$.

En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$.

b) Montrer qu'il existe des réels A, B, C et D qu'on peut déterminer tels que :

pour tout réel x, $(x^2 - 4x + 5)^2 + (x + 1)^2 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D)$.

Solution 59

a) • $(z^2 - 4z + 5) + i(z + 1) = 0 \Leftrightarrow z^2 + (-4 + i)z + 5 + i = 0$.

Cette équation a pour discriminant : $\Delta = (-4 + i)^2 - 4(5 + i) = -5 - 12i$.

Les racines carrées complexes de Δ sont : $\delta = 2 - 3i$ et $-\delta = -2 + 3i$. ***(Le lecteur fera les calculs)***

Et les solutions de l'équation sont alors : $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = 1 + i$. ***(Le lecteur fera les calculs)***

- On a : $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4z + 5)^2 - i^2(z + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow [(z^2 - 4z + 5) + i(z + 1)][(z^2 - 4z + 5) - i(z + 1)] = 0$

$\Leftrightarrow (z^2 - 4z + 5) + i(z + 1) = 0$ (I) ou $(z^2 - 4z + 5) - i(z + 1) = 0$ (II)

Or z solution de (I) $\Leftrightarrow$ $(z^2-4z+5)+i(z+1)=0$

$\Leftrightarrow \overline{(z^2-4z+5)+i(z+1)}=0$

$\Leftrightarrow \overline{z^2-4z+5}-i(\overline{z+1})=0$

$\Leftrightarrow (\overline{z^2}-4\bar{z}+5)-i(\bar{z}+1)=0$

$\Leftrightarrow (\bar{z}^2-4\bar{z}+5)-i(\bar{z}+1)=0$

$\Leftrightarrow \bar{z}$ est solution de l'équation (II).

D'où z est solution de (I) si et seulement si $\bar{z}$ est solution de l'équation (II).
Ainsi, les solutions de (II) sont les conjugués des solutions de l'équation (I).
Donc les solutions de (II) sont : $3+2i$ et $1-i$ conjugués des solutions de l'équation (I).
Finalement, les solutions de l'équation $(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2=0$ sont alors : $3+2i$, $1-i$, $3-2i$ et $1+i$.

b) Pour tout nombre réel x, on a :

$$(x^2-4x+5)^2+(x+1)^2=(x-z_1)(x-\overline{z_1})(x-z_2)(x-\overline{z_2})=(x^2-(z_1+\overline{z_1})x+z_1\overline{z_1})(x^2-(z_2+\overline{z_2})x+z_2\overline{z_2})$$
$$=(x^2-2\mathrm{Re}(z_1)x+|z_1|^2)(x^2-2\mathrm{Re}(z_2)x+|z_2|^2)$$
$$=(x^2-6x+13)(x^2-2x+2)$$

Finalement, $(x^2-4x+5)^2+(x+1)^2=(x^2-6x+13)(x^2-2x+2)$. Donc $A=-6$, $B=13$, $C=-2$ et $D=2$.

3 – Résoudre une équation bicarrée

Exercice 60

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4+z^2+1=0$.

Solution 60

Posons $Z=z^2$, l'équation devient : $Z^2+Z+1=0$ dont le discriminant est : $\Delta=-3=(i\sqrt{3})^2$.

Les racines de cette équation sont : $Z'=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z''=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. ***(le lecteur fera les calculs)***

- $Z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z^2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. (I)

Posons $z=x+iy$, x et y étant des réels :

On a alors (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-\frac{1}{2} \\ x^2+y^2=1 \\ 2xy=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \text{ ou } x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } y=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ xy=\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$.

Or on a $xy>0$, d'où $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $Z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En procédant comme pour (I), on obtient : $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Finalement, l'ensemble solution de l'équation initiale est :

$$S=\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

4 – Autres types d'équations à résoudre

Exercice 61

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42 = 0$ (E), sachant qu'elle admet une solution réelle.

Solution 61

- Le réel α est solution de (E) si et seulement si, $\alpha^3 - (11 + 2i)\alpha^2 + 2(17 + 7i)\alpha - 42 = 0$.
C'est-à-dire $(\alpha^3 - 11\alpha^2 + 34\alpha - 42) + i(-2\alpha^2 + 14\alpha) = 0$.

Puisque α est un réel, alors $\alpha^3 - 11\alpha^2 + 34\alpha - 42$ et $-2\alpha^2 + 14\alpha$ sont des réels. D'où :

$$(\alpha^3 - 11\alpha^2 + 34\alpha - 42) + i(-2\alpha^2 + 14\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 11\alpha^2 + 34\alpha - 42 = 0 & (1) \\ -2\alpha^2 + 14\alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

On a : (2) $\Leftrightarrow -2\alpha(\alpha - 7) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\alpha = 7$.

0 n'est pas solution de l'équation (1).

Or 7 vérifie aussi l'équation (1), alors 7 est solution du système. Par conséquent 7 est l'unique solution réelle de (E).

- Posons $f(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$. On a alors $f(7) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Et } f(z) &= f(z) - f(7) \\ &= [z^3 - (11+ 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42] - [7^3 + (11 + 2i)\times 7^2 + 2(17 + 7i)\times 7 - 42] \\ &= (z^3 - 7^3) - (11+ 2i)(z^2 - 7^2) + 2(17+ 7i)(z - 7) \\ &= (z - 7)(z^2 + 7z + 49) - (11+ 2i)(z - 7)(z + 7) + 2(17 + 7i)(z - 7) \\ &= (z - 7)[z^2 + 7z + 49 - (11 + 2i)(z + 7) + 2(17 + 7i)] \\ &= (z - 7)(z^2 - 2(2 + i)z + 6) \end{aligned}$$

D'où $f(z) = (z - 7)(z^2 - 2(2 + i)z + 6)$

On a alors (E) $\Leftrightarrow$ $z - 7 = 0$ ou $z^2 - 2(2 + i)z + 6 = 0$

L'équation $z^2 - 2(2 + i)z + 6 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = -12 + 16i$.

Les racines carrées complexes de Δ sont : $\delta = 2 + 4i$ et $-\delta = -2 - 4i$ ***(le lecteur le vérifiera).*** Elle a pour solution $z = 3 + 3i$ ou $z = 1 - i$. Finalement, les solutions de (E) sont alors : $z = 7$, $z = 3 + 3i$ et $z = 1 - i$.

Exercice 62

Soit $P(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - 2i)z - 2i$.

1) Montrer que $P(z)$ possède une racine imaginaire pur.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Solution 62

1) Soit $z = yi$, où y est un nombre réel.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (iy)^3 + (1 - 2i)(iy)^2 + (1 - 2i)iy - 2i = 0 \Leftrightarrow (-y^2 + 2y) + i(-y^3 + 2y^2 + y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 + 2y = 0 \\ -y^3 + 2y^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = 2 \\ -y^3 + 2y^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$$

0 n'est pas solution de l'équation $-y^3 + 2y^2 + y - 2 = 0$.

Et $-2^3 + 2\times 2^2 + 2 - 2 = 0$. Le système admet donc une seule solution qui est 2 et $P(z)$ possède alors une racine imaginaire pur qui est $2i$.

2) $P(2i) = 0$, d'où $P(z)$ est factorisable par $z - 2i$.

$$\begin{aligned} \text{Et } P(z) &= P(z) - P(2i) \\ &= z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - 2i)z - 2i - (2i)^3 - (1 - 2i)(2i)^2 - (1 - 2i)(2i) + 2i \\ &= (z^3 - (2i)^3) + (1 - 2i)(z^2 - (2i)^2) + (1 - 2i)(z - 2i) \\ &= (z - 2i)(z^2 + 2iz - 4) + (1 - 2i)(z - 2i)(z + 2i) + (1 - 2i)(z - 2i) \\ &= (z - 2i)[z^2 + 2iz - 4 + (1 - 2i)z + 2i(1 - 2i) + 1 - 2i] \\ &= (z - 2i)(z^2 + z + 1). \end{aligned}$$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

L'équation $z^2 + z + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$.

D'où les racines de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ sont : $z' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z'' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Finalement, les solutions de $P(z) = 0$ sont : $2i$, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 63

Soit $P(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + 2z + 2$.

1) Montrer que $P(z)$ peut s'écrire comme produit de deux polynômes de degré 2 dont l'un est $z^2 + 2$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Solution 63

1) $P(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = (z^4 + z^3 + z^2) + 2(z^2 + z + 1) = z^2(z^2 + z + 1) + 2(z^2 + z + 1) = (z^2 + z + 1)(z^2 + 2)$.
2) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$ ou $z^2 + 2 = 0$.

Or $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. ***(Le lecteur fera les calculs)***

Et $z^2 = -2 \Leftrightarrow z^2 = (i\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow z = i\sqrt{2}$ ou $z = -i\sqrt{2}$.

D'où les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont : $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 64

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

a) $2+z+(3-2i)\overline{z}=0$ b) $4z^2+8|z|^2-3=0$ c) $z^2-\overline{z}+1=0$.

Solution 64

a) Posons $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels. On a alors :

$$2+z+(3-2i)\overline{z}=0 \Leftrightarrow 2 + (x + iy) + (3 - 2i)(x - iy) = 0 \Leftrightarrow (4x - 2y + 2) + i(-2y - 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y+2=0 \\ -2y-2x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ et } y = \frac{1}{3}.$$

D'où $z = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$. Et l'ensemble solution de l'équation est : $S = \left\{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i\right\}$.

b) Posons $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels.

$$4z^2+8|z|^2-3=0 \Leftrightarrow 4(x + iy)^2 + 8(x^2 + y^2) - 3 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 4y^2 - 3 + 8ixy = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2+4y^2-3=0 \\ 8xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2+4y^2-3=0 \\ x=0 \text{ ou } y=0 \end{cases}$$

Finalement, on a : $\begin{cases} x = 0 \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } y=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=0 \\ x=\frac{1}{2} \text{ ou } x=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

D'où les solutions de l'équations sont : $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

c) Posons $z = x + iy$ où x et y sont des nombres reels.

$$z^2-\bar{z}+1=0 \iff (x^2-y^2-x+1)+i(2xy+y)=0 \iff \begin{cases} x^2-y^2-x+1=0 \\ 2xy+y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-y^2-x+1=0 \\ y=0 \text{ ou } x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-y^2-x+1=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2-y^2-x+1=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-x+1=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{7}{4}-y^2=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

L'équation $x^2-x+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, alors $z^2-\bar{z}+1=0$ équivaut à $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{7}}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=-\frac{\sqrt{7}}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

Finalement, l'équation $z^2-\bar{z}+1=0$ admet deux solutions : $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$ et $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$.

5 – Résoudre des systèmes d'équations à deux inconnues

Exercice 65

Résoudre dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, le système : $\begin{cases} zz'=8 \\ z+z'=5 \end{cases}$.

Solution 65

z et z' sont les solutions de l'équation : $z^2-5z+8=0$ qui a pour solutions dans $\mathbb{C}$: $\frac{5+i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{5-i\sqrt{7}}{2}$.

Pour $z=\frac{5+i\sqrt{7}}{2}$, on a $z'=\frac{5-i\sqrt{7}}{2}$. Et pour $z=\frac{5-i\sqrt{7}}{2}$, on a $z'=\frac{5+i\sqrt{7}}{2}$.

Les couples (z , z') solutions dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ du système sont alors : $\left(\frac{5+i\sqrt{7}}{2}, \frac{5-i\sqrt{7}}{2}\right)$ et $\left(\frac{5-i\sqrt{7}}{2}, \frac{5+i\sqrt{7}}{2}\right)$.

Exercice 66

Résoudre dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, le système : $\begin{cases} 2z+2(1+i)z'=4-6i \\ z+3iz'=-3-2i \end{cases}$.

Solution 66

Par substitution

$$\begin{cases} 2z+2(1+i)z'=4-6i \\ z+3iz'=-3-2i \end{cases} \iff \begin{cases} 2(-3-2i-3iz')+2(1+i)z'=4-6i \\ z=-3-2i-3iz' \end{cases} \iff \begin{cases} (2-4i)z'=10-2i \\ z=-3-2i-3iz' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=\frac{12}{5}-\frac{31}{5}i \\ z'=\frac{5-i}{1-2i}=\frac{7}{5}+\frac{9}{5}i \end{cases}$$

D'où l'unique couple solution de ce système est : $\left(\frac{12}{5}-\frac{31}{5}i, \frac{7}{5}+\frac{9}{5}i\right)$.

Remarque : ***On peut utiliser le déterminant pour résoudre ce système.***

6 – Déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Exercice 67

Démontrer que $A=\frac{1}{2}+i\sqrt{3}$ est racine de l'équation $z^4=\frac{73}{16}-\frac{11\sqrt{3}}{2}i$.

En déduire que $-A$, iA et $-iA$ sont les autres solutions de cette équation.

Solution 67

- $A^4=\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{3}\right)^4=\left(-\frac{11}{4}+i\sqrt{3}\right)^2=\frac{73}{16}-\frac{11\sqrt{3}}{2}i$. D'où A est solution de l'équation $z^4=\frac{73}{16}-\frac{11\sqrt{3}}{2}i$.
- $z^4=\frac{73}{16}-\frac{11\sqrt{3}}{2}i \quad \Leftrightarrow \quad z^4=A^4 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z}{A}\right)^4=1.$

D'où z est solution de $z^4=\frac{73}{16}-\frac{11\sqrt{3}}{2}i$ si et seulement si $\frac{z}{A}$ est racine $4^{\text{ième}}$ de l'unité.

Or les racines $4^{\text{ième}}$ de l'unité sont : $e^{i0}=1$, $e^{\frac{\pi}{2}i}=i$, $e^{i\pi}=-1$, $e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i$.

D'où $z^4=\frac{73}{16}-\frac{11\sqrt{3}}{2}i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{A}=1$ ou $\frac{z}{A}=i$ ou $\frac{z}{A}=-1$ ou $\frac{z}{A}=-i$.

Ce qui équivaut à : $z=A$ ou $z=iA$ ou $z=-A$ ou $z=-iA$.

D'où $-A$, iA et $-iA$ sont les autres solutions de l'équation initiale.

Exercice 68

1) Déterminer, sous forme exponentielle, les solutions de l'équation : $z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$ dans $\mathbb{C}$.

2) A l'aide des racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.

3) Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Solution 68

1) Sous forme exponentielle $4\sqrt{2}(-1+i)$ s'écrit : $4\sqrt{2}(-1+i)=8e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

Posons $z=\rho e^{i\theta}$, où ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.

$$z^3=4\sqrt{2}(-1+i) \quad \Leftrightarrow \quad z^3=8e^{\frac{3\pi}{4}i} \quad \Leftrightarrow \quad \rho^3e^{3i\theta}=8e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho^3=8 \text{ et } 3\theta=3\frac{\pi}{4}+k2\pi\text{, k appartient à } \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho=2 \text{ et } \theta=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi\text{, k appartient à } \{0, 1, 2\}$$

D'où les solutions de l'équation $z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$ dans $\mathbb{C}$ sont : $z_0=2e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1=2e^{\frac{11\pi}{12}i}$ et $z_3=2e^{\frac{19\pi}{12}i}$

2) Nous remarquons que $z_0=2e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$ (1).

z est solution de (1) $\Leftrightarrow z^3=(z_0)^3$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^3=1$$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{z}{z_0}$ est une racine cubique de l'unité

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z}{z_0} = e^{i0} = 1 \text{ ou } \frac{z}{z_0} = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \frac{z}{z_0} = e^{\frac{4\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = z_0 \text{ ou } z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_0 \text{ ou } z = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ ou } z = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \text{ ou } z = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

Les solutions de l'équation, sous forme algébrique sont alors :

$$\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

3) Puisque $\dfrac{11\pi}{12} \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, alors on a $\cos\dfrac{11\pi}{12} < 0$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12} > 0$.

La solution z_1 correspond donc au complexe $\dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

D'où $2\cos\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$ et $2\sin\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

Donc $\cos\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 69 — 15 minutes

Soit A, B et C les points d'affixes respectives i, z et iz dans le plan complexe.
Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que ABC soit un triangle équilatéral.

Exercice 70 — 15 minutes

On pose $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

1) Déterminer le module et un argument de j. Calculer j^3, puis j^{2003}. Démontrer que $1 + j + j^2 = 0$.
2) Soit A, B, C d'affixes respectives 1, j et j^2. Démontrer que ABC est un triangle équilatéral.

Exercice 71 — 20 minutes

Le plan P est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. Pour x réel, on pose $z=\frac{i-x}{i+x}$.

a) Placer dans le plan P les points A et B d'affixes respectives i et – i puis le point M d'affixe réelle x.
b) Montrer que le module de z est égale à 1, pour tout x réel.
c) Montrer que : $z=\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}i$.
d) Trouver le réel x tel que les partie réelle et imaginaire de z soient égales.

En déduire x tel que : $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 72 — 35 minutes

Soit A, B, C points du plan d'affixes respectives 1 + i, - 1 + 3i et 2 + 4i.
On construit à l'extérieur du triangle ABC trois triangles équilatéraux directs ABD, BCE et CAF.
On note M, N et P les centres de gravité des triangles ABD, BCE et CAF.
1) Déterminer les affixes des points D, E et F.
2) Déterminer les affixes des points M, N et P.
3) Montrer que le triangle MNP est équilatéral.

Exercice 73 — 25 minutes

On considère dans le plan complexe, la suite de points M_n d'affixes z_n définies par : $z_n=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2^n}$.

1) Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.
2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} OM_n=0$.
3) Démontrer que les points M_n appartiennent à une même demi-droite.

Exercice 74 — 30 minutes

On donne dans le plan complexe la suite de points A_n, d'affixes z_n définie par : $z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{3}z_n$, et $z_0 = 4$.

1) Déterminer les formes algébriques de z_1, z_2, z_3 et z_4. Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3, et A_4.
2) On se propose de calculer la longueur l_n, de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_n$.
On pose $d_n=|z_{n+1}-z_n|$.
Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
Montrer que $l_n=4\sqrt{7}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.
3) Déterminer la limite de l_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 75

35 minutes

On considère l'équation $z^6 + 1 = 0$, z étant un nombre complexe.

1) Montrer que si z est solution de $z^6 + 1 = 0$ alors z s'écrit sous la forme $e^{i\theta}$ avec θ réel.
2) Déduire les six solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 + 1 = 0$.
3) Ecrire $z^6 + 1$ comme produit de six polynômes du premier degré à coefficients dans $\mathbb{C}$.
4) Montrer que, pour tout réel α, on a : $(z - e^{i\alpha})(z - e^{-i\alpha}) = z^2 - 2z\cos\alpha + 1$.

   En déduire que : $z^6 + 1 = (z^2 + 1)(z^2 - z\sqrt{3} + 1)(z^2 + z\sqrt{3} + 1)$.

Exercice 76

25 minutes

ABCD et AEFG sont des carrés directs de centres respectifs P et R. Soit H et K les points tels que ADHE et ABKG soient deux parallélogrammes de centres respectifs Q et S.
Démontrer que PQRS est un carré. (On pourra considérer un repère orthonormé d'origine A).

Exercice 77

25 minutes

On se place dans le plan complexe. On considère un parallélogramme ABCD.
La rotation de centre D et d'angle θ transforme C en F et la rotation de centre B et d'angle $-\theta$ transforme C en E.
Montrer que AEF est un triangle isocèle.

Exercice 78 BAC S – France Métropolitaine – Juin 1995

40 minutes

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Soit K, L et M les points d'affixes respectives $k = 1 + i$, $l = 1 - i$ et $m = -i\sqrt{3}$.

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2) On appelle N le symétrique de M par rapport à L. Vérifier que l'affixe n du point N est $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

3) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C.

   Déterminer les affixes a et c des points A et C.

4) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 2i, transforme le point M en le point D et le point N en le point B.
   Déterminer les affixes d et b des points D et B.
5) Montrer que le point K d'affixe k, est milieu des segments [DB] et [AC].

   Montrer que $\frac{c - k}{b - k} = i$. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 79 Concours d'entrée à l'ENSP de Yaoundé – Cameroun – 1997

35 minutes

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On note A, B, C et D les points d'affixes respectives $-2i$, $4 - 2i$, $4 + 2i$ et 1.
1) Placer les points A, B, C et D sur la figure qui sera peu à peu complétée. Préciser la nature du triangle ABC.
2) On désigne par F, l'application de P – {A} vers P, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', telle que :
$z' = \frac{z - (4 + 2i)}{z + 2i}$.
   a) Déterminer les images de B et C par F.
   b) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z telle que $|z'| = 1$. Construire (E).

3)a) Montrer que pour tout nombre complexe z distinct de $-2i$, on a : $(z' - 1)(z + 2i) = -4 - 4i$.
   b) Montrer que pour tout point M distinct de A, et dont l'image par F est notée M', on a :
   - $M' \neq D$.
   - $DM \times AM = 4\sqrt{2}$.
   - $(\vec{u}, \overrightarrow{DM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi]$.

Exercice 80

35 minutes

1) Exprimer les racines z_k dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = 1$ en fonction des nombres $\theta_k = \frac{2k\pi}{5}$, k appartient à

{0, 1, 2, 3, 4}.
Quelle est la nature du polygone dont les sommets A_k ont pour affixes z_k ?
Déterminer l'isobarycentre des points A_k.

2) A tout complexe u différent de -1, on associe $z = \frac{u-1}{u+1}$.

Calculer u en fonction de z.
3) A l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(u-1)^5 = (u+1)^5$.

Exercice 81 Concours d'entrée à l'ENSP de Yaoundé – Cameroun – 2003 40 minutes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, unité graphique : 4 cm .
On considère les points A et B d'affixes respectives a = 1 et b = 2.
Soit $\theta \in \,]0\,,\pi[$. On note M le point d'affixe $z = 1 + e^{2i\theta}$.
1) Montrer que le point M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1.
2) Exprimer la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AM}})$ en fonction de θ.
En déduire l'ensemble (E) des points M quand θ décrit l'intervalle]0, π[.
3) On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle -2θ, et on note z' l'affixe de M'.
Montrer que $z' = \overline{z}$, puis que M' appartient à (C).
4) Dans la suite, on choisit $\theta = \frac{\pi}{3}$. On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et A' l'image de A par r.
a) Définir l'image (C') du cercle (C) par r.
Placer sur une figure A, B, A', (C), M, (C') puis le point M' image de M par r.
b) Montrer que le triangle AMO est équilatéral.
c) Montrer que (C) et (C') se coupent en O et M'.
d) Soit P le symétrique de M par rapport à A. Montrer que M' est le milieu de [A'P].

Exercice 82 30 minutes

ABCD est un quadrilatère convexe.
A l'extérieur, on construit quatre triangles rectangles isocèles A'BA, B'CB, C'DC et D'AD en A', B', C' et D'.
Démontrer que les segments [A'C'] et [B'D'] sont orthogonaux et de même longueur.
Indication : ***on pourra supposer travailler dans un repére orthonormé direct.***

Exercice 83 Concours d'entrée à l'ENSP de Yaoundé – Cameroun – 1998 40 minutes

Pour z, complexe différent de - i, on pose $Z = \frac{z+2i}{1-iz}$. Si M est le point d'affixe z et M' d'affixe Z.
Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M vérifiant les propriétés suivantes :

1) Z est un réel. 2) un argument de Z est $-\frac{\pi}{2}$.

3) Le point M' appartient au cercle de centre B d'affixe i et de rayon $\frac{1}{2}$.

4) Les points B, M et M' sont alignés. 5) M = M' 6) Z + 1 est un réel non nul.

Exercice 84 BAC – 1995 – Japon 35 minutes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1)a) Ecrire z_3 sous forme algébrique.
b) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

c) Ecrire z_3 sous forme trigonométrique. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2) Soit I le point d'affixe z = 1.
a) Quelle est la nature du triangle OIB ?

b) Déterminer les images de I et B dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$. En déduire la nature du triangle OAC

Exercice 85 — 45 minutes

Le but de l'exercice est de montrer, à l'aide des nombres complexes, qu'un triangle ABC, dans lequel le centre O du cercle circonscrit est aussi isobarycentre, est un triangle équilatéral.

On désigne par Π le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On note w le nombre complexe $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Si z est un nombre complexe, $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1)a) Mettre w^2 sous forme algébrique.

b) Montrer que $1 + w + w^2 = 0$ et $\bar{w}=w^2$.

2) On cherche les nombres complexes z, tels que : $|z|=|1+z|=1$ (1).

a) Montrer que w satisfait (1).

b) Montrer que pour un complexe $z = x + iy$ avec x et y réels, vérifiant (1), on a $x=-\frac{1}{2}$.

En déduire que w et $\bar{w}$ sont les seuls nombres complexes satisfaisant (1).

3) Soient A, B et C trois points du cercle Γ du plan Π de centre O et de rayon $R>0$.

On suppose que O est l'isobarycentre des points A, B et C, c'est-à-dire : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

On note a l'affixe de A, b l'affixe de B, c l'affixe de C ; et on pose $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$.

a) Montrer que $|p|=|q|=1$ et $1 + p = - q$.

b) Montrer à l'aide du 2)b), que l'on a soit $p = w$ soit $p=\bar{w}$.

Dans la suite, on supposera que $p = w$.

c) Montrer, à l'aide de 1), que $q=w^2=\bar{w}$.

d) Montrer que $b - a = (w - 1)a$, $c - b = (w - 1)b$ et $c-a=(\bar{w}-1)a$.

En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 86 — BAC D – 1990 – Cameroun — 30 minutes

Soit t un réel tel que : $0\leq t<\frac{\pi}{2}$.

1)a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $2z^2 - 2(1 + \cos 2t)z + 1 + \cos 2t = 0$

b) Déterminer en fonction du réel t, le module et un argument de chacune des racines de cette équation.

2) On suppose que les racines de z_1 et z_2 de l'équation (E) sont les affixes des points respectifs M_1 et M_2. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 87 — 45 minutes

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit U le point d'affixe 1 et V le point d'affixe i.

1) Démontrer que A, B et C étant trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c on a :

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi].$$

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z, tels que $\frac{z-i}{z-1}$ soit un imaginaire pur.

3) On considère dans le plan les points M d'affixe z, M' d'affixe z' et P d'affixe zz' où z et z' sont deux nombres complexes distincts et différents de 0 et 1.

a) Démontrer que les points M, M' et P sont distincts deux à deux.

b) Démontrer que pour tout complexe z et pour tout complexe z', on a :

$$\arg\left(\frac{zz'-z'}{zz'-z}\right) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z'-1}\right) - \arg\left(\frac{z}{z-1}\right)[2\pi].$$

c) En déduire que M, M' et P sont alignés si et seulement si les points O, U, M et M' sont cocycliques ou alignés.

Exercice 88 35 minutes

θ est un nombre réel donné.

1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation en Z, (E) : $Z^2 - 2Z\cos\theta + 1 = 0$.

En déduire la résolution, dans l'ensemble des nombres complexes, de l'équation en z :

(E') : $z^4 - 2z^2\cos\theta + 1 = 0$. (Les racines seront présentées sous forme exponentielle.)

2) Dans le plan complexe, on considère les images M_1, M_2, M_3 et M_4 des quatre racines de l'équation (E'). Pour quelle valeur de θ ($0 < \theta < \pi$) ces quatre points sont-il les sommets d'un carré ?

Exercice 89 45 minutes

Soit α un nombre réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E) : (1 + iz)^3(1 - i\tan\alpha) = (1 - iz)^3(1 + i\tan\alpha).$$

1) Soit z une solution de (E).

a) Montrer que $|1+iz| = |1-iz|$.

b) En déduire que z est un réel.

2) a) Exprimer $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{2i\alpha}$.

b) Soit z un nombre réel, on pose $z = \tan\varphi$, où φ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ecrire l'équation portant sur φ traduisant (E) et la résoudre.

c) Déterminer les solutions z_1, z_2, z_3 de (E).

Exercice 90 35 minutes

Dans tout l'exercice, le plan complexe P est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le polynôme complexe p(z) suivant : $p(z) = z^3 - 4z + \lambda$, où λ est un nombre réel.

1)a) Soit z_0 un nombre complexe. Démontrer que si $p(z_0) = 0$ alors $p(\overline{z_0}) = 0$.

b) On sait que l'équation p(z) = 0 admet trois solutions distinctes ou confondues.

Démontrer qu'elle possède au moins une solution réelle.

2)a) Déterminer λ pour que l'équation p(z) = 0 admette une racine complexe non réelle de module 2.

b) Résoudre l'équation p(z) = 0 pour chacune des valeurs de λ ainsi trouvées.

Exercice 91 50 minutes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 4 cm).

On désigne par θ un nombre réel tel que $-\pi < \theta < \pi$.

On appelle A, M et N les points d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$.

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1, et par (C') le cercle de centre A et de rayon 1.

1) Tracer (C) et (C'), et placer A, M et N dans le cas $\theta = \frac{\pi}{6}$.

2) Montrer que N appartient à (C') et donner la nature du quadrilatère OANM. Déterminer un argument de $1 + e^{i\theta}$.

3) On pose $u = 1 + e^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$.

a) Montrer que u est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + 2 + 2\cos\theta = 0$.

En déduire la seconde solution de l'équation.

b) Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$?

4) On considère l'équation (E) : $z^2 - az + a = 0$ où a désigne un nombre réel appartenant à]0 , 4].

On nomme R le point d'affixe a, et T le milieu de [OR].

La perpendiculaire à l'axe réel passant par T coupe (C') en deux points U et U'.

Montrer que les affixes de U et U' sont solutions de (E).

Exercice 92 — 50 minutes

On considère le plan complexe muni d'un repère orthogonal (O , I , J).

On fera une figure, à compléter au fur et à mesure des questions. On prendra 3 cm comme unité de longueur

A tout point M du plan, distinct de J, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\frac{z^2}{i-z}$.

1) Déterminer les points M confondus avec leur image M'.

2) Etant donné un complexe z, distinct de i, on pose : z = x + iy et z' = x'+ iy' avec x, y, x' et y' réels.

Montrer que : $x'=\frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$.

En déduire l'ensemble E des points M dont l'image M' est située sur l'axe des imaginaires purs.

Dessiner l'ensemble E.

3) Trouver une relation simple liant les longueurs OM, JM et OM'.

En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O.

Dessiner l'ensemble F.

4) Dans toute cette question, on considère un point M d'affixe z, situé sur le cercle de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$. M' est le point d'affixe z' correspondant et G l'isobarycentre des points J , M et M'.

Calculer l'affixe z_G de G en fonction de z.

Montrer que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

Après avoir comparé les angles $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OG}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{JM}})$. Effectuer la construction de G. En déduire celle de M'.

Exercice 93 — 40 minutes

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2+(1-i\sqrt{3})z-(1+i\sqrt{3})=0$.

1) Résoudre l'équation (E) et exprimer les solutions z' et z'' en fonction des nombres complexes :

$$a=\frac{\sqrt{3}+i}{2} \quad \text{et} \quad b=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

2)a) Mettre a et b sous forme trigonométrique, puis représenter leurs points images respectifs A et B dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) En déduire une construction simple des points M' et M'' images des nombres z' et z'' respectivement.

3) Mettre z' et z'' sous forme trigonométrique et en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Exercice 94 — BAC C – Tunisie – 2001 — 50 minutes

Dans le plan complexe P rapporté à un repère ortohonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1, où a est un nombre complexe donné différent de 1.

Soit f l'application de $P-\{a\}$ dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\frac{z-a}{z-1}$.

1) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation (E): $z^2-2z+a=0$.

2)a) On suppose que $a=1+e^{i2\theta}$, où θ appartient à $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$.

Résoudre l'équation (E).

b) Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de (E).

3) Dans cette question, on suppose a = -1.

Soit M un point de $P-\{a\}$ d'affixe z et M' d'affixe z', image de M par f.

a) Montrer que $\operatorname{mes}(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})+\operatorname{mes}(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}})\equiv 0[2\pi]$.

En déduire que la droite (AB) est une bissectrice de l'angle $\widehat{MBM'}$.

b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si, $|z|=1$.

c) En déduire la construction du point M' image du point M du cercle trigométrique privé du point B.

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

Solution 69

ABC est un triangle équilatéral si et seulement si, C est l'image de B par la rotation R de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou par sa réciproque R^{-1}.

La traduction complexe de R est : $M_z \mapsto M'_{z'}$ tel que $z'-i=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)$.

$$\text{C'est-à-dire } z'=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

Celle de R^{-1} est : $M_z \mapsto M'_{z'}$ tel que $z'-i=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-i)$. C'est-à-dire $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

Finalement ABC est un triangle équilatéral si et seulement si,

$$z_C=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \text{ ou } z_C=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

C'est-à-dire $iz=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ou $iz=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

C'est-à-dire $z\left[-\frac{1}{2}+i\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ou $z\left(-\frac{1}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,

enfin à $z=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{-\frac{1}{2}+i\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(-1-i)$ ou $z=\dfrac{\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{-\frac{1}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$.

Finalement, ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $z=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$ ou $z=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$

Solution 70

1) • $|j|=1$ et $\arg j\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. • $j=e^{\frac{2\pi}{3}i}$, d'où $j^3=e^{2i\pi}=1$.

• $2003=3\times667+2$. D'où $j^{2003}=(j^3)^{667}\times j^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{j}$.

• $1+j+j^2=\frac{1-j^3}{1-j}=\frac{1-1}{1-j}=0$.

2) On a $\frac{j^2-j}{1-j}=-j=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\left|\frac{j^2-j}{1-j}\right|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$. C'est-à-dire $\frac{|j^2-j|}{|1-j|}=1$, donc $\frac{BC}{BA}=1$. Donc BC = BA.

De plus on a $\arg\left(\frac{j^2-j}{1-j}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$, donc $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Puisque BC = BA et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$, alors ABC est un triangle équilatéral (direct).

Solution 71

a) *le lecteur fera une figure*

b) Soit x un nombre réel, $|z|=\dfrac{\sqrt{(-x)^2+1^2}}{\sqrt{x^2+1^2}}=1$.

c) $z=\dfrac{i-x}{i+x}=\dfrac{-(x-i)(x-i)}{(x+i)(x-i)}=\dfrac{-(x^2-2ix-1)}{x^2+1}=\dfrac{1-x^2+2ix}{x^2+1}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}+\dfrac{2x}{1+x^2}i$.

d) • $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Donc $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z) \iff \dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{2x}{1+x^2} \iff 1-x^2=2x \iff x^2+2x-1=0$.

Cette équation a pour discriminant $\Delta=8$, et pour racines $x_1=-1+\sqrt{2}$ et $x_2=-1-\sqrt{2}$.

D'où $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$ si et seulement si $x=-1+\sqrt{2}$ ou $x=-1-\sqrt{2}$.

• Valeur de x pour que $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Si $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, alors $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$. C'est-à-dire, $x=-1+\sqrt{2}$ ou $x=-1-\sqrt{2}$.

Pour $x=-1-\sqrt{2}$: $z=\dfrac{1-(-1-\sqrt{2})^2}{1+(-1-\sqrt{2})^2}+i\dfrac{2(-1-\sqrt{2})}{1+(-1-\sqrt{2})^2}=\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}+i\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour $x=-1+\sqrt{2}$: $z=\dfrac{1-(-1+\sqrt{2})^2}{1+(-1+\sqrt{2})^2}+i\dfrac{2(-1+\sqrt{2})}{1+(-1+\sqrt{2})^2}=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}+i\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Finalement, $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si $x=-1+\sqrt{2}$.

Solution 72

1) ABD est équilatéral direct $\iff$ D est image de B par la rotation de centre A d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

$\iff z_D-z_A=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_B-z_A)$

$\iff z_D=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2+2i)+1+i=-\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})i$

BCE est équilatéral direct $\iff$ E est image de C par la rotation de centre B d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

$\iff z_E-z_B=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_C-z_B)$

$\iff z_E=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{7+3\sqrt{3}}{2}$ *(le lecteur fera les calculs)*

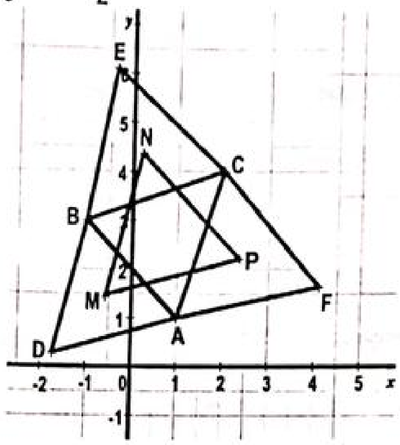
CAF est équilatéral direct $\iff$ F est image de A par la rotation de centre C d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

$\iff z_F-z_C=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_A-z_C)$

$\iff z_F=\dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}$ *(le lecteur fera les calculs)*

2) $z_M = \frac{z_A + z_B + z_D}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} + i\frac{6-\sqrt{3}}{3}$; $z_N = \frac{z_B + z_C + z_E}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} + i\frac{7+\sqrt{3}}{2}$.

$z_P = \frac{z_A + z_C + z_F}{3} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\frac{15-\sqrt{3}}{6}$.



3) $MN = |z_N - z_M| = \frac{1}{6}\sqrt{168+96\sqrt{3}} = \sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{6}$

(car $(6\sqrt{2}+4\sqrt{6})^2 = 168+96\sqrt{3}$)

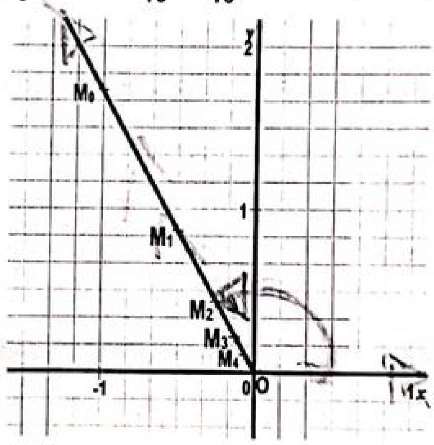
$MP = |z_P - z_M| = \sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{6}$ et

$PN = |z_N - z_P| = \sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

D'où MN = MP = PN. Donc MNP est un triangle équilatéral.

Solution 73

1) $z_0 = -1+i\sqrt{3}$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$, $z_3 = -\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}$, $z_4 = -\frac{1}{16} + i\frac{\sqrt{3}}{16}$ *(voir la figure ci-dessous)*



2) $OM_n = |z_n| = \left|\frac{-1+i\sqrt{3}}{2^n}\right| = \frac{|-1+i\sqrt{3}|}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} OM_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$.

3) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2^n} = \frac{2e^{\frac{2\pi}{3}i}}{2^n} = \frac{e^{\frac{2\pi}{3}i}}{2^{n-1}}$. D'où $\arg\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2^n}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Or $mes(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM_n}}) \equiv \arg z_n [2\pi]$, alors on a $mes(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM_n}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

D'où les points M_n appartiennent à la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $mes(\widehat{\vec{i},\vec{u}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

D'où les points M_n appartiennent à la même demi-droite.

Solution 74

1) $z_1 = \frac{4}{3} + i\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $z_2 = -\frac{8}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{9}i$, $z_3 = -\frac{32}{27}$, $z_4 = -\frac{32}{81} - \frac{32\sqrt{3}}{81}i$.

2) • Soit n entier naturel, on a :

$$d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{3}z_{n+1} - \frac{1+i\sqrt{3}}{3}z_n\right| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{3}(z_{n+1}-z_n)\right| = \frac{2}{3}|z_{n+1}-z_n| = \frac{2}{3}d_n.$$

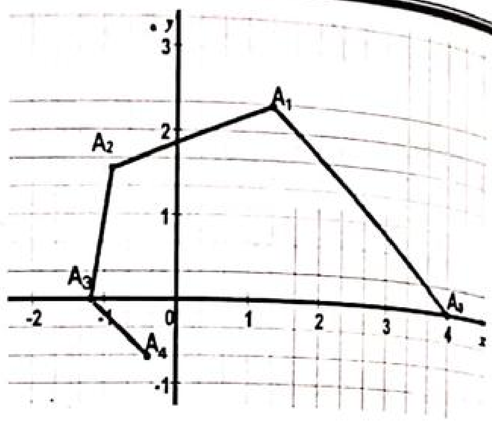
D'où (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$, et de premier terme $d_0 = |z_1 - z_0| = 4\left|\frac{-2+i\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{4\sqrt{7}}{3}$.

• $$l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n = d_0 + d_1 + \ldots + d_{n-1} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} \times d_0 = 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \times \frac{4\sqrt{7}}{3}.$$

D'où $l_n = 4\sqrt{7}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

3) Puisque $0<\frac{2}{3}<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = 4\sqrt{7}$.



Solution 75

1) Si z est solution de $z^6 + 1 = 0$ alors $z^6 = -1$, donc $\left|z^6\right| = 1$. C'est-à-dire $|z|^6 = 1$.

D'où $|z| = 1$. Par conséquent, z s'écrit $e^{i\theta}$ avec θ réel.

2) $z^6 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{6i\theta} = e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad 6\theta = \pi + k2\pi$ k appartenant à $\mathbb{Z}$.

C'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$ k appartenant à {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

Les six solutions de l'équation $z^6 + 1 = 0$ sont donc : $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{i\frac{7\pi}{6}}$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

L'ensemble solution de cette équation est : $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ -i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$.

3) On peut alors écrire : $z^6+1 = \left(z-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)(z-i)\left(z-e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(z-e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)(z+i)\left(z-e^{i\frac{11\pi}{6}}\right)$

4) • On a : $(z-e^{i\alpha})(z-e^{-i\alpha}) = z^2-(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})z+e^{i\alpha}e^{-i\alpha} = z^2-2z\cos\alpha+1$.

• On a alors :

$$z^6+1 = \left(z-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z-e^{i\frac{11\pi}{6}}\right)\left(z-e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(z-e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)(z+i)(z-i).\ \text{Donc}$$

$$\begin{aligned} z^6+1 &= \left(z-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z-e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z-e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(z-e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)(z+i)(z-i) \\ &= (z^2-2z\cos\frac{\pi}{6}+1)(z^2-2\cos\frac{5\pi}{6}z+1)(z^2+1) \quad \text{(d'après la question 3))} \\ &= (z^2-z\sqrt{3}+1)(z^2+z\sqrt{3}+1)(z^2+1) \end{aligned}$$

Solution 76

Considérons un repère orthonormé direct d'origine A, du plan complexe.
On notera par des lettres minuscules, les affixes des points en majuscule.

• ABCD est un carré direct donc :

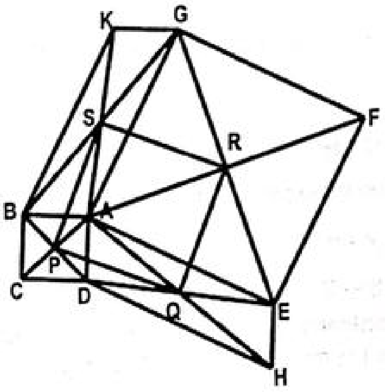
$$\begin{cases} AD = AB \\ \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \end{cases} \text{. C'est-à-dire } \begin{cases} \left|\frac{d-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ b-a = c-d \end{cases} \text{. Et par suite, on a : } \begin{cases} \frac{d-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ b-a = c-d \end{cases}.$$

Or $a = 0$, alors $d = ib$ et $b = c - d$.

- De même, sachant que AEFG est un carré, on montre que g = ie et e = f − g *(le lecteur vérifiera les calculs).*
- AEHD et AGKB sont des parallélogrammes, donc $\begin{cases} \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} \\ \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BK} \end{cases}$. C'est-à-dire $\begin{cases} e = h - d \\ g = k - b \end{cases}$.
- Exprimons alors p, q, r et s en fonction de a, b, c, d, e, f et g.

P est milieu de [BD], d'où $p = \dfrac{d+b}{2}$. Q est milieu de [ED], d'où $q = \dfrac{d+e}{2}$.

R est milieu de [EG], d'où $r = \dfrac{g+e}{2}$. S est milieu de [BG], d'où $s = \dfrac{g+b}{2}$.



- Vérifions que PQRS est un parallélogramme :

$q - p = \dfrac{d+e}{2} - \dfrac{d+b}{2} = \dfrac{e-b}{2}$ et $r - s = \dfrac{g+e}{2} - \dfrac{g+b}{2} = \dfrac{e-b}{2}$.

Puisque q − p = r − s, alors $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.
Par conséquent, PQRS est donc un parallélogramme.
- Vérifions que RSP est un triangle rectangle et isocèle de sommet S :

D'après ce qui précède, $\dfrac{r-s}{p-s} = \dfrac{\frac{e-b}{2}}{\frac{d-g}{2}} = \dfrac{e-b}{d-g}$.

De plus, on a d = ib et g = ie, alors $\dfrac{r-s}{p-s} = \dfrac{e-b}{ib-ie} = \dfrac{1}{-i} = i$.

Or $\dfrac{r-s}{p-s} = i$ signifie que $\left|\dfrac{r-s}{p-s}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{r-s}{p-s}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $\dfrac{SR}{SP} = 1$ et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SR}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. C'est-à-dire SR = SP et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SR}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

D'où RSP est un triangle rectangle et isocèle, de sommet S.
PQRS étant un parallélogramme et RSP un triangle rectangle isocèle de sommet S, alors PQRS est un carré.

Exercice 77

Notons a, b, c, d, e et f les affixes respectives de A, B, C, D, E et F.

F est image de C par la rotation de centre D et d'angle θ d'où : $f = e^{i\theta}(c-d) + d$. (1)

E est image de C par la rotation d'angle - θ et de centre B d'où : $e = e^{-i\theta}(c-b) + b$. (2)

ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
D'où b − a = c − d et c − b = d − a (3)
De l'égalité (1), on déduit que $f - a = e^{i\theta}(c-d) + d - a$.

De l'égalité (2), on déduit que $e - a = e^{-i\theta}(c-b) + b - a$.
En remplaçant b − a par c − d et d − a par c − b dans les expressions de e − a et f − a, on obtient :

$f - a = e^{i\theta}(c-d) + c - b$ et $e - a = e^{-i\theta}(c-b) + c - d = \dfrac{(c-b) + e^{i\theta}(c-d)}{.e^{i\theta}}$.

D'où $|f-a| = |e^{i\theta}(c-d) + c - b|$ et $|e-a| = \dfrac{|e^{i\theta}(c-d)+c-b|}{|e^{i\theta}|} = |e^{i\theta}(c-d)+c-b|$.

D'où $|f-a| = |e-a|$ et donc AF = AE. Finalement, AEF est isocèle de sommet A.

Solution 78

1) Résolution de l'équation z² − 2z + 2 = 0 :

Son discrimnant est : Δ = - 4 = (2i)². Les solutions de cette équation sont : $z_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = \dfrac{2-2i}{2} = 1-i$

2) Affixe de N :

$N = s_L(M)$ signifie $n - l = -(m - l)$. C'est-à-dire $n = -m + 2l = i\sqrt{3} + 2(1-i) = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

D'où $n = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$

3) Affixes de A et C :

A image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ signifie $a = e^{i\frac{\pi}{2}}m$. C'est-à-dire $a = i(-i\sqrt{3})$.

Finalement $a = \sqrt{3}$.

C est image de N par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ $c = e^{i\frac{\pi}{2}}n = i(2 + i(\sqrt{3} - 2)) = 2 - \sqrt{3} + 2i$.

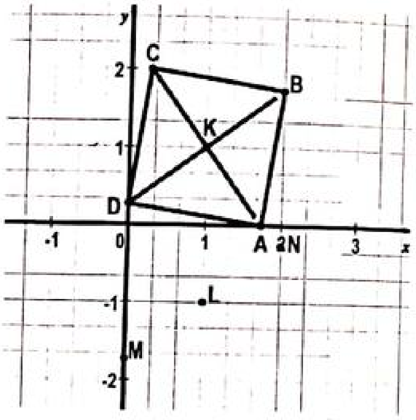
D'où $c = 2 - \sqrt{3} + 2i$.

4) Affixes de D et B :

D image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ signifie $d = m + 2i = -i\sqrt{3} + 2i = i(2 - \sqrt{3})$. D'où $d = i(2 - \sqrt{3})$.

B image de N par la translation de vecteur $\vec{u}$ signifie $b = n + 2i = 2 + i(\sqrt{3} - 2) + 2i = 2 + i\sqrt{3}$.

D'où $b = 2 + i\sqrt{3}$.



5) Montrons que [DB] et [AC] ont pour milieu K :

Notons I le milieu [DB] et J celui de [AC] :

L'affixe du point I est : $\frac{d+b}{2} = \frac{i(2-\sqrt{3}) + 2 + i\sqrt{3}}{2} = 1 + i = k$.

L'affixe du point J est : $\frac{a+c}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2i}{2} = 1 + i = k$.

Les points I, J et K ayant la même affixe, on a I = J = K.

D'où [DB] et [AC] ont le même milieu K.

Montrons que $\frac{c-k}{b-k} = i$:

En effet, $\frac{c-k}{b-k} = \frac{2 - \sqrt{3} + 2i - 1 - i}{2 + i\sqrt{3} - 1 - i} = \frac{1 - \sqrt{3} + i}{1 + (\sqrt{3} - 1)i} = i$. (On peut remarquer que $1 - \sqrt{3} + i = i(1 + (\sqrt{3} - 1)i)$).

Nature du quadrilatère ABCD :

[DB] et [AC] ont même milieu K. D'où ABCD est un parallélogramme.

De plus, $\frac{CK}{BK} = \frac{|c-k|}{|b-k|} = \left|\frac{c-k}{b-k}\right| = |i| = 1$. D'où CK = BK.

Et $\arg\left(\frac{c-k}{b-k}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ (car $\arg i \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$).

D'où $mes(\widehat{\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Donc (KB) est perpendiculaire à (KC).

Les diagonales du parallélogramme ABCD ont même longueur et sont perpendiculaires, donc ABCD est un carré.

Point méthode :

Pour montrer qu'un quadrilatère est un losange, un rectangle ou un carré, en général, on montrera d'abord que le quadrilatère est un parallélogramme.

- *Un parallélogramme est un losange s'il a deux côtés consécutifs de même longueur ou bien ses diagonales perpendiculaires.*
- *Un parallélogramme est un rectangle s'il a deux côtés consécutifs orthogonaux ou bien ses diagonales de même longueur.*
- *Un parallélogramme est un carré s'il a deux côtés consécutifs orthogonaux et de même longueur ou bien ses diagonales perpendiculaires et de même longueur.*

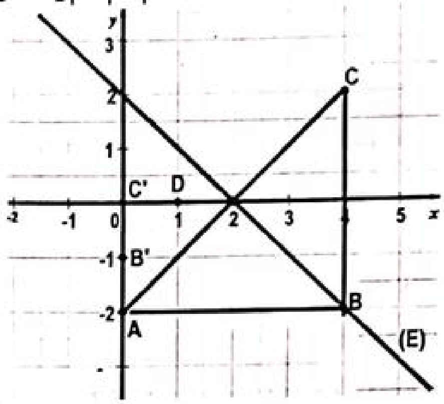
On dispose donc de deux stratégies, l'une par les diagonales, l'autre par des côtés consécutifs.

Solution 79

1) $AB = |z_B - z_A| = |4| = 4$, $AC = |z_C - z_A| = |4+4i| = 4\sqrt{2}$ et $BC = |z_C - z_B| = |4i| = 4$.

$AB^2 + BC^2 = 16 + 16 = 32 = (4\sqrt{2})^2 = AC^2$ et $AB = BC$.

D'où ABC est un triangle rectangle et isocèle de sommet principal B.



2)a) Soit B' et C' les images de B et C par F.

$$z_{B'} = \frac{z_B - (4+2i)}{z_B + 2i} = \frac{4-2i-4-2i}{4-2i+2i} = -i \quad \text{et}$$

$$z_{C'} = \frac{z_C - (4+2i)}{z_C + 2i} = \frac{4+2i-4-2i}{4+2i+2i} = 0 .$$

D'où les images de B et C par F sont respectivement les points B'(0 , -1) et C' = O

b) M appartient à (E) si et seulement si, $|z'| = 1$.

C'est-à-dire $\left|\dfrac{z-(4+2i)}{z-(-2i)}\right| = 1$. Ce qui signifie $\dfrac{|z - z_C|}{|z - z_C|} = 1$ qui équivaut à $\dfrac{CM}{AM} = 1$.

Et finalement à CM = AM. D'où (E) est la médiatrice de [AC].

3)a) Soit z un nombre complexe différent de -2i, on a :

$$(z'-1)(z+2i) = \left(\frac{z-(4+2i)}{z+2i} - 1\right)(z+2i) = \frac{[z-(4+2i)-(z+2i)]}{(z+2i)}(z+2i) = -4-4i .$$

D'où $(z'-1)(z+2i) = -4-4i$.

b) • Supposons M' = D, c'est-à-dire $z' = 1$.

L'égalité $(z'-1)(z+2i) = -4-4i$ devient $(1-1)(z+2i) = -4-4i$.

C'est-à-dire $0 = -4-4i$. Ce qui est absurde. D'où z' est différent de 1. Et par conséquent, M' est différent de D.

• $(z'-1)(z+2i) = -4-4i$ donc $|(z'-1)(z+2i)| = |-4-4i|$

donc $|z'-1| \times |z+2i| = 4\sqrt{2}$

donc $DM' \times AM = 4\sqrt{2}$. Finalement, $DM' \times AM = 4\sqrt{2}$.

• $(z'-1)(z+2i) = -4-4i$ donc $\arg[(z'-1)(z+2i)] = \arg(-4-4i) + k2\pi$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

donc $\arg(z'-1) + \arg(z+2i) = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi$

C'est-à-dire $(\vec{u}, \overrightarrow{DM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$. D'où $(\vec{u}, \overrightarrow{DM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$.

Solution 80

1) • Posons $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z^5 = 1 \Leftrightarrow \rho^5 e^{5i\theta} = e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^5 = 1 \\ 5\theta = k2\pi \end{cases} \text{k appartient à } \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \dfrac{k2\pi}{5} \end{cases} k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Les racines cherchées sont, donc les complexes $z_k = e^{i\frac{k2\pi}{5}}$ où $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

• Soit k appartenant à {0, 1, 2, 3, 4}, on a : $OA_k = \left|e^{i\frac{k2\pi}{5}}\right| = 1$, où z_k est l'affixe de A_k.

D'où A_k appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

De plus, on a $\arg\left(\dfrac{z_{k+1}}{z_k}\right) \equiv \dfrac{\pi}{5}[2\pi]$. D'où $mes(\widehat{\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}}}) \equiv \dfrac{\pi}{5}[2\pi]$.

D'où les points A_k sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 1 et l'angle entre deux vecteurs consécutifs $(\widehat{\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}}})$ est constante. D'où le polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$ est pentagone régulier.

- L'isobarycentre des points A_k a pour affixe :

$$\frac{z_0+z_1+z_2+z_3+z_4}{5}=\frac{\sum_{k=0}^{4} e^{\frac{2k\pi}{5}i}}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{1-\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^5}{1-e^{\frac{2\pi}{5}i}}=\frac{1}{5}\times\frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2\pi}{5}i}}=\frac{1}{5}\times\frac{1-1}{1-e^{\frac{2\pi}{5}i}}=0\,.$$

D'où l'isobarycentre des points A_k est l'origine O du repère.

2) $z=\dfrac{u-1}{u+1} \Leftrightarrow uz+z=u-1 \Leftrightarrow u(z-1)=-1-z \Leftrightarrow u=\dfrac{1+z}{1-z}$ (Notons que z ne peut prendre la valeur 1).

3) $(u-1)^5=(u+1)^5 \Leftrightarrow \left(\dfrac{u-1}{u+1}\right)^5=1.$ (1)

Si on pose $z=\dfrac{u-1}{u+1}$, l'équation (1) devient : $z^5=1$, c'est-à-dire $z=e^{i\frac{k2\pi}{5}}$, avec $k\in\{0,1,2,3,4\}$.

Remarquons que si k = 0, alors z = 1. Mais u n'existe pas pour z = 1.

Or d'après la question 2), $z=\dfrac{u-1}{u+1} \quad\Leftrightarrow\quad u=\dfrac{1+z}{1-z}$.

D'où $u=\dfrac{1+e^{i\frac{2k\pi}{5}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{5}}}=\dfrac{e^{i0}+e^{i\frac{2k\pi}{5}}}{e^{i0}-e^{i\frac{2k\pi}{5}}}=\dfrac{e^{i\frac{k\pi}{5}}\left(e^{i\frac{-k\pi}{5}}+e^{i\frac{k\pi}{5}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{5}}\left(e^{i\frac{-k\pi}{5}}-e^{i\frac{k\pi}{5}}\right)}=\dfrac{2\cos\frac{k\pi}{5}}{2i\sin\frac{-k\pi}{5}}=i\cot\tan\dfrac{k\pi}{5}$ où $k\in\{1,2,3,4\}$.

Les solutions de l'équation $(u-1)^5=(u+1)^5$ sont les nombres complexes $i\cot\tan\dfrac{k\pi}{5}$ où k est dans {1, 2, 3, 4}.

Solution 81

1) $z=1+e^{2i\theta}$, donc $z-1=e^{2i\theta}$, donc $|z-1|=1$. D'où AM = 1.

Il en résulte que M appartient au cercle de centre A et de rayon 1.

2) • $\dfrac{z-a}{b-a}=\dfrac{1+e^{2i\theta}-1}{2-1}=e^{2i\theta}$. Donc $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}})\equiv\arg\left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)[2\pi]$, alors $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}})\equiv 2\theta[2\pi]$.

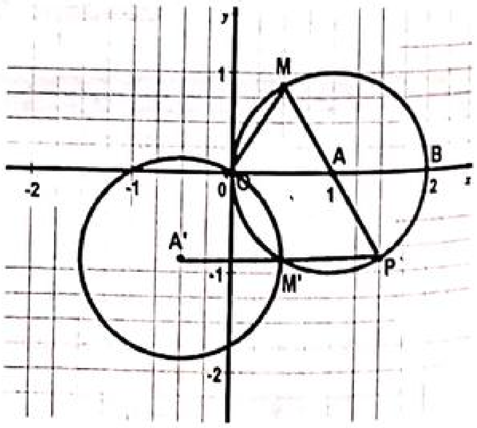
- Lorsque θ décrit]0 , π[, 2θ décrit]0 , 2π[. D'où E est le cercle (C) privé du point B.

3) • Soit r la rotation de centre O, d'angle -2θ.

M' image de M par la rotation r équivaut à $z'=e^{-2i\theta}z$.

Donc $z'=e^{-2i\theta}(1+e^{2i\theta})=e^{-2i\theta}+1=\bar{z}$. D'où $z'=\bar{z}$

- $AM'=|z'-1|=|e^{-2i\theta}|=1$. D'où M' appartient à (C).



4)a) (C') est le cercle de centre A' = r(A) et de même rayon 1 que (C).

b) $OA=|z_A|=1$, $OM=|z|=\left|1+e^{\frac{2\pi}{3}i}\right|=\left|\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$

et AM = 1 (car M appartient à (C)).

Puisque OA = OM = AM, alors le triangle AMO est équilatéral.

c) • OA = 1, d'où O appartient à (C).

Or r(O) = O , alors O appartient à (C') = r(C).

- M ∈ (C) et M' = r(M) , d'où M'∈ (C').

Or M' appartient aussi à (C) d'après la question 3), alors O et M' appartiennent à (C') et à (C).

d) A est le milieu de [PM], d'où $z_A=\dfrac{z_P+z_M}{2}$.. Et par suite, $z_P=2z_A-z_M$.

On a alors : $z_P=2-1-e^{\frac{2\pi}{3}i}=\dfrac{3}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_{A'}=e^{-\frac{2\pi}{3}i}=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z'=\bar{z}=1+e^{-\frac{2\pi}{3}i}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

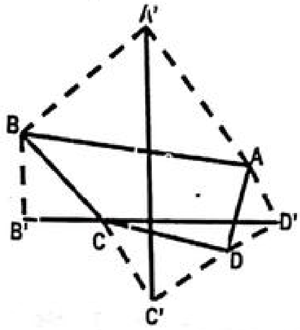
L'affixe du milieu de [A'P] est : $\dfrac{z_{A'}+z_P}{2}=\dfrac{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=z'$. D'où M' est le milieu de [A'P].

Solution 82

On considère dans le plan complexe, un repère orthonormé direct d'origine O.

Les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs A', B', C' et D' transforment respectivement B, C, D et A en A, B, C et D.

a, b, c, d, a', b', c', d' sont les affixes respectives de A, B, C, D, A', B', C' et D'.



On a alors : $d = i(a-d') + d'$ donc $d'=\frac{1+i}{2}(d-ia)$.

$c = i(d-c') + c'$ donc $c'=\frac{1+i}{2}(c-id)$.

De même, on a : $a'=\frac{1+i}{2}(a-ib)$ et $b'=\frac{1+i}{2}(b-ic)$. Donc :

$c'-a'=\frac{1+i}{2}(c-id-a+ib)=-i\frac{1+i}{2}(ic+d-ia-b)=\frac{1+i}{2}[(d-ia)-(b-ic)](-i)=-i(d'-b')$.

D'où $c'-a' = -i(d'-b')$ et $\frac{c'-a'}{d'-b'}=-i$. Il en découle que : $\left|\frac{c'-a'}{d'-b'}\right|=1$ et $\arg\left(\frac{c'-a'}{d'-b'}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

C'est-à-dire $\frac{|c'-a'|}{|d'-b'|}=1$ et $\arg\left(\frac{c'-a'}{d'-b'}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Ce qui se traduit par $\frac{A'C'}{B'D'}=1$ et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'C'}})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On peut conclure que : A'C' = B'D' et (B'D') est perpendiculaire à (A'C').

Solution 83

1) Z est un réel $\Leftrightarrow$ $Z=0$ ou $\arg Z\equiv 0[\pi]$

$\Leftrightarrow$ $z=-2i$ ou $\arg\left(\frac{z+2i}{1-iz}\right)\equiv 0[\pi]$

$\Leftrightarrow$ $z=-2i$ ou $\arg\left(i\left(\frac{z+2i}{z+i}\right)\right)\equiv 0[\pi]$

$\Leftrightarrow$ $z=-2i$ ou $\frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{z+2i}{z+i}\right)\equiv 0[\pi]$

$\Leftrightarrow$ $z=-2i$ ou $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CM}})\equiv-\frac{\pi}{2}[\pi]$, avec A d'affixe –i et C d'affixe -2i.

$\Leftrightarrow$ M = C(0 , -2) ou M appartient au cercle de diamètre [AC] privé de A et C.

D'où l'ensemble des points M est le cercle (C_1) de diamètre [AC], privé de A(0 , -1)

2) $\arg Z\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\arg\left(i\left(\frac{z+2i}{z+i}\right)\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{z+2i}{z+i}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Ce qui équivaut à $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CM}})\equiv\pi[2\pi]$, c'est-à-dire M appartient au segment [AC] privé des points A et C.

Finalement, l'ensemble des points cherché est le segment (Δ_1) =]AC[.

3) $|Z-i|=\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\left|\frac{z+2i}{1-iz}-i\right|=\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\left|\frac{i}{-i(z+i)}\right|=\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{|z+i|}=\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $|z+i|=2$ $\Leftrightarrow$ AM = 2.

D'où l'ensemble des points M cherché est le cercle (C_2) de centre A et de rayon 2.

4) Soit B, M et M' trois points deux à deux distincts.

B, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow$ $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}}) \equiv 0[\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\dfrac{Z-i}{z-i}\right) \equiv 0[\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{Z-i}{z-i}$ est un réel.

Or $\dfrac{Z-i}{z-i} = \dfrac{\dfrac{z+2i}{1-iz}-i}{z-i} = \dfrac{\dfrac{i}{-i(z+i)}}{z-i} = \dfrac{-1}{(z-i)(z+i)} = \dfrac{-1}{z^2+1}$, alors :

B, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overline{\left(\dfrac{-1}{z^2+1}\right)} = \dfrac{-1}{z^2+1}$. avec $z \neq -i$ et $z \neq i$.

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{-1}{\overline{z}^2+1} = \dfrac{-1}{z^2+1}$, avec $z \neq -i$ et $z \neq i$.

$\Leftrightarrow$ $\overline{z}^2+1 = z^2+1$, avec $z \neq -i$ et $z \neq i$.

$\Leftrightarrow$ $z = \overline{z}$ ou $\overline{z} = -z$, avec $z \neq -i$ et $z \neq i$.

$\Leftrightarrow$ z est réel ou z est imaginaire pur ; $z \neq -i$ et $z \neq i$.

$\Leftrightarrow$ M appartient à la réunion des axes de coordonnées, avec $M \neq A(0,-1)$ et $M \neq B$.

Notons que si z = i, M = B, donc les trois points sont alignés. D'où l'ensemble (Δ_2) des points M cherché est la réunion des axes de coordonnées, privée du point A(0 , -1).

5) M = M' $\Leftrightarrow$ Z = z $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z+2i}{1-iz} = z$ $\Leftrightarrow$ $z^2 = -2$ avec $z \neq -i$ $\Leftrightarrow$ $z = i\sqrt{2}$ ou $z = -i\sqrt{2}$

L'ensemble des points M cherché est la paire $\{N(0,\sqrt{2}), N'(0,-\sqrt{2})\}$.

6) Z + 1 est un réel non nul si et seulement si, $\arg(Z+1) \equiv 0[\pi]$.

Or $\arg(Z+1) \equiv 0[\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\dfrac{z+2i}{1-iz}+1\right) \equiv 0[\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\dfrac{(1-i)z+1+2i}{1-iz}\right) \equiv 0[\pi]$

C'est-à-dire, $\arg(Z+1) \equiv 0[\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\arg\left[\dfrac{(1-i)}{-i} \times \dfrac{\left(z+\dfrac{1+2i}{1-i}\right)}{z+i}\right] \equiv 0[\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\arg(1+i) + \arg\left(\dfrac{z+\frac{3}{2}i-\frac{1}{2}}{z+i}\right) \equiv 0[\pi]$

Donc $\arg(Z+1) \equiv 0[\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\pi}{4} + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{DM}}) \equiv 0[\pi]$ où D est le point d'affixe $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$

$\Leftrightarrow$ $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{DM}}) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

D'où l'ensemble des points cherché est un cercle (C_3) passant par B et D et privé des points B et D.

Solution 84

1)a) $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \dfrac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

b) $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

D'où $|z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg z_1 \equiv -\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

$z_2 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$. D'où $|z_2| = \sqrt{2}$ et $\arg z_2 \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

c) • $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$.

• On a : $z_3=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$.

En égalant les parties réelles et imaginaires des deux écritures de z_3, on obtient :

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

2)a) On a $OI=|z|=1$, $OB=|z_2|=\sqrt{2}$ et $IB=|-i|=|z_2-1|=1$.

De plus, $OI^2+IB^2=1+1=2=OB^2$. D'où OIB est un triangle rectangle et isocèle en I.

b) Soit I' et B' les images respectives de I et B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$. On a :

• $z_{I'}=e^{i\frac{\pi}{12}}z_I=e^{i\frac{\pi}{12}}=z_3$. D'où l'image de I par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$ est C

• $z_{B'}=e^{i\frac{\pi}{12}}z_B=\frac{z_1}{z_2}\times z_2=z_1$. D'où l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$ est A.

• Les images respectives de O, I et B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$ sont O, C et A.

D'où l'image du triangle OIB par cette rotation est le triangle OCA.
Puisque le triangle OIB est rectangle et isocèle en I, alors le triangle OAC est rectangle et isocèle en C.

Solution 85

1)a) $w^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) $1+w+w^2=1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=0$. D'où $1+w+w^2=0$.

Et $\overline{w}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=w^2$.

2)a) $|w|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ et $|1+w|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$. D'où $|w|=|1+w|=1$.

b) • Soit $z=x+iy$ avec x et y réels, si z vérifie (1), alors $|z|=|1+z|$.

Ce qui équivaut successivement à : $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1+x)^2+y^2}$, puis $x^2+y^2=1+2x+x^2+y^2$, enfin $x=-\frac{1}{2}$.

Donc pour un complexe $z=x+iy$ avec x et y réels, vérifiant (1), on a $x=-\frac{1}{2}$.

• Soit $z=x+iy$ avec x et y réels, si z vérifie (1), alors $x=-\frac{1}{2}$ et $|z|=1$.

Ainsi, on a $\sqrt{\frac{1}{4}+y^2}=1$, donc $y^2=\frac{3}{4}$. Donc $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc si z vérifient (1), alors $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. C'est-à-dire $z=w$ ou $z=\overline{w}$.

Or w vérifie la relation (1) et ***le lecteur vérifiera*** que $\overline{w}$ vérifie aussi (1).
Finalement, w et $\overline{w}$ sont les seuls nombres complexes satisfaisant (1).

3)a) • A, B et C appartiennent au cercle de centre O et rayon R. D'où OA = OB = OC = R.

C'est-à-dire $|a|=|b|=|c|=R$. Alors $|p|=\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{|b|}{|a|}=1$ et $|q|=\left|\frac{c}{a}\right|=\frac{|c|}{|a|}=1$. Donc $|p|=|q|=1$.

• $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ se traduit par $a+b+c=0$.

Donc $1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=0$ (en divisant les membres de l'égalité précédente par a).

On conclut alors que $1 + p + q = 0$. Donc $1 + p = -q$.

b) D'après la question 3)a), on a $|p|=1$. De plus $1 + p = - q$, donc $|1+p|=|-q|=|q|=1$.

D'où p vérifie la relation (1), donc d'après la question 2)b), soit $p = w$ soit $p=\overline{w}$.

c) Comme $p = w$, alors $- q = 1 + p = 1 + w = - w^2$ (car d'après la question 1)b), $1 + w + w^2 = 0$).

D'où $q = w^2$. Or toujours d'après la question 1)b), $w^2=\overline{w}$, alors $q=w^2=\overline{w}$.

d) • $p = w$, donc $\frac{b}{a}=w$, donc $b = wa$. Et alors $b - a = wa - a = (w - 1)a$.

• $q = w^2$, donc $\frac{c}{a}=w^2$, donc $c = aw^2 = bw$ (car $b = wa$). Et alors $c - b = bw - b = (w - 1)b$.

• $q=\overline{w}$, donc $c=\overline{w}a$. Et alors $c-a=\overline{w}a-a=(\overline{w}-1)a$.

• De ce qui précède, on a :

$AB=|b-a|=|(w-1)a|=|w-1|\times|a|=|w-1|\times R$.

$BC=|c-b|=|(w-1)b|=|w-1|\times|b|=|w-1|\times R$.

$AC=|c-a|=|(\overline{w}-1)a|=|\overline{w}-1|\times|a|=|\overline{w-1}|\times R=|w-1|\times R$.

Donc $AB=BC=AC=|w-1|\times R$. Finalement, le triangle ABC est équilatéral.

Solution 86

1)a) L'équation $2z^2 - 2(1 + \cos 2t)z + 1 + \cos 2t = 0$ a pour discriminant :

$\Delta = 4(1 + \cos 2t)^2 - 8(1 + 2\cos 2t) = 4(1 + \cos 2t)(-1 + \cos 2t) = - 4(1 - \cos^2 2t) = - 4\sin^2 2t = (2i\sin 2t)^2$.

D'où les racines de l'équation sont :

$$z_1=\frac{2(1+\cos 2t)+2i\sin 2t}{4}=\frac{1+\cos 2t+i\sin 2t}{2} \text{ et } z_2=\frac{2(1+\cos 2t)-2i\sin 2t}{4}=\frac{1+\cos 2t-i\sin 2t}{2}.$$

b) • $z_1=\frac{1+\cos 2t+i\sin 2t}{2}=\frac{1+e^{2it}}{2}=\frac{e^{0it}+e^{2it}}{2}=\frac{e^{it}(e^{-it}+e^{it})}{2}=e^{it}\cos t$.

Or on a $0\leq t<\frac{\pi}{2}$, donc $\cos t > 0$. Ainsi, $|z_1|=\cos t$ et $\arg z_1 \equiv t\ [2\pi]$.

• Remarquons que z_2 est le conjugué de z_1, donc :

$|z_2|=|z_1|=\cos t$ et $\arg z_2 \equiv -\arg z_1 [2\pi]$, c'est-à-dire $\arg z_2 \equiv - t[2\pi]$.

2) Les points M_1 et M_2 ont pour coordonnées respectives :

$$(x',y')=\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2t}{2},\frac{\sin 2t}{2}\right) \text{ et } (x'',y'')=\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2t}{2},-\frac{\sin 2t}{2}\right).$$

On remarque que $\left(x'-\frac{1}{2},y'\right)=\left(\frac{\cos 2t}{2},\frac{\sin 2t}{2}\right)$ et $\left(x''-\frac{1}{2},y''\right)=\left(\frac{\cos 2t}{2},-\frac{\sin 2t}{2}\right)$.

On a donc d'une part $\left(x'-\frac{1}{2}\right)^2+y'^2=\left(\frac{\cos 2t}{2}\right)^2+\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

et d'autre part $\left(x''-\frac{1}{2}\right)^2+y''^2=\left(\frac{\cos 2t}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sin 2t}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

D'où M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Solution 87

1) Soit M et N deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{ON}$.

On a d'une part $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{ON}}) - (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$.

D'autre part $\text{mes}(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{ON}}) \equiv \arg z_N [2\pi]$ et $\text{mes}(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \arg z_M [2\pi]$.

Donc $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \arg z_N - \arg z_M [2\pi]$, c'est-à-dire $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \arg \frac{z_N}{z_M} [2\pi]$.

Or $z_N = z_{\overrightarrow{ON}} = z_{\overrightarrow{AC}} = c - a$ et $z_M = z_{\overrightarrow{OM}} = z_{\overrightarrow{AB}} = b - a$.

Alors on peut conclure que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$.

2) $\frac{z-i}{z-1}$ est un imaginaire pur si et seulement si, $\arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $\frac{z-i}{z-1} = 0$.

Or d'après la question 1), on a $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{UM}, \overrightarrow{VM}}) \equiv \arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right)[\pi]$ ou z = i, alors $\frac{z-i}{z-1}$ est un imaginaire pur si et seulement si $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{UM}, \overrightarrow{VM}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou M = V.

C'est-à-dire, M appartient au cercle de diamètre [UV], privé du point U.

Finalement, l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $\frac{z-i}{z-1}$ est un imaginaire pur, est le cercle de diamètre [UV], privé du point U.

3)a) • Puisque z et z' sont distincts, alors M et M' sont distincts.

• Supposons M = P, on a alors z = zz'. C'est-à-dire z(1 – z') = 0. Ce qui signifie z = 0 ou z' = 1.

Or z et z' sont différents de 0 et 1 respectivement, d'après l'énoncé. Donc M et P sont distincts.

• Supposons M' = P, on a alors z' = zz'. C'est-à-dire z'(1 – z) = 0. Ce qui signifie z' = 0 ou z = 1.

Or z' et z sont différents de 0 et 1 respectivement, d'après l'énoncé. Donc M' et P sont distincts.

Finalement, les points M, M' et P sont distincts deux à deux.

b) Soit z et z' deux complexes différents de 0 et 1, on a : $\dfrac{\frac{z'}{z'-1}}{\frac{z}{z-1}} = \frac{z'}{z'-1} \times \frac{z-1}{z} = \frac{zz'-z'}{zz'-z}$.

Or $\arg\left(\dfrac{\frac{z'}{z'-1}}{\frac{z}{z-1}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z'-1}\right) - \arg\left(\frac{z}{z-1}\right)[2\pi]$, alors $\arg\left(\frac{zz'-z'}{zz'-z}\right) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z'-1}\right) - \arg\left(\frac{z}{z-1}\right)[2\pi]$.

c) Notons que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{M'P}}) \equiv \arg\left(\frac{zz'-z'}{zz'-z}\right)[2\pi]$, $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{UM'}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z'-1}\right)[2\pi]$ et

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{UM}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \arg\left(\frac{z}{z-1}\right)[2\pi]$. Ainsi, dire que :

$\arg\left(\frac{zz'-z'}{zz'-z}\right) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z'-1}\right) - \arg\left(\frac{z}{z-1}\right)[2\pi]$ signifie $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{M'P}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{UM'}, \overrightarrow{OM'}}) - \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{UM}, \overrightarrow{OM}})[2\pi]$. (1)

Or M, M' et P sont alignés si et seulement si $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{M'P}}) \equiv 0[\pi]$.

C'est-à-dire d'après (1) que : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{UM'}, \overrightarrow{OM'}}) - \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{UM}, \overrightarrow{OM}}) \equiv 0[\pi]$.

Ce qui équivaut aussi à $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{UM'}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{UM}, \overrightarrow{OM}})[\pi]$.

Et en d'autres termes cela signifie que O, U, M et M' sont cocycliques ou alignés.

Ainsi, M, M' et P sont alignés si et seulement si les points O, U, M et M' sont cocycliques ou alignés.

Solution 88

1) • L'équation (E) a pour discriminant $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$.

Scanned by CamScanner

Donc les racines de l'équation (E) sont : $Z' = \cos\theta + i\sin\theta$ et $Z'' = \cos\theta - i\sin\theta$.

- Dans l'équation (E'), posons $Z = z^2$, alors Z est solution de l'équation (E).

C'est-à-dire $Z = e^{i\theta}$ ou $Z = e^{-i\theta}$, c'est-à-dire $z^2 = e^{i\theta}$ ou $z^2 = e^{-i\theta}$.

Or $z^2 = e^{i\theta}$ équivaut à $z = e^{i\frac{\theta}{2}}$ ou $z = -e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}$.

$z^2 = e^{-i\theta}$ équivaut à $z = e^{-i\frac{\theta}{2}}$ ou $z = -e^{-i\frac{\theta}{2}} = e^{i\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)}$.

Donc les solutions de l'équation (E') sont : $e^{i\frac{\theta}{2}}$, $e^{-i\frac{\theta}{2}}$, $e^{i\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)}$ et $e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}$.

2) M_1, M_2, M_3 et M_4 étant les points images de $z_1 = e^{-i\frac{\theta}{2}}$, $z_2 = e^{i\frac{\theta}{2}}$, $z_3 = e^{i\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)}$ et $z_4 = e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)} = e^{i\left(-\pi+\frac{\theta}{2}\right)}$

- D'une part le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour affixe $z_2 - z_1 = e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} = 2i\sin\frac{\theta}{2}$

et le vecteur $\overrightarrow{M_4M_3}$ a pour affixe $z_3 - z_4 = e^{i\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)} - e^{-i\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)} = 2i\sin\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right) = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_4M_3}$ ayant la même affixe, sont égaux. Et donc $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme.

- D'autre part $M_1M_3 = |z_3 - z_1| = \left|2e^{-i\frac{\theta}{2}}\right| = 2$ et $M_2M_4 = |z_4 - z_2| = \left|-2e^{i\frac{\theta}{2}}\right| = 2$.

D'où les diagonales du parallélogramme précédent ont la même longueur. Donc $M_1M_2M_3M_4$ est un rectangle.
Ainsi pour que $M_1M_2M_3M_4$ soit un carré, il faut et il suffit que ses diagonales soient orthogonales.

C'est-à-dire $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_2M_4}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Or $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_2M_4}}) \equiv \arg\left(\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}\right)[2\pi]$ et $\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{-2e^{i\frac{\theta}{2}}}{-2e^{-i\frac{\theta}{2}}} = e^{i\theta}$, alors $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_2M_4}}) \equiv \theta[2\pi]$.

Finalement, $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_2M_4}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Et comme, on a : $0 < \theta < \pi$, alors $\theta = \frac{\pi}{2}$. Finalement, $M_1M_2M_3M_4$ est un carré si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Solution 89

1)a) z est solution de (E), donc $(1 + iz)^3(1 - i\tan\alpha) = (1 - iz)^3(1 + i\tan\alpha)$. Ce qui implique successivement que :
$\left|(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)\right| = \left|(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)\right|$, puis $\left|(1+iz)^3\right|\left|1-i\tan\alpha\right| = \left|(1-iz)^3\right|\left|1+i\tan\alpha\right|$, et ensuite,
$|1+iz|^3\sqrt{1+\tan^2\alpha} = |1-iz|^3\sqrt{1+\tan^2\alpha}$, enfin $|1+iz|^3 = |1-iz|^3$.
Il en résulte alors que $|1+iz| = |1-iz|$.

b) Soit $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels, $|1+iz| = |1-iz|$ équivaut successivement à :
$|1-y+ix| = |1+y-ix|$, puis $(1 - y)^2 + x^2 = (1 + y)^2 + x^2$, puis encore $y = 0$, enfin z est un réel.
Donc $|1+iz| = |1-iz|$ si et seulement si z appartient à $\mathbb{R}$.
Or si z est solution de l'équation (E) alors $|1+iz| = |1-iz|$.
Donc si z est solution de l'équation (E), alors, alors z est un réel.

2)a) $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$.

b) • Pour $z = \tan\varphi$, on a :

$(1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha) \Leftrightarrow \dfrac{(1+iz)^3}{(1-iz)^3} = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = e^{2i\alpha}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi}\right)^3 = e^{2i\alpha}$.

$\Leftrightarrow (e^{2i\varphi})^3 = e^{2i\alpha}$.

$\Leftrightarrow e^{6i\varphi} = e^{2i\alpha}$.

D'où $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$ équivaut à $e^{6i\varphi} = e^{2i\alpha}$.

- $e^{6i\varphi} = e^{2i\alpha} \Leftrightarrow 6\varphi = 2\alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\alpha}{3} + k\dfrac{\pi}{3}$ $k \in \{0, 1, 2\}$.

D'où les solutions de l'équation $e^{6i\varphi} = e^{2i\alpha}$ sont : $\dfrac{\alpha}{3}$, $\dfrac{\alpha+\pi}{3}$ et $\dfrac{\alpha+2\pi}{3}$.

Notons que la fonction tangente est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Donc tout réel z s'écrit de façon unique sous la forme $\tan\varphi$, où φ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Comme les solutions de (E) sont des réels, il est légitime d'écrire $z = \tan\varphi$.

D'où résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation $e^{6i\varphi} = e^{2i\alpha}$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, d'inconnue φ.

c) Les solutions de (E) sont alors $z_1 = \tan\dfrac{\alpha}{3}$, $z_2 = \tan\left(\dfrac{\alpha+\pi}{3}\right)$ et $z_3 = \tan\left(\dfrac{\alpha+2\pi}{3}\right)$.

Solution 90

1)a) Soit z_0 un nombre complexe. $\overline{p(z_0)} = \overline{z_0^3 - 4z_0 + \lambda} = \overline{z_0}^3 - 4\overline{z_0} + \overline{\lambda} = \overline{z_0}^3 - 4\overline{z_0} + \lambda = p(\overline{z_0})$.

Or si $p(z_0) = 0$, alors $\overline{p(z_0)} = 0$. Donc $p(\overline{z_0}) = 0$.

En conclusion, si $p(z_0) = 0$ alors $p(\overline{z_0}) = 0$.

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x + \lambda$.

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, car fonction polynôme et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Comme 0 appartient à $\mathbb{R}$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.

Par conséquent, l'équation $p(z) = 0$ admet au moins une solution réelle.

2)a) Supposons que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution non réelle z_1 de module 2.

Soit α un argument de z_1, on a : $z_1 = 2e^{i\alpha}$.

D'après la question 1)a), le conjugué $2e^{-i\alpha}$ de z_1 est aussi solution de l'équation $p(z) = 0$.

D'après la question 1)b), l'équation $p(x) = 0$ a une solution réelle a. Donc $p(z) = (z - 2e^{i\alpha})(z - 2e^{-i\alpha})(z - a)$.

Donc $p(z) = (z^2 - 2(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})z + 4)(z - a) = (z^2 - 4z\cos\alpha + 4)(z - a) = z^3 + (-4\cos\alpha - a)z^2 + (4a\cos\alpha + 4)z - 4a$.

Or $p(z) = z^3 - 4z + \lambda$, alors par identification, on a :

$\begin{cases} -4\cos\alpha - a = 0 \\ 4a\cos\alpha + 4 = -4 \\ -4a = \lambda \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} 4\cos\alpha = -a \\ -a^2 + 4 = -4 \\ -4a = \lambda \end{cases}$, puis à $\begin{cases} 4\cos\alpha = -a \\ a = 2\sqrt{2} \text{ ou } a = -2\sqrt{2} \\ -4a = \lambda \end{cases}$.

Pour $a = 2\sqrt{2}$, on a $\lambda = -8\sqrt{2}$.

Pour $a = -2\sqrt{2}$, on a $\lambda = 8\sqrt{2}$.

D'où les deux valeurs de λ pour lesquelles l'équation $p(z) = 0$ admet une racine complexe non réelle de module 2 sont $\lambda_1 = -8\sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 8\sqrt{2}$.

b) Pour $\lambda = -8\sqrt{2}$, on a : $a = 2\sqrt{2}$ et $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\alpha \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$ ou $\alpha \equiv -\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.

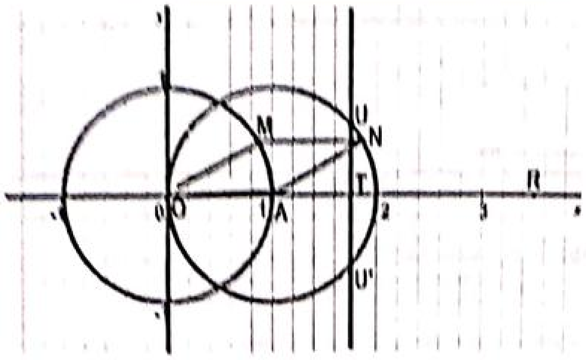
Donc les solutions de l'équation $p(z) = 0$ sont : $2\sqrt{2}$, $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

Pour $\lambda = 8\sqrt{2}$, on a : $a = -2\sqrt{2}$ et $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\alpha \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\alpha \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Donc les solutions de l'équation $p(z) = 0$ sont : $-2\sqrt{2}$, $2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Solution 91

1)



2) • On remarque que $AN = |z_N - z_A| = |e^{i\theta}| = 1$. Puisque $AN = 1$, alors N appartient au cercle (C').

• On a $z_A + z_M = 1 + e^{i\theta} = z_N$. Ce qui se traduit par $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$.

Donc OAMN est un parallélogramme. Or $OA = OM = 1$, alors OAMN est un losange.

• $1 + e^{i\theta} = e^{i0} + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)$.

Or on a $-\pi < \theta < \pi$, alors $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$. Donc on a $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$.

Par conséquent $e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)$ est une écriture exponentielle de $1 + e^{i\theta}$. Et finalement, un argument de $1 + e^{i\theta}$ est $\frac{\theta}{2}$.

3)a) • On a :

$$\begin{aligned} u^2 - (2 + 2\cos\theta)u + 2 + 2\cos\theta &= (1 + e^{i\theta})^2 - (2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta})(1 + e^{i\theta}) + 2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} \\ &= 1 + 2e^{i\theta} + e^{2i\theta} - (3 + 3e^{i\theta} + e^{2i\theta} + e^{-i\theta}) + 2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où u est bien solution de l'équation $z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + 2 + 2\cos\theta = 0$.

• Soit v l'autre solution, on a $u + v = 2 + 2\cos\theta = 2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}$, donc $v = 1 + e^{-i\theta}$.

Autre méthode :

On sait que l'équation $z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + 2 + 2\cos\theta = 0$ est du second degré à coefficients réels, alors, on montre que comme u est une de ses solutions, l'autre solution est le conjugué de u, soit $1 + e^{-i\theta}$.

b) On peut remarquer que pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, l'équation $z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + 2 + 2\cos\theta = 0$ devient $z^2 - 3z + 3 = 0$.

Par conséquent les solutions de l'équation $z^2 + 3z + 3 = 0$ sont : $1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 + e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Soit $\frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{3 - i\sqrt{3}}{2}$.

4) L'abscisse de T est le réel $\frac{a}{2}$ qui est aussi l'abscisse des points U et U'.

Puisque U et U' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, alors leurs affixes respectives u et u' sont conjuguées l'une de l'autre.

Ainsi, $u + u' = 2\mathrm{Re}(u) = a$ et $u \times u' = |u|^2 = x^2 + y^2$, si on pose $u = x + iy$ avec x et y réels.

Or U appartient au cercle (C') qui a pour équation $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, alors $y^2 = 1 - (x - 1)^2$.

Par conséquent, $|u|^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 1 - (x - 1)^2 = 2x = a$, car $x = \frac{a}{2}$.

u et u' ayant pour somme S = a et pour produit P = a, sont solutions de l'équation $z^2 - az + a = 0$.

Solution 92

1) Déterminons les points M confondus a leur image M'.

$M = M' \Leftrightarrow z = z' \Leftrightarrow z = \dfrac{z^2}{i-z} \Leftrightarrow iz - z^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow z(2z - i) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = \dfrac{1}{2}i$.

D'où les points M confondus a leur image sont les points affixes respectives $z = 0$ ou $z = \dfrac{1}{2}i$.

2) Montrons que : $x' = \dfrac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$.

$$z' = \frac{z^2}{i-z} \Leftrightarrow x'+iy' = \frac{(x+iy)^2}{i-(x+iy)} \Leftrightarrow x'+iy' = \frac{x^2-y^2+2ixy}{-x+i(1-y)}$$

$$\Leftrightarrow x'+iy' = \frac{(x^2-y^2+2ixy)(-x-i(1-y))}{(-x+i(1-y))(-x-i(1-y))}$$

$$\Leftrightarrow x'+iy' = \frac{-x^3+xy^2-2x^2iy-x^2i+yx^2i+y^2i-iy^3+2xy-2xy^2}{x^2+(1-y)^2}$$

$$= \frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2} - \frac{i(x^2+y^3-y^2+x^2y)}{x^2+(1-y)^2}$$

d'où $x' = \dfrac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$

2) Déduisons-en l'ensemble (E).

$$M' \in (OJ) \Leftrightarrow x' = 0 \Leftrightarrow \frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x(x^2+y^2-2y) = 0 \quad \text{avec} \quad x^2+(1-y)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2+y^2-2y = 0 \quad \text{avec} \quad x \neq 0 \quad \text{ou} \quad 1-y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad (x-0)^2+(y-1)^2-1 = 0 \quad \text{avec} \quad (x\,;y) \neq (0\,;1)$$

D'où (E) est la réunion de l'axe des ordonnées et du cercle de centre J(0 , 1) et de rayon R = 1, privée du point J.

3) Trouvons une relation simple liant les longueurs OM, JM et OM' :

On sait que : $OM = |z|$; $OM' = |z'|$; $JM = |z-i|$.

$z' = \dfrac{z^2}{i-z}$ donc $|z'| = \dfrac{|z^2|}{|i-z|}$ donc $|z'| = \dfrac{|z|^2}{|z-i|}$ donc $OM' = \dfrac{OM^2}{JM}$. D'où $OM' = \dfrac{OM^2}{JM}$.

- **Déduisons-en l'ensemble (F) :**

Soit M un point du plan.

$M \in (F) \Leftrightarrow OM = OM' \Leftrightarrow OM = \dfrac{OM^2}{JM} \Leftrightarrow OM^2 = JM \times OM \Leftrightarrow OM = JM$ ou $OM = 0$.

Ce qui équivaut à dire que M appartient à la médiatrice de [OJ] ou M = O.

D'où (F) est la réunion de la médiatrice de [OJ] et le singleton {O} .

4) Calculons z_G l'affixe de G en fonction de z.

M appartient au cercle de centre J et de rayon $\dfrac{1}{2}$ donc $JM = \dfrac{1}{2}$.

G est le barycentre du système {(J , 1) , (M , 1) , (M' , 1)}. Donc

$z_G = \dfrac{z_J+z_M+z_{M'}}{3} = \dfrac{i+z+z'}{3} = \dfrac{i+z+\dfrac{z^2}{i-z}}{3}$. Donc $z_G = \dfrac{-1}{3(i-z)}$

Montrons que G est sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

On a : $OG=|z_G|=\dfrac{1}{|3(i-z)|}=\dfrac{1}{3|i-z|}=\dfrac{1}{\frac{3}{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{3}$.

Puisque $OG=\dfrac{2}{3}$, alors G est sur le cercle de centre O et de rayon $R=\dfrac{2}{3}$.

Comparons $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OG}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{JM}})$:

On a $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OG}})=\arg z_G+k2\pi$ et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{JM}})=\arg(z-i)+k2\pi$.

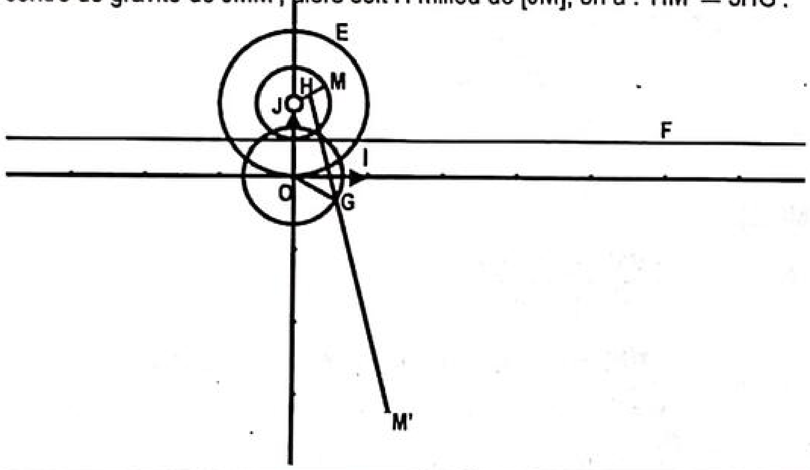
Or $\arg z_G=\arg\left(\dfrac{1}{3(z-i)}\right)+k2\pi=-\arg(3(z-i))+k2\pi=-\arg 3-\arg(z-i)+k2\pi=-\arg(z-i)+k2\pi$.

D'où $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OG}})=-\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{JM}})+k2\pi$, donc $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OG}})=-(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{JM}})$.

Construction de M' connaissant M :

Notons que G est situé sur le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{2}{3}$, et que $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OG}})=-(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{JM}})$.

Comme G est le centre de gravité de JMM', alors soit H milieu de [JM], on a : $\overrightarrow{HM'}=3\overrightarrow{HG}$.



Solution 93

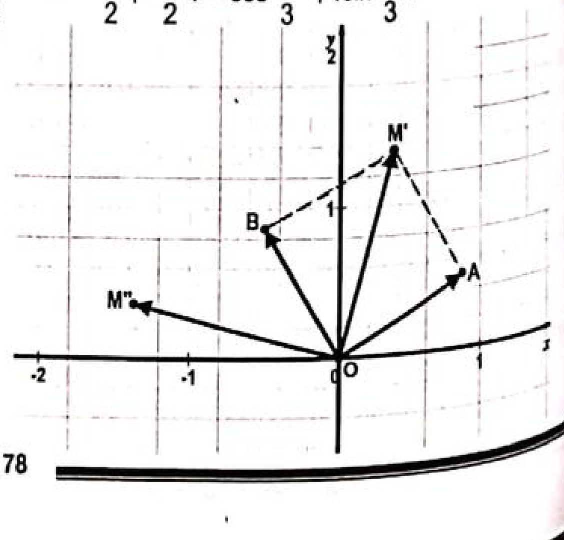
1) L'équation (E) a pour discrminant : $\Delta=(1-i\sqrt{3})^2+4(1+i\sqrt{3})=2+2i\sqrt{3}=i^2(1-i\sqrt{3})^2=(\sqrt{3}+i)^2$.

Donc les racines de l'équation (E) sont : $z'=\dfrac{(-1+i\sqrt{3})+(\sqrt{3}+i)}{2}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=a+b$

et $z''=\dfrac{(-1+i\sqrt{3})-(\sqrt{3}+i)}{2}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=b-a$.

2)a) $a=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$ et $b=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

b) On remarque que : z' = a + b, donc $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ et
z'' = b – a, donc $\overrightarrow{OM''}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.
D'où la construction de M' et M''.



3) • z' = a + b et z'' = b – a. Donc

$$z'=e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}=e^{i\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}}{2}}+e^{-i\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}}{2}}\right)=e^{i\frac{5\pi}{12}}(e^{-i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{4}})=e^{i\frac{5\pi}{12}}2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})$$

et $$z''=e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{6}}=e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}{2}}-e^{-i\frac{\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}{2}}\right)=e^{i\frac{5\pi}{12}}(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}})=e^{i\frac{5\pi}{12}}2i\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}e^{i\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}.$$

D'où $z''=\sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12})$ et $z'=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})$.

On remarque que, $z''=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Mais aussi, $z''=\sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{12}+i\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{12}$.

Donc $\sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{12}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Finalement, $\cos\frac{11\pi}{12}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Solution 94

1) Soit M un point de $P-\{a\}$, d'affixe z.

$$f(M)=M \Leftrightarrow \frac{z-a}{z-1}=z \Leftrightarrow z^2-z=z-a \Leftrightarrow z^2-2z+a=0.$$

Ainsi, les points invariants par f sont les solutions de l'équation (E): $z^2-2z+a=0$.

2)a) L'équation (E) est alors : $z^2-2z+1+e^{i2\theta}=0$.

Son discriminant est $\Delta=4-4(1+e^{i2\theta})=-4e^{i2\theta}=(2ie^{i\theta})^2$.

Ainsi, les solutions de (E) sont : $z_1=\frac{2-2ie^{i\theta}}{2}=1-ie^{i\theta}$ et $z_2=\frac{2+2ie^{i\theta}}{2}=1+ie^{i\theta}$.

b) • $z_1=1-ie^{i\theta}=e^{i0}-e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta}=e^{i0}-e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}-e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right)=-e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\times 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$.

Comme $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, alors $\frac{\theta}{2}\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$, donc $\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. $-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ est un réel strictement négatif.

Donc, $z_1=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}e^{-i\frac{\pi}{2}}\times 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\times 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$.

Ainsi, une forme trigonométrique de z_1 est : $z_1=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right)$.

• $z_2=1+ie^{i\theta}=e^{i0}+e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta}=e^{i0}+e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right)=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\times 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$.

Comme $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, alors $\frac{\theta}{2}\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$, donc $\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ est un réel strictement négatif.

Donc, $z_2=-e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\pi}\times 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=-e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\times 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

Ainsi, une forme trigonométrique de z_2 est : $z_2=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right)$.

3)a) • Soit M d'affixe z différente de 1, et M' son image par f. On a :

$$\mathrm{mes}(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})+\mathrm{mes}(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}})=\arg(z-1)+\arg(z'-1)=\arg(z-1)+\arg\left(\frac{z+1}{z-1}-1\right)=\arg(z-1)+\arg\frac{2}{z-1}$$
$$=\arg\frac{2(z-1)}{z-1}$$
$$=\arg 2$$

Comme on a $\arg 2 \equiv 0\ [2\pi]$, alors on en déduit qu'on a aussi $\mathrm{mes}(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})+\mathrm{mes}(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}})\equiv 0[2\pi]$.

- Comme $\mathrm{mes}(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})+\mathrm{mes}(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}})\equiv 0[2\pi]$, alors $\mathrm{mes}(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})\equiv -\mathrm{mes}(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}})[2\pi]$.

Ainsi, la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$, c'est-à-dire la doite (AB) est une bissectrice de l'angle $\widehat{MBM'}$.

b) Soit M d'affixe z différent de 1 et M' d'affixe z', son image par f.

z' imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z'}=-z' \Leftrightarrow \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}=-\frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow -\overline{z}z-z+\overline{z}+1=\overline{z}z-z+\overline{z}-1 \Leftrightarrow 2\overline{z}z=2$

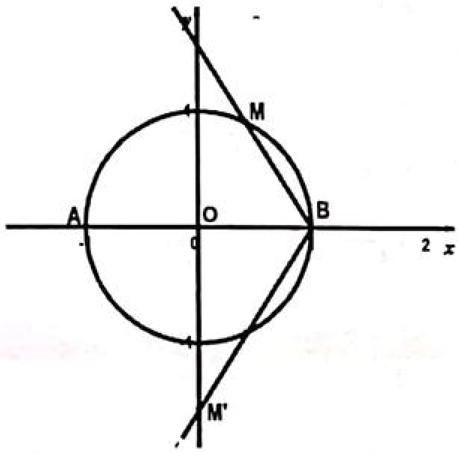
$$\Leftrightarrow |z|^2=1$$
$$\Leftrightarrow |z|=1$$

Ainsi, z' est imaginaire pur si et seulement si, $|z|=1$.

c) Soit M un point d'affixe z différent de 1 et M' son image par f.

D'après la question 3)b), comme M appartient au cercle trigonométrique (c'est-à-dire $|z|=1$), alors M' est sur l'axe des ordonnées (z' est un imaginaire pur).

Mais aussi, les droites (BM) et (BM') sont symétriques par rapport à la droite (AB).



11 ISOMETRIES DU PLAN

RAPPEL DU COURS

Dans ce cours, le plan est noté P.

A. Translation - symétrie centrale - rotation - réflexion

A_1 – Translation

a) Définition :

La translation t du plan P, de vecteur $\vec{u}$, est l'application de P vers P qui à tout point M du plan, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. On la note $t_{\vec{u}}$.

b) Expression analytique d'une translation :

Une application de P vers P est une translation si et seulement si son expression analytique est sous la forme : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$. Le vecteur de cette translation est $\vec{u}$ de coordonnées (a , b).

c) Expression complexe d'une translation :

Une application du plan complexe P vers P est une translation si et seulement si son expression complexe est sous la forme : z' = z + b. Le vecteur de cette translation est $\vec{u}$ d'affixe b.

d) Propriétés :

- La translation qui transforme un point A en un point B, a pour vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Si une translation transforme un point A en un point B et un point C en un point D alors ABDC est un parallélogramme.
- La translation de vecteur nul est l'application identique du plan P. $t_{\vec{0}} = Id_P$.
- La translation de vecteur non nul ne laisse aucun point du plan invariant.
  Par contre, la translation de vecteur nul laisse chaque point du plan invariant.
- La translation de vecteur $\vec{u}$ est une bijection du plan et sa réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.
- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.
- La translation transforme une droite en une droite qui lui est parallèle.

A_2 – Symétrie centrale

a) Définition :

La symétrie centrale ou demi-tour du plan P, de centre le point Ω, est l'application de P vers P qui à tout point M du plan, associe le point M' du plan tel que, Ω est le milieu du segment [MM']. On la note s_Ω.

b) Expression analytique d'une symétrie centrale :

Une application de P vers P est une symétrie centrale si et seulement si son expression analytique est sous la forme : $\begin{cases} x' = -x + a \\ y' = -y + b \end{cases}$. Le centre de cette symétrie centrale est Ω de coordonnées $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

c) Expression complexe d'une symétrie :

Une application du plan complexe P vers P est une symétrie centrale si et seulement si son expression complexe est sous la forme : z' = -z + b.

d) Propriétés :

- La symétrie centrale qui transforme un point A en un point B, a pour centre le milieu Ω du segment [AB].
- Si une symétrie centrale transforme un point A en un point B et un point C en un point D, alors ACBD est un parallélogramme. Le centre de la symétrie centrale est alors le centre du parallélogramme ACBD
- La symétrie centrale laisse un seul point invariant : c'est son centre.
- Toute symétrie centrale s_Ω est une bijection du plan et sa réciproque est s_Ω.
- Soit Ω et Ω' deux points, on a : $s_\Omega \circ s_\Omega = Id_P$ et $s_{\Omega'} \circ s_\Omega = t_{2\overrightarrow{\Omega\Omega'}}$.

A_3 – Rotation

a) Définition :

Soit Ω un point du plan et α un nombre réel.
La rotation du plan P de centre Ω, d'angle α est l'application de P vers P, qui transforme tout point M différent Ω en un point M', tels que : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$ et Ω en Ω. On la notera $r_{(\Omega,\alpha)}$.

b) Expression complexe d'une rotation :

Une application du plan complexe P vers P est une rotation si et seulement si son expression complexe est sous la forme : z' = az + b, avec $|a| = 1$. L'angle de cette rotation a alors pour mesure arg(a).

c) Propriétés :

- Si la rotation r du plan de centre Ω et d'angle α transforme un point A en un point B, alors :
  - ΩAB est un triangle isocèle de sommet principal Ω.
  - Ω est situé sur la médiatrice du segment [AB].
  - B est situé sur le cercle de centre Ω et de rayon ΩA.
  - Ω est le seul point invariant par r lorsque son angle est non nul.
- Si une rotation d'angle α transforme un point A en un point B et un point C en un point D, alors : AC = BD et $mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}}) \equiv \alpha[2\pi]$
- La rotation de centre Ω d'angle π est la symétrie centrale de centre Ω.
- ABC est un triangle isocèle rectangle direct (resp. indirect) de sommet A si et seulement si C est l'image de B par le quart de tour direct (resp. indirect) de centre A.

Rappelons qu'un quart de tour direct (resp. indirect) est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (resp. $-\frac{\pi}{2}$).

- L'image d'une droite par un quart de tour (direct ou indirect) est une droite qui lui est perpendiculaire.
- ABC est un triangle équilatéral direct (resp. indirect) si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ (resp. $-\frac{\pi}{3}$).
- La rotation de centre Ω et d'angle α est une bijection et sa réciproque est la rotation de centre Ω d'angle −α.
- Soit r et r' les rotations de centre Ω et d'angles respectifs α et α'.
  - ✓ Si α + α' ≡ 0[2π], alors $r \circ r' = Id_P$.
  - ✓ Si α + α' ≠ k2π (k étant un entier relatif), alors $r \circ r'$ est la rotation de centre Ω et d'angle α + α'.

  De façon générale, soit r et r' les rotations de centres respectifs Ω et Ω' et d'angles respectifs α et α'.
  - ✓ Si α + α' ≡ 0[2π], alors $r \circ r'$ est une translation.
  - ✓ Si α + α' ≠ k2π (k étant un entier relatif), alors $r \circ r'$ est une rotation d'angle α + α'.

A_4 – Réflexion

a) Définition :

La réflexion ou symétrie orthogonale s du plan P, d'axe la droite Δ, est l'application de P vers P qui à tout point M du plan, associe le point M' du plan tel que, Δ est la médiatrice du segment [MM']. On la note s_Δ.

b) Propriétés :

- La réflexion qui transforme un point A en un point B (avec $A \neq B$), a pour axe la médiatrice Δ du segment [AB].
- Si une réflexion transforme un point A en un point B et un point C en un point D, alors $AC = BD$.
- L'ensemble des points invariants par une réflexion est une droite Δ, et cette droite Δ est l'axe de cette réflexion.
- Toute réflexion s_Δ est une bijection du plan et sa réciproque est s_Δ.
- Soit Δ et Δ' deux droites, on a :
  - $s_\Delta \circ s_\Delta = Id_P$
  - Si Δ et Δ' sont parallèles, alors $s_{\Delta'} \circ s_\Delta = t_{2\overrightarrow{\Omega\Omega'}}$; où Ω est un point de Δ et Ω' son projeté orthogonale sur Δ'.
  - Si Δ et Δ' sont sécantes en A, alors $s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ est lá rotation de centre A et d'angle $2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$; où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de Δ et Δ'.

A_5 – Décomposition d'une translation ou d'une rotation en réflexions

a) Décomposition d'une translation en réflexions :

Toute translation $t_{\vec{u}}$ peut se décomposer, d'une infinité de façons, en deux réflexions de droites parallèles Δ et Δ'.

Pour décomposer cette translation $t_{\vec{u}}$:

- On choisit une droite Δ admettant le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur normal.
- Pour avoir $t_{\vec{u}} = s_{\Delta'} \circ s_\Delta$, on prend la droite Δ' obtenue par translation de la droite Δ suivant le vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

  Pour avoir $t_{\vec{u}} = s_\Delta \circ s_{\Delta'}$, on prend la droite Δ' obtenue par translation de la droite Δ suivant le vecteur $-\frac{1}{2}\vec{u}$.

b) Décomposition d'une rotation en réflexions :

Toute rotation $r_{(\Omega,\alpha)}$ peut se décomposer, d'une infinité de façons, en deux réflexions de droites sécantes Δ et Δ' en Ω.

Pour décomposer cette rotation $r_{(\Omega,\alpha)}$:

- On choisit une droite Δ passant par le point Ω.
- Pour avoir $r_{(\Omega,\alpha)} = s_{\Delta'} \circ s_\Delta$, on prend la droite Δ' obtenue par rotation de la droite Δ autour de Ω suivant un angle de mesure $\frac{1}{2}\alpha$.

  Pour avoir $r_{(\Omega,\alpha)} = s_\Delta \circ s_{\Delta'}$, on prend la droite Δ' obtenue par rotation de la droite Δ autour du point Ω suivant un angle de mesure $-\frac{1}{2}\alpha$.

A_6 – Autres composées

a) Composée d'une rotation et d'une translation :

La composée d'une rotation de centre Ω et d'angle α et d'une translation quelconque est une rotation d'angle α.

b) Composée d'une réflexion et d'une translation :

Théorème et définition :

Soit (Δ) une droite et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ). On a :

- $s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}$.
- Cette composée ne laisse aucun point invariant.

Cette composée est appelée une symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{u}$.

NB : *Dans ce qui précède, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Δ).*

Remarque :

Soit f une symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{u}$.

- $f \circ f = (t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}) \circ (s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}) = t_{2\vec{u}}$.

- ***$t_{-\vec{u}} \circ f = f \circ t_{-\vec{u}} = s_{(\Delta)}$ est la réflexion d'axe, l'axe de la symétrie glissée.***

Cette remarque permet de déterminer les éléments caractéristiques d'une symétrie glissée.

Théorème :

Soit (Δ) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

- Si $\vec{u}$ est un vecteur normal à (Δ), alors $s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}$ sont des réflexions.
- Si $\vec{u}$ n'est pas un vecteur normal à (Δ), alors $s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}$ sont des symétries glissées.

Remarque :

Soit (Δ) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul, non normale et non directeur de (Δ).

Le vecteur $\vec{u}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, où $\vec{u}_1$ un vecteur directeur et $\vec{u}_2$ un vecteur normal de (Δ).

- ***On peut trouver une droite (D) telle que $t_{\vec{u}_2} = s_{(D)} \circ s_{(\Delta)}$. Rappelons que (D) et (Δ) sont parallèles.***

Ainsi, $t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)} = t_{\vec{u}_1} \circ t_{\vec{u}_2} \circ s_{(\Delta)} = t_{\vec{u}_1} \circ s_{(D)} \circ s_{(\Delta)} \circ s_{(\Delta)} = t_{\vec{u}_1} \circ s_{(D)}$.

Comme $\vec{u}_1$ un vecteur directeur de (D), alors $t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}$ est la symétrie glissée d'axe (D) et de vecteur $\vec{u}_1$.

- ***On peut trouver une droite (D') telle que $t_{\vec{u}_2} = s_{(\Delta)} \circ s_{(D')}$. Rappelons que (D') et (Δ) sont parallèles.***

Ainsi, $s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}} = s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}_2} \circ t_{\vec{u}_1} = s_{(\Delta)} \circ s_{(\Delta)} \circ s_{(D')} \circ t_{\vec{u}_1} = s_{(D')} \circ t_{\vec{u}_1}$.

Comme $\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de (D'), alors $s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ est la symétrie glissée d'axe (D') et de vecteur $\vec{u}_1$.

Cette remarque permet de déterminer les éléments caractéristiques d'une symétrie glissée.

B. Les isométries du plan

B_1 – Définition, exemples, propriétés

a) Définition :

Une isométrie du plan est une application de P vers P, qui conserve les distances.
En d'autres termes : s est une isométrie de P lorsque, pour tous points M et N du plan P, d'images respectives M' et N' par s, on a : M'N' = MN.

b) Propriétés :

- Toute isométrie est une bijection et sa réciproque est aussi une isométrie.
- La composée de deux isométries est une isométrie.

c) Les différentes isométries du plan :

La translation, la rotation, la réflexion et la symétrie glissée du plan sont les seules isométries du plan.

Remarque :

- ***Une isométrie qui ne laisse aucun point invariant est soit une translation de vecteur non nul, soit une symétrie glissée.***
- ***Une isométrie qui laisse un seul point A invariant est une rotation de centre A.***
- ***Une isométrie dont l'ensemble des points invariants est une droite (D) est une réflexion d'axe (D).***
- ***L'isométrie qui laisse tous les points du plan invariants est l'application identique.***

d) Effets d'une isométrie sur une configuration géométrique plane :

Toute isométrie du plan conserve : le barycentre, les milieux des segments, l'alignement des points, les formes et dimensions des figures, le parallélisme, l'orthogonalité, les écarts angulaires, les distances, les aires, le contact, le produit scalaire ...
Toute isométrie s transforme : une droite en une droite, le cercle de centre A et de rayon R en le cercle de centre s(A) et de rayon R.

B_2 – Déplacements et antidéplacements

a) Définition :

Les isométries conservent les écarts angulaires, mais elles peuvent conserver le sens des angles orientés (on dit que ce sont des déplacements) ou alors inverser le sens des angles orientés (on dit que ce sont des antidéplacements).

- Comme déplacements, on a : la translation, la rotation et l'application identique.
- Comme antidéplacements, on a : la réflexion et la symétrie glissée.

b) Composée de déplacements et d'antidéplacements :

La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements donne un déplacement.
La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

B_3 – Détermination d'une isométrie

a) Théorème 1 :

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que A'B' = AB et $A \neq B$.
Il existe un déplacement f et un seul tel que f(A) = A' et f(B) = B'.

- Si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
- Si $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$, alors f est une rotation d'angle $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})}$.

b) Théorème 2 :

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que A'B' = AB et $A \neq B$.
Il existe un antidéplacement f et un seul tel que f(A) = A' et f(B) = B'.

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Décomposer une isométrie

1 – Décomposer une translation en deux réflexions

Exercice 1

ABCD est un rectangle.

Déterminer la droite Δ telle que : a) $t_{\overrightarrow{AB}} = s_\Delta \circ s_{(AD)}$ b) $t_{\overrightarrow{AB}} = s_{(BC)} \circ s_\Delta$.

Solution 1

a) Pour $t_{\overrightarrow{AB}} = s_\Delta \circ s_{(AD)}$, Δ est l'image de (AD) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, qui est la médiatrice du segment [AB]. Donc Δ est la médiatrice de [AB].

b) Pour $t_{\overrightarrow{AB}} = s_{(BC)} \circ s_\Delta$, Δ est l'image de (BC) par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, qui est la médiatrice de [AB]. Donc Δ est la médiatrice de [AB].

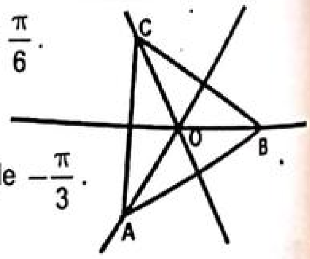
2 – Décomposer une rotation en deux réflexions

Exercice 2

ABC est un triangle équilatéral direct, de centre O.

Déterminer la droite Δ, telle que : a) $r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} = s_\Delta \circ s_{(AB)}$ b) $r_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)} = s_{(OA)} \circ s_\Delta$.

Solution 2



a) Pour $r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} = s_\Delta \circ s_{(AB)}$, Δ est l'image de (AB) par la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Or cette image est la droite (AO). Donc Δ est la droite (OA).

b) Pour $r_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)} = s_{(OA)} \circ s_\Delta$, Δ est l'image de (OA) par la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Or cette image est la droite (BO). Donc Δ est la droite (BO).

B. Composer les isométries

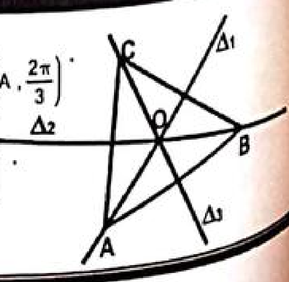
1 – Composer deux réflexions

Exercice 3

ABC est un triangle équilatéral direct, de centre O, Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les médiatrices respectives de [BC], [CA] et [AB].

Déterminer les transformations suivantes : a) $s_{(AC)} \circ s_{(AB)}$ b) $s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_2}$

Solution 3



a) (AC) et (AB) sont sécantes en A et $2mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$, donc $s_{(AC)} \circ s_{(AB)} = r_{\left(A,\frac{2\pi}{3}\right)}$.

b) Δ_2 et Δ_3 sont sécantes en O, et $2mes(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$, donc $s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_2} = r_{\left(O,\frac{4\pi}{3}\right)}$.

2 – Composer une translation et une rotation

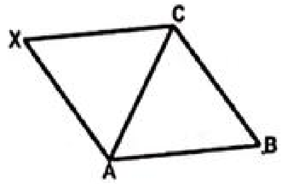
Exercice 4

ABC est un triangle équilatéral direct.

Déterminer les transformations suivantes : a) $r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$ b) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}$.

Solution 4

a) La composée d'une rotation d'angle α et d'une translation est une rotation d'angle α.



D'où $r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$ est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Or $r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}(A) = r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(B) = C$, alors :

soit X le centre de $r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$, le triangle XAC est un triangle équilatéral de sens direct.

Alors X est le symétrique de B par rapport à la droite (AC).

b) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}$ est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ car composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Or $t_{\overrightarrow{AB}} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(A) = t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$, alors soit Y le centre de $t_{\overrightarrow{AB}} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}$, YAB est un triangle équilatéral de sens direct. D'où Y = C.

3 – Composer deux rotations

Exercice 5

ABC est un triangle équilatéral direct, de centre O.

Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont les médiatrices respectives de [BC], [CA] et [AB].

Déterminer les transformations suivantes :

a) $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}$;

b) $r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}$;

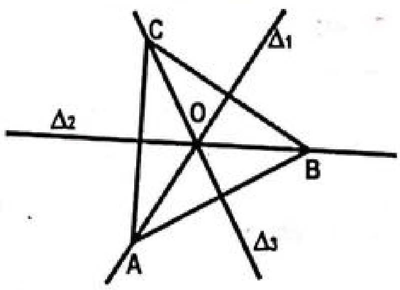
c) $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A;-\frac{\pi}{3}\right)}$;

d) $r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}$.

Solution 5

a) $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$. Puisque $\dfrac{2\pi}{3}$ n'est pas sous la forme $k2\pi$, avec k entier, $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}$ est une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$

Or en décomposant $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}$ et $r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}$ en réflexions, on a :



$r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} = s_{\Delta_2} \circ s_{(BC)}$ et $r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)} = s_{(BC)} \circ s_{\Delta_3}$.

D'où $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)} = (s_{\Delta_2} \circ s_{(BC)}) \circ (s_{(BC)} \circ s_{\Delta_3}) = s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_3}$.

Le centre de $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}$ est le point O, intersection de Δ_2 et Δ_3. $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}$ est donc la rotation de centre O, d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Autre méthode :

Pour déterminer le centre de $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}$, on peut déterminer les images de deux points distincts.

On a par exemple : $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}(C) = r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}(C) = A$ et $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}(A) = r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}(B) = B$.

Le centre de $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}$ est donc le point de rencontre des médiatrices des segments [AC] et [AB], qui est O.

b) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\pi$, d'où $r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}$ est une rotation d'angle π. C'est-à-dire une symétrie centrale.

Or $r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}(B) = r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}(C) = C$, donc le centre de $r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}$ est le milieu de [BC].

Autre méthode :

On pouvait écrire : $r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)} = \left(s_{(BC)} \circ s_{(OC)}\right) \circ \left(s_{(OC)} \circ s_{\Delta_1}\right) = s_{(BC)} \circ s_{\Delta_1}$.

Le centre de $s_{(BC)} \circ s_{\Delta_1}$ serait alors le point d'intersection de (BC) et Δ_1, qui est le milieu de [BC].

c) $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=0$. D'où $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A;-\frac{\pi}{3}\right)}$ est donc une translation.

Or $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A;-\frac{\pi}{3}\right)}(C) = r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}(B) = B$, alors le vecteur de la translation est le vecteur $\overrightarrow{CB}$.

Autre méthode :

On pouvait aussi procéder comme suit : soit Δ la droite passant par B perpendiculaire à (BC), on a

$r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A;-\frac{\pi}{3}\right)} = \left(s_{(\Delta)} \circ s_{(AB)}\right) \circ \left(s_{(AB)} \circ s_{\Delta_1}\right) = s_{(\Delta)} \circ s_{\Delta_1} = t_{\overrightarrow{CB}}$.

d) $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$. D'où $r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}$ est une rotation d'angle π ; c'est-à-dire une symétrie centrale.

Or $r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}(C) = r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}(C) = r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(A) = A$.

D'où $r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}$ est la symétrie centrale de centre le milieu du segment [AC].

Exercice 6

ABC est un triangle.

On pose : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \hat{\alpha}$, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \hat{\beta}$, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \hat{\gamma}$ et $f = r_{(C\,;\,\gamma)} \circ r_{(B\,;\,\beta)} \circ r_{(A\,;\,\alpha)}$.

1) Montrer que f est une symétrie centrale.
2) Soit P le point de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC avec [AC].
   Déterminer f(P) et déduire la nature exacte de f.

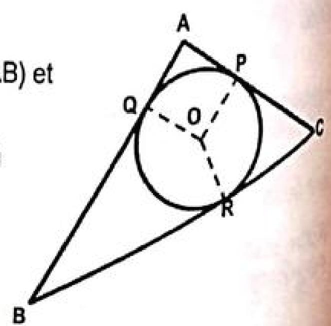
Solution 6

1) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}) = \hat{\pi}$.

f étant la composée de trois rotations, f est une rotation d'angle $\hat{\pi}$.
D'où f est une symétrie centrale.

2) • Posons $P_1 = r_{(A\,;\,\alpha)}(P)$; $P_2 = r_{(B\,;\,\beta)}(P_1)$; $P_3 = r_{(C\,;\,\gamma)}(P_2)$.

Q et R les points de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC avec les droites (AB) et (BC) respectivement. On a : $P_1 = r_{(A\,;\,\alpha)}(P)$.



D'où P_1 appartient à (AB) et (AO) est médiatrice de $[PP_1]$, c'est-à-dire P_1 appartient à (AB) et $OP_1 = OP$. D'où P_1 appartient à (AB) et P_1 appartient au cercle inscrit au triangle ABC. D'où $P_1 = Q$.

On montre de même que $P_2 = R$ et $P_3 = P$. D'où f(P) = P.

- D'où f est la symétrie centrale de centre de P.

Exercice 7

ABC est un triangle rectangle et isocèle, tel que $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Notons I le milieu de [BC], r_B la rotation de centre B d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_C la rotation de centre C d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et $f = r_C o t o r_B$.

1) Déterminer la nature de f.
2) Quelle est l'image de B par f ?
3) Caractériser f.

Solution 7

1) $t o r_B$ et r_C sont des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Or $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$, alors $f = r_C o t o r_B$ est une rotation d'angle π, donc une symétrie centrale.

2) $f(B) = r_C o t o r_B(B) = r_C o t(B) = r_C(C) = C$. D'où $f(B) = C$.

3) f est la symétrie centrale de centre le milieu I de [BC].

Exercice 8

Dans le plan orienté, on considère les quatre points A, B, C, D tels que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

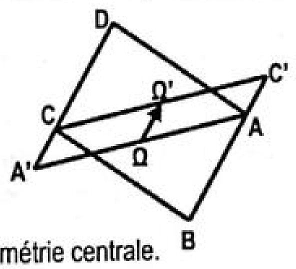
R_1 est la rotation de centre A, d'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$; r_2 est la rotation de centre B, d'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

R_3 est la rotation de centre C, d'angle $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$ et r_4 est la rotation de centre D, d'angle $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.

On pose $f = r_4 o r_3 o r_2 o r_1$.

1)a) Construire l'image de A par $r_2 o r_1$.
 b) Caractériser $r_2 o r_1$.
2) Caractériser $r_4 o r_3$, puis f.
3) Pour quel quadrilatère ABCD, f est-elle l'application identique du plan ?

Solution 8



1)a) On a $r_2 o r_1(A) = r_2(A) = A'$. Donc $BA = BA'$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

D'où A' est le point de la demi-droite [BC) tel que BA = BA'.

b) Puisque : $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB}) = \hat{\pi}$,

alors $r_2 o r_1$ est une symétrie centrale.

Or $r_2 o r_1(A) = A'$, alors $r_2 o r_1$ est la symétrie centrale de centre Ω, le milieu du segment [AA'].

2) • $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}) = \hat{\pi}$. D'où $r_4 o r_3$ est une symétrie centrale.

Or $r_4 o r_3(C) = r_4(C) = C'$, où, C' est le point de la demi-droite [DA) tel que DC = DC'.

Donc $r_4 o r_3$ est la symétrie centrale de centre Ω', le milieu de [CC'].

• $f = (r_4 o r_3) o (r_2 o r_1)$. Or $r_4 o r_3$ et $r_2 o r_1$ sont des symétries centrales de centres respectifs Ω et Ω', alors f est une translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

3) Notons $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, alors ABCD est un parallélogramme.

$f = t_{\vec{0}}$ si et seulement si, $2\overrightarrow{\Omega\Omega'}=\vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{\Omega\Omega'}=\vec{0}$. Comme Ω et Ω' sont milieux respectifs [AA'] et [CC'], alors $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{\Omega\Omega'}=\vec{0}$. D'où A = C' et C = A'. Donc, AB = BC = CD = DA, donc ABCD est un losange.

4 – Composer une translation et une réflexion

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

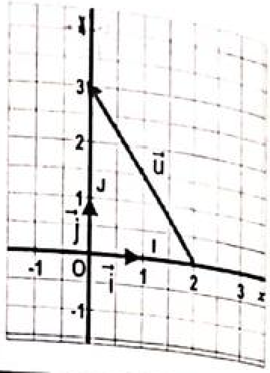
On considère le vecteur $\vec{u}(-2\,,3)$.

1) Préciser la nature de $f = s_{(O;\vec{i})} \circ t_{\vec{u}}$ et $g = s_{(O;\vec{i})} \circ t_{\vec{j}}$.

2) Caractériser g.

3) Préciser les expressions analytiques de $t_{\vec{u}}$, $s_{(O;\vec{i})}$, f et fof.

4) Déterminer de deux façons les éléments caractéristiques de f.



Solution 9

1) • $\vec{u}\cdot\vec{i} = -2\times1+3\times0 = -2 \neq 0$. D'où $\vec{u}$ n'est pas normal à $(O\,;\vec{i})$. Par conséquent, f est une symétrie glissée.

• Puisque $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, alors g est une réflexion.

2) Puisque $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, alors il existe une droite (D) telle que $t_{\vec{j}} = s_{(O;\vec{i})} \circ s_{(D)}$.

En effet, (D) est le translaté de $(O\,;\vec{i})$ de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{j}$. Donc (D) est la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

Par conséquent, $g = s_{(O;\vec{i})} \circ s_{(O;\vec{i})} \circ s_{(D)} = s_{(D)}$. g est donc la réflexion d'axe (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

3) • $t_{\vec{u}}$ est l'application du plan qui à tout point M(x , y) associe le point M'(x' , y'), où , $\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y+3 \end{cases}$.

• $s_{(O;\vec{i})}$ est l'application du plan qui à tout point M(x , y), associe le point M'(x' , y'), où , $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$.

• Soit M(x , y) un point du plan, $M_1(x_1\,,y_1)$ son image par $t_{\vec{u}}$ et M'(x' , y') l'image de M_1 par $s_{(O;\vec{i})}$.

On a $\begin{cases} x_1 = x-2 \\ y_1 = y+3 \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = x_1 = x-2 \\ y' = -y_1 = -y-3 \end{cases}$. L'image de M(x , y) par f est M'(x' , y'), où, $\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = -y-3 \end{cases}$.

• Soit M(x , y) un point du plan, $M_1(x_1\,,y_1)$ son image par f et M'(x' , y') l'image de M_1 par f.

On a $\begin{cases} x_1 = x-2 \\ y_1 = -y-3 \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = x_1-2 = x-4 \\ y' = -y_1-3 = y \end{cases}$. D'où l'image de M(x , y) par fof est M'(x' , y'), où, $\begin{cases} x' = x-4 \\ y' = y \end{cases}$.

4) Eléments caractéristiques de f :

Soit Δ l'axe de f et $\vec{v}$ son vecteur, $\vec{v}$ est vecteur directeur de Δ et on a : $f = s_{\Delta} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ s_{\Delta}$.

Méthode 1

On a : $f = s_{(O;\vec{i})} \circ t_{\vec{u}} = s_{(O;\vec{i})} \circ t_{3\vec{j}-2\vec{i}} = s_{(O;\vec{i})} \circ t_{3\vec{j}} \circ t_{-2\vec{i}} = s_{(O;\vec{i})} \circ s_{(O;\vec{i})} \circ s_{(\Delta)} \circ t_{-2\vec{i}}$, où Δ est la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}$. D'où, $f = s_{(\Delta)} \circ t_{-2\vec{i}}$.

$-2\vec{i}$ étant un vecteur directeur de Δ, f est la symétrie glissée de vecteur $-2\vec{i}$, d'axe Δ, d'équation $y = -\frac{3}{2}$.

Méthode 2

$f \circ f = t_{\vec{v}} \circ s_{\Delta} \circ s_{\Delta} \circ t_{\vec{v}} = t_{2\vec{v}}$.

Et d'après l'expression analytique de f trouvée à la question 3), fof est la translation de vecteur $-4\vec{i}$.

D'où $2\vec{v} = -4\vec{i}$ et donc $\vec{v} = -2\vec{i}$.

Comme $f = s_{(\Delta)} \circ t_{-2\vec{i}}$ alors $s_{(\Delta)} = f \circ t_{2\vec{i}}$. f et $t_{2\vec{i}}$ étant des isométries, $f \circ t_{2\vec{i}}$ est une isométrie.

Déterminons l'expression analytique de $f \circ t_{2\vec{i}}$:

Soit M(x , y) un point du plan, $M_1(x_1\,,y_1)$ son image par $t_{2\vec{i}}$ et M'(x' , y') l'image de M_1 par f.

On a : $\begin{cases} x_1 = x+2 \\ y_1 = y \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = x_1 - 2 = x \\ y' = -y_1 - 3 = -y - 3 \end{cases}$. L'image de M(x , y) par $f \circ t_{2\vec{i}}$ est M'(x' , y'), où, $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y - 3 \end{cases}$.

Déterminons l'ensemble des points invariants par $f \circ t_{2\vec{i}}$.

Soit M(x , y) un point du plan. F(M) = M équivaut à $\begin{cases} x = x \\ y = -y - 3 \end{cases}$, c'est-à-dire $y = -\frac{3}{2}$.

D'où l'ensemble des points invariants par $f \circ t_{2\vec{i}}$ est la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}$.

$f \circ t_{2\vec{i}}$ est donc la réflexion d'axe Δ d'équation $y = -\frac{3}{2}$.

Et donc, f est la symétrie glissée de vecteur $\vec{v} = -2\vec{i}$ et d'axe la droite Δ : $y = -\frac{3}{2}$.

C. Définir une isométrie

1 – Définir une isométrie par deux points distincts et leurs images

Exercice 10

ABCD est un trapèze isocèle tel que (AB) est parallèle à (CD) et (AD) non parallèle à (BC).
Montrer qu'il existe une rotation r et une seule telle que : r(A) = B et r(D) = C.
Préciser le centre et l'angle de cette rotation.

Solution 10

Le trapèze étant isocèle de base [AB] et [CD], alors AD = BC.
Donc il existe un unique déplacement qui transforme A en B et D en C.

Comme on a : $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$, alors ce déplacement n'est pas une translation. Par conséquent, c'est une rotation.
D'où il existe une rotation r et une seule telle que : r(A) = B et r(D) = C.

L'angle de cette rotation est $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})$. Son centre est le point de rencontre des droites (AD) et (BC).

Exercice 11

On donne deux points distincts A et B et une rotation r d'angle α (α ≠ kπ, k étant un entier relatif).
On pose r(A) = C et r(B) = D.
Montrer qu'il existe un seul déplacement d tel que : d(A) = D et d(B) = C. Définir d.

Solution 11

- Puisque r(A) = C et r(B) = D, alors AB = DC.

Il existe donc un unique déplacement d qui transforme A en D et B en C.

- L'angle de r est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Comme on a α ≠ kπ, k étant un entier, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont non colinéaires ; donc on a $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$.

Donc d n'est pas une translation, mais la rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + \hat{\pi}$, dont une mesure est α + π, et de centre le point de rencontre des médiatrices des segments [AD] et [BC].

Exercice 12

Dans un plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu de [AC] et par K le milieu de [AB].
a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que φ(B) = A et φ(A) = C.
b) Montrer que φ est une symétrie glissée dont on déterminera l'axe et le vecteur.
c) Soit D le symétrique de B par rapport à I. Montrer que φ(C) = A.

Solution 12

a) On a BA = AC et A ≠ B, d'où il existe un unique antidéplacement φ tel que φ(B) = A et φ(A) = C.

b) • Supposons que φ est une réflexion d'axe une droite Δ ; alors puisque φ(B) = A et φ(A) = C, Δ est la médiatrice de [BA] et de [AC], et donc les droites (AB) et (AC) sont parallèles, car perpendiculaires à une même droite.
Ce qui est faux car d'après l'énoncé, ABC est un triangle, donc (AB) et (AC) ne peuvent être parallèles.
D'où φ n'est pas une réflexion, mais une symétrie glissée.

- φoφ(B) = φ(A) = C, donc φoφ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. D'où le vecteur de φ est $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KI}$.

$t_{\overrightarrow{IK}} \circ \varphi$ est une réflexion, dont l'axe est celui de φ. Or $t_{\overrightarrow{IK}} \circ \varphi(A) = t_{\overrightarrow{IK}}(C) = J$, milieu de [BC].
D'où l'axe de $t_{\overrightarrow{IK}} \circ \varphi$ est la médiatrice de [AJ] qui est la droite (IK).

φ est donc la symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{KI}$ et d'axe la droite (IK).

c) Soit L, le milieu de [AD], la droite (IK) est la médiatrice de [LC] et $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{LD}$.
Et comme $\varphi = t_{\overrightarrow{IK}} \circ s_{(IK)}$, alors on a : $\varphi(C) = t_{\overrightarrow{IK}} \circ s_{(IK)}(C) = t_{\overrightarrow{IK}}(L) = t_{\overrightarrow{DL}}(L) = A$.

Remarque : ***Notons que (IK) est parallèle à (BC), donc à (AD).***
De plus, I est le milieu de [AC], donc dans le triangle CJA, (IK) est une droite des milieux.
D'où (IK) coupe [JA] en son milieu.
Et comme (JA) est médiatrice de [BC], qui est parallèle à (IK), alors (JA) est perpendiculaire à (IK).
On peut donc conclure que (IK) est médiatrice de [JA] et que $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{JC}$.

2 – Définir une isométrie par son expression analytique ou son écriture complexe

Exercice 13

Le plan P est rapporté au repère orthonormé (O , I , J). On considère l'application f de P vers P, qui à tout point M(x , y) associe le point M'(x', y'), avec : $\begin{cases} 5x' = -3x - 4y + 3 \\ 5y' = -4x + 3y + 14 \end{cases}$.

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
Montrer que f est une isométrie. Reconnaître la nature de f.
2) Déterminer fof. En déduire les éléments caractéristiques de f.

Solution 13

1) • Soit M(x , y) un point de plan.

f(M) = M équivaut à $\begin{cases} 5x = -3x - 4y + 3 \\ 5y = -4x + 3y + 14 \end{cases}$. Ce qui signifie $\begin{cases} 8x + 4y = 3 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ (1).

Or ce système n'admet pas de solution car son déterminant est nul et le point $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ appartient à la droite d'équation 8x + 4y = 3 mais pas à la droite d'équation 4x + 2y = 14. D'où f ne laisse aucun point invariant.

- Retrouvons l'expression complexe associée à f :

Soit M(x , y) d'affixe z et M'(x' , y') d'affixe z', deux points du plan.

f(M) = M' équivaut à $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x - 4y + 3) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y + 14) \end{cases}$. Donc :

$$z' = x' + iy' = \frac{1}{5}[(-3x - 4y + 3) + i(-4x + 3y + 14)] = \frac{1}{5}[(-3 - 4i)x + i(3 + 4i)y + 3 + 14i]$$
$$= \frac{1}{5}[-(3 + 4i)(x - iy) + 3 + 14i]$$
$$= -\frac{1}{5}(3 + 4i)\bar{z} + \frac{1}{5}(3 + 14i)$$

Soit N et M d'affixes respectives z_N et z_M, N' = f(N) et M' = f(M) d'affixes respectives $z_{N'}$ et $z_{M'}$. On a :

$$M'N' = |z_{N'} - z_{M'}| = \left|-\frac{1}{5}(3+4i)\overline{z_N} + \frac{1}{5}(3+14i) + \frac{1}{5}(3+4i)\overline{z_M} - \frac{1}{5}(3+4i)\right| = \left|-\frac{1}{5}(3+4i)(\overline{z_N} - \overline{z_M})\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{5}(3+4i)\right| \times \left|\overline{z_N} - \overline{z_M}\right|$$

$$= \left|\overline{z_N - z_M}\right|$$

$$= |z_N - z_M|$$

$$= MN$$

Puisque M'N' = MN, alors f conserve les distances. Par conséquent, f est une isométrie.

- f étant une isométrie qui ne laisse pas de point invariant, f est soit une translation de vecteur non nul, soit une symétrie glissée.

Or l'expression complexe d'une translation est sous la forme z' = z + b, alors f n'est pas une translation, mais une symétrie glissée.

2) • Déterminons d'abord l'expression complexe de fof :

Soit M un point du plan d'affixe z, M_1 d'affixe z_1 son image par f et M' d'affixe z' l'image de M_1 par f.

On a : $z_1 = -\frac{1}{5}(3+4i)\overline{z} + \frac{1}{5}(3+14i)$ et

$$z' = -\frac{1}{5}(3+4i)\overline{z_1} + \frac{1}{5}(3+14i) = -\frac{1}{5}(3+4i)\left[\overline{-\frac{1}{5}(3+4i)\overline{z} + \frac{1}{5}(3+14i)}\right] + \frac{1}{5}(3+14i).$$

D'où, $z_1 = -\frac{1}{5}(3+4i)\left[-\frac{1}{5}(3-4i)z + \frac{1}{5}(3-14i)\right] + \frac{1}{5}(3+14i) = z - 2 + 4i$ (le lecteur fera les calculs).

fof a donc pour expression complexe z' = z – 2 + 4i. D'où fof est la translation de vecteur $\vec{u}(-2\,,4)$.

- Soit $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}$, $\vec{v}$ a pour affixe -1 + 2i.

Supposons $f = g \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ g$, alors on aura $g = t_{\vec{i}-2\vec{j}} \circ f$.

Expression complexe de g :

Soit M d'affixe z un point du plan, M_1 d'affixe z_1 son image par f et M' d'affixe l'image de M_1 par $t_{\vec{i}-2\vec{j}}$.

On aura : $z' = z_1 + 1 - 2i$ et $z_1 = -\frac{1}{5}(3+4i)\overline{z} + \frac{1}{5}(3+14i)$.

D'où $z' = -\frac{1}{5}(3+4i)\overline{z} + \frac{1}{5}(3+14i) + 1 - 2i = -\frac{1}{5}(3+4i)\overline{z} + \frac{1}{5}(8+4i)$.

L'expression complexe de g est donc : $z' = -\frac{1}{5}(3+4i)\overline{z} + \frac{1}{5}(8+4i)$.

- Déterminons l'ensemble des points invariants par g :

Soit M(x , y), d'affixe z.

On a g(M) = M signifie $z = -\frac{1}{5}(3+4i)\overline{z} + \frac{1}{5}(8+4i)$. C'est-à-dire $x' + iy' = -\frac{1}{5}(3+4i)(x-iy) + \frac{1}{5}(8+4i)$.

Ce qui équivaut à 5x + 5iy = (-3x – 4y + 8) + i(-4x + 3y + 4), puis à $\begin{cases}5x = -3x - 4y + 8\\ 5y = -4x + 3y + 4\end{cases}$, et enfin à $\begin{cases}8x + 4y = 8\\ 4x + 2y = 4\end{cases}$.

Les deux équations de ce système étant équivalentes, il se réduit à 2x + y = 2.

D'où l'ensemble des points invariants par g est la droite d'équation 2x + y = 2.

Or g est une isométrie, car composée de deux isométries.

Alors, l'ensemble des points invariants étant la droite Δ d'équation 2x + y = 2, g est la réflexion d'axe Δ.

Remarquons que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ.

D'où f est la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{v}$.

Exercice 14

Montrer que chacune des applications du plan suivantes est une isométrie que l'on caractérisera :

a) f : $\begin{cases} x'=\frac{1}{5}(-3x+4y+4) \\ y'=\frac{1}{5}(-4x-3y) \end{cases}$ b) g : $\begin{cases} x'=\frac{1}{5}(-3x+4y) \\ y'=\frac{1}{5}(4x+3y) \end{cases}$.

Solution 14

a) Soit M(x , y), d'affixe z ; et M'(x' , y'), d'affixe z'. f(M) = M' équivaut à $\begin{cases} x'=\frac{1}{5}(-3x+4y+4) \\ y'=\frac{1}{5}(-4x-3y) \end{cases}$. Donc

$z'=x'+iy'=\frac{1}{5}[(-3x+4y+4)+i(-4x-3y)]=\frac{1}{5}[-(3+4i)x-i(3+4i)y+4]=\frac{1}{5}[-(3+4i)(x+iy)+4]$

D'où $z'=-\frac{1}{5}(3+4i)z+\frac{4}{5}$.

L'expression complexe de f est sous la forme z' = az + b, avec $a=-\frac{1}{5}(3+4i)$ et $b=\frac{4}{5}$.

$|a|=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=1$ et a ≠ 1, donc f est la rotation d'angle $\arg\left(-\frac{1}{5}(3+4i)\right)\approx-126{,}87°$ et de centre le point d'affixe $\omega=\dfrac{\frac{4}{5}}{1+\frac{1}{5}(3+4i)}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$ (l'affixe de l'unique point invariant par f).

b) Le lecteur vérifiera que l'expression complexe de g est : $z'=\frac{1}{5}(-3+4i)\overline{z}$.

Soit N et M d'affixes respectives z_N et z_M, N' = g(N) et M' = g(M) d'affixes respectives $z_{N'}$ et $z_{M'}$. On a :

$$\begin{aligned} M'N' &= |z_{N'}-z_{M'}|=\left|\frac{1}{5}(-3+4i)\overline{z_N}-\frac{1}{5}(-3+4i)\overline{z_M}\right|=\left|\frac{1}{5}(-3+4i)(\overline{z_N}-\overline{z_M})\right|=\left|\frac{1}{5}(-3+4i)\right|\times\left|\overline{z_N}-\overline{z_M}\right| \\ &= \left|\overline{z_N-z_M}\right| \\ &= |z_N-z_M| \\ &= MN \end{aligned}$$

Puisque M'N' = MN, alors g conserve les distances. Par conséquent, g est une isométrie.

Déterminons l'ensemble des points invariants par g :

Soit M(x , y) un point du plan.

f(M) = M équivaut à $\begin{cases} 5x=-3x+4y \\ 5y=4x+3y \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 8x-4y=0 \\ 4x-2y=0 \end{cases}$. C'est-à-dire 2x – y = 0.

D'où l'ensemble des points invariants par g est la droite Δ d'équation y = 2x.

g est une isométrie dont l'ensemble des points invariants est la droite Δ, donc g est la réflexion d'axe Δ : y = 2x.

Exercice 15

P désigne le plan complexe.

Soit f l'application de P vers P, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', où $z'=i\overline{z}-i+1$.

1) Déterminer l'ensemble (E) des points invariants par f.

2)a) Démontrer que pour tout point M de P, le milieu de [MM'] appartient à (E) et (MM') est orthogonale à (E).

b) Reconnaître f.

Solution 15

1) Soit M d'affixe z = x + iy, x et y étant des réels.

f(M) = M signifie $z=i\overline{z}-i+1$. C'est-à-dire x + iy = i(x – iy) – i + 1.

Ce qui équivaut à $x + iy = (y + 1) + i(x - 1)$, puis à $\begin{cases} x = y+1 \\ y = x-1 \end{cases}$, en suite à $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ et enfin à $x - y - 1 = 0$.

D'où l'ensemble des points invariants par f est la droite (E) d'équation $x - y - 1 = 0$.

2)a) • Soit I le milieu de [MM'], $z = x + iy$, l'affixe de M , x et y étant des nombres réels et z' l'affixe de M'.

On a : $z_I = \dfrac{z'+z}{2} = \dfrac{i\bar{z}-i+1+z}{2} = \dfrac{x+y+1}{2} + \dfrac{x+y-1}{2}i$.

Donc on a : $x_I - y_I - 1 = \dfrac{x+y+1}{2} - \dfrac{x+y-1}{2} - 1 = 0$. D'où I appartient à (E).

• Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = i\bar{z} - i + 1 - z = (-x+y+1) + i(x-y-1)$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(-x + y + 1 , x - y - 1)$.

Or $\vec{u}(1,1)$ est un vecteur directeur de (E) et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MM'} = (-x+y+1) + (x-y-1) = 0$, alors (E) est perpendiculaire à (MM').

b) f est la réflexion d'axe (E).

D. Utiliser une isométrie pour

1 – démontrer des propriétés

Exercice 16

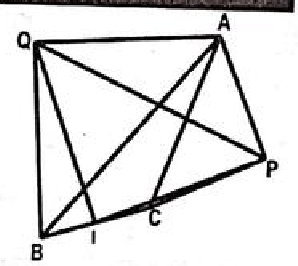
ABC est un triangle de sens direct.

Les points P et Q sont tels que PAC et QAB soient extérieurs à ABC, isocèles rectangles en P et Q respectivement. I est le milieu de [BC]. Soit r_P et r_Q les quarts de tour directs de centres respectifs P et Q.

1) Montrer que : $r_P o r_Q = s_I$.

2) En déduire que IPQ est un triangle isocèle rectangle en I.

Solution 16



1) On a : $r_P = r_{\left(P,\frac{\pi}{2}\right)}$, $r_Q = r_{\left(Q,\frac{\pi}{2}\right)}$ et $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$, donc $r_P o r_Q$ est une symétrie centrale.

De plus, on a $r_P o r_Q(B) = r_P(A) = C$.

D'où $r_P o r_Q$ est la symétrie centrale de centre le milieu I de [BC].

2) Posons $r_P(Q) = Q'$, alors :

- le triangle QPQ' est rectangle isocèle de sommet P.
- $s_I(Q) = r_P o r_Q(Q) = r_P(Q) = Q'$, donc I est le milieu de [QQ'].

On en déduit alors que (IP) est la médiatrice de [QQ']. Et par suite, le triangle QPI est rectangle en I.

Mais aussi, puisque I est milieu de [QQ'] et P est sur le cercle de diamètre [QQ'] (car QPQ' est un triangle rectangle en P), alors IP = IQ = IQ'. Finalement, IPQ est un triangle rectangle et isocèle en I.

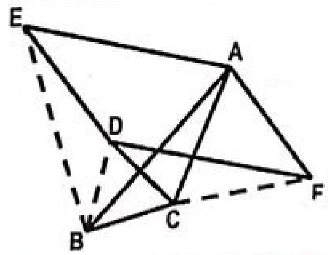
Exercice 17

ABC est un triangle de sens direct. BCD, AEB et CFA sont des triangles équilatéraux directs.

1) Préciser la nature de $f = r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)} o\, r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}$.

2) Utiliser f, pour montrer que AEDF est un parallélogramme.

Solution 17



1) $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 0$, d'où f est une translation.

2) On a : $f(A) = r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)} o\, r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}(A) = r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}(A) = E$

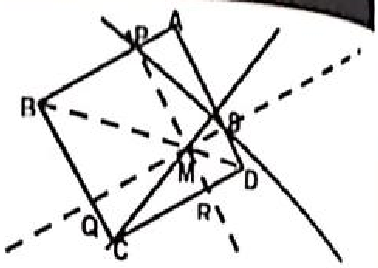
$f(F) = r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)} o\, r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}(F) = r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}(C) = D$.

t étant une translation qui transforme A en E et F en D, on a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FD}$. D'où AEDF est un parallélogramme.

Exercice 18

ABCD est un carré de sens direct et M un point de la droite (BD).
On désigne par P, Q, R et S les projetés orthogonaux respectifs de M sur (AB), (BC), (CD) et (AD).
1) Démontrer qu'il existe un quart de tour direct r tel que : r (C) = S et r(M) = P.
2) En déduire que (MC) est perpendiculaire à (PS).

Solution 18



1) Soit R la rotation de centre B, et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

t la translation de vecteur $\overrightarrow{BQ}$ et M' le symétrique de M par rapport à P.

On a toR(C) = t(A) = S et toR(M) = t(M') = P.

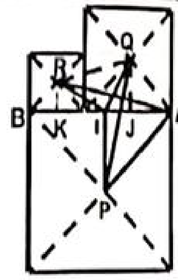
Or toR est une rotation r d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme C en S et M en P.

D'où il existe un quart de tour direct r qui transforme C en S et M en P.

2) Puisque r(C) = S et r(M) = P, alors $\text{mes}(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{SP}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. D'où (MC) est perpendiculaire à (PS).

Exercice 19

P, Q et R sont les centres de trois carrés, et I le milieu de [AB].
Comme l'indique la figure ci-contre.
1) Montrer que IPA et IQR sont rectangles et isocèle en I.
2) En déduire que AR = PQ et (AR) est orthogonale à (PQ).



Solution 19

1) • ABP est rectangle et isocèle en P, et I est le milieu de [AB], donc IPA est un triangle rectangle isocèle en I.
• Notons J et K les projetés orthogonaux respectifs de Q et R sur (AB).

Vérifions que les triangles IJQ et RKI, rectangles en J et K respectivement, sont superposables :

En effet, on a :

- KJ = IA = BI = KR + QJ
- IJ = IA – AJ = KJ – QJ = KJ – (KJ – KR) = KR
- KI = BI – BK = KR + QJ – KR = QJ.

Donc IJ = KR et KI = QJ.
Comme de plus les triangles IJQ et RKI sont rectangles en J et K respectivement, alors ils sont superposables.
On en déduit que RI = IQ (1).

Or on a : $(\overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{IR}) \equiv (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) - (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IQ}) - (\overrightarrow{IR}, \overrightarrow{IK})$.

De plus $(\overrightarrow{IR}, \overrightarrow{IK}) \equiv (\overrightarrow{QI}, \overrightarrow{QJ})$, une mesure de $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})$ est π et une mesure de $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IQ}) + (\overrightarrow{QI}, \overrightarrow{QJ})$ est $\frac{\pi}{2}$.

D'où une mesure de $(\overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{IR})$ est $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ (2).

Les égalités (1) et (2) permettent de conclure que IQR est un triangle rectangle et isocèle en I.
2) Soit r, le quart de tour direct de centre I.
AIP et RIQ étant des triangles rectangles et isocèles de sommet I, et directs, on a : r(P) = A et r(Q) = R.

D'où QP = RA et $\text{mes}(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{RA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. D'où QP = AR et les droites (AR) et (PQ) sont perpendiculaires.

Exercice 20

ABC et ACD sont deux triangles équilatéraux de sens directs.

Les points O et I sont les milieux respectifs de [AC] et [AB]. Les points L et E sont tels que : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{LE}$.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et f = rot.

1) a) Quelle est l'image de O par f ?

b) Donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA}})$.

c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) M étant un point quelconque du plan, on note N = r(M), J le milieu de [EM] et K le milieu de [ND].

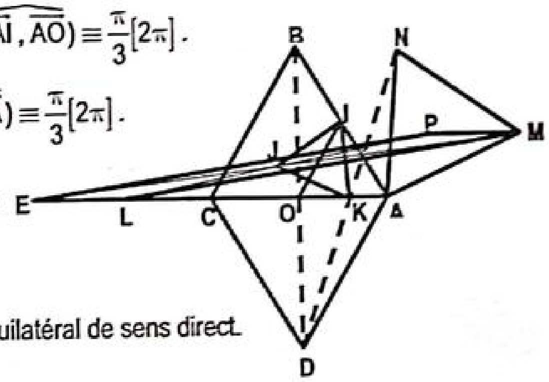
a) Quel est le milieu de [LP] ? Où P est l'antécédent de M par t.

b) Lorsque I, J et K sont distincts, démontrer que le triangle IJK est équilatéral. ***(On pourra utiliser f(L) et f(P)).***

Solution 20

1)a) f(O) = rot(O) = r(A) = A.

b) O est le milieu de [AC] et I celui de [AB]. D'où OA = AI et $mes(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AO}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.



D'où OAI est un triangle équilatéral direct. Et finalement, $mes(\widehat{\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

c) f = rot, composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

D'où f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit Ω le centre de f, puisque f(O) = A, alors ΩOA est un triangle équilatéral de sens direct.

D'où Ω = I. D'où f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre I.

2)a) t(P) = M, d'où $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OA}$.

Or $\overrightarrow{EL} = \overrightarrow{OA}$, alors $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{EL}$; c'est-à-dire PMLE est un parallélogramme.

On en déduit que [LP] et [ME] diagonales du parallélogramme PMLE, ont même milieu J.

Finalement, le milieu de [LP] est J.

b) f(L) = rot(L) = r(C) = D et f(P) = rot(P) = r(M) = N.

[ND] est l'image de [PL] par f, d'où, le milieu K de [ND] est l'image de J milieu de [PL] par f, rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Finalement, IJK est un triangle équilatéral direct.

Exercice 21

Les cordes du cercle Γ de centre O, [AB] et [ED] d'une part, [BC] et [EF] d'autre part sont parallèles.

On se propose de montrer que les droites (CD) et (AF) sont parallèles. On désigne par I, J et K les milieux respectifs de [AB], [BC] et [CD] et r_1, r_2 et r_3 les transformations suivantes : $r_1 = s_{(OJ)} \circ s_{(OI)}$; $r_2 = s_{(OI)} \circ s_{(OK)}$ et $r_3 = s_{(OJ)} \circ s_{(OK)}$.

1) Etude de composées :

Préciser la nature des transformations r_1, r_2 et r_3.

A l'aide de la relation de Chasles (sur les angles orientés), montrer que $r_1 o r_2 = r_2 o r_1 = r_3$.

2) Action sur une partie de la figure :

Quelle est l'image de A par $r_2 o r_1$? En déduire que $s_{(OJ)}(s_{(OK)}(A)) = E$.

3) ***Conclusion :*** Prouver alors que A et F sont symétriques par rapport à (OK), puis conclure.

Solution 21

1) • (OJ) et (OI) sont sécantes en O, d'où $r_1 = s_{(OJ)} \circ s_{(OI)}$ est la rotation de centre O, d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}})$.

• (OI) et (OK) sont sécantes en O, d'où $r_2 = s_{(OI)} \circ s_{(OK)}$ est une rotation de centre O, d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OI}})$.

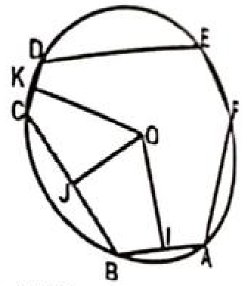
• (OJ) et (OK) sont sécantes en O, d'où $r_3 = s_{(OJ)} \circ s_{(OK)}$ est une rotation de centre O, et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OJ}})$.

Montrons que $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1 = r_3$:

$r_1 \circ r_2 = r_{(O;\,2(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}))} \circ r_{(O;\,2(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OI}}))} = r_{(O;\,2(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}})+2(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OI}}))} = r_{(O;\,2(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OI}})+2(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}))}$

$= r_{(O;\,2(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OI}}))} \circ r_{(O;\,2(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}))}$

$= r_2 \circ r_1$



Or $(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OI}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}) = (\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OJ}})$, alors $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1 = r_{(O;\,2(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OJ}}))} = r_3$.

2) • $r_1(A) = s_{(OJ)} \circ s_{(OI)}(A) = s_{(OJ)}(B) = C$.

$r_2(C) = s_{(OI)} \circ s_{(OK)}(C) = s_{(OI)}(D) = E$ (car (AB) est parallèle à (ED) et (OI) perpendiculaire à (AB), donc (OI) est perpendiculaire à (ED). (OI) étant perpendiculaire à (ED) passant par O, est médiatrice de [ED]). D'où $r_2 o r_1(A) = E$.

• $r_2 \circ r_1 = r_3 = s_{(OJ)} \circ s_{(OK)}$ et $r_2 o r_1(A) = E$. D'où $s_{(OJ)} \circ s_{(OK)}(A) = E$. C'est-à-dire $s_{(OJ)}(s_{(OK)}(A)) = E$.

3) • On sait que $s_{(OJ)}(s_{(OK)}(A)) = E$, donc $s_{(OJ)}(s_{(OJ)}(s_{(OK)}(A))) = s_{(OJ)}(E)$. C'est-à-dire $s_{(OK)}(A) = s_{(OJ)}(E)$.

Or (BC) est parallèle à (FE) et (OJ) est perpendiculaire à (BC). D'où (OJ) est perpendiculaire à (EF).
(OJ) est une perpendiculaire à la corde [EF] qui passe par O, centre du cercle (Γ) ; donc (OJ) est la médiatrice de [EF].
Et par conséquent, $s_{(OJ)}(E) = F$. On en déduit que $s_{(OK)}(A) = F$.

• Comme $s_{(OK)}(A) = F$, alors (OK) est la médiatrice de [AF]. Donc (OK) est perpendiculaire à (AF).

Or (OK) est la médiatrice de [CD], alors (OK) est perpendiculaire à (CD).
Puisque (OK) perpendiculaire à (AF) et à (CD), alors (AF) est parallèle à (CD).

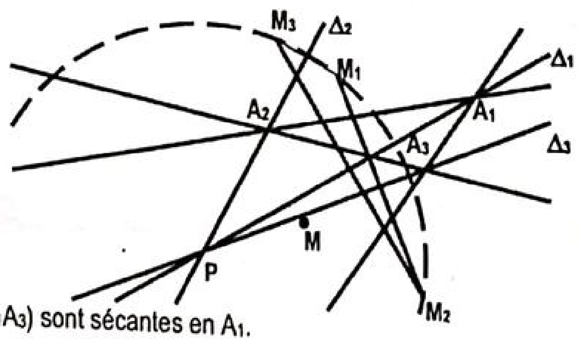
Exercice 22

Dans le plan P, on considère le triangle $A_1A_2A_3$.
A tout point M du plan, distinct des sommets A_1, A_2, A_3, on associe :
- les points M_1, M_2, M_3 images de M par les réflexions $S_{(A_2A_3)}$, $S_{(A_3A_1)}$ et $S_{(A_1A_2)}$ respectivement.
- les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 issues des sommets A_1, A_2, A_3 et respectivement perpendiculaires aux droites (M_2M_3), (M_1M_3) et (M_1M_2).

1) Faire un dessin.
2) a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(A_1A_2)} \circ S_{(A_3A_1)}$.
   b) Déterminer l'image de M_2 par $S_{(A_1A_2)} \circ S_{(A_3A_1)}$.
   c) En déduire que Δ_1 est la médiatrice de segment $[M_2M_3]$.
3) Soit $S = S_{(A_1A_2)} \circ S_{\Delta_1} \circ S_{(A_3A_1)}$.
   a) S est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?
   b) Déterminer $S(A_1)$ et $S(M)$. Reconnaître alors S.
4) On suppose les points M_1, M_2, M_3 non alignés.
Montrer que les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont concourantes en un point P que l'on caractérisera pour le triangle $M_1M_2M_3$.

Solution 22

1)



2)a) (A_1A_2) et (A_1A_3) sont sécantes en A_1.

D'où, $S_{(A_1A_2)} \circ S_{(A_3A_1)}$ est la rotation de centre A_1 et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_2}})$.

b) $S_{(A_1A_2)} \circ S_{(A_3A_1)}(M_2) = S_{(A_1A_2)}(M) = M_3$. D'où $S_{(A_1A_2)} \circ S_{(A_3A_1)}(M_2) = M_3$.

c) $S_{(A_1A_2)} \circ S_{(A_3A_1)}(M_2) = M_3$ et $S_{(A_1A_2)} \circ S_{(A_3A_1)}$ est une rotation de centre A_1.

D'où A_1 appartient à la médiatrice du segment $[M_2M_3]$, qui est perpendiculaire à $[M_2M_3]$.
Or Δ_1 est la seule droite passant par A_1 et perpendiculaire à $[M_2 M_3]$, alors Δ_1 est la médiatrice de $[M_2M_3]$.
3)a) S est la composée d'un nombre impair de réflexions (qui sont des antidéplacements), d'où S est un antidéplacement.

b) • $S(A_1) = S_{(A_1A_2)} \circ S_{\Delta_1} \circ S_{(A_3A_1)}(A_1) = S_{(A_1A_2)} \circ S_{\Delta_1}(A_1) = S_{(A_1A_2)}(A_1) = A_1$ (car A_1 est sur (A_1A_2) et (A_1A_3)).

• $S(M) = S_{(A_1A_2)} \circ S_{\Delta_1} \circ S_{(A_3A_1)}(M) = S_{(A_1A_2)} \circ S_{\Delta_1}(M_2) = S_{(A_1A_2)}(M_3) = M$. D'où $s(M) = M$.

Nature de S :
S est un antidéplacement qui laisse A_1 et M invariants. D'où S est la réflexion d'axe (A_1M).
4) D'après 2)c) Δ_1 est la médiatrice de $[M_2M_3]$.
On montre aussi que Δ_2 et Δ_3 sont les médiatrices respectives de $[M_1M_3]$ et $[M_1M_2]$.
Donc Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont concourantes au point P, centre du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$.

2 – *déterminer des lieux géométriques*

Exercice 23

ABC est un triangle isocèle en A et r la rotation de centre A et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \hat{\alpha}$.
A tout point M, distinct de B et C, on associe le point M' tel que M' = r(M).
1) Démontrer que : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{M'C}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}}) + \alpha[2\pi]$.
2) En déduire le lieu des points M tels que les points C, M et M' sont alignés.

Solution 23

1) Soit M un point du plan, on a : $(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{M'C}}) = (\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}}) + (\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{M'C}})$.

Or la rotation r transforme M en M' et B en C, alors $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{M'C}}) \equiv \alpha[2\pi]$.

D'où $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{M'C}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}}) + \alpha[2\pi]$.

2) C, M et M' sont alignés si et seulement si $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{M'C}}) \equiv 0[\pi]$. (1)

Or, d'après la question 1), on a : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{M'C}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}}) + \alpha[2\pi]$ (2)

Alors de (1) et (2), on déduit que C, M et M' sont alignés si et seulement si $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}}) + \alpha \equiv 0[\pi]$.

C'est-à-dire $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}) \equiv \alpha[\pi]$.

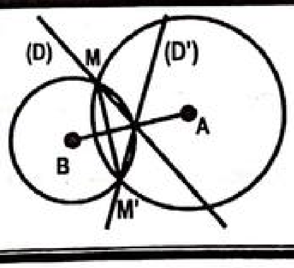
Comme $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \hat{\alpha}$, alors C, M et M' sont alignés si et seulement si $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})[\pi]$.
C'est-à-dire M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC, privé des points B et C.
Finalement, le lieu géométrique des points M pour lesquels C, M et M' sont alignés est le cercle circonscrit au triangle ABC privé des points B et C.

Exercice 24

Soit (D) une droite, A, B deux points extérieurs à (D), M un point de (D) et M' le second point d'intersection des cercles de centres A et B et de rayons respectifs AM et BM.
Déterminer le lieu géométrique des points M' lorsque M décrit (D).

Solution 24

On remarque que, pour tout point M de (D),
Puisque AM = AM' et BM = BM', alors (AB) est la médiatrice de [MM'].
D'où $M' = s_{(AB)}(M)$.

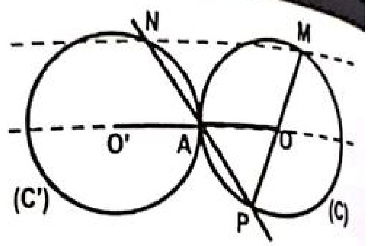


M appartient à (D) si et seulement si, M' appartient à $s_{(AB)}(D)$.
D'où le lieu géométrique de M' est la droite de (D') symétrique de (D) par rapport à (AB).

Exercice 25

Soit O et A deux points du plan, (C) le cercle de centre O passant par A, M un point quelconque de (C), P le point tel que [MP] est le diamètre de (C) et N le point d'intersection de la droite (AP) et la parallèle à (OA) passant par M.
Déterminer le lieu de N lorsque M décrit (C).

Solution 25

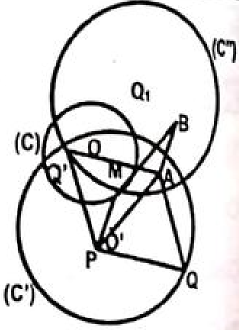


O est le milieu de [MP] et (OA) est parallèle à (MN).
D'où (OA) est une droite des milieux dans le triangle MNP.
En utilisant le théorème des milieux, on obtient : $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{OA}$.
C'est-à-dire que $N = t_{2\overrightarrow{OA}}(M)$.
M appartient à (C) si et seulement si N appartient à $(C') = t_{2\overrightarrow{OA}}(C)$.
(C') est le cercle de centre O', symétrique de O par rapport à A et passant par A.
Le lieu géométrique de N est le cercle (C').

Exercice 26

Soit (C) un cercle, A et B deux points extérieurs à (C), M un point quelconque de (C), P le point tel que ABMP est un parallélogramme et Q un point tel que APQ est un triangle équilatéral.
Déterminer le lieu géométrique de Q lorsque M décrit (C).

Solution 26



ABMP est un parallélogramme donc $P = t_{\overrightarrow{BA}}(M)$.
APQ est un triangle équilatéral si et seulement si $Q = r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(P)$ ou $Q = r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}(P)$.
D'où $Q = r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}(M)$ ou $Q = r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}(M)$.
Donc M appartient à (C) si et seulement si $Q \in r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}(C)$ ou $Q \in r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}(C)$.
D'où le lieu géométrique des points Q est la réunion des cercles (C') et (C'') images de (C) par les rotations $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$ et $r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$ respectivement.

Remarque :

$r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$ *et* $r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$ *sont des rotations d'angles respectifs* $\frac{\pi}{3}$ *et* $-\frac{\pi}{3}$.

Or $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}(B) = r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}(B) = A$ *, alors le centre de* $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$ *est le point E tel que EBA soit un triangle équilatéral direct et le centre de* $r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$ *est le point D tel que DBA soit un équilatéral indirect.*

3 – réaliser des constructions

Exercice 27

ABC est un triangle et I est un point du segment [AB].
Construire un triangle équilatéral IJK tel que J appartient à (BC) et K appartient à (AC).

Solution 27

IJK est un triangle équilatéral si et seulement si, $K = r_{\left(I,\frac{\pi}{3}\right)}(J)$ ou $K = r_{\left(I,-\frac{\pi}{3}\right)}(J)$.
Notons R, l'une ou l'autre des rotations $r_{\left(I,\frac{\pi}{3}\right)}$ et $r_{\left(I,-\frac{\pi}{3}\right)}$.
Puisque J appartient à (BC), alors R(J) = K appartient R(BC).

ANYOUNGUETE MBITA

D'où K est le point commun à (AC) et à l'image de (BC) par R. $J = R^{-1}(K)$.
J est le point de rencontre entre la droite (BC) et la médiatrice du segment [IK].
On note que ce problème a deux solutions. L'un des triangles IJK sera direct et l'autre indirect.

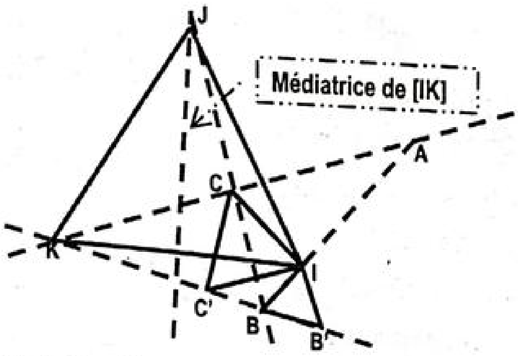
Conclusion :

Pour construire IJK :

- On place I sur [AB]
- On construit la droite (B'C') image de (BC) par R. Elle rencontre alors (AC) en K.
- On construit la médiatrice de [IK]. Elle rencontre (BC) en J.

Construction de IJK :

- Pour $R = r_{\left(I, \frac{\pi}{3}\right)}$:



- Pour $R = r_{\left(I, -\frac{\pi}{3}\right)}$: *(le lecteur fera une figure).*

Remarque :

Pour construire R(BC), il suffit de construire les points B' et C' tels que IBB' et ICC' soient des triangles équilatéraux directs pour $R = r_{\left(I, \frac{\pi}{3}\right)}$ ***et indirect pour*** $R = r_{\left(I, -\frac{\pi}{3}\right)}$***. Et on a R(BC) = (B'C').***

E. Déterminer les isométries laissant un ensemble de points globalement invariant

Exercice 28

Dans le plan, on considère un carré ABCD de centre O et tel que $mes(\overline{AB}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

A'B'C'D' le carré transformé de ABCD par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Quel est son centre ?

Soit f une isométrie transformant {A, B, C, D} en {A', B', C', D'}. Montrer que f(O) = O.
En déduire les déplacements et les réflexions transformant {A, B, C, D} en {A', B', C', D'}.

Solution 28

- **Le centre de A'B'C'D' :**

A'B'C'D' est l'image de ABCD par la rotation $r_{\left(O, \frac{\pi}{4}\right)}$.

Et le centre de ABCD est O, d'où le centre de A'B'C'D' est $r_{\left(O, \frac{\pi}{4}\right)}(O) = O$.

- **Montrons que f(O) = O :**

O est le barycentre du système {(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)}.
D'où f(O) est le barycentre de {(f(A), 1), (f(B), 1), (f(C), 1), (f(D), 1)} = {(A', 1), (B', 1), (C', 1), (D', 1)} qui est O.
D'où f(O) = O.

- **Les déplacements qui transforment {A, B, C, D} en {A', B', C', D'} :**

Soit f un tel déplacement, on a f(O) = O.
f laisse le point O invariant, donc f ne peut être une translation de vecteur non nul.
De plus {A, B, C, D} est différent de {A', B', C', D'}, donc f n'est pas l'application identique.
Par conséquent, f est une rotation.

Or f transforme {A, B, C, D} en {A', B', C', D'}, alors on a f(A) = A' ou f(A) = B' ou f(A) = C' ou f(A) = D'.

Si f(A) = A', alors $f = r_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}$.

Si f(A) = B', alors $f = r_{\left(O,\frac{3\pi}{4}\right)}$.

Si f(A) = C', alors $f = r_{\left(O,-\frac{3\pi}{4}\right)}$.

Si f(A) = D', alors $f = r_{\left(O,-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Le lecteur vérifiera que $r_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}$, $r_{\left(O,\frac{3\pi}{4}\right)}$, $r_{\left(O,-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $r_{\left(O,-\frac{3\pi}{4}\right)}$ transforment bel et bien {A, B, C, D} en {A', B', C', D'}.

Les seuls déplacements qui transforment {A, B, C, D} en {A', B', C', D'} sont $r_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}$, $r_{\left(O,\frac{3\pi}{4}\right)}$, $r_{\left(O,-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $r_{\left(O,-\frac{3\pi}{4}\right)}$.

- **Les réflexions qui transforment {A, B, C, D} en {A', B', C', D'} :**

Soit $s_{(\Delta)}$ une telle réflexion, on a $s_{(\Delta)}(O) = O$, d'où Δ passe par O.

On a $s_{(\Delta)}(A) = A'$ ou $s_{(\Delta)}(A) = B'$, ou $s_{(\Delta)}(A) = C'$ ou $s_{(\Delta)}(A) = D'$.

Si $s_{(\Delta)}(A) = A'$, alors Δ est la droite (OI), où I est milieu de [AA'].

Si $s_{(\Delta)}(A) = B'$, alors Δ est la droite (OJ), où J est le milieu de [BA'].

Si $s_{(\Delta)}(A) = C'$, alors Δ est la droite (OK), où K est le milieu de [BB'].

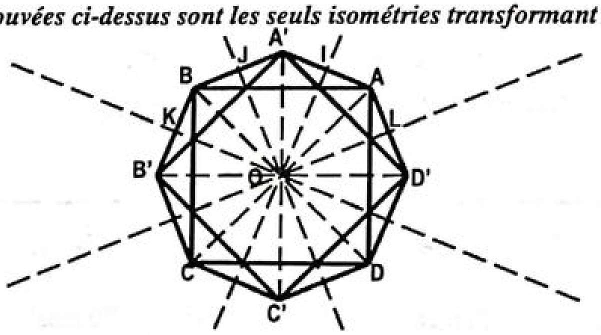
Si $s_{(\Delta)}(A) = D'$, alors Δ est la droite (OL), où L est le milieu de [AD'].

Le lecteur vérifiera que $s_{(OI)}$, $s_{(OJ)}$, $s_{(OK)}$ et $s_{(OL)}$ ainsi définies, transforment bel et bien {A, B, C, D} en {A', B', C', D'}. Donc les seuls réflexions qui transforment {A, B, C, D} en {A', B', C', D'} sont $s_{(OI)}$, $s_{(OJ)}$, $s_{(OK)}$ et $s_{(OL)}$.

Remarque :

Il n'existe pas de symétrie glissée, transformant {A, B, C, D} en {A', B', C', D'}, car la symétrie glissée ne laisse aucun point invariant.

D'où les huit isométries trouvées ci-dessus sont les seuls isométries transformant {A, B, C, D} en {A', B', C', D'}.



Exercice 29

Soit : - ABC un triangle équilatéral de centre O, de sens direct.
- A', B', C' les symétriques de A, B et C par rapport à O.

1) Quel est le centre du triangle A'B'C' ?
2) Soit f une isométrie transformant ABC en A'B'C' (<u>exemple</u> : S_O).
   a) Quelle est l'image par f de O ?
   b) Quelles sont les rotations transformant ABC en A'B'C' ?
   c) Quelles sont les réflexions transformant ABC en A'B'C' ?

Solution 29

1) Le centre de A'B'C' :

A'B'C' est l'image de ABC par s_O. O étant le centre de gravité de ABC, le centre de A'B'C' est $s_O(O) = O$.

2)a) l'image de O par f :

f est une isométrie, A'B'C' est l'image de ABC par f et O est le centre de ABC.
D'où f(O) est le centre de A'B'C' qui est O. D'où f(O) = O.

b) Les rotations qui transforment ABC en A'B'C' :

- Soit r une telle rotation, d'après 2)a), r(O) = O. D'où le centre de r est O.
- r transforme ABC en A'B'C' donc r(A) = A' ou r(A) = B' ou r(A) = C'.

Si r(A) = A', alors $r = r_{(O\,;\,\pi)} = s_O$.

Si $r(A) = B'$, alors $r = r_{\left(O,-\frac{\pi}{3}\right)}$.

Si $r(A) = C'$, alors $r = r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)}$.

Vérification :

- s_O transforme ABC en A'B'C', par définition de A'B'C'.
- $r_{\left(O,-\frac{\pi}{3}\right)}(A)=B'$, $r_{\left(O,-\frac{\pi}{3}\right)}(B)=C'$ et $r_{\left(O,-\frac{\pi}{3}\right)}(C)=A'$. Donc $r_{\left(O,-\frac{\pi}{3}\right)}$ transforme ABC en A'B'C'.
- $r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)}(A)=C'$, $r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)}(B)=A'$ et $r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)}(C)=B'$. Donc $r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)}$ transforme ABC en A'B'C'.

Les rotations qui transforment ABC en A'B'C' sont donc : s_O, $r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)}$ et $r_{\left(O,-\frac{\pi}{3}\right)}$.

c) Les réflexions qui transforment ABC en A'B'C' :

Soit $s_{(\Delta)}$ une telle réflexion, d'après 2)a), on a $s_{(\Delta)}(O)=O$. D'où O appartient à Δ.

$s_{(\Delta)}$ transforme ABC en A'B'C', donc $s_{(\Delta)}(A)=A'$ ou $s_{(\Delta)}(A)=B'$ ou $s_{(\Delta)}(A)=C'$

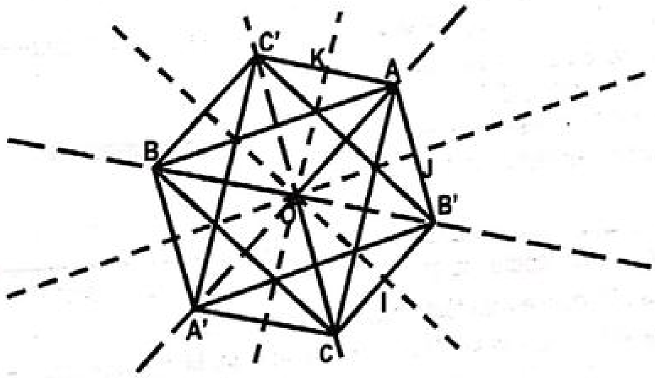
Si $s_{(\Delta)}(A)=A'$, alors Δ est la droite (OI) où I est le milieu de [B'C].

Si $s_{(\Delta)}(A)=B'$, alors Δ est la droite (OJ), où J est le milieu de [AB'].

Si $s_{(\Delta)}(A)=B'$, alors Δ est la droite (OK), où K est la milieu de [AC'].

On vérifie aisément que $s_{(OI)}$, $s_{(OJ)}$ et $s_{(OK)}$ transforment bel et bien ABC en A'B'C'.

Donc les réflexions qui transforment ABC en A'B'C' sont $s_{(OI)}$, $s_{(OJ)}$ et $s_{(OK)}$.



EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 30 — 30 minutes

ABC est un triangle équilatéral de sens direct. Γ est le cercle circonscrit à ABC et O son centre.
La médiatrice de [BC] coupe Γ en A et D.
A' désigne le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1) Démontrer que A'= $s_C(A)$.
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s_{(BD)} \circ s_{(DC)}$; $s_{(CA)} \circ s_{(AB)}$ et $s_{(DC)} \circ s_{(CA)}$.
3) On note $f = s_{(BD)} \circ s_C \circ s_{(AB)}$.
   a) Déterminer f(A), puis la nature et les éléments caractéristiques de f.
   b) En déduire la nature de $s_{(BD)} \circ s_C$.

Exercice 31 — 35 minutes

ABC est un triangle tel que : $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et AB < AC.

Γ est le cercle circonscrit à ABC et O est son centre.
Soit E le milieu de [BC] et P le point de [AC] tel que AB = CP.
La droite (OE) coupe Γ en I et J, tels que J et A soient sur le même arc de corde [BC].

1) a) Faire une figure.
   b) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que : $\text{mes}(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
2)a) Justifier qu'il existe une unique rotation r telle que : r(A) = P et r(B) = C. Déterminer son angle.
   b) Démontrer que son centre est un point de Γ, que l'on précisera.
   c) Quel est la nature du triangle JAP ?
3)a) Déterminer l'image de B par $r \circ s_B$, où s_B est la symétrie centrale de centre B.
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r \circ s_B$.

Exercice 32 — 45 minutes

Soit P, le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, deux points A et B ont pour coordonnées respectives (- a , 0) et (a , 0), où a est un réel strictement positif.
On note $r_A = r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}$, $r_B = r_{\left(B, -\frac{2\pi}{3}\right)}$ et pour tout point M du plan, $M_A = r_A(M)$ et $M_B = r_B(M)$.

1) M étant un point de P, construire les points M_A et M_B.
2) Démontrer que le milieu du segment $[M_AM_B]$ est un point fixe indépendant du choix de M.
   a) En composant les applications r_A^{-1} puis r_B.
   b) En utilisant les nombres complexes.
3) Démontrer, par un procédé de votre choix, que lorsque $M \neq M_A$ et $M \neq M_B$, on a :

$$\text{mes}(\overrightarrow{MM_A}, \overrightarrow{MM_B}) \equiv \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

Quel est l'ensemble des points M de P tels que M, M_A, M_B soient alignés ?

Exercice 33 — 30 minutes

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que AB = AC et $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit I, J, K les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Soit f = RoT et g = ToR.

A)1) Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.
   2) Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.

B)1) Déterminer la nature de $g \circ f^{-1}$.
2) Chercher l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractériser alors cette application.
3) Soit M un point quelconque du plan, M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g.
Quelle est la nature du quadrilatère ACM_2M_1 ?

30 minutes

Exercice 34

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On donne A(1 , 1), B(-3 , 3), C(2 , 2), D(-4 , 4).
On appelle E et F les milieux respectifs de [AC] et [BD].
1) Démontrer qu'il existe une rotation unique r qui transforme A en B et C en D.
Déterminer son angle et son centre I.
2) Démontrer qu'il existe une unique rotation r' qui transforme A en D et C en B.
Déterminer son angle et son centre J.
3) Que peut-on dire du quadrilatère IEJF ?

30 minutes

Exercice 35

Dans le plan P, on considère un triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle (Γ).
Soit M un point distinct de A et C, situé sur celui des arcs de corde [AC] dont B n'est pas élément.
I est le point du segment [MB] tel que MI = MA.
1) Montrer que le triangle IMA est équilatéral.
2) On oriente le plan P de façon que $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Déterminer les images par r des points B et I. En déduire que MA + MC = MB.

40 minutes

Exercice 36 **BAC – Amérique du Sud – 1992**

ABC et DEF sont deux triangles équilatéraux de sens direct, les points G et H sont tels que EDBG et CDFH sont des parallélogrammes.
Nous allons démontrer de deux façons que le triangle AGH est équilatéral.
1) *Utilisation des complexes :*
Dans le plan complexe, a, b, c, d, e, f, g et h désignent respectivement les affixes de A, B, C, D, E, F, G et H.
a) Démontrer que : $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$. Exprimer f – d en fonction de e – d.
b) Exprimer g en fonction de b, d et e ; puis h en fonction de c, d et f.
c) Démontrer que : $h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g - a)$. En déduire que le triangle AGH est équilatéral.
2) *Utilisation d'isométries :*
On désigne par t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$ et r est la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose $f = t_2 \circ r \circ t_1$.
a) Justifier que f est une rotation, dont on précisera l'angle.
Déterminer l'image de B par f ; en déduire le centre de la rotation f.
b) Déterminer l'image de G par f. En déduire que le triangle AGH est équilatéral.

45 minutes

Exercice 37

ABCD est un carré de sens direct et de centre I, (Γ) le cercle passant par A, B, C et D. Faire une figure.
On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$, r_D la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_1 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et r_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
On veut déterminer les éléments caractéristiques de $f = t \circ r_D$; $g_1 = r_1 \circ f$ et $g_2 = r_2 \circ f$.
1) Démontrer que f, g_1, g_2 sont des rotations dont on précisera les angles.
2) a) Déterminer f(D) et f(A). Quel est le centre de f ?
b) Déterminer $g_1(D)$ et $g_2(D)$.
3) Soit $A_1' = g_1(A)$ et $A_2' = g_2(A)$.

a) Démontrer, en utilisant $g_2 o g_1^{-1}$, que A est milieu du segment $[A_1'A_2']$.

b) Démontrer, en utilisant une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1'})$, que A_1' est sur la tangente en A à (Γ).

4) a) Soit J le centre de g_1 et K celui de g_2.
Démontrer que J et K appartiennent à (Γ) et sont diamétralement opposés. Placer J et K sur la figure.

b) Démontrer que A_1'est sur la droite (JB). Placer les points A_1' et A_2' sur la figure.

Exercice 38 — 30 minutes

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'ensemble E des points M(x , y) tels que : $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$.

Quelle sont les isométries qui laissent E globalement invariant ?

Exercice 39 — 35 minutes

Soit un triangle isocèle OAB, avec OA = OB, et un point P variable du segment [AB], P ≠ A et P ≠ B.
La parallèle menée de P à la droite (OB) coupe (OA) en A' et la parallèle menée de P à la droite (OA) coupe (OB) en B'.
1) Montrer que OA' = BB'.
2) En déduire qu'il existe une rotation r telle que r(O) = B et r(A') = B' dont on déterminera l'angle en fonction de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Démontrer que r(A) = O. Déterminer alors le centre Ω de cette rotation.
3) Démontrer que les quatre points O, A', B' et Ω sont cocycliques.

Exercice 40 — 30 minutes

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B.

On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et d'angles de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout point M du plan, on note M_1 et M_2, les images respectives de M par R_A et R_B.
1) On considère la transformation $T = R_B o R_A^{-1}$.
  a) Construire le point C image du point A par T.
  b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.
  c) En déduire la nature du quadrilatère M_1M_2CA.
2) On suppose que le point M décrit le cercle Γ de diamètre [AB].
  a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 décrit par le point M_2 quand M décrit Γ.
  b) Soit ω et ω_2 les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{\omega\omega_2}$ et $\overrightarrow{AC}$.
  c) Quel est le lieu géométrique du point I, milieu de $[M_1M_2]$, lorsque M décrit Γ.

Exercice 41 — BAC C – Cameroun – 1999 — 50 minutes

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f qui au point M(x , y) associe le point M'(x', y') tel que $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$. On note z l'affixe de M et z' l'affixe de M'.

1)a) Exprimer z' en fonction de z.
  b) Démontrer que f = ros où s est la réflexion d'axe $(O ; \vec{u})$ et r une rotation affine à préciser.
2) En décomposant r en deux réflexions, démontrer que f est une réflexion et préciser son axe.
3) Soit g l'application du plan qui à tout point M(x , y) associe le point M''(x'', y'') avec $\begin{cases} x'' = y+1 \\ y'' = x+1 \end{cases}$.

On note z l'affixe de M et z'' l'affixe de M''.
a) Exprimer z'' en fonction de z.
b) Déterminer la nature de l'isométrie t telle que g = tof.
c) K étant le milieu du segment [MM''], démontrer que K appartient à une droite fixe lorsque M décrit le plan.

Exercice 42 — 25 minutes

On donne dans le plan P orienté, un triangle isocèle OO'A avec $mes(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Les cercles (C) et (C') passant par A de centres respectifs O et O' se recoupent en B.

A tout point M de (C), on associe le point M' de (C') tel qu'une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'})$ soit $-\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer qu'il existe une rotation r, que l'on caractérisera, transformant O en O' et M en M'.
2) M étant distinct de B, les droites (BM) et (BM') recoupent respectivement (C') en N' et (C) en N.
Montrer que N' est l'image de N par la rotation r.

Exercice 43 — **BAC C – Cameroun – 2009** — **90 minutes**

Partie A :

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1)a) Calculer la dérivée f ' de f et dresser le tableau de variation de f.
b) Etudier le signe de la dérivée seconde de f et en déduire la position relative de (C_f) par rapport à sa tangente T_0 en O.
c) Démontrer que l'origine O du repère est point d'inflexion pour (C_f).
2)a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
b) Soit g la bijection réciproque de f et (C_g) sa courbe représentative.
Montrer que pour tout x de I, $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

3) Construire dans le même repère les courbes (C_f) et (C_g). (On prendra 2 cm comme unité sur les axes de coordonnées).

4) Pour tout entier naturel non nul n, on définit la suite numérique (U_n) par : $U_n = \displaystyle\int_0^{\frac{n-1}{n}} (\ln(1+x) - \ln(1-x))dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$U_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}.$$

b) Calculer la limite de la suite (U_n) et interpréter graphiquement le résultat.

Partie B :

5) Soit S la symétrie orthogonale d'axe (Δ) : y = x et T la translation de vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j}$. On pose φ = ToS.
a) Donner la nature de l'application φ.
b) Construire l'image par φ de (C_f).
6) On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j}$, la droite (Δ') : x – y – 1 = 0 et S' la symétrie orthogonale d'axe (Δ').
a) Vérifier que le triplet $(O\,;\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ forme un repère orthogonal du plan.
b) Montrer que dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ se décompose de façon unique sous la forme $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$ où $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont des vecteurs colinéaires à $\vec{e}_1$ et à $\vec{e}_2$ respectivement, que l'on précisera.
c) On désigne par H et H' les projetés orthogonaux respectifs de A sur (Δ) et sur (Δ'). Montrer que $\overrightarrow{V_2} = 2\overrightarrow{HH'}$.
En déduire que T = T_1oS'oS où T_1 est une translation dont on précisera le vecteur.
d) Montrer que φ = T_1oS'.

Exercice 44 — **60 minutes**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, A', B et B' d'affixes respectives : $z_A = 1 - 2i$, $z_{A'} = -2 + 4i$, $z_B = 3 - i$ et $z_{B'} = 5i$.
1)a) Placer les points A, A', B et B' dans le plan complexe. Montrer que ABB'A' est un rectangle.
b) Soit s la réflexion telle que s(A) = A' et s(B) = B'. On note (Δ) son axe.
Donner une équation de (Δ) et la tracer dans le plan complexe.

c) On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z. Montrer que : $z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2i - 1$.

2) Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' telle que :

$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\overline{z} + 5 - i$.

a) On note C et D les images respectives de A et B par g. Déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.

b) Soit Ω le point d'affixe 1 + i et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.
Montrer que C et D sont les images respectives de A' et B' par h.

c) Soit M_1 point d'affixe z_1, l'image par h de M, d'affixe z.
Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.

3) On pose $f = h^{-1} o g$.

a) Déterminer l'expression complexe de f.

b) Reconnaître f. En déduire une construction du point P, image par g du point M quelconque du plan.

Exercice 45 **BAC C – Nouvelle Calédonie – 2005** **50 minutes**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

A)1) Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectives :

$z_I = 1$, $z_J = i$, $z_H = 1 + i$, $z_A = 2$, $z_B = \frac{3}{2} + i$, $z_C = 2i$ et $z_D = -1$.

2) Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F. Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_F = -1 + \frac{1}{2}i$.

3) Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

B) On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe $z' = -i\overline{z} + 2i$.

1) Déterminer les images des points O, A et B par f.

2)a) Montrer que f est une isométrie.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

c) f est-elle une symétrie axiale ? Sinon préciser la nature de f.

3) Soit t la translation de vecteur $\vec{IJ}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.

4) On pose $s = f o t^{-1}$.

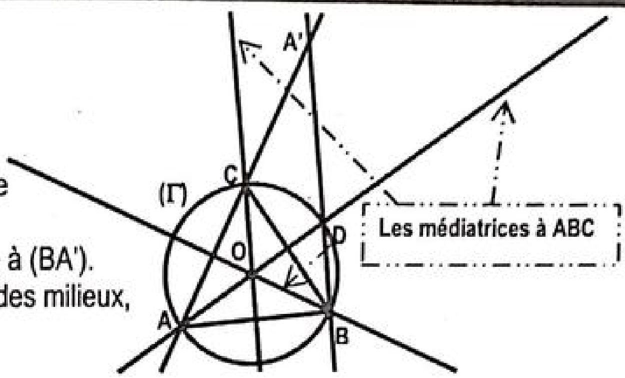
a) Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = -i\overline{z} + 1 + i$.

b) Monter que I et J sont invariants par s. En déduire la nature de s.

c) En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser. Caractériser alors f.

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

Solution 30



1) (OC) est la médiatrice du segment [AB].
D'où (AB) est perpendiculaire à (OC).
[AD] est un diamètre de (Γ) et B appartient à (Γ).
D'où ABD est un triangle rectangle en B.
Par conséquent, on a (AB) perpendiculaire à (BD), c'est-à-dire
(AB) perpendiculaire à (BA').
Puisque (OC) ⊥ (AB) et (BA') ⊥ (AB), alors (OC) est parallèle à (BA').
Or (OC) coupe [BA] en son milieu, alors d'après le théorème des milieux,
on conclut que C est le milieu de [AA'].
Et donc $s_C(A) = A'$.

2) • (BD) et (DC) sont sécantes en D, d'où $s_{(BD)} \circ s_{(DC)}$ est la rotation de centre D et d'angle $2(\overline{DC}, \overline{DB})$ dont une mesure est $-\frac{2\pi}{3}$.

• (CA) et (AB) sont sécantes en A, d'où $s_{(CA)} \circ s_{(AB)}$ est une rotation de centre A et d'angle $2(\overline{AB}, \overline{AC})$ dont une mesure est $\frac{2\pi}{3}$.

• (DC) et (CA) sont sécantes en C, d'où $s_{(DC)} \circ s_{(CA)}$ est la rotation de centre C et d'angle $2(\overline{CA}, \overline{CD})$ dont une mesure est π. Donc $s_{(DC)} \circ s_{(CA)}$ est la symétrie centrale de centre C.

3)a) • $f(A) = s_{(BD)} \circ s_C \circ s_{(AB)}(A) = s_{(BD)} \circ s_C(A) = s_{(BD)}(A') = A'$.

• **Nature et éléments caractéristiques de f :**

$f = s_{(BD)} \circ s_C \circ s_{(AB)} = s_{(BD)} \circ (s_{(DC)} \circ s_{(CA)}) \circ s_{(AB)}$ (d'après la question 2)).

Donc $f = (s_{(BD)} \circ s_{(DC)}) \circ (s_{(CA)} \circ s_{(AB)}) = r_{\left(D, -\frac{2\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A, \frac{2\pi}{3}\right)}$.

Or $-\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 0$, alors f est une translation. Puisque f(A) = A' alors f est la translation de vecteur $\overline{AA'}$.

b) Puisque $s_{(BD)} \circ s_C \circ s_{(AB)} = t_{\overline{AA'}}$ (d'après la question précédente) alors $s_{(BD)} \circ s_C = t_{\overline{AA'}} \circ s_{(AB)}$.

$\overline{AA'}$ n'étant pas normal à (AB), alors $t_{\overline{AA'}} \circ s_{(AB)}$, c'est-à-dire $s_{(BD)} \circ s_C$ est une symétrie glissée.

Remarque : *On peut déterminer les éléments caractéristiques de* $t_{\overline{AA'}} \circ s_{(AB)}$:

En effet, $\overline{AA'} = \overline{AB} + \overline{BA'}$ *, donc* $t_{\overline{AA'}} \circ s_{(AB)} = t_{\overline{AB}} \circ t_{\overline{BA'}} \circ s_{(AB)}$. *Or* $t_{\overline{BA'}} = s_\Delta \circ s_{(AB)}$ *, où Δ est la perpendiculaire à (A'B) passant par C, alors* $t_{\overline{AA'}} \circ s_{(AB)} = t_{\overline{AB}} \circ s_\Delta \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)} = t_{\overline{AB}} \circ s_\Delta$.

$\overline{AB}$ *étant vecteur directeur de Δ,* $s_{(BD)} \circ s_C$ *est la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur* $\overline{AB}$.

Solution 31

1)a) Voir le schéma à la fin de cette solution.

b) On a $\text{mes}(\overline{MB}, \overline{MC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, c'est-à-dire $\text{mes}(\overline{MB}, \overline{MC}) \equiv (\overline{AB}, \overline{AC})[2\pi]$.

L'ensemble des points M du plan tels que $\text{mes}(\overline{MB}, \overline{MC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, est l'arc du cercle (Γ) de corde [BC] contenant le point A, privé des points B et C.

2)a) • On a AB = PC et A ≠ B ; d'où il existe un unique déplacement qui transforme A en P et B en C.

Or on a $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{PC}$, alors ce déplacement n'est pas une translation. Par conséquent, c'est une rotation.
On conclut donc qu'il existe une unique rotation qui transforme A en P et B en C.

- On sait que r(A) = P et r(B) = C. D'où l'angle de r est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ dont une mesure est $\frac{\pi}{3}$.

b) r(B) = C. Alors soit Ω le centre de r, on a : ΩB = ΩC et $mes(\overline{\Omega B}, \overline{\Omega C}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

- Puisque $mes(\overline{\Omega B}, \overline{\Omega C}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, alors Ω appartient à l'arc de corde [BC] de (Γ) contenant A, privé des points B et C. D'où le centre Ω de r est un point de (Γ).

Plus précisément, Ω appartient à l'arc du cercle (Γ) de corde [BC], contenant A, privé de B et C.

- ΩB = ΩC, donc Ω est un point de la médiatrice de [BC], qui est (OE).

Mieux encore, Ω est le point de rencontre de l'arc de corde [BC] de (Γ) contenant A et la droite (OE), qui est J.
D'où le centre de r est J.

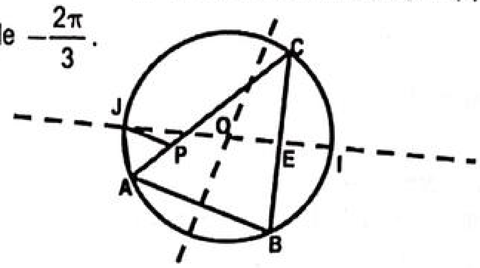
c) r est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre J, et r transforme A en P, alors JAP est un triangle équilatéral direct.

3)a) $ros_B(B) = r(B) = C$.

b) • $r \circ s = r_{\left(J, \frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{(B, \pi)}$ et $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$, d'où ros_B est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

- Soit Ω', le centre de ros_B. On a $ros_B(B) = C$, donc Ω'B = Ω'C et $mes(\overline{\Omega' B}, \overline{\Omega' C}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

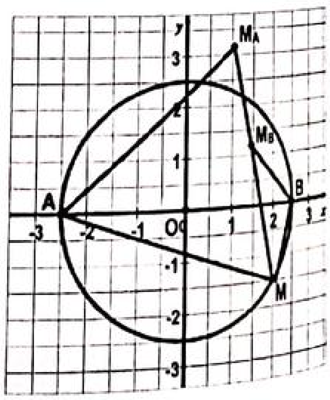
Donc Ω' est le point de rencontre de (OE), médiatrice de [BC] et l'arc de corde [BC] de (Γ) ne contenant pas A, qui est I.
D'où ros_B est la rotation de centre I et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.



Solution 32

1) Voir la figure ci-dessous.

2)a) Méthode 1 : utilisation de r_A^{-1} puis r_B.



r_A^{-1} est la rotation de centre A, d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

r_B est la rotation de centre B, d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Or $-\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\pi$, d'où $r_B o\, r_A^{-1}$ est une symétrie centrale.

Puisque $r_B o\, r_A^{-1}(M_A) = r_B(M) = M_B$, alors $r_B o\, r_A^{-1}$ est la symétrie centrale de centre le milieu de $[M_AM_B]$. On conclut donc que : pour tout point M du plan, le milieu de $[M_AM_B]$ est le centre de la symétrie $r_B o\, r_A^{-1}$, qui est indépendant de M.
D'où le milieu du segment $[M_AM_B]$ est un point fixe.

b) Méthode 2 : utilisation des complexes.

-a, a, z, z_A et z_B désignent les affixes respectives des points A, B, M, M_A et M_B.

- $r_A(M) = M_A$ équivaut à $z_A + a = e^{i\frac{\pi}{3}}(z + a)$.

Ce qui signifie $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}z - a(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - a\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- De même $r_B(M) = M_B$ équivaut à $z_B - a = e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z-a)$.

Ce qui signifie $z_B = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z + a(1 - e^{-i\frac{2\pi}{3}}) = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + a\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Le milieu de $[M_AM_B]$ a pour affixe :

$\frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - a\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + a\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{a}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

On constate que l'affixe du milieu de $[M_AM_B]$ est indépendante de celle de M.
Le milieu de $[M_AM_B]$ est donc un point fixe.

3) • Notons que AMM_A est un triangle équilatéral de sens direct, donc $\text{mes}(\overrightarrow{MM_A}, \overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Le triangle BMM_B est isocèle en B et $\text{mes}(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM_B}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$, donc $\text{mes}(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MM_B}) \equiv \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right)[2\pi]$.

D'où, $(\overrightarrow{MM_A}, \overrightarrow{MM_B}) = (\overrightarrow{MM_A}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MM_B}) = \frac{\pi}{3} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2}$

D'où $\text{mes}(\overrightarrow{MM_A}, \overrightarrow{MM_B}) \equiv \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

- M, M_A et M_B sont alignés si et seulement si $\text{mes}(\overrightarrow{MM_A}, \overrightarrow{MM_B}) \equiv 0[\pi]$.

Ce qui signifie que $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2} \equiv 0[\pi]$. C'est-à-dire $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[\pi]$.

Ce qui se traduit par M appartient au cercle de diamètre [AB], privé des points A et B.
D'où, l'ensemble des points M du plan lorsque M, M_A et M_B sont alignés est le cercle de diamètre [AB], privé des points A et B.

Solution 33

A)1) • $f(K) = RoT(K) = R(J) = K$. • $g(J) = ToR(J) = T(K) = J$.

2) f et g sont des composées d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'une translation.

D'où f et g sont des rotations d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

Or d'après la question 1), f(K) = K et g(J) = J, alors f et g sont des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs K et J.

B)1) g est une rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et f^{-1} est une rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Or $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$, alors gof^{-1} est une translation.

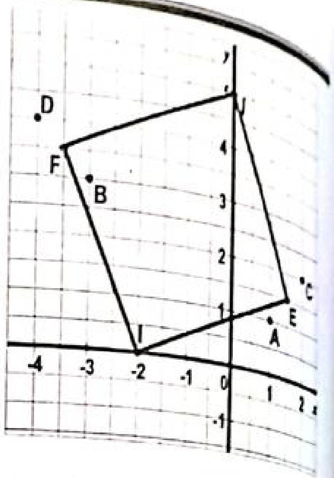
2) $gof^{-1}(A) = g(I) = C$. D'où gof^{-1} est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

3) On a $g(M) = M_2$ et $f(M) = M_1$. D'où $gof^{-1}(M_1) = g(M) = M_2$, c'est-à-dire $t_{\overrightarrow{AC}}(M_1) = M_2$. Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

Finalement, ACM_2M_1 est un parallélogramme.

Solution 34

1) • On a $AC = \sqrt{2}$ et $BD = \sqrt{2}$.
On constate que AC = BD, alors il existe un unique déplacement qui transforme A en B et C en D.
Or $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$, alors ce déplacement n'est pas une translation, c'est donc une rotation.
Il existe donc une unique rotation r qui transforme A en B et C en D.



- Comme r(A) = B et r(C) = D, alors l'angle de r est $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$.

Or $\dfrac{z_{\overrightarrow{BD}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{-1+i}{1+i} = i$ et $\arg i \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, alors $mes(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Par conséquent, l'angle de r est $\dfrac{\pi}{2}$.

- Déterminons l'expression complexe de r puis son centre I :

Soit M et M' d'affixes respectives z et z'.
(r(M) = M' et r(A) = B) équivaut à dire que $(z' - z_B) = i(z - z_A)$.
C'est-à-dire $z' = iz - 2 + 2i$.
Or r(M) = M équivaut à $z = iz - 2 + 2i$; c'est-à-dire $z = -2$.
D' où le centre de r est le point d'affixe -2. Soit I(-2 , 0).

2) • AC = DB, d'où il existe un unique déplacement qui transforme A en D et C en B.

Or $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{DB}$, alors ce déplacement n'est pas une translation, c'est donc une rotation r'.

L'angle de r' :

L'angle de r' est $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB})$.

Or $\dfrac{z_{\overrightarrow{DB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$ et $\arg(-i) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, alors une mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB})$ est $-\dfrac{\pi}{2}$.

r' est donc une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

- Soit M d'affixe z.

r(M) = M et r(A) = D donc $z - z_D = -i(z - z_A)$. On en déduit que $z = \dfrac{z_D + iz_A}{1+i} = 5i$. D'où J(0 , 5) est le centre de r'.

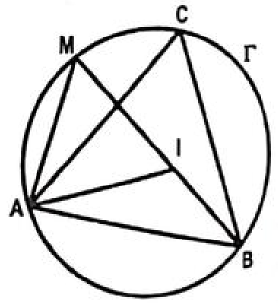
3) r et r' transforment [AC] en [BD].
Or E et F sont les milieux respectifs de [AC] et [BD]. Donc r(E) = F et r'(E) = F.
r(E) = F équivaut à IEF est un triangle rectangle et isocèle direct de sommet I.
r'(E) = F équivaut à JEF est un triangle rectangle et isocèle indirect de sommet J.
D'où IEJF est un carré.

Solution 35

1) M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AMB}$ interceptent le même arc et $\widehat{AMB} = \widehat{AMI}$, alors $mes\widehat{AMI} = mes\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{3}$.

Comme MI = MA, alors AMI est un triangle isocèle dont un angle mesure 60°.
Ce qui signifie que le triangle AMI est équilatéral.



2) • AB = AC et $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, d'où r(B) = C.

- AIM est équilatéral indirect, d'où r(I) = M.
- I appartient à [MB], d'où MB = MI + IB (1)

Par hypothèse, MI = MA (2)
De plus, r(B) = C et r(I) = M, d'où BI = MC. (3).
Des égalités (1), (2) et (3), on déduit que MB = MA + MC.

Solution 36

1)a) • ABC est un triangle équilatéral direct donc, $r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}(B) = C$. Ce qui signifie que $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.

- DEF est un triangle équilatéral direct donc, $r_{\left(D, \frac{\pi}{3}\right)}(E) = F$. Donc, $f - d = e^{i\frac{\pi}{3}}(e - d)$.

b) • EDBG est un parallélogramme donc $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{GB}$. Ce qui se traduit par d – e = b – g. Donc g = b – d + e.

• CDFH est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{HF}$. Ce qui se traduit par d – c = f – h. Donc h = f – d + c.

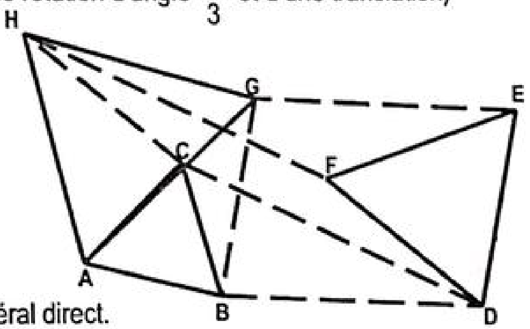
c) • $h-a=(f-d)+(c-a)=e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)+e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)=e^{i\frac{\pi}{3}}(\underbrace{b-d+e}_{g}-a)=e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$.

D'où $h-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$.

• Puisque $h-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$ signifie $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(G)=H$, alors AGH est un triangle équilatéral direct.

2)a) • rot_1 est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ (car composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'une translation).

Donc $f=t_2 o rot_1$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ (car composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'une translation)



• $f(B) = t_2 o rot_1(B) = t_2 o r(D) = t_2(D) = C$. D'où f(B) = C.

• f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et f(B) = C.

Soit Ω le centre de f. ΩBC est un triangle équilatéral direct.

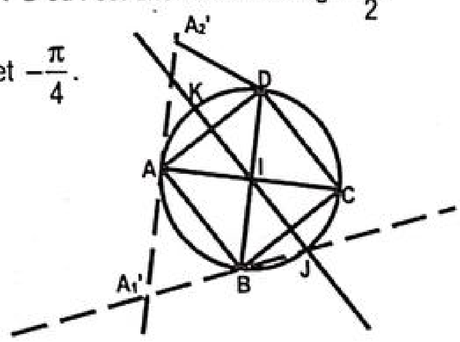
D'où Ω = A. Donc $f=r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$.

b) • $f(G) = t_2 o rot_1(G) = t_2 o r(E) = t_2(F) = H$. D'où f(G) = H.

• $f=r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$ et f(G) = H. D'où AGH est un triangle équilatéral direct.

Solution 37

1) • $f = t o r_D$ est la composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. D'où f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.



• $g_1 = r_1 o f$ est une composée de deux rotations d'angles respectifs $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{4}$.

Or $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$, d'où g_1 est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

• $g_2 = r_2 o f$ est une composée de deux rotations d'angles $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Or $\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}$, d'où g_2 est une rotation d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

2)a) • $f(D) = t o r_D(D) = t(D) = A$. • $f(A) = t o r_D(A) = t(C) = B$

Centre de f :

f(D) = A et f(A) = B, donc le centre de f est le point commun aux médiatrices des segments [AD] et [AB], qui est I.

b) • $g_1(D) = r_1 o f(D) = r_1(A) = A$. • $g_2(D) = r_2 o f(D) = r_2(A) = A$.

3)a) g_1^{-1} est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$, or $-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\pi$, alors $g_2 o g_1^{-1}$ est une symétrie centrale.

Or $g_2 o g_1^{-1}(A) = g_2(D) = A$, alors A étant invariant par $g_2 o g_1^{-1}$, A est le centre de $g_2 o g_1^{-1}$.

De plus, $g_2 o g_1^{-1}(A_1') = g_2(A) = A_2'$, alors $A_2' = s_A(A_1')$, c'est-à-dire A est le milieu de $[A_1'A_2']$.

b) • g_1 est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. Et $g_1(A) = A_1'$ et $g_1(D) = A$, alors une mesure de l'angle $(\overline{AD},\overline{A_1'A})$ est $\frac{\pi}{4}$.

Or $(\overline{AD},\overline{AA_1'})=(\overline{AD},\overline{A_1'A})+(\overline{A_1'A},\overline{AA_1'})$, alors une mesure de l'angle $(\overline{AD},\overline{AA_1'})$ est $\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$.

• On a $(\overline{AI},\overline{AA_1'})=(\overline{AI},\overline{AD})+(\overline{AD},\overline{AA_1'})$, alors une mesure de l'angle ($(\overline{AI},\overline{AA_1'})$ est $\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$.

On conclut alors que (AJ) est perpendiculaire à (AA_1'). Finalement, A_1' est sur la tangente en A à (Γ) cercle de centre I.

4)a) • Notons que (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que $mes(\overline{MD}, \overline{MA}) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$ ou M = A ou M = D.

• Or $g_1(D) = A$ et g_1 est la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ de centre J, une mesure de l'angle $(\overline{JD}, \overline{JA})$ est $\frac{\pi}{4}$.

D'où J appartient à (Γ).

• $g_2(D) = A$ et g_2 est la rotation de centre K, d'angle $\frac{3\pi}{4}$, alors une mesure de l'angle $(\overline{KD}, \overline{KA})$ est $\frac{3\pi}{4}$.

Comme $\frac{3\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$, alors K appartient à (Γ).

• $g_1(D) = A$, d'où J est sur la médiatrice de [AD].
$g_2(D) = A$, d'où K est sur la médiatrice de [AD].

Or cette médiatrice de [AD] passe par I et rencontre (Γ) en deux points distincts, qui sont diamétralement opposés. Et comme J et K appartiennent à (Γ) et à la médiatrice de [AD], et qu'ils sont distincts, alors J et K sont les deux points ci-dessus. D'où J et K sont donc diamétralement opposés.

b) Les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{AJB}$ interceptent le même arc du cercle (Γ) de corde [AB].

D'où ils ont la même mesure. Une mesure de l'angle $(\overline{JA}, \overline{JB})$ est donc $\frac{\pi}{4}$.

Or $g_1(A) = A_1'$, alors une mesure de l'angle $(\overline{JA}, \overline{JA_1'})$ est $\frac{\pi}{4}$. D'où $(\overline{JA}, \overline{JB}) = (\overline{JA}, \overline{JA_1'})$.

On peut donc conclure que A_1' appartient à (JB).

Construction des points A_1' et A_2' :

A_1' est le point de rencontre de la droite (BJ) et la tangente à (Γ) en A. Et A_2' est le symétrique de A_1' par rapport à A.

Solution 38

Soit M(x , y) un point du plan.

• M appartient à E si et seulement si, $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$. Ce qui signifie que $1 - \sqrt{|x|} = \sqrt{|y|}$.

Ce qui équivaut à ($|y| = (1 - \sqrt{|x|})^2$, avec $\sqrt{|x|} \le 1$) ; puis à ($y = (1 - \sqrt{|x|})^2$ ou $y = -(1 - \sqrt{|x|})^2$ avec $|x| \le 1$).

Donc E est la réunion des courbes E_1 d'équation $y = (1 - \sqrt{|x|})^2$ et E_2 d'équation $y = -(1 - \sqrt{|x|})^2$, avec $-1 \le x \le 1$.

• On remarquera que E_1 et E_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Il suffit alors de construire E_1, pour avoir E_2, donc E. Posons alors $f(x) = (1 - \sqrt{|x|})^2$.

Pour tout réel x appartenant à [-1 , 1], -x appartient aussi à [-1 , 1] et f(-x) = f(x).
f est donc paire, et par conséquent, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Il suffit donc d'étudier la restriction g de f dans [0 , 1].

Etude de la fonction g telle que $g(x) = (1 - \sqrt{x})^2$:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = -\infty .$$

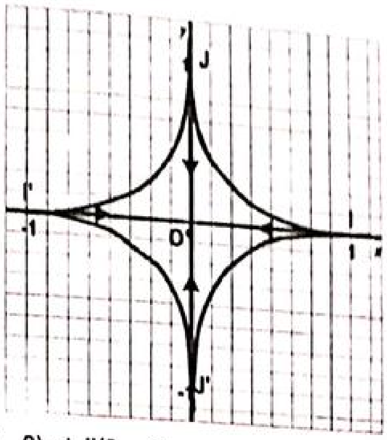
g n'est donc pas dérivable en 0, et même, sa courbe admet en son point d'abscisse 0, une demi-tangente verticale.

g est dérivable sur]0 , 1] et, pour tout réel x dans]0 , 1], on a : $g'(x) = 2 \times \frac{-1}{2\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$.

Or pour tout réel x dans]0 , 1[, on a g'(x) < 0 et g'(1) = 0. D'où g est strictement décroissante sur]0 , 1].
D'où le tableau de variation de g qui suit :

x	0		1
g'(x)	‖	-	0
g(x)	1	↘	0

On peut alors construire l'ensemble E :



Considérons les points I(1 , 0), J(0 , 1), I'(-1 , 0) et J'(0 , -1).
Soit s une isométrie laissant E globalement invariant.
s transforme le segment [II'] en un segment de même longueur, avec s(I) et s(I') appartenant à E.
Donc s transforme [II'] soit en [II'], soit en [JJ'], car sinon la longueur de l'image de [II'] par s sera inférieure à celle de [II'].
Donc le milieu de O de [II'] est transformé en le milieu de [II'] ou de [JJ'], qui est O. D'où s(O) = O.
De plus, on a : s(I) = I ou s(I) = J ou s(I) = I' ou s(I) = J'.
Puisque s laisse O invariant, alors s est soit un déplacement laissant un point invariant, soit une réflexion.

- Soit r un déplacement laissant E globalement invariant, r est une rotation de centre O ou alors l'application identique du plan.

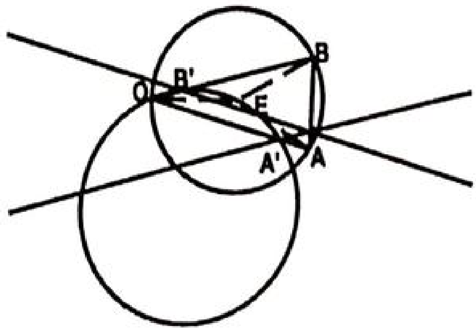
Si r(I) = I, alors r est l'application identique du plan (car r est un déplacement laissant plus d'un point invariant)
Si r(I) = J, alors $r = r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$.
Si r(I) = I', alors r = so.
Si r(I) = J', alors $r = r_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$.
Le lecteur vérifiera que ces quatre déplacements laissent E globalement invariant.

- Soit S_{Δ} une réflexion laissant E globalement invariant. $S_{\Delta}(O) = O$, d'où O appartient à Δ.

Si $S_{\Delta}(I) = I$, alors Δ = (OI).
Si $S_{\Delta}(I) = J$, alors Δ est la première bissectrice.
Si $S_{\Delta}(I) = I'$, alors Δ = (OJ).
Si $S_{\Delta}(I) = J'$, alors Δ est la seconde bissectrice.
Le lecteur vérifiera que ces quatre réflexions laissent E globalement invariant.
D'où les isométries laissant E globalement invariant sont :
Id_P, so, $r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$, $r_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$, $S_{(O,\vec{i})}$, $S_{(O,\vec{j})}$, $S_{(\Delta:y=x)}$ et $S_{(\Delta:y=-x)}$.

Solution 39

1) (OA') est parallèle à (PB'), de même (OB') est parallèle à (PA').
Donc OA'PB' est un parallélogramme. On en déduit que OA' = PB'.
De plus (OA) est parallèle à (PB'), d'où d'après la propriété de Thalès appliquée au triangle OAB, on a : $\frac{BB'}{BO} = \frac{PB'}{OA}$.



Comme OA = OB (d'après l'énoncé), alors, on déduit que BB' = PB'.
On a donc OA' = PB' et BB' = PB'.
On peut alors conclure que OA' = BB'.
2) • On a OA' = BB' ;
donc il existe un unique déplacement r qui transforme O en B et A' en B'.
Les vecteurs $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont différents, r n'est donc pas une translation, mais une rotation.

Il existe donc une unique rotation r qui transforme O en B et A' en B'.

- Comme r transforme O en B et A' en B', alors son angle est $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{BB'})$.

Or $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{BB'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BO}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BO}) = \pi + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

D'où l'angle de r est $\pi + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

- Exprimons A comme barycentre de A' et O, puis O comme barycentre de B' et B ;

Il existe deux réels positifs p et q tels que $\overrightarrow{AO} = p\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{OB} = q\overrightarrow{OB'}$.

Donc AO = pAA' et OB = qOB', c'est-à-dire $p = \dfrac{AO}{AA'}$ et $q = \dfrac{OB}{OB'}$.

On obtient alors : $\overrightarrow{AO} = \dfrac{AO}{AA'}\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{OB} = \dfrac{OB}{OB'}\overrightarrow{OB'}$.

Ce qui nous permet d'écrire : $AA'\,\overrightarrow{AO} - AO\,\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$ et $OB'\,\overrightarrow{OB} - OB\,\overrightarrow{OB'} = \vec{0}$.

Alors A est barycentre de (O, AA') et (A', −OA) et O celui de (B, AA') et (B', −OA) (car OA = OB et AA' = OB').

Par suite, r(A) = bar{(r(O), AA'), (r(A'), −OA)} = bar{(B, AA'), (B', −OA)} = O. Finalement, on a r(A) = O.

- r(O) = B et r(A) = O. D'où le centre Ω de r est le point commun aux médiatrices des segments [OB] et [AO].

D'où le centre de r est le centre du cercle circonscrit au triangle OAB.

3) On a r(A') = B', d'où $(\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}) = \pi + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

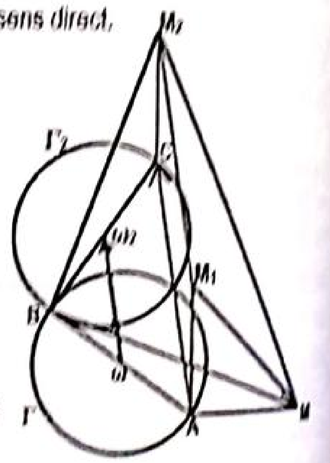
Comme $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, alors $(\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}) = \pi + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'})$.

Les points O, A' et B' n'étant pas alignés, les points O, A', B' et Ω sont *cocycliques*.

Solution 40

1) a) $T(A) = R_B o R_A^{-1}(A) = R_B(A) = C$.

On remarque que $R_B(A) = C$, d'où le triangle BAC est rectangle et isocèle en B, de sens direct.



b) R_B est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et R_A^{-1} est une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Puisque $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 0$, alors T est une translation.

Or T(A) = C, alors T est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

c) On a $T(M_1) = R_B o R_A^{-1}(M_1) = R_B(M) = M_2$.

D'où $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$, et par conséquent, M_1M_2CA est un parallélogramme.

2)a) M décrit le cercle de diamètre [AB] et $M_2 = R_B(M)$, d'où Γ_2 est le cercle de diamètre $[R_B(A)R_B(B)]$, donc Γ_2 est le cercle de diamètre [BC].

b) ω est le milieu de [AB] et ω_2 est le milieu de [BC], alors d'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, on a donc : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{\omega\omega_2}$.

c) $\overrightarrow{IM_2} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2}$, d'où $\overrightarrow{IM_2} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\omega\omega_2}$. I est alors l'image de M_2 par $t_{\overrightarrow{\omega_2\omega}}$.

Or lorsque M décrit Γ, M_2 décrit Γ_2. Et comme Γ_2 est le cercle de centre ω_2 et de rayon $B\omega_2$, alors I décrit le cercle image de Γ_2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{\omega_2\omega}$, qui est le cercle de centre ω et rayon ωA.

Solution 41

1)a) $z' = x' + iy' = y + ix = i(x - iy) = i\bar{z}$. D'où $z' = i\bar{z}$.

b) La réflexion s d'axe $(O ; \vec{u})$ transforme M(x , y) en M'(x' , y') tels que x' = x et y' = −y.

Montrons que fos est une rotation.

Soit M d'affixe z, un point du plan, $M_1 = s(M)$ d'affixe z_1 et $M' = f(M_1)$ d'affixe z'.

On a $z_1 = x - iy = \bar{z}$ et $z' = i\bar{z_1}$. D'où z' = iz.

fos a donc pour expression complexe z' = iz, donc fos est la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Puisque fos = r, alors f = ros, où s est la réflexion d'axe $(O;\vec{u})$ et r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) Puisque la droite $(O;\vec{u})$ passe par O, déterminons la droite (D) telle que $r = s_{(D)}os$.

(D) est l'image de $(O;\vec{u})$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Donc (D) est la première bissectrice, c'est-à-dire, la droite d'équation y = x.

Puisque $r = s_{(D)}os$, alors $f = s_{(D)}osos = s_{(D)}$.

3)a) $z'' = y+1+i(x+1) = i(x-iy)+1+i = i\bar{z}+1+i$. D'où $z'' = i\bar{z}+1+i$.

b) Si g = tof, alors t = gof.

Soit M d'affixe z, un point du plan, $M_1 = f(M)$ d'affixe z_1 et $M' = g(M_1)$ d'affixe z'.

On a $z_1 = i\bar{z}$ et $z' = i\bar{z_1}+1+i$. Donc z' = z + 1 + i. D'où l'écriture complexe de t est z' = z + 1 + i.

Par conséquent, t est la translation de vecteur d'affixe 1 + i.

c) Le point K a pour affixe $\frac{z+z''}{2} = \frac{y+1+ix+i+x+iy}{2} = \frac{x+y+1}{2} + \frac{x+y+1}{2}i$.

On remarque que $y_K = x_K$. D'où le point K appartient à la droite d'équation y = x, pour tout point M du plan.

Solution 42

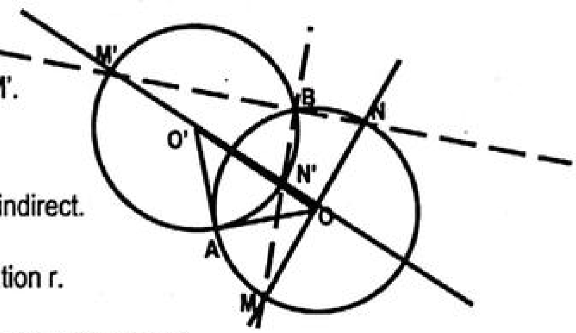
1) M appartient à (C) donc OM = OA.

M' appartient à (C') donc O'M' = O'A.

Or OA = O'A (car le triangle AOO' est isocèle de sommet A, donc O'M' = OM.

Il existe donc un unique déplacement qui transforme O en O' et M en M'.

Mais comme le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ est différent du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ (car sinon on aurait $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M'}$. Ce qui est impossible car $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.), alors ce déplacement est une rotation r.



D'où il existe une unique rotation r qui transforme O en O' et M en M'.

Son angle est $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'})$ dont une mesure est $-\frac{\pi}{2}$.

Son centre est B car BOO' est un triangle rectangle isocèle en B et indirect.

2) N est le point d'intersection de (BN) avec (C) autre que B.

r(N) est un point d'intersection des images de (BN) et (C) par la rotation r.

Or l'image de (C) est (C') et l'image de (BN) est (BN'),

alors r(N) est B ou N' (puisque (C') et (BN') se rencontrent en B et en N' uniquement).

Et comme r(B) = B et B ≠ N, alors r(N) = N'.

Solution 43

Partie A :

1)a) • f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a : $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$.

• Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a aussi : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1$.

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$.

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)	+	
f(x)	-1 ↗	1

b) • f ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$f''(x)=\frac{2e^x(e^x+1)^2-2e^x(e^x+1)\times 2e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{2e^x-2e^{2x}}{(e^x+1)^3}=\frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.$$

Pour tout réel x, on a $\frac{2e^x}{(e^x+1)^3}>0$, donc le signe de f "(x) est celui de $1-e^x$.

Or $1-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$. Avec $1-e^x=0$ si et seulement si x = 0.
Finalement, Pour tout x < 0, on a : f "(x) > 0, pour tout x > 0, on a f "(x) < 0 et f "(0) = 0.

- Notons que f(0) = 0 et $f'(0)=\frac{1}{2}$. Donc une équation de T_0 est $y=\frac{1}{2}x$.

D'après ce qui précède, f ' est croissante sur]-∞ , 0] et décroissante sur [0 , +∞[.

Donc f ' est majorée par $f'(0)=\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout $x\geq 0$, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur [0, x], on a :

$f(x)-f(0)\leq\frac{1}{2}(x-0)$. C'est-à-dire $f(x)\leq\frac{1}{2}x$. Donc (C_f) est au dessus de T_0 dans [0 , +∞[.

pour tout $x\leq 0$, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur [x , 0], on a :

$f(0)-f(x)\leq\frac{1}{2}(0-x)$. C'est-à-dire $f(x)\geq\frac{1}{2}x$. Donc (C_f) est au dessous de T_0 dans]-∞ , 0].

c) D'après la question précédente f " s'annule en 0 en changeant de signe et f(0) = 0, donc l'origine O du repère est point d'inflexion à la courbe de f.

2)a) Montrons que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I de $\mathbb{R}$ que nous préciserons :
Puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $I=f(\mathbb{R})=]-1,1[$.

b) Montrons que $g(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$:

Soit x dans]-1 , 1[et y dans $\mathbb{R}$.

$g(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \frac{e^y-1}{e^y+1}=x \Leftrightarrow e^y=\frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow y=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Finalement, pour tout x dans]-1 , 1[, on a $g(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

3) Construction des (C_f) et (C_g) :
Notons que les droites d'équations y = -1 et y = 1 sont asymptotes à la courbe de f et que les courbes (C_f) et (C_g) sont symétriques par rapport à la première bissectrice. (Voir les courbes (C_f) et (C_g) sur le graphique ci-dessous).

4)a) Expression de U_n :

Soit n entier naturel non nul, $U_n=\int_0^{\frac{n-1}{n}}\ln(1+x)dx-\int_0^{\frac{n-1}{n}}\ln(1-x)dx$

Posons u'(x) = 1 et v(x) = ln(1 + x), pour u(x)= 1 + x et $v'(x)=\frac{1}{1+x}$.

On a : $\int_0^{\frac{n-1}{n}}\ln(1+x)dx=[(1+x)\ln(1+x)]_0^{\frac{n-1}{n}}-\int_0^{\frac{n-1}{n}}1dx=\left(\frac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right)-\frac{n-1}{n}$.

Posons maintenant, u'(x) = 1 et v(x) = ln(1 – x), pour u(x)= x – 1 et $v'(x)=-\frac{1}{1-x}$.

On a : $\int_0^{\frac{n-1}{n}}\ln(1-x)dx=[(x-1)\ln(1-x)]_0^{\frac{n-1}{n}}-\int_0^{\frac{n-1}{n}}1dx=\left(-\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n-1}{n}=\frac{\ln n}{n}-\frac{n-1}{n}$.

D'où, $U_n=\left(\frac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right)-\frac{n-1}{n}-\frac{\ln n}{n}+\frac{n-1}{n}=\left(\frac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right)-\frac{\ln n}{n}$.

Finalement, on a $U_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}$.

b) Calcul de la limite de (U_n) et interprétation graphique de cette limite :

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n-1}{n}\right) = 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) = 2\ln 2$.

Ainsi, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2\ln 2$.

- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n} = 1$ et que la courbe de g est au-dessus de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0\ ,\ 1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2\ln 2$ est l'aire en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de g, les droites d'équations x = 0 et x = 1.

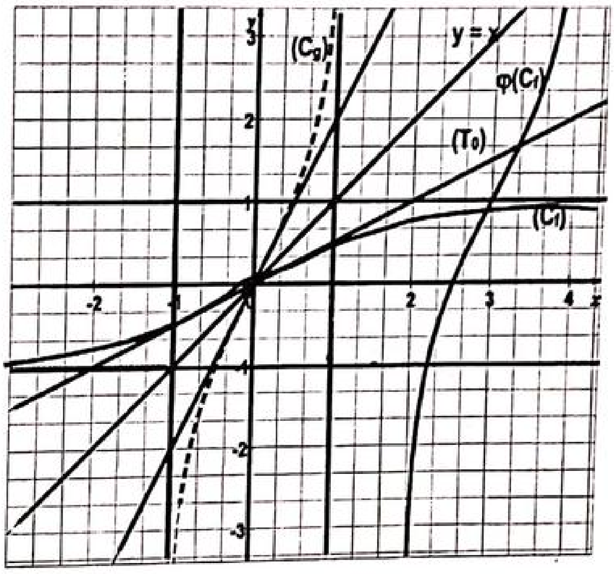
Partie B :

5)a) Nature de φ :

Notons que $\overrightarrow{OA}$ n'est pas un vecteur normal à (Δ), donc φ est une symétrie glissée.

b) construction de $\varphi(C_f)$:

On a $\varphi(C_f) = ToS(C_f) = T(C_g)$. Donc $\varphi(C_f)$ est le translaté de (C_g) par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.



6)a) vérification que $(O\ ;\vec{e}_1\ ,\vec{e}_2)$ forme un repère orthogonal du plan :

Puisque $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont non nuls et $\vec{e}_1.\vec{e}_2 = 1\times1 + 1\times(-1) = 0$, alors $(O\ ;\vec{e}_1\ ,\vec{e}_2)$ est un repère orthogonal.

b) Montrons que dans la base $(\vec{e}_1\ ,\vec{e}_2)$, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ se décompose de façon unique sous la forme $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$ où $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont des vecteurs colinéaires à $\vec{e}_1$ et à $\vec{e}_2$ respectivement, que nous préciserons :

Puisque $(\vec{e}_1\ ,\vec{e}_2)$ est une base alors le vecteur $\overrightarrow{OA}$ se décompose de façon unique comme combinaison linéaire de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

Or $\overrightarrow{OA} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, donc $\overrightarrow{OA}$ se décompose de façon unique sous la forme $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$ où $\overrightarrow{V_1} = 2\vec{e}_1$ et $\overrightarrow{V_2} = \vec{e}_2$.

c) Montrons que $\overrightarrow{V_2} = 2\overrightarrow{HH'}$ et déduisons en que $T = T_1 o S' o S$:

- Supposons H(x , y), on aura : $\begin{cases} H\in\Delta \\ (AH)\perp\Delta \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} y = x \\ (x-3)+(y-1)=0 \end{cases}$ et finalement x = y = 2. Donc H(2 , 2).

De même, Pour H'(x' , y'), on a : $\begin{cases} H'\in\Delta' \\ (AH')\perp\Delta' \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x'-y'-1=0 \\ (x'-3)+(y'-1)=0 \end{cases}$ et finalement $x' = \frac{5}{2}$ et $y' = \frac{3}{2}$.

On remarque que $\overrightarrow{HH'}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Donc $\vec{V_2} = 2\overrightarrow{HH'}$.

- On a $\overrightarrow{OA} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$, donc $T = T_{\vec{V_1}+\vec{V_2}} = T_{\vec{V_1}} o T_{\vec{V_2}} = T_{\vec{V_1}} o T_{2\overrightarrow{HH'}}$.

Or $S' o S = T_{2\overrightarrow{HH'}}$, car Δ et Δ' sont parallèles, alors $T = T_1 o S' o S$, où T_1 est la translation de vecteur $\vec{V_1}$.

d) Montrons que $\varphi = T_1 o S'$:

Nous avons $\varphi = T o S = T_1 o S' o S o S = T_1 o S'$.

Solution 44

1)a) Montons que ABB'A' est un rectangle :

$z_B - z_A = (3 - i) - (1 - 2i) = 2 + i$ et $z_{B'} - z_{A'} = 5i - (-2 + 4i) = 2 + i$.

Puisque $z_B - z_A = z_{B'} - z_{A'}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Donc ABB'A' est un parallélogramme.

On a aussi, $AB' = |z_{B'} - z_A| = |5i - (1 - 2i)| = |-1 + 7i| = \sqrt{50}$ et

$$BA' = |z_{A'} - z_B| = |(3 - i) - (-2 + 4i)| = |5 - 5i| = \sqrt{50}.$$

Puisque $AB' = BA'$, alors ABB'A' est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur.
Finalement, ABB'A' est un rectangle.

b) Equation de (Δ) :

$s(A) = A'$, donc (Δ) est la médiatrice du segment [AA'].

$\overrightarrow{AA'}(-3, 6)$ est un vecteur normal à (Δ) qui passe par $I\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, milieu de [AA'].

Donc une équation de (Δ) est $-3\left(x + \frac{1}{2}\right) + 6(y - 1) = 0$, soit $2x - 4y + 5 = 0$.

c) Montrons que $z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2i - 1$:

Soit $M(x, y)$ d'affixe z et $M'(x', y')$ d'affixe z' :

On a $\begin{cases} \text{mil}(M,M') \in \Delta \\ (MM') \perp \Delta \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} 2\left(\frac{x+x'}{2}\right) - 4\left(\frac{y+y'}{2}\right) + 5 = 0 \\ x' - x = -3k \text{ et } y' - y = 6k \end{cases}$ donc $\begin{cases} (2x - 3k) - 2(2y + 6k) + 5 = 0 \\ x' = x - 3k \text{ et } y' = y + 6k \end{cases}$.

Donc $\begin{cases} k = \frac{2}{15}x - \frac{4}{15}y + \frac{1}{3} \\ x' = x - 3k \text{ et } y' = y + 6k \end{cases}$. On en déduit alors que $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$.

Ainsi $z' = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1\right) + \left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2\right)i = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)x - i\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)y + 2i - 1 = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)(x - iy) + 2i - 1$.

Et finalement on a $z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2i - 1$.

2)a) Affixes de C et D :

$$z_C = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\overline{z_A} + 5 - i = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)(1 + 2i) + 5 - i = 7 - 5i$$

et $z_D = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\overline{z_B} + 5 - i = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)(3 + i) + 5 - i = 3 - 7i$.

b) Montrons que C et D sont les images respectives de A' et B' par h :

h est l'homothétie de centre Ω et de rapport -2, donc son expression complexe est : $z' - (1 + i) = -2(z - (1 + i))$.
C'est-à-dire $z' = -2z + 3(1 + i)$.
L'image par h de A' a pour affixe : $-2(-2 + 4i) + 3(1 + i) = 7 - 5i = z_C$.
L'image par h de B' a pour affixe : $-2(5i) + 3(1 + i) = 3 - 7i = z_D$.
Donc C et D sont les images respectives de A' et B' par h.

c) Eléments caractéristiques de h^{-1} et expression de z en fonction de z_1 :

h^{-1} est l'homothétie de centre Ω d'affixe 1 + i et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Comme $h^{-1}(M_1) = M$, alors $z-(1+i)=-\frac{1}{2}(z_1-(1+i))$. C'est-à-dire $z=-\frac{1}{2}z_1+\frac{1}{2}(3+3i)$.

3)a) Expression complexe de f :

Soit M un point d'affixe z, P d'affixe z_1 son image par g et M' d'affixe z' image de P par h^{-1}.

On a f(M) = M'.

Mais on a aussi $z_1=\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)\overline{z}+5-i$ et $z'=-\frac{1}{2}z_1+\frac{1}{2}(3+3i)$.

Il s'ensuit que $z'=-\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)\overline{z}+5-i\right)+\frac{1}{2}(3+3i)=\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\overline{z}+2i-1$.

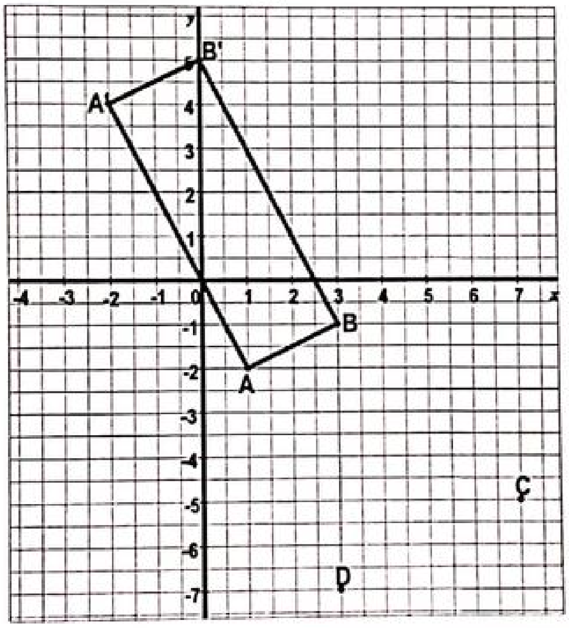
D'où l'expression complexe de f est $z'=\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\overline{z}+2i-1$.

b) Nature de f et construction du point P, image par g d'un point M :

D'après les questions 1)c) et 3)a) f est la réflexion d'axe (Δ).

On a $f = h^{-1}og$, donc $g = hof$ et $P = g(M) = h(f(M))$.

Donc, pour construire P, image par g d'un point M, on construit d'abord le symétrique orthogonal M_1 de M par rapport à (Δ). P est alors l'image de M_1 par l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.



Solution 45

A)1) Plaçons les points I, J, H, A, B, C, D :

2) • E est le symétrique de B par rapport à H, donc

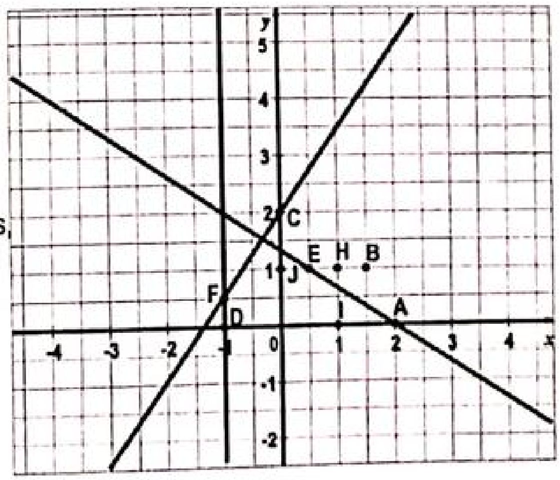
$z_H=\frac{z_E+z_B}{2}$. Donc $z_E=2z_H-z_B=2+2i-\frac{3}{2}-i=\frac{1}{2}+i$.

• La perpendiculaire (DF) à (OA) passant par D a pour équation x = -1. Alors $x_F = -1$.

Soit b l'ordonnée de F. Les droites (FC) et (AE) étant perpendiculaires, on a $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AE}=0$.

C'est-à-dire $(-1-0)\left(\frac{1}{2}-2\right)+(b-2)(1-0)=0$.

On en déduit que $\frac{3}{2}+b-2=0$. Donc $b=\frac{1}{2}$.



En définitive, $z_F = -1+\frac{1}{2}i$.

3) $OA=|z_A|=2$ $OB=|z_B|=\left|\frac{3}{2}+i\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+1}=\frac{\sqrt{13}}{2}$ $AB=|z_B-z_A|=\left|-\frac{1}{2}+i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$OC=|z_C|=2$ $OF=|z_F|=\left|-1+\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ $CF=|z_F-z_C|=\left|-1-\frac{3}{2}i\right|=\sqrt{1+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

On constate que OA = OC, OB = CF et AB = OF, donc les triangles OAB et OCF sont isométriques.

B)1) Notons O', A' et B' les images respectives de O, A et B. On a :

- $z_{O'}=-i\overline{z_O}+2i=2i=z_C$ • $z_{A'}=-i\overline{z_A}+2i=-i(2)+2i=0=z_O$
- $z_{B'}=-i\overline{z_B}+2i=-i\left(\frac{3}{2}-i\right)+2i=-1+\frac{1}{2}i=z_F$.

D'où, f(O) = C, f(A) = O et f(B) = F.

2)a) Soit M et N deux points, M' et N' leurs images respectives par f.

$M'N'=|z_{N'}-z_{M'}|=\left|-i\overline{z_N}+2i+i\overline{z_M}-2i\right|=\left|-i(\overline{z_N}-\overline{z_M})\right|=|-i|\left|\overline{z_N-z_M}\right|=|z_N-z_M|=MN$.

Puisque pour tous points M et N, et leurs images respectives M' et N', M'N' = MN, alors f est une isométrie.

b) Soit M(x , y) un point du plan.

f(M) = M si et seulement si, $z_M=-i\overline{z_M}+2i$. C'est-à-dire $x + iy = -i(x - iy) + 2i$.

Ce qui équivaut à : $x + y + i(x + y - 2) = 0$. Ce qui se traduit par le système $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=-2 \end{cases}$. Ce qui est impossible car sinon, on aurait 2 = 0. On en déduit que f ne laisse aucun point invariant.

c) Puisque f ne laisse aucun point invariant, alors f ne peut être une réflexion.

f est soit une translation de vecteur non nul, soit une symétrie glissée. Or d'après son expression complexe, f ne peut être une translation. Alors f est une symétrie glissée.

3) Le vecteur $\vec{IJ}$ a pour affixe $z_J - z_I = -1 + i$.

- Donc l'écriture complexe de t est $z' = z - 1 + i$.
- L'écriture complexe de t^{-1} est $z' = z + 1 - i$.

4)a) Soit M un point du plan d'affixe z, M_1 d'affixe z_1 image de M par t^{-1} et M' l'image de M_1 par f.

On a $z_1 = z + 1 - i$ et $z'=-i\overline{z_1}+2i$. On a alors

$z'=-i\overline{z+1-i}+2i=-i(\overline{z}+1+i)+2i=-i\overline{z}-i+1+2i=-i\overline{z}+1+i$

L'écriture complexe de s est bel et bien $z'=-i\overline{z}+1+i$.

b) • Notons I' et J' les images respectives de I et J par s.

On a : $z_{I'}=-i\overline{z_I}+1+i=-i(1)+1+i=1=z_I$ et $z_{J'}=-i\overline{z_J}+1+i=-i(-i)+1+i=i=z_J$.

Donc I et J sont invariants par s.

• On remarque que s est une composée deux isométries, donc s est une isométrie.

De plus, s laisse au moins deux distincts invariants. Alors l'ensemble des points invariants par s est soit la droite (IJ), soit le plan.

Or d'après son expression complexe, s ne peut être l'application identique. Alors l'ensemble des points invariants par s ne peut être le plan. C'est donc la droite (IJ).

Puisque s est une isométrie donc l'ensemble des points invariants est la droite (IJ), alors s est la réflexion d'axe (IJ).

c) Puisque $s = fot^{-1}$, alors $f = sot$.

Donc f est la composée de la réflexion d'axe (IJ) et de la translation de vecteur $\vec{IJ}$.

Donc f est la symétrie glissée d'axe (IJ) et de vecteur $\vec{IJ}$.

12 SIMILITUDES DIRECTES PLANES

RAPPEL DU COURS

Dans ce chapitre P désigne le plan orienté.

A. Les similitudes

A₁ – Définition

Une similitude du plan est une application de P vers P, qui multiplie les distances par un réel strictement positif k.
Le réel k est le rapport de cette similitude.
En d'autres termes : une application s de P vers P est une similitude de rapport k lorsque, pour tous points M et N du plan P, d'images respectives M' et N' par s, on a : $M'N' = k.MN$.

A₂ – Exemples de similitudes

Les isométries sont des similitudes de rapport 1.
L'homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

A₃ – Propriétés sur les similitudes

P₁) • Toute similitude de rapport k est une bijection et sa réciproque est aussi une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

• La composée de deux similitudes est une similitude de rapport le produit des rapports de ces deux similitudes.

P₂) La similitude conserve les écarts angulaires, le barycentre, l'alignement des points, le parallélisme, l'orthogonalité, les formes des figures, le contact, les milieux des segments, . . .

La similitude s de rapport k multiplie les distances par k et les aires par k^2.

Elle transforme une droite en une droite, le cercle de centre A et de rayon R en le cercle de centre s(A) et de rayon k.R et un triangle en un triangle qui lui est semblable.

Certaines similitudes conservent les angles orientés, ce sont les similitudes directes ; d'autres inversent le sens des angles orientés, ce sont les similitudes indirectes.

Dans la suite, on se limitera à l'étude des similitudes directes.

B. Similitudes directes planes

B₁ – Définition et éléments caractéristiques

a) Définition :
Une similitude directe plane est une similitude qui conserve les angles orientés.
En d'autres termes, une similitude s est dite directe lorsque pour tous points A, B, C et D (avec $A \neq B$ et $C \neq D$), d'images respectives A', B', C' et D' par s, on a : $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.
Exemples : Les déplacements et l'homothétie sont des similitudes directes.

b) L'angle de la similitude directe :
Soit s une similitude directe plane. A et B étant deux points distincts d'images respectives A' et B' par s.

L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ est constant. Sa mesure ne dépend pas du choix de A et B.
C'est l'angle de la similitude directe s.

Si θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, on dira tout simplement que s est une similitude d'angle θ.

c) Le centre d'une similitude directe :
Soit s une similitude directe de rapport k et d'angle θ.
Si k = 1 et $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors s une translation.
Sinon, alors s laisse un seul point Ω invariant. Ω est appelé le centre de la similitude directe s.

d) Propriété et définition :
Soit s une similitude directe plane de rapport k, de centre Ω et d'angle θ.

s transforme un point A différent de Ω en un point A' si et seulement si, $\frac{\Omega A'}{\Omega A} = k$ et $mes(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) \equiv \theta[2\pi]$.

k, Ω et θ sont les éléments caractéristiques de la similitude directe s.

e) Composée d'une homothétie et d'une rotation :
- Soit r une rotation d'angle θ et h une homothétie de rapport k différent de 0 et 1 de même centre Ω.

Si k > 0, alors roh et hor sont des similitudes directes de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.
Si k < 0, alors roh et hor sont des similitudes directes de centre Ω, de rapport –k et d'angle π + θ.
- Soit s une similitude directe de rapport k ≠ 1, de centre Ω et d'angle θ.

Notons r la rotation de centre Ω, d'angle θ, et h l'homothétie de rapport k de centre Ω.
On a : s = roh = hor. Cette écriture est la forme réduite de s.

B_2 – Expression complexe d'une similitude directe

Une application s de P vers P est une similitude directe si et seulement si, son expression complexe est sous la forme z' = az + b, où a et b sont des nombres complexes et a est différent de zéro.
- **Si a = 1,** alors s est la translation de vecteur d'affixe b.
- **Si a ≠ 1,** alors s est une similitude directe de rapport $|a|$, d'angle arg(a) et de centre l'unique point invariant par s.

B_3 – Composition de similitudes directes

Soit s une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, et s' la similitude directe de centre Ω', de rapport k' et d'angle θ'.
- La réciproque de s est la similitude directe de centre Ω, d'angle -θ et de rapport $\frac{1}{k}$.
- Si kk' = 1 et θ + θ' ≡ 0[2π], alors sos' est une translation.
  Si kk' ≠ 1 ou θ + θ' n'est pas un multiple de 2π, alors sos' est une similitude directe de rapport kk' et d'angle θ + θ'.

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Eléments caractéristiques d'une similitude directe

1 – Construire l'image d'une figure par une similitude directe plane

Exercice 1

ABCD est un carré de sens direct.

Construire son image par la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et rapport $\sqrt{2}$.

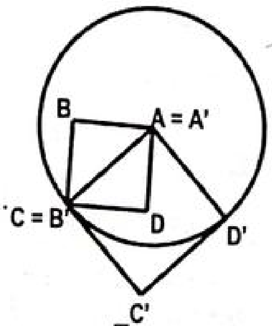
Solution 1

Notons A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D par la similitude directe s de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$. Comme A est le centre de s, alors A' = A.

De façon générale, soit M un point du plan autre que A, et M' son image par s, on a :

$AM' = AM\sqrt{2}$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

C'est-à-dire, M' appartient au cercle de centre A et de rayon $AM\sqrt{2}$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.



De plus, A'B'C'D' est un carré de même sens que ABCD.
Il suffit donc d'avoir l'image de B ou C ou D pour construire A'B'C'D'.

Remarquons que si M' est image de M par la similitude directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$, alors le triangle AMM' est rectangle et isocèle direct de sommet M.

Exercice 2

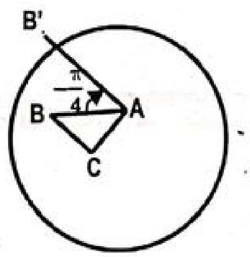
ABC est un triangle rectangle en C et isocèle avec $mes(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Construire l'image de B par la similitude directe de centre A, qui transforme C en B.

Solution 2

Soit s la similitude directe de centre A qui transforme C en B :

Son rapport est $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}$ et son angle est $mes(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.



Soit B' l'image de B par s, on a : $AB' = AB\sqrt{2}$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Donc B' est le point du cercle de centre A et de rayon $AB\sqrt{2}$ tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Remarquons que le triangle ABB' est rectangle isocèle indirect de sommet B.

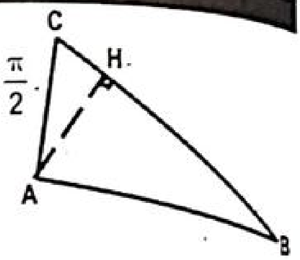
2 – Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude connaissant son centre, un point et son image

Exercice 3

ABC est un triangle rectangle en A vérifiant $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, [AH] est une hauteur de ce triangle.

On considère la similitude directe de centre H qui transforme A en B.
Déterminer son rapport, son angle et l'image du point C.

Solution 3



- Soit s la similitude de centre H qui transforme A en B :

Son rapport est : $\frac{HB}{HA}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{\tan\hat{B}}$ et son angle est $(\widehat{\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}})$ dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

- Puisque $\frac{HA}{HC}=\frac{AB}{AC}$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors L'image de C par s est A.

Exercice 4

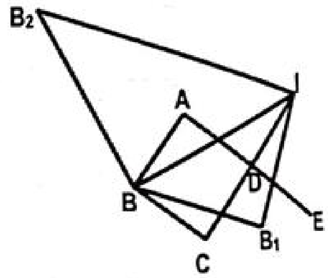
ABCD est un carré vérifiant $mes(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et D est le milieu de [AE] et [IC].

1) On considère la similitude directe s_1 de centre I qui transforme A en D.
   Déterminer son angle, son rapport et l'image du point C.
2) On considère la similitude directe s_2 de centre I qui transforme D en A.
   Déterminer son angle, son rapport et l'image du point E.
3) Construire l'image B_1 de B par s_1 et l'image B_2 de B par s_2.

Solution 4

1) • L'angle de s_1 est : $(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}})$ dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$ et son rapport est $\frac{ID}{IA}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   • L'image de C par s_1 est E.



2) s_2 est la réciproque de s_1, donc :

   • L'angle de s_2 est $-\frac{\pi}{4}$ et son rapport est $\sqrt{2}$.

   • L'image de E par s_2 est C.

3) • $s_1(B) = B_1$. Donc IBB_1 est un triangle rectangle isocèle direct de sommet B_1.
   • $s_2(B) = B_2$. Donc IBB_2 est un triangle rectangle isocèle indirect en B.

3 – Déterminer le centre d'une similitude directe connaissant son angle, son rapport, un point et son image

Exercice 5

ABCD est un carré de sens direct de centre O. On considère la similitude directe f de centre D qui transforme O en C et g la similitude directe qui transforme A en B et B en D.

1) Déterminer les angles et rapports de f et g.
2) En utilisant les nombres complexes (on utilisera un repère judicieux), Déterminer :
   a) l'image du point A par f. b) Les images de C par f et g
   c) Le centre de g.

Solution 5

1) • L'angle de f est $(\widehat{\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DC}})$ dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$ et son rapport $\frac{DC}{DO}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

   • L'angle de g est $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}})$ dont une mesure est $\frac{3\pi}{4}$ et son rapport $\frac{BD}{AB}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

2) Considérons le repère orthonormé direct $(A;\vec{i},\vec{j})$, où $\vec{i}=\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$, a étant le côté du carré.

On a : $z_A=0$; $z_B=a$; $z_C=a(1+i)$ et $z_D=ai$.

a) Soit A' l'image de A par f, on a :

$z_{A'}-z_D=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A-z_D)$ donc $z_{A'}=-(1+i)z_D+z_D=-iz_D=a=z_B$. Donc f(A) = B.

b) • Soit C' l'image de C par f.

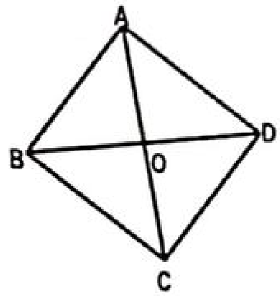
On a $z_{C'} - z_D = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_C - z_D)$ donc $z_{C'} = (1+i)(a+ai-ai)+ai = a+2ai$.

On remarque que f(C) = C' symétrique de B par rapport à C.

• Soit C'' l'image de C par g :

on a $z_{C''} - z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}(z_C - z_A)$ donc $z_{C''} = (-1+i)(a+ai)+a = -a$.

On remarque que g(C) = C'' symétrique de B par rapport à A.



c) Soit Ω, d'affixe ω, le centre de g.

On a g(A) = B et g(Ω) = Ω, ce qui équivaut à $z_B - z_\Omega = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}(z_A - z_\Omega)$. C'est-à-dire $a - \omega = (-1+i)(-\omega)$.

Et donc $\omega = \dfrac{a}{2-i} = \dfrac{2}{5}a + \dfrac{1}{5}ai$.

Ainsi le centre de g est le point d'affixe $\dfrac{2}{5}a + \dfrac{1}{5}ai$ dans le repère $(A\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ défini plus haut.

Point méthode :

Soit A et B deux points distincts du plan :

- *Si une similitude s de centre A transforme B en B', alors : son rapport est* $\dfrac{AB'}{AB}$ *et son angle est* $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}})$.
- *Si une similitude s transforme A en A' et B en B', alors son rapport de s est* $\dfrac{A'B'}{AB}$ *et son angle* $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$.

Exercice 6

Dans un plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu de [AC] et par K le milieu de [AB].

Soit s la similitude directe telle que s(A) = B et s(I) = D, symétrique de B par rapport à I.

a) Déterminer le rapport et l'angle de s.

b) Soit (Γ) le cercle de diamètre [AB] et (Γ') le cercle de diamètre [ID].

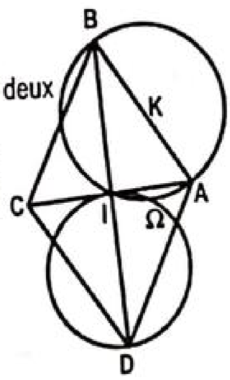
Montrer que (Γ) passe par I et que (Γ) et (Γ') sont sécants en un deuxième point Ω.

En déduire que Ω est le centre de s.

Solution 6

a) s(A) = B et s(I) = D.

Donc le rapport de s est $\dfrac{BD}{AI} = 2\dfrac{IB}{AI} = 2\tan\dfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$ et son angle est $(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BD}})$ dont une mesure est $\dfrac{\pi}{2}$.



b) • AIB est un triangle rectangle en I. D'où I appartient au cercle de diamètre [AB].
C'est-à-dire I appartient à (Γ).

• Les cercles (Γ) et (Γ') ont le point I en commun. Alors ils sont tangents en I ou sécants en deux points.

Supposons (Γ) et (Γ') tangents en I, alors les centres O et O' de (Γ) et (Γ') respectivement, sont alignés avec I. Or O' appartient à (BD) – {B, D}, O appartient à (AB) – {A, B} et les droites (BD) et (AB) sont sécantes en P, alors O n'appartient pas à (BD), c'est-à-dire O n'appartient pas à (O'I), alors O, O' et I ne sont pas alignés.

D'où les cercles (Γ) et (Γ') ne sont pas tangents, mais sécants en deux points distincts.

Finalement, les cercles (Γ) et (Γ') sont sécants en un point Ω autre que le point I.

• Soit Ω' le centre de s, similitude directe d'angle dont une mesure est $\dfrac{\pi}{2}$.

Puisque $mes(\overrightarrow{\Omega'A}, \overrightarrow{\Omega'B}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $mes(\overrightarrow{\Omega'I}, \overrightarrow{\Omega'D}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, alors Ω' appartient aux cercles de diamètres respectifs [AB] et [ID]. C'est-à-dire Ω' appartient à (Γ) et Ω' appartient à (Γ'). D'où Ω' = Ω ou Ω' = I.

Or l'angle $(\vec{II}, \vec{ID})$ n'existe pas, alors $\Omega' = \Omega$. Ω est donc le centre de s.

Point méthode :

Soit A et B deux points distincts du plan :

1) Soit s la similitude directe de centre Ω, transformant A en A' et B en B' (A distinct de B).

Si (AB) et (A'B') sont sécantes en un point I, alors :

- *Si I n'appartient pas à {A, B, A', B'}, alors Ω est l'un des points de rencontre des cercles circonscrits aux triangles IAA' et IBB'.*
- *Si I appartient à {A, B, A', B'}, alors on considère le point K milieu de [AB]. Son image K' par s est le milieu de [A'B']. Ω est l'un des points de rencontre des cercles circonscrits aux triangles AKK' et ABB'.*

2) Pour déterminer le centre d'une similitude connaissant son angle, son rapport, un point et son image, on peut utiliser les complexes, en introduisant un repère orthonormé direct (voir exercice 5 question 2)c)).

Exercice 7

1) Le couple de points (A , B) a pour image le couple (A', B') par une similitude directe de centre O.

Démontrer que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) + k2\pi$, où k est un entier relatif.

2) ABCD est un rectangle tel que AD = 2AB et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

M est le milieu de [BC], (A , B) a pour image (M , D) par une similitude directe de centre O.
Préciser le rapport et l'angle de cette similitude.
Construire son centre comme intersection de deux cercles.

Solution 7

1) Puisque s(A) = A', s(B) = B' et s(O) = O, alors soit θ une mesure de l'angle de s, on aura :

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = \theta + k2\pi$ et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = \theta + k2\pi$, où k est un entier relatif.

D'où $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) + k2\pi$, k étant un entier relatif.

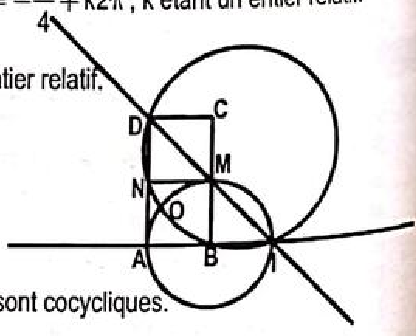
2) • s(A) = M, s(B) = D et est la similitude directe de centre O.

Le rapport de s est : $\frac{MD}{AB} = \frac{NB}{AB} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$, où N est le milieu de [AD].

L'angle de s est : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MD}}) = (\widehat{\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{MD}}) = \hat{\pi} + (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MD}})$ dont une mesure est $\frac{3\pi}{4}$.

D'où s est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

- Soit I, le point d'intersection des droites (AB) et (MD), on a : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}}) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$, k étant un entier relatif.



Or $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$, alors $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}}) + k\pi$, k entier relatif.

D'où les points O, A, M et I sont cocycliques, puisqu'ils ne sont pas alignés.
Donc O est sur le cercle (C_1) circonscrit au triangle AMI.

De plus, on a : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}}) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}}) = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

D'où $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}}) + k\pi$. D'où O, B, D et I qui sont non alignés sont cocycliques.
Donc O est sur le cercle (C_2) circonscrit au triangle BDI.
O est donc un point de rencontre des cercles (C_1) et (C_2).

(C_1) et (C_2) se coupent en deux points dont I, alors, puisque $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}}) \neq \frac{3\pi}{4} + k2\pi$, le point I n'est pas le centre de s.

D'où le centre O de s est le point de rencontre de (C_1) et (C_2) autre que I.

B. Ecriture complexe d'une similitude directe plane

1 – Retrouver l'écriture complexe connaissant les éléments caractéristiques

Exercice 8

Donner l'expression complexe de chacune des similitudes directes suivantes :

Centre d'affixe	angle	rapport
1 + 2i	$\frac{\pi}{2}$	2
6 – 2i	$\frac{3\pi}{2}$	4
8 – 9i	$\frac{2\pi}{3}$	5
2i	π	2
4	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$

Solution 8

Remarque : *Notons que, soit s la similitude directe de centre A d'affixe a, d'angle α et de rapport k.*

s transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe z' si et seulement si $z' - a = ke^{i\alpha}(z - a)$.

C'est-à-dire $z' = ke^{i\alpha}z + (1 - ke^{i\alpha})a$ *. D'où le tableau :*

Centre d'affixe	angle	rapport	Expression complexe
1 + 2i	$\frac{\pi}{2}$	2	$z' = 2iz + 5.$
6 – 2i	$\frac{3\pi}{2}$	4	$z' = -4iz + 14 + 22i$
8 – 9i	$\frac{2\pi}{3}$	5	$z' = \left(-\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)z + 28 - \frac{45\sqrt{3}}{2} - i\left(20\sqrt{3} + \frac{63}{2}i\right)$
2i	π	2	$z' = -2z + 6i$
4	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$	$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i\right)z + (4 - \sqrt{2} + i\sqrt{2})$

2 – Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe connaissant son écriture complexe

Exercice 9

Donner le centre, l'angle et le rapport des similitudes directes associées aux fonctions f : $z \rightarrow z' = az + b$.

1) $a = 1 + i$ et $b = 4 + 5i$. 2) $a = i$ et $b = 2 + 2i$ 3) $a = i + \sqrt{3}$ et $b = -2i$.

Solution 9

1) • Le rapport de la similitude est $|1 + i| = \sqrt{2}$.

• Son angle a pour mesure $\arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

• Son centre est le point d'affixe z telle que $(1 + i)z + 4 + 5i = z$, soit $z = -5 + 4i$.

2) • Le rapport de la similitude est $|i| = 1$

Point méthode :

Notons qu'au 2), on a eu $|a| = 1$ *, avec a différent de 1, donc, dans ce cas, notre similitude est la rotation :*

- *d'angle de mesure* $\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- *de centre le point d'affixe z telle que* $iz + 2 + 2i = z$*, soit* $z = 2i$.

- Son angle a pour mesure $\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- Le centre est le point d'affixe z telle que $iz + 2 + 2i = z$, soit $z = 2i$.

3) - Le rapport de la similitude est $\left|i+\sqrt{3}\right| = 2$
- Son angle a pour mesure $\arg(i+\sqrt{3}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
- Son centre est le point d'affixe z telle que $(i+\sqrt{3})z - 2i = z$, soit $z = \frac{2}{5-2\sqrt{3}}(1+(\sqrt{3}-1)i)$.

Point méthode :

Soit s la similitude directe d'expression complexe associée $z' = az + b$:
Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur d'affixe b.
Si $a = -1$, alors s est la symétrie centrale de centre le point d'affixe $\frac{b}{2}$ (l'affixe de l'unique point invariant).
Si a est un réel autre que 0 et 1, s est une homothétie de rapport a.
Si $|a| = 1$, avec a différent de 1, alors s est une rotation d'angle arga.

Exercice 10

On considère l'application s du plan complexe P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', telle que $z' = 2iz + 1 - i$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s.

Solution 10

- L'expression complexe de s est sous la forme : $z' = az + b$, où $a = 2i$ et $b = 1 - i$. D'où s est une similitude directe.
- s est la similitude directe de rapport $|2i| = 2$, d'angle de mesure $\arg(2i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et de centre Ω, le point d'affixe z

telle que $z = 2iz + 1 - i$, soit $z = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$. Donc $\Omega\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Exercice 11

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 - (2-i)z^2 + (5-3i)z - 2 + 6i = 0$, sachant que l'une des racines est imaginaire pur.
Soit z_1 cette solution, on trouvera les deux autres solutions z_2 et z_3, où z_2 a une partie imaginaire négative.
2) Soit A d'affixe z_1, B d'affixe z_2, C d'affixe z_3 et Ω d'affixe 1.
On définit la similitude directe s telle que : $s(A) = \Omega$ et $s(B) = C$.
Déterminer son centre, son rapport et une mesure de son angle.

Solution 11

1) - Soit x un nombre réel,
ix est solution de (E) si et seulement si $(ix)^3 - (2-i)(ix)^2 + (5-3i)(ix) - 2 + 6i = 0$.
C'est-à-dire $(2x^2 + 3x - 2) + i(-x^3 + x^2 + 5x + 6) = 0$.

Ce qui se traduit par le système $\begin{cases} 2x^2+3x-2=0 & (1) \\ -x^3-x^2+5x+6=0 & (2) \end{cases}$.

L'équation (1) a pour solutions -2 et $\frac{1}{2}$.

Or -2 est solution de l'équation (2), mais $\frac{1}{2}$ n'en est pas une. D'où le système a une solution unique $x = -2$.

D'où l'équation (E) admet une unique solution imaginaire pur $z_1 = -2i$.

- Posons $f(z) = z^3 - (2-i)z^2 + (5-3i)z - 2 + 6i$. On a $f(-2i) = 0$, et donc :

$$\begin{aligned} f(z) = f(z) - f(-2i) &= (z^3 - (2-i)z^2 + (5-3i)z - 2 + 6i) - ((-2i)^3 - (2-i)(-2i)^2 + (5-3i)(-2i) - 2 + 6i) \\ &= (z^3 - (-2i)^3) - (2-i)(z^2 - (-2i)^2) + (5-3i)(z - (-2i)) \\ &= (z+2i)(z^2 - 2iz - 4) - (2-i)(z+2i)(z-2i) + (5-3i)(z+2i) \\ &= (z+2i)[z^2 - (2+i)z + 3 + i] \end{aligned}$$

D'où $f(z) = 0$ équivaut à $z = -2i$ ou $z^2 - (2+i)z + 3 + i = 0$.
L'équation $z^2 - (2+i)z + 3 + i = 0$ a pour discriminant $\Delta = -9 = (3i)^2$, et pour solutions $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = 1 + 2i$.
D'où l'équation (E) a pour solutions $z_1 = -2i$, $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = 1 + 2i$.
2) s est une similitude directe plane.
D'où s transforme tout point M du plan, d'affixe z, en un point M' d'affixe z' sous la forme $z' = az + b$, a et b étant des nombres complexes et a non nul.

$s(A) = \Omega$ signifie $1 = -2ia + b$ et $s(B) = C$ signifie $1 + 2i = (1-i)a + b$. On a alors le système : $\begin{cases} -2ia + b = 1 \\ (1-i)a + b = 1 + 2i \end{cases}$.

La résolution de ce système conduit à la conclusion : $a = 1 + i$ et $b = -1 + 2i$.
Ainsi, l'expression complexe de s est : $z' = (1+i)z - 1 + 2i$.

s est donc la similitude directe : de rapport $|1+i| = \sqrt{2}$, d'angle de mesure $\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et de centre le point d'affixe ω telle que $(1+i)\omega - 1 + 2i = \omega$, soit $\omega = \dfrac{-1+2i}{1-(1+i)} = -2 - i$.

3 – Déterminer l'expression analytique d'une similitude directe, connaissant son écriture complexe

Exercice 12

Soit f l'application du plan complexe P dans lui-même, qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', telle que : $z' = (3+i)z + 2$ et soit A point d'affixe $a = i$. Déterminer $A' = f(A)$ et l'expression analytique de f.

Solution 12

- L'affixe de A' est : $z_{A'} = (3+i)z_A + 2 = 1 + 3i$. D'où A' a pour coordonnées (1 , 3).
- Soit M(x , y) et M'(x', y') deux points du plan, f(M) = M' si et seulement si $z' = (3+i)z + 2$.

C'est-à-dire $x' + iy' = (3+i)(x+iy) + 2$. Donc $x' + iy' = 3x - y + 2 + i(x + 3y)$. Donc $\begin{cases} x' = 3x - y + 2 \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

D'où f est l'application de P vers P qui à tout point M(x , y) associe le point M'(x' , y'), avec $\begin{cases} x' = 3x - y + 2 \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Exercice 13

Dans le plan complexe, f est la similitude directe de centre P d'affixe $2 - 3i$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $3\sqrt{2}$.

a) Si z est l'affixe du point M, déterminer l'affixe z' du point M' image de M par cette similitude.
b) Exprimer en fonction des coordonnées (x , y) du point M, les coordonnées (x', y') de M'.
c) Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation $y = x + 1$.

Solution 13

a) $z' - (2-3i) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(z - (2-3i))$. C'est-à-dire $z' = 3(1+i)z - 3(1+i)(2-3i) + 2 - 3i$.
Alors $z' = 3(1+i)z - 13$.

b) On a : $z' = x' + iy' = (3+3i)(x+iy) - 13 = 3x - 3y - 13 + i(3x + 3y)$. D'où $\begin{cases} x' = 3x - 3y - 13 \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$.

c) soit M(x , y) un point du plan et M'(x' , y') son image par f, on a d'après la question b), $\begin{cases} x' = 3x - 3y - 13 \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$.

Donc en tirant x et y en fonction de x' et y', on a : $\begin{cases} x = \frac{1}{6}(x' + y' + 13) \\ y = \frac{1}{6}(-x' + y' - 13) \end{cases}$.

M(x , y) appartient à la droite (D) si et seulement si, y = x + 1.

C'est-à-dire $\frac{1}{6}(-x'+y'-13)=\frac{1}{6}(x'+y'+13)+1$, soit x' = -16.

D'où l'image de (D) est la droite (D') d'équation x = -16.

4 – Déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe connaissant l'expression analytique

Exercice 14

Déterminer l'expression complexe de l'application f du plan complexe P dans lui-même, qui, à tout point M(x , y), associe le point M'(x' , y') où $\begin{cases} x'=2x-y+1 \\ y'=x+2y-6 \end{cases}$. En déduire la nature de f.

Déterminer les images de la droite (AB) et du cercle (C) de centre A et de rayon 2, avec A et B d'affixes respectives a = i et b = 1 + i.

Solution 14

- Soit M et M' d'affixes respectives z = x + iy et z' = x' + iy', avec x, y, x' et y' réels et f(M) = M'.

On a : z' = x' + iy' = (2x – y + 1) + i(x + 2y – 6) = x(2 + i) + iy(2 + i) + 1 – 6i = (2 + i)z + 1 – 6i.

D'où f est l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', où z' = (2 + i)z + 1 – 6i.

- L'expression complexe de f est sous la forme z' = az + b, où a = 2 + i et b = 1 – 6i, donc f est une similitude directe plane.
- Soit A' et B' les images respectives de A et B, on a :

$z_{A'}$ = (2 + i)z_A + 1 – 6i. = (2 + i)i + 1 – 6i = - 4i. D'où A'(0 , - 4).

$z_{B'}$ = (2 + i)z_B + 1 – 6i = (2 + i)(1 + i) + 1 – 6i = 2 – 3i. D'où B'(2 , - 3).

Alors l'image de la droite (AB) est la droite (A'B').

> **Point méthode :**
> *Pour déterminer l'image d'une droite (D) par une similitude directe du plan, on peut aussi :*
> - *choisir deux points distincts A et B de cette droite (D).*
> - *déterminer les images respectives A' et B' de A et B par cette transformation.*
>
> *L'image de la droite (D) est donc la droite (A'B').*

- L'expression complexe de f est sous la forme z' = az + b, où a = 2 + i et b = 1 – 6i.

D'où f est une similitude directe de rapport $|2+i|=\sqrt{5}$.

L'image du cercle (C) de centre A et de rayon 2 est donc le cercle (C') de centre A' = f(A) et de rayon $2\sqrt{5}$.

Exercice 15

1) Etudier l'application F du plan complexe P dans lui-même, qui à tout point M(x , y), associe le point M'(x – y + 1, x + y).
2) Montrer que le cercle (C) de centre O, de rayon 1 et la droite (D) d'équation y = -1 sont tangents.
3) Construire (C) et (D). Construire leurs images par F.

Solution 15

1) Soit M le point du plan d'affixe z = x + iy, où x et y sont des nombres réels, et M' le point du plan d'affixe z' = x' + iy', x' et y' étant des réels.

F(M) = M' signifie, x' = x – y + 1 et y' = x + y. Donc z' = (x – y + 1) + i(x + y) = (1 + i)(x + iy) + 1 = (1 + i)z + 1.

On a : $|1+i|=\sqrt{2}$ et $\arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$. De plus, z = (1 + i)z + 1 signifie $z=\frac{1}{1-(1+i)}=i$.

L'expression complexe de F est sous la forme z' = az + b, où a = 1 + i et b = 1.

D'où F est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$, et de centre le point d'affixe ω = i.

2) la distance du centre O du cercle (C) à la droite (D) est : $d=\frac{|0+1|}{1}=1$, qui est le rayon du cercle (C).

D'où le cercle (C) et la droite (D) sont tangents.

Remarquons que le point de contact de (C) et (D) est A(0 , -1).

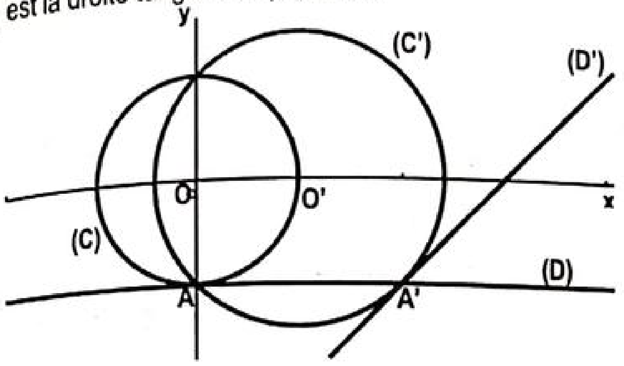
3) Déterminons les images respectives A' et O' de A et O par F :

$z_{A'}$ = (1 + i)z_A + 1 = (1 + i)(-i) + 1 = 2 – i . D'où A'(2 , -1).

$z_{O'}$ = (1 + i)z_O + 1 = (1 + i)×0 + 1 = 1. D'où O'(1 , 0).

> **Point méthode :**
> *La similitude directe conserve le contact et les formes des figures.*

L'image (C') de (C) par F est le cercle de centre O' et passant par A'.
L'image (D') de (D) est la droite tangente à (C') en A'.



5 – Composer deux similitudes directes planes

Exercice 16

ABC est un triangle équilatéral direct. G est son centre de gravité.
r désigne la rotation de centre G qui transforme C en A et h l'application qui, à tout point M du plan, associe M' tel que :
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. On pose s = hor.

1) Démontrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
2) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s.

Solution 16

1) Soit M un point du plan et M' = h(M).

On a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA}}_{\vec{0}} = 3\overrightarrow{MG}$.

Donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ signifie $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{MG}$. C'est-à-dire $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$.

D'où h est l'homothétie de centre G et de rapport -2.

2) r est la similitude directe de centre G, de rapport 1 et d'angle $(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GA})$, dont une mesure est $\frac{2\pi}{3}$.

h est la similitude directe de centre G, de rapport 2 et d'angle π.

D'où s = hor est la similitude directe de centre G, d'angle dont une mesure est $\frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$ et de rapport 1×2 = 2.

Point méthode :

h est une homothétie de centre G et de rapport k réel différent de 0 et 1, r une rotation de centre G et d'angle α, on a :

- *roh = hor.*
- *roh est une similitude directe de centre G et rapport $|k|$.*
- *l'angle de roh dépend du signe de k : si $k > 0$, son angle est α et si $k < 0$, son angle est $\alpha + \pi$.*

Soit k un réel strictement positif.

- *Une similitude directe d'angle π et de rapport k est une homothétie de rapport – k.*
- *Une similitude directe d'angle nul et de rapport k est une translation si k = 1, et une homothétie de rapport k si k est différent de 1.*

Exercice 17

On donne $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ et B(1 , -1). On considère l'application s du plan complexe P dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' tel que : M_1 est image de M par la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, et M' est l'image de M_1 par l'homothétie de centre B et de rapport 3.

1) z est l'affixe de M et z' celle de M'. Exprimer z' en fonction de z.
2) Déterminer la nature de s et ses éléments caractéristiques.

Solution 17

1) M_1, d'affixe z_1 est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Cela signifie que $z_1 - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$. C'est-à-dire $z_1 = iz + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i$. (1)

M' est l'image de M_1 par l'homothétie de centre B et de rapport 3.
Cela signifie que $z' - z_B = 3(z_1 - z_B)$. C'est-à-dire $z' = 3z_1 - 2 + 2i$. (2)

En remplaçant z_1 par son expression en fonction de z dans (2), on obtient : $z = 3\left(iz + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i\right) - 2 + 2i$.

D'où $z' = 3iz$.

2) L'expression complexe de s est $z' = 3iz$, d'où s est une similitude directe de centre O, de rapport $|3i| = 3$ et d'angle de mesure $\arg(3i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exercice 18

On considère les deux similitudes directes F et F' associées respectivement aux fonctions complexes f et f ' définies par : $f(z) = (1 + i)z + 1$ et $f'(z) = -\frac{i}{2}z + i$.

1) Donner l'angle, le centre et le rapport de chacune de ces similitudes.
2) Démontrer que FoF' et F'oF sont deux similitudes dont on précisera l'angle et le rapport.
3) FoF' et F'oF ont-elles le même centre ? A-t-on l'égalité FoF' = F'oF ?

Solution 18

1) • F est une similitude directe de rapport $|1+i| = \sqrt{2}$, d'angle de mesure $\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et de centre le point d'affixe $\omega = i$.

• F' est une similitude directe de rapport $\left|-\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$, d'angle de mesure $\arg\left(-\frac{i}{2}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et de centre le point d'affixe $\omega' = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$.

2) • FoF ' est la composée de deux similitudes directes, donc FoF' est une similitude directe de rapport $\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

• F'oF est la composée de deux similitudes directes, donc F'oF est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle dont une mesure est $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.

3) • Soit M d'affixe z, M_1 d'affixe z_1 son image par F et M' d'affixe z' l'image de M_1 par F', on a :
$z' = -\frac{i}{2}z_1 + i$ et $z_1 = (1 + i)z + 1$, donc $z' = -\frac{i}{2}[(1+i)z + 1] + i = \frac{1}{2}(1-i)z + \frac{i}{2}$.

D'où l'expression complexe de F'oF est $z' = \frac{1}{2}(1-i)z + \frac{i}{2}$.

$z = \frac{1}{2}(1-i)z + \frac{i}{2}$ équivaut à dire que $z = \frac{1}{2}(1+i)$. Ainsi, le centre de F'oF est le point d'affixe $\frac{1}{2}(1+i)$.

• Soit N d'affixe z et N_1 d'affixe z_1 son image par F' et N' d'affixe z' l'image de N_1 par F, on a :
$z_1 = -\frac{i}{2}z + i$ et $z' = (1 + i)z_1 + 1$, donc $z' = (1+i)\left[-\frac{i}{2}z + i\right] + 1 = \frac{1}{2}(1-i)z + i$.

D'où l'expression complexe de FoF' est $z'=\frac{1}{2}(1-i)z+i$.

$z=\frac{1}{2}(1-i)z+i$ équivaut à $z=1+i$. Ainsi, le centre de FoF' est le point d'affixe 1 + i.

- Puisque Les similitudes FoF' et F'oF ont des centres différents, alors elles sont différentes.

Point méthode :

Soit s une similitude de centre A de rapport k et d'angle α, s' une rotation de centre A' de rapport k' et d'angle α' :

- *Si $k\times k'=1$ et $\alpha+\alpha'\equiv 0[2\pi]$, alors sos' est une translation*
- *Si $k\times k'\neq 1$ ou $\alpha+\alpha'\not\equiv 0[2\pi]$, alors sos' est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\alpha+\alpha'$.*

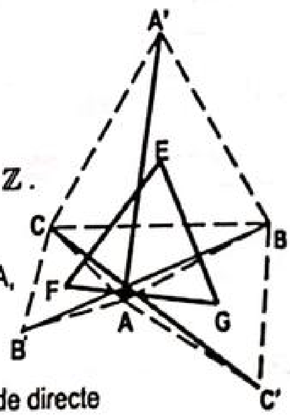
C. Utiliser des similitudes directes planes pour

1 – Démontrer des propriétés

Exercice 19

ABC est un triangle quelconque.
On construit à l'extérieur de ABC les triangles équilatéraux A'BC, B'CA, C'AB et l'on désigne par E, F et G respectivement les centres de gravité de ces trois triangles équilatéraux.
Démontrer que AA' = BB' = CC'.
Préciser la similitude directe S telle que S(B') = F et S(B) = G. Démontrer que EFG est équilatéral.

Solution 19



- Soit R_A la rotation de centre A qui transforme C en B'.
  On a $R_A(C)$ = B' et $R_A(C')$ = B. D'où CC' = BB'. (1)
  Soit R_C la rotation de centre C qui transforme B en A'.
  On a $R_C(B)$ = A' et $R_C(B')$ = A. D'où BB' = AA'. (2)

Des égalités (1) et (2), on déduit que AA' = BB' = CC'.

- On a : $\frac{AG}{AB}=\frac{AF}{AB'}=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}})=mes(\widehat{\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AF}})=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

D'où G et F sont les images respectives des points B et B' par la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$. D'où $FG=\frac{1}{\sqrt{3}}BB'$.

De même, on montre que E et F sont les images respectives des points A' et A par la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$. D'où $EF=\frac{1}{\sqrt{3}}AA'$.

Et que G et E sont les images respectives des points C et C' par la similitude directe de centre B, de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$. D'où $EG=\frac{1}{\sqrt{3}}CC'$.

Or d'après la question précédente, AA' = BB' = CC', d'où $\frac{1}{\sqrt{3}}AA'=\frac{1}{\sqrt{3}}BB'=\frac{1}{\sqrt{3}}CC'$.

C'est-à-dire EF = FG = EG. Finalement, le triangle EFG est équilatéral.

Exercice 20

Dans le plan, s est la similitude directe de centre O, qui transforme un couple (A , B) de points distincts, autres que O, en un couple (A', B'). La similitude directe σ_A de centre A qui transforme B en B', transforme O en P. La similitude directe σ_B de centre B qui transforme A en A', transforme O en Q.
Démontrer que O est milieu de [PQ].
(On pourra introduire dans le plan complexe, un repère orthonormé direct d'origine O).

Solution 20

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

Soit a, b, a', b', p et q les affixes respectives de A, B, A', B', P et Q.

L'expression complexe de s est sous la forme $z' = \alpha z$.

Celle de σ_A est : $z' - a = \beta(z - a)$ et celle de σ_B est : $z' - b = \gamma(z - b)$, α, β et γ étant des complexes non nuls.

- $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$ signifient $a' = \alpha a$ et $b' = \alpha b$.
- $\sigma_A(A) = A$, $\sigma_A(B) = B'$ et $\sigma_A(O) = P$ signifient $\begin{cases} b' - a = \beta(b - a) \\ p - a = -\beta a \end{cases}$.

Donc $\beta = \dfrac{p-a}{-a} = \dfrac{b'-a}{b-a}$ et par suite $p = -a\left(\dfrac{b'-a}{b-a}\right) + a = \dfrac{-ab' + ab}{b-a}$. Comme $b' = \alpha b$, alors $p = \dfrac{ab(1-\alpha)}{b-a}$.

- $\sigma_B(B) = B$, $\sigma_B(A) = A'$ et $\sigma_B(O) = Q$ signifient $\begin{cases} a' - b = \gamma(a - b) \\ q - b = -\gamma b \end{cases}$.

Donc $\gamma = \dfrac{a'-b}{a-b} = \dfrac{q-b}{-b}$ et par suite $q = \dfrac{-ba' + ab}{a-b}$. Comme $a' = \alpha a$, alors $q = \dfrac{ab(1-\alpha)}{a-b}$.

On a alors $p + q = \dfrac{ab(1-\alpha)}{b-a} + \dfrac{ab(1-\alpha)}{a-b} = 0$. C'est-à-dire $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \vec{0}$. D'où O est milieu de [PQ].

Exercice 21

Dans le plan complexe, ABC est un triangle de sens direct.

I, J et K sont les points tels que les triangles IBC, JAC et KBA sont rectangles et isocèles de sens directs.

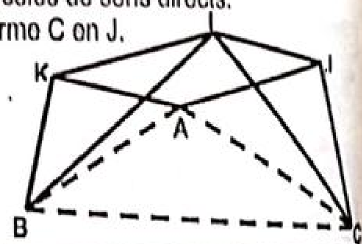
1) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s_1 de centre A, qui transforme C en J.

2) Notons a, b et c les affixes respectives des points A, B et C.

a) Déterminer les affixes des points I et K en fonction de a, b et c.

b) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s_2 qui transforme A en K et C en I.

3) En déduire que IJAK est un parallélogramme.



Solution 21

1) s_1 transforme A en A et C en J.

Donc son angle est $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AJ}})$, dont une mesure est $\dfrac{\pi}{4}$ et son rapport est $\dfrac{AJ}{AC} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2)a) C est image de B par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, donc $c - z_I = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - z_I)$.

C'est-à-dire $(c - z_I) = i(b - z_I)$. On en déduit que $z_I = \dfrac{c - ib}{1-i}$.

Puisque A est l'image de B par la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, on montre de même que $z_K = \dfrac{a - bi}{1-i}$.

b) s_2 transforme A en K et C en I, donc son angle est $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}})$, et son rapport $\dfrac{KI}{AC}$.

Pour avoir une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}})$ et la valeur du rapport $\dfrac{KI}{AC}$, calculons le rapport $\dfrac{z_I - z_K}{c-a}$.

On a $\dfrac{z_I - z_K}{c-a} = \dfrac{\dfrac{c-ib}{1-i} - \dfrac{a-ib}{1-i}}{c-a} = \dfrac{1}{1-i}$.

Or $\arg\left(\dfrac{1}{1-i}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\left|\dfrac{1}{1-i}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, alors une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}})$ est $\dfrac{\pi}{4}$ et son rapport est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc s_2 est une similitude directe de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

3) On sait que $s_1 o s_2^{-1}(I) = s_1(C) = J$ et $s_1 o s_2^{-1}(K) = s_1(A) = A$.

s_2^{-1} est une similitude directe de rapport $\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$, s_1 est une similitude directe de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et

d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Or $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$ et $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = 0$, donc $s_1 o s_2^{-1}$ est une translation.

Finalement, la translation qui transforme I en J, transforme aussi K en A. Donc IJAK est un parallélogramme.

2 – Déterminer des lieux géométriques

Exercice 22

Déterminer l'ensemble des points M du plan P, d'affixe z vérifiant : $|(1-i)z + 2i| = 2$.

1) En utilisant la similitude associée à la fonction : $z \mapsto (1-i)z + 2i$.

2) Par une autre méthode.

Solution 22

1) Soit s la transformation du plan qui à tout point M, d'affixe z, associe M', d'affixe z', telle que : $z' = (1 - i)z + 2i$.

s est la similitude directe de rapport $|1-i| = \sqrt{2}$, d'angle de mesure $\arg(1-i) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ et de centre le point Ω

d'affixe ω telle que $\omega = (1 - i)\omega + 2i$ c'est-à-dire $\omega = \dfrac{2i}{1-(1-i)} = 2$. D'où $\Omega(2, 0)$.

$|(1-i)z + 2i| = 2$ équivaut à $|z'| = 2$.

Ainsi, soit (C) l'ensemble des points M du plan, d'affixe z telle que $|(1-i)z + 2i| = 2$.

M appartient à (C) si et seulement si M' appartient à (C') cercle de centre O et de rayon 2.

Or M est l'image de M' par la similitude directe réciproque de s, qui a pour centre $\Omega(2, 0)$, pour angle $\dfrac{\pi}{4}$ et pour rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Alors l'ensemble (C) des points M est le cercle de centre $s^{-1}(O) = O'$, de rayon $2 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, image de (C') par s^{-1}.

Déterminons l'affixe de O' :

$s^{-1}(O) = O'$ équivaut à $s(O') = O$. C'est-à-dire $(1 - i)z_{O'} + 2i = 0$.

Donc $z_{O'} = 1 - i$ et donc O' a pour coordonnées (1 , -1).

2) Soit z un complexe, $|(1-i)z + 2i| = \left|(1-i)\left(z + \dfrac{2i}{1-i}\right)\right| = |(1-i)(z-1+i)| = |1-i| \times |z-1+i| = \sqrt{2}|z-1+i|$.

Donc, $|(1-i)z + 2i| = 2$ équivaut à $\sqrt{2}|z-1+i| = 2$, puis à $|z-(1-i)| = \sqrt{2}$, enfin à $O'M = \sqrt{2}$, avec O' d'affixe $1-i$. Alors l'ensemble (C) des points M cherché est le cercle de centre O' et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 23

1) (C) et (C') sont des cercles de rayons respectifs R et R' ($R \neq R'$).
Déterminer l'ensemble des centres des similitudes directes s telles que s(C) = (C').

2) Si (C) et (C') se coupent en A et B, ces points sont-ils des centres de telles similitudes ?

Solution 23

1) Soit O et O' les centres respectifs de (C) et (C'). Puisque s(C) = (C'), alors s(O) = O'.

Soit Ω le centre de s, et k son rapport, on a : $\dfrac{\Omega O'}{\Omega O} = \dfrac{R'}{R} = k$.

D'où $R^2 \times \Omega O'^2 = R'^2 \times \Omega O^2$. C'est-à-dire $R^2 \overrightarrow{\Omega O'}^2 - R'^2 \overrightarrow{\Omega O}^2 = 0$.

Soit G le barycentre des points (O' , R^2) et (O , $-R'^2$), on a $G\Omega=\frac{R'}{R}GO$ (le lecteur fera les calculs).

D'où Ω est sur le cercle de centre G et de rayon $\frac{R'}{R}GO$.

Réciproquement, si Ω est sur le cercle de centre G et rayon $\frac{R'}{R}GO$, alors on a $R^2\times\Omega O'^2-R'^2\times\Omega O^2=0$.

Ce qui signifie que . $\frac{\Omega O'}{\Omega O}=\frac{R'}{R}$. Donc il existe une similitude directe de centre Ω, qui transforme O en O'.

Son rapport est $\frac{R'}{R}$. Elle transforme (C) en (C').

D'où l'ensemble des centres des similitudes s telles que s(C) = (C') est le cercle de centre G et de rayon $\frac{R'}{R}GO$.

2) Si (C) et (C') se coupent en A et B, alors OA = OB = R et O'A = O'B = R'.

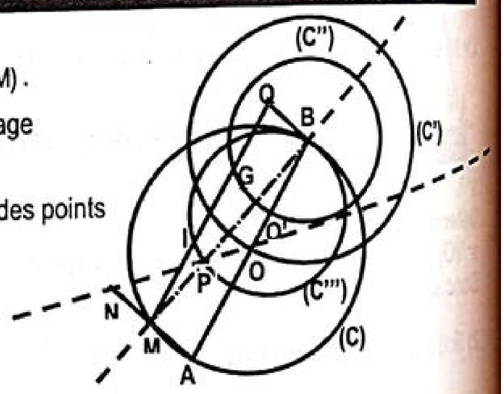
D'où $\frac{O'A}{OA}=\frac{O'B}{OB}=\frac{R'}{R}$. D'où A et B appartiennent au cercle de la question 1).

D'où A et B sont des centres possibles pour de telles similitudes.

Exercice 24

(C) est le cercle de centre O. A et B sont deux points diamétralement opposés sur (C).
Si M est un point de (C), distinct de A et B, on nomme Q le point du plan tel que MABQ soit un parallélogramme direct.
a) Déterminer le lieu géométrique du milieu I de [MQ] quand M décrit (C) – {A, B}.
b) Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité G du triangle BQM lorsque M décrit (C) – {A, B}.
c) Si on note N le symétrique de A par rapport à M et P le point où (ON) coupe (BM).
Déterminer le lieu géométrique de P quand M varie sur (C) – {A, B}.

Solution 24



a) Soit M un point du cercle (C), MABQ est un parallélogramme,

I est le milieu de [MQ] et O celui de [AB], donc $\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{AO}$. D'où $I=t_{\overrightarrow{AO}}(M)$.

Donc lorsque M décrit la cercle (C) privé des points A et B, I décrit l'image (C') de (C) par $t_{\overrightarrow{AO}}$, privée des points $O=t_{\overrightarrow{AO}}(A)$ et $B'=t_{\overrightarrow{AO}}(B)$,

qui est le cercle de centre $B=t_{\overrightarrow{AO}}(O)$ et de même rayon que (C) privé des points O et B'.

b) G est le centre de gravité de MBQ. D'où $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.

C'est-à-dire $G=h_{(B;\frac{2}{3})}(I)$.

D'où lorsque M décrit le cercle (C) privé des points A et B, G décrit le cercle image (C'') de (C') par $h_{(B;\frac{2}{3})}$, privé des points $h_{(B;\frac{2}{3})}(O)$ et $h_{(B;\frac{2}{3})}(B')$, qui est le cercle de centre $h_{(B;\frac{2}{3})}(B)=B$, et de rayon $\frac{2}{3}OB$.

c) (BM) et (NO) sont des médianes dans le triangle ABN.
D'où P est le centre de gravité du triangle ABN (car intersection des médianes).

D'où $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$, c'est-à-dire $P=h_{(B;\frac{2}{3})}(M)$.

Alors, lorsque M décrit (C) privé de A et B, P décrit le cercle image (C''') de (C) par $h_{(B;\frac{2}{3})}$, privé des points $h_{(B;\frac{2}{3})}(A)$ et $h_{(B;\frac{2}{3})}(B)=B$, qui est le cercle de centre $h_{(B;\frac{2}{3})}(O)$ et de rayon $\frac{2}{3}OB$.

3 – Réaliser des constructions

Exercice 25

Dans un plan P orienté, on donne deux droites parallèles (D) et (Δ), et un point A n'appartenant à aucune de ces droites.

Construire un triangle ABC vérifiant simultanément les conditions suivantes :

- ABC est rectangle en A.
- ABC est isocèle.
- B appartient à (D) et C appartient à (Δ).

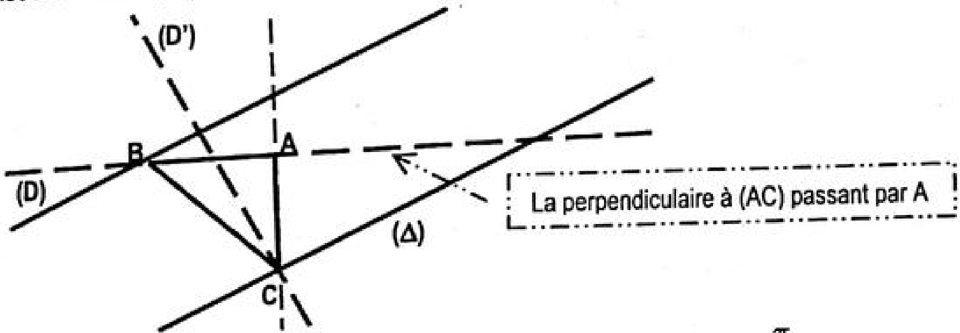
Préciser le nombre de solutions au problème posé.

Solution 25

Deux cas peuvent se présenter : ABC peut être direct ou indirect.

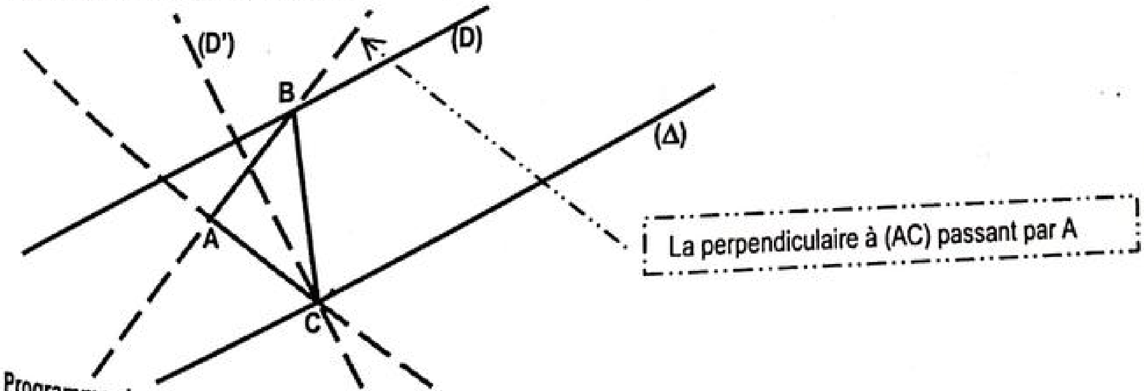
- Si ABC est rectangle isocèle en A de sens direct, alors C est l'image de B par la rotation r de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Puisque B appartient à (D), C appartient à la droite (D'), image de (D) par r.
Or C appartient à (Δ), alors C est le point de rencontre de (D') et (Δ).
Soit (Δ'), la perpendiculaire à (AC) en A, B est le point de rencontre de (D) et (Δ').
Pour la construction de (D'), on choisit arbitrairement un point D de (D). On construit son image D' par r D'AD est un triangle rectangle isocèle direct. (D') est alors la droite passant par D' et perpendiculaire à (Δ).



- Si ABC est indirect, alors C est l'image de B par la rotation r' de centre A, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

C appartient à (D') image de (D) par r' et C appartient à (Δ). C est donc le point de rencontre de (Δ) et (D').
La perpendiculaire à (AC) en A, rencontre (D) en B.



Programme de construction :

Pour construire le triangle ABC :
- On construit (D) et (Δ) deux droites parallèles.
- On place le point A.
- On trace la droite (D'), image de (D) par r ou r'.
- On place le point C intersection de (D') et (Δ).
- On trace la perpendiculaire à (AC) passant par A.
- On place alors le point B intersection de (AC) et (Δ').

Ce problème a deux solutions.

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 26 15 minutes

On donne, dans un repère orthonormé, les points : A(3 , 1), B(3 , -1), C(2 , 1), A'(2 , 5), B'(4 , 3) et C'(1 , 4). Démontrer l'existence d'une similitude directe s par laquelle (A, B, C) a pour image (A', B', C'). Caractériser s.

Exercice 27 **BAC C et E – Cameroun – 1997** 50 minutes

Le plan affine euclidien est orienté. La figure de référence est un triangle équilatéral direct sur lequel on a AB = AC = BC = 1 et une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ est égale à $\frac{\pi}{3}$.

On reproduira cette figure et on la complètera au fur et à mesure.

O désigne le milieu du segment [BC] et G l'isobarycentre des points A, B et C.

1) Construire G et calculer la distance GO.

2) Déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques de l'ensemble (S) des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 1{,}25$. Tracer (S) sur la figure précédente.

Dans la suite, r désigne la rotation de centre G qui transforme C en A et h l'application qui, à tout point M du plan, associe M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. On pose s = hor.

3)a) Démontrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

b) Déterminer puis tracer sur la même figure que précédemment l'image par h de (S).

c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s.

4) On note I le symétrique de O par rapport à C, J le point de la droite (OA) tel que OJ = 1, $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OJ}$.

a) Démontrer que $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé du plan.

b) M étant un point d'affixe z et M' son image par s, exprimer l'affixe z' de M' en fonction de z.

c) En déduire l'expression analytique de s dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, ainsi que la matrice dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ de l'endomorphisme σ associé à s dans le plan vectoriel.

Exercice 28 **BAC C et E – Cameroun – 1998** 45 minutes

Dans cet exercice, le plan est orienté, $(\vec{u}, \vec{v})$ désigne une mesure en radians de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

ABC est un triangle rectangle en A tel que AC = 2AB et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, (k étant un entier relatif).

On note D le barycentre du système {(A , -1), (B , 1), (C , 1)}, E le point du plan tel que AE = 2AD et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ (k étant un entier relatif), (C) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{AD^2}{4}.$$

1) On se propose de démontrer que les droites (CE) et (BD) sont perpendiculaires et que CE = 2BD.

a) Construire les points D et E.

b) Déterminer et construire (C).

c) On note s la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2.

Déterminer les images par s des points B et D.

En déduire que les droites (CE) et (BD) sont perpendiculaires et que CE = 2BD.

2) Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A ; \vec{u}, \vec{v})$, on pose AB = α et $\vec{u} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AB}$.

a) Déterminer en fonction de α les affixes des points B, C et D.

b) M étant un point du plan, ayant pour affixe z et pour image par s le point M' d'affixe z', exprimer z' en fonction de z.

c) Déterminer les coordonnées de E et vérifier le résultat de la question 1) par le calcul.

Exercice 29 — **BAC C et E – Cameroun – 1993** — **45 minutes**

1)a) Tracer un carré ABCD direct de centre I inscrit dans un cercle (C) et une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})$ soit $\frac{\pi}{2}$.

b) Calculer en fonction de la distance AB, l'aire du disque délimité par (C).

2) On note s la similitude directe plane de centre B qui transforme A en D. Soit D' et I' les images respectives de D et I par s.

a) Préciser les éléments géométriques de s.

b) Prouver que I' = C et en déduire que C est le milieu du segment [BD'].

c) Soit (C') le cercle image de (C) par la similitude s, tracer (C') et évaluer l'aire du disque délimité par (C').

3) On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel B a pour coordonnées (1 , 1).

a) Donner l'écriture complexe de la similitude s.

b) Si un point M du plan a pour coordonnées (x , y) dans ce repère et M' son image par s a pour coordonnées (x', y'), écrire les relations entre x', y' et x et y.

Exercice 30 — **BAC C et E – Cameroun – 1987** — **40 minutes**

E est le plan affine euclidien, muni du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct.

Soit f l'application affine de E qui, à tout point M de coordonnées (x , y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que : $\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} \end{cases}$.

1) Soit z et z' les affixes respectives des points M et M'.

Montrer qu'il existe deux complexes p et q tels que $z' = p\bar{z} + q$, p et q indépendants de z et z'.

Montrer que f est une symétrie orthogonale que l'on caractérisera.

2) (H) est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient la relation : $6x^2 + 4y^2 - 11xy - 11x + 8y - 1 = 0$.

a) Déterminer l'image (H') de (H) par f.

b) Montrer qu'une équation de (H') peut s'écrire sous la forme y = g(x). Construire (H').

Exercice 31 — **45 minutes**

Soit u le complexe de module 1 et d'argument principal $\frac{\pi}{3}$.

1)a) Montrer que u est une racine cubique de – 1.

b) Montrer que u est une solution de l'équation (E) : $z^2 - z + 1 = 0$.

c) En déduire la forme exponentielle de l'autre solution v de l'équation (E).

2) Dans le plan orienté, ABC est un triangle équilatéral direct.

On construit les triangles équilatéraux directs AEB et ACF.

Montrer que les droites (CE) et (BF) sont médiatrices respectives des segments [AB] et [AC].

3) On considère la similitude directe s de centre A qui transforme B en F.

a) Déterminer l'image de E par s.

b) Déterminer l'angle et le rapport de s.

c) Donner l'expression exponentielle de la similitude directe s.

4) Montrer que : BF = CE et $mes(\widehat{\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CE}}) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Exercice 32 — **45 minutes**

Dans le plan orienté, ABC est un triangle équilatéral tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On note :

D, le symétrique de B par rapport à (AC) ; R, la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en C ; E, l'image de B par R.

1) a) Quelle est la nature précise du quadrilatère ABCD ?

b) Démontrer que D est le centre de la rotation R.

c) Démontrer que C est le milieu du segment [AE].

2) A tout point M de [AB] distinct de A et B, on associe le point M' de [CE] tel que AM = CM'.
Démontrer que le triangle DMM' est équilatéral.

3) Soit G l'isobarycentre du triangle DMM' et s la similitude directe plane de centre D qui transforme M en G.

a) Préciser le rapport et l'angle de s.

b) Démontrer que s(B) = C.

c) Construire le point A' image de A par s.

d) Démontrer que les points C, G et A' sont alignés.

Exercice 33 BAC C – Aix-Marseille – 1986. 35 minutes

ABC est un triangle quelconque direct, M est le milieu de [BC]. BAB' et CAC' sont les triangles rectangles isocèles de sommet A et extérieurs à ABC.

Le but du problème est de montrer que les droites (AM) et (B'C') sont perpendiculaires et que B'C' = 2AM.

1) Méthode géométrique :

a) Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2.
Déterminer les images des points A et M par h.
Trouver une rotation r telle que roh transforme A en B' et M en C'.

b) En déduire que les droites (AM) et (B'C') sont perpendiculaires et que B'C' = 2AM.

2) Utilisation des complexes :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine A dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c.

a) Quelles sont les affixes m, b', c' de M, B' et C'.

b) Retrouver les résultats de 1)b).

Exercice 34 45 minutes

Soit $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan.

A_0 le point d'affixe 6 et s la similitude directe de centre O, de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

On pose $A_{n+1} = s(A_n)$ pour n entier allant de 0 à 11.

1) Déterminer en fonction de n, l'affixe du point A_n et vérifier que A_{12} appartient à la demi-droite $[O\,;\vec{i})$.

2) Etablir que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
Représenter les points $A_0, A_1, \ldots, A_{12}$ (On ne demande pas de calculer explicitement leurs coordonnées) et tracer les segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, . . ., $[A_{11}A_{12}]$.

3) Calculer la longueur du segment A_0A_1.
En déduire la longueur l de la ligne polygonale $A_0A_1A_2 \ldots A_{12}$. Donner une valeur approchée de l à 10^{-3} près.

Exercice 35 45 minutes

On donne dans le plan orienté P, un triangle isocèle OO'A avec $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AO}\,,\overrightarrow{AO'}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Les cercles (C) et (C') passant par A et de centres respectifs O et O' se recoupent en B.

A tout point M de (C), on associe le point M' de (C') tel que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{O'M'}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) Montrer qu'il existe une rotation r, que l'on caractérisera, transformant O en O' et M en M'.

2) M étant distinct de B, les droites (BM) et (BM') recoupent respectivement (C') et (C) en N' et N.
Montrer que N' est l'image de N par la rotation r.

3) On construit les carrés MBM'P et NBN'Q.
Montrer que les points P et Q sont respectivement les images des points M et N par une similitude directe s dont on précisera le centre, le rapport et l'angle.
En déduire les ensembles des points P et Q quand M décrit (C).
Les différents éléments de ce problème paraîtront sur une figure soignée.

Exercice 36 30 minutes

ABCD est un quadrilatère et α un complexe de module r et d'argument θ. a, b, c, d représentent les affixes de A, B, C,

...et D dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct.

La similitude directe de centre A, de rapport r et d'angle θ, transforme B en Q.
La similitude directe de centre B, de rapport r et d'angle θ, transforme C en M.
La similitude directe de centre C, de rapport r et d'angle θ, transforme D en N.
La similitude directe de centre D, de rapport r et d'angle θ, transforme A en P.
On appelle q, m, n, p les affixes de Q, M, N et P.

1) Déterminer q en fonction de α, a et b.

2) a) Montrer que : MNPQ est un parallélogramme si et seulement si, $n + q = m + p$.

b) En déduire que : MNPQ est un parallélogramme si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$ ou ABCD est un parallélogramme.

3) On suppose que ABCD est un parallélogramme et que $\alpha = \frac{1+i}{2}$. En déduire que MNPQ est un carré.

Exercice 37 — Extrait d'un BAC C étranger — 40 minutes

Dans le plan orienté, OAB est un triangle rectangle isocèle avec $mes(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, OA = OB = a.

On note I le milieu de [AB]. Soit M un point de (AO) et b un réel tel que : $\overrightarrow{MA} = b\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{NB} = -b\overrightarrow{OB}$.

(Pour faire la figure uniquement, on prendra a = 5cm).

1) Dans cette question, on suppose M ≠ A.

a) Déterminer la mesure de l'angle en radians de $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{NB}})$.

b) Soit r la rotation du plan telle que r(A) = B et r(M) = N. Préciser l'angle de r.
Soit Ω son centre. Montrer que OAΩB est un carré.

2) Soit J, milieu de [MN] et P tel que OMPN soit un rectangle.

a) Déterminer l'angle de la similitude directe s de centre Ω qui transforme M en J.

b) Déterminer l'ensemble (E) des points J lorsque M décrit la droite (OA).
En déduire l'ensemble (F) des points P lorsque M décrit (OA). Représenter (E) et (F).

Exercice 38 — 50 minutes

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A(1 , 0) et B(-1 , 0).

A tout point M(x , y), on associe le complexe z = x + iy, affixe de M.

1) Soit T l'application de P vers P, qui au point M d'affixe z, associe le point M_1 d'affixe z_1 avec $z_1 = iz - (1 + i)$.

a) Montrer que l'on a : $mes(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM_1}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $BM_1 = AM$.

b) Préciser la nature de T et ses éléments caractéristiques.

c) Calculer les coordonnées (x_1 , y_1) de M_1 en fonction de celles de M.

d) Quel est l'ensemble des points M_1 lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB] ?

2) Soit a réel fixé non nul quelconque, on considère l'application T_a de P dans P qui au point M associe le point M', barycentre des points pondérés (M , a), (M_1 , -a) et (A, 1).
On note z' = x' + iy' l'affixe de M'.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de a, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OA}$.
En déduire entre z et z', la relation : z' = a(1 – i)z + a(1 + i) + 1.

b) Démontrer que T_a est une similitude directe et déterminer l'affixe de son centre, son rapport et son angle. Préciser pour quelles valeurs de a, l'application T_a est une rotation et donner dans ces cas son angle et l'affixe de son centre.

Exercice 39 — BAC S – France Groupe 1 bis – 1996 — 45 minutes

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle direct de sommet A tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$, le point I, tel que CAI soit isocèle rectangle indirect de sommet C, r_A la rotation de centre A qui transforme B en C, r_C la rotation de centre C d'angle $-\frac{\pi}{2}$; $f = r_C o r_A$. On note O son centre, s la similitude directe de centre O qui transforme A en B, C' = s(C), H le milieu de [BC], et H' = s(H).

1)a) Déterminer f(A) et f(B).

b) Montrer que f est une rotation.

c) Donner la nature du quadrilatère ABOC.

2)a) Donner une mesure de l'angle de s.

b) Montrer que C' appartient à (OA).

c) Montrer que H' est le milieu de [OB].

d) Montrer que (C'H') est perpendiculaire à (OB).

e) En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit à OBC.

Exercice 40 — 45 minutes

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. On désigne par T l'application de P dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = (1+i)z - i$.

1) Montrer que T est une similitude directe de P dont on déterminera les éléments caractéristiques.

On notera A le point invariant par T.

Donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AM}\,,\overrightarrow{MM'}})$, en supposant $M \neq A$.

2) a) Construire M' pour un point M donné.

b) Déterminer l'image (D') par T de la droite (D) d'équation $y = x$. Construire (D').

3) a) Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les affixes z_B de B et z_B' de $B' = T(B)$ soient liées par la relation $z_B z_B' = 1$. Placer B et B' sur la figure.

b) Soit A' le symétrique de A par rapport à O. Montrer que les points A, A', B et B' sont cocycliques.

Exercice 41 — 25 minutes

Deux cercles (C) et (C') se coupent en A et B. Soit M un point du plan.

M décrit le cercle (C) de centre O. Son transformé M' par une similitude directe s de centre A décrit le cercle (C') de centre O'.

1) Comparer les angles $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'M'}})$.

2) Montrer que le triangle AMM' reste semblable au triangle AOO'.

En déduire que la droite (MM') passe par B.

Exercice 42 — BAC – Inde – mars 2003 — 60 minutes

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A) ABC est un triangle direct du plan orienté.

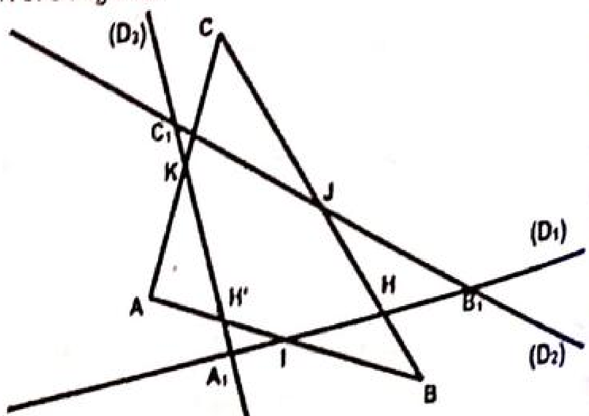
On désigne respectivement par I, J et K les milieux respectifs de [AB], [BC] et [CA].

Soit α un réel qui conduit à la réalisation de la figure ci-dessous sur laquelle on raisonnera.

(D_1) est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α.

(D_2) est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α.

(D_3) est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α.



1) On appelle H le point d'intersection de (BC) et (D_1).

Montrer que les triangles HIB et HB_1J sont semblables.

2) En déduire que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

B) Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

1) *Construction de la figure*

a) Placer les points $A(-4-6i)$, $B(14)$, $C(-4+6i)$, $A_1(3-7i)$, $B_1(9+5i)$ et $C_1(-3-i)$.

b) Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments [AB], [BC] et [CA]. Placer ces points sur la figure.

c) Montrer que A_1, I, B_1 sont alignés.

d) Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}})$.

On admettra que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KA_1}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JC_1}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

e) Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2) ***Recherche d'une similitude directe transformant ABC en $A_1B_1C_1$.***

On admet qu'il existe une similitude directe s transformant les points A, B et C en A_1, B_1 et C_1 respectivement.

a) Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2 - 2i$, où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point et son image par s.

b) Déterminer le rapport et l'angle de s.

Déterminer l'affixe du centre Ω de s.

c) Que représente le point Ω pour ABC ?

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

Solution 26

Supposons qu'il existe une similitude directe s transformant (A , B) en (A' , B').
Son expression complexe est sous la forme : z' = az + b.

- s(A) = A' signifie $z_{A'} = az_A + b$. C'est-à-dire 2 + 5i = a(3 + i) + b.
- s(B) = B' signifie $z_{B'} = az_B + b$. C'est-à-dire 4 + 3i = a(3 – i) + b.

On a alors le système $\begin{cases} 2+5i = a(3+i)+b \\ 4+3i = a(3-i)+b \end{cases}$, qui a pour solution a = 1 + i et b = i.

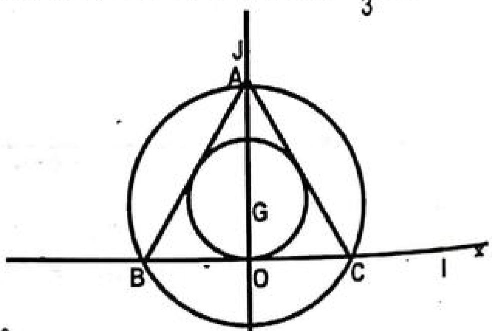
Alors l'expression complexe de s est : z' = (1 + i)z + i.
Or $(1 + i)z_C + i = (1 + i)(2 + i) + i = 1 + 4i = z_{C'}$, alors s(C) = C'.
D'où la similitude directe s qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', avec z' = (1 + i)z + i, transforme le triplet de points (A , B , C) en (A' , B' , C').

Son rapport est $|1+i| = \sqrt{2}$, son angle a pour mesure $\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et son centre a pour affixe – 1, l'unique point invariant par s.

Solution 27

1) • G isobarycentre de A, B et C signifie $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$.
C'est-à-dire $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}$.

Or O est le milieu du segment [BC], c'est-à-dire $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}=\vec{0}$, alors $\overrightarrow{AO}+3\overrightarrow{OG}=\vec{0}$. D'où $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$.



• $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$, donc $OG=\frac{1}{3}OA$.

Or $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{OA}{AB}$ et AB = 1, alors $OA=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Par conséquent, $OG=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

2) Soit M un point du plan.

$$\begin{aligned} MA^2+MB^2+MC^2 &= (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2 \\ &= MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}+GA^2+MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}+GB^2+MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}+GC^2 \\ &= 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}) \\ &= 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2 \quad (\text{car } \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}) \\ &= 3MG^2+3GA^2 \quad (\text{car } GA=GB=GC) \\ &= 3MG^2+12OG^2 \\ &= 3MG^2+1 \end{aligned}$$

D'où $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 1,25$ équivaut à $3MG^2+1=\frac{5}{4}$. C'est-à-dire $GM^2=\frac{1}{12}$, ce qui signifie $GM=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Finalement, (S) est le cercle de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

3)a) Soit M un point du plan et M' = h(M). On a
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{MG}$.
Donc $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ signifie $\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}=3\overrightarrow{MG}$. C'est-à-dire $\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$.
D'où h est l'homothétie de centre G et rapport -2.

b) h(G) = G et h est une homothétie de rapport -2, d'où l'image (S') de (S) par h est le cercle de centre G et de rayon $2\times\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. C'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle ABC.

c) r est la similitude directe de centre G, de rapport 1 et d'angle $(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GA})$, dont une mesure est $\frac{2\pi}{3}$.

h est la similitude directe de centre G, de rapport 2 et d'angle $-\pi$.

D'où s = hor est la similitude directe de centre G, d'angle dont une mesure est $\frac{2\pi}{3}-\pi=-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 1×2 = 2.

4)a) On a : $OI=2OC=2\times\frac{1}{2}=1$ et OJ = 1.

Le triangle ABC étant équilatéral et O milieu de [BC], alors la droite (OA) est la médiatrice de [BC].

Il s'ensuit donc que (OA) est orthogonal à (OC). C'est-à-dire les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont orthogonaux.

D'où $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé du plan.

b) $OG=\frac{\sqrt{3}}{6}$ et G appartient à [OJ]. D'où G a pour affixe $z_G=\frac{\sqrt{3}}{6}i$.

s est la similitude directe de centre G, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2, d'où :

s(M) = M' signifie $z'-z_G=2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-z_G)$, c'est-à-dire $z'-\frac{\sqrt{3}}{6}i=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)$.

Finalement, $z'=(1-i\sqrt{3})z-\frac{1}{2}$. ***(Le lecteur fera les calculs)***

c) • Soit M(x , y) et M'(x' , y') deux points du plan.

s(M) = M' équivaut à $z'=(1-i\sqrt{3})z-\frac{1}{2}$, ce qui signifie $x'+iy'=(1-i\sqrt{3})(x+iy)-\frac{1}{2}$.

C'est-à-dire $x'+iy'=x+y\sqrt{3}-\frac{1}{2}+i(-\sqrt{3}x+y)$. On en déduit alors que : $\begin{cases} x'=x+y\sqrt{3}-\frac{1}{2} \\ y'=-x\sqrt{3}+y \end{cases}$.

• Soit O' = s(O), on a $O'\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{O'M'}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x+y\sqrt{3} \\ -x\sqrt{3}+y \end{pmatrix}$.

Or $\begin{pmatrix} x+y\sqrt{3} \\ -x\sqrt{3}+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors soit ψ l'endomorphisme, de matrice $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{O'M'}=\psi(\overrightarrow{OM})$.

ψ est donc l'endomorphisme associé à s. D'où la matrice de σ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est : $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Solution 28

1)a) D étant le barycentre du système {(A , -1), (B , 1), (C , 1)}, on a : $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

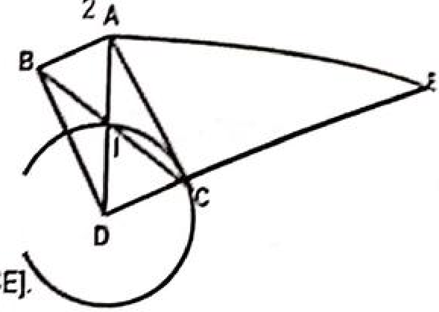
C'est-à-dire $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$. D'où $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Alors ABDC est un parallélogramme.

b) Soit M un point du plan.

$$\begin{aligned}
-MA^2+MB^2+MC^2 &= -(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA})^2+(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB})^2+(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC})^2 \\
&= -MD^2-2\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DA}-DA^2+MD^2+2\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DB}+DB^2+MD^2+2\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DC}+DC^2 \\
&= MD^2-DA^2+DB^2+DC^2+2\overrightarrow{MD}\cdot(-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}) \\
&= MD^2-DA^2+DB^2+DC^2 \quad (\text{car } -\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}) \\
&= MD^2 \quad (\text{car ABDC est un rectangle, donc } DA^2=DB^2+DC^2)
\end{aligned}$$

Ainsi, $-MA^2+MB^2+MC^2=\frac{AD^2}{4}$ équivaut à $DM^2=\frac{AD^2}{4}$. C'est-à-dire $DM=\frac{AD}{2}$.

Finalement, (C) est le cercle de centre D et de rayon $\frac{AD}{2}$.



c) • $AC=2AB$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}+k2\pi$, d'où $s(B)=C$.

$AE=2AD$ et $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, d'où $s(D)=E$.

• Puisque $s(B)=C$ et $s(D)=E$, alors s transforme le segment [BD] en [CE].

D'où $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CE})=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ et $CE=2BD$, (car s est la similitude directe de rapport 2 et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$).

C'est-à-dire que les droites (CE) et (BD) sont perpendiculaires et que $CE=2BD$.

2)a) $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{u}$, donc l'affixe de B est $z_B=\alpha$.

$\overrightarrow{AC}=AC\vec{v}=2\alpha\vec{v}$, donc l'affixe de C est $z_C=2\alpha i$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\alpha\vec{u}+2\alpha\vec{v}$, d'où l'affixe de D est $z_D=\alpha+2\alpha i$.

b) s est la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2.

D'où $s(M)=M'$ si et seulement si, $z'-z_A=2e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$. C'est-à-dire $z'=2iz$.

c) • $s(D)=E$, d'où $z_E=2iz_D=2i(\alpha+2\alpha i)=-4\alpha+2\alpha i$. D'où le point E a pour coordonnées $(-4\alpha, 2\alpha)$.

• Les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$ sont $(0, 2\alpha)$ et celles de $\overrightarrow{CE}$ sont $(-4\alpha, 0)$.
D'où $BD=2\alpha$, $CE=4\alpha$. Donc $CE=2BD$.

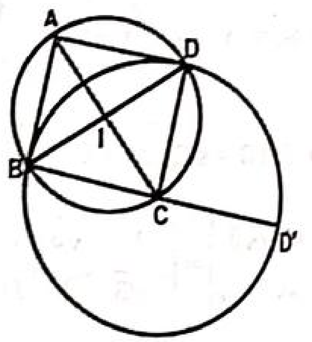
Et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}=0\times(-4\alpha)+2\alpha\times0=0$. Donc les droites (BD) et (CE) sont perpendiculaires.

Solution 29

1)a)

b) Le disque délimité par le cercle (C) a pour diamètre [AC].

Son aire est donc : $\frac{\pi AC^2}{4}=\frac{\pi(AB^2+BC^2)}{4}=\frac{\pi AB^2}{2}$.



2)a) s est une similitude directe plane telle que : $s(B)=B$ et $s(A)=D$.
Alors le centre de s est B (car B est invariant par s), son rapport est $\frac{BD}{BA}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$ et son angle est $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}})$, dont une mesure est $-\frac{\pi}{4}$.

b) • Une mesure de l'agnle $(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BC}})$ est $-\frac{\pi}{4}$ et $BC=BI\sqrt{2}$, d'où $s(I)=C$.

Or $s(I)=I'$, alors $I'=C$.

• I est milieu de [BD], d'où s(I) est le milieu de [s(B)s(D)].
Or $s(I)=C$, $s(B)=B$ et $s(D)=D'$, alors C est le milieu de [BD'].

c) • (C) est le cercle de centre I et de rayon IB, d'où $(C')=s(C)$ est alors le cercle de centre $s(I)=C$ et de rayon $s(I)s(B)=CB$.

• L'aire du disque délimité par (C') est $2\times\frac{\pi AB^2}{2}=\pi AB^2$.

3)a) s est la similitude directe de centre B d'affixe $b=1+i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

D'où soit M le point d'affixe z et M' d'affixe z'.

$s(M)=M' \Leftrightarrow z'-b=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z-b) \Leftrightarrow z'-1-i=(1-i)(z-(1+i)) \Leftrightarrow z'=(1-i)z-1+i.$

D'où l'expression complexe de s est : $z' = (1 - i)z - 1 + i$.

b) Soit $M(x , y)$ et $M'(x' , y')$ deux points du plan.

$s(M) = M' \iff z' = (1 - i)(z - 1) \iff x' + iy' = (1 - i)(x - 1 + iy) \iff x' + iy' = (x + y - 1) + i(-x + y + 1)$.

D'où $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$. D'où l'expression analytique de s est : $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$.

Solution 30

1) • $z' = x' + iy' = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{4}{5}\right) + i\left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5}\right) = x\left(-\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right) + y\left(\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$.

Il s'ensuit que $z' = \frac{z + \overline{z}}{2}\left(-\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right) + \frac{z - \overline{z}}{2i}\left(\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i = \left(-\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right)\overline{z} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$.

Pour $p = -\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$ et $q = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$, on a bien $z' = p\overline{z} + q$.

• Soit $M(x , y)$ un point du plan,

$f(M) = M$ équivaut à $\begin{cases} x = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} \end{cases}$.

Ce système équivaut à : $2x - y - 1 = 0$.

D'où l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation $2x - y - 1 = 0$.

Soit $M(x , y)$ un point du plan et M' sont image par f. $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{8}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Or un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(1, 2)$ et on a : $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 1 \times \left(-\frac{8}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{4}{5}\right) + 2 \times \left(\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{2}{5}\right) = 0$.

D'où si $M \neq M'$, les droites (MM') et (D) sont perpendiculaires.

. Soit I le milieu de [MM'], les coordonnées de I sont : $\left(\frac{x' + x}{2}, \frac{y' + y}{2}\right)$, soit $\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{2}{5}, \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{5}\right)$.

Or, $2x_I - y_I - 1 = 2 \times \left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{5}\right) - 1 = 0$, alors le point I est sur la droite (D).

On peut alors conclure que f est une symétrie orthogonale d'axe (D), d'équation $2x - y - 1 = 0$.

2)a) f est une réflexion, donc $f^{-1} = f$.

Ainsi, soit $M(x , y)$ et $M'(x' , y')$ deux points du plan, $M' = f(M) \iff M = f(M') \iff \begin{cases} x = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' + \frac{4}{5} \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' - \frac{2}{5} \end{cases}$.

Et M appartient à (H) $\iff 6x^2 + 4y^2 - 11xy - 11x + 8y - 1 = 0 \iff 2x'^2 - x'y' - x' - 1 = 0$.

D'où (H') est la courbe d'équation : $2x^2 - xy - x - 1 = 0$.

b) • Soit $M(x , y)$ un point du plan.

M appartient à (H') si et seulement si $2x^2 - xy - x - 1 = 0$; c'est-à-dire $xy = 2x^2 - x - 1$. Donc $y = 2x - 1 - \frac{1}{x}$.

Finalement, la courbe (H') est définie par la fonction g telle que $g(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x}$.

• **Etudions les variations de g :**

g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, car fonction rationnelle.

Et pour tout réel non nul x, on a $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ et donc $g'(x) > 0$.

D'où la fonction g est strictement croissante dans chaque intervalle où elle est définie.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$.

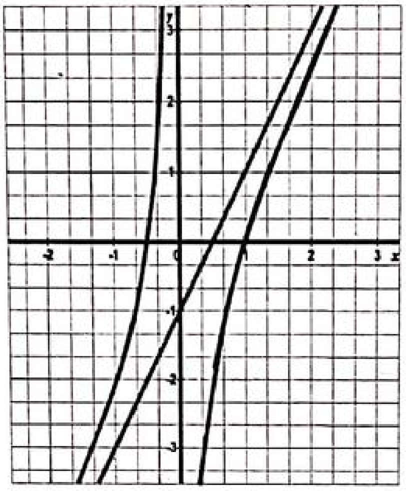
On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'(x)	+	||	+
g(x)	$-\infty \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-(2x-1))=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-(2x-1))=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{x}=0$.

D'où la droite d'équation y = 2x – 1 est asymptote oblique à la courbe de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

D'où la courbe (H') qui suit :



Solution 31

1)a) Notons que $u=e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc $u^3=e^{i\pi}=-1$. D'où u est une racine cubique de -1.

b) u est une racine cubique de – 1, c'est-à-dire $u^3 = -1$, soit $u^3 + 1 = 0$.

Or $u^3 + 1 = (u + 1)(u^2 - u + 1)$, alors $u^3 + 1 = 0$ signifie $u = -1$ ou $u^2 - u + 1 = 0$.

Or u est différent de -1, alors on a $u^2 - u - 1 = 0$. u est donc solution de l'équation $z^2 - z - 1 = 0$.

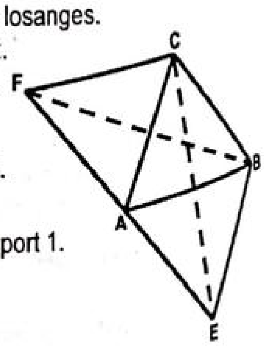
c) u est solution de (E). C'est-à-dire $u^2 - u + 1 = 0$. Ce qui équivaut à $\overline{u^2-u+1}=0$.

Ce qui signifie $\overline{u}^2-\overline{u}+1=0$, c'est-à-dire $\overline{u}$ est solution de (E). D'où l'autre solution de (E) est : $v=\overline{u}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2) ABC, AEB et ACF étant des triangles équilatéraux directs, AEBC et ABCF sont des losanges.

D'où (EC) et (FB) sont perpendiculaires respectivement à [AB] et [AC] en leurs milieux.

Donc les droites (CE) et (BF) sont médiatrices respectives des segments [AB] et [AC].



3)a) s(E) = C.

b) Le rapport de s est $\dfrac{AF}{AB}=1$ et son angle est $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}})$ dont une mesure est $\dfrac{2\pi}{3}$.

c) s est la similitude directe de centre A, d'angle dont une mesure est $\dfrac{2\pi}{3}$ et de rapport 1.

D'où s est la rotation de centre A, d'angle dont une mesure est $\dfrac{2\pi}{3}$.

Soit M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z'. s(M) = M' équivaut à $z'-z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-z_A)$.

4) s est la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ qui transforme B en F et E en C.

- Donc les triangles ABF et AEC sont semblables.

Comme de plus, AB = AE, alors ces triangles sont superposables. D'où, BF = CE.

- Donc $mes(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{FC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Or $(\widehat{\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CE}}) = (\widehat{\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BE}}) + (\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{FC}}) + (\widehat{\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CE}})$, alors une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CE}})$ est $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$.

D'où $mes(\widehat{\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CE}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$. Finalement, on a EC = BF et $mes(\widehat{\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CE}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Solution 32

1)a) ABCD est un losange, car il a quatre côtés de même longueur.

b) Soit Ω le centre de R, ΩAC est un triangle équilatéral direct.

De plus, La réflexion d'axe (AC) transforme A en A, C en C et B en D.

Donc elle transforme le triangle BAC en le triangle DAC.

Or le triangle BAC est équilatéral indirect, et la réflexion conserve la nature des triangles, mais inverse leur orientation, alors DAC est équilatéral direct.

Puisque A et C sont fixés, alors il existe un unique point D tel que DAB soit un triangle équilatéral direct. D'où Ω = D.

D'où le centre de R est D.

c) DBE est un triangle équilatéral, et (AC) est la médiatrice de [DB], alors E appartient à la droite (AC).

De plus, R(A) = C et R(B) = E, donc AB = CE. Et comme AB = AC, alors AC = CE.

Finalement, A, C et E sont alignés et AC = CE, donc C est le milieu de [AE].

2) Soit N, l'image de M par R, puisque R(A) = C, alors AM = CN.

Or l'image de [AB] par R est [CE], et M appartient à [AB], donc N appartient à [CE].

Donc N est le point du segment [CE] tel que AM = CN. Donc N = M'.

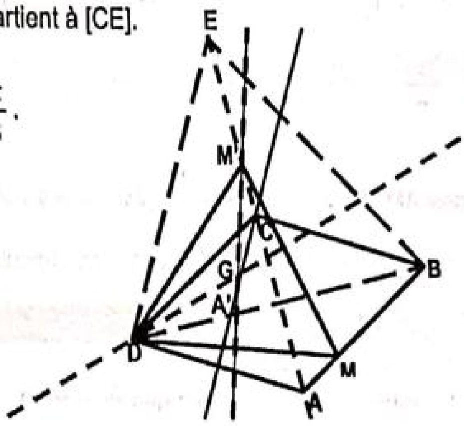
C'est-à-dire M' est l'image de M par la rotation de centre D, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

D'où Le triangle DMM' est équilatéral.

3) s est la similitude directe de centre D qui transforme M en G.

a) Donc : le rapport de s est $\frac{DG}{DM} = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

l'angle de s est $(\widehat{\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DG}})$, dont une mesure est $\frac{\pi}{6}$.



b) On a : $\frac{DC}{DB} = \frac{DC}{2DC \times \cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. D'où s(B) = C.

c) A' est le centre de gravité du triangle DAC.

d) A, M et B sont alignés, d'où s(A) = A', s(M) = G et s(B) = C le sont aussi (la similitude directe conserve l'alignement).

Par conséquent, C, G et A' sont alignés.

Solution 33

1)a) • $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$ (car M est le milieu de [BC]), d'où h(M) = C.

h(A) = A', symétrique de B par rapport à A.

• Soit r une rotation telle que roh(A) = B' et roh(M) = C'.

Puisque h(A) = A' et h(M) = C, alors r(A') = B' et r(C) = C'.

Le centre de r est alors le point de rencontre des médiatrices des segments [A'B'] et [CC'], qui est A (car les triangles AA'B' et CAC' sont isocèles de sommet A).

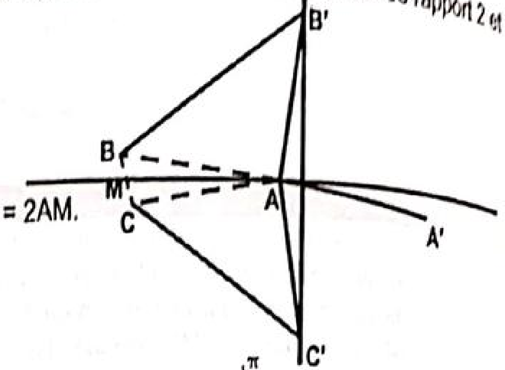
Son angle est $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}})$ dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

Si une telle rotation existe, c'est la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

On a bien : roh(A) = r(A') = B' et roh(M) = r(C) = C'.

D'où r est bel et bien la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

b) roh, composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'une homothétie de rapport 2 est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, puisque roh(A) = B' et roh(M) = C', alors on a :



$B'C' = 2AM$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C'}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Finalement, les droites (AM) et (B'C') sont perpendiculaires et BC' = 2AM.

2)a) • M est le milieu de [BC], d'où l'affixe de M est $m = \frac{b+c}{2}$.

- AB'B est un triangle rectangle isocèle direct de sommet A.

Donc B est l'image de B' par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$. C'est-à-dire $z_B - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_{B'} - z_A)$.

D'où b = ib'. Finalement, b' = -ib.

- ACC' est un triangle rectangle et isocèle de sommet A et de sens direct.

D'où $c' - 0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(c-0)$, soit c' = ic.

b) • $AM = |m| = \frac{1}{2}|b+c|$ et $B'C' = |b'-c'| = |-ib - ic| = |-i| \times |b+c| = |b+c|$. D'où B'C' = 2AM.

- $\frac{c'-b'}{m} = \frac{i(c+b)}{\frac{c+b}{2}} = 2i$. D'où $\arg\left(\frac{c'-b'}{m}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Or $mes(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C'}}) \equiv \arg\left(\frac{c'-b'}{m}\right)[2\pi]$, alors $mes(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C'}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Et donc les droites (AM) et (B'C') sont perpendiculaires.

Solution 34

1) • Soit n entier naturel non nul.

Le lecteur vérifiera par récurrence que $A_n = soso\ldots os(A_0) = s^n(A_0)$.

Or s^n est la similitude directe de rapport $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$, d'angle $\frac{n\pi}{6}$, de centre O.

Notons z_n l'affixe de A_n, on a alors : $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \times e^{i\frac{n\pi}{6}} \times z_0$. C'est-à-dire $z_n = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

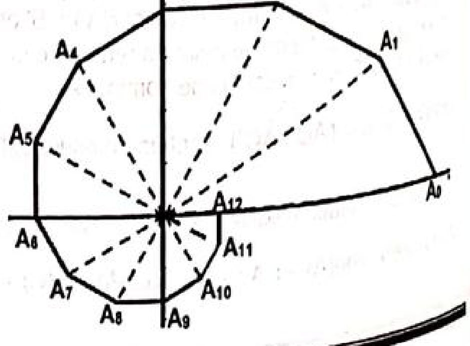
- $z_{12} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12} e^{i\frac{12\pi}{6}} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12} e^{i2\pi} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12} = \frac{2187}{2048}$.

D'où, z_{12} est un réel strictement positif. Par conséquent, A_{12} appartient à la demi-droite $[O;\vec{i})$.

2) • Il suffit de déterminer l'argument de $\frac{z_n - z_{n+1}}{-z_{n+1}}$.

Or $\frac{z_n - z_{n+1}}{-z_{n+1}} = 1 - \frac{z_n}{z_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}i$.

D'où $\arg\left(\frac{z_n - z_{n+1}}{-z_{n+1}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.



Comme $mes(\widehat{\overrightarrow{A_{n+1}O},\overrightarrow{A_{n+1}A_n}}) \equiv \arg\left(\frac{z_n - z_{n+1}}{-z_{n+1}}\right)[2\pi]$, alors on a $mes(\widehat{\overrightarrow{A_{n+1}O},\overrightarrow{A_{n+1}A_n}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

D'où le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

- Remarquons que $A_{n+1} = s(A_n)$, d'où $mes(\widehat{\overrightarrow{OA_n},\overrightarrow{OA_{n+1}}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

3) • $A_0A_1 = |z_1 - z_0| = \left|6\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)-6\right| = \left|-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right| = 3$.

- Soit n un entier naturel.

La similitude directe plane s de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ transforme A_{n-1} en A_n et A_n en A_{n+1}. Donc $A_nA_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}A_{n-1}A_n$.

D'où la suite $(A_nA_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $A_0A_1 = 3$.

Or $l = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{11}A_{12}$, alors $l = \left(\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \times A_0A_1$. D'où $l = 3\left(\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$.

- En utilisant la calculatrice, on a : $l \approx 18{,}4069$ à 10^{-3} près.

Solution 35

1) • OM = O'M', d'où il existe un unique déplacement qui transforme O en O' et M en M'.

Comme $\overrightarrow{OO'} \neq \overrightarrow{MM'}$, alors ce déplacement n'est pas une translation, c'est donc une rotation.
D'où il existe une unique rotation r telle que r(O) = O' et r(M) = M'.

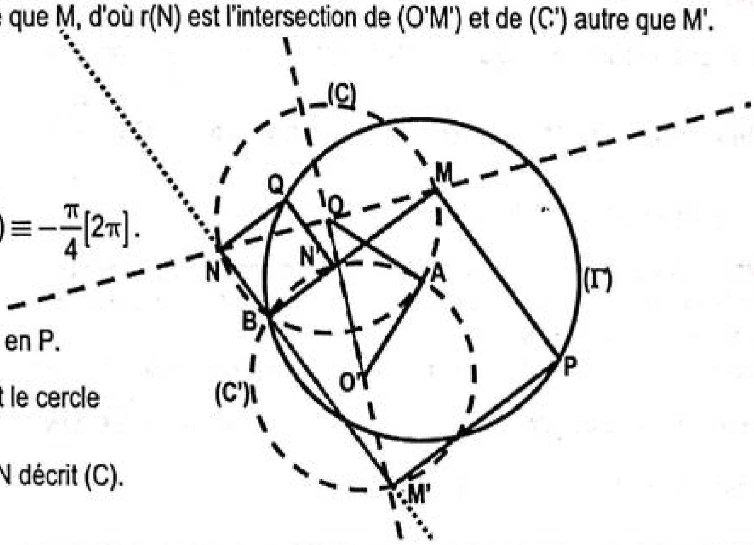
- Son angle est $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'}})$ dont une mesure $-\frac{\pi}{2}$.

- Puisque BO = BO' et $mes(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BO'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, alors le centre de r est B.

2) L'image de (C) par r est (C'), l'image de (OM) par r est (O'M').
Notons que les triangles BNM et BN'M' sont rectangles en B.
Donc les points N, O et M d'une part, les points N', O' et M' d'autre part sont alignés.
N est le point d'intersection de (OM) et (C), autre que M, d'où r(N) est l'intersection de (O'M') et de (C') autre que M'.
D'où r(N) = N'.

3) • $\frac{BQ}{BN} = \frac{BP}{BM} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$

et $(\widehat{\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BQ}}) = (\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BP}})$ donc $mes(\widehat{\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BQ}}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.



D'où la similitude directe s de centre B, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$, transforme N en Q et M en P.

- P = s(M), d'où lorsque M décrit (C), P décrit le cercle (Γ) de centre s(O) = A et de rayon $OA\sqrt{2}$.
- $N = s_O(M)$, d'où lorsque M décrit (C), alors N décrit (C).

Et puisque Q = s(N), alors Q décrit (Γ) = s(C).

Solution 36

1) La similitude directe de centre A, de rapport r et d'angle θ, transforme B en Q, donc $q - a = re^{i\theta}(b-a)$.
C'est-à-dire $q - a = \alpha b - \alpha a$. D'où $q = \alpha b + (1-\alpha)a$.

2)a) MNPQ est un parallélogramme signifie $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Ce qui équivaut à n – m = p – q.
C'est-à-dire n + q = m + p. D'où MNPQ est un parallélogramme si et seulement si, n + q = m + p.

b) On a montré à la question 1) que $q = \alpha b + (1-\alpha)a$.
De façon analogue, on montre aussi que : $m = \alpha c + (1-\alpha)b$, $n = \alpha d + (1-\alpha)c$ et $p = \alpha a + (1-\alpha)d$.

Or MNPQ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ n + q = m + p.
$\Leftrightarrow \alpha d + (1-\alpha)c + \alpha b + (1-\alpha)a = \alpha c + (1-\alpha)b + \alpha a + (1-\alpha)d$
$\Leftrightarrow (1-2\alpha)[(a+c)-(b+d)] = 0$
$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$ ou b + d = a + c.
$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$ ou ABCD est un parallélogramme (d'après la question 2)a))

D'où MNPQ est un parallélogramme si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{2}$ ou ABCD est un parallélogramme.

3) ABCD est un parallélogramme, donc MNPQ est un parallélogramme (d'après la question 2)b)).
Il suffit donc de montrer que les diagonales de MNPQ, [MP] et [NQ], sont orthogonales et de même longueur.

Or on a : $\dfrac{p-m}{q-n} = \dfrac{\alpha(a-c)+(1-\alpha)(d-b)}{\alpha(b-d)+(1-\alpha)(a-c)} = \dfrac{\left(\frac{1+i}{2}\right)(a-c)+\left(1-\frac{1+i}{2}\right)(d-b)}{\left(\frac{1+i}{2}\right)(b-d)+\left(1-\frac{1+i}{2}\right)(a-c)} = i$.

Alors $\arg\left(\dfrac{p-m}{q-n}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left|\dfrac{p-m}{q-n}\right| = 1$.

Puisque, $\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{MP}}) \equiv \arg\left(\dfrac{p-m}{q-n}\right)[2\pi]$, alors $\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{MP}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

On en conclut alors que les droites (NQ) et (MP) sont perpendiculaires.

De plus $\dfrac{MP}{NQ} = \left|\dfrac{p-m}{q-n}\right|$, alors $\dfrac{MP}{NQ} = 1$. On en déduit MP = NQ.

MNPQ est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur.
D'où MNPQ est un carré.

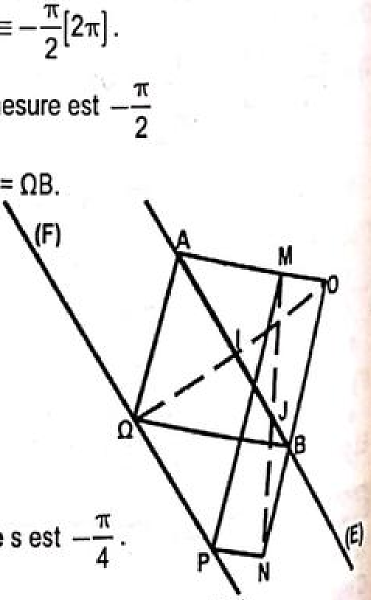
Solution 37

1)a) $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{NB}}) = (\widehat{b\overrightarrow{OA}, -b\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, -\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OB}, -\overrightarrow{OB}})$.

D'où une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{NB}})$ est $\dfrac{\pi}{2} - \pi = -\dfrac{\pi}{2}$. Donc $\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{NB}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) • r(A) = B et r(M) = N, d'où r est une rotation d'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{NB}})$, dont une mesure est $-\dfrac{\pi}{2}$

• Soit Ω le centre de r, on a r(A) = B, d'où $\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et ΩA = ΩB.



Ainsi, ΩAB est un triangle rectangle isocèle de sommet Ω, et de sens indirect.
Or OAB est un triangle rectangle isocèle de sommet O et de sens direct.
D'où OAΩB est un carré.

2)a) r(M) = N, d'où MΩN est un triangle rectangle isocèle de sommet Ω.

J étant le milieu de [MN], (ΩJ) est la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}})$.

D'où $\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega J}}) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

Or $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega J}})$ est l'angle de la similitude directe s, alors une mesure de l'angle de s est $-\dfrac{\pi}{4}$.

b) • s(A) = I, s(O) = B et s(M) = J.
D'où lorsque M décrit la droite (OA), J décrit la droite (AB), image de (OA) par s. D'où (E) est la droite (AB).

- $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OJ}$, donc P est image de J par l'homothétie h de centre O et de rapport 2.

Or $h(I) = \Omega$, alors lorsque M décrit (OA), J décrit (AB) et P décrit la droite image de (AB) par h.
Cette image est parallèle à la droite (AB) et puisque $h(I) = \Omega$, alors (F) est la droite passant par Ω et parallèle à (AB).

Solution 38

1)a) $\frac{z_1 - z_B}{z - z_A} = \frac{i(z-1)}{z-1} = i$. D'où $\left|\frac{z_1 - z_B}{z - z_A}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z_1 - z_B}{z - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Or $mes(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM_1}}) \equiv \arg\left(\frac{z_1 - z_B}{z - z_A}\right)[2\pi]$ et $\frac{BM_1}{AM} = \frac{|z_1 - z_B|}{|z - z_A|} = \left|\frac{z_1 - z_B}{z - z_A}\right|$.

Alors $\frac{BM_1}{AM} = 1$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM_1}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. C'est-à-dire $mes(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM_1}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $BM_1 = AM$.

b) L'expression complexe de T est sous la forme $z' = az + b$, où a est un complexe différent de 0 et 1, avec $|a| = 1$.

D'où T est la rotation de centre le point d'affixe z, avec $z = iz - (1 + i)$, soit $z = -i$ et d'angle de mesure $\arg i \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

c) $z_1 = iz - (1 + i)$ équivaut à $x_1 + iy_1 = i(x + iy) - (1 + i)$. C'est-à-dire $x_1 + iy_1 = -y - 1 + i(x - 1)$. D'où $\begin{cases} x_1 = -y-1 \\ y_1 = x-1 \end{cases}$.

d) T est une rotation et $M_1 = T(M)$.
D'où lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB], (qui est le cercle de centre O et de rayon 1), M_1 décrit le cercle de centre $T(O) = O'(-1, -1)$ et de rayon 1, image du cercle précédent.

2)a) • le point M', barycentre de (M, a), (M_1, -a) et (A, 1), équivaut à $a\overrightarrow{M'M} - a\overrightarrow{M'M_1} + \overrightarrow{M'A} = \vec{0}$.

C'est-à-dire $\overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{OM} - a\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OA}$.

- De l'égalité vectorielle précédente, on déduit que :

$z' = az - az_1 + 1 = az - a(iz - (1 + i)) + 1 = a(1 - i)z + a(1 + i) + 1$. D'où $z' = a(1 - i)z + a(1 + i) + 1$.

b) • L'expression complexe de T_a est sous la forme $z' = \alpha z + \beta$, où α appartenant à $\mathbb{C}^*$ et β appartenant à $\mathbb{C}$.
D'où T_a est une similitude directe plane.

- Son centre est le point d'affixe z telle que $z = a(1 - i)z + a(1 + i) + 1$,

  soit $z = \frac{a+1+ai}{1-a+ai} = \frac{1}{1-2a+a^2} - \frac{2a^2}{1-2a+a^2}i$,

  Son rapport est $k = |a(1-i)| = |a| \times \sqrt{2}$ et son angle a pour mesure $\arg(a(1 - i)) \equiv \arg a + \arg(1 - i)[2\pi]$.

Donc : si $a < 0$, alors une mesure de son angle est $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

si $a > 0$, une mesure de son angle est $-\frac{\pi}{4}$.

- T_a est une rotation si et seulement si $|a(1-i)| = 1$.

C'est-à-dire $|a| \times \sqrt{2} = 1$. Ce qui équivaut à $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors T_a est la rotation de centre le point d'affixe $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)(1-i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Si $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, alors T_a est la rotation de centre le point d'affixe $\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)(1-i)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

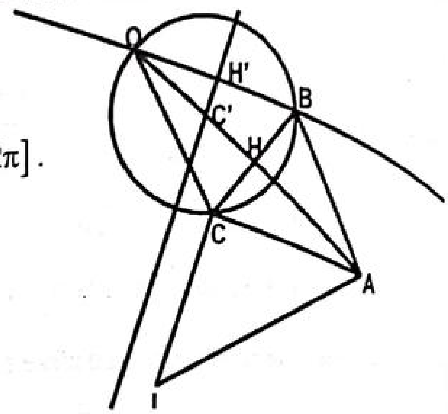
Solution 39

1)a) $f(A) = r_C o r_A(A) = r_C(A) = I$ et $f(B) = r_C o r_A(B) = r_C(C) = C$.

b) r_A est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et r_B est la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$. D'où f est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$, comme composée de deux rotations.

c) f(B) = C et f est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.



D'où BOC est un triangle isocèle de sommet O et $mes(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

D'où ABOC est un losange.

2)a) l'angle de s est $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ dont une mesure est $\frac{\pi}{8}$

b) s(C) = C', d'où $mes(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OC'}})\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$.

Or $mes(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}})\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC'}})=(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OC'}})-(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}})$, alors $mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC'}})\equiv 0[2\pi]$.

Les points O, A et C' sont donc alignés. Par conséquent, C' appartient à (OA).

c) H est le milieu de [OA], d'où H' = s(H) est le milieu de [s(O)s(A)].
Or s(O) = O et s(A) = B, alors H' est le milieu de [OB].

d) s(C) = C', s(H) = H', s(O) = O et s(A) = B.
D'où les images de (OA) et (CH) par s sont respectivement (OB) et (C'H').
Puisque (OA) perpendiculaire à (CH) et s est une similitude directe, alors (OB) et (C'H') sont aussi perpendiculaires.

e) H' est le milieu de [OB] et (H'C') est perpendiculaire à (OB), d'où (H'C') est la médiatrice de [OB].
C' appartient donc aux médiatrices de [OB] et [BC] (la médiatrice de [BC] est la droite (OA)), donc C' est le point de rencontre des médiatrices du triangle OBC. D'où C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

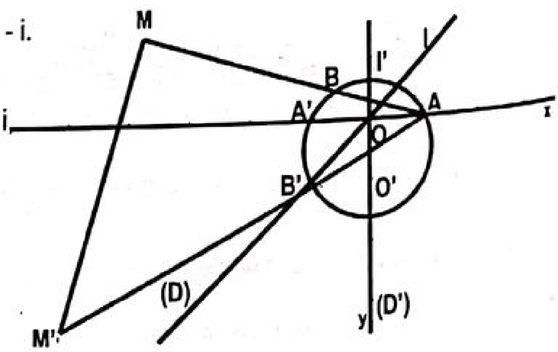
Solution 40

1) • T est une similitude directe plane car son expression complexe est sous la forme z' = az + b, avec a = 1 + i et b = - i.

Son rapport est $|1+i|=\sqrt{2}$,

Son centre est le point d'affixe z, telle que z = (1 + i)z – i, c'est-à-dire z = 1.

Son angle a pour mesure $\arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.



• Le point A a pour affixe 1.

$\frac{z'-z}{z-1}=\frac{i(z-1)}{z-1}=i$, d'où $\arg\left(\frac{z'-z}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Comme $mes(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MM'}})\equiv\arg\left(\frac{z'-z}{z-1}\right)[2\pi]$, alors $mes(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MM'}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2)a) $\frac{MM'}{AM}=\left|\frac{z'-z}{z-1}\right|=1$, d'où MM' = AM. Comme de plus $mes(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MM'}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$, alors le triangle AMM' est donc rectangle et isocèle de sommet M.

b) (D) est la droite passant par O et I(1 , 1).
Soit O' = f(O) et I' = f(I).
L'affixe de O' est $z_{O'}$ = (1 + i)z_O – i = - i et celle de I' est $z_{I'}$ = (1 + i)z_I – i = i.
L'image de la droite (OI) par f est la droite (O'I').
Or la droite (O'I') est l'axe des ordonnées. D'où l'image de (D) par f est l'axe des ordonnées.

3)a) Soit z un nombre complexe et z' = (1 + i)z – i ; zz' = 1 équivaut à (1 + i)z^2 – iz – 1 = 0 (1)
L'équation (1) admet deux racines, dont l'une est z = 1.

En utilisant le produit des racines d'une équation de degré 2, on a : $1\times z''=-\frac{1}{2}(1-i)$.

Donc l'autre racine est $z''=-\frac{1}{2}(1-i)$.

D'où il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les affixes z_0 de B et z_0' de B' = T(B) soient liées par la relation $z_0z_0'=1$. On a $z_0=-\frac{1}{2}(1-i)$. Et l'affixe de B' est $z_0'=\frac{1}{z_0}=-1-i$.

b) L'affixe de A' est -1.

- $\frac{z_0'-1}{z_0-1}=\frac{(1+i)(z_0-1)}{z_0-1}=1+i$, d'où $\arg\left(\frac{z'-1}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$, c'est-à-dire $mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'}})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.
- $\frac{z_0'+1}{z_0+1}=-1-i$, d'où $\arg\left(\frac{z'+1}{z+1}\right)\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$, c'est-à-dire $mes(\widehat{\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'B'}})\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

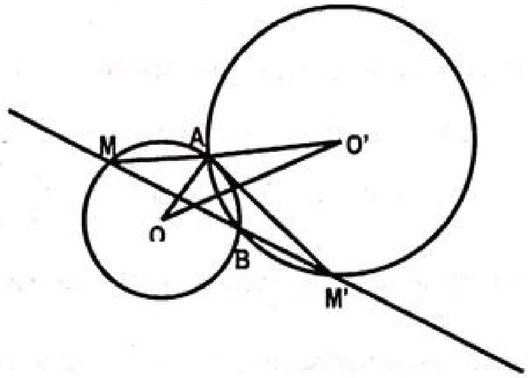
D'où $mes(\widehat{\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'B'}})\equiv mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'}})[\pi]$. D'où les points A, A', B et B' qui sont non alignés, sont cocycliques.

Solution 41

1) La similitude directe s conserve les angles orientés.

Et on a s(M) = M', s(C) = (C'), donc s(O) = O' et s(A) = A.

D'où $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}})=(\widehat{\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'M'}})$.



2) • s(A) = A, s(O) = O' et s(M) = M',

donc $\frac{AO'}{AO}=\frac{AM'}{AM}$ et $(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}})=(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'}})$.

D'où $\frac{AM}{AO}=\frac{AM'}{AO'}$ et $(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}})=(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'}})$.

Et donc le triangle AMM' reste semblable au triangle AOO'.

- L'angle $\widehat{AO'B}$ est l'angle au centre associé à l'angle $\widehat{AM'B}$.

D'où l'angle $mes(\widehat{\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}})\equiv-\frac{1}{2}mes(\widehat{\overrightarrow{O'B},\overrightarrow{O'A}})[\pi]$. C'est-à-dire $mes(\widehat{\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}})\equiv-mes(\widehat{\overrightarrow{O'O},\overrightarrow{O'A}})[\pi]$.

De plus, les triangles AMM' et AOO' sont semblables, d'où : $mes(\widehat{\overrightarrow{M'M},\overrightarrow{M'A}})\equiv mes(\widehat{\overrightarrow{O'O},\overrightarrow{O'A}})[2\pi]$.

Or $(\widehat{\overrightarrow{M'M},\overrightarrow{M'B}})=(\widehat{\overrightarrow{M'M},\overrightarrow{M'A}})+(\widehat{\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}})$, alors $mes(\widehat{\overrightarrow{M'M},\overrightarrow{M'B}})\equiv mes(\widehat{\overrightarrow{O'O},\overrightarrow{O'A}})-mes(\widehat{\overrightarrow{O'O},\overrightarrow{O'A}})[\pi]$,

soit $mes(\widehat{\overrightarrow{M'M},\overrightarrow{M'B}})\equiv 0[\pi]$. C'est-à-dire M, M' et B sont alignés. On conclut alors que B appartient à (MM').

Solution 42

A)1) Montrons que les triangles HIB et HB_1J sont semblables :

Puisque $mes\widehat{HIB}=mes\widehat{HJB_1}=\alpha$ et $mes\widehat{IHB}=mes\widehat{JHB_1}$, alors les triangles HIB et HB_1J sont semblables.

2) Déduisons-en que ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables :

D'après la question 1), on a $mes\widehat{IBH}=mes\widehat{JB_1H}$, c'est-à-dire $mes\widehat{ABC}=mes\widehat{A_1B_1C_1}$.

On montre comme à la question 1) que les triangles H'AK et $H'A_1I$ sont semblables.

Et on déduit que $mes\widehat{BAC}=mes\widehat{B_1A_1C_1}$. Les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont alors semblables.

B)1)a) Plaçons les points A, B, C, A_1, B_1 et C_1 : *Voir les points I, J et K sur la figure.*

b) Calculons les affixes des points I, J et K et plaçons-les sur la figure :

On a : $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-4-6i+14}{2}=5-3i.$ $\quad z_J=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{14-4+6i}{2}=5+3i.$

$z_K=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{-4-6i-4+6i}{2}=-4.$

Voir les points I, J et K sur la figure.

c) Montrons que A_1, I, B_1 sont alignés :

On a : $z_{\overrightarrow{A_1I}} = z_I - z_{A_1} = 5-3i-3+7i = 2+4i$ et $z_{\overrightarrow{B_1I}} = z_I - z_{B_1} = 5-3i-9-5i = -4-8i$.

On constate que $z_{\overrightarrow{B_1I}} = -2z_{\overrightarrow{A_1I}}$, donc $\overrightarrow{B_1I} = -2\overrightarrow{A_1I}$. Par conséquent, les points A_1, I et B_1 sont alignés.

d) Déterminons une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}})$.

On a $\dfrac{z_{B_1}-z_I}{z_B-z_I} = \dfrac{9+5i-5+3i}{14-5+3i} = \dfrac{4+8i}{9+3i} = \dfrac{(4+8i)(9-3i)}{(9+3i)(9-3i)} = \dfrac{2}{3}(1+i)$, donc $\arg\dfrac{z_{B_1}-z_I}{z_B-z_I} \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

Puisque $mes(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = \arg\dfrac{z_{B_1}-z_I}{z_B-z_I}$, alors $mes(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

e) Déterminons l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$:

Puisque $mes(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$, alors l'image de la droite (IB) par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ est la droite (IB_1).
Or les droites (IB) et (AB) d'une part, (IB_1) et (A_1B_1) d'autre part sont confondues, donc l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ est la droite (A_1B_1).

2)a) Montrons que l'écriture complexe de s est $z' = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z + 2 - 2i$:

s est une similitude directe plane, donc son expression complexe est sous la forme : z' = az + b.

Puisque s(A) = A_1 et s(B) = B_1, alors on a : $\begin{cases} a(-4-6i)+b = 3-7i \\ 14a+b = 9+5i \end{cases}$.

La résolution de ce système permet de conclure que $a = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ et b = 2 – 2i.

Par conséquent, l'expression complexe de s est $z' = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z + 2 - 2i$.

b) Déterminons le rapport et l'angle de s.

Le rapport de s est $|a| = \left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et son angle a pour mesure $\arg\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$, c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{4}$.

Finalement, s est une similitude de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

Déterminons l'affixe du centre Ω de s.

Ω est l'unique point invariant par s, donc son affixe est solution de l'équation z' = z.

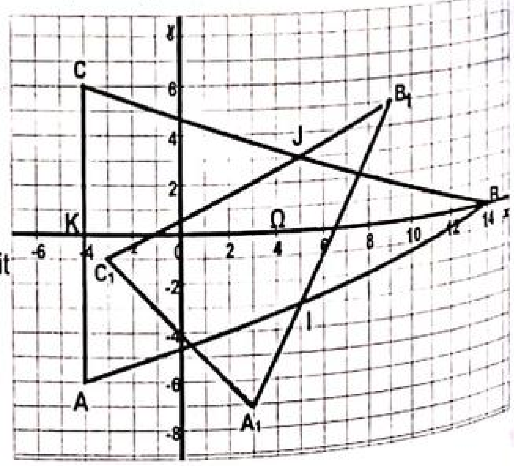
Or, z' = z équivaut à $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z + 2 - 2i = z$. La résolution de cette équation permet d'écrire que z = 4.

D'où Ω a pour affixe 4.

c) Ce que représente le point Ω pour ABC :

- $\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |-8-6i| = 10$
- $\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |10| = 10$
- $\Omega C = |z_C - z_\Omega| = |-8-6i| = 10$

Comme ΩA = ΩB = ΩC, alors Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



13 CONIQUES

RAPPEL DU COURS

Dans ce cours, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

A. Parabole - ellipse - hyperbole

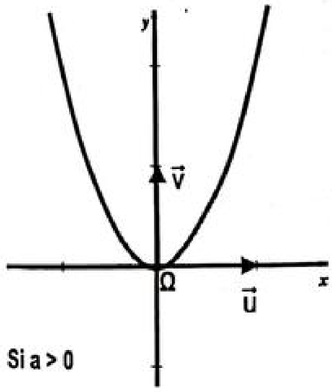
A_1 – Parabole

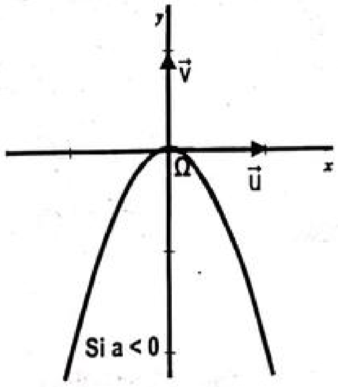
a) Définition :

Une courbe (P) est une parabole lorsqu'on peut trouver un repère orthonormé $(\Omega\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ dans lequel son équation peut se mettre sous la forme $Y = aX^2$.

$Y = aX^2$ est l'équation réduite de (P), Ω est son sommet et la droite $(\Omega\,;\vec{v})$ est l'axe de symétrie de (P).

b) L'allure de (P) :





c) Equation d'une tangente à la parabole :

La tangente au point $M_0(X_0\,,Y_0)$ à la parabole d'équation réduite $Y = aX^2$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ a pour équation $Y + Y_0 = 2aXX_0$.

Remarque :

- *La courbe d'équation $X = aY^2$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ est une parabole de sommet Ω et d'axe $(\Omega\,;\vec{u})$.*
- *La courbe d'équation $y - y_0 = a(x - x_0)^2$ dans $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ est une parabole de sommet $\Omega(x_0\,,y_0)$ et d'axe $(\Omega\,;\vec{j})$.*
- *La courbe d'équation $x - x_0 = a(y - y_0)^2$ dans $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ est une parabole de sommet $\Omega(x_0\,,y_0)$ et d'axe $(\Omega\,;\vec{i})$.*

A_2 – Ellipse

a) Définition :

Une courbe (E) est une ellipse lorsqu'on peut trouver un repère orthonormé $(\Omega\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ dans lequel son équation peut se mettre sous la forme $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$, où a et b sont deux réels strictement positifs.

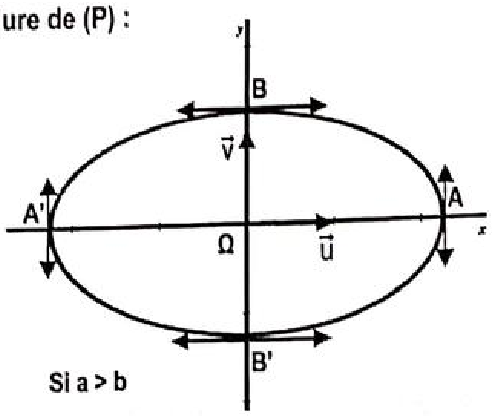
$\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ est l'équation réduite de l'ellipse (E). Cette ellipse admet un centre Ω, quatre sommets A(a , 0), (-a , 0), B(0 , b) et B'(0 , -b) dans le repère $(\Omega\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ et deux axes de symétrie : l'axe $(\Omega\,;\vec{u})$ et l'axe $(\Omega\,;\vec{v})$.

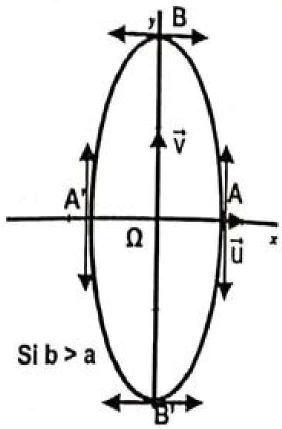
Si a > b, $(\Omega\,;\vec{u})$ est appelé le grand axe et $(\Omega\,;\vec{v})$ le petit axe de (E).

Si a < b, $(\Omega\,;\vec{u})$ est appelé le petit axe et $(\Omega\,;\vec{v})$ le grand axe de (E).

Si a = b, (E) est le cercle centre Ω et de rayon a.

b) L'allure de (P) :





Remarque :

La courbe d'équation $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ ***dans le repère*** $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ ***est l'ellipse de centre*** $\Omega(x_0\,,y_0)$***, de sommets*** $A(a\,,0)$***,*** $A'(-a\,,0)$***,*** $B(0\,,b)$ ***et*** $B'(0\,,-b)$ ***dans le repère*** $(\Omega\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ ***et d'axes de symétrie : les droites*** $(\Omega;\vec{i})$ ***et*** $(\Omega\,;\vec{j})$.

c) Equation d'une tangente à l'ellipse :

La tangente au point $M_0(X_0\,,Y_0)$ à l'ellipse d'équation réduite $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ a pour équation

$$\frac{X_0X}{a^2}+\frac{Y_0Y}{b^2}=1.$$

d) Représentation paramétrique d'une ellipse :

L'ensemble des points M(x , y) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ tels que $\begin{cases}x=a\cos\theta+x_0\\ y=b\sin\theta+y_0\end{cases}$, avec a et $b>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$, est l'ellipse d'équation $\dfrac{(x+x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y+y_0)^2}{b^2}=1$ dans la repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

A_3 – Hyperbole

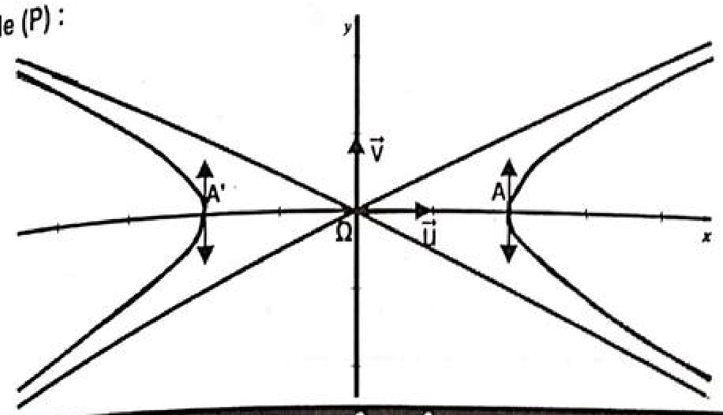
a) Définition :

Une courbe (H) est une hyperbole lorsque l'on peut trouver un repère orthonormé $(\Omega\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ dans lequel son équation peut se mettre sous la forme $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$, où a et b sont deux réels strictement positifs.

$\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ est l'équation réduite de l'hyperbole (H). Cette hyperbole admet un centre Ω, deux sommets A(a , 0), A'(-a , 0), deux asymptotes d'équations respectives $Y=\dfrac{b}{a}X$ et $Y=-\dfrac{b}{a}X$, et deux axes de symétrie : l'axe transverse $(\Omega\,;\vec{u})$ et l'axe principal $(\Omega\,;\vec{v})$.

Si a = b, (H) est une hyperbole dite équilatère. Ses asymptotes sont perpendiculaires.

b) L'allure de (P) :



Remarque : • *La courbe d'équation* $-\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ *dans le repère* $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ *est l'hyperbole de centre* **Ω**, *de sommets B(0 , b) et B'(0 , -b), d'asymptotes les droites d'équations respectives* $Y=\frac{b}{a}X$ *et* $Y=-\frac{b}{a}X$ *, d'axe transverse* $(\Omega;\vec{v})$ *et d'axe principal* $(\Omega;\vec{u})$.

• *La courbe d'équation* $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ *dans le repère* $(O;\vec{i},\vec{j})$ *est l'hyperbole de centre* $\Omega(x_0 , y_0)$, *de sommets A(a , 0) et A'(-a , 0) dans le repère* $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$, *d'asymptotes les droites d'équations respectives* $Y=\frac{b}{a}X$ *et* $Y=-\frac{b}{a}X$ *dans le repère* $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$, *d'axe transverse* $(\Omega;\vec{i})$ *et l'axe principal* $(\Omega;\vec{j})$.

• *La courbe d'équation* $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ *dans le repère* $(O;\vec{i},\vec{j})$ *est l'hyperbole de centre* $\Omega(x_0 , y_0)$, *de sommets B(0 , b) et B'(0 , -b) dans le repère* $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$, *d'asymptotes les droites d'équations respectives* $Y=\frac{b}{a}X$ *et* $Y=-\frac{b}{a}X$ *dans le repère* $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$, *d'axe transverse* $(\Omega;\vec{j})$ *et d'axe principal* $(\Omega;\vec{i})$.

c) Equation d'une tangente à l'hyperbole :

La tangente au point $M_0(X_0 , Y_0)$ à l'hyperbole d'équation réduite $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ a pour équation $\frac{X_0X}{a^2}-\frac{Y_0Y}{b^2}=1$.

B. Définition géométrique d'une conique

B_1 – Définition - propriétés

a) Définition :

Soit F un point du plan, (D) une droite ne contenant pas F et e un réel strictement positif.
On appelle conique de foyer F, de directrice (D), d'excentricité e, l'ensemble (C) des points M du plan tels que **MF = ed(M , (D))**, où d(M , (D)) désigne la distance de M à la droite (D).

b) Propriétés :

Soit (Δ) la perpendiculaire à (D) passant par F et K le point de rencontre de (D) et (Δ). *(Le lecteur fera une figure)*

• Si e = 1, (C) est une parabole de sommet S milieu de [KF] d'axe (Δ).

• Si 0 < e < 1, alors (C) est une ellipse.
A barycentre de (F , 1) et (K , e), et A' barycentre de (F , 1) et (K , -e) sont les sommets de cette ellipse situés sur le grand axe. Le centre de l'ellipse est le milieu du segment [AA'].

• Si e > 1, alors (C) est une hyperbole.
A barycentre de (F , 1) et (K , e), et A' barycentre de (F , 1) et (K , -e) sont les sommets de cette hyperbole, (AA') est son axe transverse. Le centre de l'hyperbole est le milieu du segment [AA'].

B_2 – Equation réduite et définition géométrique

a) Cas de la parabole :

Equation	$y^2 = 2ax$	$x^2 = 2ay$
Paramètre	$\lvert a\rvert$	$\lvert a\rvert$
Axe focal	La droite $(\Omega ; \vec{i})$	La droite $(\Omega ; \vec{j})$
Foyer	$F\left(\frac{a}{2}, 0\right)$	$F\left(0, \frac{a}{2}\right)$
Directrice	La droite d'équation $x = -\frac{a}{2}$	La droite d'équation $y = -\frac{a}{2}$

b) Cas de l'ellipse :

Chaque ellipse a deux foyers F et F', deux directrices (D) et (D') et une excentricité.

L'axe focal est la droite (FF'), la distance FF' est la distance focale, et $c = \frac{FF'}{2}$ est la demi-distance focale de l'ellipse.

	Si a > b	Si a < b
Equation	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$
Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{b^2 - a^2}$
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Foyers	$F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$	$F(0, c)$ et $F(0, -c)$
Directrices	$(D) : X = \frac{a^2}{c}$ et $(D') : X = -\frac{a^2}{c}$	$(D) : Y = \frac{b^2}{c}$ et $(D') : Y = -\frac{b^2}{c}$

Remarque : • *Les foyers F et F' sont situés entre les deux sommets du grand axe et ils sont symétriques par rapport au centre de l'ellipse.*

• *Les directrices (D) et (D') sont parallèles entre elles, perpendiculaires au grand axe et symétriques par rapport au centre de l'ellipse. Les sommets du grand axe sont situés entre les deux directrices.*

• *L'axe focal de l'ellipse est son grand axe.*

• *L'ellipse de foyers F et F' est l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ ($a > 0$ et $2a > FF'$), 2a étant la distance entre les deux sommets de l'axe focal : c'est la définition bifocale de l'ellipse.*

c) Cas de l'hyperbole :

Chaque hyperbole a deux foyers F et F', deux directrices (D) et (D') et une excentricité.

L'axe focal est la droite (FF'), la distance FF' est la distance focale, et $c = \frac{FF'}{2}$ est la demi distance focale de l'hyperbole.

Equation	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$
Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Foyers	$F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$	$F(0, c)$ et $F(0, -c)$
Directrices	$(D) : X = \frac{a^2}{c}$ et $(D') : X = -\frac{a^2}{c}$	$(D) : Y = \frac{b^2}{c}$ et $(D') : Y = -\frac{b^2}{c}$

Remarque !

• Les sommets sont situés entre les deux foyers F et F' et ils sont symétriques par rapport au centre de l'hyperbole.

• Les directrices (D) et (D') sont parallèles entre elles, situées entre les deux sommets, perpendiculaires à l'axe transverse et symétriques par rapport au centre de l'hyperbole.

• L'axe focal de l'hyperbole est son axe transverse.

• L'hyperbole de foyers F et F' est l'ensemble des points M du plan tels $|MF - MF'| = 2a$ $(0 < 2a < FF')$, 2a étant la distance entre les deux sommets : c'est la définition bifocale de l'ellipse.

C. Coniques et transformations du plan

C_1 – Coniques et similitudes

L'image d'une conique par une similitude est une conique de même excentricité. Donc de même nature.

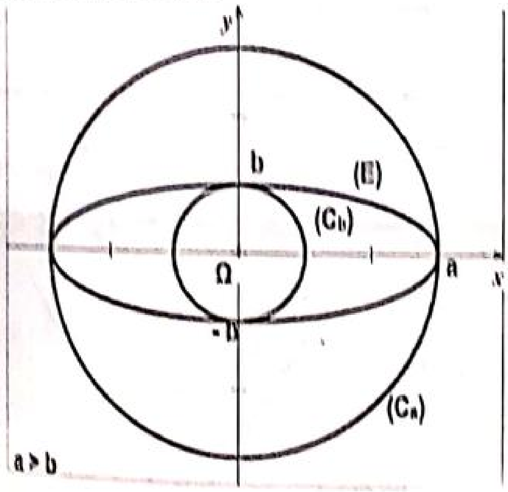
C_2 – Ellipse et affinité orthogonale du plan

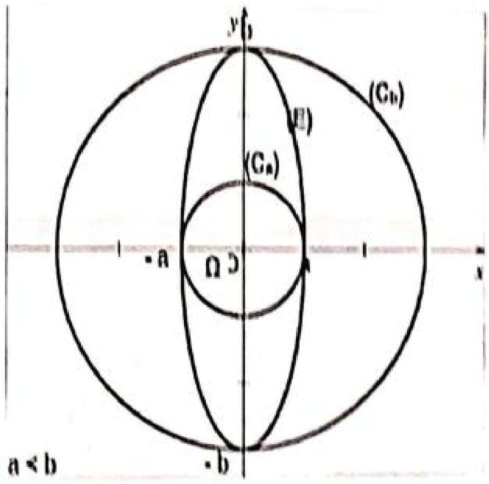
a) Définition :

Soit (E) l'ellipse d'équation réduite $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $(\Omega ; \vec{u}, \vec{v})$.

Si a > b, alors les cercles (C_a) et (C_b) de rayons respectifs a et b, de centre Ω, sont respectivement le cercle principal et le cercle secondaire de (E).

Si a < b, alors les cercles (C_a) et (C_b) de rayons respectifs a et b, de centre Ω, sont respectivement le cercle secondaire et le cercle principal de (E).





b) Définition :

Soit (D) une droite du plan et k un nombre réel.

Une affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport k, est l'application de P vers P, qui à tout point M du plan, associe le point M' du plan tel que : $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$, où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

c) Théorème :

L'image d'un cercle (C) par une affinité orthogonale de rapport un réel non nul k et d'axe une droite passant par le centre de ce cercle est une ellipse (E) de même centre que (C).

(C) est le cercle principal (si $|k| < 1$) ou le cercle secondaire (si $|k| > 1$) de (E).

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Définir analytiquement une conique

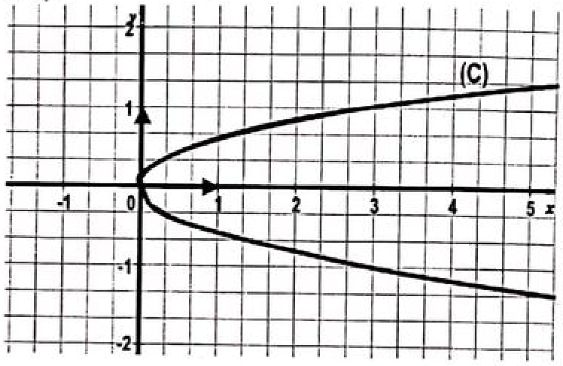
1 – Construire une conique connaissant sa forme réduite

Exercice 1

Tracer la courbe (C) d'équation $y^2 = \frac{1}{3}x$ dans un repère $R = (O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé.

Solution 1

(P) est une parabole de sommet O et d'axe $(O\,;\vec{i})$.



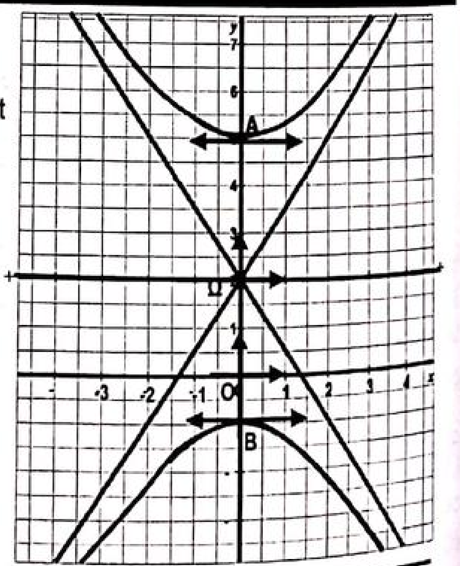
Exercice 2

Tracer la courbe (H) d'équation $-\frac{x^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Solution 2

Soit $\Omega(0\,,2)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(H) est l'hyperbole de centre Ω, de sommets A(0 , 3) et A'(0 , -3) et ayant pour asymptotes les droites d'équations $Y=\frac{3}{2}X$ et $Y=-\frac{3}{2}X$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.



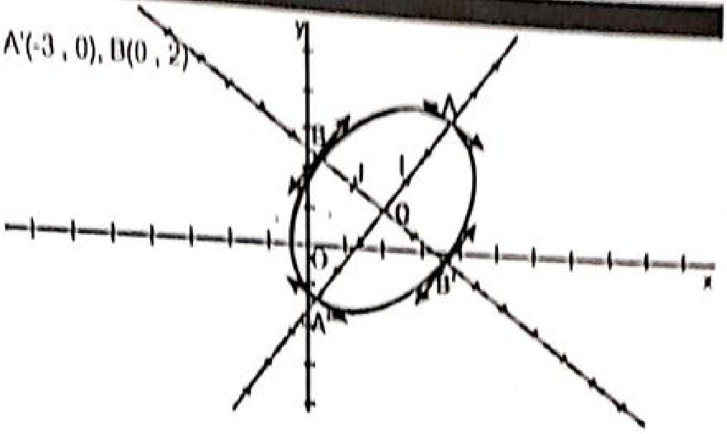
Exercice 3

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Construire la courbe (E) d'équation $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{I},\vec{J})$, où Ω a pour coordonnées (2 , 1) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et $\vec{I}=\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}$ et $\vec{J}=-\frac{4}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}$.

Solution 3

(E) est l'ellipse de centre Ω, de sommets A(3 , 0), A'(-3 , 0), B(0 , 2) et B'(0 , -2) dans le repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$.



2 – Construire des courbes à l'aide des coniques

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

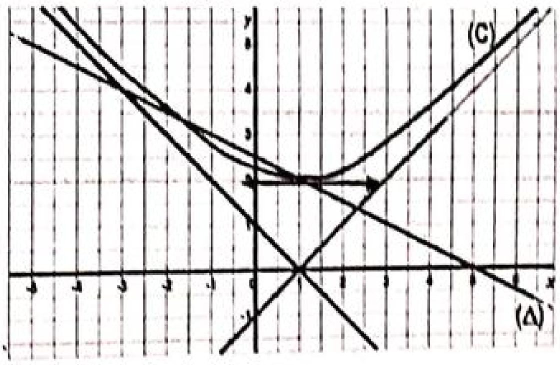
Sans étudier les variations, construire la courbe (C) d'équation : $y = \sqrt{x^2-2x+5}$.

Résoudre graphiquement l'inéquation : $\sqrt{x^2-2x+5} > \dfrac{5-x}{2}$.

Solution 4

- $y=\sqrt{x^2-2x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = x^2-2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = (x-1)^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ -\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$.

D'où (C) est la partie de l'hyperbole équilatère de centre Ω(1 , 0) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, de sommets A(0 , 2) et A'(0 , -2) d'asymptotes les droites D : y = x et D': y = - x dans le repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$, située au-dessus de l'axe des abscisses.



- (C) et (Δ) se rencontrent aux points d'abscisses 1 et $-\dfrac{5}{3}$.

La courbe (C) est au-dessus de $(\Delta): y=\dfrac{5-x}{2}$ dans l'intervalle $\left]-\infty, -\dfrac{5}{3}\right]$ et dans l'intervalle [1 , +∞[.

D'où la solution de l'inéquation est : $S=\left]-\infty, -\dfrac{5}{3}\right[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 5

Soit M(x , y) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On se propose d'étudier l'ensemble des points M tels que :

a) $\dfrac{x|x|}{25}+\dfrac{y|y|}{9}=1$ b) $4x|x|+y^2-16x-20=0$. c) $y^2=\dfrac{1}{4}\left|x^2-2x-3\right|$.

On distinguera les cas suivants les valeurs des coordonnées de M.
Déterminer et construire avec précision les arcs de courbes obtenus.

Solution 5

a) Si x ≥ 0 et y ≥ 0, alors on a $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$, qui est l'équation réduite de l'ellipse E_1 de centre O, de sommets

A(5 , 0), A'(-5 , 0), B(0 , 3) et B'(0 , -3). Notons C_1 la partie de E_1 dans [0 + ∞[×[0 , + ∞[.

Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ alors on a $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$, qui est l'équation réduite de l'hyperbole H_1 de centre O, de sommets A(5 , 0), A'(-5 , 0) et ayant pour asymptotes les droites $(D): y=\frac{3}{5}x$ et $(D'): y=-\frac{3}{5}x$.

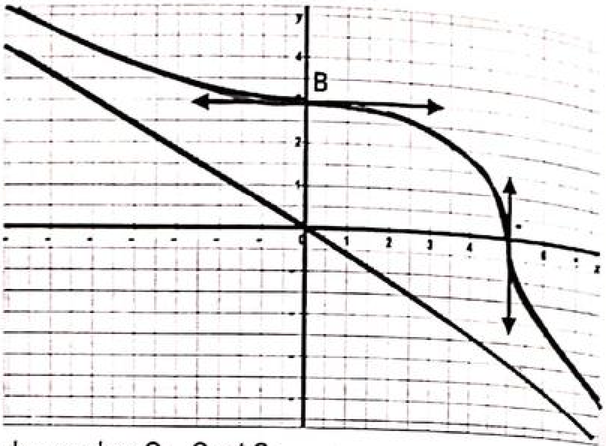
Notons C_2 la partie de H_1 dans [0 +∞[×]-∞ , 0].

Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$ alors on a $-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

Cette égalité est impossible.

Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$ alors on a $-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, qui est l'équation de l'hyperbole H_2 de centre O, de sommets B(0 , 3) et B'(0 , -3) et ayant pour asymptotes les droites $(D): y=\frac{3}{5}x$ et $(D'): y=-\frac{3}{5}x$.

Notons C_3 la partie de H_2 dans]-∞ , 0] ×[0 , +∞[.



L'ensemble des points M(x , y) du plan cherché est la réunion des courbes C_1 , C_2 et C_3.

b) **Si $x \geq 0$** alors on a $4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0$, c'est-à-dire $4(x-2)^2 + y^2 - 36 = 0$.

Donc $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$, qui est une équation de l'ellipse E_1' de centre Ω(2 , 0 dans le repère $(O ; \vec{i} , \vec{j})$), de sommets A(3 , 0), A'(-3 , 0), B(0 , 6), et B'(0 , -6) dans le repère $(\Omega ; \vec{i} , \vec{j})$

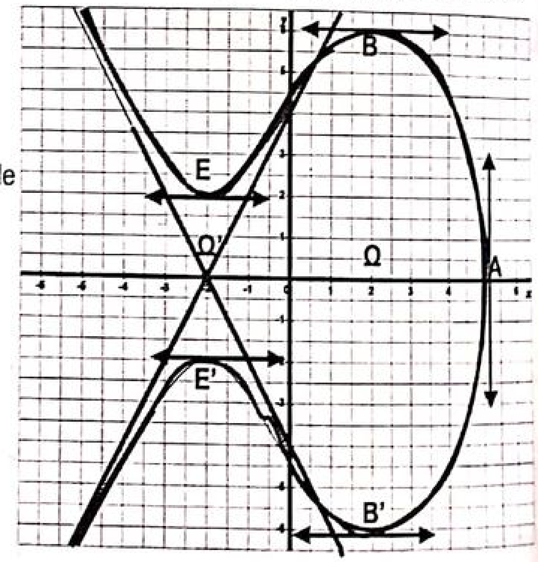
Si $x \leq 0$ alors on a : $- 4x^2 - 16x + y^2 - 20 = 0$, c'est-à-dire $-4(x + 2)^2 + y^2 + 16 - 20 = 0$.

Donc $-(x+2)^2+\frac{y^2}{4}=1$, qui est une équation de l'hyperbole H_1' de centre Ω'(-2 , 0). De sommets E(0 , 2) et E'(0 , -2), d'asymptotes les droites D : y = 2x et D' : y = - 2x dans le repère $(\Omega' ; \vec{i} , \vec{j})$.

(Le lecteur pourra trouver les coordonnées des sommets et les équations des asymptotes dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ en faisant un changement de repère. Dans ce repère, on a : A(5 , 0), B(2 , 6), B'(2 , 6), E(-2 , 2) et E'(-2 , -2)).

Notons Γ_1 la partie de E_1' dans $[0 , +\infty[\times\mathbb{R}$ et Γ_2 la partie de H_1' dans $]-\infty , 0]\times\mathbb{R}$.

L'ensemble des points cherché est la réunion de Γ_1 et Γ_2.



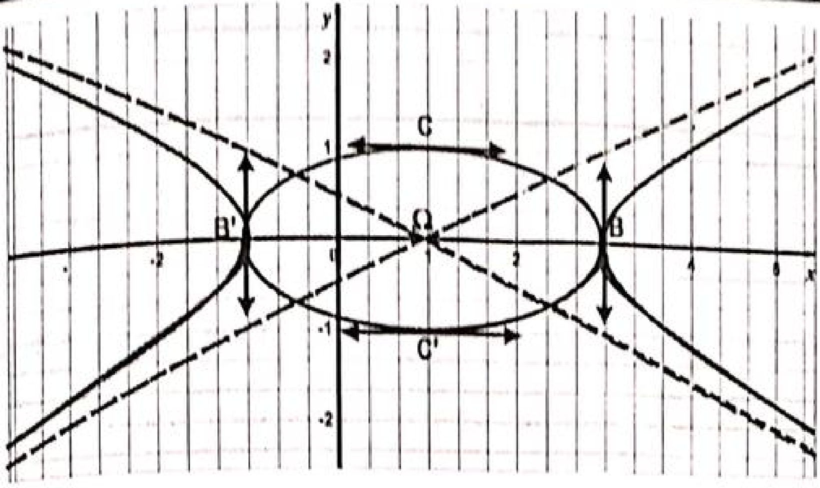
c) Si $x\in$]-∞ , -1]∪[3 , +∞[alors on a : $x^2 - 2x - 3 \geq 0$. D'où, $y^2=\frac{1}{4}(x^2-2x-3)$, c'est-à-dire $\frac{(x-1)^2}{4}-y^2=1$, qui est une équation de l'hyperbole H_1'' de centre Ω(1 , 0). De sommets A(2 , 0) et A'(-2 , 0), d'asymptotes les droites $(\Delta): y=\frac{1}{2}x$ et $(\Delta'): y=-\frac{1}{2}x$ dans le repère $(\Omega ; \vec{i} , \vec{j})$.

Si $x \in$ [-1 , 3] : on a $x^2 - 2x - 3 \leq 0$.

D'où, $y^2=-\frac{1}{4}(x^2-2x-3)$, c'est-à-dire $\frac{(x-1)^2}{4}+y^2=1$, qui est une équation de l'ellipse E'' de centre Ω(1 , 0).

De sommets B(2 , 0), B'(-2 , 0), C(0 , 1) et C'(0 , -1) dans le repère $(\Omega ; \vec{i} , \vec{j})$.

L'ensemble des points cherché est la réunion des courbes H_1'' et C_1''.



Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan P tels que : $16x^4 + 81y^4 + 72x^2y^2 - 1296y^2 = 0$.

Montrer que (Γ) est la réunion de deux coniques (Γ_1) et (Γ_2).

(On remarquera que le membre de gauche de l'égalité est une différence de deux carrés).

2) Représenter (Γ) après avoir précisé le centre et les sommets des coniques (Γ_1) et (Γ_2).

Solution 6

1) Soit x et y deux nombres réels.

$16x^4 + 81y^4 + 72x^2y^2 - 1296y^2 = (16x^4 + 72x^2y^2 + 81y^4) - 1296y^2 = (4x^2 + 9y^2)^2 - (36y)^2$

$= (4x^2 + 9y^2 - 36y)(4x^2 + 9y^2 + 36y).$

D'où M(x , y) appartient à (Γ) $\Leftrightarrow$ $(4x^2 + 9y^2 - 36y)(4x^2 + 9y^2 + 36y) = 0$

$\Leftrightarrow$ $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$ ou $4x^2 + 9y^2 + 36y = 0$

$\Leftrightarrow$ $4x^2 + 9(y - 2)^2 - 36 = 0$ ou $4x^2 + 9(y + 2)^2 - 36 = 0.$

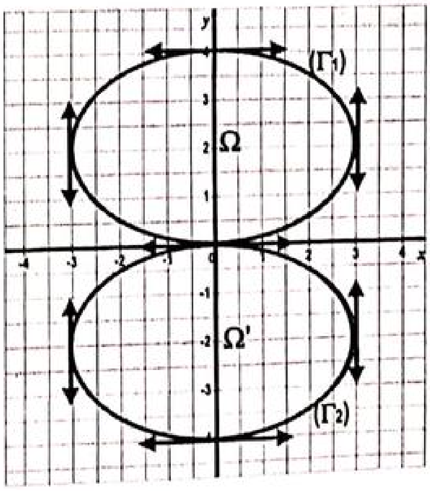
$\Leftrightarrow$ $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$ ou $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

$\Leftrightarrow$ $M\in(\Gamma_1) : \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$ ou $M\in(\Gamma_2) : \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1.$

(Γ_1) et (Γ_2) sont des ellipses. D'où (Γ) est une réunion de deux ellipses.

(Γ_1) est l'ellipse de centre $\Omega(0 , 2)$ dans le repère $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ et de sommets A(3 , 0), A'(-3 , 0), B(0 , 2) et B'(0 , -2) dans le repère $(\Omega ; \vec{i} , \vec{j})$ centre $\Omega'(0, -2)$ et de sommets C(3, 0), C'(-3 , 0), D(0 , 2) et D'(0 , -2) dans le repère $(\Omega' ; \vec{i} , \vec{j})$.

2) **La courbe est ci-contre**



3 – *Etudier des familles de coniques*

Exercice 7

1) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère l'ensemble (Γ_a) des points M(x , y) tels que : $y^2 = -2x^2 - 2ax + 1 - a^2$, a étant un nombre réel.

Préciser, suivant les différentes valeurs de a, la nature de (Γ_a) et ses éléments caractéristiques.

2) Même question pour (Γ_a') : $ax^2+y^2+(a+1)x-\frac{a}{4}=0$, a étant un nombre réel.

Solution 7

1) Soit M(x , y) un point du plan.

M(x , y)appartient à (Γ_a) si et seulement si $4\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+2y^2=2-a^2$. Notons que $4\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+2y^2$ est un réel positif.

Donc,

Si a appartient à $]-\infty,\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$, alors on a, $2-a^2<0$. Ce qui est impossible. D'où $(\Gamma_a)=\emptyset$.

Si $a=\sqrt{2}$, alors on a, $4\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2y^2=0$. C'est-à-dire $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y=0$. D'où $(\Gamma_{\sqrt{2}})=\left\{\Omega\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\right\}$.

Si $a=-\sqrt{2}$ alors on a, $4\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2y^2=0$. C'est-à-dire $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y=0$. D'où $(\Gamma_{-\sqrt{2}})=\left\{\Omega'\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\right\}$.

Si a appartient à $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ alors on a $2-a^2>0$.

Ainsi, $4\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+2y^2=2-a^2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{2-a^2}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{2-a^2}{2}}=1.$

Puisqu'on a $\frac{2-a^2}{4}>0$ et $\frac{2-a^2}{2}>0$, alors (Γ_a) est l'ellipse de centre $\Omega''\left(-\frac{a}{2},0\right)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et de sommets $A\left(\frac{\sqrt{2-a^2}}{2},0\right)$, $A'\left(-\frac{\sqrt{2-a^2}}{2},0\right)$, $B\left(0,\sqrt{\frac{2-a^2}{2}}\right)$ et $B'\left(0,-\sqrt{\frac{2-a^2}{2}}\right)$ dans le repère $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$.

2) Si a = 0 alors une équation de (Γ_0') est $y^2=-x$.
D'où (Γ_0') est une parabole de sommet O, d'axe de symétrie l'axe des abscisses.
Si $a\neq 0$: alors soit M(x , y) un point du plan.

M(x , y) appartient à (Γ_a') $\Leftrightarrow$ $a\left[x^2+\left(\frac{a+1}{a}\right)x\right]+y^2-\frac{a}{4}=0$ $\Leftrightarrow$ $a\left[\left(x+\frac{a+1}{2a}\right)^2-\left(\frac{a+1}{2a}\right)^2\right]+y^2-\frac{a}{4}=0$

C'est-à-dire finalement que $\dfrac{\left(x+\frac{a+1}{2a}\right)^2}{\frac{2a^2+2a+1}{4a^2}}+\dfrac{y^2}{\frac{2a^2+2a+1}{4a}}=1.$

Remarquons que l'on a : $2a^2+2a+1>0$ pour tout réel a.

Alors on a : $\frac{2a^2+2a+1}{4a^2}>0$ et $\frac{2a^2+2a+1}{4a}$ est du signe de a, alors :

Pour a < 0 : posons $\alpha^2=\frac{2a^2+2a+1}{4a^2}$ et $\beta^2=-\frac{2a^2+2a+1}{4a}$, α et β étant des réels strictement positifs.

Alors M(x , y) appartient à (Γ_a') si et seulement si, $\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ avec $x_0=-\frac{a+1}{2a}$.

(Γ_a') est alors l'hyperbole de centre $\Omega(x_0,0)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ de sommets $A(\alpha,0)$ et $A'(-\alpha,0)$, d'asymptotes les droites d'équations respectives : $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ et $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$ dans le repère $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$.

Pour a > 0 : posons $\alpha^2 = \dfrac{2a^2+2a+1}{4a^2}$ et $\mu^2 = \dfrac{2a^2+2a+1}{4a}$, α et μ étant des réels strictement positifs.

Alors M(x , y) appartient à (Γ'_a) si et seulement si, $\dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2} = 1$.

(Γ'_a) est l'ellipse de centre $\Omega(x_0 , 0)$. De sommets $A(\alpha , 0)$, $A'(-\alpha , 0)$, $B(0 , \mu)$ et $B'(0 , -\mu)$ dans le repère $(\Omega ; \vec{i} , \vec{j})$.

B. Définir géométriquement une conique

1 – Passer de la définition géométrique à la définition analytique

Exercice 8

F et (D) désignent respectivement un point et une droite du plan, F n'appartient pas à (D).
Soit e > 0, K le projeté orthogonal de F sur (D), (Γ) la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.

a) On pose $FK = \dfrac{9}{4}$ (Unité : I cm) et $e = \dfrac{4}{5}$.

Construire les sommets A et A' de l'axe focal de (Γ). Calculer la distance AA'.
Déterminer l'équation réduite de (Γ) dans un repère convenablement choisi. Dessiner (Γ).

b) Reprendre une étude analogue à celle de la question a) pour $FK = \dfrac{16}{5}$ et $e = \dfrac{5}{3}$.

c) Construire (Γ) pour FK = 4 et e = 1.

Solution 8

a) • A est le barycentre des points pondérés (F , 1) et $\left(K , \dfrac{4}{5}\right)$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{FA} = \dfrac{4}{9}\overrightarrow{FK}$.

A' est le barycentre de (F , 1) et $\left(K , -\dfrac{4}{5}\right)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{FA'} = -4\overrightarrow{FK}$.

Notons que (Γ) est une ellipse car e < 1.

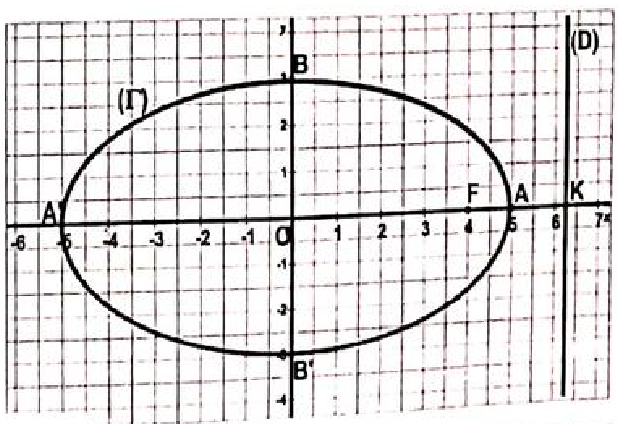
- $\overrightarrow{FA} = \dfrac{4}{9}\overrightarrow{FK}$, donc $FA = \dfrac{4}{9}FK = 1$ et $\overrightarrow{FA'} = -4\overrightarrow{FK}$, donc FA' = 4FK = 9.

  AA' = AF + FA' (car A, A' et F sont alignés). Donc AA' = 10.
- Soit O milieu de [AA'], $\vec{i} = \dfrac{1}{FK}\overrightarrow{FK}$, $\vec{j}$ un vecteur unitaire et orthogonal à $\vec{i}$.

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'équation réduite de (Γ) est $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, où : $a = \dfrac{AA'}{2} = 5$ et $e = \dfrac{c}{a}$.

Or $e = \dfrac{c}{a} \iff e^2 = \dfrac{c^2}{a^2} \iff e^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2} \iff b = a\sqrt{1-e^2} = 3$.

L'équation réduite de (Γ) est donc $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, donnée dans le repère $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.



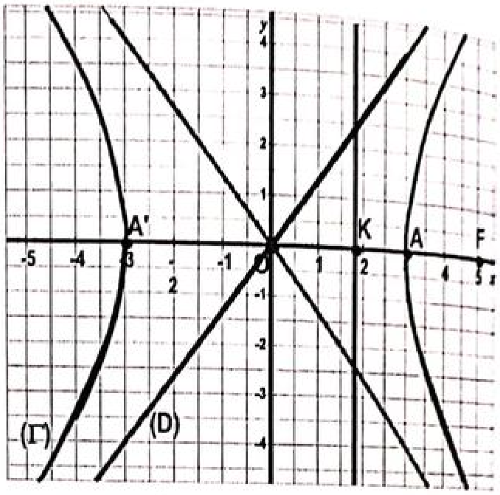
b) • A est le barycentre de (F , 1) et $\left(K, \frac{5}{3}\right)$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{FA} = \frac{5}{8}\overrightarrow{FK}$.

A' est le barycentre de (F , 1) et $\left(K, -\frac{5}{3}\right)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{FA'} = \frac{5}{2}\overrightarrow{FK}$.

Notons que (Γ) est une hyperbole car e > 1.

- $\overrightarrow{FA} = \frac{5}{8}\overrightarrow{FK}$, donc $FA = \frac{5}{8}FK = 2$ et $\overrightarrow{FA'} = \frac{5}{2}\overrightarrow{FK}$, donc $FA' = \frac{5}{2}FK = 8$. D'où AA' = FA' – FA = 8 – 2 = 6

- Soit O milieu de [AA'], $\vec{i} = \frac{1}{KF}\overrightarrow{KF}$ et $\vec{j}$ un vecteur orthogonal à $\vec{i}$ et unitaire.



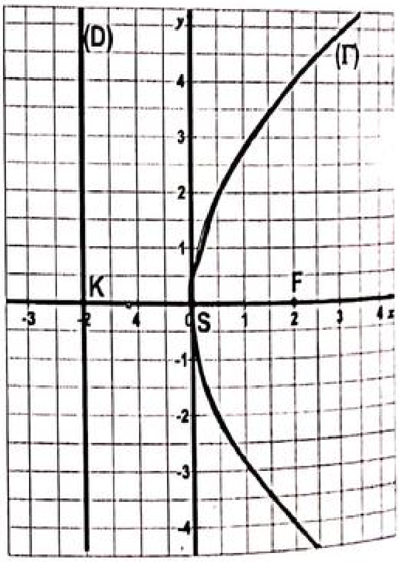
Dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, l'équation réduite de (Γ) est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

où : $a = \frac{AA'}{2} = 3$ et $e = \frac{c}{a}$.

Or $e = \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad e^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow \quad b = a\sqrt{e^2-1} = 4$.

L'équation réduite de (Γ) est donc $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, donnée dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.



c) Soit S le milieu de [KF], $\vec{i} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$ et $\vec{j}$ orthogonal à $\vec{i}$ et unitaire.

Dans le repère $(S\,;\vec{i}, \vec{j})$, on a F(2 , 0) et (D) la droite d'équation x = -2, est la directrice de (Γ).
Remarquons que (Γ) est une parabole car e = 1.

M(x , y) appartient à (Γ) $\Leftrightarrow$ MF = d(M ,(D))
$\Leftrightarrow$ $MF^2 = [d(M, (D))]^2$
$\Leftrightarrow$ $(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2$
$\Leftrightarrow$ $y^2 = 8x$.

(Γ) est la parabole d'équation $y^2 = 8x$ dans le repère $(S\,;\vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 9

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, on considère les points F(0 , 4) et $D\left(0, \frac{3}{2}\right)$. (Δ) est la droite passant par D, parallèle à l'axe des abscisses. (Γ) la conique dont les points M vérifient $\frac{d(M,F)}{d(M,(\Delta))} = 2$.

1) Préciser la nature de (Γ), son excentricité, un de ses foyers et la directrice associée à ce foyer.

2)a) Démontrer qu'une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ est : $x^2 - 3y^2 + 4y + 7 = 0$.

b) En déduire l'équation réduite de (Γ). Tracer cette conique.

Solution 9

1) Soit M un point du plan.

M appartient à (Γ) signifie $\frac{d(M,F)}{d(M,(\Delta))} = 2$.

Comme $2 > 1$, alors (Γ) est une hyperbole d'excentricité 2, dont un foyer est $F(0\,,4)$ et la directrice associée est (Δ).

2)a) La droite (Δ) a pour équation $2y - 3 = 0$.

Soit $M(x\,,y)$ un point du plan. $d(M\,,F) = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$ et $d(M\,,(\Delta)) = \dfrac{|2y-3|}{\sqrt{4}} = \dfrac{|2y-3|}{2}$.

Or M appartient à (Γ) si et seulement si $d(M\,,F) = 2d(M\,,(\Delta))$. C'est-à-dire $\sqrt{x^2+(y-4)^2} = 2\dfrac{|2y-3|}{2}$.

Ce qui se traduit en élevant les deux membres au carré par : $x^2 + (y-4)^2 = (2y-3)^2$. Soit $x^2 - 3y^2 + 4y + 7 = 0$.

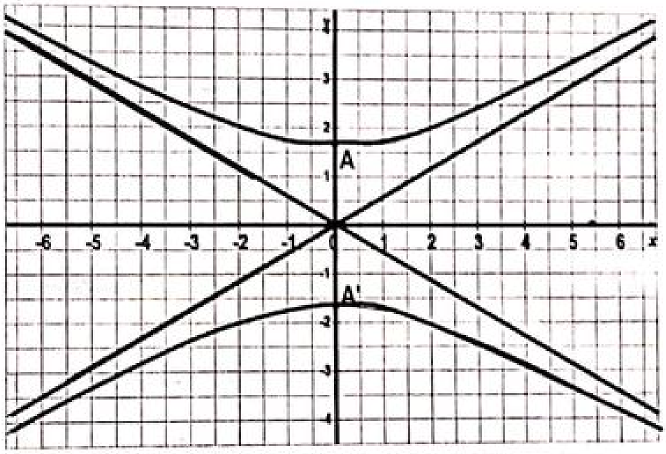
D'où une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ est : $x^2 - 3y^2 + 4y + 7 = 0$.

b) soit x et y deux nombres réels.

$$x^2 - 3y^2 + 4y + 7 = x^2 - 3\left(y^2 - \frac{4}{3}y\right) + 7 = x^2 - 3\left[\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right] + 7 = x^2 - 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{25}{3}.$$

D'où $x^2 - 3y^2 + 4y + 7 = 0$ équivaut à $-x^2 + 3\left(y - \dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{3}$.

C'est-à-dire $-\dfrac{x^2}{\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} + \dfrac{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = 1$ qui est l'équation réduite de (Γ).



(Γ) est l'hyperbole de centre $\Omega\left(0\,,\dfrac{2}{3}\right)$. De sommets les points $A\left(0\,,\dfrac{5}{3}\right)$ et $A'\left(0\,,-\dfrac{5}{3}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ et $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

2 – Retrouver les éléments géométriques d'une conique à partir de la définition analytique

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Soit (Γ) la courbe d'équation $x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$.

1) Démontrer que (Γ) est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques : centre, axes de symétrie, foyers, directrices, asymptotes, excentricité. Tracer (Γ).

2) Soit D la droite d'équation $y - 3 = 0$. On désigne par $d(M\,,D)$ la distance de M à D.

Soit $P(-4\,,6)$; $d(M\,,P)$ désigne la distance de M à P.

Quelle est l'ensemble des points M tels que $d(M\,,P) = 2d(M\,,D)$?

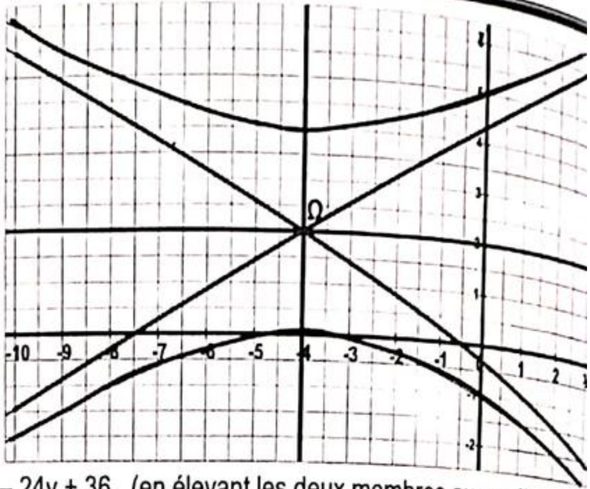
Solution 10

1) $M(x\,,y)$ appartient à (Γ) $\Leftrightarrow$ $x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$ $\Leftrightarrow$ $(x+4)^2 - 3(y-2)^2 = -12$

$$\Leftrightarrow -\frac{(x+4)^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

D'où (Γ) est l'hyperbole : de centre $\Omega(-4\,,2)$, de sommet $A(0\,,2)$ et $A'(0\,,-2)$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, d'asymptotes les droites d'équations $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ et $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, d'axe principal l'axe $(\Omega\,;\vec{j})$ et d'axe transverse, l'axe $(\Omega\,;\vec{i})$, de demi-distance focale $c = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$, de foyers les points $F(0\,,4)$ et $F'(0\,,-4)$

dans $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$, de directrices les droites d'équations y = 1 et y = -1 dans le repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$ et d'excentricité e = 2.



2) Soit M(x , y) un point du plan.

$d(M, P) = 2d(M, D) \Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2+(y-6)^2} = 2|y-3|$

$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 12y + 36 = 4y^2 - 24y + 36$ (en élevant les deux membres au carré).

$\Leftrightarrow x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$

D'où l'ensemble des points M est l'hyperbole (Γ).

Exercice 11

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer la nature de (E), ensemble des points M d'affixe z telle que $10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4$.
Préciser ses foyers, ainsi que ses directrices et son excentricité.

Solution 11

Soit z = x + iy, où x et y sont des nombres réels, l'affixe du point M.

On a : $10z\bar{z} + 3(z^2+\bar{z}^2) = 10|z|^2 + 6\mathrm{Re}(z^2) = 10(x^2+y^2) + 6(x^2-y^2) = 16x^2 + 4y^2$.

D'où M appartient à (E) $\Leftrightarrow$ $16x^2 + 4y^2 = 4$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + y^2 = 1$.

D'où (E) est l'ellipse de centre O, de demi-distance focale : $c = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de foyers : $F\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F'\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, de directrices les droites d'équations respectives : $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Exercice 12

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Définir les foyers, les directrices et l'excentricité de chacune des ellipses d'équations :

a) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.   b) $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$.

Solution 12

a) L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ a pour centre O, pour demi-distance focale $c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, pour foyers $F(\sqrt{5}, 0)$ et $F'(-\sqrt{5}, 0)$, pour directrices les droites d'équations $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$ et $x = -\frac{9}{\sqrt{5}}$, d'excentricité $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

b) L'ellipse l'équation $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ a pour centre Ω(1 , -2), de demi-distance focale $c = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$.

de foyers $F(0, \sqrt{7})$ et $F'(0, -\sqrt{7})$ dans le repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$, de directrices les droites d'équations $x = \frac{16}{\sqrt{7}}$ et $x = -\frac{16}{\sqrt{7}}$ dans le repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$, d'excentricité $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Exercice 13

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer le foyer, la directrice et le sommet et le paramètre de chacune des paraboles d'équations :

a) $y = 2x^2$.

b) $x = 3y^2$.

Solution 13

a) La parabole d'équation $y = 2x^2$ a pour sommet O, pour paramètre $p = \frac{1}{4}$, pour foyer $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, soit $F\left(0, \frac{1}{8}\right)$, pour directrice $y = -\frac{1}{8}$.

b) La parabole d'équation $x = 3y^2$ a pour sommet O, pour paramètre $p = \frac{1}{6}$, pour foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, soit $F\left(\frac{1}{12}, 0\right)$, pour directrice $x = -\frac{1}{12}$.

3 – Passer de la définition bifocale à la forme réduite

Exercice 14

Soit F et F' deux points du plan donnés tels que FF' = 3.

Déterminer dans un repère convenablement choisi, une équation réduite de l'ensemble des points M tels que :

a) MF + MF' = 5.

b) $|MF - MF'| = 2$.

Solution 14

a) Soit Ω, milieu de [FF'], $\vec{i} = \frac{1}{\Omega F}\overrightarrow{\Omega F}$ et $\vec{j}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{i}$.

$(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé.

Et l'ensemble des points M(x , y) tels que MF + MF' = 5 est l'ellipse dont l'équation réduite est $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, dans le repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$, où 2a = 5 et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, c étant la demi-distance focale, c'est-à-dire $c = \frac{FF'}{2} = \frac{3}{2}$.

On a alors $a = \frac{5}{2}$ et $\frac{9}{4} = \frac{25}{4} - b^2$.

D'où $a = \frac{5}{2}$, b = 2 et l'équation réduite de l'ensemble des points M est $\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$.

b) Considérons le repère défini à la question a).

L'ensemble des points M(x , y) tels que $|MF - MF'| = 2$ est l'hyperbole dont une équation dans le repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$ est $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$, où 2a = 2 et $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, c étant la demi-distance focale, c'est-à-dire $c = \frac{FF'}{2} = \frac{3}{2}$.

On a alors a = 1 et $\frac{9}{4} = 1 + b^2$.

D'où a = 1, $b=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et l'équation réduite de l'ensemble des points M est : $x^2-\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=1$.

Exercice 15

Soit F(-2 , 2) et F'(4 , 2) dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Déterminer une équation de l'ensemble des points M tels que :

a) MF + MF' = 10

b) $|MF-MF'|=4$.

(On pourra au préalable déterminer l'équation réduite dans un repère convenablement choisi)

Solution 15

Soit Ω le milieu de [FF'], $\vec{I}=\dfrac{1}{FF'}\overrightarrow{FF'}$ et $\vec{J}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{I}$.

On a Ω(1 , 2), FF' = 6, $\overrightarrow{FF'}(6\,,0)$, $\vec{I}=\vec{i}$. On peut prendre $\vec{J}=\vec{j}$.

a) Dans le repère $(\Omega\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, l'ensemble des points M(X , Y) tels que MF + MF' = 10 est l'ellipse dont l'équation réduite est $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$, où 2a = 10 et $c=\sqrt{a^2-b^2}=\dfrac{FF'}{2}=3$.

D'où a = 5, b = 4 et l'équation réduite de l'ensemble des points M(x , y) tels que MF + MF' = 10 est :

$$\frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{16}=1\text{, dans le repère }(\Omega\,;\vec{i}\,,\vec{j}).$$

Or on a, d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{\Omega M}=-\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{OM}$.

Soit M(X , Y) dans le repère $(\Omega\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ et M(x , y) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, $\begin{cases}X=-1+x\\Y=-2+y\end{cases}$.

D'où une équation de l'ensemble des points M(x , y) tels que MF + MF' = 10 est :

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1\text{ dans le repère }(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}).$$

b) L'ensemble des points M(x , y) tels que $|MF-MF'|=4$ est l'hyperbole dont l'équation réduite est : $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, où 2a = 4 et $c=\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{FF'}{2}=3$. Alors a = 2, $b=\sqrt{5}$ et l'équation réduite de notre hyperbole est $\dfrac{X^2}{4}-\dfrac{Y^2}{5}=1$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

D'où l'équation réduite de cette hyperbole dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ est : $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y-2)^2}{5}=1$.

Exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.
Soit F(1 , -1) et F'(-1 , 1).

On pose $\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$ et $\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$.

1) Déterminer dans le repère $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, une équation de l'ensemble des points M tels que :

a) MF + MF' = 4

b) $|MF-MF'|=2$.

2) En déduire une équation de chacun de ces ensembles dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Solution 16

1) Remarquons que : O est le milieu de [FF'], $\vec{u}=\frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$, $\vec{v}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et $FF'=2\sqrt{2}$.

a) L'ensemble des points M(X , Y) du plan tels que MF + MF' = 4 est l'ellipse dont l'équation réduite donnée dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ est : $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$, où $2a=4$ et $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{FF'}{2}=\sqrt{2}$. C'est-à-dire a = 2 et $b=\sqrt{2}$.

D'où une équation de l'ensemble des points M(X , Y) dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ est : $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{2}=1$.

b) L'ensemble des points M(X , Y) du plan tels que $|MF-MF'|=2$ est une hyperbole dont l'équation réduite donnée dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ est $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$, où 2a = 2 et $c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{FF'}{2}=\sqrt{2}$.

C'est-à-dire a = 1, b = 1 et l'équation réduite est $X^2-Y^2=1$.

2) Soit M(x , y) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et M(X , Y) dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On a : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow x\vec{i}+y\vec{j}=X\vec{u}+Y\vec{v} \Leftrightarrow x\vec{i}+y\vec{j}=\frac{X}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})+\frac{Y}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{2}\vec{i}+y\sqrt{2}\vec{j}=(X+Y)\vec{i}+(-X+Y)\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=x\sqrt{2} \\ -X+Y=y\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases}.$$

a) D'où l'ensemble des points M(x , y) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, tels que MF + MF' = 4 a pour équation

$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\right)^2=1$, soit $\frac{(x-y)^2}{8}+\frac{(x+y)^2}{4}=1$.

b) L'ensemble des points M(x , y) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ tels que $|MF-MF'|=2$, a pour équation

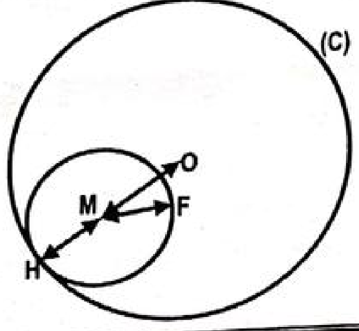
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\right)^2=1$, c'est-à-dire $\frac{(x-y)^2}{2}-\frac{(x+y)^2}{2}=1$, soit $xy=-\frac{1}{2}$.

4 – Déterminer des lieux géométriques

Exercice 17

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon R, F un point intérieur à (C).
Démontrer que le lieu des points M, centres des cercles passant par F et tangents à (C), est une ellipse dont on précisera les foyers.

Solution 17



- Soit H le point de contact des deux cercles, on a : OH = OM + MH.
C'est-à-dire MO + MF = R (car OH = R).
Donc M appartient à une ellipse de foyers O et F.
- Réciproquement, Soit M un point du plan tel que MO + MF = R,
On a MO < R. Par conséquent, M est à l'intérieur du cercle (C).
Soit H le point de (C) tel que M soit sur le segment [OH], on a MO + MH = R.
Donc MO + MH = MO + MF, on en déduit que MH = MF.
Donc H est sur le cercle de centre M passant par F.

Comme H est point de contact de (C) et le cercle de centre M passant par F et O, M et H sont alignés alors ces deux cercles sont tangents en H. Donc M est le centre d'un cercle passant par F et tangent à (C).
Finalement, l'ensemble des points M cherché est l'ellipse de foyers O et F.

Exercice 18

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon R, F un point extérieur à (C).
Démontrer que le lieu des points M, centres des cercles (Γ) passant par F et tangents à (C) est une hyperbole.
(On distinguera deux cas : (Γ) et (C) sont tangents extérieurement.
(C) est intérieur à (Γ)).

Solution 18

- **Supposons (Γ) et (C) sont tangents extérieurement.**

Soit H le point de contact des deux cercles (O, M et H sont alignés), on a : OH = OM – MH.
C'est-à-dire MO – MF = R (car OH = R). Donc M appartient à une hyperbole de foyers O et F.

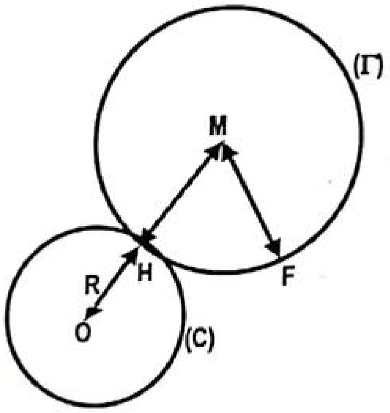
Supposons (C) est tangent à (Γ) intérieurement, on a OM = MH – OH.

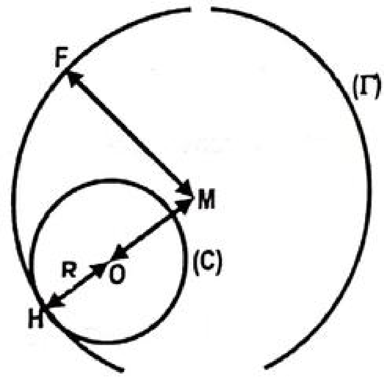
Donc FM – OM = R. D'où M appartient à une hyperbole de foyers O et F.

- Réciproquement, Soit M un point du plan tel que MO – MF = R ou MF – MO = R.

Si MO – MF = R, alors MO > R, M est donc à l'extérieur de (C).
Et soit H le point de (C) sur le segment [OM], on a MO – MH = R.
Donc MO – MH = MO – MF. Donc MH = MF. D'où H est sur le cercle de centre M passant par F.
Comme H est point de contact de (C) et le cercle de centre M passant par F et O, M et H sont alignés alors ces deux cercles sont tangents en H.

Si MF – MO = R, alors MF > R et MF > MO.
Soit H le point de (C) sur la demi droite [MO), on a MH – MO = R. Donc MH – MO = MF – MO. Donc MF = MH.
D'où H est sur le cercle de centre M passant par F.
Comme H est point de contact de (C) et le cercle de centre M passant par F et O, M et H sont alignés alors ces deux cercles sont tangents en H. Donc M est le centre d'un cercle passant par F et tangent à (C).
Finalement, si le point M est tel que $|MF - MO| = R$ alors M est le centre d'un cercle passant par F et tangent à (C).
D'où l'ensemble des points M est une hyperbole de foyers O et F.





C. Courbes paramétrées

Exercice 19

Reconnaître la courbe (P) définie par $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$, dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Solution 19

Pour tout réel t, on a : $-1 \le \cos 2t \le 1$, $-1 \le \sin t \le 1$ et $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$, donc $x = 1 - 2y^2$.

D'où $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $x = 1 - 2y^2$ avec x dans [-1 , 1] et y dans [-1 , 1].

Finalement, (P) est la partie de la parabole d'équation $x = 1 - 2y^2$ dans $[-1\,,\,1] \times [-1\,,\,1]$.

Exercice 20

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

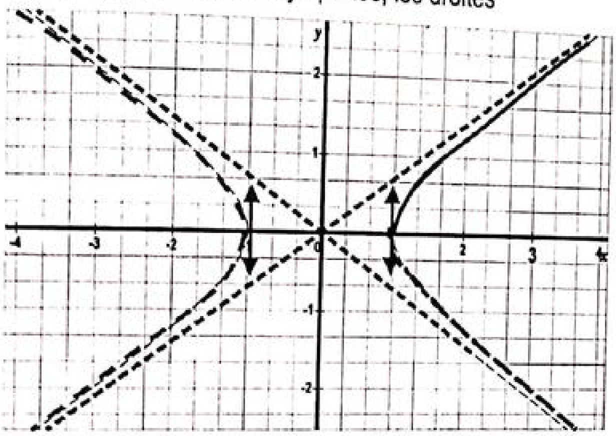
1) Reconnaître la courbe (H) d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$. Déterminer ses sommets, ses asymptotes et la dessiner.

2) On considère dans le plan P, le mouvement du point M(x , y) tel que : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos 2t} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan 2t \end{cases}$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

Montrer que la trajectoire (T) de M est une partie de (H) que l'on précisera.

Solution 20

1) (H) est l'hyperbole de centre O, de sommets A(1 , 0), A'(-1 , 0) et d'asymptotes, les droites $(D): y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ et $(D'): y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$.



2) Soit M(x , y) un point du plan, soit t appartenant à $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right[$,

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos 2t} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan 2t \end{cases},\ t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{\cos^2 2t} & \text{avec } x \geq 1 \\ y^2 = \dfrac{1}{2}\tan^2 2t & \text{avec } y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 + \tan^2 2t & \text{avec } x \geq 1 \\ 2y^2 = \tan^2 2t & \text{avec } y \geq 0 \end{cases}$$

$\iff$ $x^2 - 2y^2 = 1$, avec $x \geq 1$ et $y \geq 0$.

$\iff$ M appartient à (H) avec $x \geq 1$ et $y \geq 0$.

D'où la trajectoire de M est la partie de l'hyperbole (H) dans $[1\,, +\infty[\times[0\,, +\infty[$.

Exercice 21

Montrer que la courbe définie par : $\begin{cases} x = a\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = b\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$, a et b étant deux constantes réelles strictement positives, est incluse dans une hyperbole de centre O.

Solution 21

Notons (C) la courbe d'équation : $\begin{cases} x = a\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = b\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Soit M(x , y) un point de (C) et t un nombre réel, on a :

$$x^2 = \left[a\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)\right]^2 = a^2\left(\frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4}\right) \quad \text{et} \quad y^2 = \left[b\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)\right]^2 = b^2\left(\frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{4}\right).$$

Ainsi, on a : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}-\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}=1$.

D'où M appartient à l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

La courbe (C) est donc incluse dans l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Et si on allait plus loin : déterminons la partie de l'hyperbole concernée.

- Etudions les variations de la fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $h'(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$.

On a $h'(t) > 0$ équivaut successivement à $e^t - e^{-t} > 0$, puis $e^t > e^{-t}$, et enfin $t > 0$.
D'où h est strictement croissante sur $[0 , +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty , 0]$.
$\lim\limits_{t\to-\infty} h(t)=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)=+\infty$. D'où le tableau de variations de h qui suit :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
h'(t)		-	0	+	
h(t)	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

D'où $h(\mathbb{R})=[1,+\infty[$. D'où lorsque t varie dans $\mathbb{R}$, h(t) dans $[1 , +\infty[$ et x varie dans $[a , +\infty[$.

- Etudions les variations de $g : x \mapsto \dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, on a $g'(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}>0$, donc g est strictement croissante dans $\mathbb{R}$ et $h(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Ainsi, y décrit $\mathbb{R}$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

La courbe (C) est donc la partie de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, avec x dans $[a , +\infty[$.

Exercice 22

Montrer que la courbe définie par $\begin{cases} x=a\dfrac{(1-t^2)}{1+t^2} \\ y=b\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$, avec $t\in\mathbb{R}$, a et b étant des réels positifs, est une ellipse de centre O.

Solution 22

Notons (C) la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=a\dfrac{(1-t^2)}{1+t^2} \\ y=b\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$, avec $t\in\mathbb{R}$.

Soit M(x , y) un point de (C) et t un nombre réel, on a :

$$x^2=\left[a\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\right]^2=a^2\left(\frac{1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}\right) \quad \text{et} \quad y^2=\left[b\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\right]^2=b^2\left(\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\right).$$

Ainsi, on a : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}+\dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2}=\dfrac{1+2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}=1$.

D'où M appartient à l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

La courbe (C) est donc incluse dans l'ellipse d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Le lecteur étudiera comme à l'exercice 21, les fonctions : $t\mapsto\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $t\mapsto\dfrac{2t}{1+t^2}$.

Et il pourra alors vérifier que lorsque t décrit $\mathbb{R}$, x varie dans [-a , a] et y dans [-b , b].

D'où le point M décrit toute l'ellipse. Donc que la courbe (C) est l'ellipse de centre O, d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

D. Coniques et nombres complexes

Exercice 23 **Extrait d'un BAC étranger**

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation en z suivante : $z^2-(3\cos\theta+i\sin\theta)z+2=0$.
Soit M_1 et M_2 les points images des solutions, et P le milieu de $[M_1M_2]$.
Trouver l'ensemble décrit par P quand θ décrit l'intervalle $[0\,,\,\pi]$.

Solution 23

- Le discriminant de l'équation est :

$\Delta=(3\cos\theta+i\sin\theta)^2-8=9\cos^2\theta+6i\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta-8=-9\sin^2\theta+6i\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta=(\cos\theta+3i\sin\theta)^2$.

D'où les solutions de l'équation sont : $z_1=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z_2=\cos\theta-i\sin\theta$.

- L'affixe de P est : $z_P=\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{3}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}i\sin\theta$.

Posons $(x_P\,,\,y_P)$ les coordonnées de P. On a alors $x_P=\dfrac{3}{2}\cos\theta$ et $y_P=\dfrac{1}{2}\sin\theta$. Donc $\dfrac{2}{3}x_P=\cos\theta$ et $2y_P=\sin\theta$.

Ce qui nous donne la relation $\dfrac{4}{9}{x_P}^2+4{y_P}^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

D'où P appartient à l'ellipse E d'équation réduite : $\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Lorsque θ décrit $[0\,,\,\pi]$, alors x décrit $\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right]$ et y décrit $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

D'où l'ensemble décrit par P est la partie de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$ dans $\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right]\times\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

Exercice 24

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1) Déterminer et construire l'ensemble (H) des points M du plan d'affixe z, telle que : $z\bar{z}-(z^2+\bar{z}^2)+1=0$.
   Préciser les sommets, les foyers et les asymptotes de (H).
   Donner une mesure de l'angle de chacune des asymptotes avec la droite $(O\,;\vec{i})$.
2) Soit M un point de (H) d'affixe z. On note $|z|=r$ et on désigne par θ un argument de z.
   Calculer r en fonction de cosθ.

Solution 24

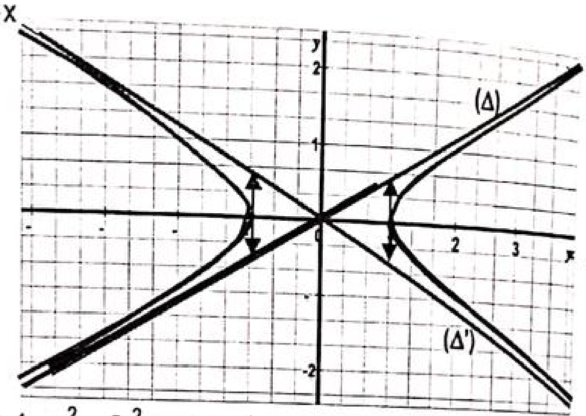
1) • Soit M(x , y) un point du plan, d'affixe z.

$z\bar{z}-(z^2+\bar{z}^2)+1=|z|^2-2\mathrm{Re}(z^2)+1=x^2+y^2-2(x^2-y^2)+1=-x^2+3y^2+1.$

D'où M appartient à (H) $\Leftrightarrow$ $-x^2+3y^2+1=0$ $\Leftrightarrow$ $x^2-\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1.$

D'où (H) est l'hyperbole de centre O, de sommets A(1 , 0) et A'(-1 , 0), de foyers $F\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$ et $F'\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$,

d'asymptotes les droites $(\Delta):y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ et $(\Delta'):y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.



• Soit α une mesure de l'angle entre (Δ) et l'axe des abscisses et β une mesure de l'angle entre (Δ') et l'axe des abscisses, tanα et tanβ sont respectivement les pentes de (Δ) et (Δ').

D'où $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\tan\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

C'est-à-dire $\alpha\equiv\dfrac{\pi}{6}[\pi]$ et $\beta\equiv-\dfrac{\pi}{6}[\pi]$.

2) Soit $z=re^{i\theta}$. On a $z\bar{z}-(z^2+\bar{z}^2)+1=|z|^2-2\mathrm{Re}(z^2)+1=r^2-2r^2\cos2\theta+1$.

D'où : $z\bar{z}-(z^2+\bar{z}^2)+1=0$ $\Leftrightarrow$ $r^2-2r^2\cos2\theta+1=0$ $\Leftrightarrow$ $r^2(1-2\cos2\theta)+1=0$ $\Leftrightarrow$ $r^2=\dfrac{1}{2\cos2\theta-1}$.

Remarquons que si M appartient à (H), alors θ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right[$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

D'où 2θ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\right[$. Donc cos2θ appartient à $\left]\dfrac{1}{2},1\right]$ et donc 2cos2θ – 1 appartient à]0 , 1].

Par conséquent on a $\dfrac{1}{2\cos2\theta-1}>0$. Et donc $r=\sqrt{\dfrac{1}{2\cos2\theta-1}}$.

Exercice 25

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A tout point M d'affixe z = x + iy, on associe le point M' d'affixe z' = x' + iy', tel que : $z'=(3+2i)z+3i\bar{z}-1$.

1) Quelle est une équation cartésienne de l'ensemble des points M tels que O, M et M' soient alignés ?
2) On obtient une conique. Préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.

Solution 25

1) Soit z = x + iy, on a :

$z'=(3+2i)(x+iy)+3i(x-iy)-1=(3x-2y+3y-1)+i(2x+3y+3x)=(3x+y-1)+i(5x+3y)$.

Donc le point M' a pour coordonnées (3x + y – 1 , 5x + 3y).

O, M et M' sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})=0$.

Or $\det(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})=x(5x+3y)-y(3x+y-1)=5x^2-y^2+y$.

Une équation cartésienne de l'ensemble des points M tels que O, M et M' soient alignés est donc $5x^2-y^2+y=0$.

2) $5x^2-y^2+y=0$ équivaut à $5x^2-\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{1}{4}$.

C'est-à-dire $-\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2}+\dfrac{\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=1.$

Donc cette conique est une hyperbole de centre $\Omega\left(0\,,\dfrac{1}{2}\right)$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, de sommets $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ et $A'\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ dans le repère $(\Omega\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ et d'asymptotes les droites d'équations $y=x\sqrt{5}$ et $y=-x\sqrt{5}$ dans le repère $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$. De demi-distance focale : $c=\sqrt{\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{10}}$, de foyers : $F\left(0,\sqrt{\dfrac{3}{10}}\right)$ et $F'\left(0,-\sqrt{\dfrac{3}{10}}\right)$ dans le repère $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$, de directrices les droites d'équations $y=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{10}{3}}$ et $y=-\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{10}{3}}$ et d'excentricité $e=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}}{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{6}{5}}$.

Exercice 26

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1) On considère l'hyperbole (H) d'équation : $y^2-x^2=1$.

a) Déterminer ses sommets et ses asymptotes

b) Tracer cette hyperbole.

2) Soit α un réel appartenant à $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2\cos^2\alpha - z\sin 2\alpha - \cos^2\alpha + 2 = 0$ (E).

3) Soit M le point du plan complexe ayant pour affixe la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive.

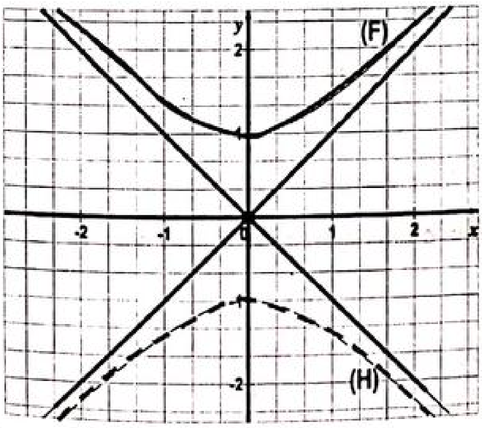
a) Démontrer que M appartient à l'hyperbole (H).

b) Déterminer le sous-ensemble de (H) décrit par M lorsque α décrit $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Solution 26

1)a) (H) est l'hyperbole équilatère de centre O, de sommets A(0 , 1) et A'(0 , -1), d'asymptotes les droites d'équations respectives: $y = x$ et $y = -x$.

b)



2) Le discriminant de (E) est :

$\Delta = \sin^2 2\alpha + 4\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2) = -4\cos^2\alpha$
$= i^2 4\cos^2\alpha$..

Donc les solutions de (E) sont : $z'=\tan\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}i$ et $z''=\tan\alpha-\dfrac{1}{\cos\alpha}i$.

3)a) Comme α appartient à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, alors $\frac{1}{\cos\alpha}>0$. D'où M a pour affixe $z'=\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}i$.

Posons $x=\tan\alpha$ et $y=\frac{1}{\cos\alpha}$, on a $x^2=\tan^2\alpha$ et $y^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$.

Donc $y^2=1+x^2$, soit encore $y^2-x^2=1$. D'où M appartient à l'hyperbole (H).

b) M appartient à (H).

Lorsque α décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan\alpha$ décrit $\mathbb{R}$, $\cos\alpha$ décrit $]0\ ,\ 1]$ et donc $\frac{1}{\cos\alpha}\geq 1$.

Finalement, lorsque α décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, M décrit la partie (F) de l'hyperbole (H) dans $\mathbb{R}\times[1,+\infty[$.

Exercice 27

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{i}\ ,\vec{j})$.

φ étant un paramètre réel vérifiant $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, on considère l'équation (E) : $z^2-\frac{2}{\cos\varphi}z+\frac{5}{\cos^2\varphi}=4$.

1) Trouver les racines complexes z' et z'' de l'équation (E).
2) Soit M' et M'' les images de z' et z'' dans le plan complexe.

Montrer que M' et M'' décrivent, quand φ varie dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, une branche d'une hyperbole que l'on dessinera.

Solution 27

1) L'équation (E) est équivalente à $z^2-\frac{2}{\cos\varphi}z+\frac{5}{\cos^2\varphi}-4=0$, qui a pour discriminant :

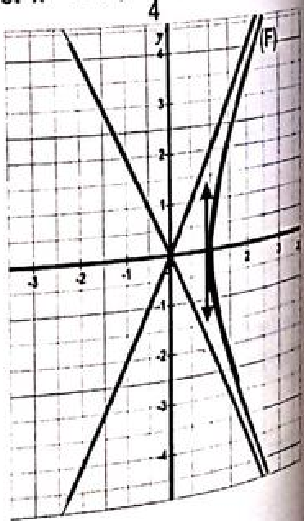
$$\Delta=-\frac{16}{\cos^2\varphi}+16=-16\left(\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)=-16\tan^2\varphi=(4i\tan\varphi)^2.$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont : $z'=\frac{1}{\cos\varphi}+2i\tan\varphi$ et $z''=\frac{1}{\cos\varphi}-2i\tan\varphi$.

2) Notons (x' , y') les coordonnées de M' et (x'' , y'') les coordonnées de M''.

On a : $x'=\frac{1}{\cos\varphi}$, $y'=2\tan\varphi$, $x''=\frac{1}{\cos\varphi}$ et $y''=-2\tan\varphi$.

- Or $x'^2=x''^2=\frac{1}{\cos^2\varphi}=1+\tan^2\varphi$ et $y'^2=y''^2=4\tan^2\varphi$, alors $x'^2=1+\frac{y'^2}{4}$ et $x''^2=1+\frac{y''^2}{4}$.



- D'où M' et M'' appartiennent à l'hyperbole (H) d'équation $x^2-\frac{y^2}{4}=1$.

Vérifions que M' et M'' sont situés sur la même branche de cette hyperbole :

Lorsque φ décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$:

- $\tan\varphi$ décrit $\mathbb{R}$, donc $2\tan\varphi$ et $-2\tan\varphi$ décrivent $\mathbb{R}$.
C'est-à-dire y' et y'' décrivent $\mathbb{R}$.
- $\cos\varphi$ décrit $]0\ ,\ 1]$ et donc $\frac{1}{\cos\alpha}\geq 1$. C'est-à-dire x' et x'' décrivent $[1\ ,\ +\infty[$.

Finalement, lorsque φ décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, M' et M'' décrivent la branche (F) de l'hyperbole (H) dans $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$. (H) est l'hyperbole de centre O, d'asymptotes les droites d'équations y = 2x et y = -2x et de sommets A(1 , 0) et A'(-1 , 0).

Extrait d'un BAC étranger

Exercice 28

P est le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soit M appartenant à P, on note z son affixe.

a) Vérifier que l'ensemble des points M tels que $\bar{z} + z + 4 = 0$ est une droite (D). Tracer (D).

b) Démontrer que, pour tout point M de P, la distance de M à (D) est $\frac{1}{2}\left|z + \bar{z} + 4\right|$.

2) On note F le point d'affixe 1 + i et (P') le plan privé de la droite (D).

Soit (E) l'ensemble des points M de P' d'affixe z tels que $\left|\frac{z-1-i}{z+\bar{z}+4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Démontrer que (E) est une conique à centre dont on précisera l'excentricité et la nature. Vérifier que (E) passe par O.

Solution 28

1)a) Soit M(x , y) un point du plan P, d'affixe z = x + iy.

$\bar{z}+z+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\mathrm{Re}(z) + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = 0$ qui est une équation de droite.

D'où (D) est la droite d'équation x = -2.

b) Soit M(x , y) un point du plan P, d'affixe z = x + iy. La distance de M à (D) est $d(M, (D)) = |x+2|$.

Or $\frac{1}{2}\left|z+\bar{z}+4\right| = \frac{1}{2}\left|2\mathrm{Re}(z)+4\right| = |x+2|$. D'où $d(M, (D)) = \frac{1}{2}\left|z+\bar{z}+4\right|$.

2) • Soit M un point du plan d'affixe z.

$$\begin{aligned}
M \text{ appartient à } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{z-1-i}{z+\bar{z}+4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \times \frac{|z-1-i|}{\frac{|z+\bar{z}+4|}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{MF}{d(M,D)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{car} \quad d(M,(D)) = \frac{1}{2}\left|z+\bar{z}+4\right|. \\
&\Leftrightarrow \quad MF = \frac{\sqrt{2}}{2} d(M,(D)) \\
&\Leftrightarrow \quad M \text{ appartient à l'ellipse } (E) \ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} < 1\right) \text{ de foyer F, de directrice (D), d'excentricité } e = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

• Pour z = 0, on a $\left|\frac{z-1-i}{z+\bar{z}+4}\right| = \left|\frac{-1-i}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$. D'où O appartient à (E).

E. Déterminer l'image d'une conique par une transformation du plan

Exercice 29

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan P d'affixe z, telle que : $10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4$.
Préciser ses foyers, ainsi que ses directrices.

2) Soit f la composée de l'homothétie de centre O et de rapport 2 et de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Déterminer l'équation de (E'), image de (E) par f.

3) Montrer que (E') est une ellipse de foyers f(F) et f(F'). Comparer les excentricités de (E) et (E').

4) Construire (E) et (E') sur une même figure.

Solution 29

1) Soit $z = x + iy$, (x et y appartenant à $\mathbb{R}$), l'affixe du point M.

On a : $10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 10|z|^2 + 6\mathrm{Re}(z^2) = 10(x^2 + y^2) + 6(x^2 - y^2) = 16x^2 + 4y^2$.

D'où M appartient à (E) $\Leftrightarrow$ $16x^2 + 4y^2 = 4$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + y^2 = 1$.

D'où (E) est l'ellipse de centre O, de foyers : $F\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F'\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, de directrices les droites d'équations respectives : $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2) f est la composée de l'homothétie de centre O et de rapport 2 et de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, d'où f est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Ainsi, soit M le point d'affixe z et M' = f(M) d'affixe z', on a : $z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z = 2iz$, c'est-à-dire $z = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}z' = -\frac{1}{2}iz'$.

D'où M appartient à (E) $\Leftrightarrow$ $10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4$.

$$\Leftrightarrow \quad 10\left(-\frac{1}{2}iz'\right)\left(\overline{-\frac{1}{2}iz'}\right) + 3\left[\left(-\frac{1}{2}iz'\right)^2 + \left(\overline{-\frac{1}{2}iz'}\right)^2\right] = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 10\left(-\frac{1}{2}iz'\right)\left(\frac{1}{2}i\bar{z'}\right) + \frac{3}{4}(-z'^2 - \bar{z'}^2) = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{2}|z'|^2 + \frac{3}{2}\mathrm{Re}(-z'^2) = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{3}{2}(-x'^2 + y'^2) = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x'^2 + 4y'^2 - 4 = 0.$$

D'où une équation de (E') est : $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$.

3) • (E') est l'ellipse de centre O, de demi-distance focale $c' = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, de foyers $F_1(\sqrt{3}, 0)$ et $F_1'(-\sqrt{3}, 0)$.

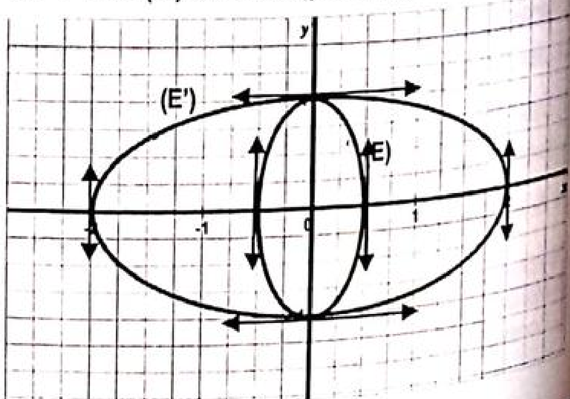
(E) est l'ellipse de centre O, de demi-distance focale $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de foyers $F\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F'\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Or les images de F et F' par f sont les points d'affixes respectives $2iz_F = -\sqrt{3}$ et $2iz_{F'} = \sqrt{3}$, donc de coordonnées $(-\sqrt{3}, 0)$ et $(\sqrt{3}, 0)$, qui sont les coordonnées des points F_1' et F_1. D'où (E') est une ellipse de foyers f(F) et f(F').

• L'excentricité de (E) est $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Celle de (E') est aussi $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où (E) et (E') ont la même excentricité.



4) (E) a pour centre O = f(O), pour sommets $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $A'\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, B(0 , 1) et B'(0 , -1).

(E') est l'ellipse de centre O, de sommets C(2 , 0), C'(-2 , 0), B et B'.

Exercice 30

ABC est un triangle rectangle en A de sens direct, tel que BC = 2AB et s la similitude directe du plan, de centre B qui transforme C en A.

1) Préciser le rapport et une mesure de l'angle de s.

2) Soit (H) l'ensemble des points M du plan tels que MB = 2d(M , (AC)).

a) Donner la nature de (H). Préciser un foyer, une directrice et son excentricité.

b) Donner la nature puis un foyer et l'excentricité de l'image s(H) de (H) par s.

Solution 30

1) s(B) = B et s(C) = A. D'où le rapport de s est $\frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$ et son angle est $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$.

Soit α une mesure de cet angle, on a $\cos\alpha = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$. D'où $\alpha \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2)a) M appartient à (H) si et seulement si MB = 2d(M , (AC)). D'où (H) est une conique d'excentricité 2.
Or 2 > 1, alors (H) est l'hyperbole d'excentricité 2, dont un foyer est le point B et une directrice est la droite (AC).

b) s est une similitude directe de centre B et (H) est l'hyperbole d'excentricité 2, dont un foyer est le point B.
D'où s(H) est aussi une hyperbole d'excentricité 2 et dont un foyer est s(B) = B.

Exercice 31

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ensemble (E) des points M(x , y) du plan tels que : $15x^2 + 13y^2 - 2xy\sqrt{3} = 768$.

Et f l'application qui à tout point M(x , y) du plan, associe le point M'(x' , y'), tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(x + y\sqrt{3}) \\ y' = \frac{1}{4}(-x\sqrt{3} + y) \end{cases}$.

1) Montrer que f est une similitude directe plane que l'on caractérisera. Déterminer f^{-1}.

2) Déterminer une équation de f(E) et montrer que f(E) est une ellipse dont on précisera les sommets, les foyers et l'excentricité.

3) En déduire que (E) est l'ensemble des points M du plan tels que : $MF_1 + MF_1' = 16$, où F_1 et F_1'sont des points du plan que l'on précisera.

Solution 31

1) • **Déterminons l'écriture complexe de f :**

Soit M(x , y) un point du plan, d'affixe z, et M'(x' , y') = f(M), d'affixe z'.

On a : $z' = x' + iy' = \frac{1}{4}(x + y\sqrt{3}) + \frac{1}{4}i(-x\sqrt{3} + y) = \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})(x + iy) = \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})z$.

L'écriture complexe de f est sous forme z' = az + b, où $a = \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})$ et b = 0.

$\left|\frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})\right| = \frac{1}{2}$ et $\arg\left(\frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

D'où f est la similitude directe plane de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle dont une mesure est $-\frac{\pi}{3}$.

• f^{-1} est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Donc l'écriture complexe de f^{-1} est : $z' = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)z = (1 + i\sqrt{3})z$.

Retrouvons l'expression analytique de f^{-1} :
Soit M d'affixe $z = x + iy$ et M' d'affixe $z' = x' + iy'$, son image par f^{-1}.
On a : $z' = (1+i\sqrt{3})z \Leftrightarrow x'+iy' = (1+i\sqrt{3})(x+iy) \Leftrightarrow x'+iy' = (x-y\sqrt{3})+i(x\sqrt{3}+y)$.
D'où $x' = x - y\sqrt{3}$ et $y' = x\sqrt{3}+y$.
2) • Soit M(x , y) un point du plan et M'(x' , y') son image par f, d'après l'expression analytique de f^{-1}, on a : $x = x'-y'\sqrt{3}$ et $y = x'\sqrt{3}+y'$. Ainsi,

M appartient à (E) $\Leftrightarrow 15x^2+13y^2-2xy\sqrt{3} = 768$.

$$\Leftrightarrow 15(x'-y'\sqrt{3})^2+13(x'\sqrt{3}+y')^2-2(x'-y'\sqrt{3})(x'\sqrt{3}+y')\sqrt{3} = 768$$

$$\Leftrightarrow 48x'^2+64y'^2 = 768$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{12} = 1.$$ D'où une équation de f(E) est : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12} = 1$.

• f(E) a pour équation $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12} = 1$.

D'où f(E) est l'ellipse de centre O, de sommets A(4 , 0), A'(-4 , 0), $B(0, 2\sqrt{3})$ et $B'(0, -2\sqrt{3})$, de demi-distance focale $c = \sqrt{16-12} = 2$, donc de foyers F(2 , 0) et F'(-2 , 0), d'excentricité $e = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3) f(E) est l'ellipse de foyers F(2 , 0) et F'(-2 , 0).
f(E) est l'ensemble des points M' du plan tels que M'F + M'F' = 8.
Soit F_1 et F_1' les antécédents respectifs de F et F' par f, on a :

$M'F+M'F' = \frac{1}{2}MF_1+\frac{1}{2}MF_1' = \frac{1}{2}(MF_1+MF_1')$ (f étant une similitude de rapport $\frac{1}{2}$, f multiplie les distances par $\frac{1}{2}$)
D'où M'F + M'F' = 8 équivaut à $MF_1 + MF_1' = 16$.
(E) est l'ensemble des points M du plan, tels que $MF_1 + MF_1' = 16$, où F_1 et F_1' sont les antécédents respectifs de F et F' par f.
Notons que (E) est par conséquent l'ellipse de foyers F_1 et F_1'.

Exercice 32 BAC C – Cameroun – 2002

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'application f qui à tout point M(x , y) du plan, associe le point M'(x', y') tel que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{3}{4}y \end{cases}$.

(C) est la courbe dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$, θ appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi]$. On note (Γ) l'image de (C) par f et H le projeté orthogonal de M sur l'axe $(O ; \vec{i})$.

1)a) Montrer que f est bijective et donner l'expression analytique de f^{-1} dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

b) Démontrer que $\overrightarrow{HM'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HM}$.

2)a) Démontrer que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).
c) Tracer (C) et (Γ) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Solution 32

1)a) Soit M'(x' , y') un point du plan. Cherchons que M(x , y) tel que f(M) = M'.

f(M) = M' si et seulement si $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{3}{4}y \end{cases}$. C'est-à-dire $\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{4}{3}y' \end{cases}$.

On constate que pour tout point M' du plan, il existe un point M et un seul, tel que f(M) = M'. D'où f est bijective et sa réciproque est l'application f^{-1}, qui à tout point M(x , y), associe le point M'(x' , y'), tel que $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{4}{3}y \end{cases}$.

Soit M(x , y) un point quelconque du plan, et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses. H a pour coordonnées (x , 0).

Donc $\overrightarrow{HM'}$ a pour coordonnées (x' – x , y' - 0). C'est-à-dire $\overrightarrow{HM'}$ a pour coordonnées $\left(0, \frac{3}{4}y\right)$.

$\frac{3}{4}\overrightarrow{HM}$ a pour coordonnées $\frac{3}{4}(x-x, y-0)$. C'est-à-dire $\frac{3}{4}\overrightarrow{HM}$ a pour coordonnées $\left(0, \frac{3}{4}y\right)$. D'où $\overrightarrow{HM'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HM}$.

2) a) Soit M(x , y) un point du plan.

M appartient à (C) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$, θ appartenant à [0 , 2π] $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 = 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 4$.

D'où l'ensemble (C) est le cercle de centre O et de rayon 2.

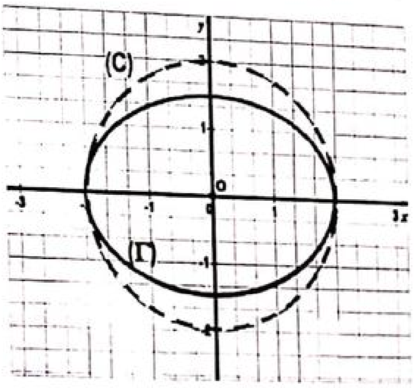
b) Soit M(x , y) un point du plan et M'(x' , y') son image par f.

M appartient à (C) équivaut à $x^2 + y^2 = 4$. C'est-à-dire $x'^2 + \frac{16}{9}y'^2 = 4$.

Ce qui signifie que M' appartient à l'ellipse d'équation réduite : $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$.

(Γ) est l'ellipse : de centre O, de sommets A(2 , 0), A'(-2 , 0), $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$ et $B'\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, de grand axe $(O ; \vec{i})$ et de petit axe $(O ; \vec{j})$, de demi-distance focale $c = \sqrt{4 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, de foyers $F\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right)$ et $F'\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right)$, de directrice les droites $(D) : x = \frac{8}{\sqrt{7}}$ et $(D') : x = -\frac{8}{\sqrt{7}}$, d'excentricité $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

c)



F. Utiliser un changement de repère pour reconnaître une conique

Exercice 33

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x\sqrt{3}}$ et (Γ) sa courbe de représentative.

1) Etudier f et tracer (Γ).

2) On pose : $\vec{u} = \sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$.

a) Déterminer une équation de (Γ) dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) En déduire que (Γ) est une hyperbole et déterminer les coordonnées de ses foyers dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Solution 33

1) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, car fonction rationnelle, et pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2\sqrt{3}}$.

On a $x^2\sqrt{3}>0$, pour tout réel x non nul, d'où le signe de f '(x) est celui de x^2-3.

D'où f '(x) > 0 pour tout x dans $]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[$.

et f '(x) < 0, pour tout x dans $]-\sqrt{3},0[\cup]0,\sqrt{3}[$.

D'où f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,-\sqrt{3}[$ et $]\sqrt{3},+\infty[$.

f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\sqrt{3},0[$ et $]0,\sqrt{3}[$.

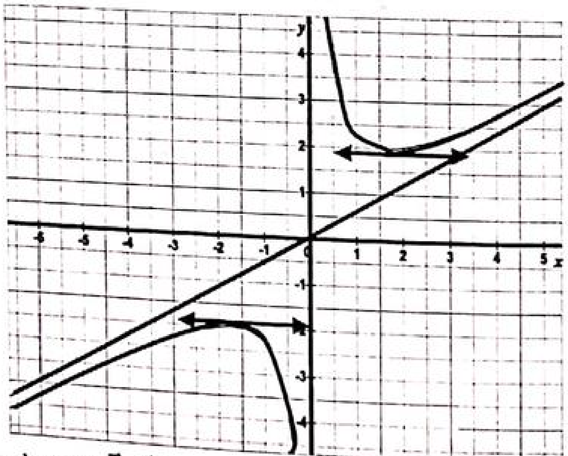
Pour tout réel x non nul, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{x}$.

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$.

D'où le tableau de variations de f qui suit :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
f '(x)	+	0	-	‖	-	0	+
f(x)	$-\infty$ ↗	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right]=0$, d'où la droite d'équation $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$.



2)a) Soit M(x , y) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et M(X , Y) dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On a $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}$ $\Leftrightarrow$ $x\vec{i}+y\vec{j}=X\vec{u}+Y\vec{v}$

$\Leftrightarrow$ $x\vec{i}+y\vec{j}=X(\sqrt{3}\,\vec{i}-\vec{j})+Y(\vec{i}+\sqrt{3}\,\vec{j})$

$\Leftrightarrow$ $x\vec{i}+y\vec{j}=(X\sqrt{3}+Y)\,\vec{i}+(-X+Y\sqrt{3})\,\vec{j}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x=X\sqrt{3}+Y \\ y=-X+Y\sqrt{3} \end{cases}$ (la formule du changement de repère).

Ainsi, M(x , y) appartient à (Γ) $\Leftrightarrow \quad y=\dfrac{x^2+3}{x\sqrt{3}}$.

$$\Leftrightarrow \quad -X+Y\sqrt{3}=\frac{(X\sqrt{3}+Y)^2+3}{(X\sqrt{3}+Y)\sqrt{3}}.$$

$$\Leftrightarrow \quad (-X+Y\sqrt{3})(X\sqrt{3}+Y)\sqrt{3}=(X\sqrt{3}+Y)^2+3$$

$$\Leftrightarrow \quad 6X^2-2Y^2+3=0.$$

D'où une équation de (Γ) dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ est : $6X^2-2Y^2+3=0$, qui s'écrit aussi : $-\dfrac{X^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{Y^2}{\frac{3}{2}}=1$.

b) Une équation de (Γ) dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ est sous la forme : $-\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$, où $a=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ et $b=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$,

d'où (Γ) est une hyperbole de foyers $F(0,\sqrt{2})$ et $F'(0,-\sqrt{2})$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

En utilisant la formule du changement de repère, F a pour coordonnées $(\sqrt{2},\sqrt{6})$ et F' a pour coordonnées $(-\sqrt{2},-\sqrt{6})$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. :

Exercice 34

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit (Γ), l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient l'équation : $x^2+11y^2-10xy\sqrt{3}+16=0$.

1) Soit θ est un nombre réel et $(O;\vec{u},\vec{v})$ le repère orthonormé image du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ par la rotation de centre O et d'angle θ. On désigne par (X , Y) les coordonnées de M dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Déterminer θ pour que l'équation de (Γ) dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ soit sous la forme : $\alpha X^2+\beta Y^2=\sigma$.

2) En déduire la nature de (Γ).

Solution 34

1) Notons R la rotation de centre O et d'angle θ ; U, V, I et J les points du plan tels que :

$$\overrightarrow{OU}=\vec{u},\ \overrightarrow{OV}=\vec{v},\ \overrightarrow{OI}=\vec{i} \text{ et } \overrightarrow{OJ}=\vec{j}.$$

On a R(I) = U et R(J) = V, c'est-à-dire $z_U=e^{i\theta}z_I=\cos\theta+i\sin\theta$ et $z_V=e^{i\theta}z_J=(\cos\theta+i\sin\theta)i=-\sin\theta+i\cos\theta$.

D'où $\vec{u}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$ et $\vec{v}=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$.

Ecrivons une équation de (Γ) dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$:

Soit M(x , y) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et M(X , Y) dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On a $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}$ $\Leftrightarrow \quad x\vec{i}+y\vec{j}=X\vec{u}+Y\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \quad x\vec{i}+y\vec{j}=X(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})+Y(-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j})$$

$$\Leftrightarrow \quad x\vec{i}+y\vec{j}=(X\cos\theta-Y\sin\theta)\vec{i}+(X\sin\theta+Y\cos\theta)\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x=X\cos\theta-Y\sin\theta\\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta\end{cases} \text{ (la formule du changement de repère).}$$

$M(x,y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow \quad x^2+11y^2-10xy\sqrt{3}+16=0$.

$\Leftrightarrow (X\cos\theta-Y\sin\theta)^2+11(X\sin\theta+Y\cos\theta)^2-10(X\cos\theta-Y\sin\theta)(X\sin\theta+Y\cos\theta)\sqrt{3}+16=0$

$\Leftrightarrow X^2(\cos^2\theta+11\sin^2\theta-5\sqrt{3}\sin2\theta)+Y^2(\sin^2\theta+11\cos^2\theta+5\sqrt{3}\sin2\theta)+10XY(\cos2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta)+16=0$

$\Leftrightarrow X^2\left[6(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-5(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-5\sqrt{3}\sin2\theta\right]$

$\quad +Y^2\left[6(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-5(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+5\sqrt{3}\sin2\theta\right]+10XY(\cos2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta)+16=0$

$\Leftrightarrow \quad X^2\left[6-5(\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta)\right]+Y^2\left[6-5(\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta)\right]+10XY(\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta)+16=0$

$\Leftrightarrow \quad X^2\left[6-10\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right]+Y^2\left[6+10\cos\left(2\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\right]+20XY\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+16=0$

D'où une équation de (Γ) dans le repère $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ est :

$$\left[6-10\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right]X^2+\left[6+10\cos\left(2\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\right]Y^2+20XY\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+16=0.$$

Pour que cette équation soit de la forme : $\alpha X^2+\beta Y^2=\sigma$, il suffit de prendre $\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=0$.

C'est-à-dire $2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, avec k dans $\mathbb{Z}$. Donc $\theta=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

D'où si $\theta=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}$, avec k dans $\mathbb{Z}$, alors une équation de (Γ) dans le repère $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ est :

$$\left[6-10\cos\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\right]X^2+\left[6+10\cos\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right]Y^2+16=0$$

Si k est pair, alors $\cos\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et une équation de (Γ) est $\left(\frac{5\sqrt{3}-6}{16}\right)X^2-\frac{3}{8}Y^2=1$.

Si k est impair, alors $\cos\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et l'équation de (Γ) est $-\left(\frac{5\sqrt{3}+6}{16}\right)X^2-\frac{3}{8}Y^2=1$ (impossible).

2) De ce qui précède, lorsque $\theta=\frac{\pi}{12}+k\pi$, avec k dans $\mathbb{Z}$, on déduit de l'équation de (Γ) que (Γ) est une hyperbole.

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 35 — BAC C et E – Cameroun – 2003 — 45 minutes

Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On note la droite (D) d'équation $x = -\frac{3}{2}$ et le point $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

1)a) Ecrire une équation cartésienne de la parabole (P) de foyer F et de directrice (D).

b) Tracer (P)

2) On note $A\left(\frac{3}{2}, 3\right)$, A' le projeté orthogonal de A sur (D) et (Δ) la tangente à (P) en A.

a) Ecrire une équation cartésienne de (Δ).

b) Démontrer que (Δ) est la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AF}})$.

3)a) Préciser la nature du triangle AA'F.

b) En déduire que les points F et A' sont symétriques par rapport à (Δ).

Exercice 36 — 45 minutes

L'intérieur d'une ellipse est la surface délimitée par l'ellipse et contenant ses foyers.

Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, avec $0 < b < a$, dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Définir l'ellipse (E) comme image d'un cercle (C) de centre O par une affinité.

2) On note (C_1) l'ensemble des points de (C) d'ordonnées positives, (E_1) l'ensemble des points de (E) d'ordonnées positives et f la fonction représentée par (C_1) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Donner, à l'aide de f, une équation de (E_1).

b) Calculer l'aire de l'intérieur de l'ellipse en fonction de a et b.

Exercice 37 — 40 minutes

Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan. Soit (H) d'équation $y^2 = x^2 - 4x + 3$.

1) Montrer que (H) est une hyperbole. Indiquer les coordonnées de son centre et de ses sommets, ainsi que les équations de chacune de ses asymptotes.

2) Soit (D_m) la droite d'équation $y = mx$ où m appartient à $\mathbb{R}$.

Montrer que, en général, cette droite coupe (H) en deux points, P_1 et P_2. Cas d'exception ?

3) Quel est l'ensemble des points P milieux des segments $[P_1P_2]$?

Exercice 38 — 50 minutes

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

A tout point M d'affixe non nulle z, on associe le point M' d'affixe $Z = \frac{z^2 + 1}{2z}$.

On note $z = x + iy$, $Z = X + iY$, où x, y, X et Y appartenant à $\mathbb{R}$.

1) Exprimer X et Y en fonction de x et y.

2) Soit $R > 0$, $R \neq 1$, on suppose que le point M d'affixe $z = x + iy$ est sur le cercle (C) de centre O et de rayon R, θ appartient à $[0, 2\pi]$ et θ est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$.

a) Vérifier que $x = R\cos\theta$ et $y = R\sin\theta$.

b) Déduire de la question 1) les expressions de X et Y en fonction de θ et R.

3)a) Ecrire entre X et Y une relation indépendante de θ.

b) En déduire que lorsque M décrit (C), l'ensemble des points M' d'affixe Z est une conique dont on précisera la nature.

On suppose R = 2, tracer la conique obtenue en faisant apparaître ses foyers et directrices.

Exercice 39 — 35 minutes

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 0$.

1) Déterminer les solutions f et g de l'équation différentielle (E), telle que : $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$. $g(0) = 1$ et $g'(0) = 3$

Dresser les tableaux des variations de f et de g.

2) Le plan est muni du repère orthonormé, (C) est la courbe d'équation $\begin{cases} x = 2e^{t} + e^{-t} \\ y = 2e^{t} - e^{-t} \end{cases}$, où le réel t décrit $\mathbb{R}$.

Quelle est la nature de la courbe (C) ? La construire après avoir précisé ses éléments géométriques : sommets, foyers et excentricité.

Exercice 40 — **BAC C et E – Cameroun – 2005** — 45 minutes

Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

On considère les points A(1 , 0), $B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $C\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et la droite (D) d'équation x = 1.

1) Déterminer les coordonnées du point G tel que : $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$.

Quelle est la nature du quadrilatère ABGC ?

2) On note (Γ) l'ensemble des points M(x , y) du plan tels que : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x-1)^2$.

a) Montrer que B et C appartiennent à (Γ).

b) Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M tels que $MG = \sqrt{2}d(M, (D))$, où d(M , (D)) désigne la distance de M à (D).

c) En déduire la nature de (Γ) et préciser ses éléments remarquables.

Représenter (Γ) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 41 — 50 minutes

F et A sont deux points fixes et distincts du plan.

On considère les ellipses dont un foyer est F et A le sommet de l'axe focal le plus proche de F.

1)a) Quel est l'ensemble des points O centres des ellipses (E) ?

b) Soit O un point de cet ensemble et soit (D) la droite perpendiculaire en O à la droite (AF).

Construire (au moyen du compas seulement) les sommets B et B' de l'ellipse (E) appartenant à (D).

2)a) Soit B un sommet du petit axe de l'ellipse (E).

Montrer que B appartient à une parabole (P) de foyer F dont on précisera la directrice (Δ).

b) Déterminer la partie de (P) qui est l'ensemble des points B.

Exercice 42 — **Extrait d'un BAC étranger** — 60 minutes

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère la droite (D) : x = 6 et le point F(8 , 0).

Soit θ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, (Γ_θ) désigne l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\cos\theta}$, H est le projeté orthogonal de M sur (D).

1) Préciser la nature de (Γ_θ) suivant les valeurs de θ.

2) Construire la courbe (Γ_0) correspondant à θ = 0.

3)a) Ecrire une équation cartésienne de la courbe $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ correspondant à $\theta = \frac{\pi}{6}$.

b) Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (foyers, sommets, éléments de symétrie, asymptotes).

c) Construire la courbe $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$.

4) Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 10.

a) Ecrire une équation cartésienne de la courbe (E) transformé de (C) par l'affinité orthogonale ayant pour axe la droite d'équation y = 0 et de rapport $\frac{3}{5}$.

b) Préciser les foyers de (E).

Montrer que les tangentes à $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ et à (E) aux points d'intersection de ces courbes sont perpendiculaires.

Exercice 43 **BAC C et E – Cameroun – 1996** **45 minutes**

Dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', tel que : $z'=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(z-1)$.

1) Démontrer que r est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

2) A tout nombre complexe z différent de 3, on associe le nombre complexe $Z=\frac{z^2}{\overline{z}-3}$.

On note (E) l'ensemble des points M du plan d'affixe z, telle que Z soit un nombre réel.

a) Démontrer que (E) est une droite ou une hyperbole (H) dont on déterminera le centre Ω, les foyers, les directrices et l'excentricité.

b) Tracer (H) dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$.

3) Démontrer que l'image de (H) par r est une conique (H').
Préciser sa nature, son centre et son excentricité.

Exercice 44 **BAC C et E – Cameroun – 2009** **30 minutes**

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit (D) la droite d'équation x = 2. Les points M et F du plan (P) ont pour affixes respectives z et 1 – i.
1) Exprimer en fonction de z, la distance de M à la droite (D).
2) On suppose $z+\overline{z}-4\neq 0$. Pour tout réel m strictement positif, (Γ_m) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est solution de l'équation (E_m) suivante : $|z-1+i|-m|z+\overline{z}-4|=0$.

a) Déterminer suivant les valeurs de m la nature de (Γ_m).
b) Pour m = 1, donner les éléments caractéristiques de (Γ_1).

Exercice 45 **35 minutes**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la droite (D) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{3}t \\ z=2t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Γ est le cône d'axe $(O;\vec{i})$ et de génératrice la droite (D).
1) Montrer qu'une équation de Γ est $y^2+z^2=7x^2$.
2) Donner une équation et reconnaître la nature de (C) intersection de Γ et du plan (P) dans chacun des cas suivants :
a) (P) a pour équation z = 1.
b) (P) a pour équation $x=\sqrt{7}$.
c) (P) a pour équation $y=x\sqrt{7}+1$.
d) (P) a pour équation z = 3x + 1.

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

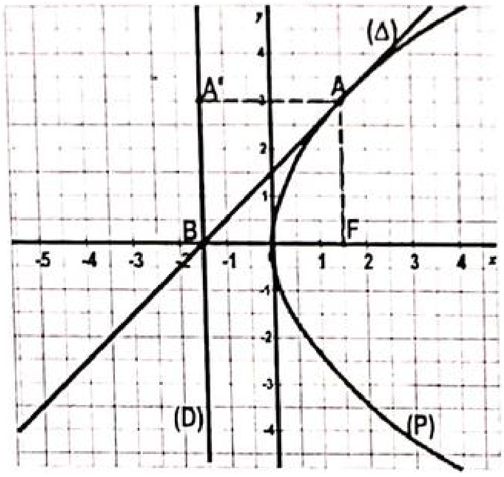
Solution 35

1)a) Soit M(x , y) un point du plan.

M(x , y) appartient à (P) $\Leftrightarrow$ MF = d(M , (D)) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{3}{2}\right|$ $\Leftrightarrow$ $y^2 = 6x$.

D'où (P) est la parabole d'équation $y^2 = 6x$.

b) (P) est une parabole de sommet O, d'axe de symétrie la droite $(O\,;\vec{i})$.



2)a) Soit M(x , y) un point du plan.

M(x , y) appartient à (Δ) $\Leftrightarrow$ $y_0(y-y_0)=3(x-x_0)$ $\Leftrightarrow$ $3(y-3)=3\left(x-\frac{3}{2}\right)$ $\Leftrightarrow$ $y=x+\frac{3}{2}$.

D'où (Δ) est la droite d'équation $y=x+\frac{3}{2}$.

b) $\vec{i}+\vec{j}$ est un vecteur directeur de (Δ) et son affixe est 1 + i.

$\frac{1+i}{z_{A'}-z_A}=\frac{1+i}{-3}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i$. Donc $\arg\left(\frac{1+i}{z_{A'}-z_A}\right)\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

Or $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AA'},\vec{i}+\vec{j}})\equiv\arg\left(\frac{1+i}{z_{A'}-z_A}\right)[2\pi]$, alors $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AA'},\vec{i}+\vec{j}})\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

$\frac{z_F-z_A}{1+i}=\frac{-3i}{1+i}=-\frac{3}{2}(1+i)$. Donc $\arg\left(\frac{z_F-z_A}{1+i}\right)\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

Or $\text{mes}(\widehat{\vec{i}+\vec{j},\overrightarrow{AF}})\equiv\arg\left(\frac{z_F-z_A}{1+i}\right)[2\pi]$, alors $\text{mes}(\widehat{\vec{i}+\vec{j},\overrightarrow{AF}})\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$. D'où $(\widehat{\overrightarrow{AA'},\vec{i}+\vec{j}})=(\widehat{\vec{i}+\vec{j},\overrightarrow{AF}})$.

Enfin, la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{i}+\vec{j}$ est la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AF}})$.

Or $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$, alors A appartient à (Δ), donc (Δ) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{i}+\vec{j}$.

Par conséquent, (Δ) est la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AF}})$.

3)a) On a : AA' = 3, AF = 3 et $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AF}=0$ ***(le lecteur fera les calculs).***
D'où AA'F est un triangle rectangle et isocèle de sommet A.

b) (Δ) est la bissectrice de l'angle A'AF et le triangle AA'F est isocèle de sommet A.
D'où (Δ) est la médiatrice du segment [A'F]. Donc A' et F sont symétriques par rapport à (Δ).

Solution 36

1) (E) est l'ellipse de sommets A(a , 0) et A'(-a , 0) situés sur son grand axe.

L'ellipse (E) est l'image du cercle (C) de diamètre [AA'] par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $\frac{b}{a}$.

En effet, soit M(x , y) un point du plan muni d'un repère orthonormé dont l'axe des abscisses est l'axe (AA').

Le projeté orthogonal de M sur (AA') est le point H(x , 0).

Soit M'(x' , y') l'image de M par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $\frac{b}{a}$, on a :

$$\overrightarrow{HM'}=\frac{b}{a}\overrightarrow{HM}. \quad \text{C'est-à-dire} \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{b}{a}y \end{cases}. \quad \text{Soit alors} \begin{cases} x=x' \\ y=\frac{a}{b}y' \end{cases}.$$

Ainsi, $M(x , y)\in (C) \Leftrightarrow x^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow x'^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2 y'^2=a^2 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow M'\in (E)$

D'où (E) est l'image du cercle (C) par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $\frac{b}{a}$.

2) Soit M(x , y) un point du plan,

$M\in (C_1) \Leftrightarrow$ M appartient à (C) avec $y\geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2=a^2$, avec $y\geq 0 \Leftrightarrow y=\sqrt{a^2-x^2}$.

D'où $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$

a) (E_1) est l'image de (C_1) par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $\frac{b}{a}$.

Ainsi, soit M(x , y) un point du plan et M'(x' , y') son image par l'affinité d'axe (AA') et de rapport $\frac{b}{a}$.

M appartient à $(C_1) \Leftrightarrow y=f(x) \Leftrightarrow \frac{a}{b}y'=f(x') \Leftrightarrow y'=\frac{b}{a}f(x')$. D'où une équation de (E_1) est : $y=\frac{b}{a}f(x)$.

b) Notons Δ l'intérieur de l'ellipse (E) et Δ_1 la partie de Δ située au-dessus de l'axe des abscisses.

On a : $\text{aire}(\Delta)=2\text{aire}(\Delta_1)=2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}f(x)dx=2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}f(x)dx$.

Or $\int_{-a}^{a}f(x)dx$ est l'aire du demi-disque délimité par (C) situé au-dessus de l'axe des abscisses.

Ainsi, puisque (C) est le cercle de centre O et de rayon a, $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{\pi a^2}{2}$. D'où $\text{aire}(\Delta)=2\times\frac{b}{a}\times\frac{\pi a^2}{2}=\pi ab$.

Solution 37

1) Soit M(x , y) un point du plan.

$M(x , y)\in (H) \Leftrightarrow y^2=x^2-4x+3 \Leftrightarrow y^2=(x-2)^2-1 \Leftrightarrow (x-2)^2-y^2=1.$

Soit $\Omega(2 , 0)$, dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de (H) est : $X^2-Y^2=1$ dans le repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$.

D'où (H) est l'hyperbole équilatère de centre $\Omega(2 , 0)$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, de sommets A(1 , 0), A'(-1 , 0) dans le repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$, d'asymptotes les droites d'équations : Y = X et Y = - X, dans le repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$.

2) M(x , y) appartient à $(H)\cap(D_m) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x^2-4x+3 \\ y=mx \end{cases}$ (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} (1-m^2)x^2-4x+3=0 \\ y=mx \end{cases}$.

Considérons l'équation : $(1-m^2)x^2-4x+3=0$ (1)

Pour m = 1 : on a $x=\frac{3}{4}$ et $y=\frac{3}{4}$. Donc $(H)\cap(D_1)=\left\{B\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)\right\}$.

Pour m = -1 : $(H)\cap(D_{-1})=\left\{B\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\right)\right\}$.

Pour $m\neq 1$ et $m\neq -1$: le discriminant de l'équation (1) est : $\Delta = 4\,(3m^2+1)>0$.
D'où l'équation (1) admet deux solutions distinctes. Par conséquent le système (2) admet deux couples solutions.
(H) et (D_m) se rencontrent donc en deux points distincts P_1 et P_2.
Conclusion : (H) et (D_m) se rencontrent en deux points distincts P_1 et P_2 sauf pour les valeurs $m_1 = 1$ et $m_2 = -1$ de m.

3) Soit P milieu de $[P_1P_2]$.

$$x_P=\frac{x_{P_1}+x_{P_2}}{2}=\frac{S}{2}=\frac{4}{2(1-m^2)}=\frac{2}{1-m^2}\ \text{ et }\ y_P=\frac{y_{P_1}+y_{P_2}}{2}=\frac{mx_{P_1}+mx_{P_2}}{2}=\frac{m(x_{P_1}+x_{P_2})}{2}=\frac{mS}{2}=\frac{2m}{1-m^2},\text{ où}$$

S est la somme des racines de l'équation (1). D'où P a pour coordonnées $\left(\frac{2}{1-m^2},\frac{2m}{1-m^2}\right)$.

Or $m=\frac{y_P}{x_P}$, alors $x_P=\dfrac{2}{1-\left(\frac{y_P}{x_P}\right)^2}$. C'est-à-dire $x_P=\dfrac{-2x_P{}^2}{y_P{}^2-x_P{}^2}$ où $x_P\neq 0$.

Ce qui équivaut à $y_P{}^2-x_P{}^2=-2x_P$, et enfin à $(x_P-1)^2-y_P^2=1$.

D'où P décrit l'hyperbole d'équation $(x-1)^2-y^2=1$ de centre $\Omega'(1,0)$, de sommets $C(2,0)$ et $C'(0,0)$, d'asymptotes les droites d'équations $y = x-1$ et $y=-x+1$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Point méthode :

On peut trouver les coordonnées de A et A' et les équations des asymptotes dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Il suffit de faire un changement de repère. Pour cela, on procède comme suit :
Soit M le point de coordonnées (x , y) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et (X , Y) dans le repère $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$.

On a : $\begin{cases}x=2+X\\ y=Y\end{cases}$ *(formule de changement de repère).*

D'où les coordonnées de A et A' dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ sont : A(3 , 0) et A'(1 , 0).
Les équations des asymptotes dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ sont : $y= x-2$ et $y=-x+2$.

Solution 38

1) Soit $z = x+iy$ et $Z = X+iY$, x, y X et Y sont des nombres réels. On a :

$$X+iY=\frac{z^2+1}{2z}=\frac{(x+iy)^2+1}{2(x+iy)}=\frac{(x^2-y^2+1)+2ixy}{2(x+iy)}=\frac{\left[(x^2-y^2+1)+2ixy\right](x-iy)}{2x^2+2y^2}=\frac{x(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)}+\frac{y(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)}i.$$

D'où, $X=\frac{x(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)}$ et $Y=\frac{y(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)}$.

2)a) Soit M(x , y) un point du cercle (C) de centre O et de rayon R, on a :

$\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}=OM\times\|\vec{i}\|\cos(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})=R\cos\theta$ et $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j}=OM\times\|\vec{j}\|\cos(\widehat{\vec{j},\overrightarrow{OM}})=R\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)=R\sin\theta$.

Or $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}=(x\vec{i}+y\vec{j})\cdot\vec{i}=x$ et $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j}=(x\vec{i}+y\vec{j})\cdot\vec{j}=y$. D'où $x = R\cos\theta$ et $y = R\sin\theta$.

b) • $X=\frac{x(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)}=\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)$. D'où $X=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{R^2}\right)R\cos\theta=\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta$.

• $Y=\frac{y(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)}=\frac{y}{2}\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$. D'où $Y=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{R^2}\right)R\sin\theta=\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$.

3)a) On a $X=\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta$ et $Y=\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$.

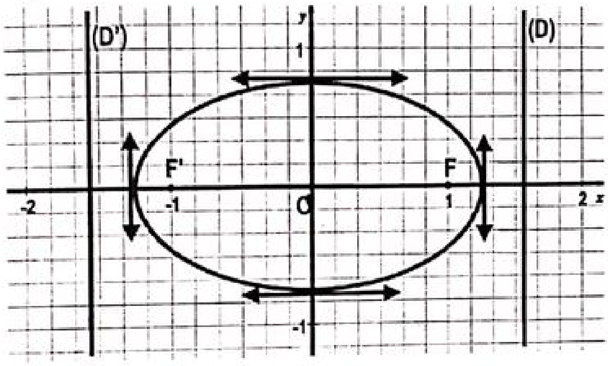
D'où, $\cos\theta = \dfrac{X}{\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)}$ et $\sin\theta = \dfrac{Y}{\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)}$.

Par suite, $\dfrac{X^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2} + \dfrac{Y^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Finalement, $\dfrac{X^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2} + \dfrac{Y^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2} = 1$.

b) • Lorsque M décrit le cercle (C), M' décrit l'ellipse de centre O, de sommets

$$A\left(\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right),0\right),\ A'\left(-\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right),0\right),\ B\left(0,\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)\right) \text{ et } B'\left(0,-\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)\right).$$

• Pour R = 2, M' décrit l'ellipse d'équation $\dfrac{X^2}{\left(\frac{25}{16}\right)} + \dfrac{Y^2}{\left(\frac{9}{16}\right)} = 1$, de centre O, de sommet $A\left(\frac{5}{4},0\right)$, $A'\left(-\frac{5}{4},0\right)$, $B\left(0,\frac{3}{4}\right)$ et $B'\left(0,-\frac{3}{4}\right)$, de foyers F(1 , 0) et F'(-1 , 0), de directrices, les droites $(D): X = \frac{25}{16}$ et $(D'): X = -\frac{25}{16}$.



Solution 39

1) L'équation caractéristique de (E) est $r^2 - 1 = 0$ qui a pour racines -1 et 1.

Les solutions de l'équation (E) : $y'' - y = 0$ sont les fonctions h avec $h(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$ avec A, B appartiennent à $\mathbb{R}$.

Pour tous réels A et B, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $h'(x) = Ae^{x} - Be^{-x}$.

• D'où puisque f est solution de (E), il existe deux réels A et B tels que pour tout réel x, $f(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$.

Et $f(0) = 3$ équivaut à $A + B = 3$ (1).

$f'(0) = 1$ équivaut à $A - B = 1$ (2).

Des égalités (1) et (2), on déduit que A = 2 et B = 1. D'où pour tout réel x, $f(x) = 2e^{x} + e^{-x}$.

• f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour réel x, $f'(x) = g(x)$.

Or $g(x) > 0$ équivaut à $e^{2x} > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $x > -\frac{1}{2}\ln 2$. Et $g(x) < 0$ équivaut à $x < -\frac{1}{2}\ln 2$.

D'où f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\ln 2\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}\ln 2, +\infty\right[$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. D'où le tableau de variations de f qui suit :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}\ln 2$		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

• g est solution de (E), donc il existe deux réels A et B tels que pour tout réel x, $g(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$.

Et $g(0) = 1$ équivaut à $A + B = 1$. (1)

$g'(0) = 3$ équivaut à $A - B = 3$. (2)

Des égalités (1) et (2), on déduit que A = 2 et B = - 1. D'où pour tout réel x, $g(x) = 2e^{x} - e^{-x}$.

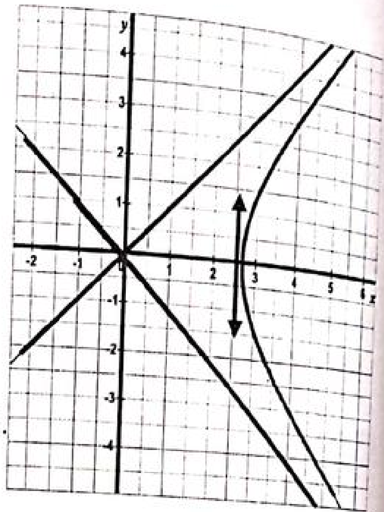
- g est définie sur $\mathbb{R}$ et pour réel x, $g'(x) = f(x) > 0$. D'où g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

D'où le tableau de variation de g qui suit :

x	$-\infty$	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) Soit un nombre réel t, on a :



$\begin{cases} x = 2e^t + e^{-t} \\ y = 2e^t - e^{-t} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} e^t = \dfrac{x+y}{4} \\ e^{-t} = \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$.

D'où $\left(\dfrac{x+y}{4}\right) \times \left(\dfrac{x-y}{2}\right) = e^t e^{-t} = 1$.

Or $\left(\dfrac{x+y}{4}\right) \times \left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{8}$, alors $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{8} = 1$.

D'où la courbe (C) est contenue dans l'hyperbole (H) d'équation $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{8} = 1$.

Or d'après la question 1), lorsque t varie dans $\mathbb{R}$, x décrit l'intervalle $[2\sqrt{2}, +\infty[$ et y décrit $\mathbb{R}$.

Finalement, (C) est la partie de l'hyperbole (H) dans $[2\sqrt{2}, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Solution 40

1) • $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$ si et seulement si G a pour coordonnées (2 , 0).

• $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$, donc le quadrilatère ABGC est un parallélogramme.

Or $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (0 , -1) et $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées (1 , 0).

D'où $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \times 1 + (-1) \times 0 = 0$ et BC = AG = 1.

Finalement, ABGC est un parallélogramme à diagonales perpendiculaires et de même longueur, c'est-à-dire ABGC est un carré.

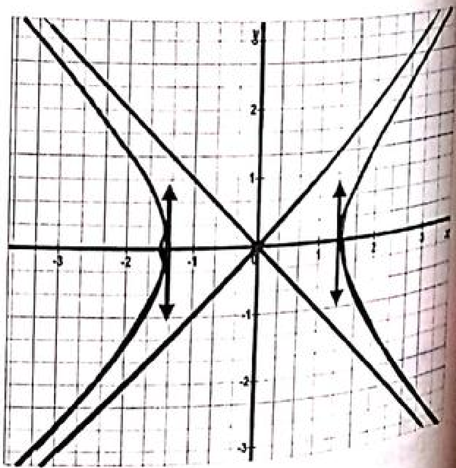
2)a) • Si on remplace M par B dans $-MA^2 + MB^2 + MC^2$, on a : $-BA^2 + BC^2 = \dfrac{1}{2}$.

Or $2\left(\dfrac{3}{2} - 1\right)^2 = \dfrac{1}{2}$, alors B appartient à (Γ).

• Si on replace M par C dans $-MA^2 + MB^2 + MC^2$, on a :

$-CA^2 + BC^2 = \dfrac{1}{2}$.

Or $2\left(\dfrac{3}{2} - 1\right)^2 = \dfrac{1}{2}$, alors C appartient à (Γ).



b) $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$ équivaut à $-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

D'où G est le barycentre du système {(A , -1), (B , 1), (C , 1)}.

On a alors : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = MG^2 - GA^2 + GB^2 + GC^2 = MG^2$ (car ABGC étant un carré, $GA^2 = GB^2 + GC^2$).

Ainsi, $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x-1)^2$ équivaut à $MG^2 = 2(x-1)^2$.

Or $d(M,(D)) = |x-1|$, alors on a $MG^2 = 2[d(M,(D))]^2$.

C'est-à-dire $MG = \sqrt{2}d(M,(D))$.

c) D'après la question 2), $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x-1)^2$ équivaut à $MG = \sqrt{2}d(M,(D))$.

Alors (Γ) est l'hyperbole de foyer G, d'excentricité $\sqrt{2} > 1$ et de directrice (D).

Le tracé de (Γ) : ***le lecteur pourra retrouver et utiliser l'équation de (Γ) qui est : $x^2 - y^2 = 2$.***

Solution 41

1)a) (E) étant une ellipse, les points O, F, A sont alignés et F appartient à [OA].

D'où O appartient à la demi-droite de support (AF), d'origine F, ne contenant pas A et privée de F.

Et tout point de cette demi-droite est centre d'une ellipse de foyer F et de sommet A.

Donc l'ensemble des points O centres des ellipses (E) est cette demi-droite.

b) Pour la construction de B et B' :

Posons OA = a, OF = c et OB = OB' = b.

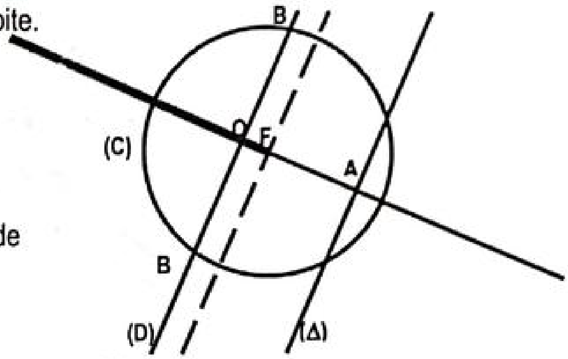
On a alors $c^2 = a^2 - b^2$.

Or le triangle OFB est un triangle rectangle en O.

Alors $FB^2 = OF^2 + OB^2 = c^2 + b^2 = a^2 - b^2 + b^2 = a^2$.

Ainsi FB = a. Par conséquent, B appartient au cercle (C) de centre F.et de rayon OA.

Finalement, B et B' sont les points de rencontre de (D) et (C).



2)a) Soit (Δ) la droite passant par A et perpendiculaire à (AF), on a : d(B , (Δ)) = OA = a.

Or à la question 1)b), on a montré que FB = a. D'où FB = d(B , (Δ)).

B appartient alors à la parabole (P) de foyer F et de directrice (Δ).

b)
- O et B sont situés dans le même demi-plan (Q) de frontière la perpendiculaire passant par F à la droite (AF).
- Soit M un point de la parabole dans le demi-plan (Q), O son projeté orthogonal sur (AF).

O est le centre d'une ellipse (E) (car O est sur la demi-droite de la question 1)a)), de foyer F, de sommet sur l'axe focal A, M = B ou M = B', sommets sur le petit axe.

Donc tout point de la parabole (P) dans le demi-plan (Q) est un sommet sur le petit axe d'une une ellipse (E).

D'où l'ensemble des points B est la partie de la parabole (P) dans le demi-plan (Q).

Solution 42

1) Si θ = 0 alors, on a $\frac{1}{\cos\theta} = 1$. C'est-à-dire $\frac{MF}{MH} = 1$, qui équivaut à MF = d(M , (D)).

D'où (Γ_0) est une parabole de foyer F et de directrice (D).

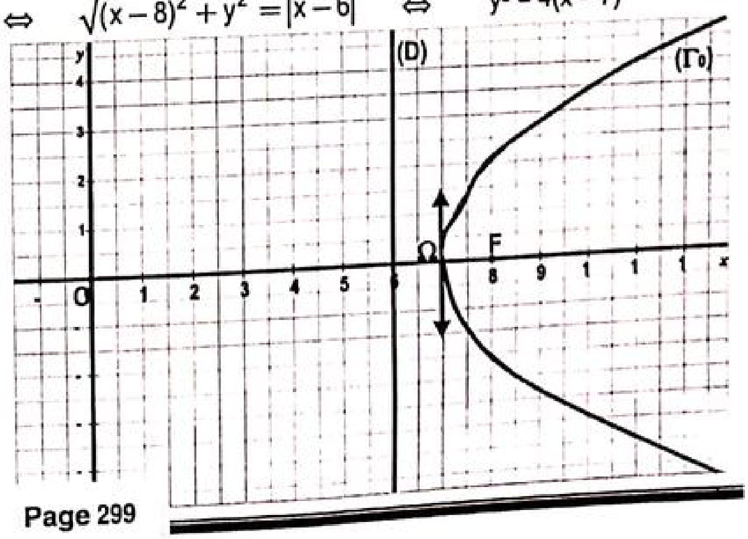
Si θ appartient à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $\frac{1}{\cos\theta}$ appartient à $]1, +\infty[$.

(Γ_θ) est donc une hyperbole de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité $\frac{1}{\cos\theta}$.

2) Soit M(x , y) un point du plan.

M(x , y) appartient à (Γ_0) $\Leftrightarrow$ MF = d(M , (D)) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{(x-8)^2 + y^2} = |x-6|$ $\Leftrightarrow$ $y^2 = 4(x-7)$

(Γ_0) est une parabole de sommet Ω(7 , 0), d'axe de symétrie l'axe $(O;\vec{i})$.



3)a) Soit M(x , y) un point du plan.

$$\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow MF = \frac{2}{\sqrt{3}}d(M,(D))$$

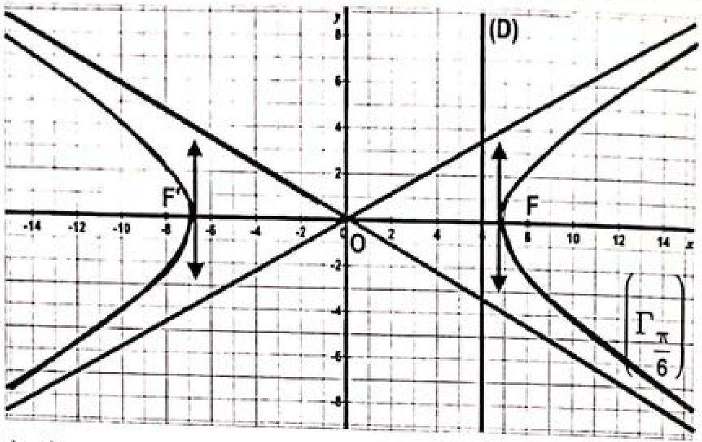
$$\Leftrightarrow (8-x)^2 + y^2 = \frac{4}{3}(x-6)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

$\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ est donc l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{16}=1$, donnée dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

b) $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ est l'hyperbole de centre O, de sommets $A(4\sqrt{3},0)$ et $A'(-4\sqrt{3},0)$, d'asymptotes les droites d'équations $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ et $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$, de foyers F(8 , 0), F'(-8 , 0) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, d'axe transverse $(O;\vec{i})$ et d'axe principal $(O;\vec{j})$.

c)



4)a) Soit M(x , y) un point du plan.
M(x , y) appartient à (C) $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2=100$.

Déterminons l'expression analytique de l'affinité f d'axe $(O;\vec{i})$ et de rapport $\frac{3}{5}$.

Soit M(x , y) un point du plan et M'(x', y') = f(M).
Le projeté orthogonal de M sur $(O;\vec{i})$ est le point K(x , 0).

$$f(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{KM'}=\frac{3}{5}\overrightarrow{KM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=0 \\ y'=\frac{3}{5}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{3}{5}y \end{cases}.$$

D'où f est l'application qui à tout point M(x , y) du plan, associe M'(x', y') où : $\begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{3}{5}y \end{cases}$. Et alors $\begin{cases} x=x' \\ y=\frac{5}{3}y' \end{cases}$.

Ainsi, M(x , y) appartient à (C) $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2=100$ $\Leftrightarrow$ $x'^2+\frac{25}{9}y'^2=100$ $\Leftrightarrow$ $\frac{x'^2}{100}+\frac{y'^2}{36}=1$.

Finalement, M(x , y) appartient à (C) si et seulement si, M' appartient à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.

D'où une équation de (E) est : $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.

b) • La demi-distance focale de l'ellipse est $c=\sqrt{100-36}=8$.
Les foyers de (E) sont alors les points F(8 , 0) et F'(-8 , 0).

• **Déterminons les points d'intersection de (E) et $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$:**

Soit M(x , y) un point du plan.

$$M\in(E)\cap\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{16}=1 \\ \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=48+3y^2 \\ 9x^2+25y^2=900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \text{ et } x=5\sqrt{3} \\ \text{ou } y=3 \text{ et } x=-5\sqrt{3} \\ \text{ou } y=-3 \text{ et } x=5\sqrt{3} \\ \text{ou } y=-3 \text{ et } x=-5\sqrt{3} \end{cases}$$

D'où (E) et $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ se coupent en quatre points $E_1(5\sqrt{3}, 3)$, $E_2(-5\sqrt{3}, 3)$, $E_3(5\sqrt{3}, -3)$ et $E_4(-5\sqrt{3}, -3)$.

Soit $E_i(x_i, y_i)$, avec i dans {1, 2, 3, 4}, un point de rencontre de (E) et $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$:

- La tangente à (E) en E_i a pour équation $\frac{x_i x}{100}+\frac{y_i y}{36}=1$, soit $y=-\frac{9x_i}{25y_i}x+\frac{36}{y_i}$.

La pente de cette tangente est $-\frac{9x_i}{25y_i}$.

- La tangente à $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ en E_i a pour équation $\frac{x_i x}{48}-\frac{y_i y}{16}=1$, soit $y=\frac{x_i}{3y_i}x-\frac{16}{y_i}$.

La pente de cette tangente est $\frac{x_i}{3y_i}$.

Le produit des pentes est : $-\frac{9x_i}{25y_i}\times\frac{x_i}{3y_i}=-\frac{3x_i^2}{25y_i^2}=-1$, car pour tout i dans {1, 2, 3, 4}, on a $\frac{x_i^2}{y_i^2}=\frac{25}{3}$.

D'où les tangentes à (E) et $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ aux points d'intersection de ces courbes sont perpendiculaires.

Solution 43

1) Soit M d'affixe z et M' d'affixe z', son image par r. On a : $z'=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(z-1)=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})z-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$,

$\left|\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right|=1$ et $\arg\left[\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

D'où l'écriture complexe de r est sous la forme z' = az + b, où $a=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ et $b=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$.

Comme $|a|=1$ et $\arg\left(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$, alors r est la rotation d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{3}$ et de centre le point d'affixe z, telle que $z=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})z-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$. Soit $z=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$.

2)a) Soit M(x , y), d'affixe z , un point du plan .

Z est un réel $\Leftrightarrow\quad Z=\overline{Z}$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{z^2}{z-3}=\frac{\overline{z}^2}{\overline{z}-3}$$

$$\Leftrightarrow\quad z^2(\overline{z}-3)=\overline{z}^2(z-3) \qquad \text{avec } z\neq 3$$

$$\Leftrightarrow\quad z^3-\overline{z}^3-3(z^2-\overline{z}^2)=0 \qquad \text{avec } z\neq 3$$

$$\Leftrightarrow\quad (z-\overline{z})(z^2+z\overline{z}+\overline{z}^2)-3(z-\overline{z})(z+\overline{z})=0 \qquad \text{avec } z\neq 3.$$

$$\Leftrightarrow\quad (z-\overline{z})[(z^2+\overline{z}^2)+z\overline{z}-3(z+\overline{z})]=0 \qquad \text{avec } z\neq 3.$$

$$\Leftrightarrow\quad 2iy(2(x^2-y^2)+(x^2+y^2)-6x]=0 \qquad \text{avec } (x , y)\neq(3 , 0).$$

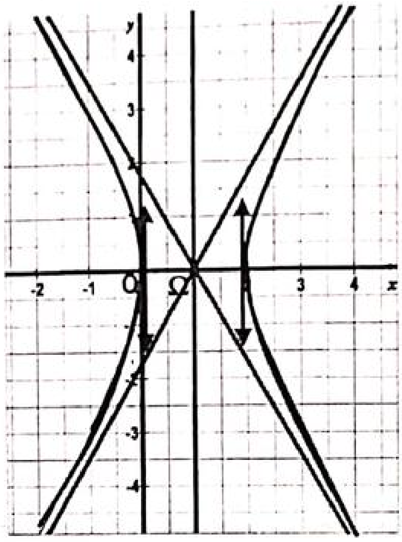
$$\Leftrightarrow\quad y=0 \text{ ou } 3x^2-y^2-6x=0, \qquad \text{avec } (x , y)\neq(3 , 0).$$

$$\Leftrightarrow\quad y=0 \quad\text{ou}\quad (x-1)^2-\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1, \quad \text{avec } (x , y)\neq(3 , 0).$$

D'où Z est un réel si et seulement si M, distinct de B(3 , 0), est sur l'axe des abscisses ou appartient à l'hyperbole

(H) d'équation $(x-1)^2 - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$, de centre $\Omega(1, 0)$. De demi-distance focale $c = \sqrt{1+3} = 2$, de foyers $F(2, 0)$ et $F'(-2, 0)$ dans le repère $(\Omega ; \vec{u}, \vec{v})$, de directrices les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = -\frac{1}{2}$ dans le repère $(\Omega ; \vec{u}, \vec{v})$, d'excentricité e = 2 et d'asymptotes, les droites d'équations : $y = x\sqrt{3}$ et $y = -x\sqrt{3}$ dans le repère $(\Omega ; \vec{u}, \vec{v})$.

b)



3) La rotation transforme toute conique en une conique de même nature et de même excentricité.
D'où (H') image de (H) par r est une hyperbole d'excentricité 2 et de centre $r(\Omega) = O$.

Solution 44

1) Soit M(x , y), la distance de M à la droite (D) est : $|x-2|$.

Or $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, alors la distance de M à la droite (D) est : $\left|\frac{z+\overline{z}}{2} - 2\right|$, soit $\frac{1}{2}|z+\overline{z}-4|$.

2)a) Soit M un point du plan d'affixe z.

M appartient à (Γ_m) si et seulement si, $\frac{|z-1+i|}{|z+\overline{z}-4|} = m$. C'est-à-dire $\frac{d(M,F)}{2d(M,(D))} = m$.

Ce qui équivaut à dire que $\frac{d(M,F)}{d(M,(D))} = 2m$, où F est le point d'affixe 1 – i. Comme F n'appartient pas à (D), alors :

Pour $m = \frac{1}{2}$, (Γ_m) est une parabole.

Pour $m > \frac{1}{2}$, (Γ_m) est une hyperbole.

Pour $m < \frac{1}{2}$, (Γ_m) est une ellipse.

b) Pour m = 1, on a : $\frac{d(M,F)}{d(M,(D))} = 2$.

D'où (Γ_1) est l'hyperbole dont un foyer est F, une directrice est (D) et d'excentricité e = 2.

Solution 45

1) Le sommet du cône Γ est le point de rencontre de (D) et l'axe $(O ; \vec{i})$ qui est O(0 , 0 , 0).

Un point de (D) est $A(1, \sqrt{3}, 2)$ (en posant k = 1).

Γ est donc le cône d'axe $(O ; \vec{i})$, de sommet O et passant par A.

Soit A' le projeté orthogonal de A sur $(O ; \vec{i})$.

On a : $A'(1,0,0)$, $AA'=\sqrt{(1-1)^2+(0-\sqrt{3})^2+(0-2)^2}=\sqrt{7}$ et $OA'=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2+(0-0)^2}=1$.

Notons θ la mesure de l'angle $\widehat{AOA'}$, $\tan\theta=\frac{AA'}{OA'}=\frac{\sqrt{7}}{1}=\sqrt{7}$.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $(O;\vec{i})$. H a pour coordonnées $(x, 0, 0)$.

La distance de M à $(O;\vec{i})$ est : $HM=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{y^2+z^2}$ et $OH=\sqrt{x^2}=|x|$.

M appartient à Γ si et seulement si, $HM=OH\tan\theta$. C'est-à-dire $HM^2=OH^2\times 7$.

Ce qui équivaut à $y^2+z^2=7x^2$. D'où notre cône Γ a pour équation $y^2+z^2=7x^2$.

2)a) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$M(x, y, z)$ appartient à $P\cap\Gamma$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y^2+z^2=7x^2 \\ z=1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 7x^2-y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$.

D'où l'intersection (C) de P et Γ a pour équation $7x^2-y^2=1$ dans le plan (P). Cette intersection est donc une hyperbole.

b) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$M(x, y, z)$ appartient à $P\cap\Gamma$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y^2+z^2=7x^2 \\ x=\sqrt{7} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y^2+z^2=49 \\ x=\sqrt{7} \end{cases}$.

D'où l'intersection (C) de P et Γ a pour équation $y^2+z^2=49$ dans le plan (P). Cette intersection est donc un cercle.

c) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$M(x, y, z)$ appartient à $P\cap\Gamma$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y^2+z^2=7x^2 \\ y=x\sqrt{7}+1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (x\sqrt{7}+1)^2+z^2=7x^2 \\ y=x\sqrt{7}+1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -2x\sqrt{7}-1=z^2 \\ y=x\sqrt{7}+1 \end{cases}$

D'où l'intersection (C) de P et Γ a pour équation $-2\sqrt{7}\left(x+\frac{\sqrt{7}}{14}\right)=z^2$ dans le plan (P). Cette intersection est donc une parabole.

d) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$M(x, y, z)$ appartient à $P\cap\Gamma$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y^2+z^2=7x^2 \\ z=3x+1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y^2+(3x+1)^2=7x^2 \\ y=3x+1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2x^2+6x+1+y^2=0 \\ y=3x+1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{7}{2} \\ y=3x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2}=1 \\ y=3x+1 \end{cases}$$

D'où l'intersection (C) de P et Γ a pour équation $\dfrac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$ dans le plan (P). Cette intersection est donc une ellipse.

14 EXEMPLES D'APPLICATIONS DE L'ESPACE

RAPPEL DU COURS

Dans ce cours, E désigne l'espace (affine).

A. Projections

Soit (D) une droite et (P) un plan de l'espace tels que (D) et (P) soient sécants.

- On appelle projection sur (P) parallèlement à (D), l'application :

$$p : E \to E$$

$$M \mapsto M' \text{ tel que } \begin{cases} M' \text{ appartient à (P)} \\ (MM') \text{ est parallèle à (D)} \end{cases}$$

- On appelle projection sur (D) parallèlement à (P), l'application :

$$q : E \to E$$

$$M \mapsto M' \text{ tel que } \begin{cases} M' \text{ appartient à (D)} \\ (MM') \text{ est parallèle à (P)} \end{cases}$$

- Si (D) est perpendiculaire à (P), alors p et q sont des projections orthogonales sur (P) et (D) respectivement.

Remarque :

- ***(P) est l'ensemble des points invariants par p.***
- ***(D) est l'ensemble des points invariants par q.***

B. Homothétie - translation

B_1 – Translation

- Les définitions et propriétés sur la translation dans le plan restent valables dans l'espace.
- L'espace est muni d'un repère.

L'expression analytique d'une translation est sous la forme $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$. Le triplet (a , b , c) représente les coordonnées du vecteur de la translation.

B_2 – Homothétie

- Les définitions et propriétés sur l'homothétie dans le plan restent valables dans l'espace.
- L'espace est muni d'un repère.

L'expression analytique d'une homothétie est sous la forme $\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \\ z' = kz + c \end{cases}$, où k est un réel différent de 0 et 1.

Le rapport de cette homothétie est le réel k et son centre est l'unique point invariant par l'homothétie.

- L'homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale.

Remarque : ***L'homothétie de rapport k :***

- ***transforme une droite en une droite qui lui est parallèle, un plan en un plan qui lui est parallèle, une sphère de rayon R en une sphère de rayon*** $|k| \times R$.

conserve le parallélisme, l'orthogonalité, le barycentre, le milieu d'un segment, l'alignement des points, les formes des figures, le contact…
multiplie les distances par $|k|$, les aire par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

C. Isométries

C_1 – Définition et propriétés

- On appelle isométrie de l'espace toute application de E vers E qui conserve les distances.
- En général, les propriétés sur les isométries dans le plan restent valables dans l'espace.

C_2 – Quelques isométries de l'espace

a) La translation.

b) La symétrie centrale.

c) La rotation autour d'un axe (hors programme).

d) La réflexion :

- On appelle réflexion ou symétrie orthogonale de plan (P), que l'on note $s_{(P)}$, l'application de E vers E qui à tout point M de E associe le point M' de E tel que (P) soit le plan médiateur de [MM'].

C'est-à-dire : $\begin{cases} \text{Le milieu de } [MM'] \text{ appartient à } (P) \\ (MM') \text{ est orthogonale à } (P) \end{cases}$.

- (P) est l'ensemble des points invariants par $s_{(P)}$.
- $s_{(P)}$ est une bijection et sa réciproque est $s_{(P)}^{-1} = s_{(P)}$.
- $s_{(P)} o s_{(P)} = Id_E$.

e) Le demi-tour :

- On appelle demi-tour ou retournement ou symétrie orthogonale d'axe la droite (D), que l'on note $s_{(D)}$, l'application de E vers E qui à tout point M de E associe le point M' de E tel que (D) soit une médiatrice de [MM'].

C'est-à-dire : $\begin{cases} \text{Le milieu de } [MM'] \text{ appartient à } (D) \\ (MM') \text{ est orthogonale à } (D) \end{cases}$.

- (D) est l'ensemble des points invariants par $s_{(D)}$.
- $s_{(D)}$ est une bijection et sa réciproque est $s_{(D)}^{-1} = s_{(D)}$.
- $s_{(D)} o s_{(D)} = Id_E$.

C_3 – Composée de symétries orthogonales

a) Composée de deux réflexions :

Soit (P) et (Q) deux plans.

- Si **(P) et (Q) sont parallèles,** alors $s_{(Q)} o s_{(P)}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$, où A est un point de (P) arbitrairement choisi, et B son projeté orthogonal sur (Q).
- Si **(P) et (Q) sont perpendiculaires,** alors $s_{(Q)} o s_{(P)}$ est un demi-tour d'axe la droite (D), intersection de (P) et (Q).

b) Composée de deux demi-tours :

Soit (D) et (Δ) deux droites.

- Si **(D) et (Δ) sont parallèles,** alors $s_{(\Delta)} o s_{(D)}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$, où A est un point de (D) arbitrairement choisi, et B son projeté orthogonal sur (Δ).
- Si **(D) et (Δ) sont perpendiculaires en un point A,** alors $s_{(\Delta)} o s_{(D)}$ est un demi-tour d'axe la droite (D'), passant par A et orthogonale simultanément à (D) et à (Δ).

c) Composée d'un demi-tour et d'une réflexion :

Soit (P) un plan et (D) une droite perpendiculaire à (P) en A.

- $S_{(D)} \circ S_{(P)}$ est la symétrie centrale de centre A.
- On remarque que, $S_{(P)} \circ S_{(D)} = S_{(D)} \circ S_{(P)} = S_A$.

C_4 – Décomposition d'une translation, d'un demi-tour, d'une symétrie centrale

a) La translation :
Toute translation peut se décomposer d'une infinité de façons, soit en deux réflexions de plans parallèles, soit en deux demi-tours d'axes parallèles.

b) Le demi-tour :
Tout demi-tour d'axe (D) peut se décomposer d'une infinité de façons, soit en deux réflexions de plans perpendiculaires suivant la droite (D), soit en deux demi-tours d'axes perpendiculaires entre eux en A et perpendiculaires à (D) en A.

c) Symétrie centrale :
Toute symétrie centrale de centre A peut se décomposer d'une infinité de façons en une réflexion de plan (P) et un demi-tour d'axe (D), où (D) et (P) sont perpendiculaires en A.

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Etudier les projections

Exercice 1

Soit ABC un triangle équilatéral et (P) un plan non perpendiculaire au plan (ABC).
Préciser la condition pour que le projeté orthogonal de ABC sur (P) soit :
a) Un triangle isocèle.
b) Un triangle équilatéral.

Solution 1

Soit ABC un triangle équilatéral et (P) un plan non perpendiculaire au plan (ABC).
Des trois cas suivants, un va se présenter :
- (ABC) est parallèle à (P).
- un seul côté du triangle ABC est parallèle à P.
- aucun côté de ABC n'est parallèle à P.

1er cas : Si (ABC)// (P), alors l'image du triangle ABC est un triangle A'B'C' de mêmes dimensions que ABC.
D'où A'B'C' est équilatéral.
2e cas : si un seul côté du triangle ABC est parallèle à (P).
Sans nuire à la généralité, supposons (AB) // (P), alors l'image de [AB] est [A'B'] de même longueur que [AB].
Les images [A'C'] et [B'C'] respectives de [AC] et [BC], sont de même longueur.
On a A'C' = B'C', AC = BC et B'C' < AC. Le triangle A'B'C' est donc isocèle.
3e cas : si aucun côté du triangle ABC n'est parallèle à (P), alors [A'B'], [A'C'] et [B'C'] sont des segments de longueurs deux à deux distinctes. Le triangle A'B'C' est donc quelconque.
En définitive :
a) le projeté de ABC est un triangle isocèle si et seulement si un seul de ses côtés est parallèle à (P).
b) le projeté de ABC est un triangle équilatéral si et seulement si le plan (ABC) est parallèle à (P).

Remarque : ***Si deux côtés du triangle sont parallèles à (P), alors (ABC) est parallèle à (P).***

Exercice 2

Soit P : $x + y + z = 3$ un plan. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur P.

Solution 2

Soit p cette projection, $M(x , y , z)$ et $M'(x' , y' , z')$ deux points de l'espace.

$$p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in P \\ \overrightarrow{MM'} \text{ colinéaire à } \vec{n}(1,1,1) \text{ un vecteur normal à } P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'+z'=3 \\ x'-x=k \\ y'-y=k \\ z'-z=k \end{cases}, k\in\mathbb{R}.$$

On obtient alors : $\begin{cases} x+k+y+k+z+k=3 \\ x'=k+x \\ y'=k+y \\ z'=k+z \end{cases}$. Donc $\begin{cases} k=\frac{1}{3}(-x-y-z+3) \\ x'=k+x \\ y'=k+y \\ z'=k+z \end{cases}$. D'où $\begin{cases} x'=\frac{1}{3}(2x-y-z+3) \\ y'=\frac{1}{3}(-x+2y-z+3) \\ z'=\frac{1}{3}(-x-y+2z+3) \end{cases}$.

D'où l'expression analytique de p est : $\begin{cases} x'=\frac{1}{3}(2x-y-z+3) \\ y'=\frac{1}{3}(-x+2y-z+3) \\ z'=\frac{1}{3}(-x-y+2z+3) \end{cases}$.

Exercice 3

Soit (D) la droite de système d'équations : $\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$.

Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur (D).

Solution 3

Une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x = k \\ y = k,\ k \in \mathbb{R} \\ z = k \end{cases}$. Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(1\,,1\,,1)$.

Soit M(x , y , z), M'(x', y', z') des points de l'espace . q la projection orthogonale sur (D).

$$q(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in D \\ \overrightarrow{MM'} \perp \vec{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = k \\ y' = k \\ z' = k \\ (x'-x)+(y'-y)+(z'-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x+y+z) \\ y' = \frac{1}{3}(x+y+z). \\ z' = \frac{1}{3}(x+y+z) \end{cases}$$

D'où q transforme le point M(x , y , z) en le point M'(x', y', z'), où $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x+y+z) \\ y' = \frac{1}{3}(x+y+z). \\ z' = \frac{1}{3}(x+y+z) \end{cases}$

B. Etudier les translations

Exercice 4

Soit (P) : $2x + 3y + z + 2 = 0$ et (P') : $2x + 3y + z - 2 = 0$ deux plans.
1) Montrer que les plans (P) et (P') sont parallèles.
2) En déduire qu'il existe une translation, dont on précisera le vecteur, qui transforme (P) en (P').

Solution 4

1) $\vec{n}(2\,,3\,,1)$ est un vecteur normal à (P) et (P') simultanément, d'où (P) et (P') sont parallèles.

2) • A(0 , 0 , - 2) est un point de (P).
Soit A' son projeté orthogonal sur (P').
Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$, on a t(A) = A'.
Donc t transforme le plan (P) en le plan passant par A' et parallèle à (P), qui est (P').
D'où il existe une translation qui transforme (P) en (P').

• Soit (a , b , c) les coordonnées de A', il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AA'} = k\vec{n}$.
Donc a = 2k, b = 3k et c = k − 2.

Or A' appartient à (P'), donc on aura, $4k + 9k + k - 2 - 2 = 0$. Donc $k = \frac{2}{7}$.

D'où le vecteur de la translation t est $\frac{2}{7}\vec{n}$.

Remarque :
Supposons qu'il existe une translation t qui transforme (P) en (P').
Soit $\vec{u}(a\,,b\,,c)$ son vecteur, t transforme un point M(x , y , z) quelconque de l'espace en le point $M'(x' = x + a, y' = y + b, z' = z + c)$.
M appartient à (P) $\Leftrightarrow$ $2x + 3y + z + 2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $2x' + 3y' + z' + 2 - 2a - 3b - c = 0$
L'image Q de P par t a pour équation $2x + 3y + z + 2 - 2a - 3b - c = 0$.

$(Q) = (P') \Leftrightarrow \quad 2 - 2a - 3b - c = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 2a + 3b + c = 4 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = k \\ b = k' \\ c = 4 - 2k - 3k' \end{cases}$, k et $k' \in \mathbb{R}$.

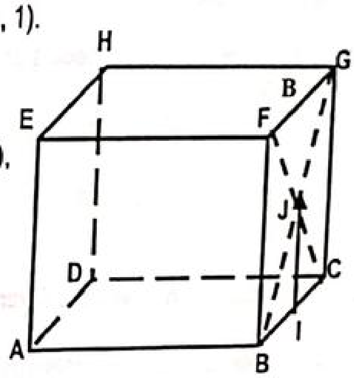
Il existe une infinité de triplets (a , b , c), donc il existe une infinité de translations qui transforment (P) en (P'). Ces translations ont pour vecteurs $\vec{u}(k , k' , 4 - 2k - 3k')$ *, k et k' réels quelconques.*

Exemple : pour $k = k' = 0$, on a $\vec{u}(0 , 0 , 4)$, $t_{\vec{u}}(P) = P'$.

Exercice 5

Soit ABCDEFGH un cube.
On désigne par I le milieu de [BC] et J le centre de la face BCGF.
Déterminer les coordonnées dans le repère (A , B , D , E) des images des sommets du cube par la translation t de vecteur $\vec{IJ}$.

Solution 5



Les coordonnées des sommets sont :
A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), D(0, 1, 0), E(0, 0, 1), F(1, 0, 1), G(1, 1, 1) et H(0, 1, 1).

On remarque que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AE}$. D'où $\vec{IJ}$ a pour coordonnées $\left(0 , 0 , \frac{1}{2}\right)$.

La translation t de vecteur $\vec{IJ}$ transforme le point M(x , y , z) en le point M'(x' , y' , z'),

avec $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + \frac{1}{2} \end{cases}$.

Les images des sommets par t sont :
$A'\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$, $B'\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$, $C'\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$, $D'\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$, $E'\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$, $F'\left(1,0,\frac{3}{2}\right)$, $G'\left(1,1,\frac{3}{2}\right)$ et $H'\left(0,1,\frac{3}{2}\right)$.

C. Etudier les homothéties

Exercice 6

ABCD est un tétraèdre et I, J, K les milieux respectifs de [AB], [AC], [AD].
1) Calculer l'aire du triangle IJK en fonction de celle du triangle BCD.
2) Calculer le volume du tétraèdre ABCD en fonction de celui du tétraèdre AIJK.

Solution 6

> **Point méthode :**
> *L'homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.*

On a $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ et $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AD}$.

D'où I, J et K sont les images respectives de B, C et D par l'homothétie h de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$.

1) D'où l'image de BCD par h est IJK. Et $\text{aire}(IJK) = \frac{1}{4}\text{aire}(BCD)$.

2) De même l'image de ABCD par h est AIJK. D'où $\text{volume}(AIJK) = \frac{1}{8}\text{volume}(ABCD)$.

Exercice 7

Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 2 = 0$ et I le point de coordonnées (1 , 1 , 0).
1) Déterminer le centre et le rayon de (S).
2) Déterminer une équation de la sphère (S') image de (S) par l'homothétie de centre I et de rapport −3

Solution 7

1) Soit x, y et z trois réels, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 2 = 0$ équivaut à $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 4$.
D'où (S) est la sphère de centre A de coordonnées (1, -2 , -1) et de rayon 2.
2) Soit A' l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport -3.
On a : $\overrightarrow{IA'} = -3\overrightarrow{IA}$, donc $(x-1 , y-1 , z) = -3(1-1 , -2-1 , -1-0)$, où (x , y , z) sont les coordonnées de A'.
Donc x = 1, y = 10 et z = 3 et A' a pour coordonnées (1 , 10 , 3).
(S') est la sphère de centre A' et de rayon 3×2 = 6. Une équation de (S') est donc : $(x-1)^2 + (y-10)^2 + (z-3)^2 = 36$

Exercice 8

Un tronc de cône de révolution est tel que l'aire de la grande base (B) est le double de celle de la petite base (B')
Démontrer qu'il existe deux homothéties, dont on précisera les centres et les rapports, transformant (B) en (B').

Solution 8

Soit h une homothétie de rapport k de centre Ω qui transforme (B) en (B').

On a aire(B') = k^2aire(B).

Or d'après l'hypothèse, on a aire(B') $= \frac{1}{2}$aire(B). D'où $k^2 = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit O et O' les centres respectifs de (B) et (B'). On a h(O) = O'. Ainsi :

Si $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors on a $\overrightarrow{\Omega O'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\Omega O}$. C'est-à-dire $\overrightarrow{O\Omega} = (2+\sqrt{2})\overrightarrow{OO'}$. Donc Ω existe et est unique.

Si $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, alors on a $\overrightarrow{\Omega O'} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\Omega O}$. C''est-à-dire $\overrightarrow{O\Omega} = (2-\sqrt{2})\overrightarrow{OO'}$. Donc Ω existe et est unique.

D'où les seules homothéties qui transforment (B) en (B') sont les deux homothéties de rapports $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, et de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 tels que $\overrightarrow{O\Omega} = (2+\sqrt{2})\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{O\Omega} = (2-\sqrt{2})\overrightarrow{OO'}$.

Exercice 9

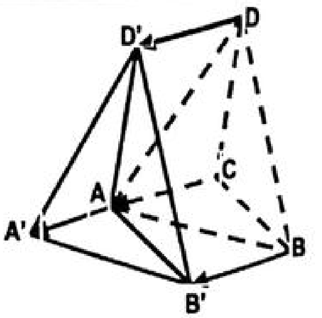
ABCD est un tétraèdre.

Soit h_1 l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et h_2 l'homothétie de centre C et de rapport 2.

1) Construire l'image de ABCD par h_2oh_1.
2) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de h_2oh_1.

Solution 9

1) Soit I milieu de [AB], J celui de [AD] et K celui de [AC],
On a: $h_2oh_1(A) = h_2(A) = A' = s_A(C)$.
$h_2oh_1(B) = h_2(I) = B' = s_I(C)$.
$h_2oh_1(C) = h_2(K) = A$.
$h_2oh_1(D) = h_2(J) = D' = s_J(C)$.



2) Nature de h_2oh_1 :

$2 \times \frac{1}{2} = 1$. D'où h_2oh_1 est une translation.

De plus $h_2oh_1(C) = A$, alors h_2oh_1 est la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

Exercice 10

Soit les points : A(1 , -2 , 1), B(-1 , 0 , 2), A'(0 , 1 , 1) et B'(4 , -3 , -1).
1) Démontrer qu'il existe une homothétie h dont on précisera le centre et le rapport, telle que : A' = h(A) et B' = h(B).
2) Déterminer l'image du point O par h.

Solution 10

1) méthode 1 :

Soit h une homothétie de rapport k, M(x , y , z) et M'(x', y', z') points de l'espace tels que h(M) = M'.

Il existe trois réels a, b et c tels que $\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \\ z' = kz + c \end{cases}$. Ainsi,

$\begin{cases} h(A) = A' \\ h(B) = B' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + a = 0 \ , \ -2k + b = 1 \ , \ k + c = 1 \\ -k + a = 4 \ , \ -3 = b \ , \ 2k + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$ k = -2, a = 2, b = -3 et c = 3.

L'homothétie h, dont l'expression analytique est $\begin{cases} x' = -2x + 2 \\ y' = -2y - 3 \\ z' = -2z + 3 \end{cases}$ transforme A en A' et B en B'

Soit M(x , y , z) un point de l'espace, h(M) = M $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2x + 2 \\ y = -2y - 3 \\ z = -2z + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$.

$\Omega\left(\frac{2}{3}, -1, 1\right)$ est l'unique point invariant par h.

L'homothétie h a donc pour centre $\Omega\left(\frac{2}{3}, -1, 1\right)$ et pour rapport -2.

Méthode 2 :

- Soit h une homothétie de rapport k qui transforme A en A' et B en B'. On aura $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Or $\overrightarrow{A'B'}$ a pour coordonnées (4 , - 4 , - 2) et $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (-2 , 2 , 1).

On remarque que $\overrightarrow{A'B'} = -2\overrightarrow{AB}$. Ainsi, si une homothétie transforme A en A' et B en B', alors son rapport est – 2.

- Soit Ω le centre d'une telle homothétie, on a : $\overrightarrow{\Omega B'} = -2\overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{\Omega A'} = -2\overrightarrow{\Omega A}$.

Le lecteur prouvera alors que les coordonnées de Ω sont $\left(\frac{2}{3}, -1, 1\right)$.

D'où il existe une unique homothétie qui transforme A en A' et B en B'. Son rapport est -2 et son centre Ω.

2) L'image de O par h est O'(2 , -3 , 3).

D. Etudier les symétries orthogonales

Exercice 11

Dans l'espace E rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan P d'équation 2x + y – z + 3 = 0. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P.

1) M étant un point de E de coordonnées (x , y , z), déterminer les coordonnées (x', y', z') du point M' image par s du point M.

2) On considère la droite (D) passant par O et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Déterminer des équations paramétriques de la droite (D'), ensemble des images par s des points de (D).

Solution 11

1) $\vec{n}(2, 1, -1)$ est un vecteur normal de P.

Soit M(x , y , z) et M'(x', y', z') deux points quelconques de l'espace.

s(M) = M' ⇔ P est le plan médiateur de [MM'] $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = k\vec{n} \\ \text{le milieu I de [MM'] appartient à P} \end{cases}$

Ainsi, s(M) = M' $\Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=2k \\ y'-y=k \\ z'-z=-k \\ 2\left(\frac{x'+x}{2}\right)+\frac{y'+y}{2}-\frac{z'+z}{2}+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+2k \\ y'=y+k \\ z'=z-k \\ 2\left(\frac{x+2k+x}{2}\right)+\frac{y+k+y}{2}-\frac{z-k+z}{2}+3=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+2k \\ y'=y+k \\ z'=z-k \\ 6k+4x+2y-2z+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=x-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-2 \\ y'=y-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z-1 \\ z'=z+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z+1 \\ k=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z-1 \end{cases}$$

On obtient alors le système : $\begin{cases} x'=\frac{1}{3}(-x-2y+2z-6) \\ y'=\frac{1}{3}(-2x+2y+z-3) \\ z'=\frac{1}{3}(2x+y+2z+3) \end{cases}$, qui est l'expression analytique de s.

2) Soit A tel que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, on a A(2 , -1 , 1) et (D) est la droite (OA).

Or on a f(O) = O'(-2 , -1 , 1) et $f(A)=A'\left(-\frac{4}{3},-\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right)$.

L'image de (D) est la droite (O'A'). Les coordonnées de $\overrightarrow{O'A'}$ sont $\left(\frac{2}{3},-\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$.

(D') est donc la droite passant par O', dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{O'A'}$.

Une représentation paramétrique de (D') est donc

$\begin{cases} x=\frac{2}{3}k-2 \\ y=-\frac{5}{3}k-1 \\ z=\frac{5}{3}k+1 \end{cases}$, k étant un réel.

Point méthode :

Pour déterminer l'expression analytique d'une réflexion f de plan (P) :

On considère un point M(x , y , z) et M'(x' , y' , z') son image par f.

On traduit analytiquement les propositions :

- *(MM') est perpendiculaire à (P).*
- *Le milieu I de [MM'] appartient à (P).*

De ces deux conditions, on obtient un système d'équations linéaires d'inconnues x', y' et z'.

On exprime enfin x', y' et z' en fonction de x, y et z.

Exercice 12

O est un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

f est l'application qui transforme le point M en le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}-2\lambda\vec{u}$, avec $\lambda=\frac{\overrightarrow{OM}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

Déterminer l'ensemble (P) des points invariants par f.

Transformer l'écriture $(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}).\vec{u}$. Démontrer que f est une réflexion que l'on précisera.

Solution 12

• M est invariant par f $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - 2\dfrac{\overrightarrow{OM}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\vec{u}$

$\Leftrightarrow$ $2(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u})\cdot\vec{u} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u} = 0$ car $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$\Leftrightarrow$ M appartient au plan passant par O dont un vecteur normal est $\vec{u}$.

D'où (P) est le plan passant par O, de vecteur normal $\vec{u}$.

• $(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'})\cdot\vec{u} = (2\overrightarrow{OM} - 2\lambda\vec{u})\cdot\vec{u} = 2\left(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u} - \dfrac{\overrightarrow{OM}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\times\|\vec{u}\|^2\right) = 0$. D'où $(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'})\cdot\vec{u} = 0$.

• Soit I milieu du segment [MM'], **montrons que I appartient à (P).**

On a $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OI}$. Or $(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'})\cdot\vec{u} = 0$, alors $\overrightarrow{OI}\cdot\vec{u} = 0$. C'est-à-dire I appartient à (P).

Vérifions que (MM') est perpendiculaire à (P).

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = -2\lambda\vec{u}$.

D'où $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{u}$, qui est un vecteur normal à (P).
D'où (MM') est orthogonale à (P).
f est donc une réflexion de plan (P)

Point méthode :
Pour montrer qu'une application f est une réflexion :
- *On détermine l'ensemble (P) des points invariants par f. (On doit trouver un plan)*
- *Soit M un point quelconque de l'espace, M' son image par f et I le milieu de [MM']. On vérifie alors que I appartient à (P) et (MM') est perpendiculaire à (P).*

Si les deux conditions précédentes sont satisfaites, alors f est la réflexion de plan (P).

Exercice 13

Dans l'espace E rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ orthonormal.
On donne : A(0 , 0 , -2), B(0 , 1 , -1), C(0 , 0 , 4) et D(0 , -1 , 3).
1) Montrer qu'il existe un unique demi-tour, noté f tel que f(O) = A et f(B) = B.
Caractériser géométriquement ce demi-tour et donner son expression analytique.
2) Soit g l'application de l'espace E vers E qui à tout point M(x , y , z), associe le point M'(x' , y' , z') tel que :
$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = -z+2 \end{cases}$. Démontrer que g est un demi-tour dont on précisera l'axe. Préciser les images de A et B par g.
3) Soit h = fog. Définir analytiquement h.

Solution 13

1) • Soit s_Δ un demi-tour d'axe Δ tel que $s_\Delta(O)$ = A et $s_\Delta(B)$ = B.
B appartient à Δ et Δ est la médiatrice de [OA]. D'où soit I, le milieu de [OA], Δ = (BI).
Vérifions que (BI) est bel et bien la médiatrice de [OA].
Il suffit pour cela, de montrer que (OA) et (BI) sont perpendiculaires.
On a I(0 , 0 , -1), $\overrightarrow{OA}(0\,,0\,,-2)$, $\overrightarrow{BI}(0\,,-1\,,0)$. Donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BI} = 0-0-0 = 0$.
D'où (OA) et (BI) sont orthogonales. D'où Δ existe et est unique. Δ = (BI)
D'où il existe un unique demi-tour f, tel que f(O) = A et f(B) = B. C'est le demi-tour d'axe (BI).

• **Déterminons l'expression analytique de f :**

Soit M(x , y , z) et M'(x' , y' , z') deux points de l'espace. $I\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}, \dfrac{z+z'}{2}\right)$ est le milieu de [MM'].

Une représentation paramétrique de (BI) est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = -k, k\in\mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$.

$$f(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (BI) \\ (MM') \perp (BI) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x'+x}{2}=0 \\ \frac{y+y'}{2}=-k \\ \frac{z+z'}{2}=-1 \\ \overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{BI}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x'+x}{2}=0 \\ \frac{y+y'}{2}=-k \\ \frac{z+z'}{2}=-1 \\ -(y'-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-x \\ y'=y \\ z'=-z-2 \end{cases} \quad k=0.$$

D'où f transforme tout point M(x , y , z) de l'espace en un point M'(x' , y' , z') où $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \\ z'=-z-2 \end{cases}$.

2) • Déterminons l'ensemble des points invariants par g :

Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

$$g(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} y=-y \\ z=-z+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=k \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \text{ k étant un nombre réel.}$$

D'où l'ensemble des points invariants par g est la droite passant par E(0 , 0 , 1) et de vecteur directeur $\vec{i}$.

Soit M' = g(M), on a, $\overrightarrow{MM'}(0,-2y,-2z+2)$ et $\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{i}=0$. D'où (MM') est orthogonale à la (D).

Soit H le milieu de [MM'], on a H(x , 0 , 1) et $\overrightarrow{EH}=x\vec{i}$. D'où H appartient à (D).

D'où g est le demi-tour d'axe (D), la droite passant par E(0 , 0 , 1) et de vecteur directeur $\vec{i}$.

- g(A) est le point A' de coordonnées (0 , 0 , 2 + 2). Soit (0 , 0 , 4)

 g(B) est le point B' de coordonnées (0 , -1 , 1 + 2). Soit (0 , -1 , 3).

3) Soit M(x , y , z) un point de l'espace, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ = g(M) et M'(x' , y' , z') = f(M_1).

On a $\begin{cases} x'=-x_1 \\ y'=y_1 \\ z'=-z_1-2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_1=x \\ y_1=-y \\ z_1=-z+2 \end{cases}$. En remplaçant x_1, y_1 et z_1 dans x', y' et z', on a $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \\ z'=z-4 \end{cases}$.

D'où h transforme tout point M(x , y , z) en un point M'(x' , y' , z') où $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \\ z'=z-4 \end{cases}$.

Point méthode :

1) Pour montrer qu'une application f est un demi-tour :

- ***on détermine l'ensemble (D) des points invariants par f. (On doit trouver une droite)***
- ***soit M un point quelconque de l'espace, M' son image par f et I le milieu de [MM']. On vérifie alors que I appartient à (D) et (MM') est perpendiculaire à (D).***

2) Pour déterminer l'expression analytique d'un demi-tour f d'axe (D) :

On considère un point M(x , y , z) et M'(x', y', z') son image par f.

On traduit analytiquement les propositions : • (MM') est perpendiculaire à (D).

• le milieu I de [MM'] appartient à (D).

De ces deux conditions, on obtient un système d'équations d'inconnues x', y' et z'.

On exprime enfin x', y' et z' en fonction de x, y et z.

E. Etudier les compositions de symétries orthogonales

Exercice 14

ABCDEFGH est un cube de côté 1 et I est le centre de la face EFGH.

L'espace est muni du repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Soit s la réflexion de plan (ACE) et s' la réflexion de plan (CFH).

1) Déterminer analytiquement s et s'.
2)a) Démontrer que les plans (ACE) et (CFH) sont perpendiculaires.
b) En déduire l'expression analytique du demi-tour d'axe (CI).

Solution 14

Les coordonnées des sommets du cube dans le repère donné sont :
A(0 , 0 , 0), B(1 , 0 , 0), C(1 , 1 , 0), D(0 , 1 , 0), E(0 , 0 , 1), F(1 , 0 , 1), G(1 , 1 , 1) et H(0 , 1 , 1).

1) • **Déterminons une équation du plan (ACE) :**

Le vecteur $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AE}$ de coordonnées (1 , - 1 , 0), est un vecteur normal au plan (ACE).

Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

M(x , y , z) appartient à (ACE) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AE})=0$ $\Leftrightarrow$ $x-y=0$.

Une équation du plan (ACE) est : $x-y=0$.

Soit M(x , y , z) et M'(x' , y' , z') deux points de l'espace. $L\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$ est le milieu de [MM'].

$$s(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} L\ \ (ACE) \\ \overrightarrow{MM'}=k(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AE}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+x'}{2}-\frac{y+y'}{2}=0 \\ x'-x=k \\ y'-y=-k \\ z'-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-x+y \\ x'=y \\ y'=x \\ z'=z \end{cases}.$$

D'où s transforme tout point M(x , y , z) de l'espace en un point M'(x' , y' , z') où $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \\ z'=z \end{cases}$.

• **Déterminons une équation du plan (CFH) :**

Le vecteur $\overrightarrow{CF}\wedge\overrightarrow{CH}$ qui a pour coordonnées (-1 , -1 , -1) est normal au plan (CFH).

M(x , y , z) appartient à (CFH) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CM}(\overrightarrow{CF}\wedge\overrightarrow{CH})=0$ $\Leftrightarrow$ $x+y+z=2$.

Une équation cartésienne du plan (CFH) est : $x+y+z=2$.

Soit M(x , y , z) et M'(x' , y' , z') deux points de l'espace. $J\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$ est le milieu de [MM'].

$$s'(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} J\in\ (CFH) \\ \overrightarrow{MM'}=k(\overrightarrow{CF}\wedge\overrightarrow{CH}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x'+y+y'+z+z'=4 \\ x'-x=-k \\ y'-y=-k \\ z'-z=-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{3}(x-2y-2z+4) \\ y'=\frac{1}{3}(-2x+y-2z+4) \\ z'=\frac{1}{3}(-2x-2y+z+4) \end{cases}$$

D'où s' transforme tout point M(x , y , z) de l'espace en un point M'(x' , y' , z') où $\begin{cases} x'=\frac{1}{3}(x-2y-2z+4) \\ y'=\frac{1}{3}(-2x+y-2z+4) \\ z'=\frac{1}{3}(-2x-2y+z+4) \end{cases}$.

2)a) $(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{CF}\wedge\overrightarrow{CH})=-1+1+0=0$. D'où (ACE) et (CFH) sont perpendiculaires.

b) **Nature de sos' :**

C appartient à (ACE)∩(CFH).

De plus, d'une part, I appartient à (FH), d'où I appartient à (CFH).

D'autre part $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EG}$, alors G appartient à (ACE) et la droite (EG) est contenue dans le plan (ACE).

Comme I appartient à (EG) et (EG) est contenue dans (ACE), alors I appartient à (ACE).

On conclut alors que (ACE)∩(CFH) = (CI).

Et puisque (ACE) est perpendiculaire à (CFH), alors sos' = $s_{(CI)}$.

Expression analytique de sos' :

Soit $M(x\,,y\,,z)$ un point de l'espace, $M_1(x_1\,,y_1\,,z_1) = s'(M)$ et $M'(x'\,,y'\,,z') = s(M_1)$.

On a $\begin{cases} x' = y_1 \\ y' = x_1 \\ z' = z_1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(x-2y-2z+4) \\ y_1 = \frac{1}{3}(-2x+y-2z+4) \\ z_1 = \frac{1}{3}(-2x-2y+z+4) \end{cases}$.

En remplaçant x_1, y_1, z_1 dans x', y', z' : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x+y-2z+4) \\ y' = \frac{1}{3}(x-2y-2z+4) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x-2y+z+4) \end{cases}$, qui est l'expression analytique de $s_{(C)}$.

Remarque : ***Pour trouver l'expression analytique de sos', on pouvait juste déterminer l'expression analytique de $s_{(C)}$, en utilisant la méthode indiquée à l'exercice 13.***

Exercice 15

Soit (P) : $2x + y - z = 3$ un plan et (Δ) la droite passant par O, perpendiculaire à (P).

1) Déterminer les expressions analytiques :

a) de la réflexion s_P. b) du demi-tour s_Δ. c) de $s_\Delta \circ s_P$.

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s_\Delta \circ s_P$.

Solution 15

1)a) Soit $M(x\,,y\,,z)$ et $M'(x'\,,y'\,,z')$ deux points de l'espace. $I\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$ est le milieu de [MM'].

$s_P(M) = M' \iff \begin{cases} I \in (P) \\ \overrightarrow{MM'} = k\vec{n} \text{ avec } \vec{n}(2,1,-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x-2y+2z+6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x+2y+z+3) \\ z' = \frac{1}{3}(2x+y+2z-3) \end{cases}$.

Donc s_P transforme tout point $M(x\,,y\,,z)$ en le point $M'(x'\,,y'\,,z')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x-2y+2z+6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x+2y+z+3) \\ z' = \frac{1}{3}(2x+y+2z-3) \end{cases}$.

b) Une représentation paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = 2k \\ y = k \\ z = -k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

Soit $M(x\,,y\,,z)$ et $M'(x'\,,y'\,,z')$ deux points de l'espace. $I\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$ est le milieu de [MM'].

$s_\Delta(M) = M' \iff \begin{cases} I \in \Delta \\ \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x'+x = 4k \\ y'+y = 2k \\ z'+z = -2k \\ 2(x'-x)+(y'-y)-(z'-z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x+2y-2z) \\ y' = \frac{1}{3}(2x-2y-z) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x-y-2z) \end{cases}$.

Donc s_Δ transforme tout point M(x , y , z) en le point M'(x' , y' , z') tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x+2y-2z) \\ y' = \frac{1}{3}(2x-2y-z) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x-y-2z) \end{cases}$

c) Soit M(x , y , z) un point de l'espace. $M_1(x_1 , y_1 , z_1) = s_P(M)$ et $M'(x' , y' , z') = s_\Delta(M_1)$.

On a : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x_1+2y_1-2z_1) \\ y' = \frac{1}{3}(2x_1-2y_1-z_1) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x_1-y_1-2z_1) \end{cases}$ et $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(-x-2y+2z+6) \\ y_1 = \frac{1}{3}(-2x+2y+z+3) \\ z_1 = \frac{1}{3}(2x+y+2z-3) \end{cases}$.

En remplaçant x_1 , y_1 et z_1 par leurs expressions dans x', y', z', on a : $\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y+1 \\ z' = -z-1 \end{cases}$.

Ainsi $s_\Delta o s_P$ transforme tout point M(x , y , z) de l'espace en un point M'(x' , y' , z') où $\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y+1 \\ z' = -z-1 \end{cases}$.

2) M(x , y , z) appartient à $P \cap \Delta$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x=2k \\ y=k \\ z=-k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

P et Δ sont orthogonaux en $\Omega\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. D'où $s_\Delta o s_P$ est une symétrie centrale, de centre $\Omega\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Remarque : *En remarquant que l'expression analytique de $s_\Delta o s_P$ est sous la forme :* $\begin{cases} x' = -x+a \\ y' = -y+b \\ z' = -z+c \end{cases}$*, on peut conclure que $s_\Delta o s_P$ est une symétrie centrale, de centre $\Omega\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$, soit $\Omega\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.*

Exercice 16

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, et soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de E.
On désigne par P le plan affine de E d'équation x + y + z = 3 et par D la droite passant par le point A de coordonnées (0 , 3 , 0), et de vecteur directeur $\vec{j}-\vec{k}$.

1) Montrer que D est contenue dans P.
2) Soit f le demi-tour d'axe D, déterminer le plan P' tel que la composée de la réflexion de plan P suivie de la réflexion de plan P' soit f. Donner une équation de P'.
3) Soit Q le plan parallèle à P' et passant par O.
a) Donner une équation de Q.
b) Déterminer les coordonnées de l'image A' de A par la projection orthogonale sur Q.
c) Déterminer sans nouveaux calculs $s_Q o s_{P'}$, où l'on désigne par s_Q la symétrie orthogonale par rapport à Q.

Solution 16

1) Le vecteur $\vec{n}(1,1,1)$ est normal à P et $\vec{u}(0,1,-1)$ est un vecteur directeur de D.

Or $\vec{n}\cdot\vec{u}=1\times0+1\times1-1\times1=0$. D'où $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$.
Par conséquent, la droite D est parallèle au plan P. De plus, on a : 0 + 3 + 0 = 3, donc A appartient à P.
D est parallèle à P et A est un point commun à D et P. D'où D est contenue dans P.
2) Soit P' le plan contenant D et perpendiculaire à P, $s_P \circ s_{P'}$ est le demi-tour d'axe la droite d'intersection de P et P', qui est D. Alors f = $s_P \circ s_{P'}$, où P' est le plan contenant D et perpendiculaire à P.

Equation de P' :

P' est le plan passant A et de vecteurs directeurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$.
Donc P' est le plan de vecteur normal est $\vec{n}\wedge\vec{u}(-2,1,1)$ et passant par A(0 , 3 , 0).
Une équation de P' est donc -2(x – 0) + (y – 3) + (z – 0) = 0, soit -2x + y + z – 3 = 0.
3)a) Q est parallèle à P' donc un vecteur normal de Q est $\vec{n}\wedge\vec{u}$.
Comme Q passe par O, alors une équation de Q est : -2x + y + z = 0.
b) Soit (x , y , z) les coordonnées de A'.
Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AA'}=k(\vec{n}\wedge\vec{u})$, donc x = -2k , y = k + 3 et z = k.
Or A' appartient à Q, c'est-à-dire -2(-2k) + k + 3 + k = 0.
Alors $k=-\frac{1}{2}$, x = 1, $y=\frac{5}{2}$ et $z=-\frac{1}{2}$. Finalement, le point A' a pour coordonnées $\left(1,\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

c) Puisque Q est parallèle à P', alors $s_Q \circ s_{P'}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AA'}$, de coordonnées (2 , -1 , -1).

Exercice 17

Dans l'espace E rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
1) s est la réflexion de plan P : y + 3z – 5 = 0. Déterminer l'expression analytique de s.
2) Soit l'application affine f de l'espace E vers lui-même qui à tout point M(x , y , z) de E, associe le point

M'(x' , y' , z') de E tel que : $\begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{5}(-4y+3z-3) \\ z'=\frac{1}{5}(3y+4z+1) \end{cases}$.

Montrer que f est une réflexion que l'on caractérisera.
3) Trouver la nature et les éléments caractéristiques de fos par des considérations géométriques.

Solution 17

1) Soit M(x , y , z) et M'(x' , y' , z') deux points de l'espace. $I\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$ est le milieu de [MM'].

$$s(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} I\in(P) \\ \overrightarrow{MM'} \text{ est colinéaire au vecteur normal } \vec{n}(0,1,3) \text{ de P} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I\in P \\ \overrightarrow{MM'}=k\vec{n} \text{ où } k\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y+y'}{2}+3\left(\frac{z+z'}{2}\right)-5=0 \\ x'-x=0 \\ y'-y=k \\ z'-z=3k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{5}(4y-3z+5) \\ z'=\frac{1}{5}(-3y-4z+15) \end{cases}$$

D'où s transforme tout point M(x , y , z) de l'espace en un point M'(x' , y' , z') où $\begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{1}{5}(4y-3z+5) \\ z'=\frac{1}{5}(-3y-4z+15) \end{cases}$.

2) Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

$$f(M)=M \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{5}(-4y+3z-3) \\ z=\frac{1}{5}(3y+4z+1) \end{cases} \Leftrightarrow 3y-z+1=0.$$

D'où l'ensemble des points invariants par f est le plan Q d'équation 3y – z + 1 = 0.

Soit I le milieu de [MM'] où M' = f(M). On a $I\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$.

C'est-à-dire $I\left(x,\frac{y+3z-3}{10},\frac{3y+9z+1}{10}\right)$.

Or, $3y_I-z_I+1=\frac{3y+9z-9}{10}-\frac{3y+9z+1}{10}+1=0$, alors I appartient à Q.

$\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\left(0,\frac{-9y+3z-3}{5},\frac{3y-z+1}{5}\right)$ et $\vec{u}(0,3,-1)$ est un vecteur normal du plan Q.

Or $\overrightarrow{MM'}=\frac{-3y+z-1}{5}(3\vec{j}-\vec{k})=\frac{-3y+z-1}{5}\vec{u}$, alors $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

Par conséquent, (MM') est perpendiculaire à Q.

D'où f est la réflexion de plan Q d'équation 3y – z + 1 = 0.

3) **Etudions les positions relatives des plans P et Q :**

$\vec{n}(0,1,3)$ est un vecteur normal à P et $\vec{u}(0,3,-1)$ est un vecteur normal à Q.

Or $\vec{n}\cdot\vec{u}=0+3-3=0$, alors $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$. Ce qui implique que P et Q sont perpendiculaires.

Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

$$M \text{ appartient à } P\cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} y+3z-5=0 \\ 3y-z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=k \\ y=\frac{1}{5}, \ k\in\mathbb{R}. \\ z=\frac{8}{5} \end{cases}$$

D'où P∩Q est la droite passant par $A\left(0,\frac{1}{5},\frac{8}{5}\right)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}(1,0,0)=\vec{i}$.

D'où fos est le demi-tour d'axe la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{i}$.

Exercice 18

Soit D, D' et D'' trois droites concourantes en O et deux à deux orthogonales. On note S_D, $S_{D'}$ et $S_{D''}$ les demi-tours d'axes respectifs D, D' et D''. Remplir la table de composition ci-dessus :

o	Id	S_D	$S_{D'}$	$S_{D''}$
Id				
S_D				
$S_{D'}$				
$S_{D''}$				

Solution 18

o	Id	S_D	$S_{D'}$	$S_{D''}$
Id	Id	S_D	$S_{D'}$	$S_{D''}$
S_D	S_D	Id	$S_{D''}$	$S_{D'}$
$S_{D'}$	$S_{D'}$	$S_{D''}$	Id	S_D
$S_{D''}$	$S_{D''}$	$S_{D'}$	S_D	Id

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 19 30 minutes

Soit SABCD une pyramide régulière dont la base ABCD est un carré de centre I.
Déterminer les plans et les axes de symétrie de cette pyramide.

Exercice 20 45 minutes

Soit ABCDEFGH un cube de centre O, I le centre de gravité du triangle BCG.
On se propose de déterminer et construire les points d'intersection de (OI) avec les plans des faces du cube.
1) Démontrer que le point d'intersection de la droite (OI) avec le plan (ADH) est le centre de gravité J du triangle AEH.
Placer le point J.
2)a) Démontrer que $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{CI}$.
b) En déduire que les droites (DC) et (IJ) sont sécantes en un point K que l'on précisera.
Placer le point K.
c) Démontrer de même que les droites (EF) et (IJ) sont sécantes en un point L que l'on précisera.
Placer le point L.

Exercice 21 80 minutes

Soit ABCDEF un octaèdre régulier tel que BCDE soit un carré de centre O et dont les faces sont des triangles équilatéraux.
1) Déterminer les plans de symétrie de cet octaèdre.
2) a) Démontrer que (AF) est un axe de symétrie de cet octaèdre.
b) Démontrer que les axes de symétrie du carré BCDE sont des axes de symétrie de l'octaèdre.
c) Soit I et J les milieux respectifs de [AB] et [DF].
Démontrer que (IJ) est axe de symétrie de l'octaèdre.
3) Soit G et G' les centres de gravité respectifs des triangles ABE et CDF.
a) Démontrer que O est milieu de [GG'] et que la droite (GG') est orthogonale aux plans (ABE) et (CDF).
b) La droite (GG') est-elle un axe de symétrie de l'octaèdre ?

Exercice 22 60 minutes

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1, on note I l'isobarycentre du triangle CFH.
1)a) Montrer que le triangle CFH est équilatéral.
b) Montrer que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur de [CH] et au plan médiateur de [CF].
c) En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par I.
2) On note (P) le plan contenant les droites (AB) et (HG) et (P') le plan contenant les droites (AD) et (FG).
On désigne par s et s' les réflexions par rapport aux plans (P) et (P') respectivement.
a) Déterminer l'intersection des plans (P) et (P').
b) Déterminer les images des points C, F et H par s et s' puis par s'os.
3) On considère le repère orthonormé direct (E, H, F, A).
a) Ecrire les équations cartésiennes des plans (P) et (P').
b) Déterminer les expressions analytiques de s et s'.
c) En déduire l'expression analytique de s'os.

Exercice 23 45 minutes

On considère dans le cube ABCDGHEF, les points I et J tels que $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$.

a étant l'arête du cube, on rapporte l'espace au repère orthonormal direct $(A\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ tel que :

$$\overrightarrow{AG} = a\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{AD} = a\vec{j}\ \text{ et }\ \overrightarrow{AB} = a\vec{k}\ .$$

1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{GJ}$ sont orthogonaux.
2) Montrer que les plans (AIB) et (GJH) sont perpendiculaires.
3) Déterminer les coordonnées du point K intersection des droites (AI) et (GJ) ainsi qu'une représentation paramétrique

de la droite (D) passant par K et perpendiculaire au plan (AGF).

4) Soient s_1 et s_2 les réflexions par rapport aux plans (AIB) et (GJH) respectivement.

On pose $\phi = s_1 o s_2$. Donner la nature de Φ et l'ensemble des points invariants par ϕ.

Exercice 24 — **BAC C – Cameroun – 2002** — **35 minutes**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(P_1), (P_2) et (P_3) désignent trois plans ayant pour équations cartésiennes respectives :

$$3x + y - 2z + 2 = 0 \quad ; \quad x - y + z + 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 5y + 4z - 1 = 0.$$

1) Démontrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires, puis déterminer une représentation paramétrique de la droite (D), intersection de (P_1) et (P_2).

2)a) Démontrer que (D) est perpendiculaire à (P_3).

b) En déduire que les trois plans ont un seul point de rencontre.

3) s désigne la réflexion de plan (P_3). (P_1') et (P_2') désignent les images respectives de (P_1) et (P_2) par s.

a) Déterminer l'expression analytique de s dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

b) Démontrer que (P_1') et (P_2') sont perpendiculaires.

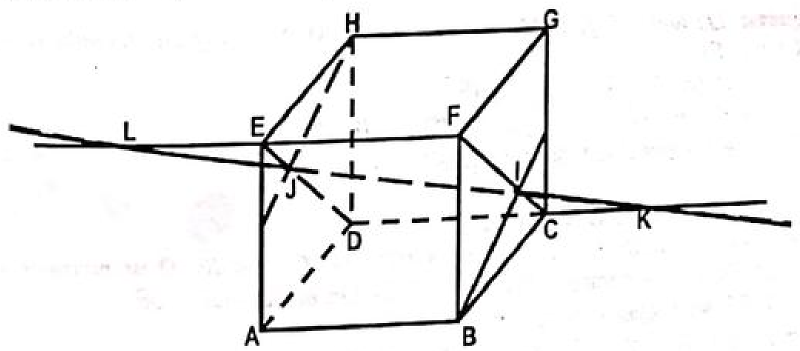
EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

Solution 19

Soit Ω l'isobarycentre des points A, B, C, D et S.
s une symétrie orthogonale laissant invariant l'ensemble {A, B, C, D, S}.
Ω est invariant par s car s conserve l'isobarycentre.
Donc les plans et axes de symétrie de la pyramide passent par Ω.
a) Déterminons les plans de symétrie :
Soit P un plan de symétrie, Ω appartient à P.
Il existe au moins un sommet de la pyramide qui n'appartient pas à P.
Soit N un sommet de la pyramide n'appartenant pas à P, et $N' = s_P(N)$.
N' est un sommet de la pyramide, et P est le plan médiateur du segment [NN'].
D'où tout plan de symétrie sera plan médiateur de deux sommets passant par Ω.
Il existe : • deux plans médiateurs et deux seulement, aux côtés de la base : (SIJ) et (SIK), J et K étant les milieux respectifs des segments [BC] et [CD], qui sont aussi des plans de symétrie de la pyramide.
• deux plans médiateurs et deux seulement, aux diagonales de la base : (SBD) et (SAC), qui sont aussi des plans de symétrie de la pyramide.
• quatre plans médiateurs et quatre seulement, aux faces latérales contenant Ω : ils ne sont pas plans de symétrie de la pyramide.
En conclusion, il existe quatre plans de symétrie à la pyramide SABC : (SIJ), (SIK), (SBD), (SAC)
b) Déterminons les axes de symétrie :
Soit Δ un axe de symétrie à la pyramide, Ω appartient à (Δ).
Il existe au moins un sommet sur l'axe (Δ), car sinon la pyramide aurait un nombre pair de sommets.
D'où tout axe de symétrie est une droite passant par Ω et un sommet de la pyramide.
Or le seul axe passant par Ω et un sommet qui soit axe de symétrie de la pyramide est la droite (ΩS).
D'où le seul axe de symétrie de ABCDS est (ΩS)

Solution 20

1) Soit s_O la symétrie centrale, de centre O.
$s_O(B) = H$, $s_O(C) = E$ et $s_O(G) = A$. D'où s_O transforme BCG en HEA.
D'où le centre de gravité I de BCG est transformé par s_O en le centre de gravité J de AEH.
J appartient à (OI) (car $s_O(I) = J$), d'où J est le point d'intersection de (OI) et (ADH).

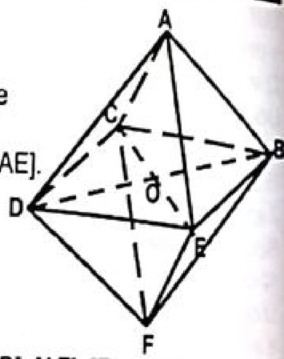


2)a) I est le barycentre de {(B , 1), (G , 1), (C , 1)}.
Soit M le milieu de [BG], I est le barycentre de {(M , 2), (C , 1)}.
M est aussi le milieu de [FC], donc M = bar{(F , 1), (C , 1)}.
Alors I = bar{(F , 1), (C , 1), (C, 1)} = bar{(F , 1), (C , 2)}. Par conséquent, $\overrightarrow{IF} = 2\overrightarrow{CI}$.
Or $s_O(I) = J$ et $s_O(F) = D$, alors $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{DJ}$. Par conséquent, $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{CI}$.
b) $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{CI}$, d'où il existe une homothétie de rapport 2, qui transforme C en D et I en J.
Son centre est le point d'intersection des droites (IJ) et (CD), qui est K.
D'où $\overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{KC}$. K est donc le symétrique de D par rapport à C.

c) On a $\vec{FI} = 2\vec{EJ}$ (on le montre comme au 2)a)).
L est le centre de l'homothétie qui transforme E en F et J en I, car les droites (EF) et (IJ) sont sécantes en un point L, c'est le symétrique de F par rapport à E.

Solution 21

1) O est le centre de l'octaèdre.
Soit P un plan de symétrie de l'octaèdre, O est invariant par s_P. D'où O appartient à P.
s_P laisse invariant l'ensemble des sommets {A, B, C, D, E, F}.



- Si s_P transforme A en F alors P est le plan (BCDE) qui est bel et bien un plan de symétrie de l'octaèdre.
- Si s_P transforme A en B, C, D ou E, alors P est le plan médiateur de [AB], [AC], [AD] ou [AE]. Qui sont bel et bien des plans de symétrie de l'octaèdre.
- Si s_P laisse A invariant, alors puisque P passe par O et (AO) perpendiculaire à (EBC), P est orthogonal à (EBC).

D'où P est le plan médiateur de [BC], [EB], [EC] ou [BD], qui sont bel et bien des plans médiateurs de l'octaèdre.
D'où les plans de symétrie de cet octaèdre sont les plans médiateurs de [EA], [AB], [AC], [AD], [AF], [EB], [BD], [EC] et [BC].

2)a) On a $s_{(AF)}(A) = A$ et $s_{(AF)}(F) = F$.
Or (AF) est perpendiculaire à (EBC) et (AF) passe par O milieu de [EC] et [BD], alors (AF) est une médiatrice de [EC] et [BD]. D'où $s_{(AF)}(E) = C$, $s_{(AF)}(B) = D$, $s_{(AF)}(C) = E$ et $s_{(AF)}(D) = B$. D'où (AF) est un axe de symétrie de cet octaèdre.

Remarque :
On pouvait aussi remarquer que (ABD) est perpendiculaire à (ACE) suivant la droite (AF).
D'où $s_{(AF)} = s_{(ABD)} \circ s_{(ACE)}$.
Et puisque $s_{(ACE)}$ et $s_{(ABD)}$ laissent globalement invariant l'ensemble {E, A, B, C, D, F}, alors $s_{(AF)}$ laisse globalement invariant {E, A, B, C, D, F}. (AF) est donc un axe de symétrie de l'octaèdre.

b) Soit (D) un axe de symétrie de (BCDE) contenu dans le plan (BCDE).
(D) est soit une diagonale du carré, soit une médiatrice d'un côté du carré.
D'où (D) passe par O et est une médiatrice de [AF]. $s_{(D)}$ laisse alors {E, A, B, C, D, F} invariant.
D'où (D) est un axe de symétrie de ABCDEF.

c) ABFD est un carré, I et J étant les milieux de [AB] et [DF], (IJ) est une médiatrice de [AB] et [DF] et passe par O.
De plus, on a : IE = IC et JE = JC, d'où (IJ) est la médiatrice de [EC].
D'où $s_{(IJ)}(A) = B$, $s_{(IJ)}(B) = A$, $s_{(IJ)}(C) = E$, $s_{(IJ)}(D) = F$, $s_{(IJ)}(E) = C$ et $s_{(IJ)}(F) = D$.
D'où (IJ) est axe de symétrie de l'octaèdre.

Note :
Les axes de symétrie analogues à (IJ) sont : (PQ), (KM) et (LN) où K, L, M, N, P et Q sont les milieux respectifs de [AD], [AE], [BF], [CF], [AC] et [EF].

3)a) • On a : O = bar{(A , 1), (B , 1), (E , 1), (D , 1), (C , 1), (F , 1)}.
G = bar {(A , 1), (B , 1), (E , 1)} et G' = {(C , 1), (D , 1), (F , 1)}.
D'où, O = bar {(G , 3), (G' , 3)}. C'est-à-dire O est milieu de [GG']

Remarque :
On pouvait aussi voir que : $s_O(A) = F$, $s_O(B) = D$ et $s_O(E) = C$.
G est l'isobarycentre de A, B, C et G' celui de F, D et E. D'où $s_O(G) = G'$. C'est-à-dire O est milieu de [GG'].

- ABCDEF est un octaèdre régulier de centre O. D'où OA = OB = OE et OD = OC = OF.

D'où les pyramides ABEO et DCFO sont régulières de sommet O.
G et G' étant les centres respectifs de ABE et CDF, (OG) et (OG') sont les hauteurs respectives des pyramides ABEO et CDFO.
Or O, G et G' sont alignés, alors (GG') est orthogonal à (ABE) et (CDF).

b) Posons $A' = s_{(GG')}(A)$.
On a $A' = s_G(A)$ car (GG') orthogonale à (ABE). D'où $\overline{GA'} = -\overline{GA}$. D'où A' n'appartient pas à l'octaèdre.
(GG') n'est donc pas un axe de symétrie de l'octaèdre.

Solution 22

1)a) [CF], [FH] et [CH] sont les diagonales respectives des carrés BCGH, EFGH et CDHG de même côté 1.
D'où CF = FH = CH et CFH est un triangle équilatéral.

b) AC = AH, GC = GH et IC = IH. D'où A, G et I appartiennent au plan médiateur du segment [CH].

De même AF = AC, GF = GC et IF = IC. D'où A, G et I appartiennent au plan médiateur du segment [CF].
De même AF = AC, GF = GC et IF = IC. D'où A, G et I appartiennent aux plans médiateurs de [CH] et [CF].

c) A, G et I appartiennent aux plans médiateurs de [CH] et [CF].
D'où (AG) et (AI) sont orthogonales à (CH) et à (CF). C'est-à-dire, (AG) et (AI) sont orthogonales au plan (CFH).
(AG) et (AI) sont donc les droites passant par A et orthogonales à (CFH).
D'où (AG) et (AI) sont confondues et orthogonales à (CFH).
(AG) est donc orthogonale à (CFH) et passe par I.

2)a) A et G appartiennent aux plans (P) et (P'), car A appartient à (AB)∩(AD) et G appartient à (HG)∩(FG).
Or les droites (AB) et (HG) sont contenues dans le plan (P) et les droites (AD) et (FG) sont contenues dans le plan (P').
D'où la droite (AG) est contenue dans (P)∩(P').
Or (P) et (P') sont deux plans distincts, puisque B appartient à P et B n'appartient pas à P'.
D'où (AG) est l'intersection de (P) et (P').

b)

s

C	F
F	C
H	H

s'

C	H
F	F
H	C

$s'os$

C	F
F	H
H	C

3)a) • (P) est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EH}$.
Un vecteur normal de (P) est $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{EH}-\overrightarrow{EA}$.
D'où (P) est le plan passant par A(0 , 0 , 1) et dont un vecteur normal est $\vec{n}(-1,0,-1)$.
Une équation de (P) est donc sous la forme : -x – z + d = 0.
Or A appartient à (P), alors -1 + d = 0, c'est-à-dire d = 1. Une équation cartésienne de (P) est alors : x + z – 1 = 0.

• (P') est le plan passant par A(0 , 0 , 1) et dont un vecteur normal est $\vec{u}=\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AF}$.
D'où $\vec{u}$ a pour coordonnées (0 , 1 , 1).
Une équation du plan (P') est sous la forme y + z + c = 0.
Or A appartient à (P'), alors 1+ c = 0, c'est-à-dire c = -1. Une équation cartésienne de (P') est donc : y + z – 1 = 0

b) • Soit M(x , y , z) et M'(x' , y' , z') deux points de l'espace. $I\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$ est le milieu de [MM'].

$$s(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} I\in(P) \\ (MM')\perp(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+x'}{2}+\frac{z+z'}{2}=1 \\ \overrightarrow{MM'}=k\vec{n}. \end{cases},\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+z'=2-x-z \\ x'-x=-k \\ y'-y=0 \\ z'-z=-k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=x-k \\ y'=y \\ z'=z-k \\ x-k+z-k=2-x-z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=-z+1 \\ y'=y \\ z'=-x+1 \end{cases}.$$

D'où s transforme M(x , y , z) en M'(x' , y' , z') où $\begin{cases} x'=-z+1 \\ y'=y \\ z'=-x+1 \end{cases}$.

• Soit M(x , y , z) et M'(x' , y' , z') deux points de l'espace. $I\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$ est le milieu de [MM'].

$$s'(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} I\in(P') \\ (MM')\perp(P') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y+y'}{2}+\frac{z+z'}{2}=1 \\ \overrightarrow{MM'}=k\vec{u}. \end{cases},\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=-z+1 \\ z'=-y+1 \end{cases}.$$

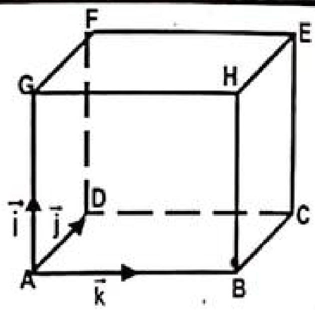
D'où s' transforme tout point M(x , y , z) en le point M'(x' , y' , z') où $\begin{cases} x' = x \\ y' = -z+1 \\ z' = -y+1 \end{cases}$.

c) Soit M(x , y , z) un point de l'espace, $M_1(x_1 , y_1 , z_1) = s(M)$ et $M'(x' , y' , z') = s'(M_1)$.

On a : $\begin{cases} x_1 = -z+1 \\ y_1 = y \\ z_1 = -x+1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = x_1 \\ y' = -z_1+1 \\ z' = -y_1+1 \end{cases}$. En remplaçant x_1 , y_1 et z_1 dans x' , y' et z, on a $\begin{cases} x' = -z+1 \\ y' = x \\ z' = -y+1 \end{cases}$,

D'où s'os transforme tout point M(x , y , z) en le point M'(x' , y' , z') où $\begin{cases} x' = -z+1 \\ y' = x \\ z' = -y+1 \end{cases}$.

Solution 23



1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. D'où

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{GJ} = \left(\overrightarrow{AG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}\right) = -\frac{2}{3}AG^2 + \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AD} - \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG} + \frac{2}{3}AD^2$$

$$= -\frac{2}{3}a^2 + 0 + 0 + \frac{2}{3}a^2$$

$$= 0$$

D'où $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{GJ}$ sont orthogonaux.

2) • G et J sont des points du plan (ADF) et on a (AB) perpendiculaire à (ADF). D'où $\overrightarrow{GJ} \perp \overrightarrow{AB}$.
Or d'après la 1ère question, on a $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{GJ}$. D'où $\overrightarrow{GJ}$ est normal au plan (AIB).

• De même, A et I sont des points du plan (ADF) et on a (GH) perpendiculaire à (ADF). D'où $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{GH}$.
Et puisque $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{GJ}$, alors $\overrightarrow{AI}$ est un vecteur normal au plan (GJH). Ainsi $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{GJ}$ entraîne (AIB) et (GJH) sont perpendiculaires (car $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{GJ}$ sont les vecteurs normaux aux plans (AIB) et (GJH) respectivement).

3) • Dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points A, I, G et J ont respectivement pour coordonnées :
A(0 , 0 , 0), G(a , 0 , 0), $I\left(a , \frac{2}{3}a , 0\right)$ et $J\left(\frac{1}{3}a , a , 0\right)$. D'où $\overrightarrow{AI}\left(a , \frac{2}{3}a , 0\right)$ et $\overrightarrow{GJ}\left(-\frac{2}{3}a , a , 0\right)$.

Une représentation paramétrique de la droite (AI) est $\begin{cases} x = ak \\ y = \frac{2}{3}ak,\ k \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$. Celle de (GJ) est $\begin{cases} x = -\frac{2}{3}at + a \\ y = at,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$.

Pour les coordonnées de K, résolvons le système $\begin{cases} x = ak = -\frac{2}{3}at + a \\ y = \frac{2}{3}ak = at \\ z = 0 \end{cases}$. On obtient alors $\begin{cases} k = \frac{9}{13},\ t = \frac{6}{13} \\ x = \frac{9}{13}a \\ y = \frac{6}{13}a \\ z = 0 \end{cases}$.

D'où le point K a pour coordonnées $\left(\frac{9}{13}a , \frac{6}{13}a , 0\right)$.

• Un vecteur normal au plan (AGF) est $\overrightarrow{AB}$. D'où un vecteur directeur de la droite (D) est $\overrightarrow{AB}$.

Ainsi une représentation paramétrique de la droite (D) est : $\begin{cases} x = \dfrac{9}{13}a \\ y = \dfrac{6}{13}a \\ z = ak \end{cases}$, k appartenant à $\mathbb{R}$.

4) • (AIB) et (GJH) sont deux plans orthogonaux, suivant la droite (D). D'où $\phi = s_1 o s_2$ est le demi-tour d'axe (D).
• (D) est l'ensemble des points invariants par ϕ.

Solution 24

1) • $\vec{n}_1(3, 1, -2)$ est un vecteur normal de (P_1) et $\vec{n}_2(1, -1, 1)$ est un vecteur normal de (P_2).
Or $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3\times1+1\times(-1)-2\times1=0$, alors $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$. Par conséquent, ($P_1$) et ($P_2$) sont perpendiculaires.
• Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

M appartient à $(P_1)\cap(P_2)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 3x+y-2z+2=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}k-\dfrac{5}{4} \\ y=\dfrac{5}{4}k+\dfrac{7}{4}, \\ z=k \end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$ qui est une représentation paramétrique de la droite (D), intersection des plans (P) et (P').

2)a) Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{4}, 1\right)$ et un vecteur normal de (P_3) est $\vec{n}_3(1, 5, 4)$.

Or $\vec{u}=\dfrac{1}{4}\vec{n}_3$, alors $\vec{u}$ et $\vec{n}_3$ sont colinéaires. Finalement, (D) est perpendiculaire à (P_3).

b) M est commun aux trois plans, si et seulement si M est commun à (D) et à (P_3).
Or (D) et (P_3) sont orthogonaux. D'où (D) rencontre (P_3) en un seul point.
Par conséquent, (P_1), (P_2) et (P_3) se rencontrent en un seul point.

3)a) Soit M(x , y , z) et M'(x' , y' , z') deux points de l'espace. $I\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}, \dfrac{z+z'}{2}\right)$ le milieu de [MM'].

$$s(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} I\in (P_3) \\ (MM')\perp(P_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+x'}{2}+5\left(\dfrac{y+y'}{2}\right)+4\left(\dfrac{z+z'}{2}\right)-1=0 \\ \overrightarrow{MM'}=k\vec{n}_3 \quad k\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+5y'+4z'=2-x-5y-4z \\ x'-x=k \\ y'-y=5k \\ z'-z=4k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+k \\ y'=y+5k \\ z'=z+4k \\ 42k=2-2x-10y-8z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{1}{21}(20x-5y-4z+1) \\ y'=\dfrac{1}{21}(-5x-4y-20z+5). \\ z'=\dfrac{1}{21}(-4x-20y+5z+4) \end{cases}$$

D'où l'expression analytique de s dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ est : $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{21}(20x-5y-4z+1) \\ y'=\dfrac{1}{21}(-5x-4y-20z+5) \\ z'=\dfrac{1}{21}(-4x-20y+5z+4) \end{cases}$.

b) s étant une isométrie, s conserve l'orthogonalité.
Ainsi, puisque (P_1) est perpendiculaire à (P_2), $(P'_1) = s(P_1)$ et $(P'_2) = s(P_2)$, alors (P'_1) est perpendiculaire à (P'_2).

15 ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINEAIRES

RAPPEL DU COURS

A. Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

A_1 – Structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

a) Définition 2

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est un ensemble non vide E muni de deux opérations :

- ✓ la première notée + et appelée addition, telle que (E , +) soit un groupe abélien.
- ✓ la seconde notée • et appelée multiplpcation externe, vérifiant les cinq règles suivantes :
- ➢ Soit a un nombre réel et x un élément de E, a•x est un élément de E.
  On dit que • est une loi de composition externe sur E.

Soit a et b deux nombres réels, x et y deux éléments de E. On a :

- ➢ a•(x + y) = a•x + a•y
- ➢ (a + b)•x = a•x + b•x
- ➢ a•(b•x) = (ab)•x
- ➢ 1•x = x.

▪ Les éléments de E seront appelés des vecteurs.

▪ L'élément neutre de E pour l'opération + sera noté 0_E ou $\vec{0}$ et sera appelé : le vecteur nul.

b) Exemples d'espaces vectoriels

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (a , b) de réels.

On définit dans $\mathbb{R}^2$ l'addition et la multiplication externe comme suit :

Soit (a , b) et (a' , b') deux couples de $\mathbb{R}^2$ et k un nombre réel.

- ➢ (a , b) + (a' , b') = (a + a' , b + b')
- ➢ k•(a , b) = (ka , kb).

Muni de ces deux opérations, $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- ➢ Le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$ est le couple (0 , 0).
- ➢ Pour (a , b) et (a' , b') deux couples de réels.
  (a , b) = (a' , b') si et seulement si, a = a' et b = b'.

De façon générale, l'ensemble des n-uplets (avec entier naturel non nul) de réels est noté $\mathbb{R}^n$.
On définit de façon analogue que dans $\mathbb{R}^2$, l'addition, la multiplication externe et l'égalité dans $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{R}^n$ muni de ces opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

c) Combinaison linéaire

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Un vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit comme combinaison linéaire de n vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ de E, lorsqu'on peut trouver n réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_n\vec{u}_n$.

A_2 – Sous-espace vectoriel

a) Définition

Soit (E , + , •) un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F un sous-ensemble non vide de E.
On dira que F est un sous-espace vectoriel de E lorsque (F, + , •) est un espace vectoriel.

b) Théorème

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F un sous-ensemble non vide de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

P_1) Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de F et a un nombre réel.

i) $\vec{u}+\vec{v}$ appartient à F (*on dit que F est stable pour l'addition*).

ii) $a\vec{u}$ appartient à F (*on dit que F est stable pour la multiplication externe*).

P_2) Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de F, a et b deux nombres réels.
$a\vec{u}+b\vec{v}$ appartient à F (*on dit que F est stable par combinaison linéaire*).

P_3) F est un sous-espace vectoriel de E.

c) Propriétés :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

P_1) Tout sous-espace vectoriel de E contient au moins le vecteur nul de E.

P_2) $\left\{\vec{0}\right\}$ et E sont des sous-espaces vectoriel de E, appelés des sous-espaces triviaux de E.

P_3) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F\cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.
Notons que $F\cup G$ ***n'est pas toujours un sous espace vectoriel de E.***

P_4) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F+G=\left\{\vec{u}+\vec{v} \text{ de E, tels que } \vec{u}\in F \text{ et } \vec{v}\in G\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

P_5) Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ n vecteurs de E.
L'ensemble F des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ de E est un sous-espace vectoriel de E.
C'est-à-dire, $F=\left\{a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+\ldots+a_n\vec{u}_n \text{ de E, tels que } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \quad\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
C'est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$.

A_3 – Sous-espaces vectoriels supplémentaires

a) Définition :

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On dira que F + G est **une somme directe** lorsque $F\cap G=\left\{\vec{0}\right\}$.

Dans ce cas, on notera cette somme $F\oplus G$.

b) Théorème :

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

$F\cap G=\left\{\vec{0}\right\}$ si et seulement si, tout vecteur de F + G s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

c) Définition :

Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont supplémentaires de E lorsque E = F + G et $F\cap G=\left\{\vec{0}\right\}$. On a alors $E=F\oplus G$.

d) Propriétés :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

P_1) F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

P_2) F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E si et seulement si dimF + dimG = dimE et $F\cap G=\left\{\vec{0}\right\}$.

A_4 – Systèmes de vecteurs d'un espace vectoriel

a) Système générateur :

Définition :

Le système $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ de vecteurs de l'espace vectoriel E est dit générateur de E lorsque tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$.

C'est-à-dire, pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, on peut trouver n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que : $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_n\vec{u}_n$.

Propriétés :

P_1) Le système $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ de vecteurs de l'espace vectoriel E est générateur de E, lorsque E est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$.

P_2) Tout système contenant un système générateur de E est générateur de E.

b) Système libre – système lié :

Définitions :

- On dit que le système $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ de vecteurs de E est lié ou que les n vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ de E sont linéairement dépendants lorsqu'on peut trouver n réels $a_1, a_2, \ldots$ et a_n **non tous nuls** tels que, $a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_n\vec{u}_n = \vec{0}$.
- On dit que le système $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ de vecteurs de E est libre ou que les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ de E sont linéairement indépendants lorsqu'il n'est pas lié.

C'est-à-dire, soit $a_1, a_2, \ldots$ et a_n n réels, $a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_n\vec{u}_n = \vec{0}$ implique que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Propriétés :

P_1) Un système de vecteurs de E est lié si et seulement si l'un des vecteurs du système peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

P_2) Tout système de vecteurs de E qui contient le vecteur nul est lié.

P_3) Tout système de vecteurs de E qui contient un système lié est lié.

P_4) Tout système qui contient un seul vecteur de E est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.

P_5) Tout système de vecteurs extraits d'un système libre de E est libre.

c) Base et dimension d'un espace vectoriel :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition :

Le système $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ de vecteurs de E est une base de E lorsqu'il est libre et générateur de E.

Théorème et définition :

Si le système $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ est une base de E, alors toute autre base de E a exactement n vecteurs.

On dit alors que la dimension de E est n et on note dimE = n.

Par convention, $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Exemples : $\dim\mathbb{R}^2 = 2$ et $\dim\mathbb{R}^3 = 3$.

Propriétés : **Soit E un espace vectoriel de dimension finie.**

P_1) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors on a : $\dim F \leq \dim E$.

P_2) Si F est un sous-espace vectoriel de E et dimF = dimE, alors E = F.

P_3) Si dimE = n, alors :

- Tout système de vecteurs de E ayant plus de n vecteurs est lié.
- Tout système générateur de E a au moins n vecteurs.
- Tout système libre de E ayant n vecteurs est une base de E.
- Tout système générateur de E ayant n vecteurs est une base de E.

P_4) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. B_1 une base de F et B_2 une base de G.

F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E non réduits $\{\vec{0}\}$ $\{\vec{0}\}$, si et seulement si, $B_1 \cup B_2$ est une base de E et dimF + dimG = dimE.

Théorème et définition :
Le système $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$.
Donc si $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, on peut trouver un unique n-uplet de réels $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tels que $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_n\vec{u}_n$.
Le n-uplet $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ représente alors les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$.

A_5 – Les espaces vectoriels de dimension un, deux et trois

a) Espace vectoriel de dimension 1 :

- Un espace vectoriel de dimension 1 est une droite vectorielle.

Soit D une droite vectorielle.

- Toute base de D a un seul vecteur.
- $\{\vec{u}\}$ est une base de D si et seulement si $\vec{u}$ est un vecteur non nul de D.
- **Si $\{\vec{u}\}$ est une base de D, alors un vecteur $\vec{v}$ appartient à (D) si et seulement si on peut trouver un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.**
- Les sous-espaces vectoriels de D sont : D et $\{\vec{0}\}$.

b) Espace vectoriel de dimension 2 :

- Un espace vectoriel de dimension 2 est un plan vectoriel.

Soit P un plan vectoriel.

- Toute base de P a exactement deux vecteurs.
- Les sous-espaces vectoriels de P sont : P, les droites vectorielles contenues dans P et $\{\vec{0}\}$.
- Soit $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ une base de P.
  - Un vecteur $\vec{u}$ appartient à P si et seulement si on peut trouver deux réels a_1 et a_2 tels que, $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2$.
    Lorsque ce couple (a_1, a_2) existe, il est unique et représente les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base B.
  - L'ensemble des vecteurs $\vec{u}(x, y)$ de P tels que ax + by = 0 (a et b étant deux réels non tous nuls) est une droite vectorielle D. Une base de cette droite D est $\{\vec{e}(-b, a)\}$.
    L'égalité ax + by = 0 est une équation cartésienne de la droite vectorielle D dans la base B.
- Tout système libre de deux vecteurs de P est une base de P.
  Tout système générateur de P ayant deux vecteurs est une base de P.
- Le système $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de vecteurs de P est libre si et seulement si $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \neq 0$.
- Soit D_1 et D_2 deux droites vectorielles de P engendrées respectivement par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
P_1) D_1 et D_2 sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de P.
P_2) Le système $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est libre.
P_3) $D_1 \cap D_2 = \{\vec{0}\}$.

Remarque *: Si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est lié, alors $D_1 \cap D_2 = D_1 = D_2$.*

c) Espace vectoriel de dimension trois :

Soit E un espace vectoriel de dimension trois.

- Toute base de E a exactement trois vecteurs.

- Les sous-espaces de E sont : E, les plans et droites vectoriels contenus dans E et $\{\vec{0}\}$.
- Soit $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ une base de E.
  - Un vecteur $\vec{u}$ appartient à E si et seulement si on peut trouver trois réels a_1, a_2 et a_3 tels que, $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$. Le triplet (a_1, a_2, a_3) lorsqu'il existe, est unique et représente les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base B.
  - L'ensemble des vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ de P tels que $ax + by + cz = 0$ (a, b et c étant trois réels non tous nuls) est un plan vectoriel P. L'égalité $ax + by + cz = 0$ est une équation du plan vectoriel P dans la base B.

Si B est une base *orthonormée de E, alors* $\vec{n}(a, b, c)$ *est un vecteur normal de P.*

  - Toute droite vectorielle de E a une représentation paramétrique de la forme $\begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, avec (a, b, c) différent du triplet (0, 0, 0). Une base de cette droite est alors $(\vec{e}(a, b, c))$.

- Tout système libre de trois vecteurs de E est une base de E.
  Tout système générateur de E ayant trois vecteurs est une base de E.
- D est une droite vectorielle engendrée par un vecteur $\vec{u}_1$ et P un plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$.

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

P_1) D et P sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E

P_2) Le système $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre.

P_3) $D \cap P = \{\vec{0}\}$.

Si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ *est lié, alors* $D \cap P = D$ *. D est contenue dans P.*

B. Applications linéaires

B_1 – Définitions et propriétés :

a) Théorème et définition :

E et F désignent deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
Soit f une application de E vers F.
Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

P_1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E, a un nombre réel.

i) $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

ii) $f(a\vec{u}) = af(\vec{u})$.

P_2) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E, a et b deux nombres réels.

$f(a\vec{u} + b\vec{v}) = af(\vec{u}) + bf(\vec{v})$.

Lorsque l'une de ces deux propriétés est vérifiée, alors il en est de même pour l'autre.
On dit alors f est une application linéaire de E vers F.

b) Autres définitions :

Soit f une application linéaire de E vers F.

- Si f est bijective, alors f est un isomorphisme de E vers F.
- Si E = F, alors f est un endomorphisme de E.
- Si f est bijective et E = F, alors f est un automorphisme de E.
- Si $F = \mathbb{R}$ alors f est une forme linéaire.

c) Propriétés :

P_1) Soit f une application linéaire de E vers F, $f(0_E) = 0_F$.

P_2) Si f et g sont deux applications linéaires, alors : f + g, af (a étant un nombre réel) et gof sont aussi des applications linéaires.

B_2 – Noyau et image d'une application linéaire

Dans ce sous paragraphe, E et F désignent deux espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{R}$

a) Noyau d'une application linéaire :

Définition :

Soit f une application linéaire de E vers F.

Le noyau de f noté kerf ou N(f) est l'ensemble des vecteurs de E qui ont pour image 0_F par f.

Propriétés :

Soit f une application linéaire de E vers F.

P_1) kerf est un sous espace vectoriel de E.

P_2) f est injective si et seulement si kerf = $\{0_E\}$.

b) Image d'une application linéaire :

Définitions :

Soit f une application linéaire de E vers F et G un sous-espace vectoriel de E.

- L'image de G par f notée f(G) est l'ensemble des vecteurs de F qui ont un antécédent par f dans G.
- L'image de f notée Imf ou f(E) est l'image de E par f.

C'est-à-dire imf est l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de F tels qu'on puisse trouver un vecteur $\vec{u}$ de E vérifiant $f(\vec{u})=\vec{v}$.

Propriétés :

Soit f une application linéaire de E vers F.

P_1) Soit G un sous-espace vectoriel de E, f(G) est un sous-espace vectoriel de F.
En particulier, Imf est un sous-espace vectoriel de F.

P_2) Si G est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ de E, alors f(G) est le sous-espace vectoriel F engendré par $f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)$.

En particulier, si E est muni d'une base $B=(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$, alors Imf est le sous-espace vectoriel de F engendré par les vecteurs $f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)$.

P_3) f est surjective si et seulement si Imf = F.

c) Compléments :

Soit f une application linéaire de E vers F.

P_1) Si f est bijective, alors dimE = dimF.

P_2) dimKerf + dimImf = dimE.

P_2) Si dimE = dimF, alors les sept propriétés suivantes sont équivalentes :

i) f est bijective.
ii) f est surjective
iii) f est injective
iv) kerf = $\{0_E\}$
v) Imf = F
vi) f transforme une base de E en une base de F.
vii) f transforme toute base de E en une base de F.

C. Endomorphismes du plan vectoriel et endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension trois

C_1 – Endomorphisme du plan vectoriel

P désigne le plan vectoriel muni d'une base $B=(\vec{i}, \vec{j})$.

- Une application f de P vers P est un endomorphisme de E si et seulement si son expression analytique dans la base

B est sous la forme : $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$.

- Dans ce cas, on a : $f(\vec{i}) = a\vec{i} + c\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = b\vec{i} + d\vec{j}$.

Et la matrice de f dans la base B est alors : $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

- Soit f un endomorphisme de P, de matrice M.

f est bijectif si et seulement si l'une des cinq propriétés suivantes est vérifiée :

P_1) $\det(M) \neq 0$.

P_2) $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ est libre.

P_3) $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ est générateur de P.

P_4) $\ker f = \{0_P\}$ (c'est-à-dire, f est injectif)

P_5) $\text{Im} f = P$. (C'est-à-dire f est surjectif).

C_2 – Endomorphisme d'espace vectoriel de dimension trois

E désigne l'espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Une application f de E vers E est un endomorphisme de E si et seulement si son expression analytique dans la base B est sous la forme : $\begin{cases} x' = ax + by + cz \\ y' = a'x + b'y + c'z \\ z = a"x + b"y + c"z \end{cases}$.

- Dans ce cas, la matrice de f dans la base B est : $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a" & b" & c" \end{bmatrix}$.

- Soit f un endomorphisme de E.

f est bijectif si et seulement si l'une des quatre propriétés suivantes est vérifiée :

P_1) $(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}))$ est libre.

P_2) $(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}))$ est générateur de E.

P_3) $\ker f = \{0_E\}$ (c'est-à-dire, f est injectif)

P_4) $\text{Im} f = E$. (C'est-à-dire f est surjectif).

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Sur les espaces vectoriels réels

1 – Montrer qu'un système de vecteurs est libre, lié, générateur, une base : dimension, coordonnées

Exercice 1

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs linéairement indépendants de V, si et seulement si, les vecteurs $\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ et $\vec{u}_4 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ de V, le sont aussi.

Solution 1

Supposons $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ linéairement indépendants :

Soit a et b deux nombres réels, on a :

$a\vec{u}_3 + b\vec{u}_4 = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad a(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + b(\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (2a+b)\vec{u}_1 + (-a+3b)\vec{u}_2 = \vec{0}$.

Ainsi, puisque $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont linéairement indépendants, on a : 2a + b = 0 et – a + 3b = 0. D'où a = b = 0.

Il en résulte alors que $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$ sont linéairement indépendants.

Supposons maintenant $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$ linéairement indépendants :

On sait entre autre que : $\begin{cases} \vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \\ \vec{u}_4 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = \dfrac{3}{7}\vec{u}_3 + \dfrac{1}{7}\vec{u}_4 \\ \vec{u}_2 = -\dfrac{1}{7}\vec{u}_3 + \dfrac{2}{7}\vec{u}_4 \end{cases}$.

Ainsi, soit a et b deux réels, on a :

$a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad a\left(\frac{3}{7}\vec{u}_3 + \frac{1}{7}\vec{u}_4\right) + b\left(-\frac{1}{7}\vec{u}_3 + \frac{2}{7}\vec{u}_4\right) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{3}{7}a - \frac{1}{7}b\right)\vec{u}_3 + \left(\frac{1}{7}a + \frac{2}{7}b\right)\vec{u}_4 = \vec{0}$.

Puisque $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$ sont par hypothèse linéairement indépendants, alors on a : $\begin{cases} \dfrac{3}{7}a - \dfrac{1}{7}b = 0 \\ \dfrac{1}{7}a + \dfrac{2}{7}b = 0 \end{cases}$, soit a = b = 0.

On conclut alors que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont linéairement indépendants.

En définitive, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs linéairement indépendants de V, si et seulement si, les vecteurs $\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ et $\vec{u}_4 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ de V, le sont aussi.

Exercice 2

E est un espace vectoriel rapporté à une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Vérifier que $B' = (\vec{i}, \vec{j} + 2\vec{k}, 2\vec{j} + \vec{k})$ est aussi une base de E.

Déterminer l'ensemble des vecteurs de E qui ont le même triplet de coordonnées dans les deux bases B et B'.

Solution 2

Posons $\vec{u} = \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{j} + \vec{k}$.

- Soit a, b et c trois nombres réels,

$a\vec{i} + b\vec{u} + c\vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad a\vec{i} + b(\vec{j} + 2\vec{k}) + c(2\vec{j} + \vec{k}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad a\vec{i} + (b+2c)\vec{j} + (2b+c)\vec{k} = \vec{0}$.

Le système $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant une base de E, est libre. Et donc $\begin{cases} a=0 \\ b+2c=0 \\ 2b+c=0 \end{cases}$. C'est-à-dire a = b = c = 0.

Il en résulte alors que $(\vec{i}, \vec{j}+2\vec{k}, 2\vec{j}+\vec{k})$ est un système libre.

Or on sait que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de E, donc dimE = 3.

Alors, dire que $(\vec{i}, \vec{j}+2\vec{k}, 2\vec{j}+\vec{k})$ est un système libre, entraîne que $(\vec{i}, \vec{j}+2\vec{k}, 2\vec{j}+\vec{k})$ est une base de E.

• Soit $\vec{X}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x\vec{i}+y\vec{u}+z\vec{v}$, x, y et z étant des nombres réels. On a :

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x\vec{i}+y\vec{u}+z\vec{v} \Leftrightarrow x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x\vec{i}+y(\vec{j}+2\vec{k})+z(2\vec{j}+\vec{k}) \Leftrightarrow 2y\vec{k}+2z\vec{j}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow y=z=0$$

$$\Leftrightarrow \vec{X}=x\vec{i}$$

Ainsi, l'ensemble des vecteurs de E ayant les mêmes coordonnées dans les bases B et B', est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i}$.

2 – Etudier les sous-espaces vectoriels engendrés par des vecteurs d'un espace donné

Exercice 3

1) Dans $\mathbb{R}^3$, F est l'ensemble des triplets (x , y , z) de $\mathbb{R}^3$ tels que : x + 2y + z = 0.

a) F est-il stable par combinaison linéaire?

b) Soit $\vec{u}=(2,-1,0)$ et $\vec{v}=(0,1,-2)$ deux vecteurs. Démontrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de F.

c) Exprimer le vecteur $\vec{s}=(1,1,-3)$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2) G est l'ensemble des triplets (x , y , z) tels que x + y + z = 1. G est-il stable par combinaison linéaire?

Solution 3

1)a) Soit $\vec{X}=(x,y,z)$ et $\vec{Y}=(x',y',z')$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, a et b deux réels.

On a : $a\vec{X}+b\vec{Y}=a(x,y,z)+b(x',y',z')=(ax+bx', ay+by', az+bz')$

Supposons $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ dans F, on a donc : x + 2y + z = 0 et x' + 2y' + z' = 0.

Alors, (ax + bx') + 2(ay + by') + (az + bz') = a(x + 2y + z) + b(x' + 2y' + z') = a×0 + b×0 = 0.

D'où $a\vec{X}+b\vec{Y}$ appartient à F. F est par conséquent stable par combinaison linéaire.

b) Vérifions d'abord si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartiennent à F :

En effet, on a : 2 + 2×(-1) + 0 = 0, d'où $\vec{u}=(2,-1,0)\in F$.

0 + 2×1 – 2 = 0, d'où $\vec{v}=(0,1,-2)\in F$.

Montrons que $(\vec{u},\vec{v})$ est générateur de F.

Soit $\vec{X}=(x,y,z)$ appartenant à $\mathbb{R}^3$.

$\vec{X}=(x,y,z)$ appartient à F $\Leftrightarrow$ x + 2y + z = 0 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x=-2k-k' \\ y=k \\ z=k' \end{cases}$, k et $k'\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \vec{X}=(-2k-k', k, k'),\ k \text{ et } k'\in\mathbb{R}$$

Cherchons alors s'ils existent, deux réels α et β tels que $\vec{X}=(-2k-k', k, k')=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

$$\vec{X}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \Leftrightarrow (-2k-k', k, k')=\alpha(2,-1,0)+\beta(0,1,-2).$$

$$\Leftrightarrow (-2k-k', k, k')=(2\alpha, -\alpha+\beta, -2\beta)$$

Ainsi, $\vec{X} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha = -2k-k' \\ -\alpha+\beta = k \\ -2\beta = k' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = -k-\frac{1}{2}k' \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1}{2}k'.$$

α et β existent, d'où tout vecteur $\vec{X}$ de F s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Par conséquent $(\vec{u}, \vec{v})$ est un système générateur de F.

Vérifions si ce système est libre :

Soit deux réels α et β, $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ -\alpha+\beta = 0 \\ -2\beta = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$.

D'où $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre. $(\vec{u}, \vec{v})$ étant libre et générateur de F, $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de F.

c) $1 + 2\times1 - 3 = 0$, d'où $\vec{s} \in F$

$\vec{s} = (1, 1, -3)$ s'écrit donc comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de façon unique.

Soit α et β deux réels, on a : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} = \vec{s} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$. D'où $\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v}$.

2) $1 + 1 - 1 = 1$, d'où $\vec{a} = (1, 1, -1) \in G$.

$1 + 0 + 0 = 1$, d'où $\vec{b} = (1, 0, 0) \in G$.

Or $\vec{a}+\vec{b} = (2, 1, -1)$ et $2 + 1 - 1 = 2 \neq 1$, alors $\vec{a}+\vec{b} \notin G$.

On peut donc conclure que G n'est pas stable par combinaison linéaire.

G n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $\vec{v}_1 = (1, 1, 4)$, $\vec{v}_2 = (3, -1, 4)$ et $\vec{v}_3 = (1, 2, 6)$.

a) les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 1, 4)$, $\vec{v}_2 = (3, -1, 4)$ et $\vec{v}_3 = (1, 2, 6)$ sont-ils linéairement indépendants ?

b) Montrer que le système $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est libre.

c) Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera une base, la dimension et la nature.

Solution 4

a) Soit a, b et c trois nombres réels :

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+3b+c = 0 \\ a-b+2c = 0 \\ 4a+4b+6c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = k \\ b = -\frac{1}{7}k \\ c = -\frac{4}{7}k \end{cases}$$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$.

Pour k = 7, on a : a = 7, b = -1, c = -4 et donc $7\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - 4\vec{v}_3 = \vec{0}$.

D'où les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 1, 4)$, $\vec{v}_2 = (3, -1, 4)$ et $\vec{v}_3 = (1, 2, 6)$ sont linéairement dépendants.

b) Soit α et β deux nombres réels.

$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha+3\beta = 0 \\ \alpha-\beta = 0 \\ 4\alpha+4\beta = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$. D'où le système $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est libre.

c) F est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ de $\mathbb{R}^3$.

F est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$.

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est donc générateur de F.

Or $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est lié, d'après la question a), alors on a $\dim F < 3$.

Puisque le système $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est libre, alors $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de F.

Il en résulte alors que $\dim F = 2$, donc que F est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont une base est $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $\vec{u}_1 = (-2, 3, 4)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 2)$ et $\vec{u}_3 = (x, 5, 4)$

Déterminer le réel x pour que les vecteurs $\vec{u}_1 = (-2, 3, 4)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 2)$ et $\vec{u}_3 = (x, 5, 4)$ soient linéairement dépendants. Quel est alors suivant les valeurs de x, le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$?

Solution 5

- Soit a, b et c trois nombres réels.

$$a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 2b + xc = 0 \\ 3a - b + 5c = 0 \\ 4a + 2b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a + 5c \\ 4a + (x+10)c = 0 \\ 5a + 7c = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Considérons le système de deux équations à deux inconnues suivant : $\begin{cases} 4a + (x+10)c = 0 \\ 5a + 7c = 0 \end{cases}$ (II).

Son déterminant est : $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & x+10 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -5x - 22$.

Si $x = -\dfrac{22}{5}$, alors $\Delta = 0$.

Le système (II) admet donc une infinité de solutions. Par conséquent le système (I) admet une infinité de solutions.

Et alors $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est lié.

Si $x \neq -\dfrac{22}{5}$, alors $\Delta \neq 0$.

Dans le système (II), on a alors $a = c = 0$. D'où dans (I), $b = 0$. Et alors $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre.

En conclusion, $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est lié si et seulement si $x = -\dfrac{22}{5}$.

- Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$.

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est donc générateur de F.

Si $x \neq -\dfrac{22}{5}$, alors $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre, et donc une base de F.

F est par conséquent un sous espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. Et comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, alors $F = \mathbb{R}^3$.

Si $x = -\dfrac{22}{5}$, alors $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est lié, donc $\dim F < 3$.

Vérifions si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est libre :

Soit a et b deux nombres réels, $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 0 \\ 3a - b = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$. D'où $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est libre.

Puisqu'en plus $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est lié et générateur de F, alors $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est générateur de F, et par conséquent une base de F. Alors le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, engendré par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Exercice 6

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs linéairement indépendants de l'espace vectoriel E.

a) Montrer que l'ensemble P des combinaisons linéaires de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ est un plan vectoriel de E.

b) Soit $\vec{k}$ un vecteur non nul de E.
Déterminer l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{i}$ et $\vec{k}$, noté V.

c) Déterminer $P \cap V$ lorsque $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est lié, puis lorsque $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est libre.

Solution 6

a) P étant l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de E, on peut dire que, P est le sous espace vectoriel de E, engendré par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Et $(\vec{i}, \vec{j})$ est par conséquent un système générateur de P.

Or d'après l'énoncé, $(\vec{i}, \vec{j})$ est libre, d'où $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de P.

P est donc le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

b) V est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$.

Si $\vec{i}$ et $\vec{k}$ **sont linéairement dépendants,** alors V est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{k}$.

Si $\vec{i}$ et $\vec{k}$ **sont linéairement indépendants,** alors $(\vec{i}, \vec{k})$ est une base de V.

V est alors le plan vectoriel engendré par $\vec{i}$ et $\vec{k}$.

c) Lorsque $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **est lié,** d'après la question b), V est une droite de P (si $\vec{i}$ et $\vec{k}$ sont linéairement dépendants), ou alors V = P (Si $\vec{i}$ et $\vec{k}$ sont linéairement indépendants). Dans les deux cas, $P \cap V = V$.

Lorsque $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **est libre,** V est un plan autre que P.

Et $P \cap V$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i}$.

Exercice 7

Montrer que l'ensemble F des fonctions $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telles que, pour tout réel x, $f_{a,b}(x) = (ax + b)e^{2x}$, a et b étant des réels, est un plan vectoriel, dont on précisera une base.

Solution 7

Théorème :

Soit I un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.
L'ensemble $F(I, \mathbb{R})$ des fonctions définies de I vers $\mathbb{R}$, muni de l'addition + des fonctions et de la multiplication • d'une fonction par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

F est par définition un sous-ensemble de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Notons θ l'application nulle de $\mathbb{R}$.
Soit x un nombre réel, $\theta(x) = 0 = (0x + 0)e^{2x}$. D'où θ appartient à F et par conséquent F est non vide.
Soit f fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

f appartient à F $\Leftrightarrow$ il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x, on a $f(x) = (ax + b)e^{2x}$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, on a $f(x) = a(xe^{2x}) + be^{2x}$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f(x) = af_1(x) + bf_2(x)$, où $f_1(x) = xe^{2x}$ et $f_2(x) = e^{2x}$
$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f(x) = (af_1 + bf_2)(x)$
$\Leftrightarrow$ $f = af_1 + bf_2$

F est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des applications f_1 et f_2 définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
D'où F est le sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, engendré par f_1 et f_2.
Par suite, (f_1, f_2) est un système générateur de F.
Il suffit de montrer que (f_1, f_2) est libre.

En effet, soit a et b deux nombres réels,

$af_1 + bf_2 = \theta \Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(af_1 + bf_2)(x) = \theta(x)$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $af_1(x) + bf_2(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $axe^{2x} + be^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $(ax + b)e^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $ax + b = 0$

$\Leftrightarrow$ $a = b = 0$.

Il en résulte que (f_1, f_2) est libre, et par suite, (f_1, f_2) est une base de F.

On peut donc conclure que F est le plan vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, dont une base est (f_1, f_2), où $f_1(x) = xe^{2x}$ et $f_2(x) = e^{2x}$ pour tout réel x.

3 – Montrer que deux sous-espaces d'un espace vectoriel E sont supplémentaires de E

Exercice 8

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les ensembles suivants;

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + 2y - z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ 2x + y = 0 \text{ et } x - z = 0\}$.

1) Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Préciser une base de F.

2) Montrer que G est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera une base.

3) Déterminer $F \cap G$. F et G sont-ils deux sous espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Solution 8

1) $0 + 2\times0 - 0 = 0$, d'où $(0, 0, 0) \in F$ donc $F \neq \emptyset$.

Soit $\vec{X} = (x, y, z)$ appartient à $\mathbb{R}^3$.

$\vec{X} = (x, y, z)$ appartient à F $\Leftrightarrow x + 2y - z = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = k' \\ z = k + 2k' \end{cases}, \ k \text{ et } k' \in \mathbb{R}.$$

$\Leftrightarrow \vec{X} = (k, k', k + 2k')$ k et $k' \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \vec{X} = k(1, 0, 1) + k'(0, 1, 2)$ k et $k' \in \mathbb{R}$.

Posons $\vec{u} = (1, 0, 1)$ et $\vec{v} = (0, 1, 2)$.

On constate que F est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$.

F est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Par conséquent $(\vec{u}, \vec{v})$ est générateur de F.

Vérifions ensuite que $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre :

Soit deux réels α et β, on a: $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$. $(\vec{u}, \vec{v})$ est donc libre.

Il en résulte que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de F, donc que dimF = 2.

F étant un sous-espace vectoriel de dimension 2. F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, dont une base est $(\vec{u}, \vec{v})$.

2) Soit $\vec{X} = (x, y, z)$ appartient à $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{X} = (x, y, z) \text{ appartient à } G \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\vec{X}=(x,y,z)$ appartient à G $\Leftrightarrow \begin{cases} x=k \\ y=-2k, & k\in\mathbb{R} \\ z=k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{X}=(k\ ,-2k\ ,\ k),\quad k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{X}=k(1\ ,-2,\ 1),\quad k\in\mathbb{R}$.

Posons $\vec{w}=(1\ ,\ -2\ ,\ 1)$.

G est l'ensemble des combinaisons linéaires du vecteur $\vec{w}=(1\ ,\ -2\ ,\ 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

G est alors le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, engendré par le vecteur $\vec{w}=(1\ ,\ -2\ ,\ 1)$.

D'où $(\vec{w}=(1\ ,\ -2\ ,\ 1))$ est un système générateur de G.

Puisque $\vec{w}=(1\ ,\ -2\ ,\ 1)\neq\vec{0}$, le système $(\vec{w}=(1\ ,\ -2\ ,\ 1))$ est libre, et par suite une base de G.

Il en résulte que dimG = 1, donc G est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dont une base est $(\vec{w}=(1\ ,\ -2\ ,\ 1))$.

3) Soit $\vec{X}=(x,y,z)$ appartient à $\mathbb{R}^3$.

$\vec{X}=(x,y,z)$ appartient à $F\cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0.$ D'où $F\cap G=\{(0\ ,0\ ,0)\}$.

$F\cap G=\{(0\ ,0\ ,0)\}$ et $\dim F+\dim G=\dim\mathbb{R}^3=3$, alors F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Point méthode :

Pour montrer que deux sous espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont supplémentaires de E, des trois propriétés suivantes, il suffit de vérifier l'une :

P_1) $F\cap G=\{0_E\}$ et $\dim F+\dim G=\dim E$.

P_2) Soit B_1 est une base de F et B_2 une base de G.
$B=B_1\cup B_2$ est une base de E et $\dim F+\dim G=\dim E$.

P_3) Tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée, on peut conclure que les autres le sont aussi.

Exercice 9

On admet que $(\mathbb{C},+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. + et . étant respectivement l'addition de deux complexes et la multiplication d'un complexe par un réel, usuelles. On pose $i\mathbb{R}=\{ib\ ;\ b\in\mathbb{R}\}$, où $i^2=-1$.

1) Montrer que $(\mathbb{R},+,\cdot)$ et $(i\mathbb{R},+,\cdot)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{C}$.

Solution 9

1) Notons que $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont des parties de $\mathbb{C}$.
0 appartient à $\mathbb{R}$ et 0 = i.0, d'où 0 appartient à $i\mathbb{R}$. $i\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ sont donc non vides.
Soit a, b, α et β quatre nombres réels.
$\alpha a+\beta b$ appartient à $\mathbb{R}$ (car $\mathbb{R}$ est stable pour l'addition et la multiplication des réels),
et $\alpha(ia)+\beta(ib)=i(\alpha a+\beta b)$ appartient à $i\mathbb{R}$. D'où $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont stables par combinaison linéaire.
Et donc $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$.
Par suite, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ et $(i\mathbb{R},+,\cdot)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

2) Soit z = x + iy, avec x et y réels,
z appartient à $\mathbb{R}\cap i\mathbb{R} \Leftrightarrow$ z appartient à $\mathbb{R}$ et z appatient à $i\mathbb{R} \Leftrightarrow y=0$ et $x=0 \Leftrightarrow z=0$.
D'où $\mathbb{R}\cap i\mathbb{R}=\{\vec{0}\}$.

Et de plus z appartient à $\mathbb{C} \Leftrightarrow z=a+ib \Leftrightarrow$ z appartient à $\mathbb{R}+i\mathbb{R}$.
D'où $\mathbb{C}=\mathbb{R}+i\mathbb{R}$. D'où $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{C}$.

Exercice 10

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1) Montrer que :

a) E_1 est inclus dans E_2 si et seulement si $E_1 + E_2 = E_2$.

b) E_1 est inclus dans E_2 si et seulement si $E_1 \cap E_2 = E_1$.

2) On suppose que $\dim E_1 = 1$, $\dim E_2 = 2$ et $\dim E = 3$.

Montrer que E_1 est inclus dans E_2 ou E_1 et E_2 sont supplémentaires de E.

Solution 10

1)a) **Supposons E_1 contenu dans E_2 et montrons que $E_1 + E_2 = E_2$.**

- Soit a appartenant à E_2, $a = 0_E + a$.

Comme $0_E \in E_1$ (car E_1 est un sous-espace vectoriel de E), alors a appartient à $E_1 + E_2$.

Par conséquent, E_2 est contenu dans $E_1 + E_2$.

- Montrons que $E_1 + E_2$ est aussi contenu dans E_2.

Par hypothèse, E_1 est contenu dans E_2, alors, soit a appartient à $E_1 + E_2$, $a = a_1 + a_2$ avec a_1 appartenant à E_1 et a_2 appartenant à E_2. Puisque E_1 est contenu dans E_2, alors a_1 appartient à E_2.

Donc $a_1 \in E_2$, $a_2 \in E_2$ et E_2 est un espace vectoriel. D'où $a_1 + a_2 \in E_2$, c'est-à-dire que a appartient à E_2.

Ainsi, si a appartient à $E_1 + E_2$, alors a appartient à E_2. C'est-à-dire $E_1 + E_2 \subset E_2$. Donc $E_1 + E_2 = E_2$.

Réciproquement, supposons $E_1 + E_2 = E_2$ et montrons que $E_1 \subset E_2$:

Soit a élément de E_1, $a = a + 0_E \in E_1 + E_2$ et puisque $E_1 + E_2 = E_2$, alors a appartient à E_2. D'où $E_1 \subset E_2$.

Il en résulte que E_1 est inclus dans E_2 si et seulement si $E_1 + E_2 = E_2$.

b) **Supposons E_1 inclus dans E_2, et montrons que $E_1 \cap E_2 = E_1$:**

- Soit $a \in E_1 \cap E_2$, $a \in E_1$ et $a \in E_2$, donc $a \in E_1$. Et par conséquent, $E_1 \cap E_2 \subset E_1$.
- Soit a élément de E_1, d'après l'hypothèse, a appartient à E_2.

Donc a appartient à $E_1 \cap E_2$ et par suite $E_1 \subset E_1 \cap E_2$. D'où si E_1 est inclus dans E_2, alors $E_1 \cap E_2 = E_1$.

Réciproquement supposons $E_1 \cap E_2 = E_1$ et montrons que E_1 est inclus dans E_2 :

Soit a élément de E_1, a appartient à $E_1 \cap E_2$ (car $E_1 \cap E_2 = E_1$), alors a appartient à E_2.

Par conséquent, on a E_1 inclus dans E_2.

Finalement, E_1 est inclus dans E_2 si et seulement si $E_1 \cap E_2 = E_1$.

2) E_1 est une droite vectorielle et E_2 est un plan vectoriel.

Notons $(\vec{u})$ une base de E_1 et $(\vec{v}, \vec{w})$ une base de E_2. On a : $E_1 = \{x\vec{u} ; x \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{y\vec{v} + z\vec{w} ; y \text{ et } z \in \mathbb{R}\}$.

Deux situations peuvent se présenter : soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est lié, soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre.

Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est lié, alors $\vec{u}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ($(\vec{v}, \vec{w})$ étant libre).

C'est-à-dire, qu'il existe deux réels a et b tels que : $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

Un vecteur $\vec{X} \in E_1$ lorsqu'il existe un réel x tel que $\vec{X} = x\vec{u}$.

Et donc $\vec{X} = (xa)\vec{v} + (xb)\vec{w}$. D'où $\vec{X} \in E_2$. On conclut alors que $E_1 \subset E_2$.

Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre, alors puisque $\dim E = 3$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de E.

Ainsi, soit $\vec{X}$ un vecteur de E, il existe trois réels a, b et c tels que $\vec{X} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Or $a\vec{u}$ appartient à E_1 et $b\vec{v} + c\vec{w}$ appartient à E_2, alors $\vec{X}$ appartient à $E_1 + E_2$. On en déduit que $E \subset E_1 + E_2$.

Comme E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

D'où $E_1 + E_2 \subset E$.

Finalement, $E_1 + E_2 = E$.

Déterminons alors $E_1 \cap E_2$:

Soit $\vec{X}$ appartenant à E, $\vec{X}$ appartient à $E_1 \cap E_2$ implique qu'il existe trois réels x, y et z tels que $\begin{cases} \vec{X} = x\vec{u} \\ \vec{X} = y\vec{v} + z\vec{w} \end{cases}$.

D'où $x\vec{u} = y\vec{v} + z\vec{w}$, c'est-à-dire $x\vec{u} - y\vec{v} - z\vec{w} = \vec{0}$.

Puisque $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre, alors $x = -y = -z = 0$. D'où $x = y = z = 0$. D'où $\vec{X} = \vec{0}$. Et alors $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$.

Puisque $E_1 + E_2 = E$ et $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$, alors on peut conclure que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Point méthode :

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}$ de E et P le plan vectoriel dont une base est $(\vec{v}, \vec{w})$. D'après l'exercice 11, question 2) :

- ***D et P sont deux sous espaces supplémentaires de E, si et seulement si, le système $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre.***
- ***Or si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est lié, alors on a : $D \cap P = D$ et $D + P = P$.***

B. Applications linéaires

1 – Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire

Exercice 11 BAC C – Cameroun - 2001

E désigne un espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'endomorphisme de E défini par :

$f(\vec{i}) = \vec{i}$, $f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k})$.

1) Déterminer une base de kerf, noyau de f.
2) Déterminer une base de Imf, image de f.
3) Démontrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de kerf et d'un vecteur de Imf.
4)a) Vérifier la relation fof = f.
b) Démontrer que $\vec{u} \in \mathrm{Imf} \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$ (On utilisera la question 4)a)).

Solution 11

1) Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E, où x, y et z sont des nombres réels.

$\vec{u} \in \ker f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{0} \Leftrightarrow xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) + zf(\vec{k}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow x\vec{i} + \frac{1}{2}(y+z)\vec{j} + \frac{1}{2}(y+z)\vec{k} = \vec{0}$

D'où, $\vec{u} \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{2}(y+z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = -k \end{cases}$, k appartenant à $\mathbb{R}$.

D'où kerf est la droite vectorielle dont une base est $(\vec{j} \quad \vec{k})$.

2) Soit $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ un vecteur de E.

$\vec{v} \in \mathrm{Imf} \Leftrightarrow$ il existe un vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de E tel que $f(\vec{u}) = \vec{v}$

$\Leftrightarrow f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$\Leftrightarrow xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) + zf(\vec{k}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$\Leftrightarrow x\vec{i} + \frac{1}{2}(y+z)\vec{j} + \frac{1}{2}(y+z)\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}(y+z) \\ z' = \frac{1}{2}(y+z) \end{cases}$$

Ce système n'a de solution que si et seulement si, y' = z'. D'où Imf est le plan vectoriel d'équation y = z.

Or y = z $\Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = k' \\ z = k' \end{cases}$, avec k et k' dans $\mathbb{R}$. Une base de Imf est donc $(\vec{i}, \vec{j}+\vec{k})$.

NB : *Le système* $\begin{cases} x = k \\ y = k' \\ z = k' \end{cases}$, k et k' $\in \mathbb{R}$ *est une représentation paramétrique de Imf.*

Cette représentation est celle du plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{i}$ *et* $\vec{j}+\vec{k}$

Autre méthode :

Pour déterminer Imf, on sait que Imf = f(E), est le sous espace de E, engendré par $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$.

Or $f(\vec{j}) = f(\vec{k})$, alors le système $(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}))$ est lié.

Le lecteur vérifiera que $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ *est un système libre.*

D'où une base de Imf est $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$. D'où Imf est le plan vectoriel de base $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$.

3) Il suffit de montrer que le système $(\vec{i}, \vec{j}+\vec{k}, \vec{j}-\vec{k})$ est une base de E.

Posons $\vec{e}_1 = \vec{j}-\vec{k}$, $\vec{e}_2 = \vec{i}$ et $\vec{e}_3 = \vec{j}+\vec{k}$.

Soit a, b et c trois nombres réels :

$$a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow b\vec{i} + (a+c)\vec{j} + (-a+c)\vec{k} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a + c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

D'où le système $(\vec{i}, \vec{j}+\vec{k}, \vec{j}-\vec{k})$ est libre, puisqu'en plus dimE = 3, alors $(\vec{i}, \vec{j}+\vec{k}, \vec{j}-\vec{k})$ est une base de E.

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ étant une base de E, tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit de façon unique sous la forme $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$.

Posons $\vec{u}_1 = a\vec{e}_1$ et $\vec{u}_2 = b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$. $\vec{u}$ s'écrit alors de façon unique sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1 \in \ker f$ et $\vec{u}_2 \in$ Imf.

4)a) $f \circ f(\vec{i}) = f[f(\vec{i})] = f(\vec{i})$, $f \circ f(\vec{j}) = f[f(\vec{j})] = f\left(\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}\right) = \frac{1}{2}f(\vec{j}) + \frac{1}{2}f(\vec{k}) = f(\vec{j})$ et $f \circ f(\vec{k}) = f[f(\vec{k})] = f(\vec{k})$.

D'où fof = f.

b) Soit $\vec{u}$ un vecteur de E.

Supposons que $\vec{u}$ appartient à Imf, alors il existe un vecteur $\vec{v}$ de E tel que $\vec{u} = f(\vec{v})$.

On a alors $f(\vec{u}) = f[f(\vec{v})] = f \circ f(\vec{v}) = f(\vec{v}) = \vec{u}$ (car fof = f).

Réciproquement, supposons que $\vec{u}$ soit un vecteur de E tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}$.

$\vec{u}$ appartient alors à f(E) = Imf.

Finalement, $\vec{u} \in$ Imf $\Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$.

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, P un plan vectoriel, $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E et $B' = (\vec{i}', \vec{j}')$ une base de P. On considère l'application linéaire f :

$$E \to P$$
$$\vec{u}(x, y, z) \mapsto \vec{u}'(x', y'), \text{ où } \begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + 2y + z \end{cases}$$

a) Déterminer $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$.

b) Préciser la matrice de f relative à B et B'.

c) Déterminer le noyau et l'image de f.

Solution 12

a) Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E, on a $f(\vec{u}) = (2x - y - z)\vec{i}' + (-x + 2y + z)\vec{j}'$

D'où puisque $\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, $\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}$ et $\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$,

alors : $f(\vec{i}) = 2\vec{i}' - \vec{j}'$, $f(\vec{j}) = -\vec{i}' + 2\vec{j}'$ et $f(\vec{k}) = -\vec{i}' + \vec{j}'$.

b) La matrice de f dans les bases B et B' est donc : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) • Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E.

$$\vec{u} \in \ker f \iff f(\vec{u}) = \vec{0} \iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}k \\ y = -\frac{1}{3}k \text{, k appartenant à } \mathbb{R} \\ z = k \end{cases}$$

kerf est donc la droite vectorielle, dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = \frac{1}{3}k \\ y = -\frac{1}{3}k \text{ , k appartenant à } \mathbb{R}. \\ z = k \end{cases}$

Une base de kerf est $\left(\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \vec{k}\right)$.

• Soit $\vec{v} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$ un vecteur de P.

$\vec{v} \in \operatorname{Im} f \iff$ il existe un vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de E tel que $f(\vec{u}) = \vec{v} \iff \begin{cases} 2x - y - z = x' \\ -x + 2y + z = y' \end{cases}$.

Déterminer Imf revient à déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur x' et y' pour que le système ci-dessus ait des solutions.

Or pour tout couple (x', y') de réels, ce système aura des solutions (car $\frac{2}{-1} \neq \frac{-1}{2}$).

D'où, tout vecteur $\vec{v}$ de P admet des antécédents par f. Il en résulte que Imf = P.

Autre méthode :

Imf est le sous-espace vectoriel de P engendré par $f(\vec{i}) = 2\vec{i}' - \vec{j}'$, $f(\vec{j}) = -\vec{i}' + 2\vec{j}'$ et $f(\vec{k}) = -\vec{i}' + \vec{j}'$.

Puisque dimP = 2, tout système de plus de deux vecteurs de P est lié. D'où, $(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}))$ est un système lié.

Or $\det((f(\vec{i}), f(\vec{j})) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, alors $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ est libre. Par conséquent, une base de Imf.

Dim Imf = dimP = 2 et Imf est un sous-espace vectoriel de P, d'où Imf = P.

2 – Etudier les endomorphismes

Exercice 13

φ est un endomorphisme du plan vectoriel P, muni d'une base $B = (\vec{i}, \vec{j})$.

La matrice de φ dans la base B est $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ dans la base B.

b) Déterminer l'expression analytique de φ dans la base B.

c) Montrer que $\varphi o \varphi = \varphi$

d) Soit $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de P. Déterminer la matrice de φ dans la base $B' = (\vec{u}, \vec{v})$.

e) Déterminer la matrice de $\psi = Id_P - \varphi$ dans la base B.

Solution 13

a) Dans la base B, $\varphi(\vec{i})$ a pour coordonnées (-5 , 10) et $\varphi(\vec{j})$ a pour coordonnées (-3 , 6).

b) Soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$ dans la base B, deux vecteurs de P, on a :

$$\varphi(\vec{u}) = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5x - 3y \\ 10x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -5x - 3y \\ y' = 10x + 6y \end{cases}.$$

D'où φ est l'application de P vers P qui, à tout vecteur $\vec{u}(x, y)$, associe $\vec{u}'(x', y')$ tel que $\begin{cases} x' = -5x - 3y \\ y' = 10x + 6y \end{cases}$.

c) La matrice de $\varphi o \varphi$ dans la base B est :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-5) \times (-5) + (-3) \times 10 & (-5) \times (-3) + (-3) \times 6 \\ 10 \times (-5) + 6 \times 10 & 10 \times (-3) + 6 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = A.$$

On obtient alors $A^2 = A$, d'où $\varphi o \varphi = \varphi$.

Autres méthodes :

On pouvait aussi montrer que $\varphi \circ \varphi(\vec{i}) = \varphi(\vec{i})$ et $\varphi \circ \varphi(\vec{j}) = \varphi(\vec{j})$ ou utiliser l'expression analytique de φ.

d) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -1$. Puisque $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de P.

On a : $\varphi(\vec{u}) = \varphi(3\vec{i} - 5\vec{j}) = 3\varphi(\vec{i}) - 5\varphi(\vec{j}) = \vec{0}$ et $\varphi(\vec{v}) = \varphi(\vec{i} - 2\vec{j}) = \varphi(\vec{i}) - 2\varphi(\vec{j}) = \vec{i} - 2\vec{j} = \vec{v}$.

D'où la matrice de φ dans la base B' est : $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) La matrice de ψ dans la base B est : $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$.

Exercice 14

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à une base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, défini par : $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ et $\varphi(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

1) Démontrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de l'image Imφ de φ.

Trouver une base du noyau N(φ) de φ.

2) Démontrer que Imφ et N(φ) sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

3) Soit ψ la restriction de φ à Imφ. Démontrer que ψ est un automorphisme de Imφ.

4) Soit ψ^{-1} la bijection réciproque de ψ, trouver la matrice de ψ^{-1} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Solution 14

1) • **Vérifions que $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ appartiennent à Imφ :**

En effet $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\varphi(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$,

D'où $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\varphi(\vec{e}_1) + \frac{1}{2}\varphi(\vec{e}_3) = \varphi\left(\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_3\right)$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\varphi(\vec{e}_1) - \frac{1}{2}\varphi(\vec{e}_3) = \varphi\left(\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_3\right)$.

$\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_3$ et $\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_3$ étant des vecteurs de E, alors $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ appartiennent à Imφ.

Vérifions que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est générateur de Imφ :

Soit $\vec{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

$\vec{v}$ appartient à $\text{Im}\varphi$ signifie qu'on peut trouver un vecteur $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\vec{v} = \varphi(\vec{u})$.

On a alors $\vec{v} = x\varphi(\vec{e}_1) + y\varphi(\vec{e}_2) + z\varphi(\vec{e}_3) = (x+y+z)\vec{e}_1 + (x+2y-z)\vec{e}_2$.

$\vec{v}$ s'écrit donc comme combinaison linéaire de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. D'où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est générateur de $\text{Im}\varphi$.

$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ étant une base de $\mathbb{R}^3$, est libre. D'où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre.

Par conséquent, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\text{Im}\varphi$.

- Soit $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{u} \in N(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow (x+y+z)\vec{e}_1 + (x+2y-z)\vec{e}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}k \\ y = k \quad , k \in \mathbb{R}. \\ z = \frac{1}{2}k \end{cases}$$

D'où $N(\varphi)$ est la droite vectorielle dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -\frac{3}{2}k \\ y = k \quad , k \in \mathbb{R}. \\ z = \frac{1}{2}k \end{cases}$

Une base de $N(\varphi)$ est donc $(\vec{e} = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$.

2) Vérifier que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

En effet, soit a, b et c trois nombres réels.

$$a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e} = \vec{0} \Leftrightarrow (a-3c)\vec{e}_1 + (b+2c)\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3c=0 \\ b+2c=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Le système $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e})$ est donc libre, et par conséquent une base de $\mathbb{R}^3$, puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Comme $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$\vec{u} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}$, α, β et γ étant des nombres réels.

Comme $\vec{u}_1 = \gamma\vec{e}$ appartient à $N(\varphi)$ et $\vec{u}_2 = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$ appartient à $\text{Im}\varphi$, alors $\vec{u}$ s'écrit de façon unique sous la forme : $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1$ appartenant à $N(\varphi)$ et $\vec{u}_2$ appartenant à $\text{Im}\varphi$.

On en déduit alors que $N(\varphi)$ et $\text{Im}\varphi$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

3) • Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\text{Im}\varphi$, a et b deux nombres réels.

$a\vec{u} + b\vec{v}$ appartient à $\text{Im}\varphi$, car $\text{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (donc stable par combinaison linéaire).

Et $\psi(a\vec{u} + b\vec{v}) = \varphi(a\vec{u} + b\vec{v})$ car $a\vec{u} + b\vec{v}$ appartient à $\text{Im}\varphi$.

$= a\varphi(\vec{u}) + b\varphi(\vec{v})$.

$= a\psi(\vec{u}) + b\psi(\vec{v})$ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartient à $\text{Im}\varphi$.

ψ est donc une application linéaire.

- On a $\psi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\psi(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

$\text{Im}\varphi$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, d'où $\varphi(\text{Im}\varphi)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\varphi(\vec{e}_1)$ et $\varphi(\vec{e}_2)$.

Or $(\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2))$ est un système libre ***(le lecteur le vérifiera)*** et comme $(\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2))$ est générateur de $\varphi(\text{Im}\varphi)$ (d'après ce qui précède), alors $(\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2))$ est une base de $\varphi(\text{Im}\varphi)$.

$\varphi(\text{Im}\varphi)$ est donc le plan vectoriel engendré par $\varphi(\vec{e}_1)$ et $\varphi(\vec{e}_2)$.

- $\vec{e}_1 = 2\varphi(\vec{e}_1) - \varphi(\vec{e}_2)$ et $\vec{e}_2 = -\varphi(\vec{e}_1) + \varphi(\vec{e}_2)$ ***(le lecteur le vérifiera)***, donc $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ appartiennent à $\varphi(\text{Im}\varphi)$.

$(\vec{e}_1 , \vec{e}_2)$ étant libre et $\dim\varphi(\mathrm{Im}\varphi) = 2$, $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2)$ est une base de $\varphi(\mathrm{Im}\varphi)$. Et par conséquent, $\varphi(\mathrm{Im}\varphi) = \mathrm{Im}\varphi$.
Or $\psi(\mathrm{Im}\varphi) = \varphi(\mathrm{Im}\varphi) = \mathrm{Im}\varphi$, alors ψ est un endomorphisme surjectif de $\mathrm{Im}\varphi$.
D'où ψ est un automorphisme de $\mathrm{Im}\varphi$.

4) La matrice de ψ dans la base $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2)$ est : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Or $\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, d'où la matrice de ψ^{-1} dans la base $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2)$ est : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

E est un plan vectoriel muni d'une base $B = (\vec{i} , \vec{j})$.

f est l'endomorphisme de E, dont la matrice dans la base B est : $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit a, un nombre réel, on note : $E_a = \left\{\vec{u} \in E ;\ f(\vec{u}) = a\vec{u}\right\}$.

1) Démontrer que f est un automorphisme involutif de E et E_a est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrer que, si a n'appartient pas à {-1 , 1}, alors on a $E_a = \left\{\vec{0}\right\}$.

3) Déterminer E_1 et E_{-1}, en donnant pour chacun de ces sous espaces, une base.
Démontrer que E_1 et E_{-1} sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
En déduire une nouvelle base de E, et donner la matrice de f dans cette nouvelle base.

Solution 15

1) • $\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1$. Puisque $\det(M) \neq 0$, alors f est un endomorphisme bijectif.

C'est-à-dire que f est un automorphisme de E.

Déterminons la matrice M^{-1} de f^{-1} :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = M.$$

On constate que $M^{-1} = M$, d'où $f^{-1} = f$, et par conséquent, f involutif.

- $f(\vec{0}) = \vec{0} = a.\vec{0}$, d'où $\vec{0} \in E_a$. Et par conséquent, E_a est non vide.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E_a et α et β deux réels.

$\vec{u}$ appartient à E_a donc $f(\vec{u}) = a\vec{u}$.

$\vec{v}$ appartient à E_a donc $f(\vec{v}) = a\vec{v}$.

D'où, $f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) = \alpha(a\vec{u}) + \beta(a\vec{v}) = a(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$. D'où $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ appartient à E_a.

Donc E_a est stable par combinaison linéaire et par conséquent, un sous-espace vectoriel de E, donc un espace vectoriel.

2) Soit $\vec{u}(x , y)$ un vecteur de E.

$$\vec{u} \in E_a \Leftrightarrow f(\vec{u}) = a\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = ax \\ -x - 2y = ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-a)x + 3y = 0 \\ -x - (2+a)y = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce dernier système est : det = $a^2 - 1$. Puisque $a \neq 1$ et $a \neq -1$, alors det $\neq 0$.

Par conséquent, le système admet un unique couple solution, qui est le couple (0 , 0). Et donc $E_a = \left\{\vec{0}\right\}$.

3) Soit $\vec{u}(x , y)$ un vecteur de E.

• $\vec{u} \in E_1 \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = x \\ -x - 2y = y \end{cases} \Leftrightarrow x + 3y = 0$

D'où E_1 est la droite vectorielle d'équation $x + 3y = 0$. Une base de E_1 est $(\vec{e}_1 = 3\vec{i} - \vec{j})$.

- $\vec{u} \in E_{-1} \Leftrightarrow f(\vec{u}) = -\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=-x \\ -x-2y=-y \end{cases} \Leftrightarrow x+y=0$.

D'où E_{-1} est la droite vectorielle d'équation x + y = 0. Une base de E_{-1} est $(\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j})$.

- $\vec{u} \in E_1 \cap E_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$. D'où $E_1 \cap E_{-1} = \{\vec{0}\}$.

De plus, on a $\dim E_1 + \dim E_{-1} = \dim E$, alors E_1 et E_{-1} sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

- $\det = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, donc $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre de E et dimE = 2, alors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E.

- $\vec{e}_1$ appartient à E_1 donc $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ appartient à E_{-1} donc $f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$.

La matrice de f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est alors : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16

E est un espace vectoriel de dimension 3. $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de E.

Soit φ l'endomorphisme de E, qui à tout vecteur $\vec{v}(x, y, z)$ de E, associe le vecteur $\vec{v}'(x', y', z')$ de E tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \\ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z \\ z' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \end{cases}.$$

1) Déterminer le noyau de φ. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

2) Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par φ.

3) Soit $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$, $\vec{v}$ étant un vecteur quelconque de E. Déterminer $\varphi(\vec{v}')$, en déduire $\varphi \circ \varphi$.

Solution 16

1) Soit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E.

$$\varphi(\vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$ ***(Le lecteur résoudra le système).***

D'où le noyau de φ est $\ker \varphi = \{\vec{0}\}$. On peut conclure que φ est un endomorphisme injectif de E, donc φ est bijectif.

2) Soit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E.

$$\varphi(\vec{v}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = x \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = y \\ -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = z \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 0.$$

D'où l'ensemble des vecteurs invariants par φ est le plan vectoriel dont une équation cartésienne est $x + y + z = 0$.

3) • Soit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E et $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$.

Par définition de φ, on a : $\vec{v}' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z)\vec{i} + \frac{1}{3}(-2x + y - 2z)\vec{j} + \frac{1}{3}(-2x - 2y + z)\vec{k}$.

Donc, $\varphi(\vec{v}')=\frac{1}{3}(x-2y-2z)\varphi(\vec{i})+\frac{1}{3}(-2x+y-2z)\varphi(\vec{j})+\frac{1}{3}(-2x-2y+z)\varphi(\vec{k})$.

Or $\varphi(\vec{i})=\frac{1}{3}(\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k})$, $\varphi(\vec{j})=\frac{1}{3}(-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})$ et $\varphi(\vec{k})=\frac{1}{3}(-2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$,

Le lecteur vérifiera qu'on a alors $\varphi(\vec{v}')=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\vec{v}$.

- On remarque que, pour tout vecteur $\vec{v}$ de E, si $\varphi(\vec{v})=\vec{v}'$, alors $\varphi(\vec{v}')=\vec{v}$.

Donc $\varphi\circ\varphi(\vec{v})=\varphi[\varphi(\vec{v})]=\varphi(\vec{v}')=\vec{v}$. On peut donc conclure que $\varphi\circ\varphi = Id_E$.

Exercice 17

Soit $B=(\vec{u},\vec{v})$ une base d'un espace vectoriel E. On considère le réel m, et on définit l'application linéaire f_m de E vers E par : $f_m(\vec{u})=(1+m)\vec{u}-\vec{v}$ et $f_m(\vec{v})=3\vec{u}+(1-m)\vec{v}$.

Déterminer m pour que f_m soit non bijective.

Déterminer, pour chacune des applications linéaires correspondant à ces valeurs, le noyau et l'image de f_m.

Solution 17

- f_m est non bijective si et seulement si $\det(f_m(\vec{u}),f_m(\vec{v}))=0$.

Or $\det(f_m(\vec{u}),f_m(\vec{v}))=\begin{vmatrix}1+m & 3\\ -1 & 1-m\end{vmatrix}=-m^2+4$, alors f_m est non bijective si et seulement si m = 2 ou m = -2.

- Pour m = 2 : $f_2(\vec{u})=3\vec{u}-\vec{v}$ et $f_2(\vec{v})=3\vec{u}-\vec{v}$.

- Soit $\vec{X}=x\vec{u}+y\vec{v}$ un vecteur de E.

$\vec{X}$ appartient à $\ker f_2 \Leftrightarrow f_2(\vec{X})=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+3y=0\\ -x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow x+y=0.$

D'où $\ker f_2$ est la droite vectorielle d'équation x + y = 0.

- $f_2(\vec{u})=f_2(\vec{v})\neq\vec{0}$. D'où l'image de f_2 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $f_2(\vec{u})=3\vec{u}-\vec{v}$.

- Pour m = -2 : $f_{-2}(\vec{u})=-\vec{u}-\vec{v}$ et $f_{-2}(\vec{v})=3\vec{u}+3\vec{v}$.

- Soit $\vec{X}=x\vec{u}+y\vec{v}$ un vecteur de E.

$\vec{X}$ appartient à $\ker f_{-2} \Leftrightarrow f_{-2}(\vec{X})=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+3y=0\\ -x+3y=0\end{cases} \Leftrightarrow x-3y=0.$

D'où $\ker f_{-2}$ est la droite vectorielle d'équation x – 3y = 0.

- $f_{-2}(\vec{u})=-3f_{-2}(\vec{v})\neq\vec{0}$. D'où l'image de f_{-2} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $f_{-2}(\vec{u})=-\vec{u}-\vec{v}$.

Exercice 18

Un plan vectoriel P, est rapporté à une base $(\vec{i},\vec{j})$. Déterminer les matrices, dans cette base, des endomorphismes φ de P, tels que : $\varphi(\vec{i})=-2\vec{i}-\vec{j}$ et $\varphi\circ\varphi(\vec{j})=-\vec{i}$.

Solution 18

Posons $\varphi(\vec{j})=a\vec{i}+b\vec{j}$, où a et b sont des réels.

On a alors : $\varphi\circ\varphi(\vec{j})=\varphi(a\vec{i}+b\vec{j})=a\varphi(\vec{i})+b\varphi(\vec{j})=a(-2+b)\vec{i}+(-a+b^2)\vec{j}$.

Et donc $\varphi\circ\varphi(\vec{j})=-\vec{i}$ équivaut à $\begin{cases}a(-2+b)=-1\\ -a+b^2=0\end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases}a=b^2\\ b^3-2b^2+1=0\end{cases}$.

La résolution de l'équation $b^3 - 2b^2 + 1 = 0$ donne pour solutions b = 1 ou $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Si **b = 1**, alors on a : a = 1.

Si $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, alors on a : $a=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Si $b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors on a : $a=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Les matrices des endomorphismes φ tels que $\varphi(\vec{i})=-2\vec{i}-\vec{j}$ et $\varphi\circ\varphi(\vec{j})=-\vec{i}$ sont donc :

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2 & \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\\ -1 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}-2 & \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ -1 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}.$$

Exercice 19

Soit f endomorphisme d'un espace vectoriel E, tel que, pour tout vecteur $\vec{v}$ de E, on a : $f\circ f(\vec{v})=\vec{0}$.
Quel est le noyau de fof ? Montrer que le noyau de f contient f(E).
Montrer que l'application φ de E vers E qui au vecteur $\vec{u}$ de E associe le vecteur $\varphi(\vec{u})=\vec{u}+f(\vec{u})$ est un automorphisme.

Solution 19

- Pour tout vecteur $\vec{v}$ de E, on a $f\circ f(\vec{v})=\vec{0}$. D'où kerfof = E.
- Soit $\vec{v}$ un vecteur de f(E) ; il existe un vecteur $\vec{u}$ de E tel que $f(\vec{u})=\vec{v}$.

  Donc $f(\vec{v})=f\circ f(\vec{u})=\vec{0}$. D'où $\vec{v}$ appartient à kerf. On conclut alors que f(E) est inclus dans kerf.
- **Montrons que φ est linéaire :** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E et x et y deux réels quelconques.

$$\begin{aligned}\varphi(x\vec{u}+y\vec{v})=(x\vec{u}+y\vec{v})+f(x\vec{u}+y\vec{v})&=x\vec{u}+y\vec{v}+xf(\vec{u})+yf(\vec{v}) \quad \text{(car f est linéaire)}\\ &=x\vec{u}+xf(\vec{u})+y\vec{v}+yf(\vec{v})\\ &=x(\vec{u}+f(\vec{u}))+y(\vec{v}+f(\vec{v}))\\ &=x\varphi(\vec{u})+y\varphi(\vec{v})\end{aligned}$$

Par conséquent φ est une application linéaire de E vers E, donc un endomorphisme de E.
Déterminons le noyau de φ :
Soit $\vec{v}$ un vecteur de E.
$\vec{v}$ appartient à kerφ si et seulement si, $\varphi(\vec{v})=\vec{0}$. C'est-à-dire $f(\vec{v})=-\vec{v}$. On obtient alors $f(\vec{v})=-f\circ f(\vec{v})=\vec{0}$.
Comme $f(\vec{v})=-\vec{v}$ et $f(\vec{v})=\vec{0}$, alors $\vec{v}=\vec{0}$. Donc on a $\ker\varphi\subset\left\{\vec{0}\right\}$.
Or, φ étant linéaire, on a $\varphi(\vec{0})=\vec{0}$. D'où $\ker\varphi=\left\{\vec{0}\right\}$.
Par conséquent φ est un endomorphisme injectif, donc bijectif de E. Finalement, φ est un automorphisme de E.

Exercice 20

P est un plan vectoriel, dont $(\vec{i},\vec{j})$ est une base.

Soit f une application linéaire de P dans P ayant pour matrice dans la base $(\vec{i},\vec{j})$: $\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3} & -\dfrac{4}{3}\\ -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$

Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par f est une droite vectorielle D dont on donnera une base $(\vec{u})$.
Montrer que l'ensemble des vecteurs transformés par f en leurs opposés est une droite vectorielle D' dont on précisera une base $(\vec{v})$.
Vérifier que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de P et d[illegible]er la matrice de f dans cette base. Montrer que fof = Id$_P$.

Solution 20

• Soit $\vec{X}(x, y)$ un vecteur du plan vectoriel P.

$f(\vec{X}) = \vec{X}$ équivaut à $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}y = x \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = y \end{cases}$. C'est-à-dire $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y = 0 \end{cases}$. Ce système se réduit à l'équation $x + 2y = 0$.

D'où l'ensemble des vecteurs invariants par f est la droite vectorielle D, d'équation $x + 2y = 0$.

Une base de D est $(\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j})$.

• Soit $\vec{X}(x, y)$ un vecteur du plan vectoriel P.

$f(\vec{X}) = -\vec{X}$ équivaut à $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}y = -x \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = -y \end{cases}$. C'est-à-dire $\begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y = 0 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 0 \end{cases}$.

Ce système se réduit à l'équation $x - y = 0$. D'où l'ensemble des vecteurs transformés en leurs opposés est la droite vectorielle D' d'équation $x - y = 0$. Une base de D' est $(\vec{v} = \vec{i} + \vec{j})$.

• $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. D'où $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de P.

• $\vec{u}$ appartient à D, donc $f(\vec{u}) = \vec{u}$ et $\vec{v}$ appartient à D', donc $f(\vec{v}) = -\vec{v}$.

Donc la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque $A^2 = I$ (matrice de Id_P), alors $fof = Id_P$.

Exercice 21

P est un plan vectoriel, dont $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base. On considère les vecteurs $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j}$.

Soit f endomorphisme de E tel que : $f(\vec{v}) = \vec{w}$ et $f(\vec{w}) = 2\vec{v}$.

Calculer $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$, $f \circ f(\vec{i})$ et $f \circ f(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Préciser la matrice M de f dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$ puis calculer M^2 et M^3.

Solution 21

• $\begin{cases} f(\vec{v}) = \vec{w} \\ f(\vec{w}) = 2\vec{v} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} f(2\vec{i} - \vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} \\ f(\vec{i} + \vec{j}) = 4\vec{i} - 2\vec{j} \end{cases}$. C'est-à-dire $\begin{cases} 2f(\vec{i}) - f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} \\ f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = 4\vec{i} - 2\vec{j} \end{cases}$.

De ce système on déduit que $\begin{cases} f(\vec{i}) = \frac{5}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} \\ f(\vec{j}) = \frac{7}{3}\vec{i} - \frac{5}{3}\vec{j} \end{cases}$.

• $f \circ f(\vec{i}) = f\left(\frac{5}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}\right) = \frac{5}{3}f(\vec{i}) - \frac{1}{3}f(\vec{j}) = 2\vec{i}$.

$f \circ f(\vec{j}) = f\left(\frac{7}{3}\vec{i} - \frac{5}{3}\vec{j}\right) = \frac{7}{3}f(\vec{i}) - \frac{5}{3}f(\vec{j}) = 2\vec{j}$.

• La matrice de f dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est $M = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

- $M^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{9} - \frac{7}{9} & -\frac{35}{9} + \frac{35}{9} \\ -\frac{5}{9} + \frac{5}{9} & -\frac{7}{9} + \frac{25}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$M^3 = M \times M^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & \frac{14}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$.

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 22
30 minutes

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

a) F est l'ensemble des suites (u_n) telles que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 5u_n = 0$.

b) G est l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $f'' + af' + bf = \theta$, où θ désigne l'application nulle de $\mathbb{R}$.

Exercice 23
45 minutes

Soit a et b deux réels, P est un plan vectoriel, dont $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base.

On définit l'endomorphisme φ_{ab} par sa matrice dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$: $A = \begin{pmatrix} a-1 & -2a \\ 2ab & b(a-1) \end{pmatrix}$.

Quels sont les endomorphismes φ_{ab} bijectifs ?

Déterminer le noyau et l'image de φ_{ab}. On discutera suivant les valeurs du couple (a , b).

Préciser en particulier le noyau et l'image de $\varphi_{1,0}$ et donner pour chacun de ces sous-espaces vectoriels, une base.

Exercice 24
45 minutes

E désigne un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$, et f est un endomorphisme de E tel que N(f) = Im(f).

Soit $\vec{\alpha}$ un vecteur non nul de N(f).

a) Quelle est la dimension de N(f) ? De Im(f) ?

b) Etudier fof.

c) Démontrer l'existence de $\vec{\beta}$, vecteur non nul tel que $f(\vec{\beta}) = \vec{\alpha}$.

Démontrer que $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ est une base de E et trouver la matrice de f dans cette base.

Retrouver alors la matrice de fof dans cette base.

d) $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de E, on pose $\vec{\alpha} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Trouver la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 25
60 minutes

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base d'un espace vectoriel E, et soient $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{w} = 2\vec{j} + \vec{k}$.

1) Démontrer que $(\vec{i}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de E et que $(\vec{v}, \vec{w})$ engendre un plan vectoriel P.

2) Soit φ une forme linéaire de E, telle que : $\varphi(\vec{i}) = 1$ et $\varphi(\vec{v}) = \varphi(\vec{w}) = 0$.

Calculer $\varphi(\vec{j})$, $\varphi(\vec{k})$ et plus généralement, $\varphi(\vec{m})$ en fonction du triplet (x , y , z) des coordonnées du vecteur $\vec{m}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

En déduire qu'il existe une unique forme linéaire φ satisfaisant aux conditions fixées au début de cette question.

3) Démontrer que : $\varphi(\vec{m}) = 0$ si et seulement si, $\vec{m}$ appartient à P.

En déduire une équation de P dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

4) Soit ψ une forme linéaire de E, telle que : pour tout vecteur $\vec{m}$ de P, $\psi(\vec{m}) = 0$ et il existe $\vec{m}$ vecteur de E tel que $\psi(\vec{m}) \neq 0$. Démontrer que $\psi(\vec{i}) \neq 0$, et pour tout vecteur $\vec{m}$ de E, $\psi(\vec{m}) = \psi(\vec{m}) \times \psi(\vec{i})$.

Exercice 26
30 minutes

Soit E, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que, s'il existe un endomorphisme φ de E tel que pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, $\varphi \circ \varphi(\vec{u}) = \vec{0}$, alors, l'image, Im($\varphi$), de φ, est incluse dans son noyau, ker(φ).

2) Lorsque $E = \mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, démontrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \mapsto & f(z) = y \end{array}$$ x et y étant des réels ; est un endomorphisme de $\mathbb{C}$

vérifiant la condition de la question 1).
Déterminer Imf et Kerf. Vérifier la propriété du 1).

Exercice 27 BAC C – Orléans – Tours – 1974 70 minutes

P désigne un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à sa base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'ensemble Λ des endomorphismes f de P, ayant pour matrice, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$,

$A_f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des nombres réels. On pose $f^2 = fof$, $f^3 = fofof = f^2of$, etc.

1) f étant un élément de Λ, donner les matrices des endomorphismes f^2, f^3, f^4.
Conjecturer alors la forme de la matrice de f^n pour tout entier naturel non nul n et démontrer ce résultat en raisonnant par récurrence.

2) Soit $\overrightarrow{w_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ un vecteur fixé de P.

Calculer $\overrightarrow{w_1} = f(\overrightarrow{w_0})$, $\overrightarrow{w_2} = f(\overrightarrow{w_1})$, $\overrightarrow{w_3} = f(\overrightarrow{w_2})$, en fonction de x_0 et y_0.

Calculer les coordonnées x_n et y_n de $\overrightarrow{w_n} = f(\overrightarrow{w_{n-1}})$, d'une part en fonction de x_{n-1} et y_{n-1}, d'autre part en fonction de x_0, y_0 et n, pour tout entier naturel non nul n.

3) *Application :*
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = -1$, $v_0 = 1$, $u_n = 2u_{n-1}$ et $v_n = 2v_{n-1} - u_{n-1}$.
Calculer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 28 BAC C – Maroc – 1974 45 minutes

Soit E, espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, et soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E.

On considère f, l'endomorphisme de E, représenté dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par sa matrice $M = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$.

1) Déterminer, suivant les valeurs de a et b, l'image et le noyau de f, notées respectivement Imf et Kerf.
2) Déterminer les matrices M, telles que $M^2 = M$.
3) Déterminer les matrices M, telles que $M^2 = I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité.

Exercice 29 BAC C – Cameroun – 2005 30 minutes

Soit E_2 un plan vectoriel rapporté à une base orthonormée $B = (\vec{i}, \vec{j})$, g l'endomorphisme de E_2 qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ associe le vecteur $\vec{u}' = \left(x + \frac{1}{2}y\right)\vec{i} + (-2x - y)\vec{j}$.

1)a) Déterminer la matrice de g dans la base B et montrer que g n'est pas bijectif.
b) Déterminer le noyau kerg et l'image Img de g. c) En déduire que kerg = Img.
2) Soit $\vec{v}$ un vecteur de kerg. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ de E_2 tel que $g(\vec{u}) = \vec{v}$.
3) Soit $\vec{e}_1(-1, 2)$ et $\vec{e}_2(-1, 1)$.
a) Montrer que $B' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E_2.
b) Donner la matrice de g dans la base B'.

Exercice 30 45 minutes

Soit V un plan vectoriel rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et φ l'endomorphisme de V de matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$\begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$, λ, a et b étant des nombres réels donnés. On suppose a et b non tous deux nuls.

1) Déterminer le noyau et l'image de φ. A quelle condition $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$?

2) On suppose $\ker\varphi \neq \mathrm{Im}\varphi$.
En prenant pour base $(\vec{u}, \vec{v})$, avec $\vec{u} \in \mathrm{Im}\varphi$ et $\vec{v} \in \ker\varphi$, trouver la matrice de φ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

3) On suppose $\ker\varphi = \mathrm{Im}\varphi$. Montrer que l'on a $b \neq 0$ et que $(b\vec{i} - a\vec{j}, \vec{j})$ est une base de V.
Quelle est la matrice de φ dans cette base ? Que peut-on dire de $\varphi o \varphi$?

Exercice 31 — 50 minutes

V est un espace vectoriel, muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$.

On définit l'endomorphisme φ de V comme suit : soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ dans V, $\varphi(\vec{u}) = (x - 2y)\vec{i} + (-2x + y)\vec{j}$.

1) Ecrire la matrice M de φ dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les nombres réels λ tels qu'il existe des vecteurs $\vec{u}$ non nuls vérifiant $\varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.

On trouvera deux vecteurs λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$).

Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de V tels que $\varphi(\vec{u}) = \lambda_1\vec{u}$ est la droite vectorielle de base $(\vec{i} + \vec{j})$ et que l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$, tels que $\varphi(\vec{u}) = \lambda_2\vec{u}$ est la droite vectorielle de base $(\vec{i} - \vec{j})$.

2) Ecrire la matrice M' de φ dans la base $B' = (\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j})$.

n étant un entier naturel non nul, on pose $\varphi^1 = \varphi$ et $\varphi^{n+1} = \varphi o \varphi^n$.
Calculer par récurrence sur n la matrice de l'endomorphisme φ^n dans la base B'.

Exercice 32 — 45 minutes

Soit V un plan vectoriel. End(V) désigne l'ensemble des endomorphismes de V.

1) On suppose que φ appartient à End(V) et $\mathrm{Im}\varphi = \ker\varphi$.

a) Démontrer que $\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim \ker\varphi = 1$.

b) Soit $\vec{i}$ un vecteur non nul de $\ker\varphi$.

Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{j}$ tel que $\varphi(\vec{j}) = \vec{i}$ et tel que $(\vec{i}, \vec{j})$ soit une base de V.

c) On pose $\varphi o \varphi = \varphi^2$ et ω désigne l'application nulle de V. Démontrer que $\varphi^2 = \omega$.

2) Réciproquement, soit $\varphi \in$ End(V) tel que $\varphi \neq \omega$ et $\varphi^2 = \omega$.

Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ de V tel que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ soit une base de V.

Quelle est la matrice de φ dans cette base ? Montrer que $\mathrm{Im}\varphi = \ker\varphi$.

Exercice 33 — 35 minutes

Soit V un espace vectoriel de dimension 3 et φ appartenant à End(V).

On pose $\varphi o \varphi = \varphi^2$ et $\varphi o \varphi o \varphi = \varphi^3$. On désigne par ω l'application nulle de V. On suppose $\varphi^2 \neq \omega$ et $\varphi^3 = \omega$.

1) Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}), \varphi^2(\vec{u}))$ soit une base de V.

2) Soit $\vec{v} = x\vec{u} + y\varphi(\vec{u}) + z\varphi^2(\vec{u})$ un vecteur quelconque de V.

Calculer $\varphi(\vec{v})$, $\varphi^2(\vec{v})$ et $\varphi^3(\vec{v})$. En déduire le noyau et l'image de φ, φ^2 et φ^3.

Exercice 34 — **BAC CE – Cameroun – 1988** — 35 minutes

E est un plan vectoriel muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$. On note End(E), l'ensemble des endomorphismes de E

On note Id_E l'application identique de E.

$\vec{u}$ étant un vecteur non nul. Soit Q l'ensemble des endomorphismes f de E qui vérifient : $fof = -Id_E$.

1) Montrer que tout élément f de Q est bijectif et déterminer f^{-1}.

2) Soit f un élément de Q.

a) Montrer que, pour tout réel λ, $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ si et seulement si, $\vec{u} = \vec{0}$.

b) En déduire que, pour tout élément non nul $\vec{u}$ de E, $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ est une base de E.

c) Ecrire la matrice de f dans cette base.

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

Solution 22

a) F est inclus dans $\mathfrak{I}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions définies de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, car les suites sont des applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. Il suffit donc de montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{I}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

- Notons (θ_n) la suite nulle.

On a pour tout entier naturel n, $\theta_{n+2} = \theta_{n+1} = \theta_n = 0$, et donc $\theta_{n+2} - 3\theta_{n+1} + 5\theta_n = 0$.

D'où (θ_n) appartient à F ; et par conséquent, F est non vide.

- Soit (v_n) et (u_n) deux suites de F, a et b deux nombres réels.

$(u_n) \in F$, donc pour tout n entier naturel, on a $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 5u_n = 0$.

$(v_n) \in F$, donc pour tout n entier naturel, on a $v_{n+2} - 3v_{n+1} + 5v_n = 0$. Ainsi, soit n entier naturel, on a :

$(au_{n+2} + bv_{n+2}) - 3(au_{n+1} + bv_{n+1}) + 5(au_n + bv_n) = a(u_{n+2} - 3u_{n+1} + 5u_n) + b(v_{n+2} - 3v_{n+1} + 5v_n) = a\times 0 + b\times 0 = 0.$

D'où la suite $(au_n + bv_n)$ appartient à F.

Et comme $(au_n + bv_n) = a(u_n) + b(v_n)$, alors F est stable par combinaison linéaire.

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{I}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Il en résulte que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) G est inclus dans $\mathfrak{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Il suffit donc de montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- θ est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a :

$(\theta'' + a\theta' + b\theta)(x) = \theta''(x) + a\theta'(x) + b\theta(x) = 0 + a\times 0 + b\times 0 = 0.$

D'où $\theta'' + a\theta' + b\theta = \theta$. D'où θ appartient à G et par conséquent, G est non vide.

- Soit f et g deux éléments de G, α et β deux réels.

f appartient à G, donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'' + af' + bf = \theta$.

g appartient à G, donc g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'' + ag' + bg = \theta$.

D'où, $\alpha f + \beta g$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)'' + a(\alpha f + \beta g)' + b(\alpha f + \beta g) = (\alpha f'' + \beta g'') + a(\alpha f' + \beta g') + b(\alpha f + \beta g) &= \alpha(f'' + af' + bf) + \beta(g'' + ag' + bg)\\ &= \alpha.\theta + \beta.\theta\\ &= \theta.\end{aligned}$$

D'où $\alpha f + \beta g$ appartient à G. G est donc stable par combinaison linéaire.

Il en résulte que G est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Solution 23

- φ_{ab} est bijectif si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Or $\det A = \begin{vmatrix} a-1 & -2a \\ 2ab & b(a-1) \end{vmatrix} = b(a-1)^2 + 4a^2b = b(5a^2 - 2a + 1)$, alors $\det(A) = 0$ si et seulement si $b = 0$.

On en déduit que, φ_{ab} est bijectif si et seulement si $b \neq 0$.

- **Si $b \neq 0$**, alors φ_{ab} est bijectif. Donc $\ker\varphi_{ab} = \{\vec{0}\}$ et $\mathrm{Im}\varphi_{ab} = P$.

Si $b = 0$, alors on a $A = \begin{pmatrix} a-1 & -2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Soit $\vec{u}(x, y)$ dans la base B, un vecteur du plan vectoriel P.

$\vec{u} \in \ker\varphi_{a,0} \iff \varphi_{a,0}(\vec{u}) = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} a-1 & -2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (a-1)x - 2ay = 0.$

Or le couple $(a-1, -2a)$ ne peut être $(0, 0)$, car sinon, on aurait, $a = 1$ et $a = 0$ (ce qui est absurde).

D'où $\ker\varphi_{a,0}$ est la droite vectorielle d'équation $(a-1)x - 2ay = 0$.

Une base de $\ker\varphi_{a,0}$ est $(2a\vec{i} + (a-1)\vec{j})$.

- On a $\varphi_{a,0}(\vec{i}) = (a-1)\vec{i}$ et $\varphi_{a,0}(\vec{j}) = -2a\vec{i}$.

Or $\varphi_{a,0}(\vec{i})$ et $\varphi_{a,0}(\vec{j})$ s'écrivant comme combinaison linéaire de $\vec{i}$, et ne pouvant être simultanément nuls, (car sinon $a-1=-2a=0$), alors $\mathrm{Im}\varphi_{a,0}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i}$.

- En particulier, $\ker\varphi_{1,0}$ est la droite vectorielle d'équation y = 0, et dont une base est $(\vec{i})$.

  $\mathrm{Im}\varphi_{1,0}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(\vec{i})$.

Remarquons que $\ker\varphi_{1,0}=\mathrm{Im}\varphi_{1,0}$.

Solution 24

a) On a dimN(f) + dimIm(f) = dimE.
Or N(f) = Im(f) et dimE = 2. D'où dimN(f) = dimIm(f) = 1.

b) Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E.
On sait que $f(\vec{u})$ est un élément de Im(f).

Or Im(f) = N(f), alors $f(\vec{u})$ est un élément de N(f) ; c'est-à-dire $f(f(\vec{u}))=\vec{0}$.

On vient de prouver que, pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, $f\circ f(\vec{u})=\vec{0}$.
Alors fof est l'application nulle de E.

c) • Soit $\vec{\alpha}$ un vecteur de $N(f)-\{\vec{0}\}$, puisque N(f) = Im(f), alors $\vec{\alpha}$ appartient à $Im(f)-\{\vec{0}\}$.

Il en résulte qu'il existe un vecteur $\vec{\beta}$, non nul de E, tel que $f(\vec{\beta})=\vec{\alpha}$.

- **Vérifions que $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ est libre :**

En effet, soit a et b deux réels.
$a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}=\vec{0}$, si et seulement si $af(\vec{\beta})+b\vec{\beta}=\vec{0}$. Alors $f(af(\vec{\beta})+b\vec{\beta})=\vec{0}$. C'est-à-dire $af\circ f(\vec{\beta})+bf(\vec{\beta})=\vec{0}$.

Or $f\circ f(\vec{\beta})=\vec{0}$, car fof est l'application nulle, alors on peut donc dire que $bf(\vec{\beta})=\vec{0}$.

Puisque $f(\vec{\beta})=\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, alors b = 0.

Puisque b = 0, alors l'égalité $a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}=\vec{0}$ devient $a\vec{\alpha}=\vec{0}$. Il s'en suit que a = 0. (car $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$).

D'où a = b = 0. On en déduit que $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ est un système libre de E.

Et comme E est un plan vectoriel, $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ est une base de E.

- $\vec{\alpha}$ appartient à N(f), donc $f(\vec{\alpha})=\vec{0}$.

Or $f(\vec{\beta})=\vec{\alpha}=1.\vec{\alpha}+0.\vec{\beta}$, d'où la matrice de f dans la base $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ est : $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

La matrice de fof dans la même base est : $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

d) $\vec{\alpha}=2\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{\alpha}$ appartient à N(f), alors $f(\vec{\alpha})=\vec{0}$. C'est-à-dire $f(\vec{j})=-2f(\vec{i})$.

Posons $f(\vec{i})=a\vec{i}+b\vec{j}$.
On a forcément (a , b) ≠ (0 , 0), car sinon f serait l'application nulle et N(f) serait alors égal à E. Or N(f) est une droite vectorielle.

La matrice de f est alors sous la forme : $\begin{pmatrix}a&-2a\\b&-2b\end{pmatrix}$. On sait quand même que :

- Primo, N(f) est une droite vectorielle et $\vec{\alpha}=2\vec{i}+\vec{j}$ appartient à N(f).

Comme $\vec{\alpha}=2\vec{i}+\vec{j}$ est non nul, alors une base de N(f) est $(\vec{\alpha})$.

- Secundo, $f(\vec{j})=-2f(\vec{i})$ et $f(\vec{i})$ est non nul.

Alors Im(f) est la droite vectorielle engendrée par $f(\vec{i})=a\vec{i}+b\vec{j}$.

- Tertio, $\mathrm{Im}(f) = N(f)$, donc $(\vec{\alpha}, f(\vec{i}))$ est un système lié, c'est-à-dire $\det(\vec{\alpha}, f(\vec{i})) = 0$. Ce qui signifie, $2b - a = 0$.

Et finalement, $a = 2b$ et la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est de la forme : $\begin{pmatrix} 2b & -4b \\ b & -2b \end{pmatrix}$, où b est un réel non nul quelconque.

Le lecteur vérifiera que tout endomorphisme f de E dont la matrice est sous la forme $\begin{pmatrix} 2b & -4b \\ b & -2b \end{pmatrix}$ satisfait toutes les hypothèses de l'énoncé sur f.

Solution 25

1) • Soit a, b et c trois nombres réels.

$a\vec{i} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ équivaut à $(a+b)\vec{i} + (-b+2c)\vec{j} + c\vec{k} = \vec{0}$.

C'est-à-dire ($a + b = 0$, $-b + 2c = 0$ et $c = 0$) et finalement $a = b = c = 0$.

$(\vec{i}, \vec{v}, \vec{w})$ est donc un système libre, et puisque $\dim E = 3$, alors $(\vec{i}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de E.

- Puisque $(\vec{i}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre, alors $(\vec{v}, \vec{w})$ l'est aussi.

Soit P le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, le système $(\vec{v}, \vec{w})$ est générateur de P.

Il en résulte que, $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base de P. Par conséquent $(\vec{v}, \vec{w})$ engendre le plan vectoriel P.

2) • $\varphi(\vec{v}) = \varphi(\vec{i} - \vec{j}) = \varphi(\vec{i}) - \varphi(\vec{j})$ et $\varphi(\vec{w}) = \varphi(2\vec{j} + \vec{k}) = 2\varphi(\vec{j}) + \varphi(\vec{k})$.

Or $\varphi(\vec{i}) = 1$ et $\varphi(\vec{v}) = \varphi(\vec{w}) = 0$, alors $\varphi(\vec{j}) = \varphi(\vec{i}) = 1$ et $\varphi(\vec{k}) = -2\varphi(\vec{j}) = -2$.

- De façon générale, soit $\vec{m} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$\varphi(\vec{m}) = \varphi(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j}) + z\varphi(\vec{k}) = x + y - 2z$.

- La définition de $\varphi(\vec{m})$ est unique, d'où il existe une unique forme linéaire φ satisfaisant aux conditions :

$\varphi(\vec{i}) = 1$ et $\varphi(\vec{v}) = \varphi(\vec{w}) = 0$.

3) • **Supposons que $\vec{m}$ appartient à P**, alors, il existe deux réels a et b tels que $\vec{m} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

On a alors $\varphi(\vec{m}) = a\varphi(\vec{v}) + b\varphi(\vec{w}) = a \times 0 + b \times 0 = 0$. Finalement, si $\vec{m}$ appartient à P, alors $\varphi(\vec{m}) = 0$.

Supposons maintenant que $\vec{m}$ n'appartient pas à P, alors il existe un réel a non nul et deux réels b et c tels que $\vec{m} = a\vec{i} + b\vec{u} + c\vec{v}$.

On a alors $\varphi(\vec{m}) = a\varphi(\vec{i}) + b\varphi(\vec{u}) + c\varphi(\vec{v}) = a$. Puisque a est non nul, alors on a $\varphi(\vec{m}) \neq 0$.

D'où si $\varphi(\vec{m}) = 0$ alors $\vec{m}$ appartient à P.

- On peut donc conclure que, $\varphi(\vec{m}) = 0$ si et seulement si $\vec{m}$ appartient à P.

- Soit $\vec{m} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,

$\vec{m}$ appartient à P équivaut à $\varphi(\vec{m}) = 0$. C'est-à-dire $x + y - 2z = 0$.

D'où P est le plan vectoriel dont une équation est $x + y - 2z = 0$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

4) • Supposons que $\psi(\vec{i}) = 0$.

Soit $\vec{m}$ un vecteur de E, il existe trois réels a, b et c tels que $\vec{m} = a\vec{i} + b\vec{u} + c\vec{v}$.

Comme $b\vec{u} + c\vec{v}$ appartient à P, alors $\psi(b\vec{u} + c\vec{v}) = 0$.

Comme on a supposé que $\psi(\vec{i}) = 0$, alors $\psi(\vec{m}) = a\psi(\vec{i}) + \psi(b\vec{u} + c\vec{v}) = 0$.

Il en résulte que pour tout vecteur $\vec{m}$, on a $\psi(\vec{m}) = 0$. Ce qui est contraire à l'énoncé.

D'où $\psi(\vec{i}) \neq 0$.

• Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i}$, puisque $(\vec{i}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de E, alors D et P forment deux sous-espaces supplémentaires de E.

Ainsi, tout vecteur $\vec{m}$ de E s'écrit de façon unique sous la forme $\vec{m} = \vec{m'} + \vec{m''}$, où $\vec{m'} \in D$ et $\vec{m''} \in P$.

D étant la droite vectorielle engendrée par $\vec{i}$, il existe un réel unique α, tel que $\vec{m'} = \alpha\vec{i}$.

On obtient alors : $\varphi(\vec{m}) = \varphi(\vec{m'}) + \varphi(\vec{m''}) = \varphi(\vec{m'}) = \varphi(\alpha\vec{i}) = \alpha\varphi(\vec{i}) = \alpha$.

Et $\psi(\vec{m}) = \psi(\vec{m'}) + \psi(\vec{m''}) = \psi(\vec{m'}) = \psi(\alpha\vec{i}) = \alpha\psi(\vec{i}) = \varphi(\vec{m}) \times \psi(\vec{i})$, car $\varphi(\vec{m}) = \alpha$.

D'où pour tout $\vec{m}$ de E, $\psi(\vec{m}) = \psi(\vec{m}) \times \psi(\vec{i})$.

Solution 26

1) Déjà traitée à l'exercice 19.

2) • Soit z = x + iy et z' = a + ib, où x, y, a et b sont des nombres réels.

Soit α et β deux réels. αz + βz' = (αx + βa) + i(αy + βb), donc f(αz + βz') = αy + βb = αf(z) + βf(z').

f est une application linéaire de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$. C'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{C}$.

• De plus, on a, soit z = x + iy, où x et y sont des nombres réels quelconques.

fof(z) = f[f(z)] = f(y) = f(y + 0i) = 0.

D'où, pour tout complexe z, on a fof(z) = 0.

f vérifie donc la condition de la question 1).

• Soit z = x + iy, où x et y sont des réels.

z appartient à kerf si et seulement si f(z) = 0. C'est-à-dire y = 0.

En d'autres termes, cela signifie que z appartient à $\mathbb{R}$. D'où $\ker f = \mathbb{R}$.

• Soit z' = x' + iy', où x' et y' sont des nombres réels,

z' appartient à Imf si et seulement si , il existe un complexe z = x + iy, x et y étant des réels, tel que f(z) = z'.

C'est-à-dire y = x' + iy'. Donc y' = 0 et x' = y quelconque.

En d'autres termes, cela signifie que z' est un nombre réel quelconque.

D'où $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$. Et par conséquent, Imf = kerf.

> **Point méthode :**
> *On rappelle que ($\mathbb{C}$,+ ,·), où + est l'addition des complexes et . la multiplication d'un complexe par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une base de cet espace est le couple (1 , i).*

Solution 27

1) La matrice de : • f^2 est $A_f^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ab & a^2 \end{pmatrix}$.

• f^3 est $A_f^3 = A_f^2 \times A_f = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ab & a^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2b & a^3 \end{pmatrix}$.

• f^4 est $A_f^4 = A_f^3 \times A_f = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2b & a^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 4a^3b & a^4 \end{pmatrix}$.

En observant les matrices de f^2, f^3, f^4, on peut se dire que la matrice de f^n est $A_f^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1}b & a^n \end{pmatrix}$.

Vérifions cette conjecture par récurrence sur n, entier naturel non nul :

Soit n entier naturel non nul, notons P_n la proposition : « $A_f^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1}b & a^n \end{pmatrix}$ ».

Pour n = 1 : $A_f^1 = A_f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Or $\begin{pmatrix} a^1 & 0 \\ 2a^{1-1}b & a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = A_f^1$, alors P_1 est vraie.

Supposons P_k vraie pour un certain entier naturel non nul k, montrons que P_{k+1} est aussi vraie.

Par hypothèse $A_f^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ ka^{k-1}b & a^k \end{pmatrix}$. Donc, $A_f^{k+1} = A_f^k \times A_f = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ ka^{k-1}b & a^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ (k+1)a^kb & a^{k+1} \end{pmatrix}$.

D'où la proposition P_{k+1} est aussi vraie.

On peut donc conclure que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $A_1^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1}b & a^n \end{pmatrix}$

2) Pour $\overrightarrow{w_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. On a :

- $\overrightarrow{w_1} = f(\overrightarrow{w_0})$. Or $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 \\ bx_0 + ay_0 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{w_1} = ax_0\vec{i} + (bx_0 + ay_0)\vec{j}$.
- $\overrightarrow{w_2} = f(\overrightarrow{w_1})$. Or $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax_0 \\ bx_0 + ay_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2x_0 \\ 2abx_0 + a^2y_0 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{w_2} = a^2x_0\vec{i} + (2abx_0 + a^2y_0)\vec{j}$.
- $\overrightarrow{w_3} = f(\overrightarrow{w_2})$. Or $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2x_0 \\ 2abx_0 + a^2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3x_0 \\ 3a^2bx_0 + a^3y_0 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{w_3} = a^3x_0\vec{i} + (3a^2bx_0 + a^3y_0)\vec{j}$.
- $\overrightarrow{w_n} = f(\overrightarrow{w_{n-1}})$ signifie que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. C'est-à-dire $\begin{pmatrix} ax_{n-1} \\ bx_{n-1} + ay_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

  On en déduit que : $x_n = ax_{n-1}$ et $y_n = bx_{n-1} + ay_{n-1}$.
- Montrons par récurrence sur n que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\overrightarrow{w_n} = f^n(\overrightarrow{w_0})$.

Pour $n = 1$, on a bel et bien $\overrightarrow{w_1} = f(\overrightarrow{w_0})$ par définition.

Supposons $\overrightarrow{w_k} = f^k(\overrightarrow{w_0})$, pour un certain entier naturel non nul k.

Alors puisque par définition, $\overrightarrow{w_{k+1}} = f(\overrightarrow{w_k})$, alors on a $\overrightarrow{w_{k+1}} = f[f^k(\overrightarrow{w_0})] = f^{k+1}(\overrightarrow{w_0})$.

D'où d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\overrightarrow{w_n} = f^n(\overrightarrow{w_0})$.

C'est-à-dire $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1}b & a^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^nx_0 \\ na^{n-1}bx_0 + a^ny_0 \end{pmatrix}$.

On conclut alors que $x_n = a^nx_0$ et $y_n = na^{n-1}bx_0 + a^ny_0$.

3) On remarque que : soit n entier naturel non nul, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n-1} \\ -u_{n-1} + 2v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$.

Posons $\overrightarrow{w_n} = u_n\vec{i} + v_n\vec{j}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de P, de matrice A.

On a alors $\overrightarrow{w_n} = f(\overrightarrow{w_{n-1}})$, mais aussi, A est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a = 2$ et $b = -1$.

D'après la question 2), $\overrightarrow{w_n} = f^n(\overrightarrow{w_0})$ et f^n a pour matrice A^n.

D'après la question 1), $A_n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ -n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$. Ainsi, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ -n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, et $\begin{cases} u_n = 2^nu_0 \\ v_n = -n2^{n-1}u_0 + 2^nv_0 \end{cases}$.

Finalement, $\begin{cases} u_n = -2^n \\ v_n = n \times 2^{n-1} + 2^n = (n+2) \times 2^{n-1} \end{cases}$.

Solution 28

1) f est bijectif si et seulement si, $\det(M) \neq 0$, c'est-à-dire $a^2 - 2b^2 \neq 0$.

Finalement, f est bijectif si et seulement si $a \neq b\sqrt{2}$ et $a \neq -b\sqrt{2}$.

Si $a \neq b\sqrt{2}$ et $a \neq -b\sqrt{2}$, alors f est bijectif et par conséquent, $\operatorname{Im}(f) = E$ et $\ker f = \{\vec{0}\}$.

Si $a = b\sqrt{2}$ et $b \neq 0$, alors la matrice de f est alors $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}b & 2b \\ b & \sqrt{2}b \end{pmatrix}$.

Le lecteur vérifiera qu'alors : Ker(f) est la droite vectorielle d'équation $x+y\sqrt{2}=0$, et Im(f) est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}=-\sqrt{2}\vec{i}+\vec{j}$.

Si $a=-b\sqrt{2}$ et $b\neq 0$, alors la matrice de f est alors $M=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}b & 2b\\ b & -\sqrt{2}b\end{pmatrix}$.

Le lecteur vérifiera qu'alors : Ker(f) est la droite vectorielle d'équation $x-y\sqrt{2}=0$, et Im(f) est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}\,'=\sqrt{2}\vec{i}+\vec{j}$.

Si $a=b=0$, alors f est l'application nulle. D'où kerf = E et $\text{Imf}=\{\vec{0}\}$.

2) On a : $M^2=\begin{pmatrix}a & 2b\\ b & a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a & 2b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+2b^2 & 4ab\\ 2ab & a^2+2b^2\end{pmatrix}$.

Ainsi, $M^2 = M$ équivaut à $\begin{cases}a^2+2b^2=a\\ 2ab=b\end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases}b(1-2a)=0\\ a^2-a+2b^2=0\end{cases}$, et enfin $\begin{cases}b=0 \text{ ou } a=\dfrac{1}{2}\\ a^2-a+2b^2=0\end{cases}$.

Si $b=0$, alors $a=0$ ou $a=1$.

Si $a=\dfrac{1}{2}$, alors $b=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ou $b=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Les matrices M telles que $M^2 = M$ sont : $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

3) $M^2 = I$ équivalent à $\begin{cases}a^2+2b^2=1\\ 2ab=0\end{cases}$. C'est-à-dire $\begin{cases}b=0 \text{ ou } a=0\\ a^2+2b^2=1\end{cases}$.

Si $a=0$, alors on a $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $b=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Si $b=0$, alors on a $a = 1$ ou $a = -1$.

Les matrices M telles que $M^2 = I$ sont : $\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Solution 29

1)a) • On a $\vec{i}=1.\vec{i}+0.\vec{j}$ et $\vec{j}=0.\vec{i}+1.\vec{j}$.

D'où $g(\vec{i})=\vec{i}-2\vec{j}$ et $g(\vec{j})=\dfrac{1}{2}\vec{i}-\vec{j}$. La matrice de g dans la base $B=(\vec{i},\vec{j})$ est donc $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

• Puisque $\det A=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-1+1=0$, alors g n'est pas bijectif.

b) • Soit $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$, un vecteur de E_2, $\vec{u}$ appartient à kerg signifie $g(\vec{u})=\vec{0}$.

Ce qui équivaut à $\left(x+\dfrac{1}{2}y\right)\vec{i}+(-2x-y)\vec{j}=\vec{0}$. Et qui se traduit par le système : $\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}y=0\\ -2x-y=0\end{cases}$.

Les deux équations du système sont équivalentes.

Le système se réduit alors à l'une d'entre elles, soit 2x + y = 0.

D'où kerg est la droite vectorielle d'équation 2x + y = 0. Une base de kerg est $(-\vec{i}+2\vec{j})$.

- $g(\vec{i})=2g(\vec{j})\neq\vec{0}$. Donc le système $(g(\vec{i}), g(\vec{j}))$ est lié.

Or Img = g(E) est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $g(\vec{i})$ et $g(\vec{j})$.

D'où Img est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $g(\vec{i})=\vec{i}-2\vec{j}$. Une équation de Img est 2x + y = 0.

c) Img et kerg sont la droite vectorielle d'équation 2x + y = 0. D'où Img = kerg.

2) Soit $\vec{v}$ un vecteur de kerg, puisque Img = kerg, alors $\vec{v}$ est un vecteur de Img.

Et par conséquent, il existe un vecteur $\vec{u}$ de E_2, tel que $g(\vec{u})=\vec{v}$.

3)a) $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2)=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$, donc $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un système libre du plan vectoriel E_2.

Donc, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E_2.

b) $\vec{e}_1$ appartient à kerg, donc $g(\vec{e}_1)=\vec{0}$.

Et $g(\vec{e}_2)=-g(\vec{i})+g(\vec{j})=-\vec{i}+2\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{i}-\vec{j}=-\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}=\frac{1}{2}(-\vec{i}+2\vec{j})=\frac{1}{2}\vec{e}_1$.

D'où la matrice de g dans la base B' est : $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Solution 30

1) • Soit $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ un vecteur de V.

$\vec{u}$ appartient à kerφ si et seulement si $\begin{cases}ax+by=0\\ \lambda ax+\lambda by=0\end{cases}$. C'est-à-dire ax + by = 0.

Or le couple (a , b) est différent du couple (0 , 0).

D'où kerφ est la droite vectorielle d'équation ax + by = 0. Une base de kerφ est $(b\vec{i}-a\vec{j})$.

- $\varphi(\vec{i})=a(\vec{i}+\lambda\vec{j})$ et $\varphi(\vec{j})=b(\vec{i}+\lambda\vec{j})$.

Le couple (a , b) étant différent de (0 , 0), l'un au moins des vecteurs $\varphi(\vec{i})$ ou $\varphi(\vec{j})$ est non nul.

$\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ sont colinéaires au vecteur non nul $\vec{i}+\lambda\vec{j}$.

Imφ étant le sous-espace vectoriel engendré par $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$, Imφ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}=\vec{i}+\lambda\vec{j}$. Une équation de Imφ est λx – y = 0.

- kerφ = Imφ si et seulement si le système $(\vec{i}+\lambda\vec{j}, b\vec{i}-a\vec{j})$ est lié, c'est-à-dire $\begin{vmatrix}b & 1\\ -a & \lambda\end{vmatrix}=0$.

On en déduit que kerφ = Imφ si et seulement si a + λb = 0.

2) Remarquons que, si kerφ ≠ Imφ, alors $(\vec{i}+\lambda\vec{j}, b\vec{i}-a\vec{j})$ est une base de V.

- $\vec{v}\in\ker\varphi$, d'où $\varphi(\vec{v})=\vec{0}$.
- Soit $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ un vecteur de V, $\vec{u}$ appartient à Imφ, si et seulement si λx – y = 0.

C'est-à-dire y = λx. D'où le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x , λx).

$\begin{pmatrix}a & b\\ \lambda a & \lambda b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \lambda x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+\lambda bx\\ \lambda ax+\lambda^2 bx\end{pmatrix}=(a+\lambda b)\begin{pmatrix}x\\ \lambda x\end{pmatrix}$. D'où $\varphi(\vec{u})=(a+\lambda b)\vec{u}$.

D'où la matrice de φ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est : $\begin{pmatrix}a+\lambda b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

3) • D'après la question 1), kerφ = Imφ si et seulement si a + λb = 0.

Si b = 0, alors (a + λb = 0 si et seulement si a = 0).
On obtient alors (a , b) = (0 , 0), ce qui est contraire à l'hypothèse (a , b) ≠ (0 , 0).
On peut alors conclure que b est non nul.

- On a $\det(b\vec{i}-a\vec{j}\ ,\ \vec{j})=\begin{vmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{vmatrix}=b$.

Or b est non nul, alors on a $\det(b\vec{i}-a\vec{j}\ ,\ \vec{j})\neq 0$. D'où $(b\vec{i}-a\vec{j}\ ,\ \vec{j})$ est une base de V.

- $b\vec{i}-a\vec{j}$ appartient à kerφ, d'où $\varphi(b\vec{i}-a\vec{j})=\vec{0}$, et $\varphi(\vec{j})=b\vec{i}+\lambda b\vec{j}=(b\vec{i}-a\vec{j})+(a+\lambda b)\vec{j}$.

D'où la matrice de φ dans la base $(b\vec{i}-a\vec{j}\ ,\ \vec{j})$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a+\lambda b \end{pmatrix}$.

- La matrice de φoφ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a+\lambda b \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a+\lambda b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a+\lambda b \\ 0 & (a+\lambda b)^2 \end{pmatrix}=(a+\lambda b)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a+\lambda b \end{pmatrix}$.

- D'où φoφ = (a + λb)φ.

Solution 31

1) • On a $\varphi(\vec{i})=\vec{i}-2\vec{j}$ et $\varphi(\vec{j})=-2\vec{i}+\vec{j}$. Donc la matrice de φ dans la base B est : $M=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Soit $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ un vecteur du plan V.

$\varphi(\vec{u})=\lambda\vec{u}$ signifie $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$. Ce qui équivaut à $\begin{cases} x-2y=\lambda x \\ -2x+y=\lambda y \end{cases}$. C'est-à-dire $\begin{cases} (1-\lambda)x-2y=0 \\ -2x+(1-\lambda)y=0 \end{cases}$ (I)

Le déterminant du système (I) est : $\delta=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=(-1-\lambda)(3-\lambda)$.

Si λ ≠ -1 et λ ≠ 3, alors δ ≠ 0. Le système (I) admet donc une unique solution (0 , 0).
Le seul vecteur $\vec{u}$ tel que $\varphi(\vec{u})=\lambda\vec{u}$ est donc $\vec{u}=\vec{0}$.
Si λ = -1 ou λ = 3, alors δ = 0. Le système (I) admet une infinité de solutions.
D'où il existe au moins un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $\varphi(\vec{u})=\lambda\vec{u}$.

En conclusion, il existe des vecteurs $\vec{u}$ non nuls vérifiant $\varphi(\vec{u})=\lambda\vec{u}$ si et seulement si λ = -1 ou λ = 3.
On a alors $\lambda_1=-1$ et $\lambda_2=3$.

- **Pour $\lambda_1=-1$:**

Le système (I) est équivalent à l'équation x – y = 0.
Ainsi l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $\varphi(\vec{u})=-\vec{u}$ est la droite vectorielle d'équation x – y = 0.
Une base de cette droite vectorielle est $(\vec{i}+\vec{j})$.

- **Pour $\lambda_2=3$:**

Le système (I) est équivalent à l'équation : x + y = 0.
Ainsi l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $\varphi(\vec{u})=3\vec{u}$ est la droite vectorielle d'équation x + y = 0.
Une base de cette droite est $(\vec{i}-\vec{j})$.

2) • **Vérifions que $(\vec{i}+\vec{j}\ ,\ \vec{i}-\vec{j})$ est une base de V :**

En effet, $\det(\vec{i}+\vec{j}\ ,\ \vec{i}-\vec{j})=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$. D'où $(\vec{i}+\vec{j}\ ,\ \vec{i}-\vec{j})$ est une base de V.

- On a $\varphi(\vec{i}+\vec{j})=-(\vec{i}+\vec{j})$ et $\varphi(\vec{i}-\vec{j})=3(\vec{i}-\vec{j})$.

La matrice de φ dans la base $(\vec{i}+\vec{j}\ ,\ \vec{i}-\vec{j})$ est : $M'=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- On a : $M'^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$.

$$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}.$$

On peut conjecturer que : $M^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Vérifions cette conjecture par récurrence :

Pour n = 1, on a bien $M' = \begin{pmatrix} (-1)^1 & 0 \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix}$.

Supposons que pour un certain naturel k non nul, $M^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$**. Montrons qu'alors**

$M^{k+1} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $M^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$.

D'où $M^{k+1} = M^k \times M' = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^k \times (-1) + 0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+3^k \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$.

Alors, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel non nul n : $M^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Solution 32

1) Pour les questions 1)a), b) et c), voir l'exercice 24.

2) • φ étant non nulle, il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $\varphi(\vec{u}) \neq \vec{0}$.

Soit a et b deux nombres réels,

$a\vec{u} + b\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$ implique $\varphi(a\vec{u} + b\varphi(\vec{u})) = \vec{0}$. Donc $a\varphi(\vec{u}) + b\varphi \circ \varphi(\vec{u}) = \vec{0}$. (1)

Notons que $\varphi \circ \varphi = \omega$ alors $\varphi \circ \varphi(\vec{u}) = \vec{0}$.

L'égalité (1) ci-dessus devient alors $a\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$.

Comme $\varphi(\vec{u}) \neq \vec{0}$, alors a = 0.

Puisque a = 0 et $a\vec{u} + b\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$, alors $b\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$. Comme $\varphi(\vec{u}) \neq \vec{0}$, alors b = 0.

Ainsi, si $a\vec{u} + b\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$, alors a = b = 0. D'où $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ est un système libre de V.

Et puisque dimV = 2, alors $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ est une base de V.

• $\varphi(\vec{u}) = 0.\vec{u} + 1.\varphi(\vec{u})$.

Or $\varphi[\varphi(\vec{u})] = \vec{0}$, alors la matrice de φ dans la base $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

• Soit $\vec{X}$ un vecteur de V de coordonnées (x , y) dans la base $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$.

$\vec{X} = x\vec{u} + y\varphi(\vec{u}))$, donc $\varphi(\vec{X}) = x\varphi(\vec{u}) + y\varphi \circ \varphi(\vec{u}) = x\varphi(\vec{u})$.

Ainsi, $\varphi(\vec{X}) = \vec{0}$ signifie que $x\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$. C'est-à-dire x = 0 (car $\varphi(\vec{u}) \neq \vec{0}$).

Kerφ est donc la droite vectorielle d'équation x = 0.

• Imφ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varphi(\vec{u})$, (car $\varphi[\varphi(\vec{u})] = \vec{0}$, $\varphi(\vec{u}) \neq \vec{0}$ et Imφ est le sous-espace de V engendré par $\varphi(\vec{u})$ et $\varphi[\varphi(\vec{u})]$).

Une équation de Imφ dans la base $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ est donc x = 0. Il en résulte que Imφ = kerφ.

Solution 33

1) D'après l'énoncé, on a $\varphi^2 \neq \omega$. D'où il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $\varphi^2(\vec{u}) \neq \vec{0}$.

On remarque que, $\varphi(\vec{u}) \neq \vec{0}$ (car sinon $\varphi^2(\vec{u}) = \varphi[\varphi(\vec{u})] = \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$, ce qui est contraire à l'énoncé).

Soit a, b et c trois réels, si $a\vec{u} + b\varphi(\vec{u}) + c\varphi^2(\vec{u}) = \vec{0}$, alors $\varphi^2(a\vec{u} + b\varphi(\vec{u}) + c\varphi^2(\vec{u})) = \vec{0}$.

C'est-à-dire $a\varphi^2(\vec{u}) + b\varphi^3(\vec{u}) + c\varphi^4(\vec{u}) = \vec{0}$.

Donc $a\varphi^2(\vec{u}) = \vec{0}$ (car $\varphi^3(\vec{u}) = \vec{0}$ et $\varphi^4(\vec{u}) = \varphi[\varphi^3(\vec{u})] = \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$). Or $\varphi^2(\vec{u}) \neq \vec{0}$, alors a = 0.

Comme a = 0, alors l'égalité $a\vec{u} + b\varphi(\vec{u}) + c\varphi^2(\vec{u}) = \vec{0}$ devient $b\varphi(\vec{u}) + c\varphi^2(\vec{u}) = \vec{0}$.

Donc $\varphi(b\varphi(\vec{u}) + c\varphi^2(\vec{u})) = \vec{0}$, c'est-à-dire $b\varphi^2(\vec{u}) + c\varphi^3(\vec{u}) = \vec{0}$. Soit $b\varphi^2(\vec{u}) = \vec{0}$.

Puisque $\varphi^2(\vec{u}) \neq \vec{0}$, alors b = 0.

Maintenant a = b = 0. Donc l'égalité $a\vec{u} + b\varphi(\vec{u}) + c\varphi^2(\vec{u}) = \vec{0}$ devient $c\varphi^2(\vec{u}) = \vec{0}$. Soit c = 0 (car $\varphi^2(\vec{u}) \neq \vec{0}$).

On conclut donc que si $a\vec{u} + b\varphi(\vec{u}) + c\varphi^2(\vec{u}) = \vec{0}$, alors a = b = c = 0.

Par conséquent, $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}), \varphi^2(\vec{u}))$ est libre, et donc une base de V, puisque dimV = 3.

2) • Soit $\vec{v} = x\vec{u} + y\varphi(\vec{u}) + z\varphi^2(\vec{u})$

$\varphi(\vec{v}) = \varphi[x\vec{u} + y\varphi(\vec{u}) + z\varphi^2(\vec{u})] = x\varphi(\vec{u}) + y\varphi^2(\vec{u}) + z\varphi^3(\vec{u}) = x\varphi(\vec{u}) + y\varphi^2(\vec{u})$.

$\varphi^2(\vec{v}) = \varphi[x\varphi(\vec{u}) + y\varphi^2(\vec{u})] = x\varphi^2(\vec{u}) + y\varphi^3(\vec{u}) = x\varphi^2(\vec{u})$ et $\varphi^3(\vec{v}) = \varphi[x\varphi^2(\vec{u})] = x\varphi^3(\vec{u}) = \vec{0}$.

- $\varphi(\vec{v}) = \vec{0}$ si et seulement si x = y = 0 (car le système $(\varphi(\vec{u}), \varphi^2(\vec{u}))$ est libre).

D'où kerφ est la droite vectorielle dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \; k \in \mathbb{R}. \\ z = k \end{cases}$

Soit $\vec{v}' = x'\vec{u} + y'\varphi(\vec{u}) + z'\varphi^2(\vec{u})$, $\varphi(\vec{v}) = \vec{v}'$ si et seulement si x' = 0, y' = x et z' = y.

Imφ est donc le plan vectoriel d'équation x = 0.

- $\varphi^2(\vec{v}) = \vec{0}$ si et seulement si x = 0. D'où kerφ² est le plan vectoriel d'équation x = 0.

  $\varphi^2(\vec{v}) = \vec{v}'$ si et seulement si x' = y' = 0 et z' = x.

Imφ est donc la droite vectorielle dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \; k \in \mathbb{R}. \\ z = k \end{cases}$

- $\varphi^3(\vec{v}) = \vec{0}$, pour tout élément $\vec{v}$ de V. D'où φ³ est l'application nulle de V. Donc kerφ³ = V et $\mathrm{Im}\varphi = \{\vec{0}\}$.

Solution 34

1) Soit f un élément de Q, on a fof = -Id$_E$.
Or fof = -Id$_E$ si et seulement si –fof = Id$_E$. Donc fo(-f) = (-f)of = Id$_E$.
D'où f est bijectif et sa réciproque est f^{-1} = -f.
Autres méthodes :

Pour montrer que f est une bijection, on pouvait aussi vérifier que det(f) ≠ 0 ou vérifier que $\ker f = \{\vec{0}\}$. ***On a :***

Dans le premier cas : fof = -Id$_E$, donc det(fof) = det(-Id$_E$). C'est-à-dire $(\det(f))^2 = 1$. Donc detf = 1 ou detf = -1.
Par conséquent, on a detf ≠ 0, et donc f est bijectif.

Dans le second cas : $\vec{u}$ appartient à kerf si et seulement si $f(\vec{u}) = \vec{0}$, donc $f^2(\vec{u}) = \vec{0}$.

Or fof = -Id$_E$, alors on a $-\vec{u} = \vec{0}$ et donc $\vec{u} = \vec{0}$.

Par conséquent, $\ker f = \{\vec{0}\}$, et f est bijectif, (car f est un endomorphisme injectif).

Point méthode :

- ***Soit f un endomorphisme de E, et M la matrice de f dans une base donnée. On a la remarque suivante :***
Le déterminant de f est le déterminant de sa matrice.

Le déterminant de f ne change pas même si l'on change de base. C'est-à-dire, soit B et B' deux bases de E, M la matrice de f dans la base B et M' la matrice dans la base B', on aura detM = detM'.

- ***Soit A et B deux matrices carrées d'ordre deux : det(A×B) = detA×detB.***
Donc soit f et g deux endomorphismes de E, detfog = detf× detg.

2)a) Soit $\vec{u}$ élément de E et f un élément de Q.

$f(\vec{u})=\lambda\vec{u}$ si et seulement si $f[f(\vec{u})]=f(\lambda\vec{u})$ (car f est injective).

Ce qui équivaut à $f^2(\vec{u})=\lambda f(\vec{u})$. C'est-à-dire $-\vec{u}=\lambda^2\vec{u}$. Ce qui équivaut à $(\lambda^2+1)\vec{u}=\vec{0}$.

Ce qui équivaut à $\vec{u}=\vec{0}$ (car λ^2+1 est différent de zéro).

Ainsi, $f(\vec{u})=\lambda\vec{u}$ si et seulement si $\vec{u}=\vec{0}$.

b) Supposons le système $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ lié, alors il existe un réel λ tel que $f(\vec{u})=\lambda\vec{u}$.

D'après la question 2)a), on en déduit que $\vec{u}=\vec{0}$.

Or par hypothèse, on a $\vec{u}\neq\vec{0}$, alors le système $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ est libre de E.

Et comme dimE = 2, alors $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ est une base de E.

c) $f(\vec{u})=0.\vec{u}+1.f(\vec{u})$ et $f[f(\vec{u})]=-\vec{u}=-1.\vec{u}+0.f(\vec{u})$.

D'où la matrice de f dans la base $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ est : $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

16 APPLICATIONS AFFINES

RAPPEL DU COURS

Dans ce cours, P désigne le plan et V son plan vectoriel associé.
E désigne l'espace et W son espace vectoriel associée.

A. Définitions – Détermination d'une application affine

A_1 – Définitions

a) Définition :
On appelle application affine du plan P (respectivement de l'espace E), toute application f de P vers P (respectivement de E vers E) qui conserve le coefficient de colinéarité.
C'est-à-dire, soit A, B, C et D quatre points du plan (respectivement, de l'espace) et a un nombre réel.
Si $\overrightarrow{CD} = a\overrightarrow{AB}$, alors on a aussi $\overrightarrow{f(C)f(D)} = a\overrightarrow{f(A)f(B)}$.

b) Définition équivalente :
On appelle application affine du plan P (respectivement de l'espace E), toute application f de P vers P (respectivement de E vers E) qui conserve le barycentre de deux points pondérés.
C'est-à-dire, **si G = bar{(A, a), (B, b)}, alors on a aussi f(G) = bar{(f(A), a), (f(B), b)}.**

A_2 – Détermination d'une application affine

a) Expression analytique d'une application affine :
Pour définir une application affine, il faut et il suffit de donner son expression analytique.

- Une application f de P vers P est affine si et seulement si, son expression analytique est sous la forme $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des constantes réelles.
- Une application f de E vers E est affine si et seulement si, son expression analytique est sous la forme, $\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$, où a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'' et d'' sont des constantes réelles.

b) Endomorphisme associé à une application affine :
Une application f de P vers P (respectivement, de E vers E) est affine si et seulement si, on peut trouver un endomorphisme φ de V (respectivement de W) tel que, pour tous points A et B de P (respectivement de E), $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB})$.
Cet endomorphisme φ lorsqu'il existe est unique. On dit que φ est l'endomorphisme associé à f.

Remarque :
Pour définir une application affine f, il faut et il suffit de donner son endomorphisme associé φ, un point A et son image A' par f. Ainsi, soit M un point et M' son image par f, on a : $\overrightarrow{A'M'} = \varphi(\overrightarrow{AM})$.

c) Image d'un repère affine :

- Pour définir une application affine du plan P, il faut et il suffit de donner les images A', B' et C' de trois points non alignés A, B et C.
- Pour définir une application affine de l'espace E, il faut et il suffit de donner les images A', B', C' et D' de quatre points non coplanaires A, B, C et D.

Remarque :
- ***Dans le plan.***

Soit f et g deux applications affines et A, B et C trois points non alignés du plan.
Si f(A) = g(A), f(B) = g(B) et f(C) = g(C), alors les applications affines f et g sont égales.
- ***Dans l'espace.***

Soit f et g deux applications affines et A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace.
Si f(A) = g(A), f(B) = g(B), f(C) = g(C) et f(D) = g(D) alors les applications affines f et g sont égales.

A_3 – Exemples d'applications affines

a) Translation :
- La translation est une application affine. Son endomorphisme associé est l'application identique de V ou de W.
- Une application affine est une translation lorsque son endomorphisme associe est l'application identique de V ou de W.

b) Homothétie :
- Toute homothétie de rapport k est une application affine. Son endomorphisme associé est l'homothétie vectorielle de rapport k, qui est l'endomorphisme qui à tout vecteur $\vec{u}$, associe le vecteur $k.\vec{u}$.
- Une application affine est une homothétie de rapport k lorsque son endomorphisme associé est une homothétie vectorielle de rapport k.

c) Rotation :
- Toute rotation d'angle α est une application affine. Son endomorphisme associé est la rotation vectorielle d'angle α, qui est l'endomorphisme qui à tout vecteur $\vec{u}$, associe le vecteur $\vec{u}'$ tel que : $\begin{cases} \|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\| \\ mes(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$.

d) De façon générale, les projections, les isométries, les similitudes sont des applications affines.

B. Propriétés

B_1 – Image d'une droite, d'un plan, de l'espace par une application affine

a) Théorème :
- L'image d'une droite par une application affine du plan P ou de l'espace E est soit une droite, soit un point.
- L'image d'un plan par une application affine du plan P ou de l'espace E est soit un plan, soit une droite, soit un point.
- L'image de l'espace par une application affine de l'espace E est soit l'espace E, soit un plan, soit une droite, soit un point.

b) Point Méthode :
- ***Pour déterminer l'image d'une droite (AB) par une application affine f, on peut déterminer les images f(A) = A' et f(B) = B'.***
  - ***Si A' = B', alors l'image de la droite (AB) par f est le singleton {A'}.***
  - ***Si A' ≠ B', alors l'image de la droite (AB) par f est la droite (A'B').***
- ***Pour déterminer l'image d'un plan (ABC) par une application affine f, on peut déterminer les images f(A) = A', f(B) = B' et f(C) = C'.***
  - ***Si A' = B' = C', alors l'image du plan (ABC) par f est le singleton {A'}.***
  - ***Si A', B' et C' sont alignés et non tous confondus, alors l'image du plan (ABC) par f est la droite passant par A', B' et C'.***
  - ***Si A', B' et C' sont non alignés, alors l'image du plan (ABC) est le plan (A'B'C').***
- ***Pour déterminer l'image d'un espace (ABCD) par une application affine f de l'espace E, on peut déterminer les images f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C' et f(D) = D'.***
  - ***Si A' = B' = C' = D', alors l'image de l'espace par f est le singleton {A'}.***
  - ***Si A', B', C' et D' sont alignés et non tous confondus, alors l'image de l'espace par f est la droite passant par A', B', C' et D'.***
  - ***Si A', B', C' et D' sont coplanaires et non tous alignés, alors l'image de l'espace par f est le plan passant par A', B', C' et D'.***
  - ***Si A', B', C' et D' sont non coplanaires, alors l'image de l'espace par f est l'espace (A'B'C'D') qui est aussi E.***

B_2 – Ensemble des points invariants par une application affine

a) Théorème 1 :
- Si deux points distincts A et B sont invariants par une application affine f, alors tous les points de la droite (AB) sont invariants par f.
- Si trois points non alignés A, B et C sont invariants par une application affine f, alors tous les points du plan (ABC) sont invariants.
- Si quatre points non coplanaires de l'espace sont invariants par une application affine f de l'espace, alors tous les points de l'espace sont invariants par f.

Remarque :
- ***Dans le plan.***
Si une application affine laisse trois points non alignés invariants, alors elle laisse tous les points du plan invariants : c'est l'application identique du plan.
- ***Dans l'espace.***
Si une application affine laisse quatre points non coplanaires invariants, alors elle laisse tous les points de l'espace invariants : c'est l'application identique de l'espace.

b) Théorème 2 :
- Dans le plan P, l'ensemble des points invariants par une application affine f de P est : soit l'ensemble vide, soit un singleton, soit une droite, soit le plan P.
- Dans l'espace E, l'ensemble des points invariants par une application affine f de E est : soit l'ensemble vide, soit un singleton, soit une droite, soit le plan, soit l'espace E.

B_3 – Conservation de certaines configurations géométriques

Toute application affine f conserve le barycentre d'un système de points pondérés (C'est-à-dire Si G est le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2) \dots (A_n, a_n)$, alors f(G) est le barycentre de $(f(A_1), a_1), (f(A_2), a_2) \dots (f(A_n), a_n)$), l'alignement des points (C'est-à-dire, si A, B et C sont alignés, alors f(A), f(B) et f(C) sont aussi alignés) et le milieu d'un segment.

C. Transformations affines

C_1 – Définitions

- On appelle transformation du plan P (ou de l'espace E), toute application bijective de P vers P (ou de E vers E).
- Une transformation affine est une application affine bijective.

C_2 – Condition pour qu'une application affine soit bijective

- Soit f une application affine de P dans P et φ son endomorphisme associé.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :
P_1) L'image de P par f est P.
P_2) f transforme trois points non alignés en trois points non alignés.
P_3) φ est bijectif.
Si l'une des trois propriétés est vérifiée, alors il en est de même pour les deux autres. f est alors bijective.

- Soit f une application affine de E dans E et φ son endomorphisme associé.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :
P_1) L'image de E par f est E.
P_2) f transforme quatre points non coplanaires en quatre points non coplanaires.
P_3) φ est bijectif.
Si l'une des trois propriétés est vérifiée, alors il en est de même pour les deux autres. f est alors bijective.

C_3 – Propriétés d'une transformation affine

Outre les propriétés de l'application affine citées ci-dessus, la transformation affine :

- transforme une droite en une droite, un plan en un plan et l'espace en l'espace.
- conserve le parallélisme.

C_4 – Composées et réciproques d'applications affines

- Soit f une transformation affine et φ son endomorphisme associé.

La réciproque de f est une transformation affine d'endomorphisme associé la réciproque φ^{-1} de φ.
- Soit f et g deux applications affines d'endomorphismes associés respectifs φ et ψ.

fog est une application affine d'endomorphisme associé φoψ.

D. Affinités du plan

Soit (D) et (Δ) deux droites sécantes du plan et k un nombre réel.
Une affinité de base (D), de direction celle de (Δ) et de rapport k est l'application f de P vers P qui à tout point M du plan, associe le point M' tel que $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$, où H désigne le projeté de M sur (D), parallèlement à (Δ).
Lorsque (D) et (Δ) sont perpendiculaires, on dit que f est l'affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport k.

Remarques :

- ***Si k = 0, alors l'affinité f est une projection sur (D) parallèlement à (Δ).***
  Si k = -1, alors l'affinité f est une symétrie d'axe (D) parallèlement à (Δ).
  Si k = 1, alors l'affinité f est l'application identique.
- ***Toute affinité du plan est une application affine du plan.***
  Si son rapport k est un réel non nul, alors cette affinité est une transformation affine et sa réciproque est une affinité de même base, de même direction et de rapport $\frac{1}{k}$.
- ***Soit f une affinité de base (D) et de direction celle de la droite (Δ).***
  (D) est l'ensemble des points invariants par f.
  (Δ) est globalement invariante par f et pour tout point M du plan n'appartenant pas à (D), et M' son image par f, les droites (MM') et (Δ) sont parallèles.

EXERCICES POUR COMPRENDRE LE COURS

A. Généralités

1 – Déterminer l'expression analytique d'une application

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

f est une application affine de P dans P définie par la donnée de A(2 , -3), son image A'(-1 , 4) par f et la matrice $\Phi=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ de son endomorphisme associé φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les coordonnées (x', y') de M' image de M(x , y) par f , en fonction de x et y.

Solution 1

Soit M(x , y) un point du plan, M'(x', y') son image par f.

On a $\overrightarrow{f(A)f(M)}=\varphi(\overrightarrow{AM})$, c'est-à-dire $\overrightarrow{A'M'}=\varphi(\overrightarrow{AM})$.

Ce qui équivaut à $\begin{pmatrix} x'+1 \\ y'-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix}$. C'est-à-dire $\begin{pmatrix} x'+1 \\ y'-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(x-2)-3(y+3) \\ -(x-2)+4(y+3) \end{pmatrix}$.

On obtient alors le système : $\begin{cases} x'+1=2(x-2)-3(y+3) \\ y'-4=-(x-2)+4(y+3) \end{cases}$. Il en résulte que : $\begin{cases} x'=2x-3y-14 \\ y'=-x+4y+18 \end{cases}$.

Exercice 2

Le plan P est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. f est une application affine de P vers P.

On donne A(1 , 2), B(2 , 4), C(1 , -3), A'(-1 , 0) = f(A), B'(3 , 1) = f(B) et C'(1 , -3) = f(C).

Déterminer les coordonnées de M' = f(M), où M est un point quelconque de P de coordonnées (x , y) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Solution 2

Vérifions que les points A, B et C forment un repère du plan :

En effet, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, donc $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=-5\neq 0$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires, c'est-à-dire que les points A, B et C sont non alignés.

Donc (A , B , C) est un repère affine.

Soit φ l'endomorphisme associé à f. Déterminons la matrice de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

On a $\varphi(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{f(A)f(B)}=\overrightarrow{A'B'}$ et $\varphi(\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{f(A)f(C)}=\overrightarrow{A'C'}$.

Or $\overrightarrow{A'B'}=4\vec{i}+\vec{j}$ et $\overrightarrow{A'C'}=2\vec{i}-3\vec{j}$. On obtient alors le système :

$\begin{cases} \varphi(\vec{i}+2\vec{j})=4\vec{i}+\vec{j} \\ \varphi(-5\vec{j})=2\vec{i}-3\vec{j} \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} \varphi(\vec{i})+2\varphi(\vec{j})=4\vec{i}+\vec{j} \\ -5\varphi(\vec{j})=2\vec{i}-3\vec{j} \end{cases}$. Donc $\varphi(\vec{i})=\frac{24}{5}\vec{i}-\frac{1}{5}\vec{j}$ et $\varphi(\vec{j})=-\frac{2}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}$.

La matrice de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est donc $\begin{pmatrix} \frac{24}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Déterminons les coordonnées (x', y') de M' en fonction de x et y :

Soit M(x , y) et M'(x', y') des points du plan.

f(M) = M' si et seulement si $\overrightarrow{A'M'}=\varphi(\overrightarrow{AM})$.

C'est-à-dire $\begin{pmatrix} \frac{24}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x'+1 \\ y' \end{pmatrix}$. Il en résulte que $\begin{cases} x'=\frac{24}{5}x-\frac{2}{5}y-5 \\ y'=-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y-1 \end{cases}$

Exercice 3

Dans l'espace E, muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, f est l'application affine qui transforme A(1 , 0 , -2), en A'(-4 , 3 , 1) et dont la matrice est $\Phi=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et son endomorphisme associé φ.

Déterminer les coordonnées (x', y', z') de M', image par f de M de coordonnées (x , y , z), en fonction de x, y et z.

Solution 3

Soit M(x , y , z) et M'(x' , y' , z') deux points de l'espace.

f(M) = M' signifie $\overrightarrow{f(A)f(M)}=\varphi(\overrightarrow{AM})$.

C'est-à-dire $\overrightarrow{A'M'}=\varphi(\overrightarrow{AM})$, qui équivaut à $\begin{pmatrix} x'+4 \\ y'-3 \\ z'-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+2 \end{pmatrix}$, puis à

$\begin{pmatrix} x'+4 \\ y'-3 \\ z'-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(x-1)-y+4(z+2) \\ -3(x-1)+y-3(z+2) \\ x-1-2y-2(z+2) \end{pmatrix}$ et enfin à $\begin{cases} x'=2x-y+4z+2 \\ y'=-3x+y-3z \\ z'=x-2y-2z-4 \end{cases}$.

D'où f transforme M(x , y , z) en M'(x' , y' , z'), où $\begin{cases} x'=2x-y+4z+2 \\ y'=-3x+y-3z \\ z'=x-2y-2z-4 \end{cases}$.

Exercice 4

L'espace E est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

L'application affine f de E vers E, transforme les points O, B(1 , 0 , 0), C(0 , 1 , 0) et D(0 , 0 , 1) en O'(2 , -1 , -1), B'(1 , -3 , 1), C'(-2 , 1 , 4) et D'(1 , 1 , 1) respectivement.

Déterminer les coordonnées de M'(x', y', z'), image par f de M(x , y , z), en fonction de x, y et z.

Solution 4

On remarque que les points O, B, C et D sont non coplanaires, donc ils définissent un repère de l'espace.

Soit φ l'endomorphisme associé à f, on a : $\varphi(\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{O'B'}$, $\varphi(\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{O'C'}$ et $\varphi(\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{O'D'}$.

C'est-à-dire : $\varphi(\vec{i})=-\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$, $\varphi(\vec{j})=-4\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$ et $\varphi(\vec{k})=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

La matrice de φ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est donc $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{f(O)f(M)}=\varphi(\overrightarrow{OM})$ équivaut à $\overrightarrow{O'M'}=\varphi(\overrightarrow{OM})$.

Ce qui se traduit par : $\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'+1 \\ z'+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On obtient $\begin{cases} x'=-x-4y-z+2 \\ y'=-2x+2y+2z-1 \\ z'=2x+5y+2z-1 \end{cases}$.

2 – Reconnaître une application affine définie par son expression analytique

Exercice 5

f désigne l'application du plan P vers lui-même, qui à tout point M(x , y), associe le point M'(x' , y') où $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 1 \\ y' = 4x + 5y - 2 \end{cases}$. Le plan P étant muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que f est une application affine du plan.

Solution 5

f est une application affine, car son expression analytique est sous la forme : $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$, où a, b, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels.

Exercice 6

Montrer que l'application f de l'espace E vers lui-même qui à tout point M(x , y , z) , associe le point M'(x' , y' , z') tel que : $\begin{cases} x' = 3x - 2y - z \\ y' = x - 3y + 2z + 1 \\ z' = 2x + y - 3z - 1 \end{cases}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une application affine, préciser son endomorphisme associé.

Solution 6

- f est une application affine, car son expression analytique est sous la forme : $\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$.
- Soit M(x , y , z) et M'(x' , y' , z') deux points de l'espace tels que M' = f(M).

Notons f(O) = O', on a O'(0 , 1 , -1).

Soit φ l'endomorphisme associé à f, $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM})$. C'est-à-dire $\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$.

Or, $\overrightarrow{O'M'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3x - 2y - z \\ x - 3y + 2z \\ 2x + y - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (1) .

Alors soit ψ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

D'après (1) on a $\overrightarrow{O'M'} = \psi(\overrightarrow{OM})$. D'où φ = ψ.

D'où l'endomorphisme associé à f a pour matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

P désigne le plan complexe muni d'un repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On donne

$$f : P \to P$$
$$M_z \mapsto M'_{z'} \text{ où } z' = \frac{1}{2}[(1-i)z + (1+i)\bar{z}]$$

Montrer que f est une application affine.

Solution 7

Déterminons l'expression analytique de f :

Soit z = x + iy et z' = x' + iy', où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

$z'=\frac{1}{2}[(1-i)z+(1+i)\bar{z}]$ signifie alors $x'+iy'=\frac{1}{2}[(1-i)(x+iy)+(1+i)(x-iy)]=x+y$.

D'où x' = x + y et y' = 0.

D'où f est l'application de P vers P, qui à tout point M(x , y) de P associe le point M'(x', y') de P où, $\begin{cases} x'=x+y \\ y'=0 \end{cases}$.

f est une application affine, car son expression analytique est sous la forme : $\begin{cases} x'=ax+by+c \\ y'=a'x+b'y+c' \end{cases}$, où a, b, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels.

Exercice 8

P désigne le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Soit $F: P-\{O\} \to P-\{O\}$ une fonction.

$M_z \mapsto M'_{z'}$ où $z'=\frac{1}{\bar{z}}$

1) Quelle est l'ensemble de définition de F ?
2) Définir analytiquement F. Est-ce une application affine ?
   Quels sont les points invariants par F ?
3) Montrer que F est une involution.
4) Quelle est l'image par F du cercle (C) de diamètre [OA], avec A(1 , 1) ?
5) Montrer que M a pour image M' par F, si et seulement si OM×OM' = 1 et O, M, M' sont alignés.

Solution 8

1) Soit M un point du plan d'affixe z.

F(M) existe si et seulement si $\bar{z}\neq 0$. C'est-à-dire $z \neq 0$. D'où l'ensemble de définition de F est P – {O}.

2) • Soit M(x , y) et M'(x', y') deux points du plan.

F(M) = M' si et seulement si $z'=\frac{1}{\bar{z}}$.

C'est-à-dire $x'+iy'=\frac{1}{x-iy}=\frac{x+iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}i$. D'où $\begin{cases} x'=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ y'=\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$.

• F n'est pas une application affine car son expression analytique n'est pas sous la forme $\begin{cases} x'=ax+by+c \\ y'=a'x+b'y+c' \end{cases}$, où a, b, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels.

• Soit M un point du plan d'affixe z.

F(M) = M équivaut à $\frac{1}{\bar{z}}=z$, puis à $z\bar{z}=1$, ensuite à $|z|^2=1$, et enfin à $|z|=1$. Ce qui signifie que OM = 1.

D'où l'ensemble des points invariants par F est le cercle de centre O et de rayon 1.

3) Soit M un point du plan d'affixe non nulle z.

Notons M_1 = F(M) d'affixe z_1 et M' = F(M_1) d'affixe z'.

On a $z'=\frac{1}{\bar{z}_1}$ et $z_1=\frac{1}{\bar{z}}$. D'où z' = z. On en déduit que M' = M. C'est-à-dire FoF(M) = M pour tout point M du plan.

On peut alors conclure que FoF = $Id_{P-\{O\}}$. D'où F est involutive.

4) Le point A a pour affixe a = 1 + i. Le milieu Ω de [OA] a pour affixe $\omega=\frac{a}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

La distance OA est égale à $|1+i|=\sqrt{2}$. (C) est donc le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi, soit M un point du plan d'affixe z et M' d'affixe z' son image par F. On a $z'=\frac{1}{\bar{z}}$, donc $z=\frac{1}{\overline{z'}}$.

Donc : M appartient à (C) $\Leftrightarrow$ $|z-\omega|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\left|\frac{1}{\overline{z'}}-\omega\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|1-\omega\overline{z'}|}{|\overline{z'}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \left|\omega\left(\overline{z'}-\frac{1}{\omega}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|\overline{z'}|$

$\Leftrightarrow |\omega|\left|\overline{z'}-\frac{1}{\omega}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|\overline{z'}|$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\overline{z'-\frac{1}{\bar{\omega}}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|z'|$

$\Leftrightarrow |z'-a|=|z'|$ car $\frac{1}{\bar{\omega}}=a$

$\Leftrightarrow$ AM' = OM'.

$\Leftrightarrow$ M' appartient à la médiatrice du segment [OA].

D'où l'image de (C) par F est la médiatrice du segment [OA].

5) Soit M' = F(M), avec M' d'affixe z' et M d'affixe z.

M' = F(M) $\Leftrightarrow$ $z'=\frac{1}{\bar{z}}$ $\Leftrightarrow$ $z'\bar{z}=1$

$\Leftrightarrow |z'\bar{z}|=1$ et $\arg(z'\bar{z})\equiv 0[2\pi]$.

$\Leftrightarrow |z'|\times|\bar{z}|=1$ et $\arg z'+\arg\bar{z}\equiv 0[2\pi]$.

$\Leftrightarrow$ OM'.OM = 1 et $\arg z'-\arg z\equiv 0[2\pi]$.

$\Leftrightarrow$ OM'.OM = 1 et $\arg z'\equiv\arg z\,[2\pi]$.

$\Leftrightarrow$ OM'.OM = 1 et $mes(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM'}})\equiv mes(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})[2\pi]$

$\Leftrightarrow$ OM'.OM = 1 et M' appartient à la demi-droite [OM) privée du point O.

On en déduit que, F(M) = M' si et seulement si OM'.OM = 1 et O, M et M' sont alignés.

3 – Montrer qu'une application affine est bijective

Exercice 9

Soit $F: P\to P$

$M(x,y)\mapsto M'(x',y')$ où $\begin{cases}x'=3x-2y+1\\ y'=4x+5y-2\end{cases}$ une application affine du plan P, muni d'un repère R = (O, I, J).

1) Définir l'image R' de R par f. f est-elle une bijection ?
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3) Exprimer dans le repère R' les coordonnées du point M de coordonnées (x , y) dans le repère R.

Solution 9

1) • Le point M(x , y) a pour image le point f(M) de coordonnées (3x – 2y + 1 , 4x + 5y – 2).
On a O(0 , 0), I(1 , 0) et J(0 , 1).
Posons O' = f(O), I' = f(I) et J' = f(J), on aura O'(1 , -2), I'(4 , 2) et J'(-1 , 3).
Donc l'image du repère R = (O , I , J) est le triplet R' = (O' , I' , J') avec O'(1 , -2), I'(4 , 2) et J'(-1 , 3).

• ***f est bijective si et seulement si (O' , I' , J') est un repère affine, c'est-à-dire O', I' et J' sont non alignés.***

Comme on a : $\overrightarrow{O'I'}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{O'J'}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et $\det(\overrightarrow{O'I'},\overrightarrow{O'J'})=\begin{vmatrix}3 & -2\\4 & 5\end{vmatrix}=23\neq 0$, alors les points O', I' et J' sont non alignés

D'où f transforme le repère R en un repère R'. D'où f est bijective.

2) Soit M(x , y) un point du plan.

f(M) = M équivaut à $\begin{cases}x=3x-2y+1\\y=4x+5y-2\end{cases}$. On aboutit alors après résolution du système à x = 0 et $y=\frac{1}{2}$.

D'où f laisse un seul point invariant, qui est le point $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

3) Soit M(x , y) dans le repère R et M(a , b) dans le repère R'.

On a $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{O'M}=a\overrightarrow{O'I'}+b\overrightarrow{O'J'}$.

Or d'après la relation de Chasles $\overrightarrow{O'M}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OM}$. Donc $a\overrightarrow{O'I'}+b\overrightarrow{O'J'}=-\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OJ}+x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$.

Ce qui signifie $a(3\overrightarrow{OI}+4\overrightarrow{OJ})+b(-2\overrightarrow{OI}+5\overrightarrow{OJ})=(x-1)\overrightarrow{OI}+(y+2)\overrightarrow{OJ}$.

Soit $(3a-2b)\overrightarrow{OI}+(4a+5b)\overrightarrow{OJ}=(x-1)\overrightarrow{OI}+(y+2)\overrightarrow{OJ}$.

Ce qui aboutit au système suivant $\begin{cases}3a-2b=x-1\\4a+5b=y+2\end{cases}$, dont la résolution donne pour solutions :

$$a=\frac{5x+2y-1}{23} \quad \text{et} \quad b=\frac{-4x+3y+10}{23}.$$

D'où le point M a pour coordonnées $\left(\frac{5x+2y-1}{23},\frac{-4x+3y+10}{23}\right)$ dans le repère R'.

Exercice 10

Soit A, B et C trois points non alignés du plan P et M un point quelconque de P tel que : $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

On considère l'application affine f de P vers P telle que : f(A) = B, f(B) = C et f(C) = A.

1) Montrer que f est bijective.

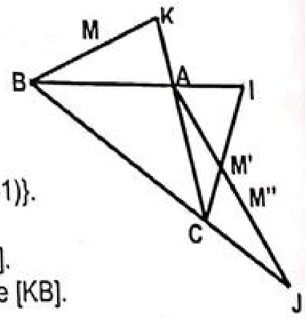
2) Construire les points M, M' = f(M) et M''= fof(M).

Solution 10

1) On a f(A) = B, f(B) = C et f(C) = A.

Donc f est une application affine qui transforme trois points non alignés A, B et C en trois points non alignés B, C et A.

D'où f est bijective.



2) • Soit M le point du plan tel que $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$,

M est le barycentre du système {(A , 3), (B , 2), (C , -1)}.

D'où M' = f(M) est le barycentre du système {(f(A) , 3), (f(B) , 2), (f(C) , -1)}.

On en déduit que M' est le barycentre du système {(B , 3), (C , 2), (A , -1)}.

Notons I le barycentre du système {(B , 3), (A , -1)}, alors M' est le milieu de [IC].

• M'' = fof(M) = f(M') est le barycentre du système {(f(B) , 3), (f(C) , 2), (f(A) , -1)}.

C'est-à-dire M'' est le barycentre du système {(C , 3), (A , 2), (B , -1)}.

Notons J le barycentre du système {(C , 3), (B , -1)}, alors M'' est le milieu de [JA].

• Notons K le barycentre du système {(A , 3), (C , -1)}, alors M est la milieu de [KB].

Exercice 11

L'espace E est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit l'application affine f de l'espace E vers lui-même qui à tout point M(x , y , z), associe le point M'(x' , y' , z') tel que : $\begin{cases}x'=3x-3y+5z+1\\y'=2x-2y+5z+1\\z'=2x-3y+6z+1\end{cases}$.

1) f est-elle bijective ?

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

3) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe, pour M non invariant.

Solution 11

1) Soit I, J, K les points tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$, (O , I , J , K) est un repère affine.

Notons O' = f(O), I' = f(I), J'= f(J) et K' = f(K).

f est bijective si et seulement si les points O', I', J' et K' sont non coplanaires.

Or on a : O'(1 , 1 , 1), I'(4 , 3 , 3), J'(-2 , -1 , -2), K'(6 , 6 , 7). Donc les vecteurs $\overrightarrow{O'I'}$, $\overrightarrow{O'J'}$ et $\overrightarrow{O'K'}$ ont respectivement pour coordonnées (3 , 2 , 2), (-3 , -2 , -3) et (5 , 5 , 6).

O', I', J', K' sont non coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{O'I'}$, $\overrightarrow{O'J'}$ et $\overrightarrow{O'K'}$ sont non coplanaires.

Soit a, b et c trois nombres réels, $a\overrightarrow{O'I'}+b\overrightarrow{O'J'}+c\overrightarrow{O'K'}=\vec{0}$ équivalent à $\begin{cases}3a-3b+5c=0\\2a-2b+5c=0\\2a-3b+6c=0\end{cases}$.

La résolution de ce système donne a = b = c = 0. D'où les vecteurs $\overrightarrow{O'I'}$, $\overrightarrow{O'J'}$ et $\overrightarrow{O'K'}$ sont non coplanaires.

Les points O', I', J' et K' sont donc non coplanaires. f est par conséquent bijective.

2) Soit M(x , y , z) un point de l'espace,

$$f(M) = M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x=3x-3y+5z+1\\y=2x-2y+5z+1\\z=2x-3y+6z+1\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 2x-3y+5z+1=0.$$

D'où l'ensemble des points invariants par f est le plan d'équation 2x – 3 y + 5z + 1 = 0.

3) Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

$$\text{On a : } \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}2x-3y+5z+1\\2x-3y+5z+1\\2x-3y+5z+1\end{pmatrix}=(2x-3y+5z+1)(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}).$$

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ qui est indépendant de M. D'où $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

B. Etude de quelques applications affines particulières du plan

1 – Les projections

Exercice 12

P désigne le plan complexe muni d'un repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. f est l'application de P vers P qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=\frac{1}{2}[(1-i)z+(1+i)\bar{z}]$.

1) Montrer que fof = f.

2) Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par f.

Montrer que pour tout point M de P, son image M' appartient à (D) et $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

Reconnaître alors f.

Solution 12

1) Soit M un point du plan d'affixe z, posons f(M) = M_1 d'affixe z_1 et M_2 = f(M_1) d'affixe z_2.

On a $z_1=\frac{1}{2}[(1-i)z+(1+i)\bar{z}]$ et $z_2=\frac{1}{2}[(1-i)z_1+(1+i)\overline{z_1}]$. Il s'en suit que

$$z_2=\frac{1}{2}\left[(1-i)\frac{1}{2}[(1-i)z+(1+i)\bar{z}]+(1+i)\frac{1}{2}[(1+i)\bar{z}+(1-i)z]\right]$$

$$=\frac{1}{4}[(1-i)^2+(1+i)(1-i)]z+\frac{1}{4}[(1+i)^2+(1+i)(1-i)]\bar{z}$$

$$=\frac{1}{4}(-2i+2)z+\frac{1}{4}(2i+2)\bar{z}$$

D'où, $z_2 = \frac{1}{2}[(1-i)z + (1+i)\bar{z}] = z_1$.

Puisque $z_2 = z_1$, alors $f(M_1) = M_1$, c'est-à-dire fof(M) = f(M).
Comme pour tout point M du plan on a fof(M) = f(M), alors fof = f.

2) Déterminons l'expression analytique de f :

D'après l'exercice 7, f est l'application de P vers P, qui à tout M(x , y) de P associe M'(x', y') de P où $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 0 \end{cases}$.

- Soit M(x , y) un point du plan P.

f(M) = M si et seulement si, $\begin{cases} x = x + y \\ y = 0 \end{cases}$. C'est-à-dire y = 0.

D'où l'ensemble des points invariants par f est la droite d'équation y = 0.

- Soit M(x , y) un point du plan, et M' = f(M) .

M' a pour coordonnées (x + y , 0). D'où M' appartient à la droite (D) d'équation y = 0.

- Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées (y , -y).

D'où $\overrightarrow{MM'} = y\vec{u} - y\vec{v} = y(\vec{u} - \vec{v})$. Ainsi, $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{u} - \vec{v}$ qui ne dépend pas de M.

D'où le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

- Soit M un point du plan.

f(M) appartient à (D) et le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ est colinéaire au vecteur fixe $\vec{u} - \vec{v}$.

D'où f est une projection d'axe (D) et de direction, celle du vecteur $\vec{u} - \vec{v}$.

2 – Les translations et les homothéties

Exercice 13

Soit f de P vers P une application affine du plan ; on considère trois points non alignés A, B, C tels que f(A) = B, f(B) = C, f(C) = A.

a) Trouver l'image du centre de gravité du triangle ABC.

b) Donner la nature exacte de f^3 = fofof.

Solution 13

a) Soit G le centre de gravité du triangle ABC, G est le barycentre du système {(A , 1), (B , 1), (C , 1)}.
D'où f(G) est le barycentre du système {(f(A) , 1), (f(B) , 1), (f(C) , 1)}.
C'est-à-dire f(G) est le barycentre du système {(B , 1), (C , 1), (A , 1)}, qui est G. D'où f(G) = G.

b) On a fofof(A) = fof(B) = f(C) = A, fofof(B) = fof(C) = f(A) = B et fofof(C) = fof(A) = f(B) = C.
fofof laisse trois points non alignés invariants, d'où fofof laisse tous les points du plan invariants.
Et finalement, fofof est l'application identique du plan.

Exercice 14 ▶

Soit A et B deux points distincts du plan P, (a , b) est un couple de réels.

1) A quelle condition sur (a , b), peut-on associer à tout point M de P un point M' tel que : $a\overrightarrow{M'A} + b\overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$

2) Cette condition étant réalisée, on envisage d'étudier l'application f de P dans P, qui à tout point M associe le point M'.
Trouver les points invariants par f.

3) Suivant que a + b = 0 ou a + b ≠ 0, déterminer la nature de f.

Solution 14

1) Si M' existe alors M' est le barycentre des points pondérés (A , a), (B , b) et (M , 2), qui n'existe que si et seulement si a + b + 2 ≠ 0.

2) Soit M un point du plan.

M est invariant si et seulement si f(M) = M. C'est-à-dire $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, qui équivaut à $(a+b)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ (1).

Si a + b = 0, alors cette égalité devient $b\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Ainsi,

si b = 0, donc a = 0, alors cette égalité est vérifiée pour tout point M.

L'ensemble des points M invariants par f est alors le plan P. f est alors l'application identique du plan P.
si $b \neq 0$, A = B (ce qui contredit l'énoncé). Alors il n'y a aucun point invariant par f.

Si $a + b \neq 0$, l'égalité (1) équivaut à $\overrightarrow{AM}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$. Il en résulte alors qu'il existe un unique point invariant, qui est le barycentre du système {(A , a), (B , b)}.

3) Si $a + b = 0$, alors $a\overrightarrow{M'A}+b\overrightarrow{M'B}+2\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$ équivaut à $a\overrightarrow{M'A}-a\overrightarrow{M'B}+2\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$.

C'est-à-dire $\overrightarrow{MM'}=-\frac{a}{2}\overrightarrow{AB}$.

f est alors la translation de vecteur $\vec{u}=-\frac{a}{2}\overrightarrow{AB}$.

Si $a + b \neq 0$, notons G le barycentre de (A , a) et (B , b). On aura alors :

$(a+b+2)\overrightarrow{M'G}+2\overrightarrow{GM}=\vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{GM'}=\frac{2}{a+b+2}\overrightarrow{GM}$ (car $a + b + 2 \neq 0$).

Ce qui permet de conclure que, f est l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{2}{a+b+2}$.

3 – Les symétries centrales

Exercice 15

Soit f l'application affine du plan, telle que fof soit l'application identité du plan.
a) f est-elle bijective ?
b) Démontrer que f a au moins un point invariant.
c) Déterminer la nature précise de f si elle a un point invariant unique.

Solution 15

a) Soit M_1 et M_2 deux points du plan.
$f(M_1) = f(M_2)$ implique $fof(M_1) = fof(M_2)$. C'est-à-dire $M_1 = M_2$ (car $fof = Id_P$). D'où f est injective.
De plus, soit M un point quelconque du plan, on a :
fof(M) = M, c'est-à-dire f[f(M)] = M. M admet donc f(M) comme antécédent par f. D'où f est surjective.
Et par conséquent, f est bijective.
b) Soit M un point du plan et M' = f(M).
Notons I le milieu de [MM'], c'est-à-dire I est le barycentre du système {(M , 1), (M' , 1)}.
Alors f(I) est le barycentre du système {(f(M) , 1), (f(M') , 1)}, c'est-à-dire f(I) est barycentre de {(f(M) , 1), (f(f(M)) , 1)}.
D'où f(I) est le barycentre du système {(f(M) , 1), (M , 1)} (car fof(M) = M), qui est I.
Donc f(I) = I. D'où I est invariant par f. Finalement, f laisse au moins un point invariant.
c) Supposons que f laisse un seul point Ω invariant.
Soit M un point du plan et M' = f(M), d'après la question b), le milieu de [Mf(M)] est invariant par f.
Ω étant le seul point invariant par f, Ω est le milieu de [Mf(M)]. D'où f est la symétrie centrale de centre Ω.

4 – Les symétries axiales

Exercice 16

ABC est un triangle et f l'application affine définie par : f(A) = B, f(B) = A et f(C) = C.
1) Démontrer que $fof = Id_P$.
2) Démontrer que le milieu I de [AB] est invariant par f.
3) Démontrer que la droite (IC) est invariante point par point par f.
4) Démontrer que la droite (AB) est globalement invariante par f.
5) Construire l'image d'un point M du plan par f. (On distinguera trois : M appartient à (IC), M appartient à (AB) et M n'appartient pas à $(IC) \cup (AB)$).

Solution 16

1) A, B et C sont trois points non alignés et on a fof(A) = f(B) = A, fof(B) = f(A) = B et fof(C) = f(C) = C.

D'où pour tout point M du plan, on a fof(M) = M. Par conséquent, fof = Id_P.

2) Soit I, milieu de [AB], f(I) est le milieu de [f(A)f(B)]. Or f(A) = B et f(B) = A.

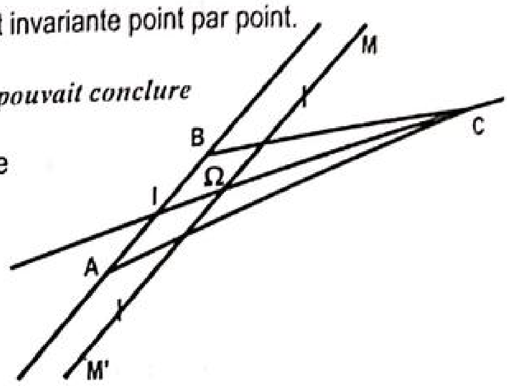
f(I) est donc le milieu de [AB] qui est I. C'est-à-dire f(I) = I. Donc I est invariant par f.

3) Soit M un point de la droite (CI).

Il existe deux réels a et b tels que M = bar{(C , a), (I , b)}. Et donc f(M) = bar{(f(C) , a), (f(I) , b)}.

C'est-à-dire f(M) = bar{(C , a), (I , b)}.

Puisque M = bar{(C , a), (I , b)}, alors f(M) = M. D'où la droite (CI) est invariante point par point.



Remarque :

Puisque C et I sont invariants par f, et f une application affine, on pouvait conclure que la droite (CI) est invariante point par point.

4) Soit M un point de la droite (AB), il existe deux réels c et d tels que M = bar{(A , c), (B , d)}.

On a alors f(M) = bar{(f(A) , c), (f(B) , d)} = bar{(B , c), (A , d)}.

D'où f(M) appartient à la droite (AB).

Par conséquent, la droite (AB) est globalement invariante par f.

5)
- Si M appartient à la droite (IC), alors f(M) = M.
- Si M appartient à la droite (AB), alors f(M) appartient à (AB).

Si M = bar{(A , c), (B , d)}, alors M' = f(M) = bar{(B , c), (A , d)}.

Soit Ω le milieu de [MM'], on a : Ω = bar{(M , c + d), (M', c + d)} = bar{(A , c), (B , d), (A , d), (B , c)}
= bar{(A , c + d), (B , c + d)}
= I.

D'où M' appartient à la droite (AB) et M et M' sont symétriques par rapport à I.

- Si M n'appartient pas à $(IC)\cup(AB)$, Il existe trois réels a, b et c tels que

M = bar{(A , a), (B , b), (C , c)}, avec $a + b + c \neq 0$. On a alors M' = f(M) = bar{(B , a), (A , b), (C , c)}.

Notons Ω le milieu de [MM'], alors :

Ω = bar{(M, a + b + c), (M' , a + b + c)} = bar{(A, a + b), (B , a + b), (C , 2c)} = bar{(I , 2a + 2b), (C , 2c)}.

D'où Ω appartient à (IC).

De plus, $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ et $b\overrightarrow{M'A}+a\overrightarrow{M'B}+c\overrightarrow{M'C}=\vec{0}$.

D'où $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ et $a\overrightarrow{M'A}+b\overrightarrow{M'B}+c\overrightarrow{M'C}+a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

En faisant la différence membre à membre des deux dernières égalités, on obtient $(a+b+c)\overrightarrow{MM'}=(a-b)\overrightarrow{AB}$. Donc

$\overrightarrow{MM'}=\dfrac{a-b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}$. On en déduit que les droites (MM') et (AB) sont parallèles. En résumé :

Si M appartient à (IC), alors M = M'.

Si M appartient à la droite (AB), alors M et M' sont symétriques par rapport à I milieu de [AB].

Si M n'appartient pas à $(IC)\cup(AB)$, alors le milieu de [MM'] appartient à (IC) et la droite (MM') est parallèle à la droite (AB). M et M' donc sont symétriques par rapport à (IC) et parallèlement à (AB).

L'application f est la symétrie par rapport à (IC) et parallèlement à (AB).

Exercice 17

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. Soit f l'application de P dans lui-même, qui à tout point M(x , y)

associe le point M'(x', y') où : $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{13}(5x-12y+24) \\ y'=\dfrac{1}{13}(-12x-5y+36) \end{cases}$.

1) Démontrer que fof = Id.
2) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on précisera.
3) Soit M un point du plan et M' = f(M).
   a) Démontrer que le milieu de [MM'] appartient à (D).
   b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe, orthogonale à celle de (D).
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Solution 17

1) Soit M(x , y) un point du plan, $M_1(x_1\ ,\ y_1)$ = f(M) et M'(x' , y') = fof(M) = $f(M_1)$. On a $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y_1 = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$.

Donc, $\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x_1 - 12y_1 + 24) = \frac{1}{13}\left[5\times\frac{1}{13}(5x - 12y + 24) - 12\times\frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) + 24\right] = x \\ y' = \frac{1}{13}(-12x_1 - 5y_1 + 36) = \frac{1}{13}\left[-12\times\frac{1}{13}(5x - 12y + 24) - 5\times\frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) + 36\right] = y \end{cases}$.

D'où pour tout point M du plan, on M = M'. C'est-à-dire fof(M) = M. Par conséquent, fof = Id_P.

2) Soit M(x , y) un point du plan.

f(M) = M équivaut à $\begin{cases} x = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$. C'est-à-dire $\begin{cases} -8x - 12y + 24 = 0 \\ 12x + 18y - 36 = 0 \end{cases}$.

Les deux équations étant équivalentes à 2x + 3y – 6 = 0, le système se réduit à 2x + 3y – 6 = 0.
D'où l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation : 2x + 3y – 6 = 0.

3) Soit M(x , y) un point du plan, et M' son image par f. M' a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{pmatrix}$.

a) Le milieu Ω de [MM'] a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{x + x'}{2} \\ \frac{y + y'}{2} \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} \frac{1}{13}(9x - 6y + 12) \\ \frac{1}{13}(-6x + 4y + 18) \end{pmatrix}$.

On a alors $2x_\Omega + 3y_\Omega - 6 = \frac{2}{13}(9x - 6y + 12) + \frac{3}{13}(-6x + 4y + 18) - 6 = 0$. D'où Ω appartient à (D).

b) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{13}(-8x - 12y + 24) \\ \frac{1}{13}(-12x - 18y + 36) \end{pmatrix}$, qui sont aussi les coordonnées du vecteur

$\frac{1}{13}(-4x - 6y + 12)(2\vec{i} + 3\vec{j})$. D'où le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur fixe $2\vec{i} + 3\vec{j}$.

Or un vecteur directeur de (D) est $3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $(3\vec{i} - 2\vec{j}).(2\vec{i} + 3\vec{j}) = 3\times2 - 2\times3 = 0$.

C'est-à-dire les vecteurs $2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $3\vec{i} - 2\vec{j}$ sont orthogonaux.

Alors on peut conclure que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe, orthogonale à celle de (D).

c) Soit M un point du plan et M' son image par f.
On a montré que le milieu de [MM'] appartient à (D) et la droite (MM') est perpendiculaire à (D).
D'où f est la réflexion d'axe (D).

5 – Les symétries glissées

Exercice 18

Soit BB'B'' un triangle isocèle en B'. On désigne par A, A' et C les milieux respectifs des segments [BB'], [B'B''] et [BB''], et A'' le symétrique de A par rapport à A'.
On considère une application affine f du plan dans lui-même, telle que : f(A) = A' et f(B) = B'.

1)a) Déterminer f(B').

b) Quelle est la nature du quadrilatère AB'A'C ?

2) Démontrer que fof est une translation si et seulement si, f(A') = A''.
3) Dans cette question, on suppose que : f(A') = A''. On désigne par φ l'endomorphisme associé à f.

a) Déterminer $\varphi(\overrightarrow{AA'})$ et $\varphi(\overrightarrow{B'C})$.

b) Déterminer une symétrie orthogonale s et une translation t telles que : f = tos = sot.

Solution 18

1)a) On a $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB'}$, d'où $\overrightarrow{f(B)f(A)}=\overrightarrow{f(A)f(B')}$. C'est-à-dire $\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{A'f(B')}$.

D'où f(B') est le symétrique de B' par rapport à A', qui est B''. D'où f(B') = B''.

b) AB'A'C est un losange.

2) Supposons que fof est une translation :
Posons X = f(A'). On a alors f(A') = fof(A) = X et fof(B) = f(B') = B''.

Puisque par hypothèse fof est une translation, alors on a $\overrightarrow{BB''}=\overrightarrow{AX}$.

Or $\overrightarrow{BB''}=\overrightarrow{AA''}$,alors $\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{AX}$. C'est-à-dire X = A'', et donc f(A') =A''.

D'où, si fof est une translation, alors f(A') = A''.

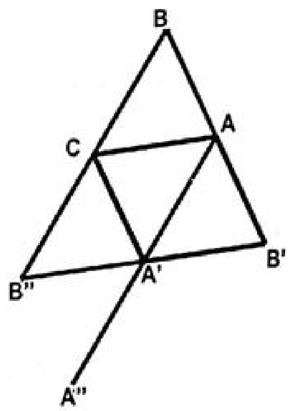
Réciproquement, supposons f(A') = A'', et déterminons f(A'') :

On a $\overrightarrow{A'A''}=\overrightarrow{AA'}$, d'où $\overrightarrow{f(A')f(A'')}=\overrightarrow{f(A)f(A')}$. On obtient alors $\overrightarrow{A''f(A'')}=\overrightarrow{A'A''}$.

D'où f(A'') est le symétrique de A' par rapport à A''. Ce qui conduit à :
fof(A) = f(A') = A'', fof(B) = f(B') = B'' et fof(A') = f(A'').

Or $\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{BB''}=\overrightarrow{A'f(A'')}$. D'où fof est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA''}$.

Finalement, fof est une translation si et seulement si, f(A') = A''.



3)a) • $\varphi(\overrightarrow{AA'})=\overrightarrow{f(A)f(A')}=\overrightarrow{A'A''}=\overrightarrow{AA'}$.

• $\varphi(\overrightarrow{B'C})=\varphi(\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BC})$

$$=-\varphi(\overrightarrow{BB'})+\varphi(\overrightarrow{BC}), \text{ car } \varphi \text{ est linéaire}$$

$$=-\overrightarrow{f(B)f(B')}+\varphi(\overrightarrow{AA'}), \text{ car } \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA'}.$$

$$=-\overrightarrow{B'B''}+\overrightarrow{AA'}$$

$$=\overrightarrow{B''B'}+\overrightarrow{CB''}$$

$$=\overrightarrow{CB'}$$

D'où $\varphi(\overrightarrow{AA'})=\overrightarrow{AA'}$ et $\varphi(\overrightarrow{B'C})=\overrightarrow{CB'}$.

b) Puisque f(A') = A'', alors d'après la question 2), fof est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA''}$.

Supposons f = tos = sot, où t est la translation de vecteur $\vec{u}$ et s une réflexion.

Alors, on a $f \circ f=(t \circ s)\circ(s \circ t)=t \circ (s \circ s) \circ t=t \circ t=t_{2\vec{u}}$.

Or $f \circ f=t_{\overrightarrow{AA''}}$, alors $2\vec{u}=\overrightarrow{AA''}$. C'est-à-dire $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA''}=\overrightarrow{AA'}$.

Ainsi, si f = tos = sot, alors t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Si t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$, alors étudions $t^{-1}$of.

$t^{-1} \circ f(A)=t_{\overrightarrow{A'A}}(A')=A$, $t^{-1} \circ f(B')=t_{\overrightarrow{A'A}}(B'')=C$ et $t^{-1} \circ f(A')=t_{\overrightarrow{A'A}}(A'')=A'$.

Or l'application affine qui transforme B' en C et qui laisse A et A' invariants est la réflexion d'axe (AA').

Posons s = $s_{(AA')}$ et $t=t_{\overrightarrow{A'A}}$.

Vérifions que f = tos = sot :
sot(A) = s(A') = A' = f(A), sot(B) = s(C) = B' = f(B) et sot(A') = s(A'') = A'' = f(A').
tos(A) = t(A) = A', tos(A') = t(A') = A'' et tos(B) = t(B_1) = B'.
Comme les points A, A' et B sont non alignés et ont les mêmes images par f, sot et tos, alors f = sot = tos.
D'où s est la réflexion d'axe (AA').

6 – Les affinités

Exercice 19

ABC est un triangle dans le plan P et D est un point tel que C soit le milieu de [BD].
Soit f l'application affine de P définie par : f(A) = A, f(B) = D et f(C) = B.

1) Démontrer qu'il existe un point G de la droite (BC) invariant par f, et exprimer $\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GC}$.
2) En déduire l'ensemble des points invariants par f.
3) Démontrer que f est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques.

Solution 19

1) • Soit M un point de (BC) tel que f(M) = M.

Puisque M appartient à (BC), alors il existe un réel a tel que $\overrightarrow{BM}=a\overrightarrow{BC}$ (1).

Donc $\overrightarrow{f(B)f(M)}=a\overrightarrow{f(B)f(C)}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{DM}=a\overrightarrow{DB}$. Il en résulte que $\overrightarrow{BM}=(1-a)\overrightarrow{BD}=2(1-a)\overrightarrow{BC}$ (2).

Des égalités (1) et (2), on déduit que : $\overrightarrow{BM}=a\overrightarrow{BC}=2(1-a)\overrightarrow{BC}$, avec B ≠ C. Alors a = 2(1 – a). D'où $a=\frac{2}{3}$.

On en déduit alors que, le point G tel que $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ est un point invariant par f.

• **Exprimons $\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GC}$:**

On a $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GC}$.

2) Puisque f(A) = A, f(G) = G et f n'est pas l'application identique (car f(B) = D ≠ B), alors l'ensemble des points invariants par f est la droite (AG).
3) Soit M un point du plan et M' son image par f.
Montrons que la droite (MM') est parallèle à la droite (BC) :

On peut écrire qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ (3).

Alors on a $\overrightarrow{f(A)f(M)}=a\overrightarrow{f(A)f(B)}+b\overrightarrow{f(A)f(C)}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM'}=a\overrightarrow{AD}+b\overrightarrow{AB}$ (4).

Des égalités (3) et (4), il ressort que $\overrightarrow{MM'}=a\overrightarrow{BD}+b\overrightarrow{CB}=2a\overrightarrow{BC}-b\overrightarrow{BC}=(2a-b)\overrightarrow{BC}$.

D'où les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Par conséquent, les droites (MM') et (BC) sont parallèles.
Maintenant, soit N le point d'intersection de (MM') et (AG).
Puisque N appartient à (AG), alors N est invariant par f.
Puisque N appartient à (MM') alors (MN) est parallèle à (BC).
D'où, il existe un réel α tel que $\overrightarrow{NM}=\alpha\overrightarrow{BC}$. Et par suite, $\overrightarrow{f(N)f(M)}=\alpha\overrightarrow{f(B)f(C)}$.

C'est-à-dire $\overrightarrow{NM'}=\alpha\overrightarrow{DB}=-2\alpha\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{NM}$.

En conclusion :
Soit M un point du plan, M' = f(M) et N le projeté de M sur la droite (AG), parallèlement à (BC), on a :
(MM') parallèle à (BC) et $\overrightarrow{NM'}=-2\overrightarrow{NM}$.
D'où f est l'affinité de rapport -2, d'axe (AG) et de direction celle de (BC).

Exercice 20

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\,,\,2\end{pmatrix}$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'}=(\vec{u}\cdot\overrightarrow{OM})\cdot\vec{i}+(\vec{i}\cdot\overrightarrow{OM})\cdot\vec{u}$.

1) Donner l'expression analytique de f. En déduire que f est une application affine.
2) Déterminer deux points A et B, distincts de O, tels que : f(A) = A et $\overrightarrow{Of(B)}=-4\overrightarrow{OB}$.
En déduire que f est une affinité orthogonale dont on précisera l'axe et le rapport.
3) Exprimer analytiquement f dans le repère (O , A , B).

Solution 20

1) • Soit M(x , y) et M'(x', y') deux points du plan.

On a $\vec{u}\cdot\overrightarrow{OM}=-\frac{3}{2}x+2y$ et $\vec{i}\cdot\overrightarrow{OM}=x$. D'où $\overrightarrow{OM'}=(\vec{u}\cdot\overrightarrow{OM})\cdot\vec{i}+(\vec{i}\cdot\overrightarrow{OM})\cdot\vec{u}$ se traduit par :

$x'\vec{i}+y'\vec{j}=\left(-\frac{3}{2}x+2y\right)\vec{i}+x\left(-\frac{3}{2}\vec{i}+2\vec{j}\right)=(-3x+2y)\vec{i}+2x\vec{j}$. C'est-à-dire $\begin{cases}x'=-3x+2y\\ y'=2x\end{cases}$.

• f est une application affine car son expression analytique est sous la forme $\begin{cases}x'=ax+by+c\\ y'=a'x+b'y+c'\end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels.

2) Soit M(x , y) un point du plan.

• f(M) = M signifie $\begin{cases}x=-3x+2y\\ y=2x\end{cases}$. Ce système est équivalent à l'équation 2x – y = 0.

D'où l'ensemble des points invariants est la droite (D) d'équation 2x – y = 0, dont un vecteur directeur est $\vec{v}$ de coordonnées (1 , 2).
On peut prendre tout point de (D), autre que O, comme A.

• $\overrightarrow{Of(M)}=-4\overrightarrow{OM}$ signifie $\begin{cases}-4x=-3x+2y\\ -4y=2x\end{cases}$. Ce système est équivalent à l'équation x + 2y = 0.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{Of(M)}=-4\overrightarrow{OM}$ est la droite (D') d'équation x + 2y = 0, dont un vecteur directeur est $\vec{w}$ de coordonnées (2 , -1). On peut prendre tout point de (D'), autre que O, comme B.

• **Montrons que f est une affinité orthogonale :**

Soit M(x , y) un point du plan et M' son image par f.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées (-4x + 2y , 2x – y), qui sont aussi les coordonnées de $(-2x+y)\vec{w}$.

D'où les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires. La droite (MM') est donc parallèle à la droite (D').

Soit H(x_H , y_H) un point du plan tel que $\overrightarrow{HM'}=-4\overrightarrow{HM}$.

On a $\begin{pmatrix}-3x+2y-x_H\\ 2x-y_H\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x+4x_H\\ -4y+4y_H\end{pmatrix}$, donc $\begin{cases}x_H=\frac{1}{5}(x+2y)\\ y_H=\frac{1}{5}(2x+4y)\end{cases}$.

Vérifions si H appartient à (D) :

On a $2x_H-y_H=\frac{2}{5}(x+2y)-\frac{1}{5}(2x+4y)=0$. D'où H appartient bel et bien à (D).

On constate alors que H est le projeté de M sur (D), parallèlement à (D'), et puisque $\overrightarrow{HM'}=-4\overrightarrow{HM}$, alors f est l'affinité, d'axe (D), de rapport -4, de direction celle de (D').

De plus, on a $\vec{v}.\vec{w}=2\times1+2\times(-1)=0$. D'où les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
Par conséquent, les droites (D) et (D') sont perpendiculaires.
D'où f est une affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport – 4.

3) Soit φ l'endomorphisme associé à f.

On a $\varphi(\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{f(O)f(A)}=\overrightarrow{OA}$ et $\varphi(\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{f(O)f(B)}=-4\overrightarrow{OB}$.

D'où la matrice de φ dans la base $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est : $\Phi=\begin{pmatrix}1&0\\0&-4\end{pmatrix}$.

Soit M(X , Y) dans le repère (O , A , B) et M'(X' , Y') = f(M) dans le repère (O , A , B).
Dans le repère (O , A , B) , le point A a pour coordonnées (1 , 0).

$\varphi(\overrightarrow{AM})=\overrightarrow{f(A)f(M)}=\overrightarrow{AM'}$ signifie que $\begin{pmatrix}1&0\\0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X-1\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X'-1\\Y'\end{pmatrix}$. C'est-à-dire $\begin{cases}X'=X\\ Y'=-4Y\end{cases}$.

D'où l'expression analytique de f dans le repère (O , A , B) est $\begin{cases} X' = X \\ Y' = -4Y \end{cases}$

Exercice 21

Le plan est muni d'un repère (O , I , J).

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x , y)$, associe le point $M'(x' , y')$ tel que : $\begin{cases} x' = -x - 2y + 2 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$.

Déterminer les images par f des points O, I et J.
En déduire que f est une affinité dont on précisera l'axe, la direction et le rapport.

Solution 21

- On a : $f(O) = O'(2 , 1)$, $f(I) = I'(1 , 0)$ et $f(J) = J'(0 , 1)$.
- $f(I) = I$, $f(J) = J$ et f n'est pas l'application identique de P.

D'où l'ensemble des points invariants par f est la droite (IJ), qui a pour équation $x + y - 1 = 0$.

Si f est une affinité, alors son axe est la droite (IJ), sa direction est celle de la droite (OO'), d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

La résolution du système d'équations $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$, donne pour solutions $x = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{1}{3}$.

D'où le point d'intersection des droites (OO') et (IJ) est Ω de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Or $\overrightarrow{\Omega O'}$ a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et $\overrightarrow{\Omega O}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. D'où $\overrightarrow{\Omega O'} = -2\overrightarrow{\Omega O}$.

Ainsi, si f est une affinité, son rapport est -2.

Vérifions tous ces résultats :

- Soit $M(x , y)$ un point du plan, et $M'(x', y') = f(M)$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(-2x - 2y + 2 , -x - y + 1)$, qui sont aussi les coordonnées du vecteur $(-x - y + 1)\overrightarrow{OO'}$.

D'où les vecteurs $\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires. La droite (MM') est donc parallèle à la droite (OO').

- Soit $H(x_H , y_H)$ un point du plan tel que $\overrightarrow{HM'} = -2\overrightarrow{HM}$.

On a : $\begin{pmatrix} -x - 2y + 2 - x_H \\ -x + 1 - y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 2x_H \\ -2y + 2y_H \end{pmatrix}$, donc $\begin{cases} x_H = \frac{1}{3}(x - 2y + 2) \\ y_H = \frac{1}{3}(-x + 2y + 1) \end{cases}$.

On remarque que $x_H + y_H - 1 = \frac{1}{3}(x - 2y + 2) + \frac{1}{3}(-x + 2y + 1) - 1 = 0$. D'où H appartient bel et bien à (IJ).

On constate que H est le projeté de M sur (IJ) , parallèlement à (OO'), et puisque $\overrightarrow{HM'} = -2\overrightarrow{HM}$, alors f est l'affinité, d'axe (IJ), de rapport -2 , de direction celle de (OO').

C. Utiliser les applications affines pour démontrer

Exercice 22

ABC est un triangle de sens direct, A', B' et C' sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].
Soit P, Q et R les centres respectifs des carrés construits extérieurement sur les côtés [BC], [CA] et [AB] de ABC.

1) Vérifier que : $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QB'} + \overrightarrow{C'R} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

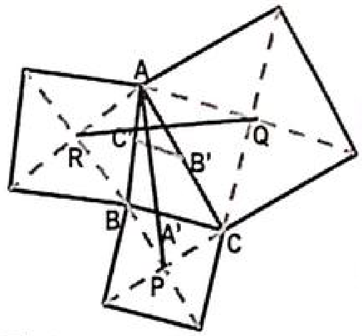
2) Soit φ la rotation vectorielle associée à un quart de tour direct du plan.

a) Démontrer que $\varphi(\overrightarrow{QR}) = \overrightarrow{AP}$.

b) En déduire que AP = QR et que les droites (AP) et (QR) sont perpendiculaires.

Solution 22

1) Puisque B' est le milieu de [AC] et C' celui de [AB], alors $\overrightarrow{B'C'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.



Or d'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'R}$.

Donc $\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QB'}+\overrightarrow{C'R}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

2)a) Puisque $\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QB'}+\overrightarrow{C'R}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, alors

$$\varphi(\overrightarrow{QR})=\varphi(\overrightarrow{QB'})+\varphi(\overrightarrow{C'R})-\frac{1}{2}\varphi(\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{B'C}+\overrightarrow{C'B}-\frac{1}{2}(-2\overrightarrow{A'P})$$

car $\varphi(\overrightarrow{QB'})=\overrightarrow{B'C}$, $\varphi(\overrightarrow{C'R})=\overrightarrow{C'B}$ et $\varphi(\overrightarrow{BC})=\varphi(-2\overrightarrow{A'B})=-2\varphi(\overrightarrow{A'B})=-2\overrightarrow{A'P}$

D'où $\varphi(\overrightarrow{QR})=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{A'P}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'P}$ car $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AA'}$, A' étant le milieu de [BC]

$=\overrightarrow{AP}$

D'où $\varphi(\overrightarrow{QR})=\overrightarrow{AP}$.

b) φ est un quart de tour direct vectoriel, c'est-à-dire la rotation vectorielle d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$ et

$\varphi(\overrightarrow{QR})=\overrightarrow{AP}$; c'est-à-dire QR = AP et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{QR},\overrightarrow{AP}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Par conséquent, on a QR = AP et les droites (AP) et (QR) sont perpendiculaires.

Exercice 23

ABC est un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].
Un point M du plan a pour images P, Q et R respectivement par les symétries $s_{A'}$, $s_{B'}$ et $s_{C'}$.
Démontrer que [AP], [QB] et [CR] ont le même milieu.

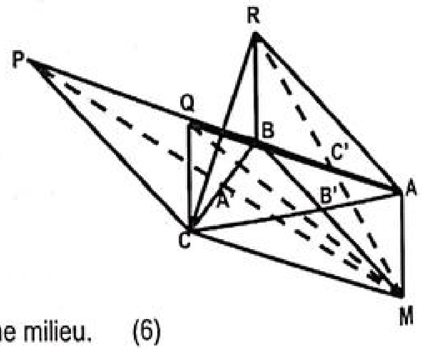
Solution 23

- $s_{A'}(M)$ = P. D'où A' est le milieu des segments [MP] et [BC].

D'où MBPC est un parallélogramme (les diagonales ont le même milieu).C'est-à-dire $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BP}$ (1)

- $s_{B'}(M)$ = Q. D'où B' est le milieu de [MQ] et [AC].

D'où MAQC est un parallélogramme.



C'est-à-dire $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AQ}$ (2) et $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CQ}$ (3)

D'où d'après (1) et (2), $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AQ}$. D'où BPQA est un parallélogramme.
Ses diagonales [AP] et [BQ] ont par conséquent le même milieu.
Enfin $s_{C'}(M)$ = R. D'où C' est le milieu de [MR] et [AB] (4).
D'où MARB est un parallélogramme. On en déduit que $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BR}$ (5).
Puisque d'après (3) et (5) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BR}$, alors $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{BR}$.
CQRB est donc un parallélogramme, c'est-à-dire [BQ] et [CR] ont le même milieu. (6)
Finalement, d'après (4) et (6), [AP], [BQ] et [CR] ont le même milieu.

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER

Exercice 24 **40 minutes**

Soit A, B et C sont trois points non alignés du plan et C' est le point défini par $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$.
On désigne par f l'application affine du plan définie par f(A) = A, f(B) = B et f(C) = C'.
1) Montrer que f est bijective.
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f. Se peut-il que f soit une isométrie ?
Montrer que toutes les droites parallèles à (AB) sont globalement invariantes par f.
3) Soit G l'isobarycentre des points A, B, C et G' = f(G).
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GG'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Montrer que G' appartient à (BC).

Exercice 25 **25 minutes**

Dans le plan, on considère trois points non alignés A, B et C. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. f est une application affine transformant le triplet (I , J, K) en (J, K , I).
1) Soit A', B' et C' les images respectives de A, B et C par f.
  a) Que représente J pour le segment [B'C'] ? Justifier votre réponse.
  b) Soit G l'isobarycentre de (A , B , C).
Montrer que G est également l'isobarycentre de (I , J , K), puis de (A', B', C'). En déduire que G est invariant par f.
2) $(B ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan et on suppose A et C de coordonnées respectives (-2 , 1) et (4 , -1).
  a) Déterminer analytiquement l'application f dans le repère $(B ; \vec{i}, \vec{j})$.
  b) Vérifier que G est l'unique point invariant par f.

Exercice 26 **30 minutes**

Soit ABCD un losange et f l'application affine du plan P définie par f(A) = A, f(B) = D et f(C) = D.
1)a) Déterminer les images par f du point D, de la droite (AD) et du plan P.
  b) Démontrer que fof est une application constante.
2) Soit g la symétrie orthogonale d'axe (AC).
  a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de gof.
  b) En déduire la construction de l'image par f d'un point quelconque M de P.

Exercice 27 **BAC C – Cameroun – 2001** **35 minutes**

On considère un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On donne :

- g application (P) sur (P) qui, à tout point M(x , y) , associe le point M'(x', y') tel que : $\begin{cases} x' = \frac{6}{5}x + \frac{2}{5}y + 1 \\ y' = \frac{2}{5}x + \frac{9}{5}y + 2 \end{cases}$.
- M'' le symétrique de M' par rapport à M.
- A_0 le point de coordonnées (3 , 1).
- (A_n) la suite des points définie par $A_{n+1} = f(A_n)$.
- (x_n , y_n) les coordonnées de A_n.

1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe indépendante de M.
2) Déterminer l'ensemble des points M'' lorsque M décrit (P).
3) Déduire des questions 1) et 2) une construction géométrique du point M'.
4) a) Démontrer que les points A_n appartiennent tous à la droite d'équation cartésienne $2x – y – 5 = 0$.
  b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $x_{n+1} = 2x_n – 1$.
5) a) Démontrer que pour tout entier naturel n, x_n et y_n sont des nombres entiers.
  b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

Exercice 28 — 25 minutes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit le point $A\left(-\frac{3}{8}, 0\right)$, le vecteur $\vec{u}(\sqrt{2\sqrt{2}-1}, 0)$ et l'application g du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{AM'} = (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} + \overrightarrow{AM}$.

a) Déterminer l'ensemble (Δ) des points invariants par g.

b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

c) Montrer que g est une affinité que l'on caractérisera.

Exercice 29 — BAC E – Nancy – 1970 — 70 minutes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit a appartenant à $]0, +\infty[$.

On considère la fonction f définie sur [-1 , 1] par : $f(x) = ax + 2\sqrt{1-x^2}$.

Etudier la variation de f et construire, lorsque a = 1, sa courbe (Γ) dans un repère orthonormé. (Unité 2 cm).

2) On considère un couple (a , b) de réels.

Soit T_{ab} l'application de P vers P, qui à tout point M(x , y) associe le point M' (x', y') où $\begin{cases} x' = x + by \\ y' = ax + 2y \end{cases}$.

Quelle relation les nombres a et b doivent-ils vérifier pour que T_{ab} soit une bijection de P dans P ?

a et b étant quelconques, déterminer l'ensemble des points invariants par T_{ab}. Discuter suivant a et b

3) On suppose que a + 2b = 0.

Déterminer une équation du lieu géométrique de M' lorsque M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon 1.

Préciser la nature de ce lieu.

4) On suppose a > 0.

Montrer que T_{a0} est une affinité, dont on précisera l'axe, la direction et le rapport.

Déterminer une équation cartésienne du lieu (E) de M' lorsque M décrit le cercle (C).

Montrer que (Γ) est une partie de (E). Comment (E) peut-il se déduire de (Γ).

Exercice 30 — 30 minutes

Dans l'espace E rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'application f est définie analytiquement par :

tout point M(x , y , z) de l'espace est transformé par f en $M'\begin{pmatrix} x' = -x - 2y + 2z - 6 \\ y' = -x + z - 3 \\ z' = -2x - 2y + 3z - 6 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que f est une projection sur A de direction B, A et B étant des ensembles à déterminer.

2) Définir analytiquement la symétrie par rapport à A et de direction B.

Exercice 31 — 35 minutes

Dans l'espace E rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le vecteur $\vec{u}(1, 1, 1)$ et l'application f de l'espace E vers lui-même qui à tout point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}$.

1) Définir analytiquement f. Montrer que f est une transformation affine et définir analytiquement f^{-1}.

2) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D). (On donnera une démonstration vectorielle et une démonstration analytique).

3) Démontrer que, si M n'appartient pas à (D), la droite (MM') est orthogonale au plan défini par M et (D).

4) Démontrer que la distance MM' est proportionnelle à la distance du point M à la droite (D).

EXERCICES POUR S'AUTO-EVALUER – SOLUTIONS

Solution 24

1) On a $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}$, d'où ABC'C est un parallélogramme.
Et puisque A, B, C sont non alignés, alors A, B et C' le sont aussi.
f est donc une application affine bijective car elle transforme trois points non alignés A, B et C en trois points non alignés A, B et C'.
2) • f(A) = A et f(B) = B.
D'où les points A et B sont invariants. Par conséquent, la droite (AB) est invariante par f point par point.
Supposons qu'il existe un point N n'appartenant pas à (AB), invariant par f.
On aurait alors trois points A, B et N non alignés invariants par f.
Alors tous les points du plan seraient invariants par f. Et donc on aurait f(C) = C. Or on a C ≠ C'.
D'où il n'existe pas de point hors de la droite (AB) qui soit invariant par f.
Il en résulte alors que l'ensemble des points invariants par f est la droite (AB).

- Si f est une isométrie, alors puisque l'ensemble des points invariants est la droite (AB), f sera la réflexion d'axe (AB). Et C' serait le symétrique orthogonal de C par rapport à la droite (AB). Ce qui n'est pas le cas.

D'où f ne peut pas être une isométrie.

- Soit M un point du plan.

(A , B , C) est un repère du plan, donc, Il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ (1)
Notons φ l'endomorphisme du plan associé à f. On a :
$\overrightarrow{AM'}=\overrightarrow{f(A)f(M)}=\varphi(\overrightarrow{AM})=\varphi(\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC})=\alpha\varphi(\overrightarrow{AB})+\beta\varphi(\overrightarrow{AC})=\alpha\overrightarrow{f(A)f(B)}+\beta\overrightarrow{f(A)f(C)}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC'}$ (2).
Des égalités (1) et (2), on déduit que $\overrightarrow{MM'}=\beta\overrightarrow{CC'}=\beta\overrightarrow{AB}$. D'où la droite (MM') est parallèle à la droite (AB).
D'où M' appartient à la droite passant par M et parallèle à la droite (AB).
Soit (D) une droite parallèle à la droite (AB) :
si M appartient à (D), alors M' appartient à la droite passant par M et parallèle à (AB), qui est (D).
Ainsi, si M appartient à (D), il en est de même de son image M' par f.
La droite (D) est donc globalement invariante par f.

3) • Soit G l'isobarycentre des points A, B et C. On a G = bar{(A , 1), (B , 1), (C , 1)}. Donc $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

De ce qui précède, on a $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$. D'où $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

- G = bar{(A , 1), (B , 1), (C , 1)}, et f(G) = G' = bar{(A , 1), (B , 1), (C' , 1)}.

On peut donc écrire $\overrightarrow{AG'}+\overrightarrow{BG'}+\overrightarrow{C'G'}=\vec{0}$. Ce qui équivaut à $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C'C}+3\overrightarrow{CG'}=\vec{0}$.

Or $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}$, alors on déduit que $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{CG'}=\vec{0}$. Donc $\overrightarrow{CG'}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

D'où G appartient à la droite (BC).

Solution 25

1)a) I est le milieu de [BC], donc f(I) est le milieu de [f(B)f(C)].
Or f(I) = J , f(B) = B' et f(C) = C'. D'où J est le milieu de [B'C'].
b) • I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB], d'où :
I = bar{(B , 1), (C , 1)}, J = bar{(C , 1), (A , 1)} et K = bar{(A , 1), (B , 1)}.
Or G est l'isobarycentre de A, B et C, d'où :
G = bar{(A , 2), (B , 2), (C , 2)} = bar{(A , 1), (B , 1), (A , 1), (C , 1), (B , 1), (C , 1)} = bar{(K , 2), (J , 2), (I , 2)}
D'où G est l'isobarycentre des points I, J et K.

- Comme à la question 1)a), on montre que K et I sont les milieux respectifs de [C'A'] et [A'B']. Alors,

G = bar{(K , 2), (I , 2), (J , 2)} = bar{(A' , 1), (B' , 1), (A' , 1), (C' , 1), (B' , 1), (C' , 1)} = bar{(A' , 2), (B' , 2), (C' , 2)}.
D'où G est l'isobarycentre de A', B' et C'.

- G étant l'isobarycentre de A, B et C, alors f(G) est l'isobarycentre de f(A), f(B) et f(C).

C'est-à-dire f(G) est l'isobarycentre de A', B' et C', qui est aussi G (d'après ce qui précède).
D'où f(G) = G. G est par conséquent invariant par f.
2)a) On a B(0 , 0), A(-2 , 1), C(4 , -1).

Donc on a aussi : $I\left(2,-\frac{1}{2}\right)$, $J(1,0)$ et $K\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IJ}\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IK}(-3,1)$ et $\overrightarrow{JK}\left(-2,\frac{1}{2}\right)$.

Soit φ l'endomorphisme associé à f, on a :

$\varphi(\overrightarrow{IJ})=\overrightarrow{f(I)f(J)}=\overrightarrow{JK}$ et $\varphi(\overrightarrow{IK})=\overrightarrow{f(I)f(K)}=-\overrightarrow{IJ}$. C'est-à-dire $\varphi\left(-\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)=-2\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$ et $\varphi(-3\vec{i}+\vec{j})=\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$.

D'où le système : $\begin{cases}-\varphi(\vec{i})+\frac{1}{2}\varphi(\vec{j})=-2\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\\ -3\varphi(\vec{i})+\varphi(\vec{j})=\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}\end{cases}$. Il en découle que $\varphi(\vec{i})=-5\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}$ et $\varphi(\vec{j})=-14\vec{i}+4\vec{j}$.

Ainsi la matrice de φ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est : $\begin{pmatrix}-5 & -14\\ \frac{3}{2} & 4\end{pmatrix}$.

Soit M(x , y) un point du plan, et M'(x', y') son image par f.

f(M) = M' équivaut à $\varphi(\overrightarrow{IM})=\overrightarrow{JM'}$. C'est-à-dire $\begin{pmatrix}-5 & -14\\ \frac{3}{2} & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\ y+\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'-1\\ y'\end{pmatrix}$.

D'où le système $\begin{cases}x'=-5x-14y+4\\ y'=\frac{3}{2}x+4y-1\end{cases}$ qui définit analytiquement f.

b) G a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3},0\right)$, de même que f(G), d'où f(G) = G.

Solution 26

1)a) • $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et f est une application affine. D'où $\overrightarrow{f(A)f(D)}=\overrightarrow{f(B)f(C)}$.

C'est-à-dire $\overrightarrow{Af(D)}=\overrightarrow{DD}=\vec{0}$. D'où f(D) = A.

- f(A) = A et f(D) = A. D'où l'image de la droite (AD) par f est le singleton {A}.
- A, B et C sont trois points non alignés du plan P, d'où le plan P est le plan (ABC).

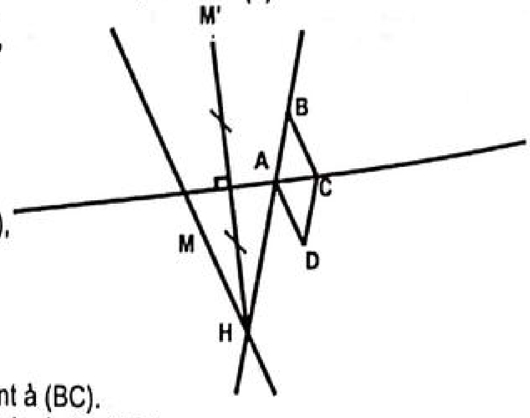
Or f(A) = A et f(B) = f(C) = D. L'image du plan P par f est donc la droite (AD).
b) A, B et C sont trois points non alignés du plan et fof(A) = f(A) = A, fof(B) = f(D) = A et fof(C) = f(D) = A.
D'où pour tout point M du plan, on a fof(M) = A.
On en déduit que fof est une application constante.
2)a) • gof(A) = g(A) = A, gof(B) = g(D) = B et gof(C) = g(D) = B, donc l'image par gof du plan P est la droite (AB).
D'où l'image M' d'un point M quelconque du plan P par gof est sur la droite (AB).

- Soit M un point du plan, il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ (1).

Alors on a $\overrightarrow{g\circ f(A)g\circ f(M)}=a\overrightarrow{g\circ f(A)g\circ f(B)}+b\overrightarrow{g\circ f(A)g\circ f(C)}$,

c'est-à-dire $\overrightarrow{AM'}=b\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AB}=(a+b)\overrightarrow{AB}$ (2)

Des égalités (1) et (2), on déduit que $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AM'}-\overrightarrow{AM}=b\overrightarrow{CB}$.
D'où les droites (MM') et (CB) sont parallèles.
On peut alors conclure que gof est la projection sur la droite (AB), parallèlement à la droite (BC).



b) Construction de M' image d'un point M du plan par f :
Notons p = gof, alors gop = f, car $g = g^{-1}$.
Pour construire l'image M' d'un point M par f :
On construit d'abord son projeté H sur la droite (AB) parallèlement à (BC).
On construit enfin le symétrique orthogonal M' de H par rapport à la droite (AC).

Solution 27

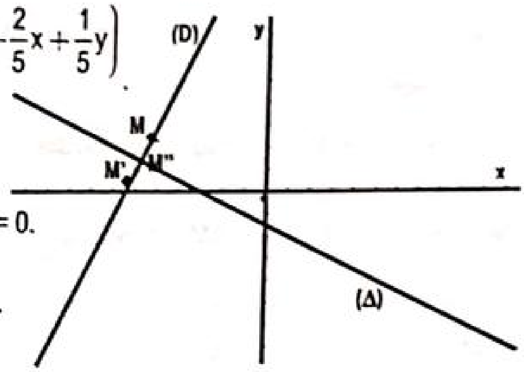
1) Soit $M(x\,,\,y)$ un point du plan.

On a $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}y+1\\ \frac{2}{5}x+\frac{4}{5}y+2\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}y+1\right)(\vec{i}+2\vec{j})$. D'où le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur fixe $\vec{i}+2\vec{j}$. Donc

$\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe indépendante de M.

2) Soit (x'', y'') les coordonnées du point M''. On a :

$$\begin{cases} x''=-x'+2x=\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}y-1\\ y''=-y'+2y=-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y-2\end{cases}.\ \text{D'où}\begin{cases} x''+1=\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}y=-2\left(-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y\right)\\ y''+2=-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y\end{cases}$$



On remarque que $x''+1=-2(y''+2)$. C'est-à-dire $x''+2y''+5=0$.
D'où lorsque M décrit le plan, M'' décrit la droite d'équation $x+2y+5=0$.

3) Connaissant le point M, pour construire le point M' :

- On trace la droite (D) passant par M et de vecteur directeur $\vec{i}+2\vec{j}$.

C'est-à-dire (MM'). On sait que M, M' et M'' sont alignés.
D'où M'' appartient à (D).

- On trace la droite (Δ) d'équation $x+2y+5=0$. Elle contient le point M''.

M'' est le point de rencontre des droites (D) et (Δ). M' est le symétrique de M'' par rapport à M.

4)a) Considérons la propriété P_n : « A_n appartient à la droite d'équation $2x-y-5=0$ ».
$2\times3-1-5=0$. D'où A_0 appartient à la droite d'équation $2x-y-5=0$. C'est-à-dire P_0 est vraie.
Supposons $2x_k-y_k-5=0$ pour un certain entier naturel k, montrons qu'alors $2x_{k+1}-y_{k+1}-5=0$.

On a : $\begin{cases} x_{k+1}=\frac{6}{5}x_k+\frac{2}{5}y_k+1\\ y_{k+1}=\frac{2}{5}x_k+\frac{9}{5}y_k+2\end{cases}$.

Donc : $2x_{k+1}-y_{k+1}-5=2\left(\frac{6}{5}x_k+\frac{2}{5}y_k+1\right)-\left(\frac{2}{5}x_k+\frac{9}{5}y_k+2\right)-5=2x_k-y_k-5=0$ (car d'après l'hypothèse de récurrence, A_k appartient à la droite d'équation $2x-y-5=0$).

D'où A_{k+1} appartient à cette droite.
On peut alors conclure d'après le principe du raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, A_n appartient à la droite d'équation $2x-y-5=0$.

b) Soit n un entier naturel.
D'après la question 4)a), le point A_n appartient à la droite d'équation $2x-y-5=0$. C'est-à-dire $2x_n-y_n-5=0$.
Il en ressort que $y_n=2x_n-5$.

Donc $x_{n+1}=\frac{6}{5}x_n+\frac{2}{5}y_n+1=\frac{6}{5}x_n+\frac{2}{5}(2x_n-5)+1=2x_n-1$. D'où $x_{n+1}=2x_n-1$.

5)a) • Soit Q_n la propriété : « x_n est un nombre entier ».
$x_0=3$, et 3 est un entier. D'où Q_0 est vraie.
Supposons Q_k vraie pour un certain entier naturel k, et montrons que Q_{k+1} est vraie, c'est-à-dire x_{k+1} est un entier.
On sait que $x_{k+1}=2x_k-1$ et x_k est un entier par hypothèse, donc x_{k+1} est un entier (la somme et le produit de deux entiers sont des entiers). D'où Q_{k+1} est vraie.
D'après le principe du raisonnement par récurrence, on conclut que x_n est un entier pour tout entier naturel n.

- Puisque x_n est un entier, il en est de même pour $5x_n-5$, c'est-à-dire pour y_n. D'où y_n est un entier.

b) $x_0=3=2^{0+1}+1$.
Supposons $x_k=2^{k+1}+1$ pour un certain entier naturel k. On a alors $x_{k+1}=2x_k-1=2(2^{k+1}+1)-1=2^{k+2}+1$.
D'où d'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel n, on a $x_n=2^n+1$.

Solution 28

a) Soit M un point du plan.

M appartient à $(\Delta) \Leftrightarrow M = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u})\cdot\vec{u} + \overrightarrow{AM}$.

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u})\cdot\vec{u} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0$ car $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$\Leftrightarrow$ M appartient à la droite passant par A, de vecteur normal $\vec{u}$.

D'où (Δ) est la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.

b) Soit M un point du plan, et M' son image par g, on a :

$\overrightarrow{AM'} = (\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u})\cdot\vec{u} + \overrightarrow{AM} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM'} = (\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u})\cdot\vec{u}$.

Puisque $\overrightarrow{MM'} = (\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u})\cdot\vec{u}$, alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur fixe $\vec{u}$.

D'où le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

c) Soit M(x , y) et M'(x', y') deux points du plan, on a : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = \sqrt{2\sqrt{2}-1}\left(x+\frac{3}{8}\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{AM'} = (\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u})\cdot\vec{u} + \overrightarrow{AM}$ équivaut à $\left(x'+\frac{3}{8}, y'\right) = \left((2\sqrt{2}-1)\left(x+\frac{3}{8}\right), 0\right) + \left(x+\frac{3}{8}, y\right) = \left(2\sqrt{2}\left(x+\frac{3}{8}\right), y\right)$.

D'où $\begin{cases} x' = 2\sqrt{2}\left(x+\frac{3}{8}\right) - \frac{3}{8} \\ y' = y \end{cases}$.

- (Δ) est la droite d'équation $x + \frac{3}{8} = 0$.

- Soit H le point de (Δ) tel qu'il existe un réel k, $\overrightarrow{MH} = k\overrightarrow{MM'}$, on a :

$\begin{cases} x_H - x = k(2\sqrt{2}-1)\left(x+\frac{3}{8}\right) \\ y_H - y = 0 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} x_H = k(2\sqrt{2}-1)\left(x+\frac{3}{8}\right) + x \\ y_H = y \end{cases}$.

Or H appartient à la droite (Δ), d'où $x_H + \frac{3}{8} = 0$. C'est-à-dire $k(2\sqrt{2}-1)\left(x+\frac{3}{8}\right) + x + \frac{3}{8} = 0$.

Soit $(k(2\sqrt{2}-1)+1)\left(x+\frac{3}{8}\right) = 0$.

Or le point M est quelconque dans le plan, d'où : $k(2\sqrt{2}-1)+1 = 0$. On en déduit que : $k = \frac{-1}{2\sqrt{2}-1}$.

D'où $\overrightarrow{MH} = \frac{-1}{2\sqrt{2}-1}\overrightarrow{MM'}$, et par suite $(2\sqrt{2}-1)\overrightarrow{MH} = -(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HM'})$. D'où $\overrightarrow{HM'} = 2\sqrt{2}\overrightarrow{HM}$.

D'où $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur fixe $\vec{u}$ et $\overrightarrow{HM'} = 2\sqrt{2}\overrightarrow{HM}$, avec H appartenant à (Δ).

Alors g est l'affinité du plan d'axe (Δ), de direction celle du vecteur $\vec{u}$, et de rapport $2\sqrt{2}$.

Solution 29

1) Les variations de f :

- f est définie et continue sur [-1 , 1], car somme de fonctions définies et continues sur [-1 , 1].
- Etudions la dérivabilité de f en -1 et en 1.

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{ax-a+2\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} a + \frac{2(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

D'où f n'est pas dérivable en 1. (Notons que la courbe de f admet au point d'abscisse 1, une demi-tangente verticale)

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \xrightarrow{<} -1} \frac{ax+a+2\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim_{x \xrightarrow{<} -1} a + \frac{2(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

D'où f n'est pas dérivable en -1 (La courbe de f admet au point d'abscisse -1 une demi-tangente verticale).

f est donc dérivable sur]-1 , 1[. Et pour tout réel x dans]-1 , 1[, on a $f'(x) = a - \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{a\sqrt{1-x^2} - 2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Le signe de f '(x) est celui de $a\sqrt{1-x^2} - 2x$, car pour tout x dans]-1 , 1[, on a $\sqrt{1-x^2} > 0$.

Si $-1 < x \leq 0$, alors on a : $a\sqrt{1-x^2} - 2x > 0$ (car somme de deux nombres positifs), c'est-à-dire f '(x) > 0.

Si $0 < x < 1$, on a :

$$a\sqrt{1-x^2} - 2x < 0 \Leftrightarrow a\sqrt{1-x^2} < 2x \Leftrightarrow a^2(1-x^2) < 4x^2 \Leftrightarrow a^2 < (a^2+4)x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 > \frac{a^2}{a^2+4}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{a}{\sqrt{a^2+4}} \text{ (car } x > 0 \text{ et } a > 0\text{)}.$$

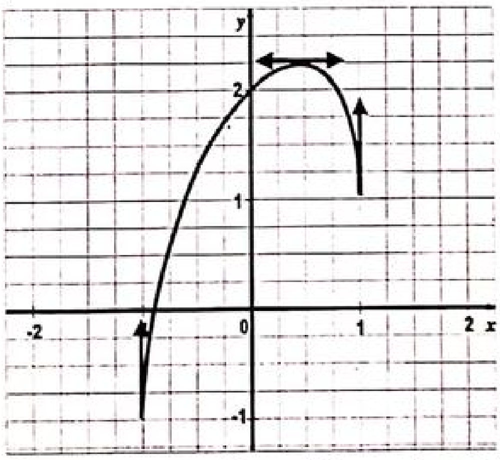
Comme on a : $a^2 < a^2 + 4$, alors on a $a < \sqrt{a^2+4}$. Ce qui implique que $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+4}} < 1$.

On a donc le tableau de variation de f qui suit :

x	-1		$\frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$		1
f '(x)	∞	+	0	-	∞
f(x)	$-a$	↗		↘	a

$f\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+4}}\right) = \sqrt{a^2+4}$.

La courbe de f pour a = 1 :



2) • f est une application affine car son expression analytique est sous la forme $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels.

Soit I et J deux points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, (O, I , J) est un repère du plan.

f est donc bijective si et seulement si f(O), f(I) et f(J) sont non alignés.

Or f(O) = O, f(I) = I'(1 , a) et f(J) = J'(b , 2).

Et $\det(\overrightarrow{OI'}, \overrightarrow{OJ'}) = \begin{vmatrix} 1 & b \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2 - ab$. D'où f est bijective si et seulement si $ab \neq 2$.

• Soit M(x , y) un point du plan, on a : f(M) = M $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x + by \\ y = ax + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} by = 0 \\ ax + y = 0 \end{cases}$.

Si b = 0, alors le système se réduit à l'équation ax + y = 0, qui est une équation de droite.
Par conséquent, l'ensemble des points invariants est la droite d'équation ax + y = 0.
Si b ≠ 0, alors on a y = 0 et ax = 0. Donc :

- **Si de plus a = 0**, alors le système se réduit à l'équation y = 0.

D'où l'ensemble des points invariants par f est l'axe des abscisses.

- **Si a ≠ 0**, alors on a x = 0 et y = 0.

Il existe donc un unique point invariant par f, qui est l'origine O du repère.
3) On suppose a = -2b.
Soit M(x, y) un point du plan et M'(x', y') = T_{ab}(M).

On a $\begin{cases} x' = x + by \\ y' = ax + 2y \end{cases}$, qui équivaut à $\begin{cases} x = \dfrac{2x' - by'}{2+2b^2} \\ y = \dfrac{2bx' + y'}{2+2b^2} \end{cases}$. Ainsi,

M(x , y) appartient au cercle (C) $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x' - by'}{2+2b^2}\right)^2 + \left(\frac{2bx' + y'}{2+2b^2}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x'^2 + \frac{y'^2}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y'^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

$\Leftrightarrow$ M' appartient à l'ellipse de centre O, de sommets les points

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ A'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ B(0, \sqrt{2}) \text{ et } B'(0, -\sqrt{2}).$$

D'où lorsque M décrit le cercle (C), M' décrit l'ellipse de centre O et de sommets A, A', B et B' définis ci-dessus.

4) • T_{a0} transforme tout point M(x , y) de P en le point M'(x' , y') tel que $\begin{cases} x' = x \\ y' = ax + 2y \end{cases}$.

D'après la question 2), l'ensemble des points invariants par T_{a0} est la droite (D) d'équation ax + y = 0.

On a $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} 0 \\ ax + y \end{pmatrix} = (ax + y)\vec{j}$. D'où la droite (MM') est parallèle à l'axe des ordonnées.

Soit H le point de (D) tel qu'il existe un réel k, $\overrightarrow{MH} = k\overrightarrow{MM'}$, on a : $\begin{cases} x_H = x \\ y_H = k(ax + y) + y \end{cases}$.

H appartient à (D), donc ax + (ax + y)k + y = 0. C'est-à-dire (k + 1)(ax + y) = 0.
Puisque le point M est quelconque, alors k = -1. D'où $\overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{MM'}$. Ce qui signifie que $\overrightarrow{HM'} = -2\overrightarrow{HM}$.

En conclusion, la droite (MM') est parallèle à l'axe des ordonnées et $\overrightarrow{HM'} = -2\overrightarrow{HM}$, (H est le projeté de M sur (D), parallèlement à l'axe des ordonnées). Par conséquent $T_{a,0}$ est l'affinité du plan, d'axe la droite (D), de direction celle de l'axe des ordonnées et de rapport -2.

- **Pour b = 0**, on a : $\begin{cases} x' = x \\ y' = ax + 2y \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = x' \\ y = \dfrac{y' - ax'}{2} \end{cases}$.

M(x , y) appartient à (C) $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 = 1$ $\Leftrightarrow$ $x'^2 + \left(\dfrac{y' - ax'}{2}\right)^2 = 1$.

D'où une équation de (E) est : $x^2 + \left(\dfrac{y - ax}{2}\right)^2 = 1$.

- Soit M(x , y) un point du plan.

M appartient à (E) $\Leftrightarrow \quad x^2+\left(\dfrac{y-ax}{2}\right)^2=1.$

$\Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{y-ax}{2}\right)^2=1-x^2.$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{y-ax}{2}=\sqrt{1-x^2}$ ou $\dfrac{y-ax}{2}=-\sqrt{1-x^2}$, avec x dans [-1 , 1].

$\Leftrightarrow \quad y=ax+2\sqrt{1-x^2}$ ou $y=ax-2\sqrt{1-x^2}$ avec x dans [-1 , 1].

$\Leftrightarrow$ M appartient à (Γ) ou M appartient à (Γ') : $y=ax-2\sqrt{1-x^2}$, avec x dans [-1 , 1]

D'où (E) est la réunion de (Γ) et (Γ'). (Γ) est donc une partie de (E).

- Soit g la fonction définie par $g(x)=ax-2\sqrt{1-x^2}$.

g est définie sur [-1 , 1] et pour tout réel x dans [-1 , 1], g(x) = -f(-x).
D'où la courbe de g se déduit de celle de f par la symétrie centrale de centre O.
Pour construire (E), il suffit de construire (Γ) et le symétrique de (Γ) par rapport à O.

Solution 30

1) • **Déterminons l'ensemble des points invariants par f :**
Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

On a f(M) = M $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-x-2y+2z-6 \\ y=-x+z-3 \\ z=-2x-2y+3z-6 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x+y-z+3=0.$

D'où l'ensemble A des points invariants par f est le plan d'équation x + y – z + 3 = 0

- Soit M(x , y , z) et M'(x' , y' , z') = f(M) deux points de l'espace.

Vérifions si M' appartient à A :
En effet, x'+ y' – z' + 3 = (-x – 2y + 2z – 6) + (– x + z – 3) – (-2x – 2y + 3z – 6) + 3 = 0.
D'où M' appartient au plan A d'équation x + y – z + 3 = 0.

Vérifions si le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe :

En effet, on a $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}-2x-2y+2z-6\\ -x-y+z-3\\ -2x-2y+2z-6\end{pmatrix}=(-x-y+z-3)(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$.

D'où $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur fixe $2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

Soit B la droite passant par O et de vecteur directeur $2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ et A le plan d'équation x + y – z + 3 = 0, f est la projection sur A, parallèlement à B.
2) Soit s la symétrie par rapport à A, de direction B.
M(x , y , z) un point de l'espace, M'(x' , y' , z') = s(M) et I le milieu de [MM']. On a :

$$s(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} I\in A \\ (MM')//B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x'+x}{2}+\dfrac{y'+y}{2}-\dfrac{z'+z}{2}+3=0 \\ \overrightarrow{MM'}=k(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'-z'=-(x+y-z)-6 \\ x'=2k+x \\ y'=k+y \\ z'=2k+z \end{cases}.$$

Ce qui nous conduit à $\begin{cases} x'=-3x-4y+4z-12 \\ y'=-2x-y+2z-6 \\ z'=-4x-4y+5z-12 \end{cases}$. *(le lecteur fera les calculs)*

Solution 31

1) • Soit M(x , y , z) et M'(x' , y' , z') deux points de l'espace.

$f(M) = M' \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}$

$\Leftrightarrow \quad x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} - \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & x \end{vmatrix}\vec{j} - \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix}\vec{k}$.

$\Leftrightarrow \quad x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} = (x+y-z)\vec{i} + (-x+y+z)\vec{j} + (x-y+z)\vec{k}$

D'où f transforme tout point M(x , y , z) de l'espace en le point M'(x' , y' , z'), où $\begin{cases} x' = x+y-z \\ y' = -x+y+z \\ z' = x-y+z \end{cases}$.

- L'expression analytique de f est sous la forme : $\begin{cases} x' = ax+by+cz+d \\ y' = a'x+b'y+c'z+d' \\ z' = a''x+b''y+c''z+d'' \end{cases}$, d'où f est une application affine.

Soit I, J et K trois points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$. O, I, J et K sont non coplanaires.

On a : f(O) = O, f(I) = I'(1 , -1 , 1), f(J) = J'(1 , 1 , -1) et f(K) = K'(-1 , 1 , 1).

Or $\overrightarrow{OI'} \wedge \overrightarrow{OJ'} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Et $(\overrightarrow{OI'} \wedge \overrightarrow{OJ'}) \cdot \overrightarrow{OK'} = -1 \times 0 + 1 \times 2 + 1 \times 2 = 4 \neq 0$. D'où O, I', J' et K' sont non coplanaires.

f transforme quatre points non coplanaires, en quatre points non coplanaires. D'où f est bijective.

Par conséquent, f est une transformation affine de l'espace.

- Soit M(x , y , z) et M'(x' , y' , z') deux points de l'espace.

$f(M') = M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x'+y'-z' = x \\ -x'+y'+z' = y \\ x'-y'+z' = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+z) \\ y' = \frac{1}{2}(x+y) \\ z' = \frac{1}{2}(y+z) \end{cases}$. *(le lecteur fera la résolution)*

D'où f^{-1} transforme tout point M(x , y , z) de l'espace en le point M'(x' , y' , z'), où $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+z) \\ y' = \frac{1}{2}(x+y) \\ z' = \frac{1}{2}(y+z) \end{cases}$.

2) Démonstration vectorielle :

Soit M un point de l'espace.

$f(M) = M \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0}$.

Finalement, M appartient à la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$.

D'où l'ensemble des points invariants par f est la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 1)$.

Démonstration analytique :

Soit M(x , y , z) un point de l'espace.

$f(M) = M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x+y-z \\ y = -x+y+z \\ z = x-y+z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$. *(le lecteur fera la résolution)*

D'où l'ensemble des points invariants par f est la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$.

C'est-à-dire, la droite passant par O et vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 1)$.

3) Soit M un point de l'espace, n'appartenant pas à (D).

Le vecteur $\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}$ est un vecteur normal au plan passant par M et contenant (D).

Or $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = -\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}$, alors $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}$. Donc la droite (MM') est perpendiculaire à au plan passant par M et contenant (D).

4) On a $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = -\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}$.

D'où $MM' = \left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right\| = \|\vec{u}\| \dfrac{\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right\|}{\|\vec{u}\|} = \sqrt{3}d(M, (D))$, où $d(M, (D))$ est la distance de M à la droite (D).

D'où MM' est proportionnelle à la distance de M à (D).

8000 f

Achevé d'imprimer sur les Presses
de la Société de Presse et d'Éditions du Cameroun
(SOPECAM)
BP. 1218 Yaoundé-Cameroun
Tél. : (237) 22 30 41 47 / 22 30 36 89

1e trimestre 2013

Cette collection va à coup sûr marquer l'univers du support didactique au Cameroun, voire au-delà de nos frontières nationales.

Dès les premières pages, le ton est donné : le lecteur est embarqué dans le sillage d'une approche méthodologique et pédagogique atypique, pittoresque, très élaboré et accessible à tous.

Elèves, étudiants et même les enseignants y trouveront une véritable source d'inspiration et une meilleure couverture des programmes officiels. Nous ne saurions que trop leur recommander de faire de cette collection leurs nouveaux manuels de chevet.

Gilbert NKENG ESSOMBO
Professeur de classe exceptionnelle
Inspecteur Pédagogique National de Mathématiques.