

C. LEBOSSÉ

Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Claude-Bernard

C. HÉMERY

Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Lavoisier

P. FAURE

Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Raspail

GÉOMÉTRIE

ET ÉLÉMENTS DE PROBABILITÉS

Classe Terminale D

PROGRAMME 1966

FERNAND NATHAN, ÉDITEUR
18, rue Monsieur-le-Prince, Paris-VI^e.

178382

COLLECTION LEBOSSÉ ET HÉMERY

avec la collaboration de M. FAURE

6 ^e	Arithmétique et Travaux Pratiques
5 ^e	Arithmétique et Géométrie
4 ^e	Arithmétique, Algèbre et Géométrie
3 ^e	Algèbre, Arithmétique et Géométrie

Nouveaux programmes 1966

2 ^e A	Algèbre et Géométrie
2 ^e C	Algèbre
2 ^e C	Géométrie
1 ^{re} A	Algèbre et notions de Statistique
1 ^{re} B	Algèbre et Statistique
1 ^{re} C et D	Algèbre et notions d'Analyse
1 ^{re} C	Géométrie et Géométrie analytique
1 ^{re} D	Géométrie et Statistique
Terminale A	Notions d'Analyse et de Probabilités
Terminale B	Algèbre et Probabilités
Terminales C, D et T	Algèbre et Analyse
Terminale C	Géométrie et Géométrie analytique
Terminale D	Géométrie et éléments de Probabilités

Enseignement technique

LEBOSSÉ-HÉMERY-FAURE

Nouveaux programmes 1964 et 1966

2 ^e Techn. industrielle	Algèbre
2 ^e Techn. industrielle	Géométrie
1 ^{re} Techn. industrielle	Algèbre, Trigonométrie, Géométrie
Classes Terminales	Mathématiques (en 1 seul volume)

EXTRAITS DES PROGRAMMES DU 8 JUIN 1966

(B. O. n° 26 du 30-6-66.)

CLASSE TERMINALE D

GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

I. — Compléments de géométrie dans l'espace.

1° En repère cartésien affine : représentation paramétrique de la droite définie par un point et un vecteur parallèle.

En repère cartésien orthonormé : expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées, condition d'orthogonalité de deux vecteurs.

2° Barycentre d'un système de n points affectés de coefficients dont la somme n'est pas nulle, définition, propriétés. Coordonnées du barycentre. Centre de gravité d'un triangle, d'un tétraèdre.

Transformation des sommes :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} \text{ en géométrie affine,}$$

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 \text{ en géométrie métrique,}$$

α, β, γ étant des réels quelconques non nuls, dans les deux cas :

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

II. — Transformations ponctuelles du plan.

1° *Translation; rotation autour d'un point; homothétie de centre donné; similitude directe de centre donné.* — Définitions ; représentations de ces transformations dans le plan complexe par des transformations du type $z' = az + b$; produit de telles transformations.

2° *Symétrie par rapport à une droite.* — Produit de deux symétries. Éléments de symétrie de figures géométriques simples.

3° *Affinité.* — Définition. Produit de deux affinités ayant même axe et même direction. Transformée d'une droite ; transformée de la tangente en un point d'une courbe. Affinité orthogonale. Transformée d'un cercle.

III. — Coniques.

Étude de la courbe représentée en axes rectangulaires par l'équation :

$$y^2 = ax^2 + bx + c.$$

Différentes formes de courbes. Discussion de l'existence d'un centre de symétrie, de l'existence d'asymptotes ; équations réduites et, dans le cas où la courbe admet des asymptotes, équation de la courbe rapportée à ses asymptotes.

IV. — Cinématique.

1° *Mouvement d'un point; sa relativité; trajectoire.*

Modes de définition d'un mouvement :

- par les coordonnées du mobile par rapport à un repère cartésien fixe ;
- par la donnée d'un support géométrique de la trajectoire et par une loi horaire.

2° *Vecteur-vitesse d'un point.*

Vecteur-vitesse à un instant donné. Coordonnées du vecteur-vitesse, lorsque le mouvement est défini par rapport à un repère cartésien donné. Vecteur-vitesse de la projection du mobile sur un plan ou sur une droite fixe. Détermination du vecteur-vitesse lorsqu'on connaît le support géométrique de la trajectoire et la loi horaire.

Mouvement circulaire : vecteur-vitesse, vitesse angulaire.

3° *Vecteur-accélération d'un point.*

Définition du vecteur-accélération à un instant donné. Coordonnées du vecteur-accélération lorsque le mouvement est défini par rapport à un repère cartésien donné. Vecteur-accélération de la projection du mobile sur un plan ou sur une droite fixe.

Application à l'étude du mouvement circulaire et du mouvement hélicoïdal uniforme.

4° *Mouvement d'un point dont le vecteur-accélération reste équipollent à un vecteur fixe (liaison avec le mouvement d'un point pesant dans le vide) : trajectoire, mouvements projetés sur un axe parallèle et sur un plan perpendiculaire au vecteur-accélération.*

5° *Mouvement de translation d'un corps solide par rapport à un repère donné. Trajectoires, vecteurs-vitesse, vecteurs-accélération des divers points invariablement liés au corps.*

STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

1° *Préliminaires d'analyse combinatoire.* — Permutations, arrangements, combinaisons sans répétition. Formule du binôme.

Problèmes de dénombrement et applications simples.

2° *Principe du calcul des probabilités.* — Variable aléatoire. Notion de loi de probabilité : loi binômiale, loi de Gauss ou normale, loi des grands nombres, loi de Poisson.

3° *Statistique appliquée.* — Estimation d'une moyenne (dans le seul cas où la loi de distribution est normale). Valeur significative d'une moyenne, intervalle de confiance.

GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1^{re} Leçon

COORDONNÉES D'UN VECTEUR DANS L'ESPACE

1. Décomposition d'un vecteur lié.

Soit dans l'espace, un vecteur \vec{OM} et trois directions non coplanaires Ox , Oy et Oz (fig. 1). En menant par M les plans parallèles aux trois plans yOz , zOx et xOy , on forme un parallélépipède d'arêtes OA , OB et OC et de diagonale :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DM}$$

Soit :
$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

On dit que le vecteur \vec{OM} est décomposé suivant les trois directions Ox , Oy et Oz . La décomposition ainsi obtenue est unique :

Les trois vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} et \vec{OC} sont les composantes vectorielles du vecteur \vec{OM} suivant les trois directions Ox , Oy et Oz .

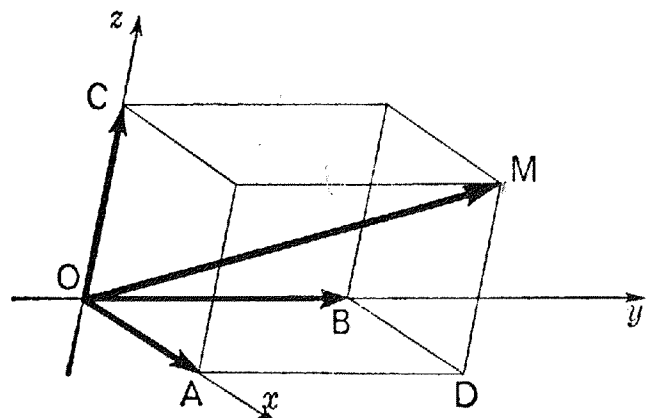


Fig. 1

On peut remarquer que la composante \vec{OA} par exemple n'est autre que la projection du vecteur \vec{OM} sur Ox , effectuée parallèlement au plan yOz .

Réciproquement, à trois composantes vectorielles données \vec{OA} , \vec{OB} et \vec{OC} correspond un vecteur lié \vec{OM} et un seul.

2. Composantes scalaires d'un vecteur libre de l'espace.

On appelle base dans l'espace l'ensemble ordonné de trois vecteurs \vec{I} , \vec{J} , \vec{K} non nuls et non parallèles à un même plan.

En menant par un point O de l'espace trois vecteurs \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} d'origine O , respectivement équipollents aux vecteurs \vec{I} , \vec{J} , \vec{K} , on obtient trois axes $x'x$, $y'y$, $z'z$ de vecteurs unitaires respectifs \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} et non coplanaires (fig. 2).

1° Les projections d'un vecteur libre \vec{V} sur les supports de chaque vecteur de base \vec{I} , \vec{J} , \vec{K} , parallèlement au plan parallèle aux deux autres, sont égales aux projections de \vec{V} sur chaque axe $x'x$, $y'y$, $z'z$, parallèlement au plan des deux autres. Elles sont aussi égales aux projections sur ces axes du vecteur lié \vec{OM} équipollent au vecteur \vec{V} . Ces

projections sont les composantes vectorielles du vecteur \vec{V} dans la base considérée et :

A tout vecteur \vec{V} correspondent des composantes vectorielles bien déterminées.

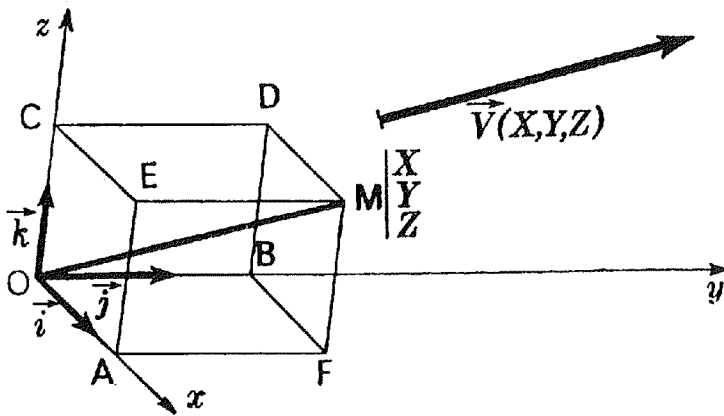


Fig. 2

2° Si \vec{V}_1 et \vec{V}_2 ont mêmes composantes vectorielles dans une base donnée, ils sont équipollents au même vecteur lié \vec{OM} , donc égaux entre eux.

Les résultats ainsi obtenus permettent d'étendre à l'espace les propriétés des vecteurs du plan (Géométrie 1^{re} D; 2^e leçon) :

3° On appelle **composantes scalaires (ou coordonnées) du vecteur libre \vec{V} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les mesures algébriques des compo-**

santes vectorielles de ce vecteur sur trois axes de vecteurs unitaires respectifs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} .

Si $\vec{OA} = X\vec{i}$; $\vec{OB} = Y\vec{j}$ et $\vec{OC} = Z\vec{k}$ (fig. 2) :

$$\vec{V} = \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}.$$

Tout vecteur \vec{V} a trois composantes scalaires X, Y, Z dans une base donnée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et s'exprime, d'une seule façon, sous forme de combinaison linéaire des vecteurs de base :

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

On note : $\vec{V}(X, Y, Z)$.

Ces composantes scalaires sont invariantes lorsqu'on remplace chaque vecteur de la base par un vecteur équipollent.

3. Vecteurs égaux. — *Pour que deux vecteurs libres soient égaux, il faut et il suffit que leurs composantes scalaires de même nom soient égales :*

Pour que \vec{V} et \vec{V}' soient égaux, il faut et il suffit qu'ils soient équipollents au même vecteur lié \vec{OM} , donc dans l'espace :

$$\vec{V} = \vec{V}' \iff X = X'; Y = Y'; Z = Z'$$

En particulier : $\vec{V} = \vec{0} \iff X = Y = Z = 0$

Toute égalité vectorielle dans l'espace équivaut à trois égalités numériques :

$$X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k} \iff X = X'; Y = Y'; Z = Z'$$

4. Somme de vecteurs. — Soit $\vec{V}(X, Y, Z)$ la somme des vecteurs $\vec{V}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{V}_2(X_2, Y_2, Z_2)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k} \\ \vec{V}_2 &= X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k} \end{aligned}$$

Soit :

$$\vec{V} = (X_1 + X_2)\vec{i} + (Y_1 + Y_2)\vec{j} + (Z_1 + Z_2)\vec{k}.$$

Donc :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \iff X = X_1 + X_2; \quad Y = Y_1 + Y_2; \quad Z = Z_1 + Z_2.$$

Plus généralement, si $\vec{V}(X, Y, Z)$ est la somme de n vecteurs $\vec{V}_i(X_i, Y_i, Z_i)$:

$$\vec{V} = \Sigma \vec{V}_i \iff X = \Sigma X_i; \quad Y = \Sigma Y_i, \quad Z = \Sigma Z_i.$$

Ces conditions se réduisent aux deux premières dans le cas du plan.

5. Combinaison linéaire de vecteurs. — Il résulte des paragraphes précédents que toute combinaison linéaire $\vec{V}(X, Y, Z)$ des vecteurs $\vec{V}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{V}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ est telle que :

$$\vec{V} = \alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2 \iff X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2; \quad Y = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2; \quad Z = \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2.$$

Plus généralement si on combine n vecteurs \vec{V}_i :

$$\vec{V} = \sum_1^n \alpha_i \vec{V}_i \iff X = \Sigma \alpha_i X_i; \quad Y = \Sigma \alpha_i Y_i; \quad Z = \Sigma \alpha_i Z_i.$$

6. Vecteurs de même direction. — Pour que les vecteurs non nuls $\vec{V}(X, Y, Z)$ et $\vec{V}'(X', Y', Z')$ aient leurs supports parallèles ou confondus, il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{V}' = \lambda \vec{V}$:

$$\vec{V}' = \lambda \vec{V} \iff X' \vec{i} + Y' \vec{j} + Z' \vec{k} = \lambda (X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k})$$

ou :
$$X' \vec{i} + Y' \vec{j} + Z' \vec{k} = (\lambda X) \vec{i} + (\lambda Y) \vec{j} + (\lambda Z) \vec{k}.$$

Donc (n° 4) :
$$\vec{V}' \parallel \vec{V} \iff X' = \lambda X; \quad Y' = \lambda Y; \quad Z' = \lambda Z.$$

Pour que deux vecteurs non nuls aient même direction il faut et il suffit que leurs composantes scalaires de même nom soient proportionnelles.

On peut écrire :
$$\vec{V}' \parallel \vec{V} \iff \frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z}$$

en convenant que si l'un des dénominateurs est nul, il en est de même du numérateur correspondant.

7. Repérage d'un point de l'espace. — Soit A un point fixe de l'espace. A tout vecteur lié \vec{AM} il correspond un point M de l'espace et un seul. Réciproquement, à tout point M de l'espace correspond un vecteur lié \vec{AM} et un seul (fig. 3) :

Il existe une correspondance bijective entre un point M de l'espace et le vecteur lié \vec{AM} .

En prenant le point A comme origine, on peut ainsi repérer tout point M de l'espace.

8. Changement d'origine. — Prenons le point O comme nouvelle origine (fig. 3). Tout point M de l'espace est repéré par le vecteur \vec{OM} :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}.$$

9. Représentation paramétrique vectorielle d'une droite. — Considérons, dans l'espace, la droite \vec{D} passant par le point donné A et parallèle au vecteur donné non nul \vec{V} (fig. 4).

Le vecteur \vec{V} est un vecteur directeur de la droite D.

Soit O un point fixe de l'espace (ou du plan) choisi comme origine. Pour que le point variable M appartienne à la droite D, il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel λ tel que : $\vec{AM} = \lambda \vec{V}$ ce qui entraîne :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} \implies \boxed{\vec{OM} = \vec{OA} + \lambda \vec{V}.}$$

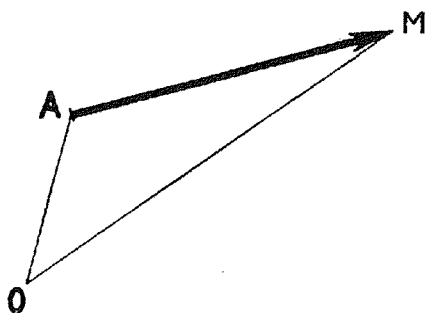


Fig. 3

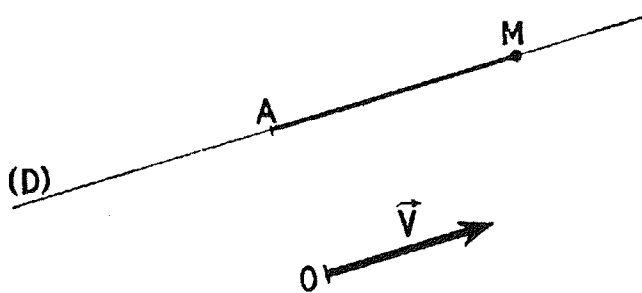


Fig. 4

L'équation : $\vec{OM} = \vec{OA} + \lambda \vec{V}$ est la représentation paramétrique vectorielle de la droite D passant par A et parallèle au vecteur \vec{V} .

Soit \vec{i} un vecteur unitaire de même direction que le vecteur \vec{V} . On obtient : $\vec{AM} = \lambda v \vec{i}$, où v est la mesure algébrique de \vec{V} sur l'axe de vecteur unitaire \vec{i} . Lorsque le paramètre λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point M décrit la droite D dans le sens du vecteur \vec{V} ou dans le sens opposé selon que les vecteurs \vec{V} et \vec{i} sont de même sens ou non. Notons que :

Un vecteur directeur d'une droite n'est défini qu'à un facteur numérique près :

$$\vec{W} = m \vec{V} \iff \vec{V} = \frac{1}{m} \vec{W} \implies \vec{OM} = \vec{OA} + \frac{\lambda}{m} \vec{W}$$

soit : $\vec{OM} = \vec{OA} + k \vec{W}$ où k varie de $-\infty$ à $+\infty$.

REPÈRE CARTÉSIEN DANS L'ESPACE

10. Définitions. — Considérons trois axes Ox , Oy , Oz non coplanaires, de même origine O, dont les vecteurs unitaires respectifs sont les vecteurs liés \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} d'origine O (fig. 5). L'ensemble ordonné \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} est une base de l'espace et définit le repère cartésien $Oxyz$.

Un repère cartésien dans l'espace est déterminé par une base \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , constituée de trois vecteurs liés de même origine O.

Le point O est l'origine du repère ; les axes Ox , Oy , Oz sont les axes de coordonnées du repère et se nomment respectivement axe des abscisses, des ordonnées et des cotes.

Sauf indication contraire le trièdre $Oxyz$ est de sens *direct*, c'est-à-dire qu'un observateur placé sur Oz voit Ox à sa droite et Oy à sa gauche.

Le repère cartésien $Oxyz$ est dit :

1° **Rectangulaire** ou **orthogonal** lorsque le trièdre $Oxyz$ est trirectangle.

2° **Normé** lorsque les trois vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ont un même module égal à l'unité de longueur. Dans un tel repère, tout vecteur unitaire \vec{u} de l'espace aura le même module que les vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

3° **Orthonormé** lorsqu'il est à la fois rectangulaire et normé. Les trois vecteurs de base ont alors le même module et sont deux à deux orthogonaux.

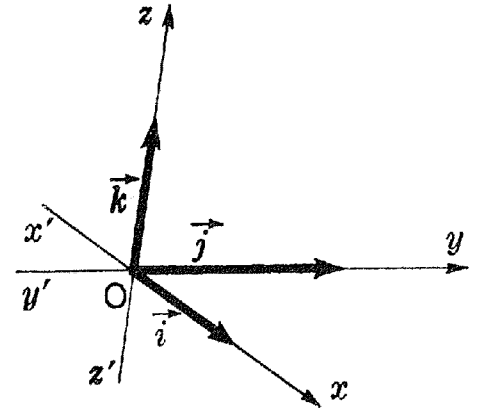


Fig. 5

11. Coordonnées cartésiennes dans l'espace. — Les coordonnées cartésiennes d'un point M sont les composantes scalaires du vecteur \vec{OM} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Ces coordonnées x, y, z sont respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote du point $M(x, y, z)$. Ainsi (fig. 6) :

$$M(x, y, z) \text{ ou } M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \iff \boxed{\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}} \quad (1)$$

Si R désigne l'ensemble des nombres réels, on établit ainsi une correspondance bijective entre l'ensemble des points M de l'espace et l'ensemble des éléments (x, y, z) de R^3 .

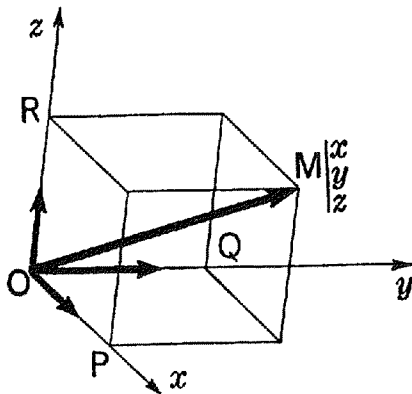


Fig. 6

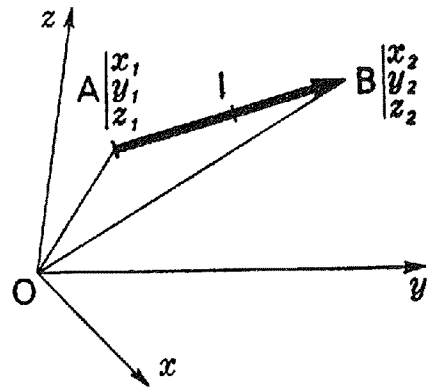


Fig. 7

12. Composantes du vecteur \vec{AB} . — Soient $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$ deux points donnés et X, Y, Z , les composantes du vecteur \vec{AB} (fig. 7) :

$$\boxed{\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}} \iff \boxed{X = x_2 - x_1; Y = y_2 - y_1; Z = z_2 - z_1} \quad (2)$$

Toute composante scalaire du vecteur \vec{AB} est égale à la différence des coordonnées de même nom de son extrémité et de son origine.

Considérons les points $A(x_1, y_1, z_1); B(x_2, y_2, z_2); C(x_3, y_3, z_3)$ et $D(x_4, y_4, z_4)$:

$$\vec{AB} = \vec{CD} \iff \begin{cases} x_2 - x_1 = x_4 - x_3 \\ y_2 - y_1 = y_4 - y_3 \\ z_2 - z_1 = z_4 - z_3 \end{cases} \quad (\text{n}^\circ 4)$$

et
$$\vec{AB} \parallel \vec{CD} \iff \frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_3} = \frac{y_2 - y_1}{y_4 - y_3} = \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \quad (\text{n}^\circ 5)$$

13. Changement de coordonnées par translation du repère. — Faisons subir (fig. 8) au repère cartésien $Oxyz$ une translation de vecteur $\vec{O}\omega$. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la nouvelle origine ω et soient $\omega X, \omega Y$ et ωZ les nouveaux axes de vecteurs unitaires $\vec{I} = \vec{i}, \vec{J} = \vec{j}$ et $\vec{K} = \vec{k}$. Désignons par x, y, z les coordonnées du point quelconque M dans l'ancien repère $Oxyz$ et par X, Y, Z , ses coordonnées dans le nouveau repère. La relation : $\vec{OM} = \vec{O}\omega + \vec{\omega M}$ s'écrit :

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}) + (X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}).$$

Soit : $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_0 + X)\vec{i} + (y_0 + Y)\vec{j} + (z_0 + Z)\vec{k}.$

Donc (n° 4) :

$$\boxed{\vec{OM} = \vec{O}\omega + \vec{\omega M}} \iff \boxed{x = x_0 + X, \quad y = y_0 + Y, \quad z = z_0 + Z.}$$

L'ancienne abscisse est égale à l'abscisse de la nouvelle origine augmentée de la nouvelle abscisse.

On peut formuler des règles analogues pour la nouvelle ordonnée et la nouvelle cote.

En faisant $z = z_0 = Z = 0$, on retrouve les règles connues pour le changement de coordonnées dans le plan.

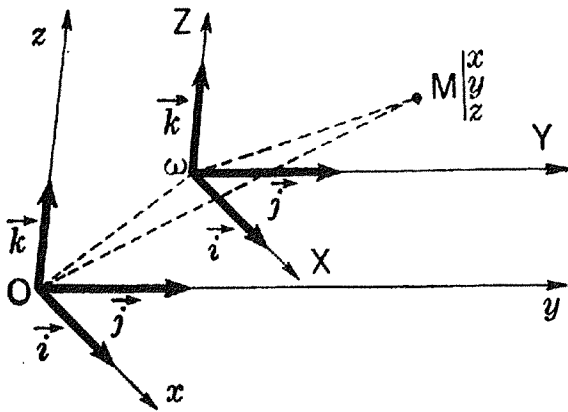


Fig. 8

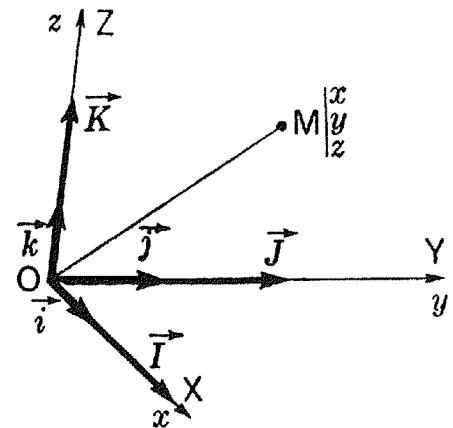


Fig. 9

14. Changement de vecteurs unitaires. — Dans le repère cartésien $Oxyz$, remplaçons (fig. 9) les vecteurs unitaires de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, par les vecteurs \vec{I}, \vec{J} et \vec{K} tels que :

$$\vec{I} = \alpha\vec{i}, \quad \vec{J} = \beta\vec{j}, \quad \vec{K} = \gamma\vec{k}.$$

Dans le nouveau repère $OXYZ$, on obtient : $\vec{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}.$

Soit : $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \alpha X\vec{i} + \beta Y\vec{j} + \gamma Z\vec{k}.$

Donc : $x = \alpha X, \quad y = \beta Y, \quad z = \gamma Z \iff X = \frac{x}{\alpha}, \quad Y = \frac{y}{\beta}, \quad Z = \frac{z}{\gamma}.$

15. Symétries. — 1° Dans tout repère cartésien $Oxyz$ (fig. 10), les points $M(x, y, z)$ et $M'(-x, -y, -z)$ sont symétriques par rapport à l'origine O , car :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{OM}' = -x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k} \implies \vec{OM}' = -\vec{OM}.$$

2° Dans tout repère rectangulaire (fig. 11), les points $M(x, y, z)$ et $M'(x, y, -z)$ sont symétriques par rapport au plan xOy . En effet le milieu du segment MM' est le point $I(x, y, 0)$. Il est donc situé dans le plan xOy et le vecteur $\vec{M'M} = 2z\vec{k}$ est perpendiculaire à ce plan.

De même les points $M''(-x, y, z)$ et $M'''(x, -y, z)$ sont les symétriques du point $M(x, y, z)$ par rapport aux plans yOz et zOx .

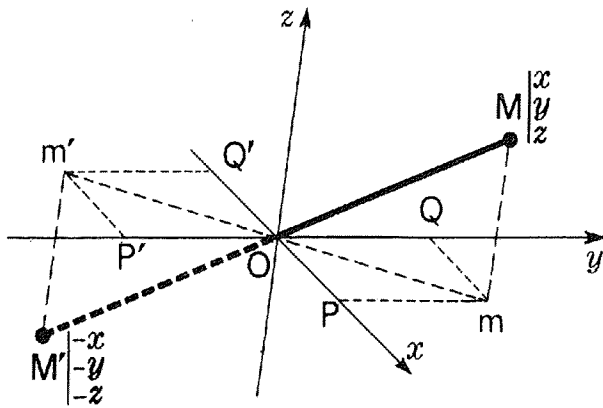


Fig. 10

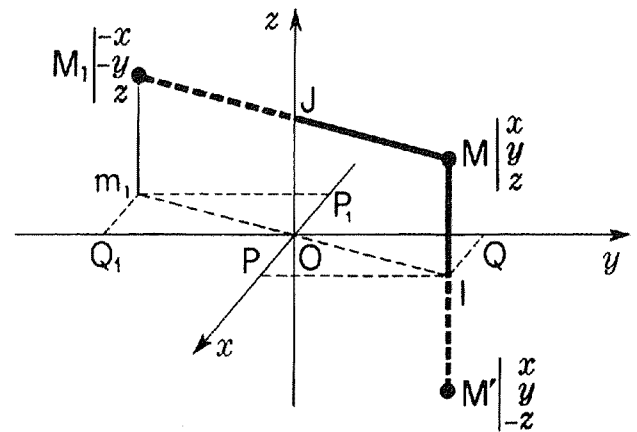


Fig. 11

3° Dans tout repère rectangulaire, les points $M(x, y, z)$ et $M_1(-x, -y, z)$ sont symétriques par rapport à l'axe Oz , car le milieu du segment MM_1 est le point $J(0, 0, z)$. Il appartient à l'axe Oz , et le vecteur $\overrightarrow{M_1M} = 2(x\vec{i} + y\vec{j})$ est perpendiculaire à Oz .

De même les points $M_2(x, -y, -z)$ et $M_3(-x, y, -z)$ sont les symétriques du point $M(x, y, z)$ par rapport à l'axe Ox et l'axe Oy .

EXERCICES

— Décomposer dans l'espace un vecteur donné \overrightarrow{OM} en trois vecteurs non coplanaires \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} et \overrightarrow{OC} , de modules respectifs a , b , c , portés par les axes Ox , Oy et Oz quand on donne :

1. \overrightarrow{OC} , Ox et $xOy = \alpha$.
2. Ox , Oy , $\frac{a}{b}$ et c .
3. \overrightarrow{OC} , Ox et b .
4. Ox , Oy , $a + b$ et c .

5. On dit que trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ de l'espace constituent une famille libre lorsque l'égalité : $\alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2 + \gamma\vec{V}_3 = \vec{0}$ entraîne : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

- 1° Montrer qu'aucun des vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ ne peut être nul.
- 2° Montrer que deux de ces vecteurs ne peuvent avoir même direction.
- 3° Montrer que $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ est une base de l'espace.

6. On dit que les vecteurs \vec{V}_1, \vec{V}_2 et \vec{V}_3 de l'espace constituent une famille liée s'il existe des réels α, β, γ non tous nuls, tels que : $\alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2 + \gamma\vec{V}_3 = \vec{0}$.

- 1° Montrer que $\vec{V}_1 = \vec{0}, \vec{V}_2$ et \vec{V}_3 quelconques constituent une famille liée.
- 2° Montrer que l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres.
- 3° Montrer que $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ sont parallèles à un même plan ou à une même droite.
- 4° Que peut-on dire des projections de \vec{V}_1, \vec{V}_2 et \vec{V}_3 sur un même plan, ou sur un même axe ?

— Déterminer les paramètres λ et μ , pour que les vecteurs suivants \vec{V}_1 et \vec{V}_2 soient, si possible, parallèles à une même droite :

7. $\vec{V}_1(4; 6; -2)$ et $\vec{V}_2(2; 3; \lambda)$.
8. $\vec{V}_1(0; 2; 3)$ et $\vec{V}_2(1 - \lambda; 4; 6)$.
9. $\vec{V}_1(3; 4; 1)$ et $\vec{V}_2(2; \lambda; \mu)$.
10. $\vec{V}_1(-1; 0; 4)$ et $\vec{V}_2(\lambda; \mu; 5)$.
11. $\vec{V}_1(\lambda; \mu; 1)$ et $\vec{V}_2(\mu; \lambda; -1)$.
12. $\vec{V}_1(2; 3; \lambda - 2)$ et $\vec{V}_2(1; \mu; \lambda - 1)$.

— On choisit dans l'espace une origine O et une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ constituée de trois vecteurs donnés d'origine O. Soit A un point fixe et \vec{V} un vecteur donné. Étudier la droite lieu du point M tel que $\vec{OM} = \vec{OA} + \lambda \vec{V}$, dans les cas suivants :

- 13. $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{V} = \vec{k}$.
- 14. $\vec{OA} = 3\vec{k}$ et $\vec{V} = -\vec{i} + 3\vec{j}$.
- 15. $\vec{OA} = \vec{0}$ et $\vec{V} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
- 16. $\vec{OA} = \vec{0}$ et $\vec{V} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$.

17. On donne dans l'espace une origine O, deux points fixes A et B et deux vecteurs \vec{V} et \vec{V}' . Montrer que la relation $\vec{BA} = -\lambda \vec{V} + \mu \vec{V}'$ est en général impossible et en déduire que les droites D et D' définies par $\vec{OM} = \vec{OA} + \lambda \vec{V}$ et $\vec{OM} = \vec{OB} + \mu \vec{V}'$ n'ont pas en général de point commun.

18. 1° On considère dans le repère cartésien Oxyz, les vecteurs $\vec{OM}, \vec{OM}', \vec{OM}''$ et on suppose que \vec{OM}' et \vec{OM}'' ne sont pas colinéaires. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que ces trois vecteurs appartiennent à un même plan, est qu'il existe deux nombres réels λ et μ , tels que : $\vec{OM} = \lambda \vec{OM}' + \mu \vec{OM}''$.

2° En déduire que, pour que trois vecteurs $\vec{V}(X, Y, Z); \vec{V}'(X', Y', Z')$ et $\vec{V}''(X'', Y'', Z'')$ soient parallèles à un même plan, il faut et il suffit que : $\vec{V} = \lambda \vec{V}' + \mu \vec{V}''$.

3° Montrer que cette condition équivaut à :

$$X(Y'Z'' - Y''Z') + Y(Z'X'' - Z''X') + Z(X'Y'' - X''Y') = 0.$$

— Vérifier que les vecteurs \vec{V}_1, \vec{V}_2 et \vec{V}_3 de l'espace sont parallèles à une même direction de plan, dans les cas suivants :

- 19. $\vec{V}_1(2; -1; 3); \vec{V}_2(1; 1; 4)$ et $\vec{V}_3(3; 0; 7)$.
- 20. $\vec{V}_1(3; -5; 7); \vec{V}_2(4; 1; -3)$ et $\vec{V}_3(-1, -6; 10)$.
- 21. $\vec{V}_1(1; -1; 2); \vec{V}_2(2; 1; 4)$ et $\vec{V}_3(4; -1; 8)$.
- 22. $\vec{V}_1(1; 1; 1); \vec{V}_2(-2; 1; 5)$ et $\vec{V}_3(7; 1; -7)$.
- 23. $\vec{V}_1(a; a-1; a+2); \vec{V}_2(1; 1; 3-a)$ et $\vec{V}_3(3a-4; 3a-7; 7a-6)$.

24. On considère le système de trois équations à trois inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

et on considère les vecteurs $\vec{A}(a, a', a''); \vec{B}(b, b', b''); \vec{C}(c, c', c'')$. Interpréter et étudier le système donné dans les cas suivants :

- 1° $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est une base de l'espace ;
- 2° les vecteurs \vec{A}, \vec{B} et \vec{C} sont parallèles à une même direction de plan ;
- 3° les vecteurs \vec{A}, \vec{B} et \vec{C} sont parallèles à une même direction de droite ;
- 4° les vecteurs \vec{A}, \vec{B} et \vec{C} sont nuls.

REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE

16. Droite définie par un point et un vecteur directeur. — Considérons (fig. 12) dans le repère cartésien $Oxyz$, la droite D passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et parallèle au vecteur $\vec{OS} = \vec{U}(a, b, c)$. Le vecteur \vec{OS} est un *vecteur directeur* de la droite D (n° 9) et ses composantes (a, b, c) constituent un système de *paramètres directeurs* de la droite D .

L'équation paramétrique vectorielle de la droite D est (n° 9) :

$$\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \lambda \vec{U} \quad (1)$$

où λ est le rapport de \vec{M}_0M et \vec{U} .

L'équation vectorielle (1) équivaut à l'ensemble de trois relations algébriques :

$$\boxed{x = x_0 + \lambda a; \quad y = y_0 + \lambda b; \quad z = z_0 + \lambda c.} \quad (2)$$

Le système formé par ces trois relations constitue une représentation paramétrique de la droite D .

Lorsque le paramètre λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point $M(x, y, z)$ ou $M(\lambda)$ parcourt la droite D en entier dans le sens du vecteur \vec{U} . Notons que $M_0M = |\lambda| |\vec{U}|$. Si le vecteur \vec{U} est pris pour vecteur unitaire de l'axe Δ de support D , on a : $M_0M = \lambda$.

EXEMPLE. — La droite passant par le point $M_0(2, -3, 5)$ et parallèle au vecteur \vec{OS} de composantes 1, 2 et -3 a pour représentation paramétrique :

$$x = 2 + \lambda; \quad y = -3 + 2\lambda; \quad z = 5 - 3\lambda.$$

17. Remarques. — 1° Le système (2) permet d'écrire :

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}} \quad (3)$$

en convenant que si l'un des dénominateurs est nul il en est de même du numérateur correspondant. Pour qu'un point $M(x, y, z)$ appartienne à la droite D , il faut et il suffit que ses coordonnées vérifient le système d'équations (3), car en désignant par λ la valeur commune des trois rapports on retrouve les relations (2).

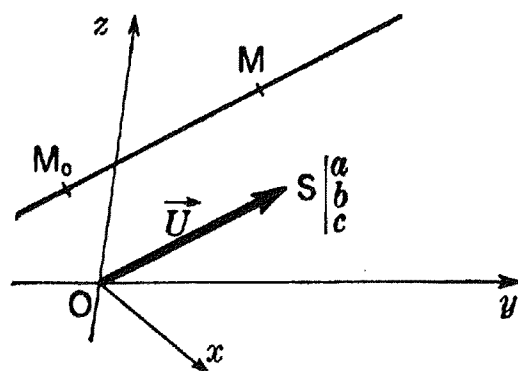


Fig. 12

2° Si la droite D est parallèle au plan xOy , il en est de même du vecteur $\vec{U}(a, b, 0)$. Le système (2) se réduit alors à :

$$x = x_0 + \rho a; \quad y_0 = y_0 + \rho b; \quad z = z_0.$$

3° Si la droite D est parallèle à l'axe Oz , on obtient : $x = x_0, y = y_0, z = \mu$.

18. Droite définie par deux points. — Considérons dans le repère cartésien $Oxyz$ la droite D définie par les points A (x_1, y_1, z_1) et B (x_2, y_2, z_2) (fig. 13).

On se ramène au cas précédent (n° 16) en prenant $\vec{U}(a, b, c) = \vec{AB}$, c'est-à-dire en posant $a = x_2 - x_1; b = y_2 - y_1; c = z_2 - z_1$.

On peut alors choisir pour point M_0 , l'un des points A ou B, ou le milieu I de AB de coordonnées : $\frac{1}{2}(x_1 + x_2); \frac{1}{2}(y_1 + y_2); \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$.

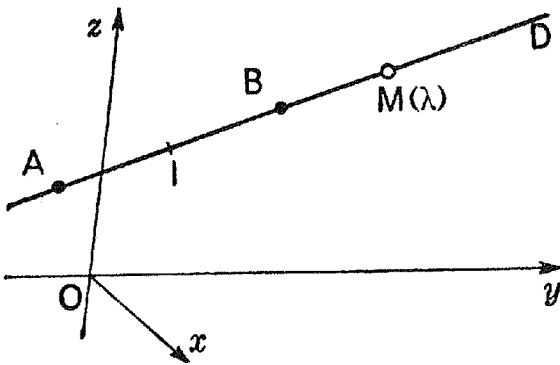


Fig. 13

EXEMPLE. — La droite D qui joint les points A $(0, 2, 3)$ et B $(2, 4, -6)$ passe par le point I $(1, 3, -\frac{3}{2})$ milieu de AB et a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{AB}(2, 2, -9)$. Sa représentation paramétrique est donc :

$$x = 1 + 2\lambda; \quad y = 3 + 2\lambda; \quad z = -\frac{3}{2} - 9\lambda.$$

Ce qui entraîne :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+\frac{3}{2}}{-9} = \lambda.$$

19. Remarque. — *L'ensemble des équations : $x = az + p, y = bz + q$, représente une droite de l'espace non parallèle au plan xOy .*

Le système : $x = az + p; y = bz + q$, équivaut au suivant :

$$x = a\lambda + p; \quad y = b\lambda + q; \quad z = \lambda.$$

L'ensemble des points M (x, y, z) dont les coordonnées vérifient le système proposé est l'ensemble des points de la droite D passant par le point $M_0(p, q, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{U}(a, b, 1)$.

Si $a = 0; b \neq 0$, la droite D appartient à un plan parallèle au plan yOz .

Si $a \neq 0; b = 0$, elle appartient à un plan parallèle au plan xOz .

Si $a = b = 0$, la droite D est parallèle à l'axe Oz .

On démontrerait de même que le système : $y = ax + p; z = bx + q$ représente une droite non parallèle au plan yOz et que le système : $x = ay + p; z = by + q$ représente une droite non parallèle au plan xOz .

PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

(repère orthonormé)

20. Rappel. — 1° Rappelons qu'un repère cartésien $Oxyz$ est orthonormé (fig. 14) lorsque les vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ont même module et sont deux à deux orthogonaux. Ils forment un trièdre trirectangle $O(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sens direct.

Comme dans tout repère rectangulaire, les composantes vectorielles d'un vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$ sont les projections orthogonales de ce vecteur sur les axes Ox , Oy et Oz .

2° Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} est égal au produit de leurs modules par le cosinus de leur angle géométrique (fig. 15) :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}| |\vec{V}| \cos \theta = uv \cos \theta.$$

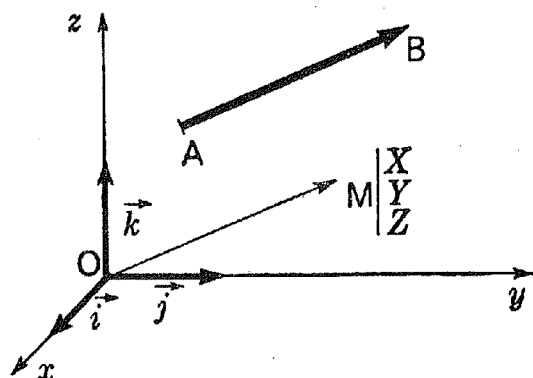


Fig. 14

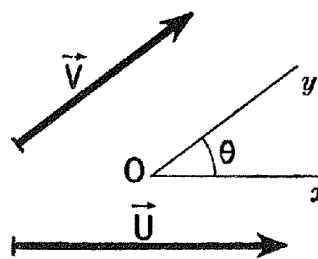


Fig. 15

Le produit scalaire est commutatif : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs est invariant lorsqu'on remplace l'un d'eux par sa projection orthogonale sur le support de l'autre.

Ainsi (fig. 16) :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cos \theta = \overline{OA} \cdot \overline{OB'} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'}.$$

Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\vec{U} \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{U} \cdot \vec{V}_1 + \vec{U} \cdot \vec{V}_2 + \vec{U} \cdot \vec{V}_3.$$

Le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de son module :

$$(\vec{U})^2 = \vec{U} \cdot \vec{U} = |\vec{U}|^2 = u^2.$$

Dans tout repère orthonormé ainsi que dans tout repère normé, on adopte pour unité de longueur le module des vecteurs de base. Il en résulte que :

$$\boxed{\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.} \quad (1)$$

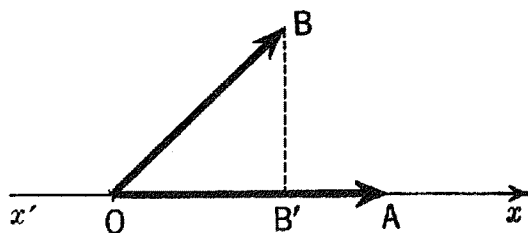


Fig. 16

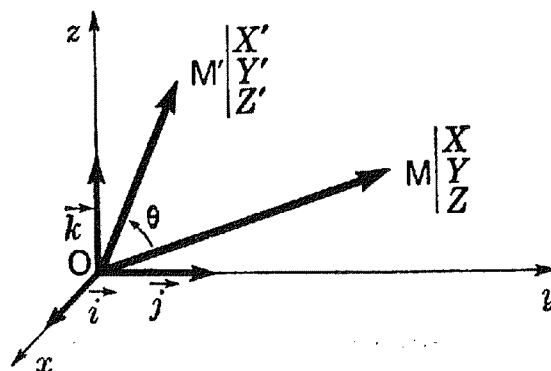


Fig. 17

21. Expression analytique d'un produit scalaire. — Le produit scalaire des vecteurs $\vec{V}(X, Y, Z)$ et $\vec{V}'(X', Y', Z')$ s'écrit (fig. 17) :

$$\vec{V} \cdot \vec{V}' = (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) \cdot (X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}).$$

Compte tenu des propriétés du produit scalaire (n° 20) et des formules précédentes on obtient :

$$\boxed{\vec{V} \cdot \vec{V}' = XX' + YY' + ZZ'}. \quad (2)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal à la somme des produits des composantes scalaires de même nom de ces deux vecteurs.

En particulier le carré scalaire du vecteur \vec{V} de module v s'écrit :

$$\boxed{\vec{V}^2 = v^2 = X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (3)$$

Cette formule permet de calculer le module v du vecteur \vec{V} :

$$|\vec{V}| = v = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (4)$$

Le module d'un vecteur est la racine carrée de la somme des carrés de ses composantes scalaires.

Pour qu'un vecteur \vec{u} (a, b, c) soit unitaire il faut et il suffit que :

$$\vec{u}^2 = 1 \iff a^2 + b^2 + c^2 = 1. \quad (5)$$

22. Distance de deux points. — Considérons les points A (x_1, y_1, z_1) et B (x_2, y_2, z_2) (fig. 14). Les composantes scalaires du vecteur \vec{AB} sont (n° 12) :

$$X = x_2 - x_1; \quad Y = y_2 - y_1; \quad Z = z_2 - z_1.$$

La distance $AB = d$ est le module du vecteur \vec{AB} . Donc :

$$\boxed{d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (6)$$

En particulier la distance ρ de l'origine O au point M (x, y, z) est telle que :

$$\rho^2 = \vec{OM}^2 \iff \boxed{\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2}. \quad (7)$$

23. Cosinus de l'angle de deux vecteurs. — Désignons (fig. 17) par v et v' les modules des vecteurs \vec{V} (X, Y, Z) et \vec{V}' (X', Y', Z'). Soit d'autre part, θ l'angle dans l'espace de ces deux vecteurs, d'où en radians : $\theta \in [0, \pi]$. On sait que (n° 20) :

$$\vec{V} \cdot \vec{V}' = v \cdot v' \cdot \cos \theta \iff \cos \theta = \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}'}{vv'}$$

Donc (n° 21) :

$$\boxed{\cos \theta = \frac{XX' + YY' + ZZ'}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)}}}. \quad (8)$$

Il en résulte immédiatement que l'angle θ des vecteurs \vec{V} et \vec{V}' est aigu, droit ou obtus suivant que l'expression $XX' + YY' + ZZ'$ est positive, nulle ou négative.

La condition d'orthogonalité des vecteurs \vec{V} (X, Y, Z) et V' (X', Y', Z') est donc :

$$\vec{V} \perp \vec{V}' \iff \vec{V} \cdot \vec{V}' = 0 \iff \boxed{XX' + YY' + ZZ' = 0}. \quad (9)$$

Pour deux vecteurs \vec{V} et \vec{V}' du plan xOy , cette condition se réduit à :

$$XX' + YY' = 0.$$

L'angle aigu φ de deux droites D et D' de paramètres directeurs respectifs (a, b, c) et (a', b', c') vérifie donc la relation :

$$\cos \varphi = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)}}$$

et la condition d'orthogonalité de ces deux droites s'écrit :

$$D \perp D' \iff \boxed{aa' + bb' + cc' = 0.} \quad (10)$$

EXEMPLE. — Soit à déterminer l'angle des bissectrices de (\vec{Ox}, \vec{Oy}) et (\vec{Ox}, \vec{Oz}) . Ces deux bissectrices ont pour paramètres directeurs : $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$.

Donc :

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{1}{2} \implies \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

24. Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe. — On sait que la mesure algébrique de la projection d'un vecteur sur un axe est le produit scalaire de ce vecteur et du vecteur unitaire de l'axe.

Ainsi (fig. 18) la mesure algébrique $\overline{A'B'}$ de la projection $\overline{A'B'}$ du vecteur $\vec{V} = \overline{AB}$ (X, Y, Z) sur un axe Δ de vecteur unitaire \vec{u} (a, b, c) s'écrit :

$$\overline{A'B'} = \vec{u} \cdot \vec{V}$$

soit :

$$\boxed{\overline{A'B'} = aX + bY + cZ.}$$

Ceci montre que :

$$\overline{A'B'} = \overline{A'B'} \vec{u} = (aX + bY + cZ)\vec{u}.$$

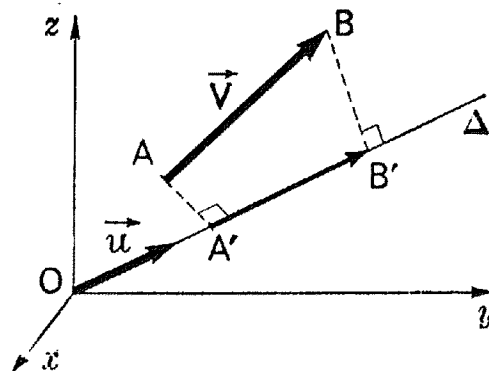


Fig. 18

On vérifie que dans un repère orthonormé les composantes scalaires d'un vecteur $\vec{V}(X, Y, Z)$ ne sont autres que les mesures algébriques de ses projections orthogonales sur les axes Ox, Oy et Oz , car :

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \implies \vec{V} \cdot \vec{i} = X, \quad \vec{V} \cdot \vec{j} = Y \quad \text{et} \quad \vec{V} \cdot \vec{k} = Z.$$

25. Cosinus directeurs d'un axe ou d'une droite. — Considérons (fig. 19) un axe Δ de vecteur unitaire $\vec{u}(a, b, c)$ et désignons par α, β, γ les angles de Δ avec les axes de coordonnées, c'est-à-dire les angles $(\vec{u}, \vec{i}), (\vec{u}, \vec{j})$ et (\vec{u}, \vec{k}) . D'après le paragraphe précédent :

$$a = \vec{u} \cdot \vec{i} = \cos \alpha, \quad b = \vec{u} \cdot \vec{j} = \cos \beta \quad \text{et} \quad c = \vec{u} \cdot \vec{k} = \cos \gamma.$$

C'est pourquoi, dans un repère orthonormé :

On appelle *cosinus directeurs d'un axe* les composantes scalaires du vecteur unitaire de cet axe.

Si l'axe Δ a pour vecteur directeur $\vec{V}(p, q, r)$ de module $\rho = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, on obtient son vecteur unitaire $\vec{u}(a, b, c)$ et par suite ses cosinus directeurs, en prenant : $\vec{u} = \frac{1}{\rho} \vec{V}$ soit :

$$a = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}; \quad b = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}; \quad c = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

On appelle de même *cosinus directeurs d'une droite D* les composantes de tout vecteur unitaire parallèle à cette droite. — Si $\vec{u}(a, b, c)$ est un tel vecteur, on peut prendre comme

cosinus directeurs de cette droite le système (a, b, c) ou le système $(-a, -b, -c)$.

En géométrie plane les cosinus directeurs de l'axe Δ sont les composantes scalaires

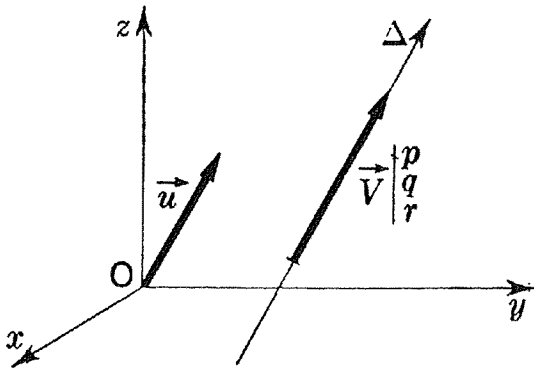


Fig. 19

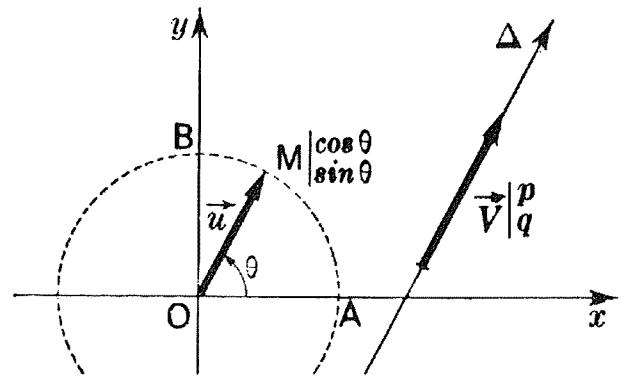


Fig. 20

(a, b) du vecteur unitaire \vec{u} de cet axe. En désignant par θ l'angle (\vec{Ox}, Δ) on obtient : $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$ (fig. 20) et :

$$\vec{u} = a \vec{i} + b \vec{j} \iff \vec{u} = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta.$$

Dans le plan, les cosinus directeurs d'un axe Δ d'angle polaire $\theta = (\vec{Ox}, \Delta)$ sont $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Si $\vec{V}(p, q)$ est un vecteur directeur de l'axe Δ , on obtient comme ci-dessus :

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho} \vec{V} \iff a = \cos \theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}; \quad b = \sin \theta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

EXERCICES

25. On donne les points $A(3; 5; -4)$ et $B(1; 3; -2)$.

1° Calculer les composantes scalaires du vecteur \vec{AB} .

2° Déterminer le point M de la droite AB d'abscisse 5.

3° Coordonnées du point M' de la droite AB tel que $\vec{AM} \cdot \vec{BM'} + \vec{AM'} \cdot \vec{BM} = 0$?

26. On donne les points $A(1; -2; 4)$, $B(-3; 5; -6)$, $C(5; -1; 7)$ et $D(0; 3; 4)$.

1° Calculer les coordonnées des sommets du parallélépipède construit sur AB , AC et AD comme arêtes.

2° Calculer les coordonnées du milieu de chaque diagonale de ce parallélépipède; en déduire que ces diagonales sont concourantes.

27. On donne les vecteurs $\vec{AB}(2; -3; 1)$, $\vec{AC}(3; 1; -8)$ et $\vec{AM}(-5; -9; 26)$.

1° Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que : $\vec{AM} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$. Que peut-on dire des quatre points A, B, C, M ?

2° Dans le repère plan où les vecteurs unitaires des axes sont \vec{AB} et \vec{AC} , quelles sont les coordonnées du point M ?

28. Dans le repère $Oxyz$ on donne les points $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$.

1° Calculer les coordonnées des milieux des arêtes du tétraèdre $OABC$.

2° Montrer que les segments qui joignent les milieux de deux arêtes opposées ont même milieu I et calculer les coordonnées du point I .

3° Calculer les coordonnées du centre de gravité de chaque face. Vérifier que les droites qui joignent un sommet au centre de gravité de la face opposée passent par I .

— Former les équations paramétriques d'une droite D passant par le point A et parallèle au vecteur \vec{V} , puis trouver les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec les plans de coordonnées dans les cas suivants :

29. A (2, -4, 1); \vec{V} (1, 1, 1).

30. A $(-\frac{2}{3}; 4; -2)$; \vec{V} (3, -1, 2)

31. A (2, -1, 0); \vec{V} (1, 3, 1).

32. A (0, 0, 1), \vec{V} (2, -3, 5).

— Former les équations paramétriques d'une droite D passant par les points donnés A et B; puis trouver les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec les plans de coordonnées dans les cas suivants :

33. A (0, 2, 4) et B (2, -3, 1).

34. A $(\frac{2}{3}, 1, -1)$ et B $(-\frac{2}{3}, 2; 5)$.

35. A (3, -1, 0) et B (5; +4; 0).

36. A (0, 0, 5) et B (0, 0, 2).

37. On donne les points A (3; -5; 0), B (0; 0; 4) et C (1; 1; 1).

1° Former les équations paramétriques de la droite D passant par C et parallèle au vecteur \vec{AB} .

2° Soit M un point variable de la droite D; trouver les équations paramétriques du lieu du centre de gravité G du triangle MAB, en posant $\vec{CM} = \lambda \vec{AB}$.

38. Dans le repère orthonormé Oxyz, on donne les points A (1, 0, 0); B (0, 1, 0) et C (0, 0, 1).

1° Calculer les coordonnées du point D tel que $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ puis les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

2° Montrer que $\vec{OG} = \frac{1}{3} \vec{OD}$. En déduire une propriété des diagonales du cube.

39. 1° Écrire en fonction du paramètre λ , les équations de la droite D passant par le point A (0, 0, 5) et de paramètres directeurs 1, 1 et 0 puis, en fonction du paramètre μ , les équations de la droite D' passant par le point A' (0; 0, -5) et de paramètres directeurs 1; -1 et 0.

2° Soit I le milieu du segment qui joint le point M (λ) de D au point M' (μ) de D'. Trouver le lieu du point I dans les cas suivants :

- a) λ et μ sont indépendants;
- b) $\lambda = \mu$;
- c) $\lambda + \mu = k$, constante donnée.

40. On donne la droite D définie par les équations : $x = 2z - 3$; $y = 3z - 1$, et le point A (1, 1, 1). Soit le point M de coordonnées 0, 0 et h.

1° Déterminer h pour que la droite MA coupe la droite D en B et calculer les coordonnées du point B.

2° En déduire qu'il existe en général une droite et une seule passant par un point donné A (x_0, y_0, z_0) et coupant les droites données :

$$D_1 \begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$$

$$D_2 \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

41. 1° On donne les droites D₁ et D₂ définies respectivement par les systèmes :

$$D_1 \begin{cases} x = 3z - 2 \\ y = z + 1 \end{cases}$$

$$D_2 \begin{cases} x = 2z + 5 \\ y = 4z - 7 \end{cases}$$

Trouver un point A de D₁ et un point B de D₂ de telle sorte que le vecteur AB soit parallèle à l'axe z'z.

2° Montrer qu'il existe en général une droite Δ parallèle à l'axe z'z et coupant les droites données :

$$D_1 \begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$$

$$D_2 \begin{cases} x = a'z + p' \\ y = b'z + q' \end{cases}$$

42. On donne les points A (a, b, c); B (a', b', c') et C (a'', b'', c'').

1° Trouver les coordonnées du milieu I de AB.

2° Trouver les coordonnées du point G tel que : $\vec{GA} + 2\vec{GI} = \vec{0}$.

3° En déduire les coordonnées du centre de gravité d'un triangle.

43. On donne quatre points A (x_0, y_0, z_0); B (x_1, y_1, z_1); C (x_2, y_2, z_2) et D (x_3, y_3, z_3).

1° Trouver les coordonnées des milieux des arêtes et des centres de gravité de chaque face du tétraèdre ABCD.

2° Montrer que les droites qui joignent les milieux de deux arêtes opposées et celles qui joignent chaque sommet au centre de gravité de la face opposée sont concourantes en un point G dont on calculera les coordonnées.

44. Dans le repère orthonormé $Oxyz$ on donne les vecteurs $\vec{OA} (a, b, c)$ et $\vec{OB} (a', b', c')$, non colinéaires.

1° Montrer que les composantes scalaires x, y, z d'un vecteur OM perpendiculaire au plan OAB vérifient le système : $ax + by + cz = 0$; $a'x + b'y + c'z = 0$.

2° Montrer que x, y, z sont proportionnels à $bc' - b'c$; $ca' - c'a$; $ab' - a'b$.

45. Dans le repère orthonormé $Oxyz$ on donne le point $A (2 ; -3 ; 5)$ et les droites D_1 et D_2 définies par les systèmes :

$$D_1 : x = y = z ; \quad D_2 : x - 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3}.$$

1° Déterminer un système de paramètres directeurs de la droite Δ passant par le point A et orthogonale aux droites D_1 et D_2 .

2° Écrire les équations de la droite Δ et trouver ses intersections avec les plans de coordonnées.

46. Dans le repère orthonormé $Oxyz$ on construit les vecteurs unitaires $\vec{OI} (a, b, c)$; $\vec{OJ} (a', b', c')$ et $\vec{OK} (a'', b'', c'')$ tels que le trièdre $OIJK$ soit trirectangle.

1° Écrire six relations indépendantes liant les composantes de ces vecteurs.

2° Déterminer les composantes scalaires des vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ des axes Ox, Oy, Oz dans le repère orthonormé $OIJK$. En déduire six nouvelles relations liant les composantes de $\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK}$.

— Déterminer les paramètres directeurs, puis les cosinus directeurs des droites Δ qui, dans un repère orthonormé $Oxyz$, vérifient les conditions suivantes :

47. Δ est parallèle au plan xOy et perpendiculaire à la droite D de paramètres directeurs $(2, -1, 0)$.

48. Δ fait un angle de 60° avec Oz et est perpendiculaire à la droite D de paramètres directeurs $(0, 1, -1)$.

49. Δ fait un angle de 45° avec l'axe Oz et est perpendiculaire à la droite D d'équations $x = y = z$.

BARYCENTRE

26. Existence et définition. — Considérons un ensemble de n points de l'espace A_1, A_2, \dots, A_n (pas nécessairement tous distincts) affectés respectivement des coefficients réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

 système $A_1(\alpha_1), A_2(\alpha_2), \dots, A_n(\alpha_n)$.

Proposons-nous de déterminer s'il existe un point G vérifiant la relation :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \quad (1)$$

soit en abrégé : $\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Prenons une origine O . La relation (1) équivaut à :

$$\alpha_1 (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$$

donc à : $\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{OG}$. (2)

1^o Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$, on obtient :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \quad (3)$$

Cette relation vectorielle détermine le vecteur \overrightarrow{OG} et par suite le point G d'une façon unique (fig. 21) :

Si la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ n'est pas nulle, il existe un point unique G , appelé barycentre du système $A_1(\alpha_1), A_2(\alpha_2), \dots, A_n(\alpha_n)$ et défini par la relation :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}. \quad (1)$$

La relation (2) étant valable pour tout point O , on peut écrire pour tout point M de l'espace :

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}. \quad (4)$$

On peut d'ailleurs vérifier que : $\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum \alpha_i (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}) = (\sum \alpha_i) \overrightarrow{MG}$ car $\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

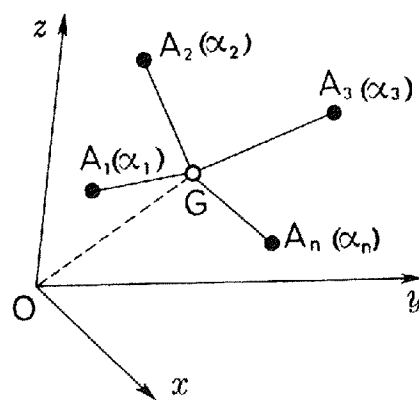


Fig. 21

2° Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$, la relation (2) s'écrit : $\vec{U} = \vec{0}$, en posant :

$$\vec{U} = \alpha_1 \vec{OA_1} + \alpha_2 \vec{OA_2} + \dots + \alpha_n \vec{OA_n}. \quad (5)$$

Si ce vecteur \vec{U} est nul, la relation (1) est vérifiée pour tout point G de l'espace. Sinon, la relation (1) est impossible et il n'y a pas de barycentre.

Pour tout point M de l'espace, on obtient lorsque $\Sigma \alpha_i = 0$:

$$\Sigma \alpha_i \vec{MA_i} = \Sigma \alpha_i (\vec{MO} + \vec{OA_i}) = \Sigma \alpha_i \vec{OA_i} = \vec{U} \quad \text{car} \quad (\Sigma \alpha_i) \vec{MO} = \vec{0}.$$

soit :

$$\boxed{\alpha_1 \vec{MA_1} + \alpha_2 \vec{MA_2} + \dots + \alpha_n \vec{MA_n} = \vec{U}.} \quad (6)$$

Si la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ est nulle, le système n'admet pas de barycentre déterminé, mais la somme $\alpha_1 \vec{MA_1} + \alpha_2 \vec{MA_2} + \dots + \alpha_n \vec{MA_n}$ est égale à un vecteur \vec{U} indépendant du point M.

En prenant le point M en A_1 et en désignant par B_1 le barycentre du système $A_2 (\alpha_2)$, $A_3 (\alpha_3)$, ..., $A_n (\alpha_n)$, on obtient :

$$\vec{U} = \alpha_2 \vec{A_1 A_2} + \dots + \alpha_n \vec{A_1 A_n} = (\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) \vec{A_1 B_1}$$

soit puisque $\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = -\alpha_1$:

$$\boxed{\vec{U} = \alpha_1 \vec{B_1 A_1}.} \quad (7)$$

27. Propriétés du barycentre. — 1° **Commutativité** : En effet, la relation (1) ou (3) est indépendante de l'ordre des points du système.

2° **Multiplication par un réel.** — La relation (1) peut s'écrire $\forall k \neq 0$:

$$k\alpha_1 \vec{GA_1} + k\alpha_2 \vec{GA_2} + \dots + k\alpha_n \vec{GA_n} = \vec{0}.$$

Le point G est donc le barycentre du système : $A_1 (k\alpha_1)$, $A_2 (k\alpha_2)$, ..., $A_n (k\alpha_n)$.

Par contre si $\Sigma \alpha_i = 0$ le vecteur \vec{U} correspondant est multiplié par k .

3° **Associativité.** — **Le barycentre G d'un système ne change pas si on remplace deux ou plusieurs points par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients.**

Soit par exemple $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta \neq 0$ et B le barycentre du système $A_1 (\alpha_1)$, $A_2 (\alpha_2)$, $A_3 (\alpha_3)$. D'après la formule (4) (n° 10) on obtient :

$$\alpha_1 \vec{GA_1} + \alpha_2 \vec{GA_2} + \alpha_3 \vec{GA_3} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \vec{GB} = \beta \vec{GB}.$$

et la relation (1) est alors équivalente à :

$$\beta \vec{GB} + \alpha_4 \vec{GA_4} + \dots + \alpha_n \vec{GA_n} = \vec{0}.$$

Le point G est le barycentre du système B (β), $A_4 (\alpha_4)$... $A_n (\alpha_n)$.

4° **Projection du barycentre.** — Soient A'_1, A'_2, \dots, A'_n et G' les projections (sur un plan ou une droite) des points A_1, A_2, \dots, A_n et de leur barycentre G. La relation (1) : $\Sigma \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$ donne en projection $\Sigma \alpha_i \vec{G'A'_i} = \vec{0}$.

Le point G' projection de G, est donc le barycentre du système formé par les projections $A'_1 (\alpha_1)$, $A'_2 (\alpha_2)$, ..., $A'_n (\alpha_n)$.

Lorsque $\Sigma \alpha_i = 0$, on voit de même que $\vec{U} = \Sigma \alpha_i \vec{MA_i}$ a pour projection

$$\vec{U}' = \Sigma \alpha_i \vec{M'A'_i}.$$

28. Coordonnées du barycentre.

Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées de A_i dans le repère cartésien $Oxyz$ et x, y, z les coordonnées du point G barycentre de l'ensemble des $A_i (\alpha_i)$.

La relation (3) entraîne :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} = \frac{\sum \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i}, \\ y &= \frac{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} = \frac{\sum \alpha_i y_i}{\sum \alpha_i}, \\ z &= \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} = \frac{\sum \alpha_i z_i}{\sum \alpha_i}. \end{aligned}$$

Si les points A_i appartiennent à un plan P , en prenant les axes Ox et Oy dans P , on obtient $z = 0$, donc G appartient au plan P .

Si les points A_i appartiennent à une droite D , en prenant D pour axe Oz , on obtient $x = y = 0$, donc G appartient à la droite D .

29. Droite définie par deux points. — Soit à déterminer paramétriquement (fig. 13) la droite D définie par les points $A (x_1, y_1, z_1)$ et $B (x_2, y_2, z_2)$.

Il est souvent avantageux de considérer tout point $M (x, y, z)$ de la droite AB comme le barycentre du système $A (1), B (\lambda)$. On obtient (n° 28) :

$$\overrightarrow{MA} + \lambda \overrightarrow{MB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}.$$

Soit :

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad | \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad | \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}} \quad (4)$$

Ce système constitue une représentation paramétrique de la droite AB car à toute valeur de λ correspond un point M de AB et réciproquement tout point M de la droite

AB correspond à λ défini par : $\overrightarrow{MA} + \lambda \overrightarrow{MB} = \vec{0} \iff \lambda = -\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}$.

Aux valeurs négatives de λ correspondent les points M extérieurs au segment AB et si λ tend vers -1 , on obtient le point à l'infini de D .

Aux valeurs positives de λ correspondent les points du segment AB . Le point A correspond à $\lambda = 0$, le point B à λ infini ($\frac{1}{\lambda} = 0$) et le milieu I de AB à $\lambda = 1$.

Deux points M et M' correspondants à deux valeurs opposées λ et λ' du paramètre sont conjugués harmoniques par rapport à A et B :

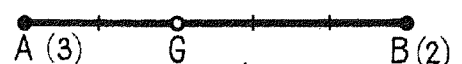
$$\lambda + \lambda' = 0 \iff \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} + \frac{\overrightarrow{M'A}}{\overrightarrow{M'B}} = 0 \iff (ABMM') = -1.$$

REMARQUE. — En géométrie plane la représentation paramétrique ci-dessus de la droite définie par $A (x_1, y_1)$ et $B (x_2, y_2)$ se réduit à :

$$\overrightarrow{MA} + \lambda \overrightarrow{MB} = \vec{0} \iff \boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad | \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}}$$

30. Construction d'un barycentre.

1° **Barycentre du système** $A (\alpha), B (\beta)$. — Le barycentre G de ce système est défini par : $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff \frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GB}} = -\frac{\beta}{\alpha}$.



C'est donc le point de la droite AB qui divise AB dans

Fig. 22

le rapport $-\frac{\beta}{\alpha}$ (fig. 22). Ainsi le barycentre du système A (1), B (1) est le milieu I de AB, le barycentre du système A (α'), A (α'') est le point A lui-même.

2° Cas général. — En remplaçant deux points du système donné par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients, on obtient un système avec un point de moins. En répétant cette opération on finit par se ramener au cas de deux points.

Remarquons qu'il est parfois avantageux d'effectuer l'opération inverse en remplaçant le point A ($\alpha' + \alpha''$) par exemple par le système A (α'), A (α'') ou par un système A' (α'), A'' (α'') admettant A pour barycentre.

31. Barycentre du système A (α), B (β), C (γ). — Désignons par D ($\beta + \gamma$) le barycentre du système B (β), C (γ). On obtient (fig. 23) :

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \alpha \vec{GA} + (\beta + \gamma) \vec{GD} = \vec{0}.$$

Le point G est le barycentre du système A (α), D ($\beta + \gamma$). Il appartient donc à la droite AD et divise AD dans le rapport $-\frac{\beta + \gamma}{\alpha}$. En construisant de même E ($\gamma + \alpha$), barycentre de C (γ) et A (α), puis F ($\alpha + \beta$) barycentre de A (α) et B (β), on voit que G appartient aux trois droites AD, BE et CF, nécessairement concourantes.

REMARQUE. — Réciproquement tout point M du plan du triangle ABC peut être considéré comme le barycentre d'un système A (α), B (β), C (γ). Si D désigne l'intersection des droites AM et BC, il suffit pour cela que α, β, γ vérifient les relations :

$$\beta \vec{DB} + \gamma \vec{DC} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \alpha \vec{MA} + (\beta + \gamma) \vec{MD} = \vec{0} \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\frac{\beta}{DC} = \frac{\gamma}{BD} = \frac{\beta + \gamma}{BC} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{MD} = -\frac{(\beta + \gamma)}{MA} \iff \frac{\alpha}{MD \cdot BC} = \frac{\beta}{MA \cdot CD} = \frac{\gamma}{MA \cdot DB}.$$

Les trois nombres α, β, γ , définis à un facteur près, sont appelés coordonnées barycentriques du point M (α, β, γ) par rapport au triangle ABC.

Ces 3 nombres α, β, γ caractérisent le point M et déterminent sa position dans le plan du triangle ABC (Cf. exercices nos 54, 55 et 56).

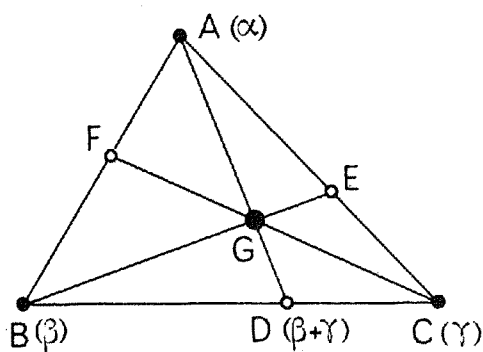


Fig. 23

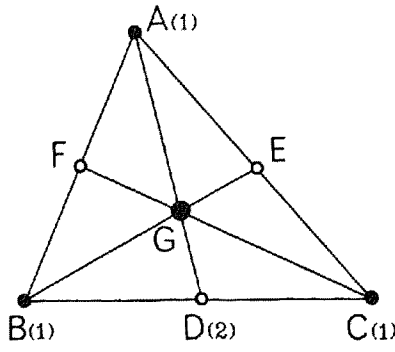


Fig. 24

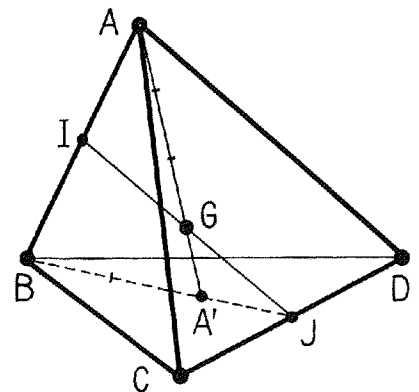


Fig. 25

32. Centre de gravité d'un triangle ABC. — Soit à déterminer le barycentre G du système A (1), B (1), C (1). En désignant par D, E, F les milieux respectifs de BC, CA et AB (fig. 24), G est le barycentre du système A (1), D (2). Le point G appartient à la médiane AD et par analogie aux médianes BE et CF. C'est le point de concours des médianes du triangle ABC. La relation $\vec{GA} + 2 \vec{GD} = \vec{0}$ ou $\vec{DA} = 3 \vec{DG}$ montre que G est situé au tiers de DA à partir de D ; donc (n° 26) :

Le centre de gravité du triangle ABC est défini par la relation vectorielle :

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

et pour tout point M de l'espace : $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3 \vec{MG}.$

Dans le plan rapporté au triangle ABC le point G est le point de coordonnées barycentriques (1, 1, 1).

Si G' désigne le centre de gravité d'un triangle A'B'C' du plan ABC ou de l'espace les relations : $3 \vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ et $3 \vec{OG}' = \vec{OA}' + \vec{OB}' + \vec{OC}'$ entraînent par différence :

$$3 \vec{GG}' = \vec{AA}' + \vec{BB}' + \vec{CC}'.$$

Pour que deux triangles ABC et A'B'C' du plan ou de l'espace aient même centre de gravité il faut et il suffit que : $\vec{AA}' + \vec{BB}' + \vec{CC}' = \vec{0}$.

Relation qui s'écrit aussi :

$$\vec{AB}' + \vec{BC}' + \vec{CA}' = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{AA}' + \vec{BC}' + \vec{CB}' = \vec{0}.$$

33. Centre de gravité du tétraèdre ABCD. — C'est le barycentre G du système A (1), B (1), C (1), D (1). Désignons par I et J les milieux de AB et CD et par A' le centre de gravité du triangle BCD (fig. 25). Le point G est le barycentre du système I (2), J (2) ainsi que celui du système A (1), A' (3). Donc :

$$2 \vec{GI} + 2 \vec{GJ} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{GA} + 3 \vec{GA}' = \vec{0}.$$

Le point G est donc le milieu de chacun des trois segments tels que IJ joignant les milieux de deux arêtes opposées telles que AB et CD. Il est d'autre part situé sur chacun des segments tels que AA' joignant un sommet A au centre de gravité de la face opposée BCD, au quart à partir de cette face.

$$\forall M \text{ de l'espace :} \quad \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4 \vec{MG}.$$

Remarquons que le point G existe même si les 4 points ABCD sont situés dans un même plan ou sur une même droite.

Si G' est le centre de gravité du tétraèdre A'B'C'D', on voit, comme pour le triangle que : $4 \vec{GG}' = \vec{AA}' + \vec{BB}' + \vec{CC}' + \vec{DD}'$. Pour que G et G' soient confondus il faut et il suffit que :

$$\vec{AA}' + \vec{BB}' + \vec{CC}' + \vec{DD}' = \vec{0}.$$

34. Transformation de la somme : $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC}$.

1° Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, désignons par G le barycentre de l'ensemble A (α), B (β) et C (γ). La relation (4) du n° 26 donne :

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \vec{MG}.$$

Elle permet de remplacer par un seul vecteur une somme de trois vecteurs.

2° Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, le vecteur $\vec{V} = \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC}$ est indépendant du point M (n° 26). En particulier : $\vec{V} = \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC}$.

35. Transformation de la somme : $\alpha \overline{MA^2} + \beta \overline{MB^2} + \gamma \overline{MC^2}$.

1° Supposons d'abord $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et soit G le barycentre (n° 27) du système : A (α), B (β), C (γ). On peut écrire :

$$\alpha \overline{MA^2} + \beta \overline{MB^2} + \gamma \overline{MC^2} = \alpha (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + \beta (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + \gamma (\vec{MG} + \vec{GC})^2.$$

Compte tenu de la relation : $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$, qui entraîne :

$2 \alpha \vec{MG} \cdot \vec{GA} + 2 \beta \vec{MG} \cdot \vec{GB} + 2 \gamma \vec{MG} \cdot \vec{GC} = \vec{0}$, on obtient la relation de Leibniz :

$$\alpha \overline{MA^2} + \beta \overline{MB^2} + \gamma \overline{MC^2} = (\alpha + \beta + \gamma) \overline{MG^2} + \alpha \overline{GA^2} + \beta \overline{GB^2} + \gamma \overline{GC^2}. \quad (1)$$

Il suffit de retenir que :

$$\alpha \overline{MA^2} + \beta \overline{MB^2} + \gamma \overline{MC^2} = (\alpha + \beta + \gamma) \overline{MG^2} + h. \quad (2)$$

La constante h est indépendante de M et, en plaçant M en G , on retrouve sa valeur :

$$h = \alpha \overline{GA}^2 + \beta \overline{GB}^2 + \gamma \overline{GC}^2. \quad (3)$$

On obtient la valeur de h en fonction des données en plaçant M successivement en A , B et C et en combinant linéairement les relations obtenues :

$$\begin{array}{l|l} \alpha & 0 + \beta \overline{AB}^2 + \gamma \overline{AC}^2 = (\alpha + \beta + \gamma) \overline{GA}^2 + h \\ \beta & \alpha \overline{BA}^2 + 0 + \gamma \overline{BC}^2 = (\alpha + \beta + \gamma) \overline{GB}^2 + h \\ \gamma & \alpha \overline{CA}^2 + \beta \overline{CB}^2 + 0 = (\alpha + \beta + \gamma) \overline{GC}^2 + h \end{array} \quad (4)$$

$$2(\alpha\beta \overline{AB}^2 + \beta\gamma \overline{BC}^2 + \gamma\alpha \overline{CA}^2) = (\alpha + \beta + \gamma) h + h(\alpha + \beta + \gamma)$$

soit :

$$h = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha\beta \overline{AB}^2 + \beta\gamma \overline{BC}^2 + \gamma\alpha \overline{CA}^2) \quad (5)$$

Cette valeur permet alors de calculer \overline{GA}^2 , \overline{GB}^2 , \overline{GC}^2 par les formules (4). On obtient finalement la formule générale (valable quel que soit le nombre de points) :

$$\Sigma \alpha \overline{MA}^2 = (\Sigma \alpha) \overline{MG}^2 + \frac{1}{\Sigma \alpha} \Sigma \alpha\beta \overline{AB}^2. \quad (6)$$

2° Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, la somme $\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} + \gamma \overline{MC}$ est un vecteur \vec{U} , indépendant du point M (n° 26). Avec une origine donnée O on peut écrire :

$$\alpha \overline{MA}^2 + \beta \overline{MB}^2 + \gamma \overline{MC}^2 = \alpha (\overline{MO} + \overline{OA})^2 + \beta (\overline{MO} + \overline{OB})^2 + \gamma (\overline{MO} + \overline{OC})^2.$$

Compte tenu des relations : $(\alpha + \beta + \gamma) \overline{MO}^2 = 0$ et

$$2\alpha \overline{MO} \cdot \overline{OA} + 2\beta \overline{MO} \cdot \overline{OB} + 2\gamma \overline{MO} \cdot \overline{OC} = 2 \overline{MO} \cdot (\alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB} + \gamma \overline{OC}) = 2 \overline{MO} \cdot \vec{U}.$$

On obtient la relation :

$$\alpha \overline{MA}^2 + \beta \overline{MB}^2 + \gamma \overline{MC}^2 = -2 \vec{U} \cdot \overline{OM} + h \quad (7)$$

avec

$$h = \alpha \overline{OA}^2 + \beta \overline{OB}^2 + \gamma \overline{OC}^2. \quad (8)$$

La constante h est indépendante du point M , mais dépend de l'origine O . En prenant cette origine en A , on obtient :

$$\vec{U} = \beta \overline{AB} + \gamma \overline{AC} \quad \text{et} \quad h = \beta \overline{AB}^2 + \gamma \overline{AC}^2. \quad (9)$$

36. Lieux géométriques : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$.

1° Pour $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, cette relation équivaut (formule 2) à :

$$(\alpha + \beta + \gamma) \overline{MG}^2 + h = k \iff \overline{GM}^2 = \frac{k - h}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Donc si $k - h$ et $\alpha + \beta + \gamma$ sont de même signe :

Pour $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, le lieu géométrique des points M tels que :

$\alpha \overline{MA}^2 + \beta \overline{MB}^2 + \gamma \overline{MC}^2 = k$ est un cercle dans le plan (une sphère dans l'espace) dont le centre est le barycentre du système $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$.

Lorsque ce lieu existe, son rayon est $\rho = \sqrt{\frac{k - h}{\alpha + \beta + \gamma}}$.

2° Pour $\alpha + \beta + \gamma = 0$, la relation donnée équivaut (formule 7) à :

$$-2 \vec{U} \cdot \overline{OM} + h = k \iff 2 \vec{U} \cdot \overline{OM} = h - k.$$

La projection H du point M sur le support de $\overline{OP} = 2 \vec{U}$ est un point fixe :

Pour $\alpha + \beta + \gamma = 0$, le lieu géométrique des points M tels que : $\alpha \overline{MA}^2 + \beta \overline{MB}^2 + \gamma \overline{MC}^2 = k$ est une droite dans le plan (un plan dans l'espace) perpendiculaire au vecteur \vec{U} attaché au système A (α), B (β), C (γ).

EXERCICES

— Déterminer les coordonnées du barycentre G des points A (α); B (β) et C (γ) dans les cas suivants :

$$50. \quad A(2; 3; -1); \alpha = 2 \quad B(-3; 1; 4); \beta = -1 \quad C(4; 5; -9); \gamma = 3.$$

$$51. \quad A(0; 1; -1); \alpha = 1 \quad B(2; 0; 3); \beta = 2 \quad C(2; 1; 0); \gamma = 1.$$

$$52. \quad A(2; 0; 0); \alpha = 1 \quad B(0; 3; 0); \beta = 1 \quad C(0; 0; 4); \gamma = 1.$$

53. On donne trois points A ($x_0; y_0; z_0$), B ($x_1; y_1; z_1$), C ($x_2; y_2; z_2$) non alignés.

1° Déterminer les coordonnées du barycentre des points A (1); B (λ) et C (μ) où l'on suppose $1 + \lambda + \mu \neq 0$.

2° En déduire que le système d'équations :

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1 + \mu x_2}{1 + \lambda + \mu}; \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1 + \mu y_2}{1 + \lambda + \mu}; \quad z = \frac{z_0 + \lambda z_1 + \mu z_2}{1 + \lambda + \mu},$$

où λ et μ sont deux paramètres réels, constitue une représentation paramétrique du plan ABC.

54. Dans le plan du triangle ABC de côtés a, b, c et de périmètre $2p$, on désigne par M (α, β, γ), le barycentre du système A (α), B (β), C (γ).

1° Démontrer que le centre du cercle inscrit est le point I (a, b, c) et que les centres des cercles exinscrits sont respectivement J ($-a, b, c$), K ($a, -b, c$) et L ($a, b, -c$).

$$2^\circ \text{ Établir que : } \frac{\vec{AI}}{p-a} = \frac{\vec{AJ}}{p} = \frac{\vec{IJ}}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\vec{KA}}{p-c} = \frac{\vec{AL}}{p-b} = \frac{\vec{KL}}{a}.$$

3° Démontrer, pour tout point O de l'espace, la relation :

$$(p-a) \vec{OJ} + (p-b) \vec{OK} + (p-c) \vec{OL} - p \vec{OI} = \vec{0},$$

et que dans le système I ($-p$), J ($p-a$), K ($p-b$), L ($p-c$) chaque point est le barycentre du système formé par les trois autres.

55. On considère un triangle ABC, dans lequel on désigne par D, E, F les milieux des côtés BC, CA et AB, par A, B, C les angles du triangle et on pose : $\text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C = \Sigma$.

1° Montrer que le barycentre du système A ($\text{tg } A$), B ($\text{tg } B$), C ($\text{tg } C$) est le point H ($\text{tg } A, \text{tg } B, \text{tg } C$), orthocentre du triangle ABC.

2° Établir que le barycentre des points A ($\text{tg } B + \text{tg } C$), B ($\text{tg } C + \text{tg } A$), C ($\text{tg } A + \text{tg } B$) est l'orthocentre du triangle DEF et par suite le centre du cercle ABC, puis que le point ω barycentre de A ($\Sigma + \text{tg } A$), B ($\Sigma + \text{tg } B$), C ($\Sigma + \text{tg } C$) est le centre du cercle d'Euler DEF du triangle ABC.

3° Montrer que ω est le barycentre du système O (2Σ), H (2Σ) et que le centre de gravité G du triangle ABC est le barycentre du système O (2Σ), H (Σ). En déduire la position relative des quatre points H, G, O, ω .

56. 1° Démontrer que, lorsque le point M est le barycentre du système A (α), B (β), C (γ), les aires algébriques des triangles MBC, MCA, MAB sont proportionnelles à α, β, γ . (L'aire MBC sera affectée du signe + ou du signe - suivant que A et M sont ou non du même côté de BC.)

2° En déduire qu'à tout point M du plan ABC on peut affecter trois nombres (α, β, γ) définis à un facteur près, tel que le point M (α, β, γ) soit le barycentre du système A (α), B (β), C (γ). Les nombres α, β, γ sont dits *coordonnées barycentriques* du point M par rapport au triangle ABC.

3° Vérifier ainsi les résultats obtenus aux exercices précédents pour les centres des cercles inscrit ou exinscrits, le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle ABC. On commencera par montrer que ce dernier est le point O ($\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$).

57. On construit le point I barycentre de A (α_1), B (β_1) et C (γ_1), le point J barycentre de A (α_2), B (β_2) et C (γ_2) et enfin M barycentre de A ($\alpha_1 + k\alpha_2$), B ($\beta_1 + k\beta_2$) et C ($\gamma_1 + k\gamma_2$).

$$1^\circ \text{ Démontrer que } (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \vec{MI} + k(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \vec{MJ} = \vec{0}.$$

2° Lieu du point M lorsque k varie, les autres coefficients restant fixes ?

58. Dans le plan du triangle ABC, on désigne par M (x, y, z) le barycentre du système A (x), B (y), C (z) et on considère les points A' ($0, \beta, -\gamma$), B' ($-\alpha, 0, \gamma$) et C' ($\alpha, -\beta, 0$).

Établir, pour tout point M, la relation :

$$(\beta - \gamma) \overrightarrow{MA'} + (\gamma - \alpha) \overrightarrow{MB'} + (\alpha - \beta) \overrightarrow{MC'} = \vec{0}. \quad (1)$$

En prenant M en A', en déduire que les points A', B', C' sont alignés sur une droite Δ (α, β, γ).
En considérant tout point M (x, y, z) de Δ comme le barycentre de B' [$\lambda(\gamma - \alpha)$] et de C' [$\mu(\alpha - \beta)$]

démontrer que : $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0$. (2)

59. Étant donné un triangle ABC de côtés a, b, c on désigne par M (α, β, γ) le barycentre du système A (α), B (β), C (γ) et par R et r les rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit à ABC.

1° Démontrer que les points I (a, b, c), J ($-a, b, c$), K ($a, -b, c$) et L ($a, b, -c$) sont respectivement les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC. Établir les relations telles que :

$$a \overline{IA^2} + b \overline{IB^2} + c \overline{IC^2} = a \overline{JA^2} - b \overline{JB^2} - c \overline{JC^2} = abc$$

et calculer $\overline{AI^2}$, $\overline{AJ^2}$, $\overline{AK^2}$ et $\overline{AL^2}$.

2° Trouver les lieux des points M tels que :

$$b \overline{MB^2} + c \overline{MC^2} - a \overline{MA^2} = abc,$$

$$c \overline{MC^2} + a \overline{MA^2} - b \overline{MB^2} = abc,$$

$$a \overline{MA^2} + b \overline{MB^2} - c \overline{MC^2} = abc.$$

3° Ces lieux sont trois cercles de rayons ρ_a, ρ_b, ρ_c . Établir la relation :

$$\frac{1}{\rho_a^2} + \frac{1}{\rho_b^2} + \frac{1}{\rho_c^2} = \frac{1}{4Rr}.$$

60. On donne les points A, B, C non alignés et M est un point quelconque de l'espace. On considère les vecteurs : $\vec{V}_1 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$; $\vec{V}_2 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

1° Lieu du point M lorsque $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2|$.

2° Lieu du point M lorsque \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont perpendiculaires.

3° Lieu du point M lorsque $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = k$, constante donnée.

61. On donne les points A, B, C non alignés et M est un point quelconque de l'espace. On considère les vecteurs : $\vec{V}_1 = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$; $\vec{V}_2 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

1° Montrer que le vecteur \vec{V}_2 est un vecteur constant.

2° Trouver le lieu du point M lorsque $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = k$, constante donnée.

— On donne un triangle ABC et une constante k^2 . Trouver le lieu du point M dans les cas suivants :

62. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$.

63. $a MA^2 + b MB^2 + c MC^2 = k^2$.

64. $a MA^2 + b MB^2 - c MC^2 = k^2$.

65. $a MA^2 - b MB^2 - c MC^2 = k^2$.

66. $MA^2 \sin 2A + MB^2 \sin 2B + MC^2 \sin 2C = k^2$.

67. $MA^2 \operatorname{tg} A + MB^2 \operatorname{tg} B + MC^2 \operatorname{tg} C = k^2$.

TRANSFORMATIONS PONCTUELLES DU PLAN

37. Définition. — *Étant donnés deux ensembles de points A et B, on appelle transformation ponctuelle de l'ensemble A dans l'ensemble B, toute correspondance T qui, à tout point M de A, associe un point unique M' de B.*

La transformation ponctuelle T n'est autre qu'une *application* de l'ensemble ponctuel A dans l'ensemble ponctuel B. L'image M' de M est appelée le *transformé* ou l'*homologue* de M. On écrit :

$$M \xrightarrow{\quad T \quad} M' \quad \text{ou} \quad M' = T(M).$$

Lorsque les ensembles A et B sont identiques, on dit que T est une transformation ponctuelle dans A (ou de A sur lui-même). On peut ainsi définir une *transformation dans le plan*.

L'ensemble des transformés par T des différents points M d'une figure F est une figure F' appelée *transformée* ou *homologue* de la figure F dans la transformation ponctuelle T (fig. 26).

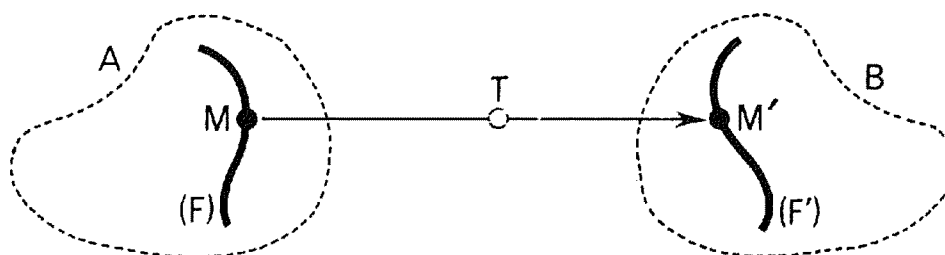


Fig. 26

Deux transformations ponctuelles T et T' sont équivalentes si tout point M a même transformé dans T et T' :

$$\forall M \in A : \quad M' = T(M) = T'(M). \quad \text{On écrit : } T = T'.$$

38. Éléments invariants. — 1^o Tout point M qui coïncide avec son homologue M' dans une transformation ponctuelle T est un *point double* de T ou un *point invariant* par T.

On appelle transformation identique la transformation ponctuelle I dans laquelle tout point M du plan est invariant.

$$\forall M \in (P) : \quad M = I(M).$$

2° Toute figure F qui coïncide avec sa transformée F' dans T est dite invariante dans T. La figure F est *invariante point par point* lorsque chacun de ses points est invariant. Elle est *globalement invariante* ou invariante dans son ensemble lorsque ses différents points s'échangent entre eux.

39. Transformations réciproques. — Une transformation ponctuelle T de A dans B est dite *bijective* si tout point M' de B est le transformé d'un point unique M de A.

Une telle transformation est donc à la fois injective et surjective :

$$M_1 \neq M_2 \implies M'_1 = T(M_1) \neq M'_2 = T(M_2) \quad (\text{injection})$$

$$\forall M' \in B, \exists M \in A \text{ tel que : } M' = T(M). \quad (\text{surjection})$$

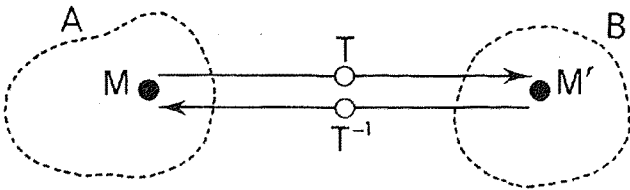


Fig. 27

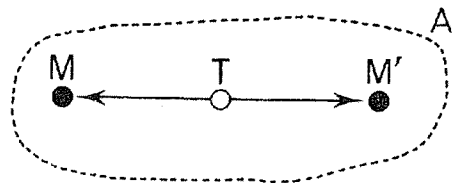


Fig. 28

Toute transformation bijective T de A dans B définit une transformation bijective de B dans A appelée transformation réciproque de T et notée T⁻¹.

En effet à tout point M' de B correspond un point unique M de A tel que M' = T(M) et réciproquement (fig. 27) :

$$M' = T(M) \iff M = T^{-1}(M').$$

Les deux bijections T et T⁻¹ sont dites réciproques l'une de l'autre.

Une transformation T d'un ensemble ponctuel A en lui-même est dite involutive lorsque tout point M est le transformé de son homologue M'.

$$\forall M \in A; \quad M' = T(M) \implies M = T(M').$$

Une telle transformation T est donc bijective et coïncide avec sa transformation réciproque (fig. 28) : T⁻¹ = T.

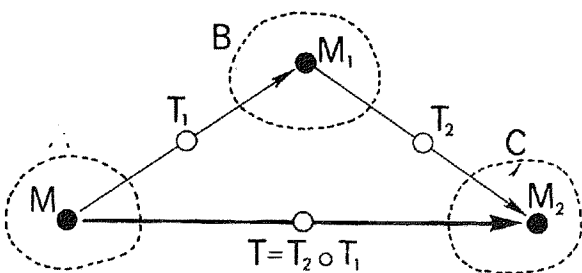


Fig. 29

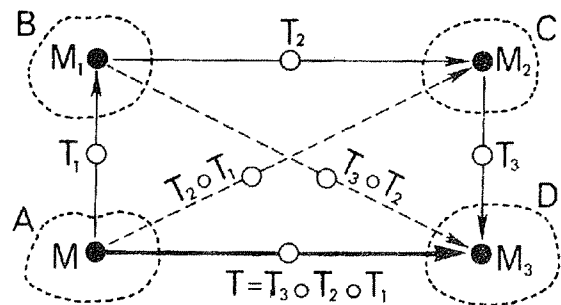


Fig. 30

40. Produit de transformations ponctuelles. — Soient T₁ une transformation de A dans B et T₂ une transformation de B dans C (fig. 29).

$$\forall M \in A, \exists M_1 \in B \text{ et } M_2 \in C \text{ tels que } M_1 = T_1(M) \text{ et } M_2 = T_2(M_1).$$

On fait ainsi correspondre à tout point M de A un point unique M₂ de C. On définit donc (n° 37) une transformation T de A dans C, appelée *produit des transformations T₁ et T₂*. On écrit :

$$M_2 = T(M) = T_2[T_1(M)] \iff M_2 = T_2 \circ T_1(M) \text{ et } T = T_2 \circ T_1.$$

Le produit $T = T_2 \circ T_1$ des transformations ponctuelles T_1 et T_2 , effectuées dans cet ordre, est donc une loi de composition interne dans l'ensemble des transformations ponctuelles.

De même le produit $T_3 \circ T_2 \circ T_1 = T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$ est le produit des transformations $T_2 \circ T_1$ et T_3 ; le produit $T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ est le produit des transformations $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ et T_4 , etc.

41. Propriétés. — 1° *Un produit de transformations est toujours associatif* car il en est ainsi d'un produit d'applications. Donc (fig. 30) :

$$T_3 \circ (T_2 \circ T_1) = (T_3 \circ T_2) \circ T_1.$$

Il est toujours possible de remplacer deux ou plusieurs transformations consécutives par leur produit ou inversement de remplacer une transformation par un produit équivalent.

2° *Le produit des transformations T_1 et T_2 est commutatif si : $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$.*

3° *Dans l'ensemble des transformations ponctuelles du plan la transformation identique I est l'élément neutre dans l'opération produit :*

$$\forall T : I \circ T = T \circ I = T.$$

4° *Le produit de deux transformations réciproques T et T^{-1} est la transformation identique :*

$$M' = T(M) \text{ et } M = T^{-1}(M') \implies T^{-1} \circ T(M) = M \text{ et } T \circ T^{-1}(M') = M'.$$

Donc :
$$T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = I.$$

Il en résulte que si T est une transformation involutive :

$$\forall M : T \circ T(M) = M \implies T \circ T = T^2 = I.$$

Si T_1 et T_2 sont deux transformations bijectives il en est de même de $T = T_2 \circ T_1$, car :

$$(T_2 \circ T_1) \circ (T_1^{-1} \circ T_2^{-1}) = T_2 \circ I \circ T_2^{-1} = I.$$

La transformation réciproque de $T_2 \circ T_1$ est donc $T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

42. Groupe de transformations. — Pour qu'un ensemble G de transformations ponctuelles du plan ait une structure de groupe pour le produit des transformations, il faut et il suffit, puisque l'associativité est toujours réalisée, que :

1° $\forall T_1 \in G, \forall T_2 \in G : T_2 \circ T_1 \in G.$

2° La transformation identique I appartienne à $G : I \in G.$

3° $\forall T \in G, \exists T^{-1} \in G$ telle que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I.$

On voit ainsi que seules des transformations bijectives peuvent former un groupe.

TRANSLATION PLANE

43. Définition. — *La translation plane est une transformation ponctuelle dans laquelle le vecteur joignant un point M à son transformé M' est égal à un vecteur donné \vec{T} du plan.*

Soit \vec{T} le vecteur fixe non nul du plan (fig. 31). Le point M' transformé du point M dans la translation de vecteur \vec{T} est défini par : $\overrightarrow{MM'} = \vec{T}.$

Lorsque M décrit une figure F , le point M' décrit la figure F' transformée de F dans la translation \vec{T} . Ce vecteur \vec{T} qui définit la translation est appelé *vecteur-translation*.

Remarquons que :

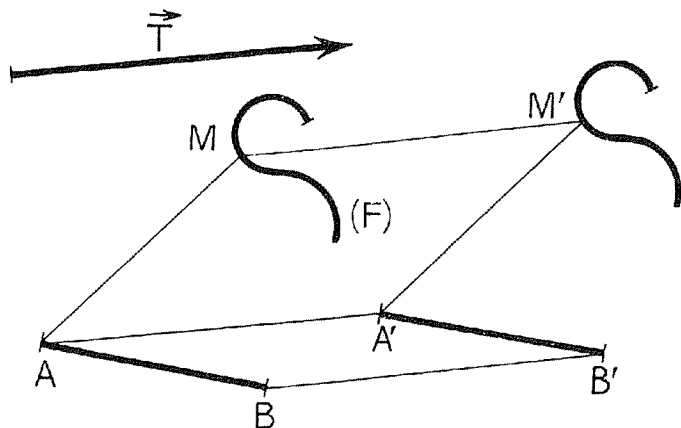


Fig. 31

1° Il n'existe pas de point double dans la translation de vecteur $\vec{T} \neq \vec{0}$.

2° Toute droite du plan parallèle au vecteur \vec{T} est globalement invariante dans la translation \vec{T} .

3° Si M' est le transformé de M dans la translation \vec{T} , le point M est le transformé de M' dans la translation de vecteur $-\vec{T}$. La translation plane n'est pas une transformation involutive car $T^{-1} \neq T$ (n° 39).

4° La translation de vecteur $\vec{0}$ est la transformation identique I .

44. Théorème. — *La translation plane transforme une figure F en une figure F' directement égale à la figure F .*

1° Soient A et B deux points fixes, M un point quelconque du plan, A' , B' et M' leurs homologues respectifs dans la translation \vec{T} (fig. 31). Par définition :

$$\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{MM'} = \vec{T}.$$

Ce qui entraîne : $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ et $\vec{AM} = \vec{A'M'}$.

Les angles (\vec{AB}, \vec{AM}) et $(\vec{A'B'}, \vec{A'M'})$ ont leurs côtés parallèles et de même sens, on a donc :

$$(\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{A'B'}, \vec{A'M'}).$$

On peut donc faire glisser le triangle ABM dans son plan pour le superposer au triangle $A'B'M'$; tout point M de la figure F coïncide avec son homologue M' lorsqu'on amène \vec{AB} sur $\vec{A'B'}$. Les figures F et F' sont dites directement égales. D'autre part l'égalité $\vec{AM} = \vec{A'M'}$ montre que tout vecteur est transformé en un vecteur égal.

45. Réciproque. — *Toute transformation ponctuelle plane dans laquelle le vecteur qui joint deux points quelconques est égal au vecteur qui joint leurs transformés est une translation.*

Soit A un point fixe, M un point variable, A' et M' leurs homologues dans la transformation considérée :

$$\vec{A'M'} = \vec{AM} \implies \vec{MM'} = \vec{AA'}.$$

Le point M' est donc le transformé de M dans la translation $\vec{AA'}$.

46. Transformées des figures élémentaires. — 1° Il résulte du n° 44 que la translation \vec{T} transforme un vecteur \vec{AM} en un vecteur égal $\vec{A'M'}$, une demi-droite Ax en une demi-droite parallèle et de même sens $A'x'$, une droite D en une droite D' de même direction, un angle orienté en un angle orienté égal, un cercle en un cercle égal.

2° Inversement toute droite D' parallèle à la droite D se déduit de cette dernière dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ joignant un point quelconque A de D à un point quelconque A' de D' (fig. 32).

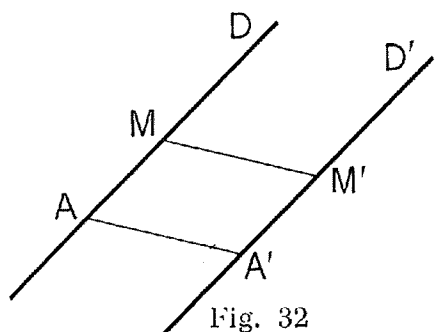


Fig. 32

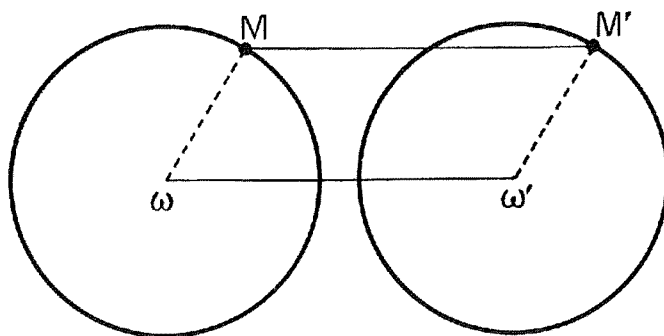


Fig. 33

3° **Tout cercle de centre ω' égal à un cercle de centre ω se déduit de ce dernier dans la translation de vecteur $\overrightarrow{\omega\omega'}$.**

En effet deux rayons parallèles et de même sens ωM et $\omega' M'$ sont tels que $\overrightarrow{\omega' M'} = \overrightarrow{\omega M}$ donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\omega\omega'}$ (fig. 33).

ROTATION PLANE

47. Définition. — Soit un point fixe O du plan et un angle orienté θ défini à $2k\pi$ près. A tout point M du plan (fig. 34) faisons correspondre le point M' défini par les égalités :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad \text{et} \quad OM' = OM.$$

Le point M' est le transformé du point M dans la rotation plane de centre O et d'angle θ . En abrégé : *Rotation* (O, θ).

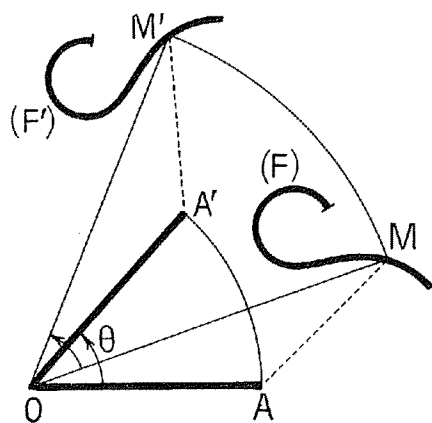


Fig. 34

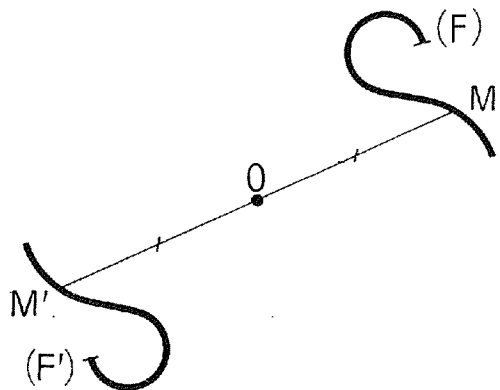


Fig. 35

Lorsque le point M décrit une figure F , son homologue M' décrit la figure F' transformée de F dans cette rotation.

1° Si θ est nul (à $2k\pi$ près) la rotation se réduit à la transformation identique. Lorsque θ est différent de $2k\pi$ le centre de rotation O est le seul point double de la transformation et tout cercle de centre O est globalement invariant dans la transformation.

2° Si $\theta = \pm \pi$ le centre de rotation O est le milieu de MM' (fig. 35). Les points M et M' sont symétriques par rapport O . Nous dirons dans ce cas que la rotation est la **symétrie-point de centre O** .

3° Le point M est le transformé de M' dans la rotation ($O, -\theta$). La rotation n'est pas une transformation involutive sauf si $\theta = \pm \pi$, c'est-à-dire si la rotation est une symétrie-point.

48. Théorème. — *La rotation plane transforme une figure F en une figure F' directement égale à la figure F.*

Soient O et A deux points fixes, M un point quelconque du plan (fig. 34). Leurs homologues respectifs dans la rotation (O, θ) sont O, A' et M'. Donc :

$$OA = OA'; \quad OM = OM'; \quad (\vec{OA}, \vec{OA}') = (\vec{OM}, \vec{OM}') = \theta + 2k\pi.$$

$$\text{On en déduit :} \quad (\vec{OA}, \vec{OA}') + (\vec{OA}', \vec{OM}) = (\vec{OA}', \vec{OM}) + (\vec{OM}, \vec{OM}').$$

$$\text{Soit :} \quad (\vec{OA}, \vec{OM}) = (\vec{OA}', \vec{OM}').$$

Les triangles OAM et OA'M' sont directement égaux. En faisant glisser la figure F sur son plan, de façon que \vec{OA} vienne sur \vec{OA}' , tout point M de la figure F coïncide avec son homologue M' de la figure F'. Les figures F et F' sont directement égales.

49. Remarque. — *L'angle de deux vecteurs homologues est égal à l'angle de rotation.*

Il résulte de ce qui précède que l'homologue du vecteur \vec{AM} est le vecteur $\vec{A'M'}$ et :

$$(\vec{OA}', \vec{A'M'}) = (\vec{OA}, \vec{AM}) \implies (\vec{AM}, \vec{OA}') + (\vec{OA}', \vec{A'M'}) = (\vec{OA}, \vec{AM}) + (\vec{AM}, \vec{OA}').$$

$$\text{Soit :} \quad (\vec{AM}, \vec{A'M'}) = (\vec{OA}, \vec{OA}') = \theta \pmod{2\pi}.$$

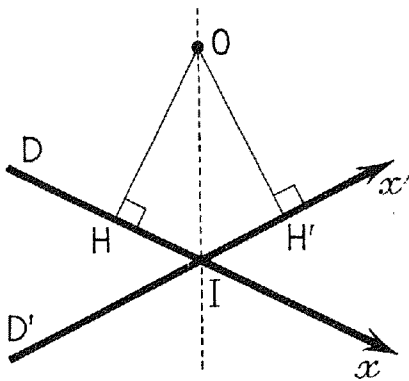


Fig. 36

50. Transformées des figures élémentaires. — La rotation transforme un axe \vec{D} en un axe \vec{D}' tel que $(\vec{D}, \vec{D}') = \theta$. Inversement, deux droites D et D' d'un même plan se correspondent dans toute rotation ayant pour centre un point équidistant de D et de D' et pour angle (\vec{OH}, \vec{OH}') où H et H' désignent les projections orthogonales de O sur les droites D et D' (fig. 36). La rotation transforme tout cercle en un cercle égal. Réciproquement, deux cercles égaux se correspondent dans toute rotation qui fait correspondre leurs centres.

HOMOTHÉTIE

51. Définition. — Soient un point fixe O et un nombre réel non nul k :

L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation ponctuelle qui, à tout point M, fait correspondre le point M' tel que $\vec{OM}' = k \vec{OM}$.

En abrégé : *Homothétie* (O, k) ou H (O, k).

Lorsque le point M décrit une figure F, le point M' décrit une figure F' homothétique de la figure F dans le rapport k.

L'homothétie est *positive* (ou directe) pour $k > 0$ (fig. 37), *negative* (ou inverse) pour $k < 0$ (fig. 38). Elle se réduit à la transformation identique pour $k = 1$ et à la symétrie-point de centre O pour $k = -1$.

Pour $k \neq -1$ la transformation n'est pas involutive car M est l'homologue de M' dans l'homothétie $(O, \frac{1}{k})$. Dans toute homothétie, le centre O est le seul point invariant.

Les points O, M, M' étant alignés, toute droite issue de O est invariante dans une homothétie de centre O.

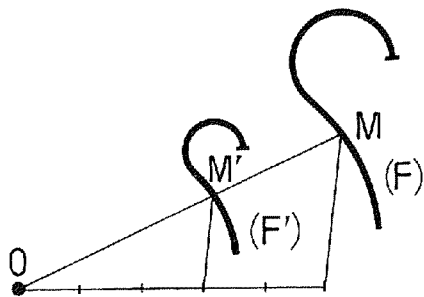


Fig. 37

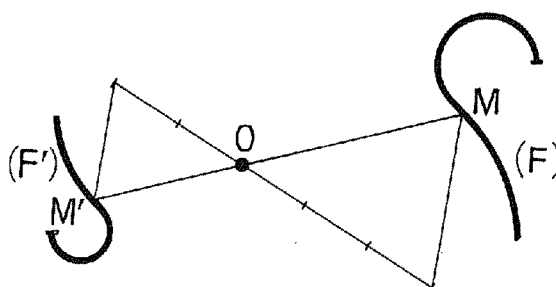


Fig. 38

52. Théorème. — Dans toute homothétie (O, k) , l'homologue d'un vecteur \vec{AB} est un vecteur $\vec{A'B'} = k \vec{AB}$.

Soit M' le transformé dans l'homothétie (O, k) , d'un point variable M du segment AB (fig. 39 et 40). On obtient :

$$\vec{A'M'} = \vec{OM'} - \vec{OA'} = k \vec{OM} - k \vec{OA} = k (\vec{OM} - \vec{OA}).$$

Donc :

$$\vec{A'M'} = k \vec{AM}.$$

Lorsque M décrit le vecteur \vec{AB} , le point M' décrit, sur la parallèle à AB issue de A', un vecteur $\vec{A'B'} = k \vec{AB}$.

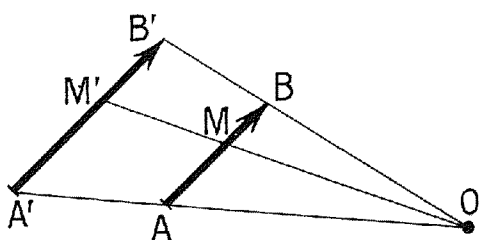


Fig. 39

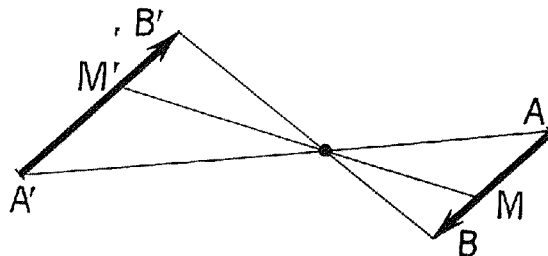


Fig. 40

53. Réciproque. — Toute transformation dans laquelle le vecteur qui joint deux points quelconques A et M et celui qui joint leurs transformés A' et M', vérifient la relation $\vec{A'M'} = k \vec{AM}$ est une homothétie pour $k \neq 1$, une translation pour $k = 1$.

1° Si $k \neq 1$, l'homothétie (O, k) qui transforme A en A', transforme M en M₁ tel que : $\vec{A'M_1} = k \vec{AM} = \vec{A'M'}$. Les points M' et M₁ sont confondus.

2° Si $k = 1$, $\vec{A'M'} = \vec{AM}$. La transformation est donc (n° 45) la translation de vecteur $\vec{AA'}$ qui apparaît ainsi comme un cas limite de l'homothétie (O, k) qui transforme A en A' lorsque k tend vers 1.

54. Transformées des figures élémentaires. — Il résulte du n° 52 que le transformé d'un axe est un axe parallèle au premier, de même sens si $k > 0$, de sens contraire, si $k < 0$.

La transformée d'une droite est une droite de même direction; le transformé d'un angle orienté (\vec{Ax}, \vec{Ay}) est un angle $(\vec{A'x'}, \vec{A'y'})$ dont les côtés sont parallèles à ceux du premier, de même sens si $k > 0$, de sens contraire si $k < 0$. L'homothétie d'un angle orienté est donc un angle égal. Il en résulte que l'homothétie d'un triangle ABC est un triangle A'B'C' dont les angles sont respectivement égaux à ceux du triangle

ABC et de même sens. Ces deux triangles sont dits *directement semblables*. Leurs côtés sont parallèles et le rapport de similitude est $|k|$.

L'homothétie du cercle (ω, R) est le cercle (ω', R') dont le centre ω' est l'homologue du point ω et dont le rayon est $R' = |k| R$.

SIMILITUDE DIRECTE DE CENTRE DONNÉ

55. Définition. — Soit un point fixe O , un réel positif k et un angle θ compris entre 0 et 2π radians :

On appelle similitude plane directe de centre O le produit commutatif de l'homothétie $H(O, k)$ par la rotation (O, θ) .

Cette similitude est notée $S(O, k, \theta)$ et (fig. 41) :

$$S(O, k, \theta) = R(O, \theta) \circ H(O, k) = H(O, k) \circ R(O, \theta).$$

Le réel k et l'angle θ sont respectivement le rapport et l'angle de la similitude S . La transformation réciproque de la similitude $S(O, k, \theta)$ est la similitude : $S^{-1}(O, \frac{1}{k}; -\theta)$.

La similitude directe de centre O n'est involutive que si $k = 1$ et $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, c'est-à-dire que si S coïncide avec la transformation identique ou avec la symétrie-point de centre O . La similitude S se réduit à une rotation si $k = 1$, à une homothétie si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

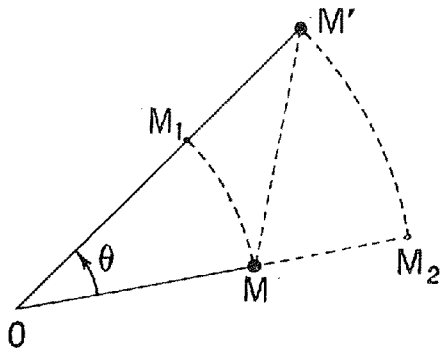


Fig. 41

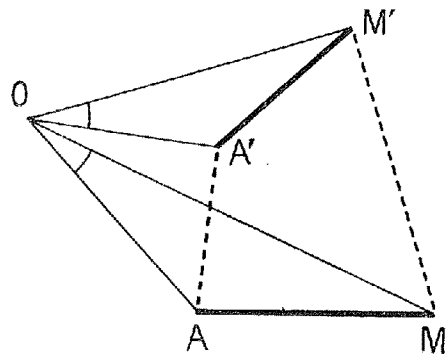


Fig. 42

56. Remarques. — 1° Si M' est l'homologue de M dans la similitude $S(O, k, \theta)$ le triangle OMM' est directement semblable à un triangle fixe.

Soient A un point fixe et M un point variable de la figure F (fig. 42). Leurs homologues A' et M' sont tels que :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad \text{et} \quad \frac{OM'}{OM} = \frac{OA'}{OA} = k.$$

Le triangle OMM' est directement semblable au triangle fixe OAA' . La similitude S est donc définie par son centre O , un point A et son homologue A' .

2° L'homologue d'un vecteur \overrightarrow{AM} est un vecteur $\overrightarrow{A'M'}$ tel que :

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta \quad \text{et} \quad A'M' = k AM.$$

En effet, l'homothétie $H(O, k)$ transforme \overrightarrow{AM} en un vecteur $\overrightarrow{A_1M_1}$ tel que $\overrightarrow{A_1M_1} = k \overrightarrow{AM}$ (n° 52) et la rotation $R(O, \theta)$ transforme $\overrightarrow{A_1M_1}$ en un vecteur de même module $\overrightarrow{A'M'}$ tel que : $(\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$ (n° 49).

On en déduit : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$ et $A'M' = A_1M_1 = k AM$.

3° L'homologue d'un triangle ABC est un triangle A'B'C' directement semblable au triangle ABC.

En effet :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'} = \theta &\implies (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'}) \\ &\implies (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Cette égalité angulaire jointe aux relations $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = k$ montre que les triangles ABC et A'B'C' sont directement semblables.

Si A et B sont fixes et si M décrit une figure F, l'homologue M' de M décrit une figure F' dite directement semblable à la figure F. Il en résulte que l'homologue d'une droite est une droite, l'homologue d'un angle orienté est un angle orienté égal, l'homologue d'un cercle (ω, R) est un cercle (ω', R') tel que ω' soit l'homologue de ω et que $R' = k R$.

EXERCICES

68. Dans un parallélogramme ABCD les sommets A et B sont fixes. On construit le triangle équilatéral de sens direct CDM. Trouver les lieux géométriques des points D et M lorsque le point C décrit une droite ou un cercle donné.

69. Un cercle ω de rayon R donné passe par un point fixe A. Un diamètre MN de ce cercle conserve une direction fixe. Déterminer les lieux géométriques des points M et N ainsi que l'enveloppe du cercle ω .

70. Deux cercles O et O' se coupent en A et B. Soient C et D les points diamétralement opposés à A dans ces deux cercles. Une sécante variable issue de A coupe en P le cercle O et en Q le cercle O'. La droite CP coupe en M la parallèle à CD menée par Q et la droite DQ coupe en N la parallèle à CD menée par P. Trouver les lieux géométriques des points M et N.

71. On donne un triangle fixe ABC et on construit le parallélogramme BCDE. Les perpendiculaires menées de D à AB et de E à AC se coupent en M. Trouver le lieu du point M lorsque D décrit une droite ou un cercle donné.

72. Construire un quadrilatère convexe ABCD connaissant :

1° Les longueurs AB et CD et les quatre angles.

2° Les longueurs AB, BC et CD et les angles A et D.

73. On donne un quadrilatère convexe ABCD et on construit les vecteurs $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CA}$. Montrer que l'on retrouve dans la figure ABDEF toutes les longueurs et tous les angles formés par le quadrilatère et ses diagonales.

74. Construire un trapèze ABCD de bases AB et CD connaissant :

1° L'angle A, les longueurs AD et BC, l'une des longueurs AB ou AC.

2° Les longueurs AC, BD et l'angle (AC, BD) des diagonales et en outre une base, un côté ou un des angles du trapèze.

75. Dans un trapèze isocèle de bases AB et CD, la diagonale AC est bissectrice de l'angle A.

1° On donne $AB = l$, $CD = l'$. Construire le trapèze. Discuter.

2° On donne $AB + CD = l$ et la longueur l' des diagonales. Construire le trapèze. Discuter.

76. On considère un cercle fixe C, de centre O, de rayon R et un point fixe A extérieur au cercle tel que $OA = d$. Soit MM' un diamètre variable du cercle C. La droite MA recoupe le cercle en Q et coupe en P la parallèle à OA issue de M'. La droite M'A recoupe le cercle en Q' et coupe en P' la parallèle à OA issue de M.

1° Montrer que la droite PP' passe par un point fixe.

2° Trouver le lieu géométrique des points P et P' .

77. Étant donné un triangle AMN , on construit les transformés B et C de A et N dans la rotation (M, α) où α désigne un angle donné, puis le transformé D de N dans la rotation (A, α) . Comparer les vecteurs \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{AD} et en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

78. 1° Quel est le lieu géométrique des centres des rotations qui, dans un plan, P transforment une droite donnée D en une droite donnée D' ?

2° Construire les centres ω et ω' des rotations qui transforment D en D' en faisant correspondre un point donné A de D à un point donné A' de D' .

79. 1° Quel est le lieu géométrique des centres des rotations qui, dans un plan P , transforment un cercle (O, R) en un cercle égal (O', R) ?

2° Construire le centre ω de la rotation qui en outre transforme un point donné A du premier cercle en un point donné A' du second.

80. Deux cercles égaux de centres respectifs O et O' se coupent en A et B .

1° Montrer que le cercle O' est l'homologue du cercle O dans une rotation de centre A .

2° Montrer que la droite qui joint un point M du cercle O à son homologue M' , dans la rotation définie ci-dessus, passe par le point B .

81. On donne un cercle fixe de centre O et un point fixe ω . On construit un triangle équilatéral ABC de centre ω dont le sommet A décrit le cercle O . Trouver les lieux géométriques des sommets B et C . Reprendre le même problème avec un carré $ABCD$ ou un hexagone régulier de centre ω .

82. Construire un segment AB connaissant son milieu O sachant que le point A appartient à un cercle (ou une droite) donné Γ et que le point B appartient à un cercle (ou une droite) donné Γ' .

83. Construire un triangle équilatéral ABC de sens direct connaissant le sommet A et sachant que B et C appartiennent respectivement à deux cercles (ou droites) donnés.

84. Incrire un carré $MNPQ$ dans un parallélogramme donné $ABCD$ en plaçant un sommet sur chacun des côtés de ce parallélogramme. (On commencera par montrer que le centre du carré coïncide avec celui du parallélogramme.)

85. On construit extérieurement à l'angle BAC du triangle ABC les segments AM , CN et BP respectivement perpendiculaires et égaux à BC , CA et AB .

1° Comparer les vecteurs \overrightarrow{MB} et \overrightarrow{PC} , puis \overrightarrow{MC} et \overrightarrow{NB} en module et en direction et montrer que les droites MA , NB et PC sont concourantes.

2° Soient O , I , J , K les milieux des segments BC , PN , NA et AP . Trouver la nature des triangles JMB et KMC .

3° On achève le parallélogramme $BACD$. Nature des triangles DNP , OJK et IBC ?

86. Les sommets B et C du triangle ABC sont fixes. Trouver les lieux géométriques des milieux des côtés AB et AC et du centre de gravité lorsque le sommet A décrit une droite Δ ou un cercle (Γ) donné.

87. Dans un quadrilatère $ABCD$ les sommets A , B et C sont fixes et on connaît la longueur AD . Trouver :

1° Les lieux des milieux de DA , DB et DC .

2° Le lieu du milieu du segment RS qui joint les milieux de AC et BD .

88. On donne deux droites fixes D et D' se coupant en O ; on projette un point variable M en A sur D et en B sur D' . Trouver le lieu géométrique du point M lorsque la droite AB a une direction donnée.

89. Soit un angle aigu xOy . Un point variable M de Oy se projette en A sur Ox et on mène par M un segment MP parallèle à Ox et de même sens tel que $MP = k MA$ où k est un nombre positif donné. Trouver le lieu géométrique du point P .

90. Un cercle variable est tangent à une droite fixe D en un point fixe A . Trouver les lieux géométriques des points de contact avec le cercle des tangentes parallèles à une direction donnée Δ .

91. Un cercle variable est tangent à deux droites sécantes données Ox et Oy . Trouver les lieux géométriques des points de contact avec le cercle des tangentes parallèles à une direction donnée Δ .

92. On donne un angle xOy et un point variable M intérieur à cet angle. Les parallèles menées par M à Ox et Oy coupent Oy en B et Ox en A de façon que $MA = k MB$ où k est un nombre donné. Trouver le lieu géométrique du point M .

93. Deux cercles inégaux O et O' sont tangents en A . On mène dans le premier une corde variable AB et dans l'autre la corde AC perpendiculaire à AB .

1° Montrer que la droite BC passe par un point fixe.

2° Trouver les lieux géométriques de la projection P de A sur la droite BC et du milieu M de BC .

94. Dans un triangle ABC les sommets B et C sont fixes et les médianes issues de B et C sont perpendiculaires.

1° Lieu géométrique de A . Démontrer que $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 5 \overline{BC}^2$.

2° Construire le triangle ABC connaissant l'angle BAC .

95. Construire un triangle ABC connaissant le sommet A , le centre de gravité G et sachant que les sommets B et C appartiennent à deux droites (ou cercles) donnés.

96. Étant donné un demi-cercle de diamètre AB , inscrire dans ce demi-cercle un carré $MNPQ$ de façon que M et N soient sur AB , P et Q sur l'arc du demi-cercle.

97. On donne un cercle C et une droite D . Construire un cercle dont le centre ω soit sur la droite D , passant par un point donné A de cette droite et tangent au cercle C .

98. On considère dans le plan une droite Δ , un point fixe A non situé sur Δ et un triangle rectangle isocèle variable ABC ayant le sommet de l'angle droit B sur Δ .

1° Lieu du sommet C lorsque B décrit Δ .

2° Lieu des milieux des côtés et du centre de gravité du triangle ABC .

99. Soit un triangle AOB rectangle en O . Un point variable M décrit la perpendiculaire en A à la droite AB . La perpendiculaire en O à OM coupe AB en M' .

1° Montrer que le triangle MOM' reste semblable à un triangle fixe.

2° Lieu du milieu de MM' et du sommet P du rectangle $MAM'P$.

100. On donne un cercle fixe de diamètre AB , un point M variable sur ce cercle et on construit le carré de sens direct $AMNP$. Trouver les lieux des points N et P .

101. Soit un parallélogramme $ABCD$ de centre O :

1° Montrer que tout parallélogramme inscrit $MNPQ$ a même centre O .

2° Construire un losange d'angles donnés inscrit dans ce parallélogramme.

102. 1° Montrer que toute similitude plane directe est définie par la donnée de deux vecteurs homologues \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{A'B'}$.

2° Construire l'homologue M' du point M .

103. 1° Démontrer que si les triangles OAA' et OBB' sont directement semblables il en est de même des triangles OAB et $OA'B'$.

2° En déduire que le centre de la similitude qui transforme \overrightarrow{AB} en $\overrightarrow{A'B'}$ est aussi celui d'une similitude qui transforme $\overrightarrow{AA'}$ en $\overrightarrow{BB'}$.



TRANSFORMATION : $z' = az + b$
57. Détermination analytique d'une transformation ponctuelle du plan.

Rapportons le plan au repère cartésien xOy . Les relations :

$$x' = f(x, y) \quad \text{et} \quad y' = g(x, y)$$

où $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont des fonctions données des variables indépendantes x et y définissent une transformation ponctuelle T qui au point $M(x, y)$ fait correspondre le point $M'(x', y')$.

EXEMPLE. — Dans le repère orthonormé xOy on considère la transformation T définie par les relations : $x' = -x$; $y' = \frac{-y(x+1)}{x-1}$.

1^o Quels sont les points $M(x, y)$ qui n'ont pas de transformé $M'(x', y')$?

2^o Quels sont les points invariants dans la transformation ?

3^o Soit A le point d'abscisse 1 sur Ox . Comparer les vecteurs \overrightarrow{AM} et $\overrightarrow{AM'}$ et en déduire une définition géométrique de la transformation T .

1^o Les points de la droite Δ d'équation $x = 1$ n'ont pas de transformé (fig. 43).

2^o Les points M invariants sont tels que $x' = x$, $y' = y$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $x = 0$. Les seuls points invariants sont ceux de l'axe $y'y$.

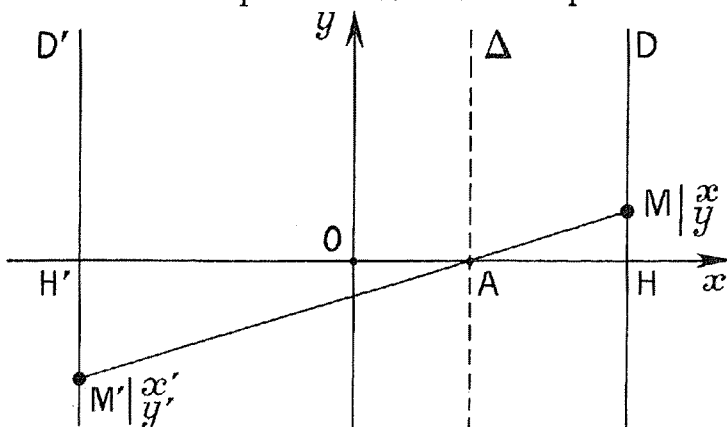


Fig. 43

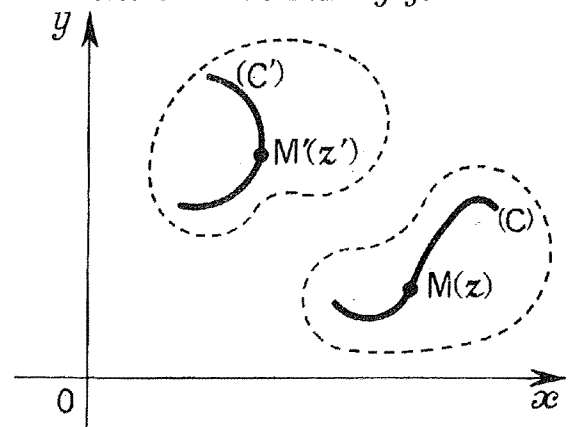


Fig. 44

3^o Des relations données, on déduit : $\frac{y'}{x'-1} = \frac{y}{x-1}$; les vecteurs \overrightarrow{AM} et $\overrightarrow{AM'}$ sont donc colinéaires et les points A , M et M' sont alignés. Soit D la parallèle à l'axe $y'y$ issue de M (avec $x \neq 1$). Le point M' est l'intersection de la droite AM avec la droite D' symétrique de la droite D par rapport à l'axe $y'y$.

Il en résulte que la transformation T est involutive.

58. Transformation définie par $z' = f(z)$ dans le plan complexe.

Rapportons le plan au repère orthonormé xOy (fig. 44) où \vec{u} et \vec{v} sont les vecteurs unitaires respectifs des axes Ox et Oy . Soit $M(x, y)$ l'image du nombre complexe $z = x + iy$ et supposons que la fonction $z' = f(z)$ soit définie pour tout complexe z . Au point $M(x, y)$ correspondra un point $M'(x', y')$, image du complexe $z' = x' + iy'$. On définit ainsi une transformation ponctuelle T dans le plan complexe :

$$M(x, y) \xrightarrow{T} M'(x', y').$$

La relation $z' = f(z)$ se nomme *opérateur* de la transformation ponctuelle T .

Rappelons les propriétés géométriques associées aux opérations dans le corps des complexes :

59. Addition de complexes. — L'addition de deux nombres complexes équivaut à l'addition de leurs vecteurs-images.

Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ (fig. 45) :

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Le vecteur $\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2$ a pour composantes $(a_1 + a_2)$ et $(b_1 + b_2)$. Donc M est l'image de $z = z_1 + z_2$ et

$$z = z_1 + z_2 \iff \vec{OM} = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2.$$

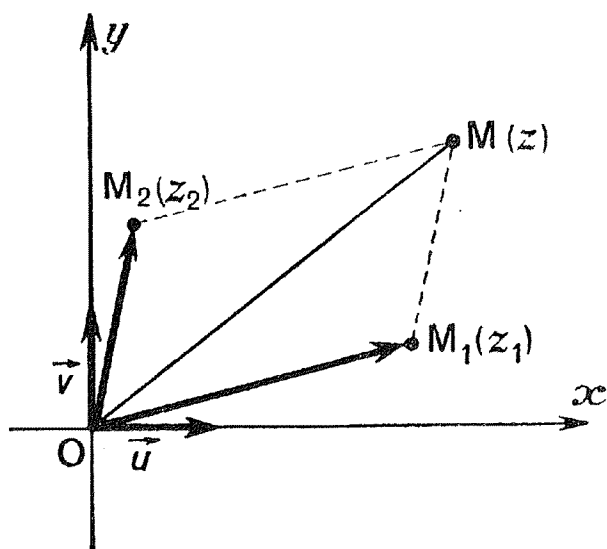


Fig. 45

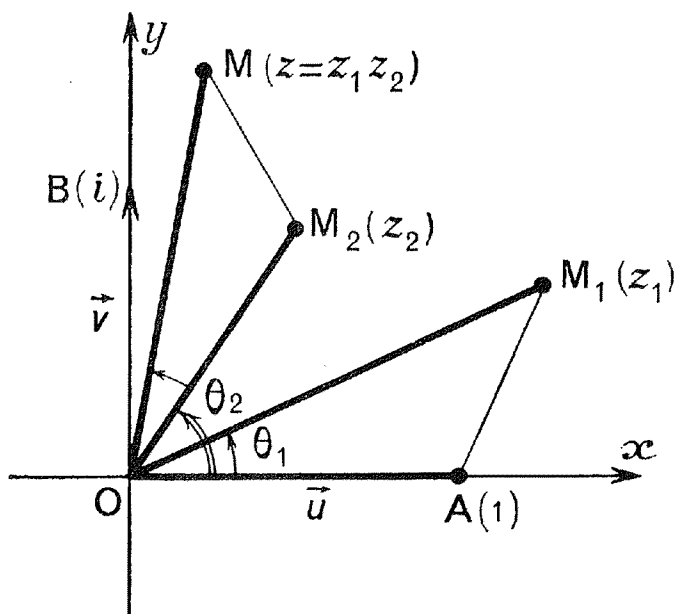


Fig. 46

60. Multiplication de deux complexes. — L'image M du produit $z = z_1 z_2$ est le transformé de M_2 , image de z_2 , dans la similitude $S(O, \rho_1, \theta_1)$ où ρ_1 et θ_1 sont respectivement le module et l'argument de z_1 .

Soit $z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, que nous notons $z_1 (\rho_1, \theta_1)$; puis $z_2 (\rho_2, \theta_2)$ et $z = z_1 z_2 = (\rho, \theta)$. On sait que : $\rho = \rho_1 \rho_2$ et $\theta = \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi}$.

On en déduit (fig. 46) : $(\vec{OM}_2, \vec{OM}) = (\vec{Ox}, \vec{OM}) - (\vec{Ox}, \vec{OM}_2) = \theta_1 + \theta_2 - \theta_2 = \theta_1$

et

$$\frac{OM}{OM_2} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2} = \rho_1.$$

Le point M est donc le transformé de M_2 dans la similitude $S(O, \rho_1, \theta_1)$ qui transforme le point $A [1, 0]$ en M_1 .

On démontrerait de même que M est le transformé du point M₁ dans la similitude S' (O, ρ₂, θ₂) qui transforme A [1, 0] en M₂.

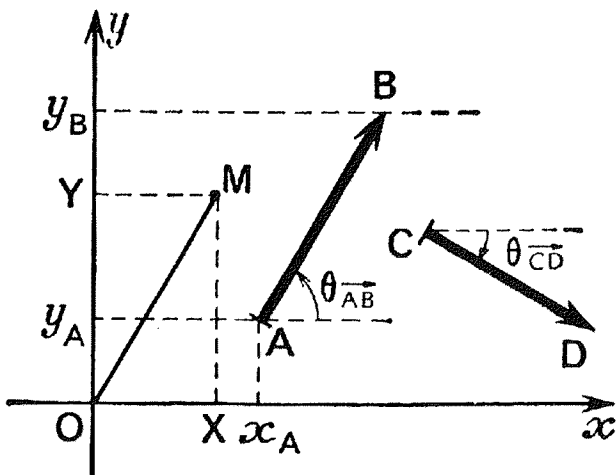


Fig. 47

61. Mesure complexe d'un vecteur. — Par définition, dans le plan complexe, la mesure complexe [AB] du vecteur \overrightarrow{AB} est l'affixe Z du point M tel que (fig. 47) : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Or l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} = X\vec{u} + Y\vec{v}$ montre que :

$$[AB] = Z = X + iY = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = z_B - z_A.$$

D'autre part, le module ρ de [AB] est égal à $OM = AB$ et l'argument θ de [AB] est l'angle polaire $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}) = \theta_{\overrightarrow{AB}}$.

La mesure complexe [AB] d'un vecteur \overrightarrow{AB} du plan complexe est égale à l'affixe de son extrémité, diminué de l'affixe de son origine. Elle a pour module $\rho = AB$ et pour argument $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}) = \theta_{\overrightarrow{AB}}$.

$$[AB] = z_B - z_A = (AB, \theta_{\overrightarrow{AB}}).$$

On dit que $\rho = AB$ et $\theta_{\overrightarrow{AB}} = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})$ sont le module et l'argument du vecteur \overrightarrow{AB} .

62. Opérateur d'une translation. — Considérons dans le plan complexe la translation T définie par le vecteur \overrightarrow{OB} (fig. 48) où B est l'image du nombre complexe b. Soient z l'affixe de M et z' l'affixe de son transformé M' :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} \iff z' = z + b \text{ (n° 59).}$$

Pour que M' soit le transformé de M dans la translation de vecteur \overrightarrow{OB} , il faut et il suffit que

$$z' = z + b. \tag{1}$$

La relation (1) est l'opérateur d'une translation dans le plan complexe.

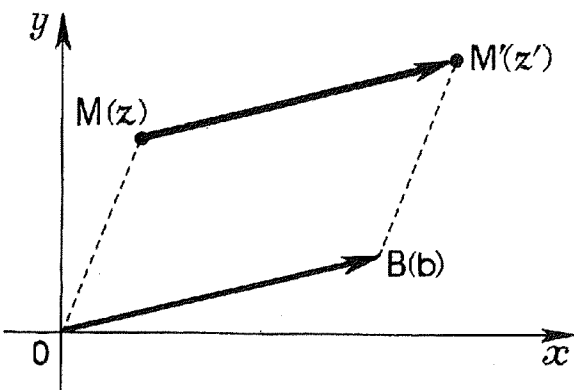


Fig. 48

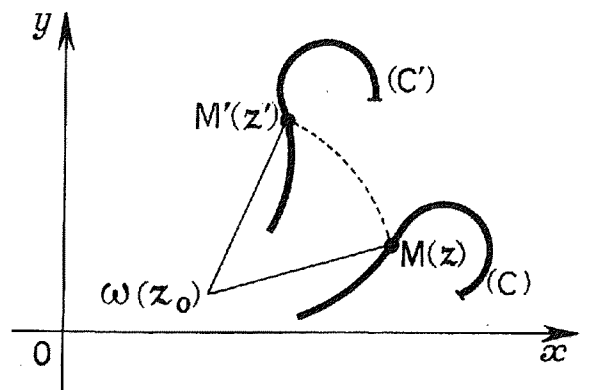


Fig. 49

63. Opérateur d'une rotation. — Considérons dans le plan complexe la rotation R (ω, α) et soit z₀ l'affixe du centre ω (fig. 49). Le point M' (z') est l'homologue du point M dans cette rotation. Les mesures complexes des vecteurs $\overrightarrow{\omega M}$ et $\overrightarrow{\omega M'}$ sont :

$$[\omega M'] = z' - z_0 = (\omega M', \theta_{\overrightarrow{\omega M'}})$$

et

$$[\omega M] = z - z_0 = (\omega M, \theta_{\overrightarrow{\omega M}}).$$

Les relations $\omega M' = \omega M$ et $\theta_{\omega M'} = \theta_{\omega M} + \alpha$ montrent que $[\omega M']$ est le produit de $[\omega M]$ par le nombre complexe de module 1 et d'argument α :

$$z' - z_0 = (z - z_0) (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Soit : $z' = (\cos \alpha + i \sin \alpha) z + z_0 (1 - \cos \alpha - i \sin \alpha)$.

Posons : $\cos \alpha + i \sin \alpha = a$ et $z_0 (1 - \cos \alpha - i \sin \alpha) = b$.

L'opérateur de la rotation $R(\omega, \alpha)$ est alors :

$$\boxed{z' = az + b; \quad |a| = 1.} \quad (2)$$

En particulier, la rotation $R(O, \alpha)$ a pour opérateur :

$$\boxed{z' = az; \quad |a| = 1.} \quad (3)$$

Car : $z_0 = 0 \implies b = 0$.

EXEMPLE. — La rotation de centre ω image de $z_0 = 1 + i$ et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$ a pour opérateur :

$$z' - (1 + i) = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (z - 1 - i)$$

Soit : $z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z + (1 + i) \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

ou $z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{(1 - \sqrt{3})}{2}$.

64. Opérateur d'une homothétie. — Considérons dans le plan complexe l'homothétie $H(\omega, k)$. Soit z_0 l'affixe du centre ω et $M'(z')$ l'homologue de $M(z)$ (fig. 50). Les mesures complexes des vecteurs $\overrightarrow{\omega M}$ et $\overrightarrow{\omega M'}$ sont :

$$[\overrightarrow{\omega M'}] = z' - z_0 = (\omega M'; \theta_{\omega M'})$$

$$[\overrightarrow{\omega M}] = z - z_0 = (\omega M; \theta_{\omega M}).$$

Si k est positif, on a : $\omega M' = k \cdot \omega M$ et $\theta_{\omega M'} = \theta_{\omega M}$; ce qui entraîne :

$$z' - z_0 = k(z - z_0).$$

Si k est négatif, on a : $\omega M' = -k \cdot \omega M$ et $\theta_{\omega M'} = \theta_{\omega M} + \pi$, donc :

$$z' - z_0 = -k(\cos \pi + i \sin \pi)(z - z_0) = k(z - z_0).$$

Quel que soit k , l'opérateur de l'homothétie (ω, k) est :

$$z' - z_0 = k(z - z_0)$$

Soit : $z' = kz + z_0(1 - k)$.

En posant $k = a \in \mathbb{R}$ et $b = z_0(1 - k)$, on obtient :

$$\boxed{z' = az + b; \quad a \in \mathbb{R}.} \quad (4)$$

En particulier, l'homothétie $H(O, k)$ a pour opérateur :

$$\boxed{z' = az; \quad a \in \mathbb{R}.} \quad (5)$$

Car : $z_0 = 0 \implies b = 0$.

EXEMPLE. — L'homothétie, de centre ω image de $z_0 = 2i$, et de rapport $k = \frac{1}{2}$ a pour opérateur :

$$z' - 2i = -\frac{1}{2}(z - 2i) \implies z' = -\frac{1}{2}z + 3i.$$

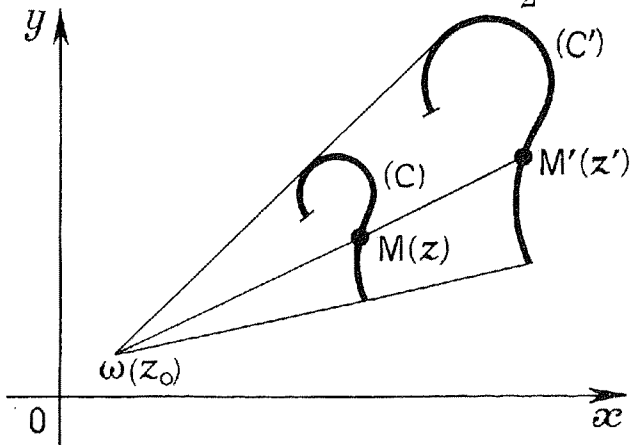


Fig. 50

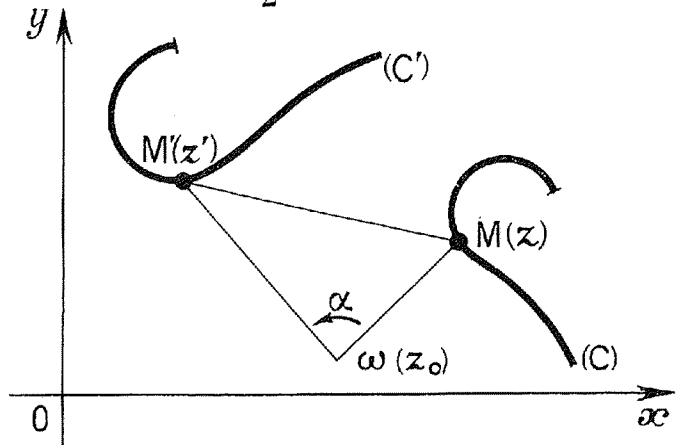


Fig. 51

65. Opérateur d'une similitude. — Considérons dans le plan complexe la similitude $S(\omega, k, \alpha)$. Soit z_0 l'affixe du centre ω et $M'(z')$ l'homologue de $M(z)$ (fig. 51).

Les relations $\omega M' = k \cdot \omega M$ et $\theta_{\omega M'} = \theta_{\omega M} + \alpha$ montrent que :

$$z' - z_0 = (z - z_0) k (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Soit :
$$z' = k (\cos \alpha + i \sin \alpha) z + z_0 [1 - k (\cos \alpha + i \sin \alpha)].$$

Posons :
$$k (\cos \alpha + i \sin \alpha) = a \quad \text{et} \quad z_0 [1 - k (\cos \alpha + i \sin \alpha)] = b.$$

L'opérateur de la similitude S est :

$$\boxed{z' = az + b} \quad (6) \quad \text{où} \quad a \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

En particulier si O est le centre de la similitude :

$$z_0 = 0 \implies b = 0 \quad \text{et l'opérateur de la similitude } S(O, k, \alpha) \text{ est :}$$

$$\boxed{z' = az} \quad (7) \quad a \in \mathbb{C}.$$

EXEMPLE. — La similitude $S\left(2 - i, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ a pour opérateur :

$$z' - (2 - i) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) [z - (2 - i)].$$

Soit :
$$z' = (1 + i)z - (1 + 2i).$$

66. Réciproques. — *Toute relation de la forme $z' = az + b$ définit dans le plan complexe une similitude qui peut éventuellement se réduire à une rotation, à une homothétie ou à une translation.*

On suppose les complexes a et b donnés avec $a \neq 0$.

Cherchons les points $\omega(z_0)$ invariants dans la transformation T :

$$z_0 = az_0 + b \iff z_0(1 - a) = b. \quad (8)$$

1° Cas particulier : $a = 1$. — Pour $b = 0$, la relation $z' = az + b$ devient $z' = z$. On obtient la transformation identique.

Pour $b \neq 0$, la relation (8) est impossible. L'opérateur de T devient :

$$z' = z + b \iff \vec{OM}' = \vec{OM} + \vec{OB} \iff \vec{MM}' = \vec{OB} \quad (\text{fig. 48}).$$

La transformation T est la translation de vecteur \overrightarrow{OB} .

2° *Cas général* : $a \neq 1$. — Il existe un point invariant unique ω d'affixe $z_0 = \frac{b}{1-a}$.

Compte tenu de $z_0 = az_0 + b$, la relation $z' = az + b$ équivaut à :

$$z' - z_0 = a(z - z_0) \iff [\omega M'] = a[\omega M].$$

Désignons par k et α le module et l'argument du complexe a ; nous obtenons :

$$\omega M' = k \cdot \omega M \quad \text{et} \quad \theta_{\omega M'} = \theta_{\omega M} + \alpha.$$

Le point M' est l'homologue de M dans la similitude $S(\omega, k, \alpha)$.

Cette similitude est une rotation si $k = 1$, une homothétie si $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$.

EXEMPLE. — Pour $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 + i)$, on obtient :

$$z_0 = -1 + i; \quad k = 2; \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

La transformation T est la similitude de centre $\omega(-1, 1)$, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

Nous donnerons le nom de similitude directe à toute transformation T définie par l'opérateur $z' = az + b$ ($a \neq 0$). Si E désigne l'ensemble de ces transformations, l'ensemble des translations planes, l'ensemble des rotations planes, l'ensemble des homothéties planes sont des sous-ensembles de E.

67. Produit de similitudes directes. — Désignons par T_1 et T_2 les similitudes d'opérateurs respectifs : $z' = a_1z + b_1$ et $z' = a_2z + b_2$. Soit $M_1(z_1)$ le transformé de $M(z)$ par T_1 et $M_2(z_2)$ le transformé de $M_1(z_1)$ par T_2 :

$$z_2 = a_2z_1 + b_2 = a_2(a_1z + b_1) + b_2 = a_1a_2z + a_2b_1 + b_2.$$

Donc : $T = T_2 \circ T_1$ appartient à l'ensemble E et a pour opérateur :

$$z' = az + b \quad \text{avec} \quad a = a_1a_2 \quad \text{et} \quad b = a_2b_1 + b_2.$$

1° $a_1 = a_2 = 1 \implies a_1a_2 = 1$: le produit de deux translations est une translation définie par le vecteur $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2}$ où B_1 et B_2 sont les images de b_1 et b_2 .

2° a_1 et $a_2 \in \mathbb{R} \implies a_1a_2 \in \mathbb{R}$: le produit de deux homothéties est une homothétie dont le rapport est égal au produit des rapports des homothéties données.

Cette homothétie-produit dégénère en translation si $a_1a_2 = 1$.

3° $|a_1| = |a_2| = 1 \implies |a_1a_2| = 1$; l'argument de a_1a_2 est $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ou α_1 et α_2 sont les arguments respectifs de a_1 et a_2 . Donc :

Le produit de deux rotations est en général une rotation qui se réduit à une translation si $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$ ou à une symétrie-point si $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$.

68. Groupe des similitudes directes dans le plan. — Désignons toujours par E l'ensemble des similitudes directes dans le plan :

1° $T_1 \in E$ et $T_2 \in E \implies T_2 \circ T_1 \in E$ (n° 67).

2° La transformation identique I d'opérateur $z' = z$ appartient à E.

3° Toute transformation T admet une transformation réciproque T^{-1} qui appartient à l'ensemble E.

Si $z' = az + b$ est l'opérateur de T, celui de T^{-1} est $z' = a'z + b'$ avec (n° 67) :

$$aa' = 1 \quad \text{et} \quad a'b + b' = 0 \quad \text{soit} \quad a' = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad b' = \frac{-b}{a}.$$

Il en résulte que (n° 42) :

L'ensemble E des similitudes directes du plan a une structure de groupe pour l'opération produit.

On vérifie aisément qu'il en est de même pour l'ensemble E_1 des translations planes, pour l'ensemble E_2 des homothéties-translations du plan, pour l'ensemble E_3 des rotations et translations du plan.

EXERCICES

— Dans le repère orthonormé xOy , interpréter géométriquement les transformations T définies par les systèmes suivants :

$$104. \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases}$$

$$105. \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases}$$

$$106. \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases}$$

$$107. \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = x. \end{cases}$$

$$108. \quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x. \end{cases}$$

$$109. \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = 2y. \end{cases}$$

— Étudier dans le plan de la variable complexe z les transformations T définies par les relations suivantes :

$$110. \quad z' = z + 1 + i.$$

$$111. \quad z' = z + 1 - i.$$

$$112. \quad z' = z - 3.$$

$$113. \quad z' = z + 3.$$

$$114. \quad z' = z + 3i.$$

$$115. \quad z' = z - 3i.$$

$$116. \quad z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z.$$

$$117. \quad z' = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i) z.$$

$$118. \quad z' = iz.$$

$$119. \quad z' = iz + 1 - i.$$

$$120. \quad z' = -iz + 3 - i.$$

$$121. \quad z' = \frac{1}{i} z + 2(1 - i).$$

$$122. \quad z' = 3z.$$

$$123. \quad z' = -3z.$$

$$124. \quad z' = \frac{1}{2} z.$$

$$125. \quad z' = 2z + 4 - 3i.$$

$$126. \quad z' = -z + 2(1 - i).$$

$$127. \quad z' = \frac{1}{2} z + 2 - i.$$

$$128. \quad z' = (1 + i\sqrt{3})z + 3 + i\sqrt{3}.$$

$$129. \quad z' = -2zi + 5.$$

$$130. \quad z' = (3 + 4i)z - 4 - 8i.$$

$$131. \quad z' = (1 + i \operatorname{tg} \alpha)z + \operatorname{tg} \alpha.$$

132. Étudier le produit $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ sachant que les opérateurs respectifs des transformations T_1 ; T_2 et T_3 sont :

$$z' = z + 1;$$

$$z' = z + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3};$$

$$z' = z + \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

133. 1° Former les opérateurs respectifs des rotations T_1 , de centre $A(1; 0)$, d'angle α , et T_2 , de centre $B(-1; 0)$, d'angle β .

2° Former l'opérateur de la transformation $T_2 \circ T_1$. Étudier sa nature. Le produit $T_2 \circ T_1$ est-il commutatif ?

3° Dans le cas où $T_2 \circ T_1$ est une rotation, déterminer l'affixe z_0 de son centre ω et évaluer les angles polaires des vecteurs $\overrightarrow{A\omega}$ et $\overrightarrow{B\omega}$ par rapport à l'axe $x'x$.

134. 1° Pour que le triangle ABC soit équilatéral de sens direct, il faut et il suffit que les affixes a, b, c de ses sommets vérifient l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$a + bj + cj^2 = 0; \quad b + cj + aj^2 = 0; \quad c + aj + bj^2 = 0$$

où j et j^2 sont les racines cubiques complexes de l'unité autres que 1.

2° Le triangle ABC étant équilatéral de sens direct et M désignant un point quelconque du plan, on construit le point A' homologue de A dans la rotation $(M; -\frac{\pi}{3})$ et le point B' homologue de B dans la rotation $(M; +\frac{\pi}{3})$. Déterminer les affixes des points A', B' , en fonction des affixes a, b et z de A, B et M .

3° Démontrer que $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'}$. Conséquences ?

135. Dans le plan complexe on considère les points $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$ et $D(d)$.

1° Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme, il faut et il suffit que :

$$a + c = b + d.$$

2° Établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que ABCD soit un rectangle de sens direct, un losange de sens direct, un carré de sens direct.

136. On considère les homothéties H_1 et H_2 d'opérateurs respectifs :

$$z' = a_1 z \quad \text{et} \quad z' = a_2 z + b \quad \text{où} \quad a_1 \text{ et } a_2 \in \mathbb{R}.$$

1° Former l'opérateur de la transformation $H_2 \circ H_1$ et déterminer, s'il existe, le centre ω_1 de l'homothétie $H_2 \circ H_1$. Que constate-t-on ?

2° Opérer de même pour le produit $H_1 \circ H_2$. Le produit de deux homothéties est-il commutatif ?

137. Dans le plan complexe, on donne les points A (z_1); B (z_2); A' (z'_1) et B' (z'_2).

1° Déterminer l'opérateur de la similitude directe que transforme \overrightarrow{AB} en $\overrightarrow{A'B'}$. En déduire le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

2° Déterminer l'opérateur de la similitude directe qui transforme $\overrightarrow{AA'}$ en $\overrightarrow{BB'}$. Comparer le centre de cette similitude à celui de la première.

138. On désigne par a, b, c les affixes des points A, B, C et par α, β, γ les affixes des points M, N, P.

1° Montrer que la similitude directe des triangles ABC et MNP équivaut à :

$$a(\beta - \gamma) + b(\gamma - \alpha) + c(\alpha - \beta) = 0.$$

2° En déduire les relations entre mesures complexes de vecteurs :

$$(\beta - \gamma)[OA] + (\gamma - \alpha)[OB] + (\alpha - \beta)[OC] = 0 \quad \text{et} \quad \alpha[BC] + \beta[CA] + \gamma[AB] = 0.$$

3° A quelle condition A, B, C sont-ils alignés ?

139. Démontrer que le produit des similitudes $\left(O_1; \operatorname{tg} \alpha; \frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(O_2; \operatorname{cotg} \alpha; \frac{\pi}{2}\right)$ est une symétrie point dont le centre I est celui de la rotation d'angle 2α qui transforme O_2 en O_1 .

140. 1° Montrer que la similitude qui transforme A en B et B en A est la symétrie point de centre I milieu de AB.

2° La similitude S_A transforme $\overrightarrow{AB_1}$ en \overrightarrow{AB} , la similitude S_B transforme \overrightarrow{BA} en $\overrightarrow{BA_1}$ et la similitude S_C de centre C transforme $\overrightarrow{A_1B}$ en $\overrightarrow{AB_1}$. Quel est le produit de ces trois similitudes ?

141. Dans le repère orthonormé xOy on considère la transformation T qui au point M ($x; y$) fait correspondre le point M' ($x'; y'$) par les relations suivantes :

$$x' = \alpha x - \beta y; \quad y' = \beta x + \alpha y \quad (1) \quad (\alpha \text{ et } \beta \text{ constantes réelles données}).$$

1° Exprimer $z' = x' + iy'$ en fonction de $z = x + iy$.

2° En déduire que T est une similitude directe de centre O.

3° Montrer que, réciproquement, toute similitude directe de centre O peut être définie par des relations de la forme (1).

142. Soient $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ deux nombres complexes liés par la relation :

$$Z = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1)$$

où a, b, c et d sont des nombres réels tels que : $ad - bc \neq 0$.

La relation (1) définit une transformation ponctuelle du plan orthonormé Oxy , faisant correspondre au point m d'affixe z (c'est-à-dire dont les coordonnées cartésiennes dans le plan Oxy sont les nombres réels x et y) le point M d'affixe Z .

1° Cette transformation conserve l'axe $x'x$ (c'est-à-dire transforme tout point de $x'x$ en un point de $x'x$). Dire pourquoi.

On considère, sur l'axe $y'y$, un point quelconque m d'affixe $z = iy$; calculer l'affixe $Z = X + iY$ du point M correspondant; comment faut-il choisir les nombres réels a, b, c et d pour que (1) conserve non seulement l'axe $x'x$ mais aussi l'axe $y'y$? On trouvera qu'il existe deux transformations répondant à la question $\left(Z = kz \text{ et } Z = \frac{k}{z}, \quad k \text{ réel}\right)$.

2° On considère celle, (T), des deux transformations précédentes (autre que l'identité) admettant le point A (+1, 0) pour point double. Montrer qu'elle est involutive et qu'elle admet le deuxième point double B (-1, 0). Montrer que deux points correspondants m et M sont tels que l'axe $x'x$ soit bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM})$, puis que les points m, M, A et B appartiennent à un même cercle.

3° Dans la transformation T, quel est l'homologue d'une droite issue de O, d'un cercle passant par A et B ?

SYMÉTRIE AXIALE DANS LE PLAN

69. Figures inversement égales dans le plan. — Deux figures superposables F et F' d'un plan P sont dites *inversement égales* si, pour amener la figure F sur la figure F' , il faut d'abord retourner le plan P sur lui-même. Dans deux figures inversement égales F et F' , deux segments homologues sont égaux tandis que deux angles orientés homologues sont opposés.

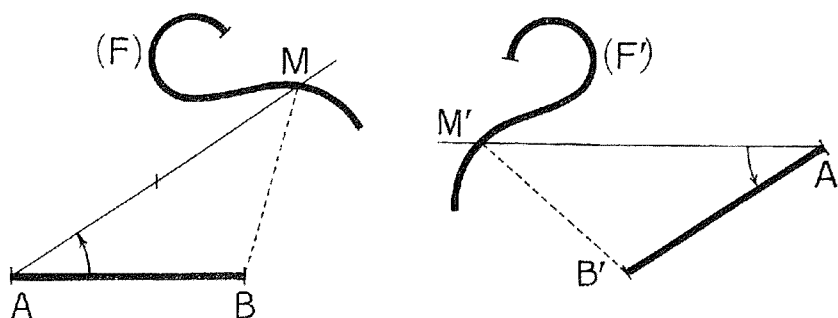


Fig. 52

Deux triangles MAB et $MA'B'$ sont inversement égaux si (fig. 52) :

$$AB = A'B'; \quad AB = A'M'; \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}).$$

Si deux figures F_1 et F_2 sont inversement égales à la même figure F , elles sont directement égales, car deux segments homologues sont égaux et deux angles orientés homologues sont égaux.

70. Symétrie axiale dans le plan. — Rappelons que deux points M et M' sont symétriques par rapport à une droite Δ , lorsque cette droite est médiatrice du segment MM' .

Considérons dans le plan P une droite fixe Δ appelée *axe de symétrie* (fig. 53). A tout point M du plan correspond un point M' symétrique de M par rapport à Δ . On l'obtient en projetant M en H sur Δ et en construisant $\overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{MH}$.

La transformation ponctuelle ainsi définie est la symétrie axiale d'axe Δ .

En abrégé: *Symétrie axiale Δ ou $S(\Delta)$.*

Si M décrit une figure F , M' décrit une figure F' symétrique de F par rapport à Δ . Notons que cette transformation est involutive. Elle possède une infinité de points doubles, car tout point de l'axe Δ est invariant. Tout cercle centré sur Δ est globalement invariant ainsi que toute droite perpendiculaire à Δ .

71. Théorème. — Deux figures d'un même plan symétriques par rapport à une droite de ce plan sont inversement égales.

Soient A et B deux points de l'axe de symétrie Δ , M un point quelconque et M' son symétrique par rapport à Δ (fig. 53). La droite Δ , médiatrice de MM' , est bissectrice de l'angle au sommet du triangle isocèle AMM' :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$$

et $AM = AM'$.

Les triangles MAB et M'AB sont inversement égaux.

Donc (n° 69), lorsque M décrit une figure F du plan, le point M' décrit une figure F' inversement égale à F.

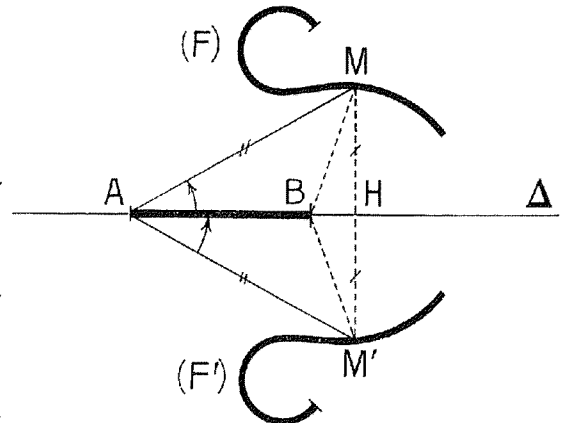


Fig. 53

72. Conséquences. — Dans toute symétrie axiale du plan, deux segments homologues sont égaux et deux angles orientés homologues sont opposés.

Deux droites homologues se coupent sur l'axe de symétrie (fig. 54) ou lui sont parallèles. Cet axe de symétrie est la bissectrice intérieure de deux axes concourants homologues. Inversement deux droites données sont symétriques par rapport à l'une ou l'autre de leurs bissectrices.

Le symétrique d'un cercle O par rapport à une droite Δ est un cercle égal O' confondu avec le premier si Δ passe par O. Réciproquement :

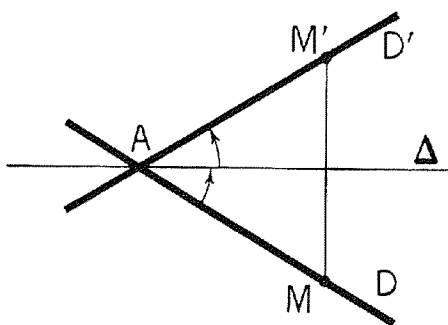


Fig. 54

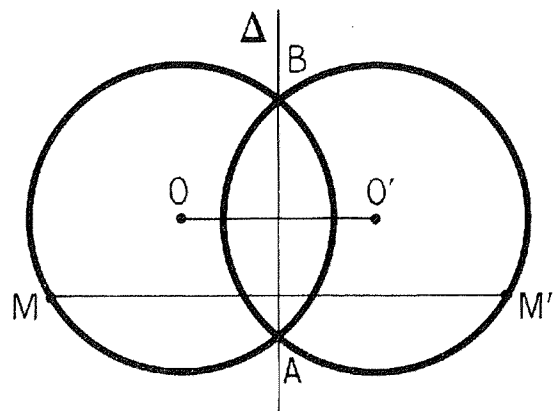


Fig. 55

Deux cercles égaux O et O' (fig. 55) se correspondent dans la symétrie par rapport à la médiatrice de OO' et tout cercle se conserve dans la symétrie par rapport à l'un quelconque de ses diamètres.

Il en résulte que l'axe de symétrie de deux cercles égaux sécants en AB est la corde commune AB et que les points d'intersection A et B de deux cercles quelconques sont symétriques par rapport à la droite des centres.

73. Condition analytique. — Dans le repère orthonormé xOy (fig. 56), cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que les points A (x_0, y_0) et B (x_1, y_1) soient symétriques par rapport à la droite D d'équation $ax + by + c = 0$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que \overrightarrow{AB} soit perpendiculaire à D et que le milieu I de AB appartienne à D :

$$\begin{cases} \frac{x_1 - x_0}{a} = \frac{y_1 - y_0}{b} = \lambda & (1) \\ a \left(\frac{x_0 + x_1}{2} \right) + b \left(\frac{y_0 + y_1}{2} \right) + c = 0. & (2) \end{cases}$$

Les relations (1) donnent : $x_1 = x_0 + \lambda a$; $y_1 = y_0 + \lambda b$. En portant ces valeurs dans l'équation (2) on obtient :

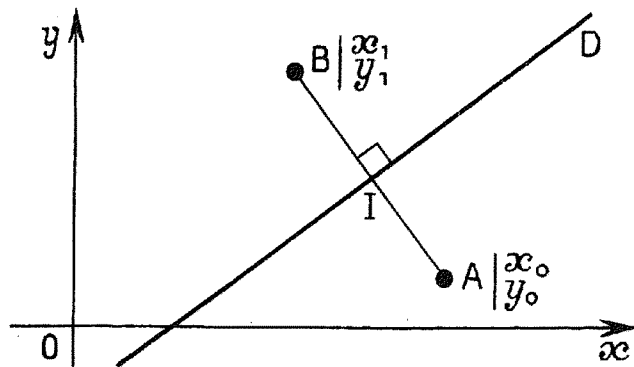


Fig. 56

$$\lambda (a^2 + b^2) + 2 (ax_0 + by_0 + c) = 0$$

$$\text{Soit : } \lambda = - \frac{2 (ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}.$$

On en déduit les coordonnées du point B symétrique de A par rapport à la Droite D :

$$x_1 = x_0 - \frac{2 a (ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$y_1 = y_0 - \frac{2 b (ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}.$$

74. Produit de deux symétries-droites dans le plan. — La symétrie-droite Δ_1 transforme toute figure F en F_1 et la symétrie-droite Δ_2 transforme F_1 en F_2 . Les figures F et F_2 , inversement égales à F_1 , sont directement égales. Le produit des deux symétries $S(\Delta_2) \circ S(\Delta_1)$ transforme F en une figure directement égale F_2 .

75. 1^{er} cas. — Les deux axes Δ_1 et Δ_2 sont parallèles. — La symétrie Δ_1 transforme le point M en M_1 et la symétrie Δ_2 transforme M_1 en M_2 . On a (fig. 57) :

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2 \overrightarrow{H_1M_1} + 2 \overrightarrow{M_1H_2} = 2 \overrightarrow{H_1H_2}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{H_1H_2}$ perpendiculaire à Δ_1 et Δ_2 est indépendant du point M. Donc :

Le produit de deux symétries d'axes parallèles est la translation perpendiculaire aux deux axes double de celle qui transforme le premier axe en le second.

Le produit n'est pas commutatif car le produit $S(\Delta_1) \circ S(\Delta_2)$ est équivalent à la translation de vecteur $2 \overrightarrow{H_2H_1}$. Réciproquement :

Toute translation de vecteur \overrightarrow{T} est équivalente au produit de deux symétries d'axes perpendiculaires au vecteur \overrightarrow{T} , le second se déduisant du premier dans la translation $\frac{\overrightarrow{T}}{2}$.

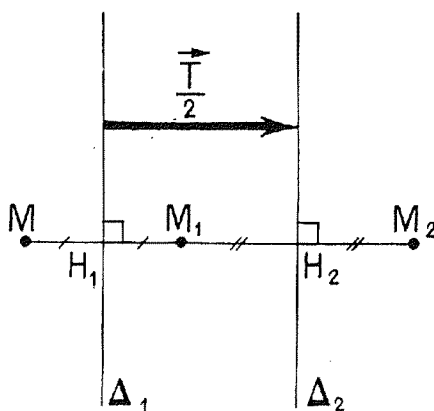


Fig. 57

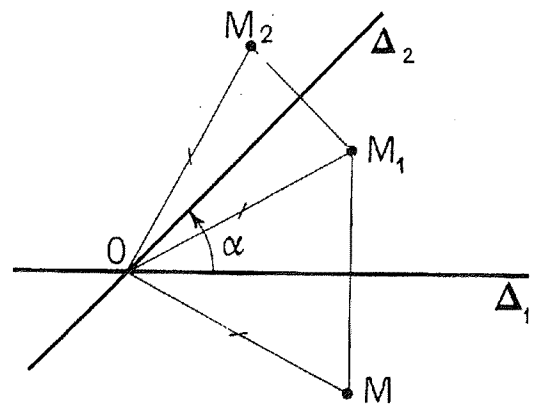


Fig. 58

Construisons un vecteur $\overrightarrow{H_1H_2} = \frac{\overrightarrow{T}}{2}$ puis les droites Δ_1 et Δ_2 , respectivement perpendiculaires en H_1 et H_2 à la droite H_1H_2 . Le produit des symétries d'axes Δ_1 et Δ_2 est la translation \overrightarrow{T} .

76. 2^e cas. — Les deux axes Δ_1 et Δ_2 sont concourants. — Soit O leur point commun (fig. 58) et α l'angle (Δ_1, Δ_2) . La symétrie Δ_1 transforme OM en OM_1 et la symétrie Δ_2 transforme OM_1 en OM_2 .

On a donc $OM = OM_1 = OM_2$ soit $OM = OM_2$. D'autre part Δ_1 et Δ_2 sont les bissectrices intérieures des angles $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1})$ et $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$. On obtient :

$$\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2} = 2(\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{OM_1}) + 2(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{\Delta_2}) = 2(\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{\Delta_2}) = 2\alpha.$$

Le point M_2 se déduit donc de M dans la rotation $(O, 2\alpha)$:

Le produit des symétries par rapport à deux droites concourantes en O est la rotation de centre O dont l'angle est le double de l'angle orienté de ces deux droites.

Ce produit $S(\Delta_2) \circ S(\Delta_1)$ n'est pas, en général, commutatif car $S(\Delta_1) \circ S(\Delta_2)$ équivaut à la rotation $(O, -2\alpha)$. Réciproquement :

Toute rotation plane (O, θ) est équivalente au produit des symétries par rapport à deux droites issues de O et faisant l'angle $\frac{\theta}{2}$.

Construisons une droite quelconque Δ_1 issue de O , puis la droite Δ_2 issue de O telle que $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\theta}{2}$. Le produit $S(\Delta_2) \circ S(\Delta_1)$ est la rotation (O, θ) .

77. Cas où les deux axes Δ_1 et Δ_2 sont rectangulaires. — En particulier (fig. 59) si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la rotation $(O, 2\alpha)$ est la symétrie-point de centre O .

Le produit des symétries par rapport à deux droites rectangulaires est la symétrie-point dont le centre est le point commun à ces deux droites.

C'est le seul cas où le produit $S(\Delta_2) \circ S(\Delta_1)$ est commutatif. Réciproquement :

Toute symétrie par rapport à un point est équivalente au produit des symétries par rapport à deux droites perpendiculaires issues de ce point.

On a donc :

$$S(\Delta_2) \circ S(\Delta_1) = S(\Delta_1) \circ S(\Delta_2) = S(O)$$

et de même :

$$S(\Delta_2) = S(O) \circ S(\Delta_1) = S(\Delta_1) \circ S(O)$$

$$S(\Delta_1) = S(O) \circ S(\Delta_2) = S(\Delta_2) \circ S(O).$$

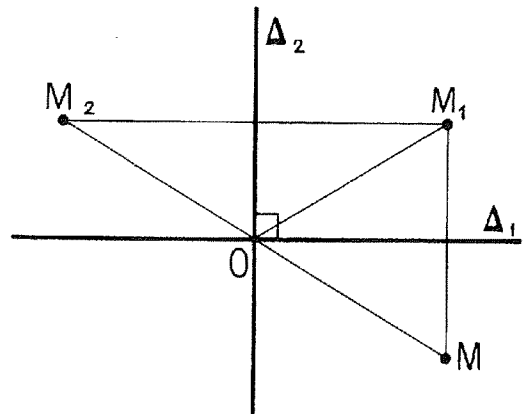


Fig. 59

78. Éléments de symétrie d'une figure plane. — *On dit qu'une figure F admet un centre de symétrie O , ou un axe de symétrie Δ , lorsqu'elle est globalement invariante dans la symétrie de centre O ou dans la symétrie d'axe Δ .*

EXEMPLES. — 1° Une droite D admet un point quelconque de cette droite comme centre de symétrie, la droite D et toute perpendiculaire à D comme axes de symétrie.

2° Un cercle de centre O admet O comme centre de symétrie et tout diamètre comme axe de symétrie.

3° La figure formée par deux parallèles D_1 et D_2 admet comme centre de symétrie tout point équidistant de ces deux droites et comme axes de symétrie les perpendiculaires communes à ces droites et la droite D_3 lieu des points équidistants de D_1 et D_2 .

4° La figure formée par deux droites concourantes en O admet ce point O comme centre de symétrie et les bissectrices des angles formés par ces deux droites comme axes de symétrie.

79. Théorèmes. — 1° *Toute figure plane qui admet deux axes de symétrie perpendiculaires admet leur intersection comme centre de symétrie.*

2° *Toute figure plane qui admet un centre O de symétrie et un axe de symétrie passant par ce centre O admet un second axe de symétrie passant par O et perpendiculaire au premier.*

Cela résulte du n° 77 : $S(\Delta_2) \circ S(\Delta_1) = S(O)$
 et $S(O) \circ S(\Delta_1) = S(\Delta_2).$

AFFINITÉ DANS LE PLAN

80. Définition. — Considérons, dans le plan, une droite Δ et une direction δ non parallèle à Δ (fig. 60) et soit d'autre part un nombre réel non nul k . Tout point M du plan se projette, parallèlement à δ , en μ sur Δ :

L'affinité d'axe Δ , de direction δ et de rapport k est la transformation ponctuelle qui, à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que :

$$\overrightarrow{\mu M'} = k \cdot \overrightarrow{\mu M}.$$

Cette affinité $\alpha(\Delta, \delta, k)$ est positive pour $k > 0$, négative pour $k < 0$. Elle est dite *orthogonale* si δ est perpendiculaire à Δ .

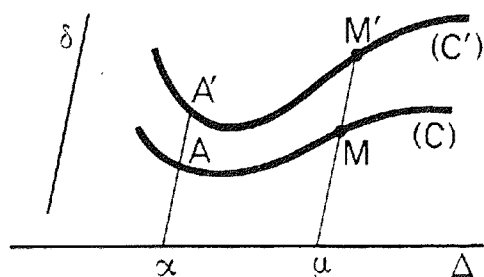


Fig. 60

Pour $k \neq 1$, les seuls points invariants sont ceux de l'axe Δ et toute droite parallèle à δ est invariante.

Le point M est l'homologue de M' dans l'affinité réciproque $\alpha(\Delta, \delta, \frac{1}{k})$. L'affinité ne peut être involutive que pour $k = \frac{1}{k} \iff k^2 = 1$ ou $k = \pm 1$.

Pour $k = 1$, tout point M est confondu avec son homologue M' et l'affinité est la *transformation identique*.

Pour $k = -1$, le point μ est le milieu du segment MM' . L'affinité est dans ce cas la *symétrie oblique* d'axe Δ et de direction δ . Si cette affinité est orthogonale, on retrouve la *symétrie axiale* d'axe Δ .

81. Étude analytique. — Prenons pour repère cartésien xOy , l'axe Ox suivant Δ et l'axe Oy parallèle à la direction δ (fig. 61). Les coordonnées des points homologues $M(x, y)$ et $M'(X, Y)$ sont liées par les relations :

$$X = x; \quad Y = ky.$$

(1)

Lorsque le point M décrit dans le plan la courbe (C) d'équation $F(x, y) = 0$, le point M' décrit la courbe (C') d'équation $F\left(X, \frac{Y}{k}\right) = 0$. La courbe (C') est la transformée de (C) dans l'affinité considérée. En particulier, la transformée de la courbe $y = f(x)$ est la courbe $Y = kf(X)$.

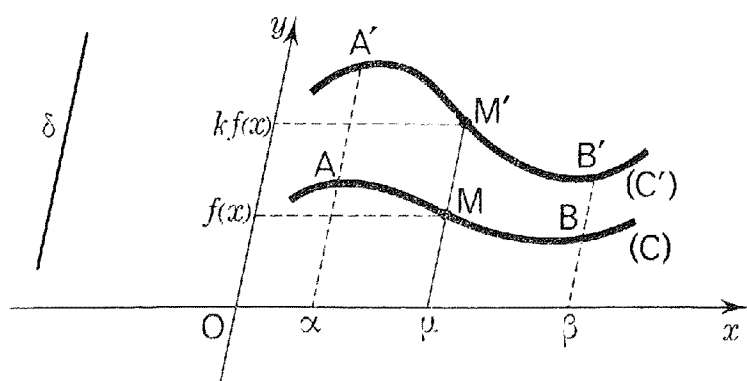


Fig. 61

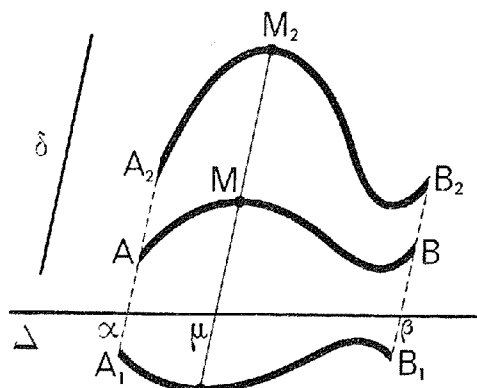


Fig. 62

82. Affinités de même axe et de même direction. — Considérons les affinités $\alpha(\Delta, \delta, k_1)$ et $\alpha(\Delta, \delta, k_2)$. La première transforme M en M_1 (fig. 62) et la seconde transforme M_1 en M_2 :

$$\overrightarrow{\mu M_1} = k_1 \overrightarrow{\mu M} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mu M_2} = k_2 \overrightarrow{\mu M_1} \quad \implies \quad \overrightarrow{\mu M_2} = k_1 k_2 \overrightarrow{\mu M}.$$

Donc :

Le produit de deux affinités d'axe Δ , de direction δ et de rapports respectifs k_1 et k_2 est une affinité de même axe et de même direction de rapport $k_1 k_2$:

$$\alpha(\Delta, \delta, k_2) \circ \alpha(\Delta, \delta, k_1) = \alpha(\Delta, \delta, k_1 k_2).$$

Ce produit est commutatif. Il se réduit à la transformation identique pour $k_1 k_2 = 1$.

83. Groupe des affinités d'axe et de direction donnés. — Désignons par G l'ensemble des affinités d'axe Δ et de direction δ . On voit que :

- 1° $\alpha_1 \in G$ et $\alpha_2 \in G \implies \alpha_2 \circ \alpha_1 \in G$.
- 2° $\alpha_2 \circ \alpha_1 = \alpha_1 \circ \alpha_2$.
- 3° $I = \alpha(\Delta, \delta, 1)$ est un élément de G .
- 4° $\forall \alpha = \alpha(\Delta, \delta, k) \in G, \exists \alpha^{-1} = \alpha\left(\Delta, \delta, \frac{1}{k}\right) \in G$.

L'ensemble des affinités d'axe donné Δ et de direction donnée δ a une structure de groupe abélien pour l'opération-produit.

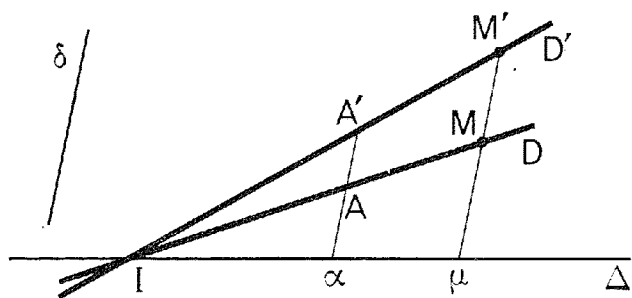


Fig. 63

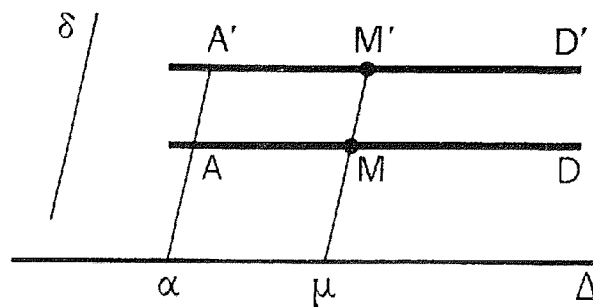


Fig. 64

84. Transformée d'une droite. — Opérons dans le repère xOy où Ox est l'axe Δ de l'affinité et où Oy est parallèle à la direction δ de l'affinité (fig. 63).

La droite D a pour équation $y = m(x - \alpha)$ et coupe Δ en I ($\alpha, 0$). Sa transformée D' a pour équation : $y = km(x - \alpha)$ (n° 81). C'est une droite D' qui coupe Δ en I.

Dans toute affinité l'homologue d'une droite D est une droite D' qui coupe l'axe Δ de l'affinité au même point que D.

CAS PARTICULIERS. — 1° La droite D d'équation $y = \beta$, parallèle à Δ , a pour transformée la droite D' d'équation : $y = k\beta$, parallèle à D (fig. 64).

2° La droite D d'équation $x = \alpha$, parallèle à la direction de l'affinité a pour transformée la droite D' d'équation $X = \alpha$, confondue avec D.

85. Corollaires. — 1° L'affinité $\mathcal{A}(\Delta, \delta, k)$ transforme deux droites concourantes en A, en deux droites concourantes en A' homologue de A, un segment AB en un segment A'B', un triangle ABC en un triangle A'B'C'.

2° **Deux droites parallèles ont pour transformées deux droites parallèles.**

En effet si deux droites D et D₁ ont même coefficient directeur m, leurs transformées D' et D'₁ ont même coefficient directeur km. Elles sont donc parallèles (fig. 65).

En particulier :

Tout parallélogramme a pour transformé un parallélogramme.

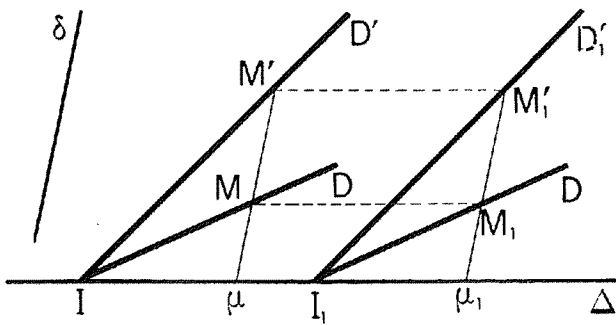


Fig. 65

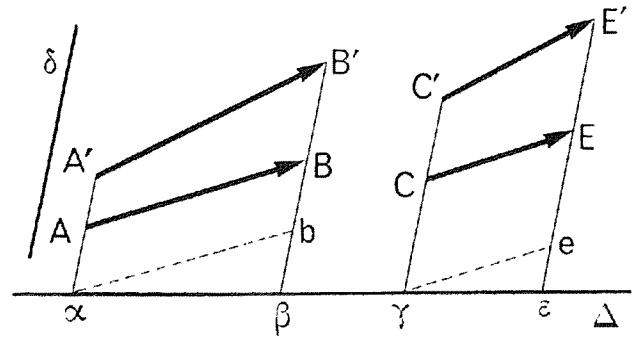


Fig. 66

3° **Dans toute affinité le rapport de deux vecteurs parallèles est égal au rapport de leurs transformés.**

En effet (fig. 66) : $\vec{AB} \parallel \vec{CE} \iff \vec{A'B'} \parallel \vec{C'E'}$ et $\frac{\vec{AB}}{\vec{CE}} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\epsilon} = \frac{\vec{A'B'}}{\vec{C'E'}}$.

Donc :

$$\boxed{\vec{AB} = \lambda \vec{CE} \iff \vec{A'B'} = \lambda \vec{C'E'}.}$$

86. Remarque. — L'affinité ne conserve pas, en général, le rapport de deux segments non parallèles et par suite elle ne conserve pas les angles. Sinon elle transformerait tout triangle en un triangle semblable, ce qui est impossible, car une similitude plane ne peut avoir une droite de points doubles (le cas de la transformation identique et de la symétrie axiale mis à part).

87. Transformée d'une courbe. — *Si une courbe (C) admet au point A, une tangente AT, la transformée par affinité (C'), admet au point A' homologue de A une tangente A'T', homologue de AT.*

Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe C dans le repère xOy adopté au n° 81 (fig. 67). L'équation de la courbe C' transformée de la courbe C est : $y = kf(x)$ (n° 81). Si

$f(x)$ est dérivable au point d'abscisse x , il en est de même de $kf(x)$. La courbe C admet une tangente en A de coefficient directeur $f'(x)$ et la courbe C' admet en A' homologue de A , une tangente de coefficient directeur $kf'(x)$. Cette tangente $A'T'$ est donc l'homologue de la tangente AT dans l'affinité envisagée. Les tangentes AT et $A'T'$ coupent l'axe de l'affinité au même point I .

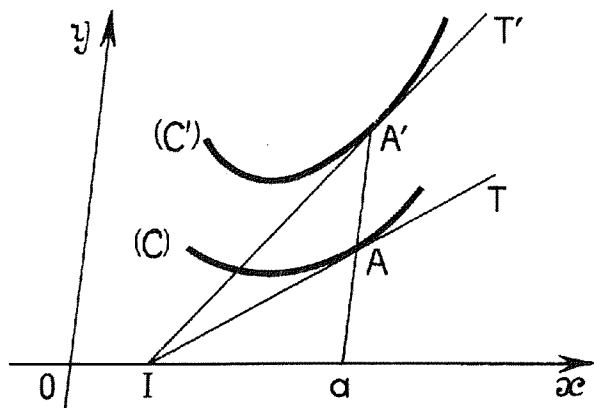


Fig. 67

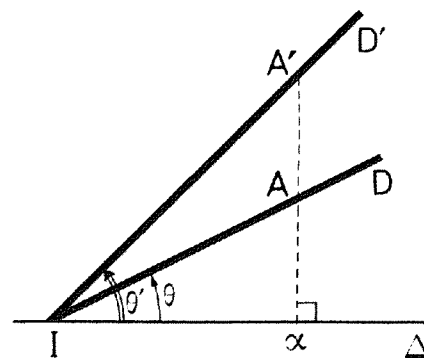


Fig. 68

88. Corollaire. — Lorsque deux courbes (C) et (C_1) sont tangentes en A , leurs transformées (C') et (C'_1) sont tangentes en A' homologue de A .

Si les courbes (C) et (C_1) admettent en A la même tangente AT , leurs transformées (C') et (C'_1) admettent en A' , homologue de A , la même tangente $A'T'$, transformée de AT . Les courbes (C') et (C'_1) sont tangentes en A' . On traduit ceci en disant que l'affinité conserve les contacts.

89. Affinité orthogonale. — Une affinité $\alpha(\Delta, \delta, k)$ est orthogonale lorsque la direction δ de cette affinité est perpendiculaire à son axe Δ . Une telle affinité est notée $\alpha(\Delta, k)$. Désignons par θ et θ' les angles (Δ, D) et (Δ, D') formé avec Δ par deux droites homologues D et D' (fig. 68) :

$$\overrightarrow{\alpha A'} = k \overrightarrow{\alpha A} \implies \frac{\overrightarrow{\alpha A'}}{I\alpha} = k \frac{\overrightarrow{\alpha A}}{I\alpha} \implies \text{tg } \theta' = k \text{tg } \theta.$$

Dans toute affinité orthogonale, le rapport des pentes de deux droites homologues, par rapport à l'axe de l'affinité, est égal au rapport de l'affinité.

90. Transformée d'un cercle par affinité orthogonale.

Bornons-nous au cas où l'axe de l'affinité est un diamètre du cercle donné (O, R) . Dans le repère orthonormé xOy où Ox est l'axe Δ de l'affinité et Oy la direction de l'affinité, le cercle donné C a pour équation : $x^2 + y^2 = R^2$ (fig. 69).

Son transformé C' a pour équation :

$$x^2 + \frac{y^2}{k^2} = R^2 \iff \boxed{\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{k^2 R^2} = 1.}$$

C'est l'équation d'une courbe appelée *ellipse*, dont les axes Ox et Oy sont les axes de symétrie, dont O est le centre de symétrie. Elle coupe l'axe $x'x$ aux points $A(R, 0)$ et $A'(-R, 0)$ et l'axe $y'y$ aux points $B(0, kR)$ et $B'(0, -kR)$.

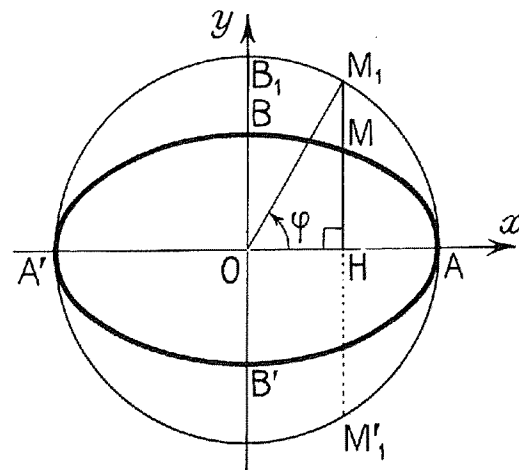


Fig. 69

Les longueurs $a = R$ et $b = |k|R$ se nomment demi-axes de l'ellipse et :

$$|k| < 1 \implies b < a; \quad |k| > 1 \implies b > a.$$

La transformée d'un cercle dans une affinité orthogonale dont l'axe est un des diamètres de ce cercle est une ellipse.

Si R est le rayon du cercle et k le rapport de l'affinité, les demi-axes respectifs de l'ellipse portés par Ox et Oy sont R et $|k|R$.

EXERCICES

143. On donne un triangle isocèle ABC de base BC . Une droite variable Δ passe par le sommet A . On construit le symétrique D du point C par rapport à Δ . La droite BD coupe Δ en M . Trouver les lieux géométriques des points D et M .

144. Soient deux droites D_1 et D_2 issues de O et un point fixe P . Une droite variable Δ issue de P coupe D_1 en A et D_2 en B . Les symétriques de la droite Δ par rapport aux droites D_1 et D_2 se coupent en M . Trouver le lieu géométrique du point M .

145. 1° Démontrer que le symétrique de l'orthocentre H d'un triangle ABC par rapport à un côté de ce triangle appartient au cercle circonscrit à ce triangle.

2° Dans un triangle ABC les sommets B et C appartiennent à une droite fixe, l'orthocentre H est fixe ainsi qu'un point P du cercle ABC .

Trouver le lieu géométrique du centre O du cercle ABC .

3° Construire le triangle ABC connaissant le milieu N du côté AB .

146. Construire un carré $ABCD$ sachant que A et C appartiennent à une même droite donnée D_1 et que les sommets B et D appartiennent respectivement à deux autres droites données D_2 et D_3 .

147. Construire un triangle ABC connaissant le centre I d'un cercle inscrit ou exinscrit, les supports Ix , Iy et Iz des droites AI , BI et CI et un point P de la droite BC .

148. Étant donnés deux points A et B et une droite D , construire un point M de la droite D de telle sorte que cette droite soit bissectrice de l'angle (MA, MB) . Que peut-on dire de la somme $MA + MB$ lorsque A et B sont d'un même côté de D et de la différence $MA - MB$ lorsque A et B sont de part et d'autre de D ?

149. Montrer que le produit des symétries par rapport à trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ issues d'un point O est la symétrie par rapport à la droite Δ_4 issue de O et telle que les couples de droites $\Delta_1; \Delta_3$ et Δ_2, Δ_4 aient mêmes bissectrices.

150. Démontrer que le produit des deux rotations $(O_1, +\frac{\pi}{2})$ et $(O_2, +\frac{\pi}{2})$ est la symétrie par rapport au point O , centre de la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ qui transforme O_2 en O_1 .

151. Toute rotation (O, α) est décomposable en un produit de deux rotations de centres B et C donnés pourvu que $(\vec{OB}, \vec{OC}) = \frac{\alpha}{2}$. Déterminer les angles β et γ de ces deux rotations.

152. Dans un triangle ABC dont les angles sont aigus on prend les points D, E, F respectivement sur les segments BC, CA et AB .

1° Montrer que, pour un point D donné, le périmètre du triangle DEF est minimum lorsque la droite EF passe par les symétriques M et N de D par rapport à AB et à AC .

2° Étudier la correspondance entre M et N lorsque D décrit le segment BC et montrer que le périmètre DEF est minimum lorsque D, E et F sont les pieds des hauteurs du triangle ABC .

153. On considère un rectangle $ABCD$ et un point variable M . Les symétries d'axes AB, BC et CD transforment respectivement M en M_1, M_1 en M_2 et M_2 en M_3 .

1° Étudier la correspondance entre M et M_3 ?

2° Lieu du milieu de MM_3 et mesure de la projection de MM_3 sur la droite AD .

154. Sur les côtés Ox et Oy de l'angle xOy on considère les points variables B et C tels que $OB + OC = 2a$ où a est une longueur donnée. On construit le symétrique C' de C par rapport à la bissectrice de l'angle xOy .

1° Montrer que le milieu I de BC' est un point fixe.

2° Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle BCC' est fixe.

3° Montrer que le cercle circonscrit au triangle OBC passe par un deuxième point fixe et trouver le lieu de son centre.

155. On considère les rotations $[A, 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})]$, $[B, 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})]$ et $[C, 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})]$ qui transforment respectivement M en M_1 , M_1 en M_2 et M_2 en M_3 .

Montrer que leur produit est la transformation identique et que M, M_1 et M_2 sont les symétriques d'un point P par rapport aux côtés du triangle ABC.

156. Soient Ox et Oy deux droites perpendiculaires et Δ une droite fixe qui les rencontre.

1° I étant un point fixe de Δ, construire la droite D passant par I, coupant Ox en M et Oy en N de façon que I soit le milieu de MN.

2° Lorsque I décrit la droite Δ, montrer que le cercle OMN passe par un second point fixe F autre que O.

157. Un billard rectangulaire a pour dimensions $AB = DC = a$; $AD = BC = b > a$. Une bille part de A et frappe successivement les bandes BC, CD et DA en des points M, N, P. Elle s'arrête après avoir bouclé un quadrilatère MNPQ (Q sur AM). L'angle de réflexion est égal, chaque fois, à l'angle d'incidence.

1° Entre quelles limites doit être compris $BM = x$ pour que les bandes soient frappées dans l'ordre donné? Quelle est alors la forme du quadrilatère MNPQ?

2° Prouver que les droites supportant les côtés ou la diagonale MP du quadrilatère MNPQ passent chacune par un point fixe.

3° Calculer en fonction de x l'aire du quadrilatère MNPQ. Deux des circonstances suivantes peuvent-elles se produire simultanément : MNPQ rectangle, MNPQ losange, MNPQ d'aire maxima.

158. Démontrer que l'on peut en général déterminer une affinité orthogonale d'axe donné Δ transformant deux droites données D_1 et D_2 en deux droites D'_1 et D'_2 rectangulaires ou en deux droites faisant un angle donné $(D'_1, D'_2) = \theta + k\pi$.

159. Trouver une affinité d'axe donné Δ transformant les droites D_1 et D_2 en deux droites de directions données.

160. Montrer qu'il existe en général une affinité d'axe BC transformant un triangle ABC en un triangle A'BC directement semblable à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$.

161. 1° Démontrer que le produit de l'affinité $\alpha(\Delta, \delta, k)$ et d'une translation de vecteur \vec{T} parallèle à Δ est commutatif.

2° Utiliser cette propriété pour montrer que l'affinité α transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles.

162. On considère les deux affinités $\alpha(\Delta_1, \delta, k)$ et $\alpha(\Delta_2, \delta, k)$ d'axes parallèles, de même direction et de même rapport. La première transforme M en M_1 et la seconde M en M_2 . Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est constant. En déduire que le produit $\alpha(\Delta_2, \delta, k) \circ \alpha(\Delta_1, \delta, \frac{1}{k})$ est une translation.

163. Affinité généralisée. — Soit α l'affinité d'axe Δ définie par le point A et son transformé A'. On désigne par a la projection orthogonale de A sur Δ.

1° Montrer que l'homologue M' de tout point M du plan se projetant orthogonalement en m sur Δ est défini par la condition : le triangle mMM' est directement semblable au triangle aAA'.

2° Étudier le cas où l'angle aAA' est droit. La transformation \mathfrak{S} ainsi définie possède les mêmes propriétés que l'affinité et transforme une droite en une droite, avec conservation des rapports.

3° Démontrer que le produit de deux symétries obliques de même axe Δ est une transformation \mathfrak{S} . Établir la réciproque.

164. Démontrer que le produit des affinités de même axe $\alpha(\Delta, \delta_1, k_1)$ et $\alpha(\Delta, \delta_2, k_2)$ est une affinité $\alpha(\Delta, \delta, k_1k_2)$ pour $k_1k_2 \neq +1$, une affinité généralisée pour $k_1k_2 = 1$ (cf. ex. n° 163).

165. On considère deux affinités d'axes Δ_1 et Δ_2 concourants en O, de même direction δ et de rapports respectifs k_1 et k_2 . On suppose $k_1k_2 \neq 1$.

1° Démontrer que sur toute parallèle à δ coupant Δ_1 et Δ_2 en ω_1 et ω_2 , le produit T des deux affinités se réduit au produit des homothéties $H(\omega_2, k_2) \circ H(\omega_1, k_1)$, donc à une homothétie $H(\omega, k_1k_2)$.

2° Démontrer que le lieu du centre ω est une droite Δ, issue de O et que le produit T des deux affinités est l'affinité $\alpha(\Delta, \delta, k_1k_2)$.

166. Reprendre l'étude précédente :

1° pour Δ_1 et Δ_2 concourants et $k_1k_2 = 1$. Le produit T est une affinité généralisée (ex. n° 163).

2° pour Δ_1 et Δ_2 parallèles et $k_1k_2 \neq 1$, puis pour $k_1k_2 = 1$ (cf. ex. n° 162).

167. 1° Démontrer qu'une affinité est déterminée quand on se donne deux couples de points homologues (A, A') et (B, B') tels que $\overrightarrow{AA'}$ soit parallèle à $\overrightarrow{BB'}$ et en outre soit le rapport de l'affinité, soit pour $\overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{BB'}$ la direction de l'axe Δ . Étudier le cas où l'affinité est orthogonale.

2° Démontrer qu'une affinité est en général déterminée par la donnée de trois couples de points homologues (A, A') , (B, B') et (C, C') tels que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ soient parallèles.

168. Soit le transformation T qui, dans un repère orthonormé, au point $M(x, y)$ fait correspondre le point $M'(x', y')$ de façon que : $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$; $y' = -x \sin \theta - y \cos \theta$ où θ est un angle donné.

1° Montrer que $T^{-1} = T$.

2° Soit $z = x + iy$ l'affixe de M , $\bar{z} = x - iy$ celui de son conjugué et $z' = x' + iy'$ l'affixe de M' . Calculer z' en fonction de \bar{z} . En déduire que T est le produit de deux transformations classiques.

169. Le plan est rapporté au système d'axes orthonormé $x'Ox, y'Oy$, de vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} .

1° Soit (A) l'affinité qui a pour axe la droite d'équation $y = -x$, pour direction $y'Oy$, pour rapport 2. Montrer qu'elle transforme le point $M(x, y)$ en le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

2° Soit (T) la transformation ponctuelle qui à $M(x, y)$ fait correspondre $M_1(x_1, y_1)$ tel que :

$$\begin{cases} x_1 = x + 2y, \\ y_1 = x. \end{cases}$$

Montrer que (T) est le produit ordonné de (A) par une deuxième transformation, (S) , que l'on définira. Soit $(T) = (S)_o(A)$.

3° Définir la transformation (T^{-1}) réciproque de (T) . Calculer $x_1 + y_1$ et $x_1 - 2y_1$.

4° Montrer que les directions définies par $y = -x$ et $y = \frac{x}{2}$ sont invariantes dans (T) .

170. Dans un repère orthonormé xOy on considère la transformation T qui, au point $M(x, y)$ fait correspondre le point $M'(x', y')$ à l'aide des relations :

$$x' = -\frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{2}{3}y; \quad y' = \frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{5}}{3}y.$$

1° Montrer que T admet une droite de points doubles Δ que l'on déterminera.

2° Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est perpendiculaire à Δ .

3° Trouver le lieu du milieu I de MM' .

4° En déduire la nature de la transformation T .

171. Soit, dans le plan, un repère orthonormé Oxy . On considère la transformation ponctuelle (S) qui, à tout point M de coordonnées (x, y) , fait correspondre le point M' de coordonnées $(x' = kx; y' = -ky)$, k étant un nombre positif donné différent de 1.

1° a) Utiliser l'équation générale d'un cercle rapporté au repère précédent pour montrer, par le calcul, que la figure transformée par (S) d'un cercle est un cercle.

b) Montrer que la transformation (S) est le produit d'une homothétie (H) de centre O et de la symétrie d'axe $x'x$.

2° Soit N le transformé du point M dans l'homothétie (H) . On désigne par I le milieu du segment MN et par I' le milieu du segment MM' . Calculer les ordonnées des points I et I' en fonction de l'ordonnée y du point M et démontrer que le point I' est le transformé du point I dans une affinité orthogonale, dont on précisera l'axe et le rapport.

En déduire que la médiatrice (D) du segment MM' est la transformée de la médiatrice (d) du segment MN dans cette affinité.

3° La droite (d) étant toujours la médiatrice du segment MN , soit P le symétrique du point O par rapport à la droite (d) . Démontrer que : $\overrightarrow{OP} = (1 + k)\overrightarrow{OM}$.

En déduire que, lorsque le point M décrit un cercle (C) ne passant pas par l'origine, O , le point P décrit un cercle, dont on précisera le centre, F .

COURBES D'ÉQUATION : $y^2 = ax^2 + bx + c$

91. Remarque. — Soit (C) la courbe qui, dans le repère rectangulaire xOy , de vecteurs unitaires \vec{I} et \vec{J} a pour équation $Y^2 = AX^2 + BX + C$. Soient \vec{i} et \vec{j} les vecteurs unitaires du repère orthonormé d'axes Ox et Oy . Les formules du changement d'axes sont : $x = \alpha X$ et $y = \beta Y$ avec : $\vec{I} = \alpha \vec{i}$ et $\vec{J} = \beta \vec{j}$ (n° 14). L'équation de la courbe (C) dans le repère orthonormé xOy est donc : $y^2 = A \frac{\beta^2}{\alpha^2} x^2 + B \frac{\beta^2}{\alpha} x + C \beta^2$.

En posant : $a = A \frac{\beta^2}{\alpha^2}$; $b = B \frac{\beta^2}{\alpha}$ et $c = C \beta^2$, on obtient :

$$y^2 = ax^2 + bx + c \quad (1); \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Pour étudier la forme de la courbe (C), nous supposons donc le repère xOy orthonormé.

92. Axe de symétrie. — Si le point $M(x, y)$ appartient à C, il en est de même du point $M'(x, -y)$. L'axe $x'x$ est un axe de symétrie pour la courbe C qui est la réunion des courbes C_1 et C_2 d'équations respectives :

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

93. Centre de symétrie. — Soit le point $\omega(x_0, y_0)$. Effectuons la translation d'axes définie par le vecteur $\vec{O\omega}$. Dans le nouveau repère orthonormé $X\omega Y$, l'équation $y^2 = ax^2 + bx + c$ de la courbe C devient (n° 13) :

$$(y_0 + Y)^2 = a(x_0 + X)^2 + b(x_0 + X) + c,$$

$$\text{soit : } F(X, Y) \equiv aX^2 - Y^2 + (2ax_0 + b)X - 2y_0Y + ax_0^2 + bx_0 + c - y_0 = 0.$$

Pour que ω soit centre de symétrie de la courbe C, il faut et il suffit que $F(X, Y) = 0$ entraîne $F(-X, -Y) = 0$, donc que pour tout point $M(X, Y)$ de C :

$$(2ax_0 + b)X - 2y_0Y = 0.$$

L'existence du centre de symétrie ω équivaut à la résolution du système :

$$2ax_0 + b = 0; \quad y_0 = 0.$$

1° Si $a \neq 0$, le point ω est unique et a pour coordonnées : $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = 0$.

L'équation de la courbe C dans le repère $X\omega Y$ s'écrit alors :

$$y^2 = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{Y^2 = aX^2 - \frac{\Delta}{4a}} \quad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac.$$

2° Si $a = 0$, $b \neq 0$, la courbe C n'a pas de centre de symétrie.

3° Si $a = 0$, $b = 0$, tout point de l'axe $x'x$ est un centre de symétrie pour la courbe C.

94. Exemple I. — Étude de la courbe d'équation : $y^2 = 4$.

$y^2 = 4 \iff y = \pm 2$. La courbe C est l'ensemble des droites D_1 et D_2 , parallèles à l'axe $x'x$ et d'équations respectives $y = 2$ et $y = -2$ (fig. 70).

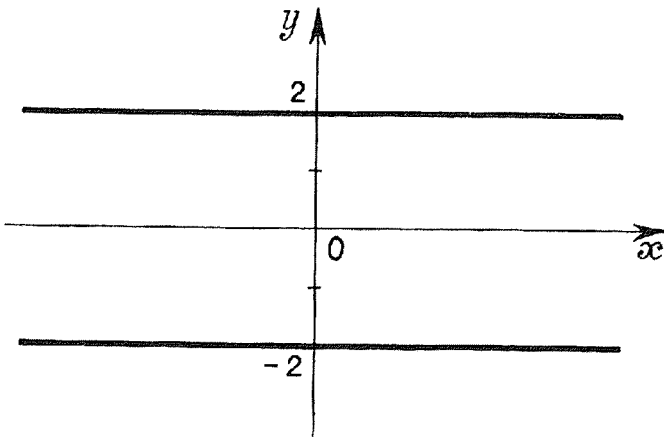


Fig. 70

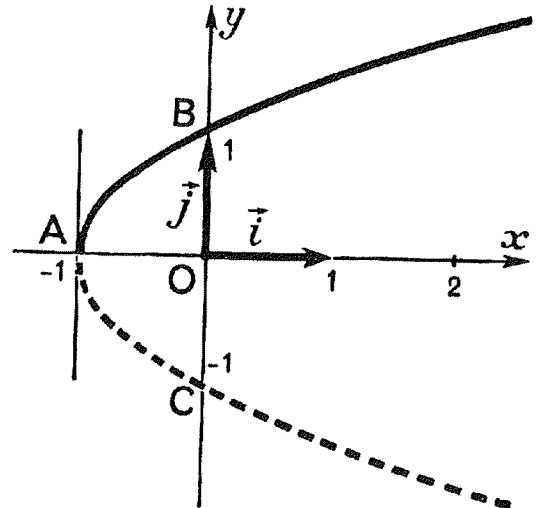


Fig. 71

95. Exemple II. — Étude de la courbe d'équation : $y^2 = x + 1$ (repère orthonormé).

La courbe C n'a pas de centre et coupe l'axe $x'x$ au point A ($-1, 0$).

Effectuons la translation de vecteur \vec{OA} . Dans le nouveau repère XAY, l'équation de la courbe C devient : $Y^2 = X$ (fig. 71).

On sait que C est la parabole de sommet A, d'axe AX, de tangente au sommet AY (Géométrie, 1^{re} D, 10^e leçon).

Le foyer F a pour coordonnées $x = -\frac{3}{4}$; $y = 0$. La directrice a pour équation $x = -\frac{5}{4}$.

96. Exemple III. — Étude de la courbe d'équation : $y^2 = -\frac{4}{9}(x^2 - 4x - 5)$.

L'équation de C s'écrit (n° 93) : $y^2 = -\frac{4}{9}(x - 2)^2 + 4$.

Soit ω le point de coordonnées $x_0 = 2$; $y_0 = 0$. Dans le repère $X\omega Y$, déduit de xOy par la translation de vecteur $\vec{O\omega}$, l'équation de C devient :

$$Y^2 = -\frac{4}{9}X^2 + 4 \iff \boxed{\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1.}$$

En résolvant par rapport à Y on obtient : $Y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{9 - X^2}$.

Construisons la courbe C_1 d'équation : $Y = f(X) = \frac{2}{3}\sqrt{9 - X^2}$.

La fonction $f(X)$ est une fonction paire définie sur le segment $[-3, +3]$. Sa dérivée

$Y' = -\frac{2}{3} \frac{X}{\sqrt{9 - X^2}}$ est du signe contraire de X et devient infinie lorsque X tend vers ± 3 . On obtient le tableau de variation suivant :

X	-3	0	$+3$
Y'	$+\infty$	$+$	$-\infty$
Y	0	\nearrow	0

La courbe C s'obtient en adjoignant à C_1 sa symétrique C_2 par rapport à $x'x$ (fig. 72).

Puisque le repère $X\omega Y$ est orthonormé, la courbe C est l'homologue dans l'affinité orthogonale d'axe $X'X$, de rapport $\frac{2}{3}$ du cercle d'équation $X^2 + Y^2 = 9$ (n° 90). Elle est aussi l'homologue dans l'affinité orthogonale d'axe $Y'Y$, de rapport $\frac{3}{2}$ du cercle d'équation : $X^2 + Y^2 = 4$.

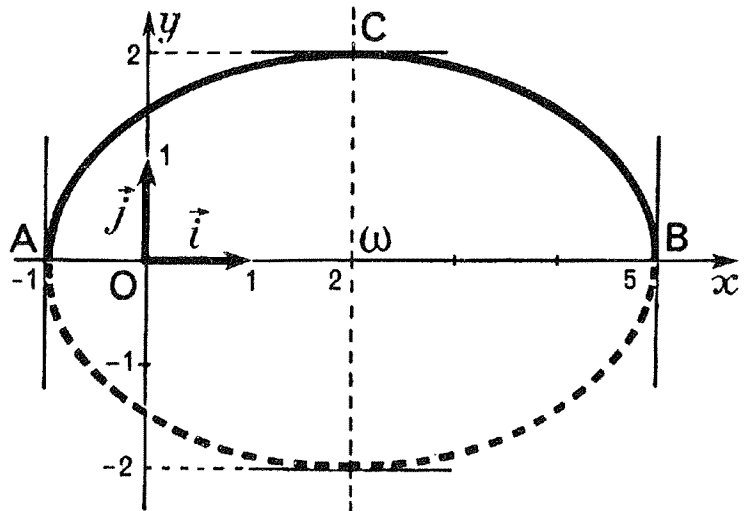


Fig. 72

La courbe C se nomme *ellipse* ; ses axes de symétrie sont ωX et ωY ; ses demi-axes ont pour longueurs respectives 3 sur $X'X$ et 2 sur $Y'Y$.

97. Exemple IV. — Étude de la courbe C d'équation : $y^2 = \frac{9}{16} (x^2 - 2x - 3)$.

L'équation de la courbe C s'écrit (n° 93) : $y^2 = \frac{9}{16} [(x - 1)^2 - 4]$.

Soit ω le point de coordonnées $x_0 = 1$; $y_0 = 0$. Dans le repère $X\omega Y$, déduit du premier xOy par la translation de vecteur $\vec{O\omega}$, l'équation de C devient :

$$Y^2 = \frac{9}{16} X^2 - \frac{9}{4} \iff \frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = \frac{1}{4} \iff \boxed{\frac{X^2}{4} - \frac{4Y^2}{9} = 1.}$$

Cette équation, résolue par rapport à Y donne : $Y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{X^2 - 4}$.

Construisons la courbe C_1 d'équation : $Y = f(X) = \frac{3}{4} \sqrt{X^2 - 4}$.

La fonction $f(X)$ est une fonction paire définie pour $|X| \geq 2$. Sa dérivée $Y' = \frac{3}{4} \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4}}$ est du signe de X . La courbe C_1 admet l'axe ωY pour axe de symétrie. Si X tend vers $+\infty$, il en est de même de Y et :

$$\frac{Y}{X} = \frac{3}{4} \frac{\sqrt{X^2 - 4}}{X} = \frac{3}{4} \sqrt{1 - \frac{4}{X^2}} \rightarrow \frac{3}{4}$$

$$Y - \frac{3X}{4} = \frac{3}{4} [\sqrt{X^2 - 4} - X] = \frac{-3}{X + \sqrt{X^2 - 4}} \rightarrow 0 \text{ (avec le signe } -\text{).}$$

La courbe C_1 admet comme asymptote la droite d'équation : $Y = \frac{3X}{4}$.

Par symétrie d'axe ωY , elle admet aussi l'asymptote d'équation : $Y = -\frac{3X}{4}$.

On obtient le tableau de variation suivant :

X	$-\infty$	-2	$+2$	$+\infty$
Y'		$-$	$+$	
Y	$+\infty$	\searrow	0	\nearrow

La courbe C_1 est la courbe en trait plein de la figure 73.

La courbe C s'obtient en adjoignant à C_1 sa symétrique C_2 par rapport à l'axe $x'x$.

La courbe C se nomme *hyperbole* ; les axes de symétrie sont ωX et ωY , le point ω est le centre de symétrie, les droites d'équations $Y = \pm \frac{3}{4} X$ sont les asymptotes de cette hyperbole. L'axe ωX est l'axe transverse de l'hyperbole C.

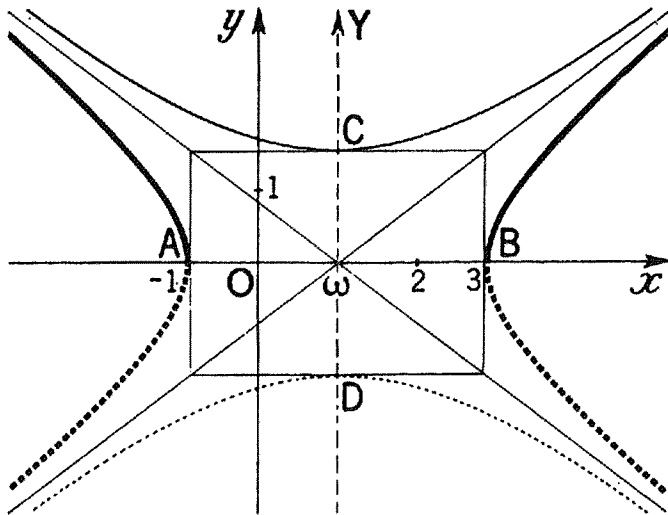


Fig. 73

98. Exemple V. — Étude de la courbe d'équation : $y^2 = \frac{9}{16} (x^2 - 2x + 5)$.

L'équation de cette courbe C' s'écrit

$$y^2 = \frac{9}{16} [(x - 1)^2 + 4].$$

En effectuant le même changement de repère qu'au paragraphe précédent, on obtient comme équation de C' :

$$Y^2 = \frac{9}{16} (X^2 + 4) \iff \frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = -\frac{1}{4}$$

Soit : $\boxed{\frac{4}{9} Y^2 - \frac{X^2}{4} = 1.}$

La courbe C'_1 a pour équation : $Y = \frac{3}{4} \sqrt{X^2 + 4}$; elle admet l'axe ωY comme axe de symétrie. La fonction Y est définie pour tout X ; sa dérivée :

$Y' = \frac{3}{4} \frac{X}{\sqrt{X^2 + 4}}$ a le signe de X. Si $X \rightarrow +\infty$:

$$Y - \frac{3}{4} X = \frac{3}{4} (\sqrt{X^2 + 4} - X) = \frac{3}{X + \sqrt{X^2 + 4}} \rightarrow 0 \text{ avec le signe } +.$$

La courbe C'_1 admet mêmes asymptotes que la courbe C_1 (n° 97).

On obtient le tableau de variation suivant et le graphe en trait fin de la figure 73, complété par la symétrie d'axe $x'x$.

X	$-\infty$	0	$+\infty$
Y'		$-$	$+$
Y	$+\infty$	\searrow	\nearrow

La courbe C' est une hyperbole admettant mêmes éléments de symétrie, mêmes asymptotes que l'hyperbole C du n° 97, mais qui n'est pas située dans les mêmes angles définis par ces asymptotes. L'axe transverse de l'hyperbole C' est l'axe ωY .

99. Remarque. — Dans les exemples IV et V, adoptons un nouveau repère $X_1 \omega Y_1$ où les vecteurs unitaires \vec{I} et \vec{J} des axes ωX_1 et ωY_1 soient, en fonction des vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} du repère orthonormé XOY définis par :

$$\vec{I} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{J} = 4\vec{i} + 3\vec{j}.$$

Les nouveaux axes ωX_1 et ωY_1 sont les asymptotes des courbes C et C'. Pour tout point M de coordonnées (X, Y) dans le repère initial et (X_1, Y_1) dans le nouveau repère :

$$\vec{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j} = X_1\vec{I} + Y_1\vec{J} = X_1(4\vec{i} - 3\vec{j}) + Y_1(4\vec{i} + 3\vec{j}).$$

On en déduit : $X = 4(X_1 + Y_1)$ et $Y = -3(X_1 - Y_1)$.

Dans le nouveau repère $X_1\omega Y_1$, les équations des courbes C et C' : sont

$$4(X_1 + Y_1)^2 - 4(X_1 - Y_1)^2 = 1 \quad \text{et} \quad -4(X_1 + Y_1)^2 + 4(X_1 - Y_1)^2 = 0$$

soit : $X_1Y_1 = \frac{1}{16}$ et $X_1Y_1 = -\frac{1}{16}$.

Ce qui justifie le nom d'hyperboles donné aux courbes C et C'.

ÉTUDE DU CAS GÉNÉRAL

100. 1^{er} cas : a = 0. — L'équation de la courbe C s'écrit : $y^2 = bx + c$ (2)

1° Si $b = 0$, elle se réduit à $y^2 = c$. Elle représente (fig. 74) deux droites distinctes parallèles à l'axe $x'x$ si $c > 0$; deux droites confondues avec l'axe $x'x$ si $c = 0$; elle est impossible si $c < 0$.

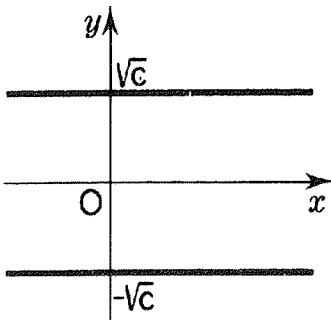


Fig. 74

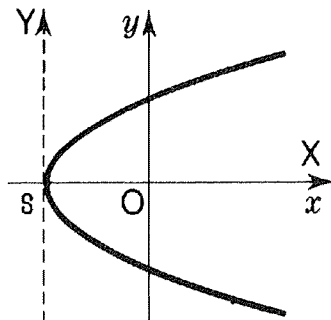


Fig. 75

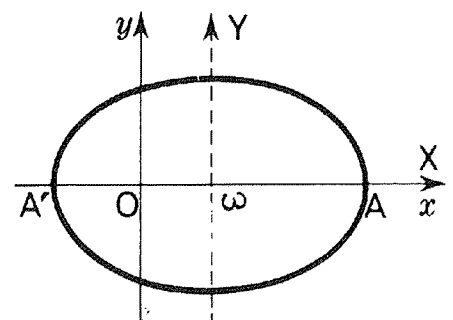


Fig. 76

2° Si $b \neq 0$, la courbe C n'a pas de centre (n° 93). L'équation (2) s'écrit :

$$y^2 = b \left(x + \frac{c}{b} \right).$$

Soit S le point de coordonnées $x_0 = -\frac{c}{b}$; $y_0 = 0$. L'équation de la courbe C, dans le repère XSY déduit du repère xOy par la translation \vec{OS} , est :

$$\boxed{Y^2 = bX.} \tag{3}$$

C'est l'équation d'une parabole (fig. 75), de sommet S dont les axes SX et SY sont respectivement l'axe de symétrie et la tangente au sommet.

Le paramètre algébrique de cette parabole est $p = \frac{b}{2}$. Le foyer F a pour coordonnées $X = \frac{b}{4}$; $Y = 0$. La directrice Δ de cette parabole a pour équation $X = -\frac{b}{4}$.

101. 2^e cas : $a < 0$. — La courbe C a un centre unique $\omega \left(-\frac{b}{2a}; 0 \right)$. Dans le repère $X\omega Y$ déduit du premier xOy par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$, l'équation de la courbe C s'écrit, (n^o 93), en posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$Y^2 = aX^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad (4)$$

1^o Si $\Delta < 0$, le second membre de l'équation (4) est négatif. Cette équation est impossible dans R. Si $\Delta = 0$ elle est vérifiée par le seul point ω ($X = 0$; $Y = 0$).

2^o Si $\Delta > 0$, posons $\frac{\Delta}{4a^2} = \alpha^2$ et $\frac{\Delta}{4a} = -\beta^2$ ($\alpha > 0$; $\beta > 0$).

L'équation de la courbe C s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1.} \quad (5)$$

En résolvant par rapport à Y, on obtient la double équation : $Y = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - X^2}$.

On construit la courbe C_1 d'équation : $Y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - X^2}$ où Y est une fonction paire de X.

La fonction Y de X est définie pour $|X| \leq \alpha$; sa dérivée $Y' = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{X}{\sqrt{\alpha^2 - X^2}}$ est du signe contraire de X. On obtient le tableau suivant :

X	$-\alpha$	0	$+\alpha$
Y'	$+\infty$	0	$-\infty$
Y	0	$\nearrow \beta$	$\searrow 0$

On construit la courbe C_1 , puis sa symétrique C_2 par rapport à l'axe $x'x$, comme à l'exemple du n^o 96 (fig. 76).

La courbe C est une ellipse transformée du cercle (P) d'équation $X^2 + Y^2 = \alpha^2$ dans l'affinité orthogonale d'axe $X'X$, et de rapport $\frac{\beta}{\alpha}$. Elle est aussi la transformée du cercle

(S) d'équation $X^2 + Y^2 = \beta^2$ dans l'affinité orthogonale d'axe $Y'Y$ et de rapport $\frac{\alpha}{\beta}$.

Les cercles (P) et (S) se nomment respectivement (si $\alpha > \beta$) cercle principal et cercle secondaire de l'ellipse.

Notons que si $a = -1$, la courbe C d'équation : $X^2 + Y^2 = \frac{\Delta}{4}$ est un cercle de centre ω .

102. 3^e cas : $a > 0$. — La courbe C a un centre unique $\omega \left(-\frac{b}{2a}; 0 \right)$. Dans le repère $X\omega Y$, déduit de xOy par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$, l'équation de la courbe C est (n^o 93) :

$$Y^2 = aX^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad (4)$$

1^o Si $\Delta = 0$, l'équation (4) s'écrit : $Y^2 = aX^2 \iff Y = \pm X\sqrt{a}$. Elle représente deux droites issues de ω et symétriques par rapport à l'axe $x'x$ (fig. 77).

2^o Si $\Delta > 0$, posons $\frac{\Delta}{4a^2} = \alpha^2$; $\frac{\Delta}{4a} = \beta^2$ ($\alpha > 0$ et $\beta > 0$).

On obtient : $\boxed{\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1.} \iff Y = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{X^2 - \alpha^2}.$ (6)

On construit la courbe C_1 d'équation : $Y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{X^2 - \alpha^2}$, où Y est une fonction paire de X , définie pour $|X| \geq \alpha$. Sa dérivée $Y' = \frac{\beta}{\alpha} \frac{X}{\sqrt{X^2 - \alpha^2}}$ est du signe de X .

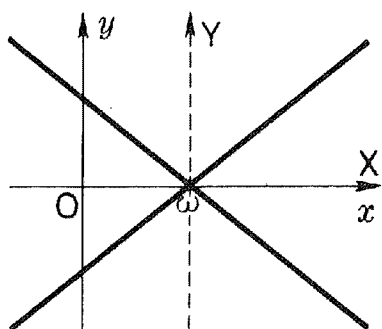


Fig. 77

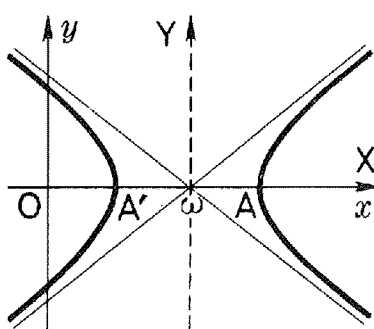


Fig. 78

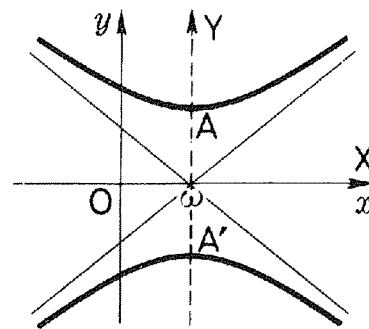


Fig. 79

Lorsque X tend vers $+\infty$:

$$Y - \frac{\beta}{\alpha} X = \frac{\beta}{\alpha} [\sqrt{X^2 - \alpha^2} - X] = \frac{-\alpha\beta}{X + \sqrt{X^2 - \alpha^2}} \rightarrow 0 \text{ (avec le signe -).}$$

La courbe C_1 , symétrique par rapport à ωY , admet donc les asymptotes d'équations : $Y = \pm \frac{\beta}{\alpha} X$. On obtient le tableau de variation suivant :

X	$-\infty$	$-\alpha$	$+\alpha$	$+\infty$	
Y'		-	$-\infty$	$+\infty$	+
Y	$+\infty$	\searrow	0	\nearrow	$+\infty$

En construisant C_1 , puis sa symétrique C_2 par rapport à $X'X$, on obtient l'hyperbole (H) d'axe transverse $X'X$, d'axe non transverse $Y'Y$ (fig. 78).

3° Si $\Delta < 0$, on pose : $\frac{\Delta}{4a^2} = -\alpha^2$ et $\frac{\Delta}{4a} = -\beta^2$. L'équation (4) devient :

$$\boxed{\frac{Y^2}{\beta^2} - \frac{X^2}{\alpha^2} = 1.} \iff Y = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{X^2 + \alpha^2}.$$
 (7)

On construit la courbe C_1 d'équation : $Y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{X^2 + \alpha^2}$ ($\alpha > 0$; $\beta > 0$) où Y est une fonction paire de X , définie pour tout X . Sa dérivée $Y' = \frac{\beta}{\alpha} \frac{X}{\sqrt{X^2 + \alpha^2}}$ est du signe de X . L'axe ωY est un axe de symétrie de la courbe C_1 . Si $X \rightarrow +\infty$:

$$Y - \frac{\beta}{\alpha} X = \frac{\beta}{\alpha} [\sqrt{X^2 + \alpha^2} - X] = \frac{\alpha\beta}{X + \sqrt{X^2 + \alpha^2}} \rightarrow 0 \text{ (avec le signe +).}$$

La courbe C_1 admet pour asymptotes les droites d'équations $Y = \pm \frac{\beta}{\alpha} X$.

On obtient le tableau de variation suivant :

X	$-\infty$	0	$+\infty$	
Y'		-	+	
Y	$+\infty$	\searrow	\nearrow	$+\infty$

En construisant C_1 , puis sa symétrique C_2 par rapport à $X'X$ on obtient l'hyperbole (H), d'axe transverse $Y'Y$, d'axe non transverse $X'X$ (fig. 79).

Nous justifierons le nom d'hyperbole donné à la courbe C lorsque a est positif en cherchant l'équation de C dans un repère dont les axes sont les asymptotes de C (voir n° 109).

En particulier si $\alpha = \beta$, les asymptotes sont les bissectrices des axes ωX et ωY et sont donc perpendiculaires. L'hyperbole est dite équilatère.

103. Conclusion. — Les différentes formes de courbes C définies par l'équation $y^2 = ax^2 + bx + c$ dans un repère rectangulaire sont rassemblées dans le tableau suivant :

COURBE : $y^2 = ax^2 + bx + c$ $\Delta = b^2 - 4ac$.		
$a = 0$	$b = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} c > 0 \\ c = 0 \\ c < 0 \end{array} \right.$	Deux droites parallèles à Ox .
		Une droite double Ox .
		Équation impossible.
$a < 0$	$b \neq 0$	Parabole d'axe Ox .
	$\Delta > 0$	Ellipse d'axe Ox .
	$\Delta = 0$	Point isolé de Ox .
$a > 0$	$\Delta < 0$	Équation impossible.
	$\Delta > 0$	Hyperbole d'axe transverse Ox .
	$\Delta < 0$	Hyperbole d'axe non transverse Ox .
	$\Delta = 0$	Deux droites concourantes.

PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSE

104. Construction. — Soit l'ellipse qui dans le repère orthonormé xOy (fig. 80) a pour équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Traçons les cercles de centre O , de diamètres $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$.

Par le centre O , menons une demi-droite coupant le premier cercle en M_1 , le second en M_2 . Les parallèles M_1H à BB' et M_2K à AA' se coupent en M et : $\frac{HM}{HM_1} = \frac{OM_2}{OM_1} = \frac{b}{a}$.

Le lieu du point M est l'ellipse d'axes AA' et BB' . Soit T le point où la tangente en M_1 au cercle (AA') coupe Ox .

Le cercle (AA') admettant une tangente en M_1 , l'ellipse admet une tangente en M (n° 87) et cette tangente est la droite MT .

105. Représentation paramétrique de l'ellipse. — Soit $\varphi = (\vec{Ox}, \vec{OM_1})$. Les coordonnées de M_1 sont $x_1 = a \cos \varphi$; $y_1 = a \sin \varphi$ et : $\frac{HM}{HM_1} = \frac{b}{a}$ entraîne que les coordonnées x et y de M sont :

$$\boxed{x = a \cos \varphi \quad y = b \sin \varphi.}$$

Ces deux relations, appelées *équations paramétriques de l'ellipse*, sont nécessaires et suffisantes pour que le point $M(x, y)$ appartienne à l'ellipse d'axes AA' et BB' car :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

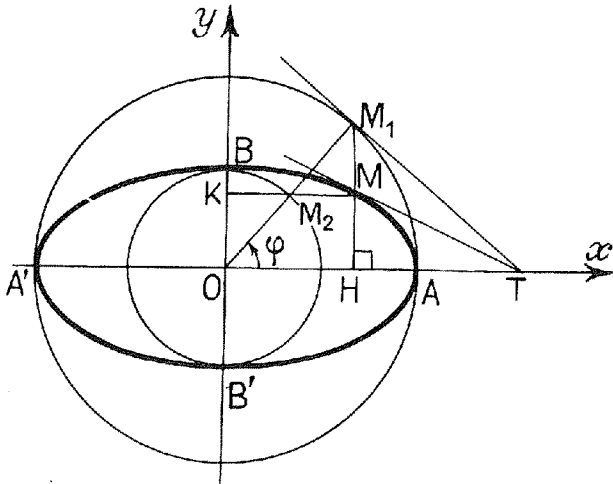


Fig. 80

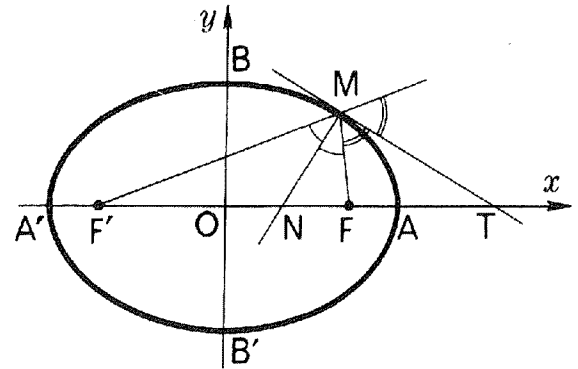


Fig. 81

106. Foyers de l'ellipse. — On appelle foyers de l'ellipse les points $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ où $c^2 = a^2 - b^2$, a désignant le demi-grand axe et b le demi-petit axe de l'ellipse.

Pour tout point $M(x, y)$ de l'ellipse (fig. 81) :

$$MF^2 = (a \cos \varphi - c)^2 + b^2 \sin^2 \varphi = (a \cos \varphi - c)^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 \varphi = (a - c \cos \varphi)^2$$

$$MF'^2 = (a \cos \varphi + c)^2 + b^2 \sin^2 \varphi = (a \cos \varphi + c)^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 \varphi = (a + c \cos \varphi)^2.$$

Or : $|c| < a \implies |c \cos \varphi| < a$ et $MF = a - c \cos \varphi$; $MF' = a + c \cos \varphi$.

Donc : $MF + MF' = 2a$.

Les segments MF et MF' se nomment rayons vecteurs du point M et :

Dans toute ellipse la somme des rayons vecteurs est constante et égale au grand axe de l'ellipse.

La longueur c se nomme demi-distance focale de l'ellipse.

PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLE

107. Représentation paramétrique. — Considérons l'hyperbole qui dans le repère orthonormé xOy (fig. 82) a pour équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2 y^2}{b^2 x^2} = 1$.

A tout point $M(x, y)$ de l'hyperbole on peut associer un angle $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que :

$$\cos \theta = \frac{a}{x} \text{ et } \sin \theta = \frac{ay}{bx} \implies \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{b}.$$

On obtient :

$$x = \frac{a}{\cos \theta}; \quad y = b \operatorname{tg} \theta.$$

Ces équations constituent une représentation paramétrique de l'hyperbole qui est décrite en entier lorsque θ varie dans un intervalle de 2π rad. En particulier la branche

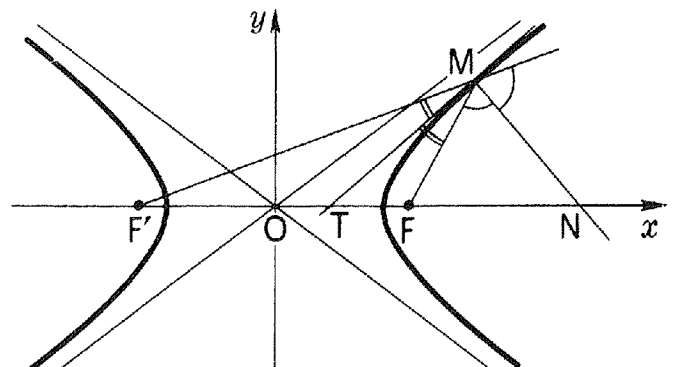


Fig. 82

de l'hyperbole située dans les quadrants I et IV est décrite lorsque θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

108. Foyers de l'hyperbole. — Posons $c^2 = a^2 + b^2$. Les foyers de l'hyperbole sont les points $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$. Pour tout point M de l'hyperbole :

$$MF^2 = \left(\frac{a}{\cos \theta} - c\right)^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{(a - c \cos \theta)^2}{\cos^2 \theta} + (c^2 - a^2) \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{(c - a \cos \theta)^2}{\cos^2 \theta}$$

$$MF'^2 = \left(\frac{a}{\cos \theta} + c\right)^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{(a + c \cos \theta)^2}{\cos^2 \theta} + (c^2 - a^2) \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{(c + a \cos \theta)^2}{\cos^2 \theta}$$

Si M appartient aux quadrants I et IV, on en déduit :

$$MF = \frac{c}{\cos \theta} - a \quad \text{et} \quad MF' = \frac{c}{\cos \theta} + a \quad \Rightarrow \quad MF' - MF = 2a.$$

Par symétrie autour de $y'y$, si M appartient aux quadrants II et III : $MF - MF' = 2a$. Les segments MF et MF' sont les rayons vecteurs du point M et :

Dans toute hyperbole, la différence des rayons vecteurs est constante et égale au demi-axe focal de l'hyperbole.

La longueur c se nomme demi-distance focale de l'hyperbole.

109. Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. — Dans le plan du repère orthonormé xOy , de vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} (fig. 83), considérons l'hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, de foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$. Les asymptotes font avec l'axe focal Ox l'angle aigu α tel que (n° 102) :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{c}; \quad \sin \alpha = \frac{b}{c}$$

et

$$\sin 2\alpha = \frac{2ab}{c^2}.$$

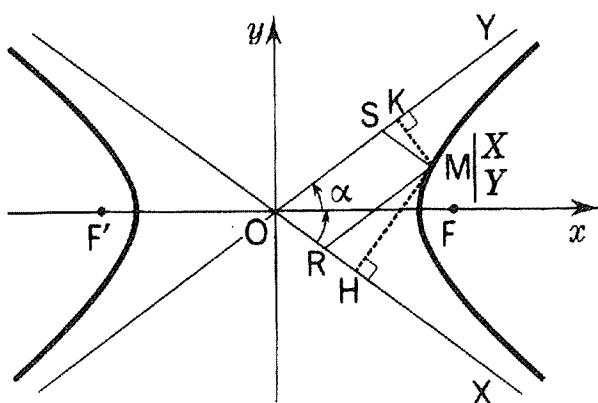


Fig. 83

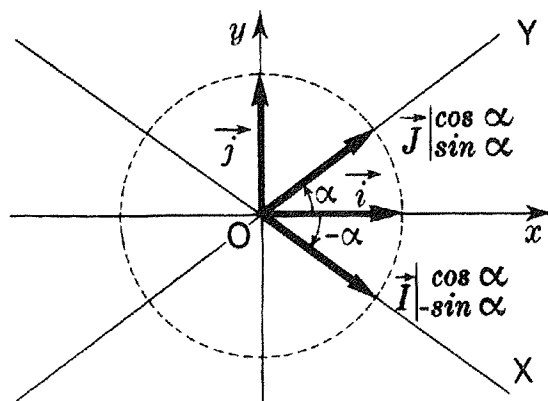


Fig. 84

Adoptons pour nouveau repère, le repère normé XOY formé par les asymptotes et de vecteurs unitaires \vec{I} et \vec{J} d'angles polaires $-\alpha$ et α , donc tels que (fig. 84) :

$$\vec{I} = \vec{i} \cos \alpha - \vec{j} \sin \alpha; \quad \vec{J} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha.$$

Pour tout point $M(x, y)$ du plan :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{I} + Y\vec{J} = (X + Y)\vec{i} \cos \alpha + (Y - X)\vec{j} \sin \alpha.$$

Donc : $x = (X + Y) \cos \alpha = \frac{a}{c}(X + Y)$; $y = (Y - X) \sin \alpha = \frac{b}{c}(Y - X)$.

et $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(X + Y)^2}{c^2} - \frac{(Y - X)^2}{c^2} = 1 \iff \boxed{XY = \frac{c^2}{4}}$

Rapportée au repère normé constitué par ses asymptotes orientées symétriquement par rapport à l'axe focal, toute hyperbole de distance focale $2c$, a pour équation : $XY = \frac{c^2}{4}$.

Les parallèles aux asymptotes menées par M coupent OX en R et OY en S (fig. 83).

On obtient : $\overline{OR} = X_M$ et $\overline{OS} = Y_M \implies \boxed{\overline{OR} \cdot \overline{OS} = \frac{c^2}{4}}$

110. Corollaire. — Le produit des distances d'un point M de l'hyperbole à ses asymptotes est constant et égal à $\frac{a^2 b^2}{c^2}$.

Soient MH et MK les distances du point M à OX et OY (fig. 83) :

$MH = RM \sin 2\alpha$ et $MK = SM \sin 2\alpha$, d'où :

$MH \cdot MK = RM \cdot SM \sin^2 2\alpha = OR \cdot OS \sin^2 2\alpha = \frac{c^2}{4} \left(\frac{2ab}{c^2}\right)^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}$.

111. Remarques. — 1° En conservant OX et OY pour axes, mais en prenant pour vecteurs de base \vec{mI} et \vec{nJ} , l'équation de l'hyperbole s'écrit (n° 14) :

$xy = \frac{c^2}{4 mn} \implies xy = k$.

Dans tout repère xOy la courbe $xy = k$ est une hyperbole d'asymptotes Ox et Oy.

2° L'hyperbole est équilatère si l'angle XOY est égal à $\frac{\pi}{2}$, donc si $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Dans ce cas : $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$ et dans le repère orthonormé XOY l'équation de cette hyperbole s'écrit : $XY = \frac{a^2}{2}$.

EXERCICES

— Construire, dans un repère orthonormé xOy les courbes d'équations suivantes :

- 172. $y^2 = 2x - 3$. 173. $y^2 = 3x - 5$. 174. $y^2 = \frac{x}{2} - 4$.
- 175. $y^2 = -x + 4$. 176. $y^2 = 3(-x + 1)$. 177. $y^2 = -\frac{1}{3}x + 5$.
- 178. $y^2 = -x^2 + x - 2$. 179. $y^2 = (1 + x)(1 - x)$. 180. $y^2 = (1 + x)(3 - x)$.
- 181. $y^2 = -(x + 1)(3x - 4)$. 182. $y^2 = -3(x + 1)(x - 2)$.
- 183. $y^2 = -2x^2 - 3x + 5$. 184. $y^2 = -3x^2 + 4x + 7$.
- 185. $y^2 = 2(x + 1)(x - 2)$. 186. $y^2 = 3(x + 4)(x - 9)$.

187. $y^2 = 4x^2 + x - 5.$

188. $y^2 = \frac{x^2}{2} + 3x - 8.$

189. $y^2 = 2x^2 + x + 1.$

190. $y^2 = 3x^2 - 5x + 4.$

191. On se propose d'étudier, suivant les valeurs du paramètre $m \geq 0$, la forme des courbes (C) représentant les équations (1) : $y = \sqrt{m^2x^2 - 2x + 1}$.

1° Que peut-on dire de ces courbes par rapport aux courbes (C₁) représentant les équations (2) : $y^2 = m^2x^2 - 2x + 1$? En déduire l'étude des courbes (C) suivant les valeurs de m .

a) On envisagera, en premier lieu, le cas $m = 0$.

b) Si $m > 0$, montrer que (2) peut s'écrire sous la forme (3) : $y^2 = m^2(x - a)^2 + h$, où a et h sont des quantités dépendant du paramètre m . Que représente l'équation (3), suivant le signe de h ? Cas particulier où $h = 0$. Préciser à quelles valeurs de m ($m > 0$) correspondent ces résultats.

192. 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \sqrt{2x(4 - x)}$.

Tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé. Préciser la nature de cette courbe.

2° On considère la droite : $mx - y - 5m + 2\sqrt{2} = 0$.

Démontrer qu'elle passe par un point fixe quand on fait varier m . Utiliser la courbe obtenue au 1° pour discuter l'équation :

$$\sqrt{2x(4 - x)} = mx - 5m + 2\sqrt{2}.$$

3° Montrer que la réunion de la courbe du 1° et de sa symétrique par rapport à l'axe Ox est l'ensemble des points vérifiant la relation : $2x^2 + y^2 - 8x = 0$.

On considère l'équation du 2° degré :

$$(x - 4)t^2 - 2yt - 2x = 0,$$

où t est l'inconnue et (x, y) les coordonnées d'un point M du plan. Quel est l'ensemble des points M du plan pour lesquelles l'équation admet : a) Deux racines réelles distinctes ? b) Une racine double ? c) Deux racines complexes conjuguées ?

193. Dans le repère orthonormé xOy , on donne les points A ($a, 0$) et A' ($-a, 0$). Le point M (x, y) se projette orthogonalement en H sur l'axe $x'x$ et k est une constante réelle donnée :

1° Trouver l'équation du lieu de M sachant que $\overline{HM}^2 = k \overline{HA} \cdot \overline{HA'}$. Discuter la nature de ce lieu.

2° Pour quelle valeur de k ce lieu est-il un cercle ? Pour quelle valeur de k est-il une hyperbole équilatère ?

— Discuter suivant les valeurs de m la nature des courbes d'équations suivantes :

194. $y^2 = mx^2 + 2(1 - m)x + m - 1.$

195. $y^2 = -mx^2 - 3mx + 1 - 2m.$

196. $y^2 = (m - 1)x^2 - (m - 3)x - (m + 3).$

197. $y^2 = (m + 1)x^2 - 4x - 2(2m + 1).$

198. $y^2 = (m - 3)x^2 + (m + 3)x - m - 1.$

199. $y^2 = mx^2 - 2(m + 1)x + 3m + 2.$

200. $y^2 = (m - 2)x^2 + 2(m - 4)x + (m - 4)(m + 2).$

201. $y^2 = (2m - 1)x^2 - 2(m + 4)x + 5m + 2.$

202. Démontrer que toute affinité orthogonale par rapport à la tangente au sommet d'une parabole Γ transforme la parabole Γ en une parabole Γ' de même axe. Déterminer la relation entre les paramètres p et p' de Γ et de Γ' et le rapport k de l'affinité.

203. Un point variable M d'une parabole de foyer F se projette en H sur la tangente au sommet. Les perpendiculaires menées du sommet A et du point H à la droite AM coupent respectivement MH en K et AF en P. Démontrer que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{KH} = 4\overrightarrow{AF}$. En déduire l'enveloppe de HP et le lieu du point K.

204. On donne un point fixe A et une droite Δ . La perpendiculaire à Δ en un point variable K coupe en M la perpendiculaire menée par A à AK. Trouver le lieu du milieu I de MK et celui du point M.

205. Un point P se projette en A sur une droite Δ . La perpendiculaire à Δ en un point variable H et la perpendiculaire menée de A à PH se coupent en M. Déterminer le lieu du milieu I de HM.

206. On donne une droite fixe Δ , un point fixe F situé à la distance d de Δ et une longueur a . Un point M du plan se projette en H sur Δ . Déterminer dans chacune des hypothèses $a < d$, $a = d$ et $a > d$ le lieu du point M lorsque :

1° $MF + MH = a.$

2° $MF - MH = a.$

3° $MH - MF = a.$

207. 1° Le lieu des points dont la différence des carrés des distances à un point fixe ω et à une droite fixe Δ est une constante k , est une parabole Γ .

2° Le lieu des points M dont la distance MH à une droite fixe Δ est égale à la longueur de la tangente MT à un cercle fixe ω (ρ) est une parabole Γ .

208. Préciser les éléments des paraboles lieux des centres des cercles tangents à un cercle F (R) et à une droite donnée Δ située à la distance d de F suivant que l'on a : $d > R$, $d = R$, $d < R$ ou $d = 0$.

209. Dans le repère orthonormé xOy , on considère la droite variable (D) d'équation : $m^2y + 2mx + 2 = 0$ où m est un paramètre.

1° Discuter le nombre des droites (D) passant par un point A (x_0 y_0) du plan. Construire le lieu C des points A où passent deux droites confondues.

2° Trouver le lieu des points A où passent deux droites D perpendiculaires.

210. Dans un repère orthonormé xOy , on donne la droite D d'équation $x = a$.

1° Écrire l'équation d'un cercle Γ centré en ω (α , β), tangent à la droite D et coupant l'axe $y'y$ en deux points M' et M" tels que $\overline{OM'} = 2 \overline{OM''}$.

2° Trouver le lieu du centre de ce cercle.

3° Montrer que le cercle variable Γ reste tangent à un cercle fixe C.

211. 1° Discuter le nombre des points communs à l'ellipse E d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et à la droite D d'équation : $y = mx + p$.

2° On suppose m donné et p variable. Trouver le lieu du milieu I de M'M" si M' et M" sont les intersections de l'ellipse E et de la droite D.

212. Soit M et M' les extrémités de deux demi-diamètres rectangulaires d'une ellipse d'axe focal Ox tel que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM'}) = (\theta + \frac{\pi}{2})$.

1° Exprimer les coordonnées de M et M' en fonction de θ , $\rho = OM$ et $\rho' = OM'$ et démontrer la relation : $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OM'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

2° Soit H la projection du centre O sur MM'. Calculer \overline{OH}^2 et trouver l'enveloppe des côtés des losanges inscrits dans l'ellipse.

213. On considère sur l'ellipse d'équations paramétriques : $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, les points M et M' correspondant aux valeurs θ et $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$.

1° Que peut-on dire des rayons OM_1 et OM'_1 correspondants du cercle principal ?

2° Démontrer la relation : $OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2$.

3° Démontrer que l'aire du parallélogramme MOM'P est constante et égale à ab .

214. Dans le repère orthonormé xOy , les extrémités A et B du segment AB décrivent respectivement l'axe Ox et l'axe Oy. Le segment AB a pour longueur $a + b$. Soit M le point de ce segment tel que $BM = a$.

1° On construit le point P tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BM}$. Lieu de P ?

2° La droite MP coupe l'axe $x'x$ en H. Évaluer le rapport $\frac{\overline{HM}}{\overline{HP}}$. En déduire le lieu de M.

215. Dans le repère orthonormé xOy , on considère les points variables.

$$I \begin{cases} x = (a + b) \cos \varphi \\ y = (a + b) \sin \varphi \end{cases} \quad J \begin{cases} x = (a - b) \cos \varphi \\ y = (b - a) \sin \varphi \end{cases}$$

Montrer que le lieu du milieu M du segment IJ est une ellipse (E) de foyers F(c , 0) et F' ($-c$, 0) avec $c^2 = a^2 - b^2$. Les lieux de I et J sont deux cercles appelés *cercles de Chasles* de l'ellipse (E).

216. 1° Soit M₁ et M₂ les points du cercle principal et du cercle secondaire homologues d'un point donné M d'une ellipse. Démontrer que, si M₁ et M₂ sont alignés avec le centre O de l'ellipse, le cercle MM₁M₂ est tangent au cercle principal et au cercle secondaire.

2° Construire une ellipse connaissant son centre, les longueurs $2a$ et $2b$ de ses axes et un point donné M.

217. Dans un repère orthonormé xOy on considère l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dont le grand axe a pour sommets A ($-a$, 0) et B (a , 0). Une parallèle à Oy d'équation $x = a \cos \theta$ coupe (E) en M et M'.

1° Déterminer les coordonnées de M et M'. Établir les équations des droites AM et BM' et trouver les coordonnées de leur point commun P.

2° Quel est le lieu (H) du point P ? Montrer que c'est aussi le lieu du point P' intersection de AM' et BM et que les courbes (E) et (H) sont réciproques.

218. Soit l'ellipse E qui, dans le repère orthonormé xOy a pour équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et pour foyers les points $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$. On désigne par D et D' les droites d'équations respectives $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a^2}{c}$.

1° Un point $M(x, y)$ de l'ellipse se projette en H sur D et en H' sur D' . Évaluer MH et MH' en fonction de x .

2° Montrer que lorsque M décrit l'ellipse E , les rapports $\frac{MF}{MH}$ et $\frac{MF'}{MH'}$ sont égaux à une même constante.

219. Dans le repère orthonormé xOy , on considère l'hyperbole (H) et la droite (D) d'équations respectives : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $y = mx + p$.

1° Discuter la réalité des points d'intersection M' et M'' de (H) et de (D) .

2° On suppose m constant et p variable. Trouver le lieu du milieu I de $M'M''$, lorsque M' et M'' existent.

3° La droite D coupe les asymptotes de l'hyperbole en P' et P'' . Montrer que $M'M''$ et $P'P''$ ont même milieu. Quelle propriété en déduit-on lorsque M' et M'' sont confondus ?

220. Dans le repère orthonormé xOy on donne les droites D et D' d'équations respectives $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$. Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan. La parallèle à l'axe $y'y$ issue de M coupe l'axe $x'x$ en H et les droites D et D' en P et P' . La parallèle à $x'x$ issue de M coupe l'axe $y'y$ en K et les droites D et D' en Q et Q' .

1° Trouver le lieu de M lorsque $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = -b^2$.

2° Trouver le lieu de M lorsque $\overline{MQ} \cdot \overline{MQ'} = a^2$.

221. Soit l'hyperbole (H) qui dans le repère orthonormé xOy a pour équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et pour foyers les points $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$. On désigne par D et D' les droites d'équations respectives : $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a^2}{c}$.

1° Un point $M(x, y)$ de l'hyperbole se projette en K sur D et en K' sur D' . Évaluer MK et MK' en fonction de x .

2° Montrer que lorsque M décrit l'hyperbole (H) les rapports $\frac{MF}{MK}$ et $\frac{MF'}{MK'}$ sont égaux à une même constante.

222. Soient deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy , une droite fixe Δ , d'équation $x = d$ et sur Ox le point fixe ω tel que $\overline{O\omega} = kd$. Un point M du plan se projette en H sur Δ et on désigne par h une constante donnée.

1° Montrer que le lieu des points M tels que $\overline{M\omega}^2 - k\overline{MH}^2 = h$ est une conique Γ de centre O dont on établira l'équation. Discuter sa nature.

2° On suppose que $h = \rho^2$. Montrer que Γ est le lieu des points dont la puissance par rapport au cercle $\omega(\rho)$ est égale à $k\overline{MH}^2$ et que Γ passe par les points A et B communs à Δ et au cercle ω lorsqu'ils existent.

223. A tout point m du plan complexe, d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M d'affixe $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1° Déterminer les coordonnées X, Y , de M en fonction de celles, x, y , de m .

2° Montrer que, lorsque m décrit un cercle de centre O et de rayon r , le point M décrit une ellipse (E) , dont on déterminera les axes et les foyers. Inversement, on se donne une ellipse (E) de la famille trouvée ; de quel cercle est-elle la transformée ?

3° Montrer que, lorsque m décrit une droite issue de O , le point M décrit une hyperbole (H) , dont on déterminera les axes, les foyers et les asymptotes. Inversement, on se donne une hyperbole (H) de la famille trouvée. De quelle droite est-elle la transformée ?

4° En combien de points se coupent une ellipse (E) et une hyperbole (H) quelconques ? Montrer qu'en chacun de leurs points communs elles se coupent orthogonalement.

224. Dans un repère orthonormé xOy une conique E a pour équation :

$$12x^2 + 16y^2 + 12ax - 9a^2 = 0,$$

où a désigne la mesure d'une longueur donnée ($a > 0$).

1° Calculer les coordonnées de son centre, de ses foyers, de ses sommets.

Soit M un point quelconque de E . Calculer en fonction de a et de l'abscisse x de M l'expression rationnelle de la longueur OM . On pose : $OM = \rho$ et $(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \theta$. Calculer ρ en fonction de a et de θ .

2° A chaque point M de E , de coordonnées x, y , on associe le nombre complexe $z = x + iy$, affixe de M . Écrire l'expression trigonométrique de z (on désignera par θ son argument et l'on exprimera le module de z en fonction de a et de θ). Soit z' et z'' les affixes des deux points M' et M'' de E , d'arguments respectifs α et $\alpha + \pi$.

a) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z' - z''$ et en déduire la longueur du segment $M'M''$.

b) On considère, dans le plan, le point P dont l'affixe Z est définie par la relation : $\frac{2}{Z} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}$. Écrire l'expression trigonométrique de Z . En déduire le lieu géométrique de P quand α varie. Que peut-on dire de la figure formée par les points O, P, M', M'' ?



FONCTIONS VECTORIELLES

112. Définition. — On dit qu'un vecteur \vec{V} est fonction d'un paramètre variable t lorsque ses composantes scalaires dans un repère donné sont des fonctions de la variable t .

Si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les vecteurs de base du repère $Oxyz$ et si X, Y, Z , sont des fonctions $X(t), Y(t), Z(t)$ définies sur le segment $[a, b]$, le vecteur $\vec{V}(X, Y, Z)$ est une fonction vectorielle de t sur $[a, b]$. On écrit :

$$\vec{V} = \vec{V}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}.$$

Si dans le repère $Oxyz$ (fig. 85) on construit $\vec{OM} = \vec{V}(t)$, le point M décrit lorsque t varie sur $[a, b]$ une courbe (C) appelée indicatrice de la fonction vectorielle $\vec{V}(t)$.

113. Limites vectorielles. — 1^o Dire que $\vec{V}(t) \rightarrow \vec{0}$ lorsque $t \rightarrow t_0$ signifie que le module $|\vec{V}(t)| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow t_0$.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les composantes $X(t), Y(t)$ et $Z(t)$ tendent vers 0 lorsque t tend vers t_0 . En effet dans un repère $Oxyz$ orthonormé :

$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \implies |X| \leq |\vec{V}|; \quad |Y| \leq |\vec{V}|; \quad |Z| \leq |\vec{V}|.$$

$$\text{Donc : } |\vec{V}| \rightarrow 0 \implies X \rightarrow 0; \quad Y \rightarrow 0; \quad Z \rightarrow 0.$$

Réciproquement si X, Y, Z tendent simultanément vers 0, il en est de même de $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = |\vec{V}|$, donc $\vec{V} \rightarrow \vec{0}$.

Nous admettrons qu'il en est de même dans un repère quelconque.

2^o Dire que $\vec{V}(t) \rightarrow \vec{U}(\alpha, \beta, \gamma)$ lorsque $t \rightarrow t_0$ signifie que la différence $\vec{V}(t) - \vec{U}(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow \vec{0}$.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les différences $X(t) - \alpha, Y(t) - \beta$ et $Z(t) - \gamma$ tendent simultanément vers 0, lorsque $t \rightarrow t_0$. Donc :

$$\vec{V}(t) \rightarrow \vec{U}(\alpha, \beta, \gamma) \iff X(t) \rightarrow \alpha, \quad Y(t) \rightarrow \beta, \quad Z(t) \rightarrow \gamma.$$

3^o Si lorsque $t \rightarrow t_0$, le vecteur $\vec{V}(t)$ tend vers $\vec{V}(t_0)$, on dit que la fonction vectorielle $\vec{V}(t)$ est continue pour $t = t_0$. On dit qu'elle est continue sur le segment $[a, b]$ si :

$$\forall t_0 \in [a, b] : t \rightarrow t_0 \implies \vec{V}(t) \rightarrow \vec{V}(t_0).$$

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ soient des fonctions continues de t sur $[a, b]$.

114. Dérivée vectorielle. — On appelle *dérivée de la fonction vectorielle* $\vec{V}(t)$, pour la valeur t_0 du paramètre, la limite, lorsqu'elle existe, du vecteur

$$\frac{\overline{\Delta \vec{V}}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0)}{t - t_0} \text{ lorsque } t \text{ tend vers } t_0.$$

Cette limite est désignée par $\vec{V}'(t_0)$ ou par $\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_0$ et on écrit indifféremment :

$$\vec{V}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta \vec{V}}}{\Delta t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(t_0 + h) - \vec{V}(t_0)}{h}. \quad (1)$$

Or les relations : $\vec{V}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}$

et $\vec{V}(t_0) = X(t_0)\vec{i} + Y(t_0)\vec{j} + Z(t_0)\vec{k}$ donnent :

$$\overline{\Delta \vec{V}} = \vec{V}(t) - \vec{V}(t_0) = [X(t) - X(t_0)]\vec{i} + [Y(t) - Y(t_0)]\vec{j} + [Z(t) - Z(t_0)]\vec{k}.$$

$$\text{Soit : } \overline{\Delta \vec{V}} = \Delta X \cdot \vec{i} + \Delta Y \cdot \vec{j} + \Delta Z \cdot \vec{k} \implies \frac{\overline{\Delta \vec{V}}}{\Delta t} = \frac{\Delta X}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta Y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta Z}{\Delta t} \vec{k}.$$

Pour que le vecteur $\frac{\overline{\Delta \vec{V}}}{\Delta t}$ admette une limite, lorsque $t \rightarrow t_0$, il faut et il suffit qu'il en soit de même de $\frac{\Delta X}{\Delta t}$, $\frac{\Delta Y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta Z}{\Delta t}$, c'est-à-dire que les fonctions $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ soient dérivables pour $t = t_0$. Dans ce cas $\vec{V}'(t_0)$ existe et on obtient :

$$\vec{V}'(t_0) = X'(t_0)\vec{i} + Y'(t_0)\vec{j} + Z'(t_0)\vec{k}. \quad (2)$$

Si cette dérivée $\vec{V}'(t_0)$ existe pour toute valeur t_0 du segment $[a, b]$ on dit que $\vec{V}(t)$ est dérivable sur $[a, b]$ et admet $\vec{V}'(t)$ pour dérivée :

115. Théorème. — Si les composantes scalaires d'une fonction vectorielle $\vec{V}(t)$ sont dérivables sur $[a, b]$, il en est de même de $\vec{V}(t)$ et les composantes de sa dérivée $\vec{V}'(t)$ sont les dérivées des composantes de $\vec{V}(t)$.

En remplaçant t_0 par t dans la relation (2) ci-dessus, on obtient :

$$\boxed{\vec{V}'(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = X'(t)\vec{i} + Y'(t)\vec{j} + Z'(t)\vec{k}.} \quad (3)$$

$$\text{Donc : } \vec{V}(t) = \vec{V}(X, Y, Z) \implies \vec{V}'(t) = \vec{V}'(X', Y', Z'). \quad (4)$$

1° Si les fonctions $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ sont dérivables sur $[a, b]$, ces fonctions sont continues sur $[a, b]$ et il en est de même de la fonction $\vec{V}(t)$ car : $\forall t_0 \in [a, b]$:

$$t \rightarrow t_0 \implies X(t) \rightarrow X(t_0), Y(t) \rightarrow Y(t_0), Z(t) \rightarrow Z(t_0) \implies \vec{V}(t) \rightarrow \vec{V}(t_0).$$

2° Si $X'(t)$, $Y'(t)$, $Z'(t)$ sont elles-mêmes dérivables sur $[a, b]$, le vecteur $\vec{V}'(t)$ est dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée $\vec{V}''(t)$ est la dérivée seconde de $\vec{V}(t)$:

$$\boxed{\vec{V}''(t) = X''\vec{i} + Y''\vec{j} + Z''\vec{k}.} \quad (5)$$

Ce vecteur $\vec{V}''(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)$ se note : $\frac{d^2\vec{V}}{dt^2}$.

Lorsque $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ sont dérivables jusqu'à l'ordre n , on peut ainsi définir les dérivées successives de $\vec{V}(t)$ jusqu'à l'ordre n :

$$\vec{V}^{(n)}(t) = X^{(n)}\vec{i} + Y^{(n)}\vec{j} + Z^{(n)}\vec{k}. \quad (6)$$

116. Interprétation géométrique. — Les composantes X' , Y' , Z' du vecteur $\vec{V}'(t)$ sont les paramètres directeurs de la tangente à la courbe (C), lieu du point M tel que $\vec{OM} = \vec{V}(t)$.

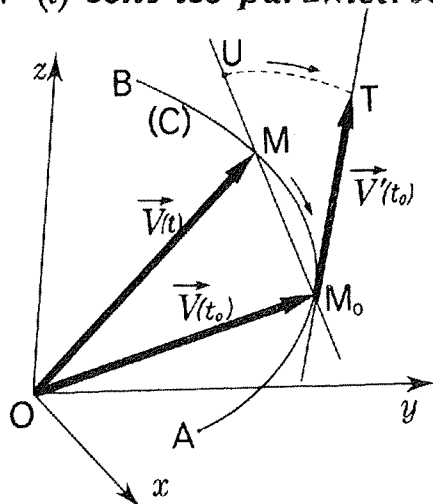


Fig. 85

En effet (fig. 85) :

$$\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0) = \vec{OM} - \vec{OM}_0 = \vec{M}_0\vec{M}.$$

Le vecteur $\vec{M}_0\vec{U} = \frac{\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0)}{t - t_0} = \frac{\vec{M}_0\vec{M}}{t - t_0}$ admet pour support la droite M_0M .

Lorsque $t \rightarrow t_0$, le point M tend vers M_0 et le vecteur $\vec{M}_0\vec{U}$ tend vers $\vec{V}'(t_0)$.

Le support M_0T du vecteur $\vec{V}'(t_0)$ est donc la limite de la sécante M_0M , lorsque M vient en M_0 , c'est-à-dire, par définition, la tangente en M_0 à la courbe (C), lieu de M :

Si le vecteur $\vec{OM} = \vec{V}(t)$ est dérivable sur $[a, b]$, la courbe (C) admet en chacun de ses points M (t) une tangente de vecteur directeur $\vec{V}'(t)$.

D'autre part le vecteur $\vec{V}'(t)$, que l'on note aussi $\vec{M}'(t)$, ainsi obtenu a une signification géométrique qui ne dépend ni de l'origine O, ni de la direction des axes :

La dérivation vectorielle est une opération indépendante du repère Oxyz.

C'est pourquoi $\vec{V}'(t) = \frac{d}{dt}(\vec{OM})$ s'écrit plus simplement $\frac{d\vec{M}}{dt}$, tandis que $\vec{V}''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)$ s'écrit de même : $\frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$.

117. Projection de la dérivée d'un vecteur. — Si $\vec{V}(X, Y, Z)$ admet pour dérivée $\vec{V}'(X', Y', Z')$ les vecteurs $\vec{U}(X, Y, 0)$ et $\vec{W}(0, 0, Z)$ admettent respectivement pour dérivées $\vec{U}'(X', Y', 0)$ et $\vec{W}'(0, 0, Z')$. Or les vecteurs \vec{V} et \vec{V}' se projettent respectivement suivant \vec{U} et \vec{U}' sur le plan xOy , suivant \vec{W} et \vec{W}' sur Oz . En choisissant convenablement le repère Oxyz :

La dérivée de la projection d'un vecteur, sur un plan ou sur une droite, est la projection de la dérivée de ce vecteur.

On peut donc permuter projection et dérivation d'un vecteur.

118. Dérivée d'un vecteur constant. — Si le vecteur $\vec{V}(t)$ est constant sur $[a, b]$ il en est de même de ses composantes X, Y, Z, ce qui implique :

$$X' = Y' = Z' = 0 \implies \vec{V}'(t) = \vec{0}.$$

La dérivée d'un vecteur constant est le vecteur nul $\vec{0}$.

Réciproquement $\vec{V}'(t) = \vec{0} \implies X' = Y' = Z' = 0$ ce qui montre que X, Y, Z sont des nombres constants α, β, γ et que $\vec{V}(t)$ est un vecteur constant $\vec{U}(\alpha, \beta, \gamma)$.

119. Dérivée d'une somme vectorielle. — Si les deux vecteurs $\vec{V}_1(X_1, Y_1, Z_1) = \vec{V}_1(t)$ et $\vec{V}_2(X_2, Y_2, Z_2) = \vec{V}_2(t)$ sont dérivables sur $[a, b]$, il en est de même des composantes $X = X_1 + X_2, Y = Y_1 + Y_2, Z = Z_1 + Z_2$ du vecteur $\vec{U}(t) = \vec{V}_1(t) + \vec{V}_2(t)$. Ce vecteur $\vec{U}(t)$ admet donc sur $[a, b]$ une dérivée $\vec{U}'(t)$ (n° 115) et :

$$X' = X_1' + X_2', \quad Y' = Y_1' + Y_2', \quad Z' = Z_1' + Z_2' \implies \vec{U}'(t) = \vec{V}_1'(t) + \vec{V}_2'(t).$$

La dérivée d'une somme de vecteurs est égale à la somme des dérivées de chacun de ces vecteurs.

Plus généralement :

$$\boxed{\vec{U} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_n} \implies \boxed{\vec{U}' = \vec{V}_1' + \vec{V}_2' + \dots + \vec{V}_n'}$$

120. Dérivée du produit d'un vecteur par un scalaire. — Si le vecteur $\vec{V}(X, Y, Z)$ ou $\vec{V}(t)$ et le scalaire $\lambda = \lambda(t)$ sont des fonctions de t dérivables sur $[a, b]$, il en est de même des composantes $\lambda X, \lambda Y, \lambda Z$ du vecteur $\vec{U}(t) = \lambda(t) \vec{V}(t)$.

Ce vecteur $\vec{U}(t)$ admet donc sur $[a, b]$ une dérivée $\vec{U}'(t)$ telle que :

$$\vec{U}'(t) = (\lambda' X + \lambda X')\vec{i} + (\lambda' Y + \lambda Y')\vec{j} + (\lambda' Z + \lambda Z')\vec{k}.$$

Soit : $\vec{U}'(t) = \lambda'(\vec{X}\vec{i} + \vec{Y}\vec{j} + \vec{Z}\vec{k}) + \lambda(\vec{X}'\vec{i} + \vec{Y}'\vec{j} + \vec{Z}'\vec{k}).$

$$\boxed{\vec{U}(t) = \lambda(t) \vec{V}(t)} \implies \boxed{\vec{U}' = \lambda' \vec{V} + \lambda \vec{V}'}$$

Cette formule est analogue à la formule de la dérivée d'un produit de fonctions scalaires. Plus généralement, d'après le n° 118 :

$$\boxed{\vec{U} = \sum \lambda_i \vec{V}_i} \implies \boxed{\vec{U}' = \sum \lambda_i' \vec{V}_i + \sum \lambda_i \vec{V}_i'}$$

Cette formule se réduit à : $\vec{U}' = \sum \lambda_i \vec{V}_i'$ lorsque les λ_i sont constants et à : $\vec{U}' = \sum \lambda_i' \vec{V}_i$ lorsque les vecteurs \vec{V}_i sont constants.

On retrouve ainsi la règle de dérivation du n° 115, puisque $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont fixes :

$$\vec{V}(t) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \implies \begin{cases} V'(t) = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k} \\ \vec{V}^{(n)}(t) = X^{(n)}\vec{i} + Y^{(n)}\vec{j} + Z^{(n)}\vec{k} \end{cases}$$

121. Dérivée d'un produit scalaire. — Soit $y = \vec{U}(t) \cdot \vec{V}(t)$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}(X_1, Y_1, Z_1) = \vec{U}(t)$ et $\vec{V}(X_2, Y_2, Z_2) = \vec{V}(t)$ dérivables sur $[a, b]$. La relation $y = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$ entraîne :

$$y' = (X_1' X_2 + X_1 X_2') + (Y_1' Y_2 + Y_1 Y_2') + (Z_1' Z_2 + Z_1 Z_2').$$

Soit :

$$y' = (X_1' X_2 + Y_1' Y_2 + Z_1' Z_2) + (X_1 X_2' + Y_1 Y_2' + Z_1 Z_2').$$

$$\boxed{y = \vec{U} \cdot \vec{V}} \implies \boxed{y' = \vec{U}' \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{V}'}$$

CAS PARTICULIER. — Désignons par $r(t)$ le module du vecteur $\vec{U}(X, Y, Z) = \vec{U}(t)$ et par $z = \vec{U}^2 = r^2$ son carré scalaire :

$$z = \vec{U} \cdot \vec{U} \implies z' = \vec{U}' \cdot \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{U}' \iff z' = 2 \vec{U} \cdot \vec{U}'$$

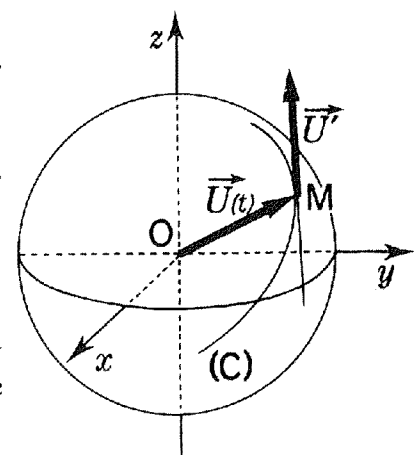


Fig. 86

$$z = r^2 = \vec{U}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \implies z' = 2rr' = 2\vec{U} \cdot \vec{U}' = 2(XX' + YY' + ZZ').$$

Si k désigne une constante réelle quelconque, on voit que :

$$r = k \iff r^2 = k^2 \iff rr' = 0 \iff \vec{U} \cdot \vec{U}' = 0.$$

Pour qu'un vecteur variable $\vec{U}(t)$ ait un module constant il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à sa dérivée $\vec{U}'(t)$.

Il en résulte que le point M , tel que $\vec{OM} = \vec{U}(t)$ décrit (fig. 86) une courbe tracée sur la sphère de centre O et de rayon $r = |\vec{U}|$.

HÉLICE CIRCULAIRE

122. Définition de l'hélice circulaire. — Considérons un cylindre de révolution (C) d'axe $\vec{\Delta}$ et dont la section droite par un plan P est un cercle Γ de centre O et de rayon a (fig. 87). Soit M un point quelconque de ce cylindre se projetant orthogonalement en un point m de Γ sur le plan P. Désignons par A l'origine des arcs sur le cercle Γ orienté dans le sens direct autour de l'axe $\vec{\Delta}$ et par $s = \widehat{Am}$ l'abscisse curviligne du point m sur Γ .

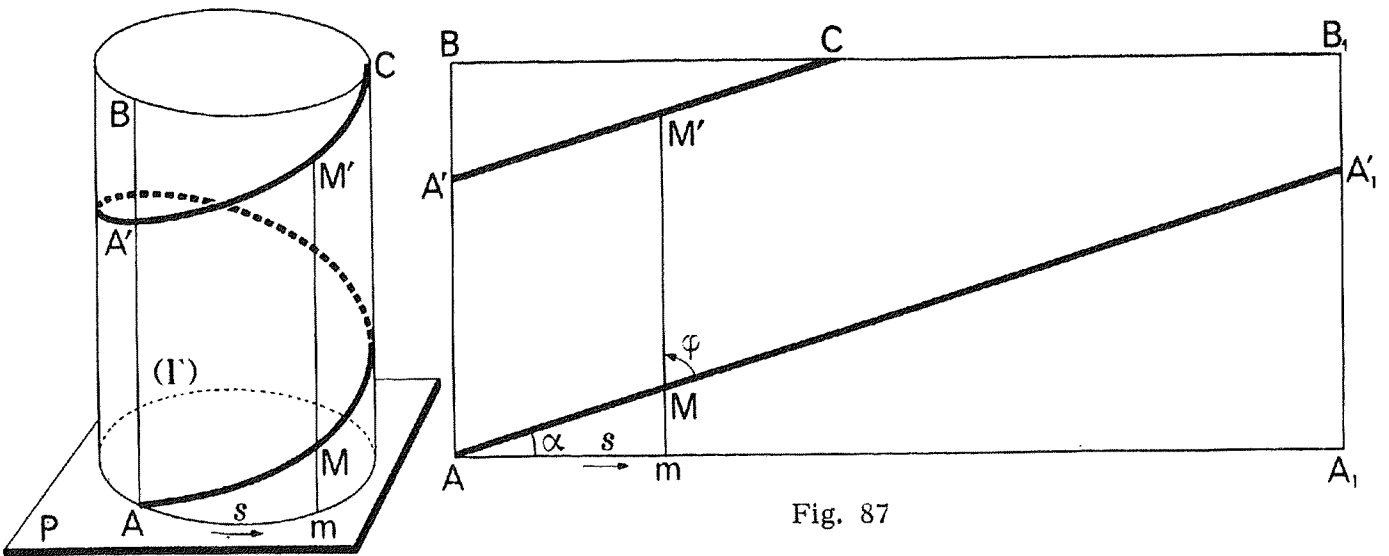


Fig. 87

Le point M du cylindre (C) décrit une hélice circulaire (H) lorsque la mesure algébrique sur $\vec{\Delta}$ du vecteur \vec{mM} est proportionnelle à l'abscisse curviligne $s = \widehat{Am}$ du point m sur Γ .

$$M \in (H) \iff \boxed{\vec{mM} = k \widehat{Am}} \quad k \in \mathbb{R}^*.$$

Si on développe le cylindre (C) sur un plan, l'hélice (H) donne par suite une droite faisant avec AA' développement de Γ un angle α tel que $\text{tg } \alpha = \frac{mM}{Am} = k$.

123. Représentation paramétrique de l'hélice. — Soit $Oxyz$ un repère orthonormé dont l'axe Oz coïncide avec $\vec{\Delta}$ et dont l'axe Ox admet \vec{OA} pour vecteur directeur (fig. 88).

Désignons par θ la mesure en radians de l'angle polaire (\vec{Ox}, \vec{Om}) du point m . On en déduit : $s = \widehat{Am} = a \theta$.

L'abscisse et l'ordonnée du point $M(x, y, z)$ sont celles de m soit : $x = a \cos \theta$ et $y = a \sin \theta$. La cote z de M est $z = \overline{mM} = ks = ka \theta$. En posant $ka = h \in \mathbb{R}^*$ on obtient la représentation paramétrique de l'hélice circulaire (H) :

$$\boxed{x = a \cos \theta \quad y = a \sin \theta \quad z = h \theta.} \quad (1)$$

Lorsque θ varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point M décrit l'hélice circulaire (H) dans le sens des z croissants ou décroissants suivant que h est positif ou négatif. L'hélice est dite à *droite* (ou *dextrorsum*) pour $h > 0$, à *gauche* (ou *sinistrorsum*) pour $h < 0$. (Les filets de vis, l'arête d'un tire-bouchons sont généralement des hélices à droite.)

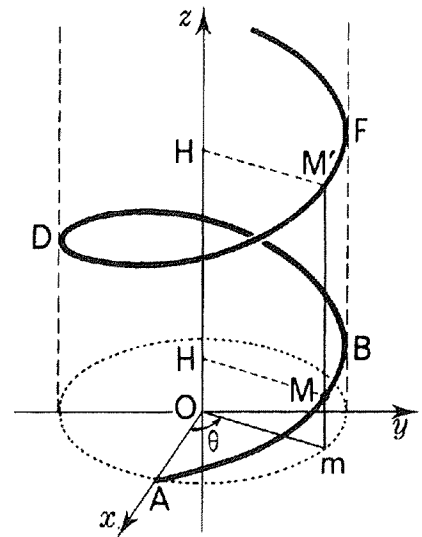


Fig. 88

124. Pas de l'hélice. — Les points M et M' correspondant aux valeurs θ et $\theta + 2\pi$ du paramètre appartiennent à une même génératrice mM du cylindre (C) et

$$\overline{MM'} = \overline{mM'} - \overline{mM} = h(\theta + 2\pi) - h\theta = 2\pi h.$$

La constante $p = 2\pi h$ est le pas de l'hélice circulaire H.

L'ensemble des points de l'hélice compris entre les deux points M et M' constitue une spire de l'hélice. On peut obtenir l'hélice H en faisant subir à une spire donnée les translations parallèles à Oz de vecteur $k \overline{MM'}$.

Notons que la constante a des formules (1) est le rayon de l'hélice et la constante h est le pas réduit : $\frac{p}{2\pi}$.

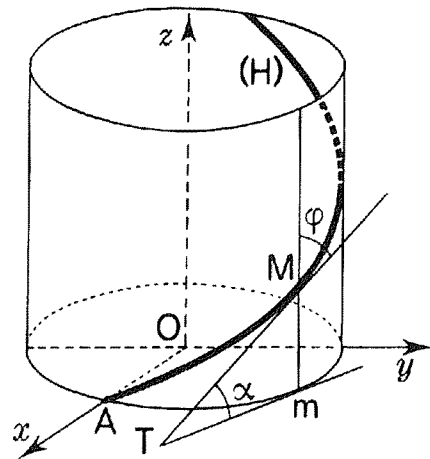


Fig. 89

125. Tangente à l'hélice circulaire.

Le vecteur $\vec{OM} = \vec{V}(\theta)$ a pour composantes (n° 123) :

$$x = a \cos \theta ; \quad y = a \sin \theta ; \quad z = h \theta.$$

Le vecteur dérivé $\vec{M}'(\theta)$ a donc pour composantes :

$$x' = -a \sin \theta, \quad y' = a \cos \theta, \quad z' = h.$$

Ces composantes x', y', z' sont les paramètres directeurs de la tangente à l'hélice au point $M(\theta)$. Or le vecteur $\vec{M}'(\theta)$ a un module constant $\sqrt{a^2 + h^2}$ et une projection constante h sur Oz . Il fait

donc avec Oz un angle constant φ tel que : $\cos \varphi = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \iff \text{tg } \varphi = \text{tg } (\vec{Oz}, \vec{V}') = \frac{a}{h}$.

L'hélice circulaire coupe donc sous l'angle constant φ les génératrices du cylindre de révolution sur lequel elle est tracée.

TANGENTE ET NORMALE AUX CONIQUES
126. Tangente et normale à la parabole : $y^2 = 2px$.

Si on pose $y = t$, on obtient pour tout point $M(x, y)$ de la parabole $y^2 = 2px$:

$$x = \frac{t^2}{2p}; \quad y = t. \quad (1)$$

On sait (n° 116) que le vecteur $\frac{d\vec{M}}{dt}$ de composantes $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{p}$ et $\frac{dy}{dt} = 1$ est dirigé suivant la tangente en M à la parabole. Cette tangente a donc pour paramètres directeurs $\left(\frac{t}{p}, 1\right)$ ou (t, p) et son équation s'écrit :

$$\frac{X - \frac{t^2}{2p}}{t} = \frac{Y - t}{p} \iff tY = p\left(X + \frac{t^2}{2p}\right). \quad (2)$$

Soit d'après (1) : $yY = p(X + x). \quad (3)$

De même l'équation de la normale s'écrit :

$$\left(X - \frac{t^2}{p}\right)t + p(Y - t) = 0 \iff Y - t = -\frac{t}{p}\left(X - \frac{t^2}{p}\right). \quad (4)$$

Et d'après (1) : $Y - y = -\frac{y}{p}(X - x). \quad (5)$

Désignons (fig. 90) par P la projection orthogonale du point M sur l'axe de la parabole, T et N les intersections respectives de la tangente et de la normale en M avec cet axe.

Les segments PT et PN , projections sur l'axe de la parabole de la tangente MT et de la normale MN , sont appelés respectivement sous-tangente et sous-normale relatives au point M .

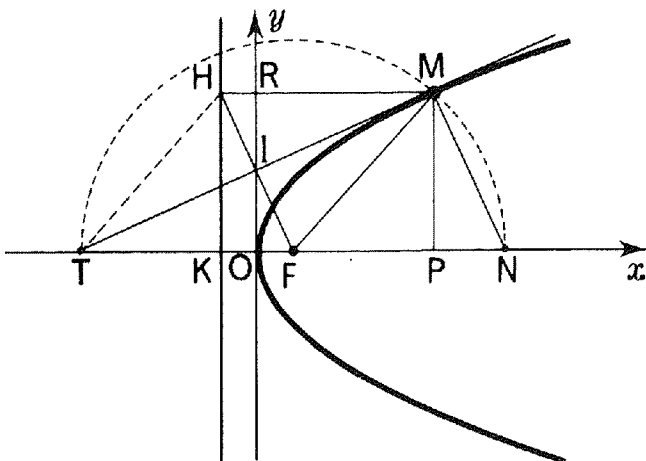


Fig. 90

Les abscisses des points T et N s'obtiennent en faisant $Y = 0$ dans les équations (3) et (5). On obtient :

$$\overline{OT} = X_T = -x. \text{ Or } \overline{OP} = x,$$

donc $\overline{OT} + \overline{OP} = 0.$

$$\overline{ON} = X_N = x + p.$$

Donc $\overline{ON} = \overline{OP} + p$ et $\overline{PN} = p.$

Le point O est le milieu du segment PT et PN a une mesure constante égale à p . De plus : $\overline{OT} + \overline{ON} = p = 2\overline{OF}$, ce qui montre que F est le milieu du segment TN . Ainsi :

1° **Le milieu de la sous-tangente coïncide avec le sommet de la parabole.**

2° **La sous-normale a une mesure constante égale au paramètre de la parabole.**

3° **Le foyer est le milieu du segment découpé sur l'axe par la tangente et la normale en un point de la parabole.**

On construira la tangente en M en joignant ce point au symétrique T de P par rapport à O. On construira la normale en portant sur l'axe de la parabole $\overline{PN} = p$ et en joignant MN.

127. Théorème. — *La tangente et la normale en M sont respectivement la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle FMH.*

Le segment MF est la médiane relative à l'hypoténuse du triangle rectangle TMN (fig. 90). Donc $MF = FN = FT$ et le cercle F (FM) coupe Ox en T et N.

Or par définition : $MF = MH \implies MF = MH = FN = FT$ et $\overline{HM} = \overline{TF}$.

Le quadrilatère HMFT est un losange dont la diagonale MT est bissectrice intérieure de l'angle FMH. Par suite, la normale MN en est la bissectrice extérieure.

128. Tangente et normale à l'ellipse : $x = a \cos \varphi$; $y = b \sin \varphi$.

En tout point M (φ), la tangente MT a pour paramètres directeurs (n° 116) :

$$x' = -a \sin \varphi; \quad y' = b \cos \varphi.$$

La tangente MT a donc pour équation :

$$\frac{X a \cos \varphi}{-a \sin \varphi} = \frac{Y - b \sin \varphi}{b \cos \varphi} \iff \boxed{\frac{X}{a} \cos \varphi + \frac{Y}{b} \sin \varphi = 1.}$$

L'équation de la normale MN s'écrit :

$$(X - a \cos \varphi)(-a \sin \varphi) + (Y - b \sin \varphi)(b \cos \varphi) = 0$$

soit compte tenu de $a^2 - b^2 = c^2$: $\boxed{aX \sin \varphi - bY \cos \varphi = c^2 \sin \varphi \cos \varphi.}$

La tangente et la normale coupent respectivement l'axe Ox en T et N tels que (fig. 81) :

$$\overline{OT} = \frac{a}{\cos \varphi}; \quad \overline{ON} = \frac{c^2}{a} \cos \varphi. \implies \overline{OT} \cdot \overline{ON} = c^2 = \overline{OF}^2 = \overline{OF}'^2.$$

On en déduit : $\overline{TF} = \frac{c \cos \varphi - a}{\cos \varphi}$; $\overline{TF}' = -\frac{c \cos \varphi + a}{\cos \varphi}$.

Soit : $\frac{\overline{TF}}{\overline{TF}'} = \frac{a - c \cos \varphi}{a + c \cos \varphi} = \frac{MF}{MF'}$ (n° 106).

La tangente MT est bissectrice extérieure de l'angle FMF'; il en résulte que la normale MN est bissectrice intérieure du même angle.

129. Tangente et normale à l'hyperbole : $x = \frac{a}{\cos \theta}$; $y = b \operatorname{tg} \theta$.

En tout point M (θ), la tangente MT a pour paramètres directeurs (n° 116) : $x' = \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta}$ et $y' = \frac{b}{\cos^2 \theta}$ soit $a \sin \theta$ et b . La tangente MT a donc pour coefficient directeur $\frac{b}{a \sin \theta}$ et son équation s'écrit :

$$Y - b \operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a \sin \theta} \left(X - \frac{a}{\cos \theta} \right) \iff \boxed{\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} \sin \theta = \cos \theta.}$$

La normale MN a pour équation : $\left(X - \frac{a}{\cos \theta} \right) a \sin \theta + (Y - b \operatorname{tg} \theta) b = 0$ soit puisque : $a^2 + b^2 = c^2$: $\boxed{aX \sin \theta \cos \theta + bY \cos \theta = c^2 \sin \theta.}$

La tangente et la normale coupent respectivement l'axe Ox en T et N (fig. 82) tels que : $\overline{OT} = a \cos \theta$; $\overline{ON} = \frac{c^2}{a \cos \theta} \implies \overline{OT} \cdot \overline{ON} = c^2 = \overline{OF}^2 = \overline{OF}'^2$.

Si le point $M(x, y)$ de l'hyperbole est situé dans les quadrants I et IV (n° 108) :

$$\overline{TF} = c - a \cos \theta; \quad \overline{TF}' = -c - a \cos \theta \implies \frac{\overline{TF}}{\overline{TF}'} = -\frac{c - a \cos \theta}{c + a \cos \theta} = -\frac{MF}{MF'}$$

La tangente MT est bissectrice intérieure de l'angle MFM' ; la normale MN est donc bissectrice extérieure du même angle. Dans la symétrie d'axe $y'y$, ces propriétés se conservent pour tout point de l'hyperbole situé dans les quadrants II et III.

En définitive :

Dans toute conique à centre la tangente et la normale en un point M sont les bissectrices de l'angle des rayons vecteurs MF et MF' .

EXERCICES

225. 1° Le vecteur \vec{V} est fonction du paramètre t . Montrer que si $\vec{V}'(t)$ est nulle, le vecteur \vec{V} reste équipollent à un vecteur fixe.

2° Soit O un point fixe. Si $\frac{d}{dt}(\vec{OM})$ est nul, le point M est fixe.

226. 1° Si la dérivée du vecteur $\vec{V}(t)$ par rapport à t est un vecteur constant \vec{A} , on a : $\vec{V} = t\vec{A} + \vec{B}$ où \vec{B} est un vecteur constant.

2° En déduire que, O étant un point fixe, si $\frac{d}{dt}(\vec{OM}) = \vec{A}$, le point M appartient à une droite fixe dont on donnera la représentation paramétrique connaissant les composantes des vecteurs \vec{A} et \vec{B} .

227. Dans le repère $Oxyz$, le vecteur \vec{OM} est fonction de t et le vecteur $\vec{MV} = \frac{d}{dt}(\vec{OM})$ est colinéaire avec le vecteur \vec{OM} .

1° Si x, y, z sont les coordonnées de M , montrer que les dérivées $\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{z}\right)$ et $\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{z}\right)$ sont nulles.

2° En déduire que M appartient à une droite fixe issue de O .

228. 1° Dans le repère $Oxyz$, le vecteur $\vec{V}(t)$ est tel que $\vec{V}'(t)$ est parallèle au plan xOy . Montrer qu'il en est de même du vecteur $\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0)$.

2° Si $\frac{d\vec{M}}{dt}$ est parallèle au plan xOy , montrer que le point M appartient à un plan fixe.

229. Dans le repère $Oxyz$, le vecteur \vec{OM} est fonction de t et le vecteur $\vec{MV} = \frac{d\vec{M}}{dt}$ est tel que son support rencontre l'axe Oz .

1° Montrer que la projection m de M sur le plan xOy , parallèlement à l'axe Oz , appartient à une droite fixe issue de O .

2° Montrer que le point M appartient à un plan fixe.

230. Dans le repère $Oxyz$, le vecteur \vec{OM} est fonction de t et sa dérivée seconde $\frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$ est un vecteur constant \vec{A} .

1° Montrer que le vecteur \vec{OM} peut s'écrire : $\vec{OM} = \frac{t^2}{2}\vec{A} + t\vec{B} + \vec{C}$

où \vec{B} et \vec{C} sont deux vecteurs constants.

2° En prenant de nouveaux axes de vecteurs unitaires \vec{A}, \vec{B} et \vec{C} , étudier le lieu de M lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

231. 1° Le vecteur \overrightarrow{OM} est fonction de t et on pose $OM = r$. Soit $\overrightarrow{MV} = \frac{dM}{dt}$

Montrer que la projection de \overrightarrow{MV} sur l'axe \overrightarrow{OM} a pour mesure algébrique $\frac{dr}{dt}$.

2° Si M décrit l'ellipse de foyers F et F' telle que $MF + MF' = 2a$, trouver la relation qui lie les projections du vecteur \overrightarrow{MV} sur les axes \overrightarrow{FM} et $\overrightarrow{F'M}$. En déduire une propriété de la tangente à l'ellipse.

3° Même question lorsque M décrit l'hyperbole de foyers F et F' , telle que $|MF - MF'| = 2a$.

232. Le vecteur \overrightarrow{AB} est fonction de t , mais son module est constant. L'origine du repère est le point fixe O . Démontrer que les projections des vecteurs $\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}$ et $\frac{d\overrightarrow{B}}{dt}$ sur la droite AB sont des vecteurs égaux.

233. On donne l'hélice circulaire définie dans un repère orthonormé par :

$$x = a \cos \theta; \quad y = a \sin \theta; \quad z = h \theta.$$

Étudier les projections de l'hélice sur les plans xOy , yOz et zOx .

234. Soit dans un repère orthonormé, l'hélice H définie par $x = a \cos \theta$; $y = a \sin \theta$; $z = h \theta$. Soit A_1 l'intersection de l'hélice par le plan de cote $z_1 = h \theta_1$ qui coupe l'axe Oz en ω . Désignons par ωXYZ le nouveau repère orthonormé dont les axes ωX et ωZ sont dirigés suivant $\overrightarrow{\omega A_1}$ et $\overrightarrow{\omega z}$.

1° Montrer que dans ce nouveau repère les coordonnées d'un point M de l'hélice sont :

$$X = a \cos \varphi; \quad Y = a \sin \varphi; \quad Z = h \varphi$$

avec

$$\varphi = \theta - \theta_1.$$

2° En déduire qu'une hélice peut glisser sur elle-même.

235. On considère l'hélice circulaire, lieu du point $M(x, y, z)$ dans le repère orthonormé $Oxyz$, telle que :

$$x = a \cos \theta; \quad y = a \sin \theta; \quad z = h \theta.$$

1° Soit K la projection orthogonale de M sur l'axe Oz et on construit le point P tel $\overrightarrow{KP} = \lambda \overrightarrow{KM}$ où λ est un nombre réel donné. Calculer les coordonnées du point P .

2° Quel est le lieu du point P ?

236. 1° Construire les normales à une parabole issues d'un point de son axe.

2° Construire les points M d'une parabole tels que la normale MN limitée à son point d'intersection N avec l'axe ait une longueur donnée.

237. 1° Construire les points communs et la tangente commune à deux paraboles Γ et Γ' de même foyer F et de directrices respectives D et D' .

2° Évaluer l'angle sous lequel se coupent Γ et Γ' en fonction de l'angle α de leurs axes orientés. Dans quel cas Γ et Γ' sont-elles orthogonales?

238. Dans le repère orthonormé xOy , on donne la parabole (P) d'équation $x^2 = 2py$. Soient M et M'' les points de (P) d'abscisses x' et x'' .

1° Former l'équation de la droite $M'M''$. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que $M'M''$ passe par le foyer F de la parabole est : $x'x'' = -p^2$.

2° Dans ces conditions montrer que les tangentes en M' et M'' à la parabole sont perpendiculaires.

3° Dans les mêmes conditions montrer que l'intersection N des normales en M' et M'' à la parabole est telle que la droite joignant N au milieu de $M'M''$ est parallèle à l'axe Oy .

239. Dans un repère orthonormé xOy , on considère l'ellipse (E) de foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ décrite par le point $M(x = a \cos \varphi; y = b \sin \varphi)$.

1° Établir, en fonction de φ , les équations de la tangente et de la normale en M à (E) . Ces deux droites coupent l'axe Ox en T et N , l'axe Oy en T' et N' .

2° Calculer les produits $\overline{OT} \cdot \overline{ON}$ et $\overline{OT'} \cdot \overline{ON'}$. Montrer que le cercle de diamètre $T'N'$ passe par F et F' .

240. La tangente au point $M(\varphi)$ de l'ellipse : $x = a \cos \varphi; y = b \sin \varphi$, coupe Ox en S , les tangentes aux sommets du grand axe AA' en T et T' .

1° Déterminer les coordonnées des points S , T et T' . Démontrer les relations :

$$\overline{AT} \cdot \overline{AT'} = b^2 \quad \text{et} \quad \overline{TM} \cdot \overline{T'S} + \overline{T'M} \cdot \overline{TS} = 0.$$

2° Équation du cercle de diamètre TT' ? Démontrer que ce cercle passe par les foyers F et F' de l'ellipse.

3° Les droites FT' et $F'T$ se coupent en I , les droites FT et $F'T'$ se coupent en J . Démontrer que la droite IJ est la normale en M à l'ellipse. Que représentent les points I , J , T et T' pour le triangle $MF'F$? Conséquences angulaires.

241. La normale en un point variable M ($x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$) d'une ellipse de foyers F et F' , coupe l'axe focal Ox en N , l'axe non focal Oy en P .

1° Calculer les coordonnées de N et P , puis démontrer les relations :

$$\frac{\overline{MP}}{a^2} = \frac{\overline{MN}}{b^2} = \frac{\overline{NP}}{c^2}; \quad PM = \frac{a}{c} PF; \quad \overline{MN}^2 = -\frac{b^2}{c^2} \overline{NF} \cdot \overline{NF'}.$$

2° Démontrer que le cercle de centre P passant par les foyers F et F' coupe la droite MP aux centres I et J des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle M du triangle MFF' . Soient K , D et E les projections orthogonales des points N , I et J sur MF . Calculer MD et ME en fonction des côtés du triangle MFF' puis en fonction de a et c .

3° Évaluer MI et MJ en fonction de MN , a et c . En déduire que la longueur de la projection MK de MN sur MF est constante et égale à $\frac{b^2}{a}$ (*paramètre* de l'ellipse).

242. Dans un repère orthonormé xOy , on considère l'hyperbole (H) de foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ décrite par le point M ($x = \frac{a}{\cos \theta}$, $y = b \operatorname{tg} \theta$).

1° Établir, en fonction de θ , les équations de la tangente et de la normale en M à (H) . Ces deux droites coupent l'axe Ox en T et N , l'axe Oy en T' et N' .

2° Calculer les produits $\overline{OT} \cdot \overline{ON}$ et $\overline{OT'} \cdot \overline{ON'}$. Montrer que le cercle de diamètre $T'N'$ passe par F et F' .

243. La tangente au point $M(\theta)$ de l'hyperbole $x = \frac{a}{\cos \theta}$, $y = b \operatorname{tg} \theta$ coupe l'axe Ox en S et les tangentes aux sommets de l'axe focal AA' en T et T' .

1° Déterminer les coordonnées des points S , T , T' , et démontrer que :

$$\overline{AT} \cdot \overline{AT'} = -b^2 \quad \text{et} \quad \overline{TM} \cdot \overline{T'S} + \overline{T'M} \cdot \overline{T'S} = 0.$$

2° Équation du cercle de diamètre TT' . Démontrer que ce cercle passe par les foyers F et F' de l'hyperbole.

3° Les droites FT et $F'T'$ se coupent en K , les droites FT' et $F'T$ se coupent en L . Démontrer que la droite KL est la normale en M à l'hyperbole. Que représentent les points K , L , T , T' pour le triangle MFF' ? Conséquences angulaires.

244. La normale en un point variable M ($x = \frac{a}{\cos \theta}$, $y = b \operatorname{tg} \theta$) d'une hyperbole de foyers F et F' coupe l'axe focal Ox en N , l'axe non focal Oy en P .

1° Écrire l'équation de cette normale et déterminer les coordonnées de N et P . Démontrer que :

$$\frac{\overline{MP}}{a^2} = \frac{\overline{NM}}{b^2} = \frac{\overline{NP}}{c^2}; \quad PM = \frac{c}{a} PF; \quad \overline{MN}^2 = \frac{b^2}{c^2} \overline{NF} \cdot \overline{NF'}.$$

2° Démontrer que le cercle de centre P passant par les foyers F et F' coupe la droite MP aux centres K et L des cercles exinscrits dans les angles F et F' au triangle MFF' . Soient H , D et E les projections orthogonales des points N , K et L sur MF . Calculer MD et ME en fonction des côtés du triangle MFF' puis en fonction de a et c .

3° Évaluer MK et ML en fonction de MN , a et c . En déduire que la longueur MH de la projection de MN sur le rayon vecteur MF est constante et égale à $\frac{b^2}{a}$ (*paramètre* de l'hyperbole).

CINÉMATIQUE

9^e Leçon

MOUVEMENT D'UN POINT

130. Notion de mouvement. — Considérons, dans l'espace rapporté à un repère cartésien $Oxyz$, un point quelconque $M(x, y, z)$.

1^o Si les coordonnées x, y, z du point M sont invariables, on dit que *le point M est fixe dans le repère $Oxyz$* (fig. 91).

Tout ensemble de points fixes dans un repère donné constitue une figure géométrique invariable ou solide S auquel est attaché le repère envisagé.

2^o Si les coordonnées du point M dépendent de l'instant où on les considère, on dit que *le point M est mobile (ou en mouvement) dans le repère $Oxyz$* (fig. 92).

On appelle trajectoire d'un point mobile M le lieu géométrique de ses positions successives.

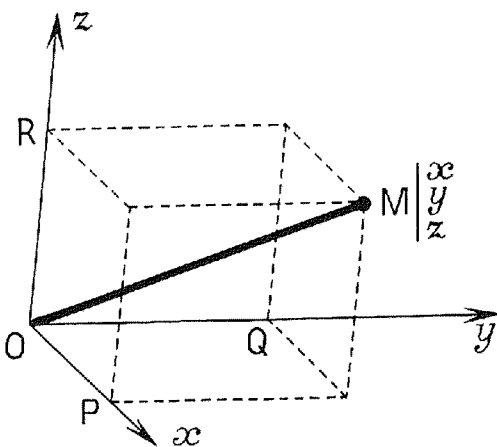


Fig. 91

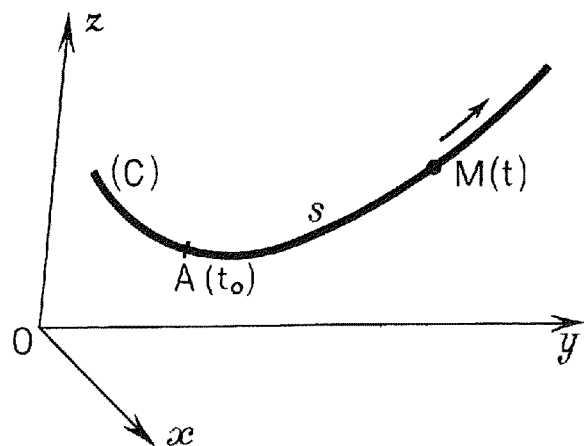


Fig. 92

En d'autres termes la trajectoire est la ligne décrite par le point M . Le mouvement du point M est dit *curviligne* lorsque sa trajectoire est une courbe C (fig. 92), *rectiligne* lorsque sa trajectoire est une droite D .

131. Relativité du mouvement. — Le mouvement d'un point M est ainsi défini par rapport à un repère déterminé $Oxyz$ ou *solide de référence*. Par rapport à un autre repère $O_1x_1y_1z_1$, le mouvement du point M peut être complètement différent.

Ainsi un objet P , placé sur la banquette d'une voiture (ou d'un wagon) en marche, est fixe par rapport à tout repère attaché à cette voiture. Par contre cet objet P est mobile par rapport à tout repère attaché au sol.

Toute notion de mouvement est relative à un repère ou solide de référence préalablement choisi.

Pour les mouvements usuels de faible amplitude, on se contente d'un repère attaché au sol. Mais pour étudier le mouvement d'un satellite artificiel ou d'une fusée interplanétaire, il faut se rapporter à un repère dont les axes ont des directions déterminées par rapport aux étoiles et dont l'origine est soit le centre de la terre, soit celui du soleil.

132. Notion de temps. — Nous considérons comme intuitive la notion de temps qui, dans la pratique, se mesure à l'aide des horloges, montres, chronomètres, etc.

L'unité principale de temps est la seconde (s).

La seconde vaut $\frac{1}{86\,400}$ du jour solaire moyen tel qu'il est calculé et diffusé par le Bureau International de l'Heure.

On utilise aussi les sous-multiples décimaux de la seconde et ses multiples : la minute (1 mn = 60 s), l'heure (1 h = 60 mn = 3 600 s) et le jour (1 j = 24 h).

L'unité de temps étant choisie, il faut définir une *origine des temps*, permettant de mesurer le temps t écoulé entre l'instant origine ($t = 0$) et l'instant à repérer. On compte positivement les temps postérieurs à l'instant origine, négativement les temps antérieurs. Le nombre relatif t ainsi défini et qui correspond à un instant donné est aussi appelé sa *date*.

EXEMPLE. — Si une horloge marque 8 h 23 mn 30 s à l'instant origine ($t = 0$) elle marquera 8 h 23 mn 45 s au temps (ou à la date) $t = + 15$ s. Elle marquait 8 h 23 mn 10 s au temps $t = - 20$ s.

133. Équations d'un mouvement. — 1° Le mouvement d'un point $M(x, y, z)$ par rapport au repère $Oxyz$ est déterminé lorsque l'on connaît ses coordonnées en fonction du temps t :

$$\boxed{x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t)} \quad (1)$$

Ces relations constituent les équations cartésiennes du mouvement. Elles permettent de construire la trajectoire du point M .

Le vecteur \vec{OM} est le vecteur-espace du point M :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \iff \vec{OM} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}. \quad (2)$$

2° La position du point M sur sa trajectoire (C) orientée est déterminée par son abscisse curviligne $s = \widehat{AM}$ en fonction du temps t (fig. 92).

La relation $s = F(t)$ est l'équation horaire du point M sur sa trajectoire.

C'est cette relation que l'on se donne lorsqu'on veut définir le mouvement d'un point mobile sur une courbe donnée (C). Le graphe de la fonction $s = F(t)$ constitue le *diagramme* du mouvement.

3° Plus généralement, considérons une courbe donnée (C) sur laquelle les coordonnées d'un point mobile M sont connues en fonction d'un paramètre θ . Les coordonnées du point M en fonction du temps t sont déterminées par une relation $\theta = \varphi(t)$, *loi horaire du mouvement*.

EXEMPLE. — Considérons l'hélice circulaire (H) définie dans un repère orthonormé par :

$$x = a \cos \theta; \quad y = a \sin \theta; \quad z = h\theta.$$

La relation $\theta = \omega t + \alpha$ définit sur cette hélice le mouvement du point M de coordonnées :

$$x = a \cos (\omega t + \alpha); \quad y = a \sin (\omega t + \alpha); \quad z = h (\omega t + \alpha).$$

134. Remarques. — 1° Les équations (1) du paragraphe précédent se réduisent à deux : $x = f(t)$, $y = g(t)$ lorsque le mouvement s'effectue dans le plan xOy .

2° Elles se réduisent à $x = f(t)$ dans le cas d'un mouvement rectiligne s'effectuant sur Ox . Dans ce cas $x = f(t)$ est l'équation horaire du point M sur sa trajectoire.

VECTEUR-VITESSE D'UN POINT

135. Vecteur-vitesse moyenne. — Considérons (fig. 93) un point M , se déplaçant sur sa trajectoire (C) . Entre les instants t et t_1 , ce mobile passe de la position initiale M à la position finale M_1 . L'accroissement du vecteur-espace \overrightarrow{OM} pendant cet intervalle de durée $t_1 - t$ s'écrit :

$$\overrightarrow{\Delta M} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM_1}.$$

L'accroissement moyen $\overrightarrow{V}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta M}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t}$ constitue le *vecteur-vitesse moyenne* durant l'intervalle $[t_1 - t]$. Ce vecteur \overrightarrow{V}_m n'est autre que le vecteur-vitesse d'un mobile fictif P , animé d'un mouvement uniforme sur la droite MM_1 , qui passerait en M au temps t , en M_1 au temps t_1 .

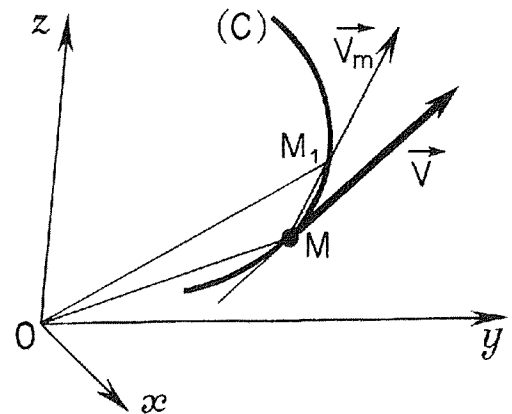


Fig. 93

136. Vecteur-vitesse instantanée. — Lorsque t_1 tend vers t , on sait que le rapport $\frac{\overrightarrow{\Delta M}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t}$ admet pour limite la dérivée $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ du vecteur \overrightarrow{OM} par rapport au temps t . Donc la vitesse moyenne \overrightarrow{V}_m admet pour limite $\overrightarrow{V} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$:

Le vecteur lié d'origine M , équipollent à $\overrightarrow{V} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$, est le vecteur-vitesse du mobile M au temps t .

Ce vecteur \overrightarrow{V} est donc (n° 116) porté par la tangente en M à la trajectoire (C) et son sens est celui du déplacement de M sur la courbe (sens t croissant).

Le vecteur-vitesse \overrightarrow{V} serait le vecteur décrit par le point M pendant l'unité de temps si, à partir de l'instant t , il poursuivait son mouvement suivant un mouvement rectiligne uniforme.

137. Composantes cartésiennes du vecteur-vitesse. — D'après le n° 115 :

Les composantes du vecteur-vitesse \overrightarrow{V} sont les dérivées x' , y' , z' par rapport au temps, des composantes x , y , z du vecteur espace \overrightarrow{OM} .

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \implies \overrightarrow{V} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

Les composantes de \vec{V} sont donc : $x' = \frac{dx}{dt}$; $y' = \frac{dy}{dt}$; $z' = \frac{dz}{dt}$.

Dans le cas où \vec{OM} est défini par : $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, on obtient :

$$\vec{V} = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}.$$

138. Vitesse algébrique sur la trajectoire. — Supposons connue la trajectoire (C) du point M et la loi horaire $s = F(t)$ définissant l'abscisse curviligne M en fonction

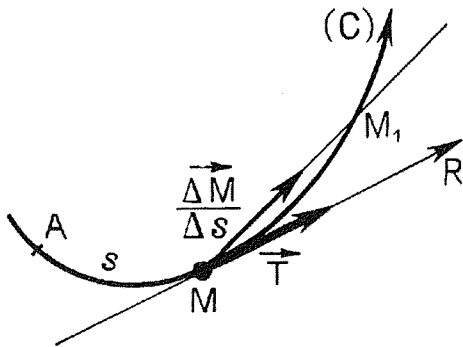


Fig. 94

de t . Posons $\widehat{MM}_1 = s_1 - s$.

Lorsque t_1 tend vers t , s_1 tend vers s et le vecteur $\frac{\overrightarrow{MM}_1}{s_1 - s} = \frac{\widehat{MM}_1}{\overrightarrow{MM}_1}$ tend vers la dérivée $\frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{T}$ du

vecteur \vec{OM} par rapport à s . Ce vecteur \vec{T} est donc un vecteur porté par la tangente en M à (C) et orienté (fig. 94) dans le sens positif sur la trajectoire (sens s croissant).

D'autre part nous admettons que sur tout arc de courbe mesurable, le rapport entre la longueur de la corde MM_1 et la longueur de l'arc \widehat{MM}_1 tend vers 1,

lorsque M_1 tend vers M . Par suite le module du vecteur $\frac{\overrightarrow{MM}_1}{s_1 - s} = \frac{\widehat{MM}_1}{\overrightarrow{MM}_1}$ tend vers 1, module de \vec{T} , lorsque M_1 tend vers M .

Le vecteur $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}$ est un vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens positif sur cette trajectoire.

Ceci posé le vecteur-vitesse moyenne s'écrit :

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{MM}_1}{t_1 - t} = \frac{\overrightarrow{MM}_1}{s_1 - s} \cdot \frac{s_1 - s}{t_1 - t}$$

Lorsque t_1 tend vers t , $\frac{\overrightarrow{MM}_1}{s_1 - s}$ tend vers $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}$ et $\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ tend vers la dérivée $v = \frac{ds}{dt}$ de s par rapport à t . Donc :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{M}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{ou} \quad \vec{V} = \vec{T} \cdot v \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = v \vec{T}.}$$

La dérivée $v = \frac{ds}{dt}$ est la vitesse algébrique du point M sur sa trajectoire orientée.

La relation $\frac{ds}{dt} = v$ montre que le mobile M se déplace sur la trajectoire dans le sens positif ou le sens négatif suivant que v est positif ou négatif. D'autre part :

$$\vec{V} = v \vec{T} \quad \Rightarrow \quad |\vec{V}| = |v| \quad \text{et} \quad \vec{V}^2 = v^2.$$

Donc \vec{V} a pour module $|v|$.

139. Remarque. — Si le repère $Oxyz$ est orthonormé, le vecteur-vitesse \vec{V} de composantes x' , y' , z' a pour module $|v| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Connaissant le sens du

déplacement de M sur sa trajectoire, on peut alors en déduire : $\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$
 puis, déterminer l'équation horaire $s = F(t) = \int_0^t v dt = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$ et
 la longueur $s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt$ de l'arc décrit pendant l'intervalle $[t_1, t_2]$.

140. Exemple. — Déterminer le vecteur-vitesse, la vitesse algébrique et l'équation horaire du mouvement défini dans le repère orthonormé Oxyz par :

$$x = 2t; \quad y = t^2; \quad z = \frac{1}{3}t^3 \quad (\text{fig. 95}).$$

Le vecteur-vitesse \vec{V} a pour composantes : $x' = 2$, $y' = 2t$, $z' = t^2$.

En orientant la trajectoire (C) dans le sens t croissant, on obtient :

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = t^2 + 2$$

et $\frac{ds}{dt} = t^2 + 2 \implies s = \frac{t^3}{3} + 2t + C$. En prenant O pour origine des arcs sur (C) on obtient $s = 0$ pour $t = 0$, d'où $C = 0$ et $s = \frac{t^3}{3} + 2t$.

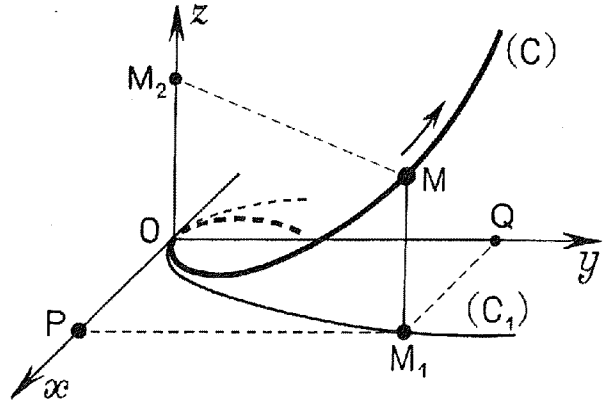


Fig. 95

VECTEUR-ACCÉLÉRATION D'UN POINT

141. Hodographe d'un mouvement. — Considérons le mouvement du point M tel que :

$$\vec{OM} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}.$$

Pour chaque valeur de t , construisons (fig. 96) le vecteur \vec{Om} égal au vecteur-vitesse du point M :

$$\vec{Om} = \vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt} = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}.$$

Lorsque t varie le point m décrit une courbe (H) appelée *hodographe du mouvement*.

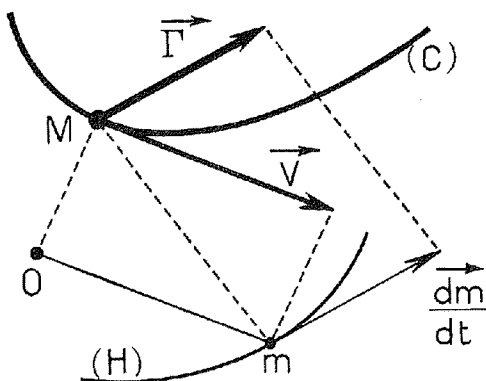


Fig. 96

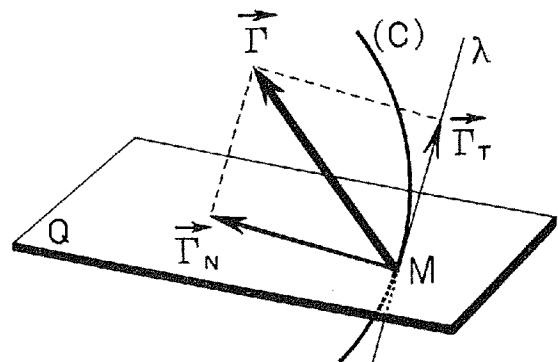


Fig. 97

142. Vecteur-accélération du point M. — Le point m se déplace, en fonction de t , sur l'hodographe et admet pour vecteur-vitesse :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$$

Le vecteur lié d'origine M, équipollent à $\vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$ vecteur-vitesse du point m, est appelé vecteur-accélération du point M.

Les composantes du vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ du point M(x, y, z) sont donc :

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad z'' = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \implies \boxed{\vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}}$$

Dans le cas où $\vec{OM} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, on obtient :

$$\vec{\Gamma} = f''(t)\vec{i} + g''(t)\vec{j} + h''(t)\vec{k}.$$

143. Accélération tangentielle et accélération normale. — La relation $\vec{V} = v\vec{T}$

entraîne :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt}.$$

Or \vec{T} est un vecteur unitaire et la relation $\vec{T}^2 = 1$ donne par dérivation : $2\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = 0$.

Le vecteur $\frac{d\vec{T}}{dt}$ est donc perpendiculaire à \vec{T} et par suite normal à la tangente en M à la trajectoire (fig. 97).

Le vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ se décompose en un vecteur $\vec{\Gamma}_T = \frac{dv}{dt}\vec{T}$ porté par la tangente en M et un vecteur $\vec{\Gamma}_N = v\frac{d\vec{T}}{dt}$ normal en M à la trajectoire.

La mesure algébrique γ_T de la composante tangentielle $\vec{\Gamma}_T$ sur la tangente M λ orientée par \vec{T} est donc la dérivée $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ de l'abscisse curviligne de M. Elle constitue l'accélération tangentielle (ou accélération numérique) du point M sur sa trajectoire :

$$\boxed{\gamma_T = \frac{d^2s}{dt^2}}$$

Par suite γ_T est donc la mesure algébrique de la projection de $\vec{\Gamma}$ sur la tangente orientée par \vec{T} . On obtient :

$$\gamma_T = \vec{\Gamma} \cdot \vec{T} = \vec{\Gamma} \cdot \frac{\vec{V}}{v} = \frac{1}{v} \vec{V} \cdot \vec{\Gamma} \implies \boxed{\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = v \cdot \gamma_T}$$

Cette relation découle, par dérivation, de la relation : $\vec{V}^2 = v^2$ car cette dernière entraîne $2\vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = 2v \cdot \frac{dv}{dt}$ ou $2\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = 2v \cdot \gamma_T$.

La composante normale $\vec{\Gamma}_N = \vec{\Gamma} - \vec{\Gamma}_T$ est située dans le plan P défini par le point M(x, y, z) et les vecteurs directeurs $\vec{V}(x', y', z')$ et $\vec{\Gamma}(x'', y'', z'')$ et aussi dans le plan Q normal en M(x, y, z) au vecteur $\vec{V}(x', y', z')$.

Son module γ_N est l'accélération normale du point M. Lorsqu'on connaît le module de $\vec{\Gamma}$ et celui de γ_T , on peut calculer γ_N par la formule $\gamma_T^2 + \gamma_N^2 = \vec{\Gamma}^2$.

144. Mouvement uniforme. Mouvement varié. — Le mouvement d'un point M sur sa trajectoire est dit *uniforme* lorsque sa vitesse algébrique $\frac{ds}{dt}$ est une constante v ce qui entraîne : $s = s_0 + vt$. Le diagramme du mouvement dans un repère tOs est une droite de coefficient directeur v (fig. 98).

Dans le cas contraire le *mouvement est dit varié*. Un tel mouvement est dit *accélééré* ou *retardé* suivant que la valeur absolue de sa vitesse est une fonction croissante ou décroissante de t . Or $|v|$ varie comme le carré scalaire $\vec{V}^2 = v^2$ dont la demi-dérivée est : $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = v \cdot \frac{dv}{dt} = v \cdot \gamma_T$. D'où en supposant $v \neq 0$:

1° $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = v \cdot \gamma_T > 0$. La vitesse v et l'accélération tangentielle γ_T sont de même signe : le mouvement est *accélééré*.

2° $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = v \cdot \gamma_T < 0$. Cette fois v et γ_T sont de signes contraires. Le mouvement est *retardé*.

3° $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = v \cdot \gamma_T = 0 \implies \gamma_T = 0$ et $v = C^{te}$. On a affaire à un mouvement uniforme où l'accélération $\vec{\Gamma}$ est, à chaque instant, normale à la trajectoire.

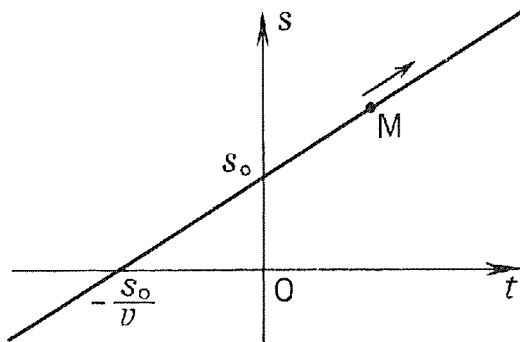


Fig. 98

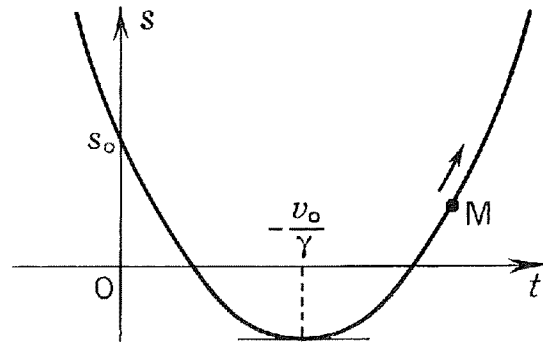


Fig. 99

Un mouvement est dit *uniformément varié* lorsque son accélération tangentielle $\gamma_T = \frac{d^2s}{dt^2}$ est une constante γ , ce qui entraîne :

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 + \gamma t \quad \text{et} \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2.$$

où v_0 et s_0 désignent les valeurs de v et s au temps $t = 0$.

Le diagramme des espaces (fig. 99) est une parabole admettant pour sommet le point $t = -\frac{v_0}{\gamma}$, $s = s_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma}$. Comme $v \cdot \gamma_T = \gamma^2 \left(t + \frac{v_0}{\gamma}\right)$, on voit que le mouvement est retardé pour $t < -\frac{v_0}{\gamma}$, accéléré pour $t > -\frac{v_0}{\gamma}$.

145. Exemple. — Reprenons le mouvement du n° 140 défini par :

$$\vec{OM} : x = 2t; \quad y = t^2; \quad z = \frac{1}{3}t^3.$$

On obtient :

$$\vec{V} : x' = 2; \quad y' = 2t; \quad z' = t^2.$$

$$\vec{\Gamma} : x'' = 0; \quad y'' = 2; \quad z'' = 2t.$$

D'autre part $s = \frac{t^3}{3} + 2t$, $v = \frac{ds}{dt} = t^2 + 2 \implies \gamma_T = \frac{d^2s}{dt^2} = 2t$.

On vérifie que : $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = x'x'' + y'y'' + z'z'' = 4t + 2t^3 = (t^2 + 2) \cdot 2t = v \cdot \gamma_T$.
Le mouvement est retardé pour $t < 0$, accéléré pour $t > 0$.

Enfin : $\gamma_N^2 = \vec{\Gamma}^2 - \gamma_T^2 = (4 + 4t^2) - 4t^2 = 4 \implies \gamma_N = 2$.
L'accélération normale γ_N est constante et égale à 2.

146. Mouvement plan. — Dans un plan rapporté au repère xOy , le mouvement d'un point mobile $M(x, y)$ est défini par les relations :

$$\overrightarrow{OM} : \quad x = f(t); \quad y = g(t). \tag{1}$$

L'étude du signe des composantes $x' = \frac{dx}{dt}$ et $y' = \frac{dy}{dt}$ du vecteur-vitesse permet

d'obtenir les variations de x et y , puis de construire la trajectoire (C) du point M. Notons que l'élimination de t entre les relations (1) donne l'équation $F(x, y) = 0$ d'une courbe, à laquelle appartient la trajectoire (C), mais que le mobile M peut décrire seulement en partie (exemple : droite support d'un mouvement rectiligne vibratoire).

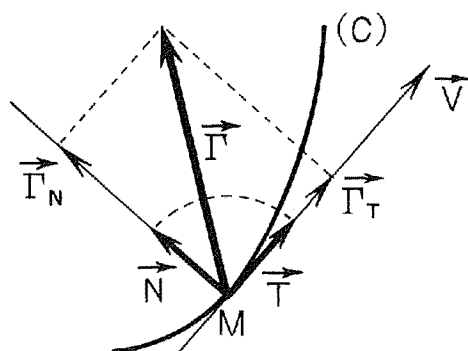


Fig. 100

Outre le vecteur unitaire $\vec{T}(\alpha, \beta) = \frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{\vec{V}}{v}$ tangent en M à (C) (fig. 100), on peut définir le vecteur unitaire normal $\vec{N}(-\beta, \alpha)$ tel que $(\vec{T}, \vec{N}) = +\frac{\pi}{2}$.

Le produit scalaire $\vec{\Gamma} \cdot \vec{N}$ donne alors l'accélération normale γ_N , mesurée algébriquement sur la normale en M orientée par \vec{N} .

147. Exemple. — Étudier, dans le plan du repère orthonormé xOy le mouvement du point M défini pour $0 \leq t \leq \pi$ par :

$$x = a(1 + \cos t) \cos t; \quad y = a(1 + \cos t) \sin t.$$

On obtient par dérivation :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt} \begin{cases} x' = -a(\sin t + \sin 2t) = -2a \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2} \\ y' = a(\cos t + \cos 2t) = 2a \cos \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2} \end{cases}$$

$$\vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} \begin{cases} x'' = -a(\cos t + 2\cos 2t) \\ y'' = -a(\sin t + 2\sin 2t). \end{cases}$$

D'où le tableau de variation :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x'	0	—	$-a\sqrt{3}$	—	0	+	0
x	$2a$	\searrow	$\frac{3a}{4}$	\searrow	$-\frac{a}{4}$	\nearrow	0
y	0	\nearrow	$\frac{3a\sqrt{3}}{4}$	\searrow	$\frac{a\sqrt{3}}{4}$	\searrow	0
y'	$2a$	+	0	—	$-a$	—	0

La trajectoire est la courbe (C) de la figure 101. Le coefficient directeur de la tangente en M : $\frac{y'}{x'} = -\cotg \frac{3t}{2}$, tend vers 0 lorsque t tend vers π . Notons que $\frac{y}{x} = \tg t$ et que :

$\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM}) = t \implies \overline{OM} = a(1 + \cos \theta)$. Désignons par B le point $(x = a, y = 0)$. Le point P, d'angle polaire θ , sur le cercle de diamètre OB est tel que $\overline{OP} = a \cos \theta$ et la droite OP coupe la trajectoire (C) en M tel que $\overline{PM} = a$, ce qui permet une construction simple de (C). Orientons cette trajectoire dans le sens t croissant et désignons par A le point $(x = 2a, y = 0)$. On obtient :

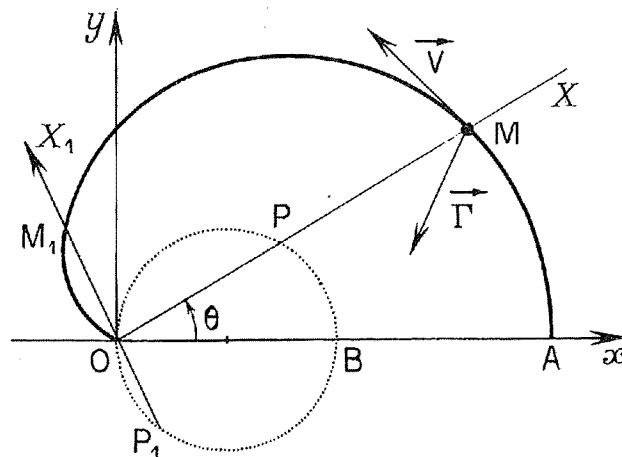


Fig. 101

$$v^2 = (x'^2 + y'^2) = 4 a^2 \cos^2 \frac{t}{2} \implies v = 2 a \cos \frac{t}{2}.$$

Le mouvement est retardé de A vers O. En prenant le point A pour origine des arcs, il vient :

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t 2 a \cos \frac{t}{2} dt = 4 a \sin \frac{t}{2}.$$

La relation $s = 4 a \sin \frac{t}{2}$ est l'équation horaire du mouvement. La longueur totale L de la trajectoire est : $L = \int_0^\pi v dt = \left[4 a \sin \frac{t}{2} \right]_0^\pi = 4 a.$

Les vecteurs unitaires tangent $\vec{T} = \frac{\vec{V}}{v}$ et normal \vec{N} s'écrivent :

$$\vec{T} \left(-\sin \frac{3t}{2}, \cos \frac{3t}{2} \right) \quad \text{et} \quad \vec{N} \left(-\cos \frac{3t}{2}, -\sin \frac{3t}{2} \right).$$

L'accélération tangentielle $\gamma_T = \frac{dv}{dt} = -a \sin \frac{t}{2}$ est bien égale au produit scalaire $\vec{\Gamma} \cdot \vec{T}$ tandis que l'accélération normale est $\gamma_N = \vec{\Gamma} \cdot \vec{N} = 3 a \cos \frac{t}{2}.$

EXERCICES

— Étudier les mouvements suivants où a et b représentent des longueurs données et où t représente le temps. On déterminera la trajectoire dans un repère orthonormé, les composantes du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération et s'il y a lieu l'hodographe et les variations de v^2 .

$$245. \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

$$246. \begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = b \operatorname{tg} t \end{cases}$$

$$247. \begin{cases} x = a e^t \\ y = b e^{-t} \end{cases}$$

$$248. \begin{cases} x = at \\ y = \frac{b}{t} \end{cases}$$

$$249. \begin{cases} x = a \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2bt}{1+t^2} \end{cases}$$

$$250. \begin{cases} x = a \frac{t^2+1}{2t} \\ y = b \frac{t^2-1}{2t} \end{cases}$$

$$251. \begin{cases} x = \frac{a(1+\sin^2 t)}{\cos^2 t} \\ y = \frac{2a \sin t}{\cos^2 t} \end{cases}$$

$$252. \begin{cases} x = \frac{a}{2} (e^t + e^{-t}) \\ y = \frac{b}{2} (e^t - e^{-t}) \end{cases}$$

$$253. \begin{cases} x = \frac{2ae^t}{e^{2t}+1} \\ y = \frac{b(e^{2t}-1)}{e^{2t}+1} \end{cases}$$

$$254. \begin{cases} x = a \cos 2t \\ y = a \cos t \end{cases}$$

$$255. \begin{cases} x = a \sin 2t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

$$256. \begin{cases} x = a \sin 2t \\ y = a \sin 3t \end{cases}$$

257. Les coordonnées d'un mobile M par rapport à un repère orthonormé xOy sont définies en fonction de $t > 0$ par : $x = \frac{1}{t}$; $y = t^2$.

1° Former l'équation de sa trajectoire. Construire cette courbe et indiquer le sens du déplacement du point M.

2° Calculer les composantes du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération du mobile M à un instant quelconque de son mouvement. Déterminer l'hodographe de ce mouvement construit à partir de l'origine O des coordonnées.

3° Construire la position du mobile M à l'instant $t = 1$ ainsi que son vecteur-vitesse et son vecteur-accélération à cet instant.

258. Dans un plan rapporté au repère orthonormé xOy , les coordonnées d'un point M sont données en fonction de l'instant t par : $x = e^t$; $y = e^{-t}$ où t prend toute valeur.

1° Construire la trajectoire (C) du point M. Donner les composantes du vecteur-vitesse et du vecteur accélération à l'instant t .

2° On mène le vecteur \overrightarrow{Om} équipollent au vecteur-vitesse de M à l'instant t . Construire la courbe (H) décrite par m . Comparer (H) et (C).

3° Construire le vecteur-vitesse $\overrightarrow{MM'}$ et le vecteur-accélération $\overrightarrow{MM''}$. Montrer que M' décrit Ox. Quelle est la courbe décrite par M'' ?

259. Dans un plan rapporté au repère orthonormé xOy , on considère le point mobile M dont les coordonnées en fonction du temps t sont données par :

$$x = \cos t; \quad y = \sin t - \cos t.$$

1° Étudier les variations de x et y en fonction de t . Construire la trajectoire et trouver son équation cartésienne.

2° Après avoir mis r^2 sous la forme $a + b \cos(2t + \alpha)$, étudier les variations de la longueur $OM = r$. Quelle relation y a-t-il entre les valeurs de t pour lesquelles r a une valeur donnée ?

3° Déterminer le vecteur-vitesse et son module v . Montrer que l'hodographe relatif à O est la trajectoire elle-même. Quelle relation y a-t-il entre r et v ?

4° Déterminer le vecteur-accélération. Relation avec \overrightarrow{OM} .

260. On considère dans le plan rapporté au repère orthonormé xOy un point mobile M de coordonnées : $x = e^t$; $y = \text{Log } t$ où t est positif.

1° Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire (Γ) du mobile M et celle de l'hodographe (H) de son mouvement. Construire ces deux courbes.

2° Calculer, en fonction de t , les composantes du vecteur-accélération de M.

261. 1° On considère la fonction : $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$. Étudier ses variations. Tracer le graphe (points et tangentes remarquables). En déduire la résolution et la discussion graphiques de l'équation en x : $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = a$ où a est un nombre donné.

2° On pose $x = \cos t$ en supposant $0 \leq t \leq \pi$. Exprimer y en fonction de t ; rendre logarithmique l'expression obtenue. En passant par l'intermédiaire de la variable t , étudier les variations de y en fonction de x et résoudre l'équation du paragraphe 1°.

3° En supposant que t représente le temps, les expressions de x et y définissent le mouvement d'un mobile. Étudier ce mouvement dans l'intervalle $(0, \pi)$: trajectoire, déplacement du mobile sur la trajectoire, vecteur-vitesse, vecteur-accélération, hodographe par rapport à l'origine des coordonnées (nature et tracé de l'hodographe).

262. Le temps étant désigné par t , on étudie à partir de l'instant $t = 0$, le mouvement du point M de coordonnées :

$$x = t + 2; \quad y = \frac{1}{t^2 + 4t + 3}.$$

1° Montrer que la trajectoire de M appartient à la courbe $y = \frac{1}{x^2 - 1}$. Dans quel sens est-elle parcourue ?

2° Calculer les composantes du vecteur-vitesse. En déduire la courbe à laquelle appartient l'hodographe et la particularité du vecteur-accélération.

263. Dans un plan rapporté au repère orthonormé xOy on considère un point mobile M de coordonnées $x = 2 \text{Log } t$ et $y = t + \frac{1}{t}$.

1° Déterminer t en fonction de x , puis y en fonction de x . Construire la trajectoire du mobile M et préciser comment se déplace M lorsque t varie de 0 à $+\infty$.

2° Déterminer les composantes du vecteur-vitesse \overrightarrow{V} et du vecteur-accélération $\overrightarrow{\Gamma}$. Montrer que l'hodographe est une demi-parabole de foyer O et de directrice $y = 2$.

3° La trajectoire étant orientée dans le sens t croissant, on prend pour origine des arcs le point A ($t = 1$). Calculer la vitesse algébrique v et la longueur de l'arc AM décrit entre les instants 1 et t .

264. On considère dans le repère orthonormé xOy de base (\vec{i}, \vec{j}) le point M de coordonnées $x = 2a\sqrt{2} \cos t$, $y = a \sin t \cos t$ dont la trajectoire (C) est orientée dans le sens t croissant avec pour origine des arcs s le point A ($t = 0$).

1° Construire la trajectoire (C) et donner son équation sous la forme $y^2 = f(x^2)$.

2° Calculer les composantes du vecteur-vitesse \overrightarrow{V} , du vecteur-accélération $\overrightarrow{\Gamma}$, la vitesse algébrique v et établir l'équation horaire $s = \varphi(t)$ donnant l'abscisse curviligne du point M sur (C). Construire l'hodographe et étudier la nature du mouvement.

3° Déterminer les composantes du vecteur unitaire \vec{T} tangent en M à (C) et du vecteur unitaire normal \vec{N} tel que $(\vec{T}, \vec{N}) = +\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'accélération tangentielle γ_T et l'accélération normale γ_N . Montrer que le vecteur $\vec{\Gamma}$ fait des angles opposés avec \vec{T} et \vec{J} opposé à \vec{j} ou avec \vec{N} et \vec{I} opposé à \vec{i} . En posant $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{2} \sin t$, déterminer en fonction de φ les angles polaires de \vec{T} , \vec{N} et du support de $\vec{\Gamma}$.

265. Dans le plan rapporté au repère orthonormé xOy , on considère le point mobile M de coordonnées $x = a \cos \varphi + c$; $y = b \sin \varphi$ où les constantes positives a, b, c sont liées par la relation $a^2 = b^2 + c^2$. On pose $OM = \rho$ et on désigne par θ l'angle polaire (\vec{Ox}, \vec{OM}) .

1° Montrer que le lieu du point M est une ellipse (E) de foyer O. Calculer, en fonction de φ , la valeur de ρ , de $\cos \theta$, de $\sin \theta$ et établir la double relation : $\rho = a + c \cos \varphi = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}$.

2° L'angle φ variant en fonction du temps t suivant la loi horaire : $a \varphi + c \sin \varphi = bt$, calculer en fonction de φ , les dérivées $\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}$, $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$ et la valeur des produits $\rho \varphi'$ et $\rho^2 \theta'$. Montrer que θ' conserve un signe constant et calculer la période T du mouvement : durée d'une révolution sur (E).

3° Trouver en fonction de φ les composantes du vecteur-vitesse \vec{V} et du vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ du point M. Vérifier que $\vec{\Gamma} = -\frac{ab^2}{\rho^3} \vec{OM}$ et montrer que l'hodographe est un cercle égal au cercle principal de l'ellipse (E).



PROJECTION D'UN MOUVEMENT

148. Mouvement projeté sur un plan. — Étant donné un point M , en mouvement sur sa trajectoire (C) , considérons un plan fixe P et une droite Δ qui coupe le plan P en O .

Au point mobile M associons sa projection M_1 , effectuée parallèlement à Δ , sur le plan P (fig. 102). Il est clair que la trajectoire (C_1) du point M_1 est la projection sur le plan P de la trajectoire (C) du point mobile M . D'autre part, comme la dérivée de la projection d'un vecteur est la projection de la dérivée de ce vecteur (n° 117), on en déduit que :

Le vecteur-vitesse \vec{V}_1 et le vecteur-accélération $\vec{\Gamma}_1$ du point M_1 sont respectivement les projections sur le plan P , du vecteur-vitesse \vec{V} et du vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ du point M .

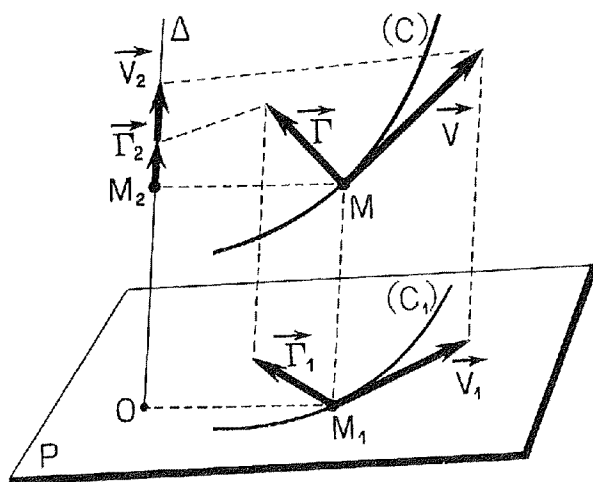


Fig. 102

M_1 projection de M implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_1 = \frac{d\vec{M}_1}{dt} \text{ projection de } \vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt} \\ \vec{\Gamma}_1 = \frac{d^2\vec{M}_1}{dt^2} \text{ projection de } \vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} \end{array} \right.$$

En prenant les axes Ox et Oy dans le plan P , Oz suivant Δ , on vérifie que : $\vec{OM}(x, y, z)$, $\vec{V}(x', y', z')$ et $\vec{\Gamma}(x'', y'', z'')$ ont respectivement pour projections sur le plan P : $\vec{OM}_1(x, y, 0)$, $\vec{V}_1(x', y', 0)$ et $\vec{\Gamma}_1(x'', y'', 0)$ et par suite que \vec{V}_1 et $\vec{\Gamma}_1$, projections de \vec{V} et $\vec{\Gamma}$, sont bien les dérivées $\frac{d\vec{M}_1}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{M}_1}{dt^2}$.

149. Mouvement projeté sur un axe. — Au point M mobile sur (C) associons cette fois sa projection M_2 sur Δ effectuée parallèlement au plan P . On voit de même que :

Le vecteur-vitesse \vec{V}_2 et le vecteur-accélération $\vec{\Gamma}_2$ du point M_2 sont respectivement les projections sur Δ , du vecteur-vitesse \vec{V} et du vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ du point M .

$$M_2 \text{ projection de } M \implies \left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_2 = \frac{d\vec{M}_2}{dt} \text{ projection de } \vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt} \\ \vec{\Gamma}_2 = \frac{d^2\vec{M}_2}{dt^2} \text{ projection de } \vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} \end{array} \right.$$

Avec le même repère que ci-dessus on vérifie que :

$$\vec{OM}_2(0, 0, z); \quad \vec{V}_2(0, 0, z') \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_2(0, 0, z'')$$

sont les projections sur Oz de \vec{OM} , \vec{V} et $\vec{\Gamma}$.

150. Exemple. — Reprenons le mouvement (n° 140) défini par :

$$\vec{OM} : \quad x = 2t; \quad y = t^2; \quad z = \frac{1}{3}t^3.$$

En projection sur le plan xOy , on obtient le mouvement du point $M_1(x = 2t, y = t^2, z = 0)$. La trajectoire est la parabole $x^2 = 4y, z = 0$ décrite dans le sens x croissant. On vérifie que le vecteur-vitesse $\vec{V}_1(2, 2t, 0)$ et le vecteur-accelération $\vec{\Gamma}_1(0, 2, 0)$ sont bien les projections sur le plan xOy de $\vec{V}(2, 2t, t^2)$ et $\vec{\Gamma}(0, 2, 2t)$.

En projection sur Oz, on obtient le mouvement du point $M_2(x = y = 0, z = \frac{1}{3}t^3)$ dont le vecteur-vitesse $\vec{V}_2(0, 0, t^2)$ et le vecteur-accelération $\vec{\Gamma}_2(0, 0, 2t)$ sont respectivement les projections sur Oz de $\vec{V}(2, 2t, t^2)$ et de $\vec{\Gamma}(0, 2, 2t)$.

151. Mouvements composés. — Si on connaît les mouvements des points M_1 et M_2 , on peut en déduire (fig. 103) le mouvement du point M défini par :

$$\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2. \tag{1}$$

Le mouvement du point M est dit résulter de la composition à partir de O des mouvements de M_1 et M_2 .

Or la relation (1) donne par dérivation :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{M}_1}{dt} + \frac{d\vec{M}_2}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{M}_1}{dt^2} + \frac{d^2\vec{M}_2}{dt^2}.$$

Le vecteur-vitesse et le vecteur-accelération du point M sont respectivement la somme des vecteurs-vitesse et des vecteurs-accelération de M_1 et de M_2 (fig. 103).

Ceci se généralise pour plusieurs points M_1, M_2, \dots, M_k en posant : $\vec{OM} = \Sigma \vec{OM}_\alpha$, on obtient :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt} = \Sigma \frac{d\vec{M}_\alpha}{dt} = \Sigma \vec{V}_\alpha$$

et

$$\vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \Sigma \frac{d^2\vec{M}_\alpha}{dt^2} = \Sigma \vec{\Gamma}_\alpha.$$

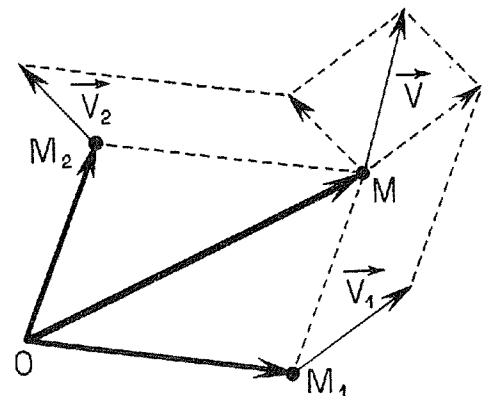


Fig. 103

Pour étudier le mouvement d'un point M dans l'espace, on pourra donc commencer par étudier le mouvement de sa projection M_1 sur le plan xOy et celui de sa projection M_2 sur Oz. Ou bien encore commencer par étudier le mouvement de ses projections sur les trois axes de coordonnées.

Ainsi dans le mouvement du point M du n° 140 sa projection P ($x = 2t$) sur Oz est animée d'un mouvement uniforme, sa projection Q ($y = t^2$) sur Oy est animée d'un mouvement uniformément accéléré tandis que sa projection M_2 sur Oz a pour cote $z = \frac{1}{3}t^3$. La projection $M_1(x = 2t, y = t^2)$ du point M sur le plan xOy décrit la parabole $x^2 = 4y$. Le vecteur \vec{M}_1M ayant pour mesure $\overline{M_1M} = z_M = \frac{t^3}{3}$ on peut ainsi se rendre compte comment est décrite la trajectoire (C) tracée sur le cylindre $x^2 - 4y = 0$ (fig. 95).

MOUVEMENT A ACCÉLÉRATION CONSTANTE

152. Problème. — Nous nous proposons d'étudier le mouvement d'un point M dont le vecteur-accélération reste équipollent à un vecteur fixe $\vec{\Gamma}$, connaissant en outre la position initiale M_0 et la vitesse initiale \vec{V}_0 au temps $t = 0$. C'est le cas du mouvement d'un point matériel dans le vide sous l'effet de la pesanteur, d'une particule électrique dans un champ électrique uniforme, etc. Nous supposons le mouvement rapporté à un repère $Oxyz$. Rappelons que :

1° Si un vecteur \vec{U} a une dérivée nulle quel que soit t , le vecteur \vec{U} est un vecteur constant

$$\frac{d\vec{U}}{dt} \equiv \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{U} = \vec{A} \text{ (vecteur constant).}$$

En effet si les dérivées des composantes X, Y, Z de \vec{U} sont nulles, ces composantes sont des constantes $X = \alpha$, $Y = \beta$, $Z = \gamma$ indépendantes de t .

2° Si deux vecteurs \vec{U} et \vec{U}_1 ont même dérivée pour toute valeur de t , leur différence est un vecteur constant.

$$\frac{d\vec{U}}{dt} \equiv \frac{d\vec{U}_1}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\vec{U} - \vec{U}_1) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{U} - \vec{U}_1 = \vec{C} \text{ (vecteur constant)}$$

et par suite :
$$\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{C}.$$

153. Cas d'un vecteur-accélération nul. — Supposons d'abord que le vecteur-accélération du point M soit constamment nul. La relation :

$$\frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} \equiv \vec{0} \quad \text{entraîne} \quad \vec{V} = \vec{A} \text{ (vecteur constant).}$$

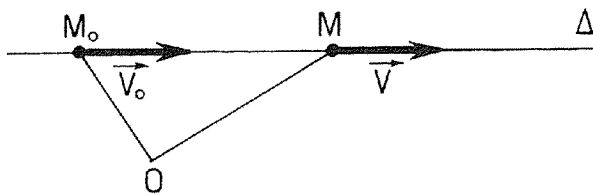


Fig. 104

Le vecteur-vitesse \vec{V} du point M, garde la valeur $\vec{V}_0 = \vec{A}$ qu'il avait au temps $t = 0$.

La relation $\vec{V} = \vec{V}_0$ ou $\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{V}_0$ montre que

les vecteurs \vec{OM} et $t\vec{V}_0$ ont même dérivée, ce qui donne :

$$\vec{OM} = t\vec{V}_0 + \vec{C} \quad (\vec{C} \text{ vecteur constant}).$$

Pour $t = 0$, on obtient : $\vec{OM}_0 = \vec{C}$, d'où finalement :

$$\boxed{\vec{OM} = \vec{OM}_0 + t\vec{V}_0.} \quad (1)$$

On voit immédiatement que la trajectoire du point M est la droite Δ issue de M_0 et de vecteur directeur \vec{V}_0 (fig. 104). En prenant cette droite pour axe Ox et en posant $\vec{OM} = x\vec{i}$, $\vec{V}_0 = v\vec{i}$, on obtient l'équation horaire :

$$\boxed{x = x_0 + vt.}$$

Tout point mobile dont le vecteur-accélération est constamment nul est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Cependant si $\vec{V}_0 = \vec{0}$, la vitesse initiale étant nulle, la vitesse du point M reste nulle et la relation (1) donne $\vec{OM} = \vec{OM}_0$. Le point M est fixe dans le repère $Oxyz$.

154. Cas d'un vecteur-accélération constant $\vec{\Gamma} \neq \vec{0}$. — La relation $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\Gamma}$ quel que soit t , montre que les deux vecteurs \vec{V} et $t\vec{\Gamma}$ ont même dérivée. Donc :

$$\vec{V} = t\vec{\Gamma} + \vec{A} \quad (\vec{A} \text{ vecteur constant}).$$

Pour $t = 0$, on obtient : $\vec{V}_0 = \vec{A} \implies \boxed{\vec{V} = \vec{V}_0 + t\vec{\Gamma}}$ (2)

La relation $\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(t\vec{V}_0 + \frac{1}{2} t^2 \vec{\Gamma} \right)$ montre que le vecteur \vec{OM} et le vecteur $t\vec{V}_0 + \frac{1}{2} t^2 \vec{\Gamma}$ ont une différence constante \vec{C} . Pour $t = 0$, on obtient $\vec{C} = \vec{OM}_0$:

$$\boxed{\vec{OM} = \vec{OM}_0 + t\vec{V}_0 + \frac{1}{2} t^2 \vec{\Gamma}}$$
 (3)

1° \vec{V}_0 est nul ou parallèle à $\vec{\Gamma}$. — On peut poser $\vec{V}_0 = \lambda \vec{\Gamma}$ et on obtient :

$$\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \left(\lambda + \frac{1}{2} t^2 \right) \vec{\Gamma}$$

D'où : $\vec{M_0M} \parallel \vec{\Gamma}$.

Le point M se déplace donc sur la droite Δ issue de M_0 et de vecteur directeur $\vec{\Gamma}$ (fig. 105). En prenant cette droite pour axe Ox et en posant $\vec{OM} = x\vec{i}$, $\vec{V}_0 = v_0\vec{i}$ et $\vec{\Gamma} = \gamma\vec{i}$, la relation (3) s'écrit :

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2}$$

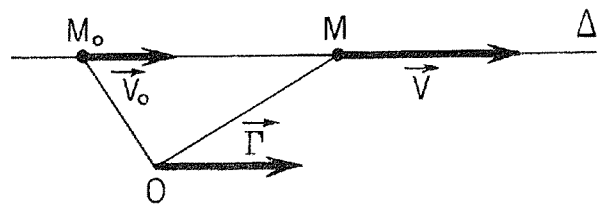


Fig. 105

Le mouvement du point M est un mouvement rectiligne uniformément varié dont la trajectoire est parallèle à $\vec{\Gamma}$.

2° \vec{V}_0 et $\vec{\Gamma}$ ont des directions distinctes. — La relation (3) ci-dessus qui s'écrit

$\vec{M_0M} = t\vec{V}_0 + \frac{1}{2} t^2 \vec{\Gamma}$ montre que le vecteur $\vec{M_0M}$ est une combinaison linéaire de \vec{V}_0 et de $\vec{\Gamma}$. Le point M se déplace donc dans le plan R issu de M_0 et de vecteurs directeurs \vec{V}_0 et $\vec{\Gamma}$. Prenons dans ce plan le repère XM_0Y , d'origine M_0 et de vecteurs de base : $\vec{\Gamma}$ sur M_0X et \vec{V}_0 sur M_0Y (fig. 106). La relation (3) s'écrit :

$$\vec{M_0M} = t\vec{V}_0 + \frac{1}{2} t^2 \vec{\Gamma} = X\vec{\Gamma} + Y\vec{V}_0$$

Soit : $X = \frac{t^2}{2}; \quad Y = t$.

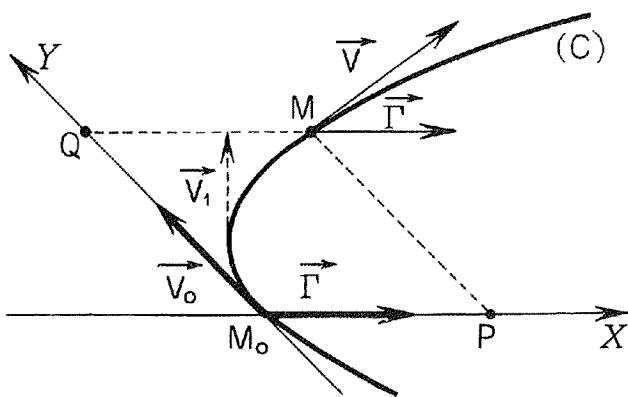


Fig. 106

La trajectoire (C) est donc, dans le plan R, la parabole $Y^2 = 2X$.

Lorsque \vec{V}_0 et $\vec{\Gamma}$ ont des directions distinctes, la trajectoire du point M est une parabole tangente en M_0 à \vec{V}_0 et dont l'axe est parallèle à $\vec{\Gamma}$.

155. Étude du mouvement parabolique. — Désignons par $\vec{M_0P}$ et $\vec{M_0Q}$ les composantes du vecteur $\vec{M_0M}$ suivant les directions M_0X et M_0Y :

$$\vec{M_0M} = \frac{1}{2} t^2 \vec{\Gamma} + t\vec{V}_0 \implies \vec{M_0P} = \frac{1}{2} t^2 \vec{\Gamma} \quad \text{et} \quad \vec{M_0Q} = t\vec{V}_0$$

Le mouvement de M résulte de la composition à partir de M_0 , du mouvement rectiligne uniformément varié de P sur M_0X et du mouvement rectiligne uniforme de Q sur M_0Y .

Le point Q se déplaçant toujours dans le même sens sur M_0Y , le point M décrit la parabole dans le sens correspondant à celui de \vec{V}_0 (sens t croissant).

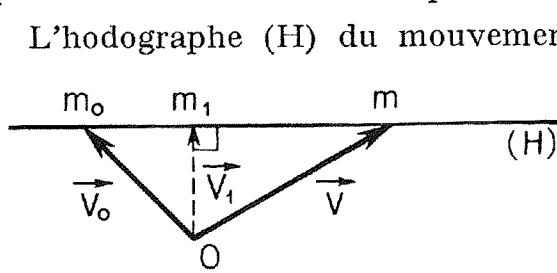


Fig. 107

L'hodographe (H) du mouvement (fig. 107), défini par $\vec{Om} = \vec{V} = \vec{V}_0 + t\vec{\Gamma}$ est donc une droite parallèle à $\vec{\Gamma}$. Le produit scalaire $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma}$ égal à $\vec{V}_0 \cdot \vec{\Gamma} + t\vec{\Gamma}^2$ s'annule pour la valeur de t égale à $t_1 = -\frac{\vec{V}_0 \cdot \vec{\Gamma}}{\vec{\Gamma}^2}$. Cet instant t_1 qui

correspond à \vec{V} perpendiculaire à $\vec{\Gamma}$, est donc celui où le point M passe au sommet S de la parabole.

La relation $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = (t - t_1) \vec{\Gamma}^2$ montre que :

Le point M est animé d'un mouvement retardé avant son passage au sommet S de la parabole, d'un mouvement accéléré après son passage à ce sommet.

On vérifie sur l'hodographe que $Om = |\vec{V}|$ est décroissant pour $t < t_1$, croissant pour $t > t_1$.

156. Mouvement d'un point pesant dans le vide. — Précisons les résultats ci-dessus, dans le cas du mouvement dans le vide, d'un point pesant M rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Nous supposons que l'axe Oz est vertical ascendant et qu'au temps $t = 0$, le point M est en O, avec un vecteur-vitesse \vec{V}_0 situé dans le plan vertical xOz . Nous désignons par v_0 le module de \vec{V}_0 et par α l'angle aigu (\vec{Ox}, \vec{V}_0) compté positivement dans le sens de (\vec{Ox}, \vec{Oz}) . On obtient :

$$\vec{V}_0 = v_0 (\vec{i} \cos \alpha + \vec{k} \sin \alpha).$$

Le point M est uniquement soumis à la pesanteur qui lui communique une accélération verticale descendante constante égale à g ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$ environ). D'où :

$$\vec{\Gamma} = -g\vec{k}.$$

La relation (3) du n° 154 qui s'écrit, puisque M_0 est en O :

$$\vec{OM} = t\vec{V}_0 + \frac{1}{2}t^2\vec{\Gamma} \implies \vec{OM} = v_0t(\vec{i} \cos \alpha + \vec{k} \sin \alpha) - \frac{1}{2}gt^2\vec{k}.$$

D'où les équations du mouvement :

$$\vec{OM} : \quad \boxed{x = v_0t \cos \alpha \quad | \quad y = 0 \quad | \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \sin \alpha.} \quad (4)$$

Le mouvement du point pesant M résulte de la composition d'un mouvement uniforme suivant l'horizontale Ox et d'un mouvement uniformément varié, d'accélération descendante, suivant la verticale Oz .

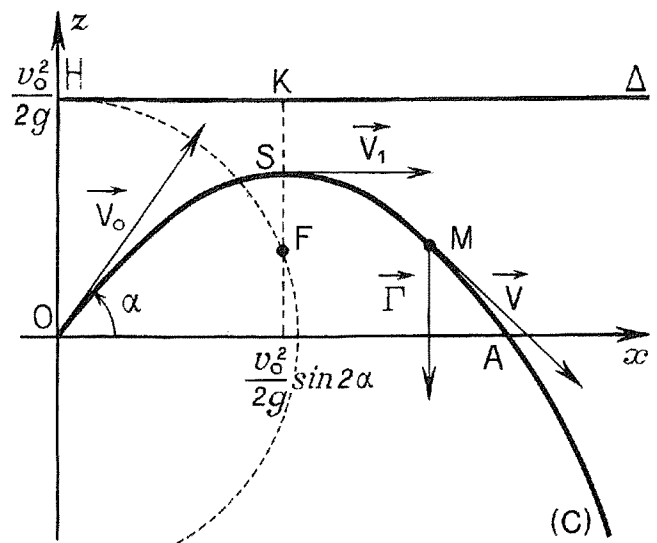


Fig. 108

Notons les composantes de \vec{V} et $\vec{\Gamma}$:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt} : x' = v_0 \cos \alpha ; y' = 0 ; z' = -gt + v_0 \sin \alpha \quad (5)$$

$$\vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} : x'' = 0 ; y'' = 0 ; z'' = -g. \quad (6)$$

157. Équation de la trajectoire. — Opérons dans le plan xOz et éliminons t entre les relations (4) :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \implies \boxed{z = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.} \quad (7)$$

La trajectoire du point M est donc une parabole d'axe vertical, tangente en O à \vec{V}_0 et dont la concavité est dirigée du côté des z négatifs (fig. 108).

Cette parabole recoupe Ox pour $z = 0$, c'est-à-dire pour $t = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$ et au point A : $x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha ; z = 0$.

Le sommet S de la trajectoire correspond à $z' = 0$, c'est-à-dire à $t = \frac{v_0}{g} \sin \alpha$. On en déduit les coordonnées de S :

$$x_s = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha ; z_s = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

L'équation de la parabole s'écrit :

$$\left(x - \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha\right)^2 = -2 \frac{v_0^2}{g} \cos^2 \alpha \left(z - \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha\right)$$

donc sous la forme : $(x - x_s)^2 = 2p(z - z_s)$. Le paramètre algébrique de cette parabole est : $p = -\frac{v_0^2}{g} \cos^2 \alpha$.

On en déduit que la directrice Δ a pour équation :

$$z = z_s - \frac{p}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha + \frac{v_0^2}{2g} \cos^2 \alpha \text{ soit : } z = \frac{v_0^2}{2g}$$

et que le foyer F $\left(x = x_s, z = z_s + \frac{p}{2}\right)$ a pour coordonnées :

$$x_F = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha ; z_F = -\frac{v_0^2}{2g} \cos 2\alpha.$$

Soit H le point où la directrice Δ coupe Oz . On vérifie que $OF = OH = \frac{v_0^2}{2g}$ donc que O est équidistant de F et de Δ .

Notons que O appartient à la branche ascendante de la trajectoire si α est positif à la branche descendante si α est négatif.

158. Étude de la vitesse. — Le vecteur \vec{V} , de module $|v|$ a pour composantes :

$$\begin{aligned} x' &= v_0 \cos \alpha \text{ et } z' = -gt + v_0 \sin \alpha. \\ v^2 &= x'^2 + z'^2 = v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha + g^2 t^2. \end{aligned}$$

$$\text{Soit } v^2 - v_0^2 = -2g \left(v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2\right) = -2gz$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 - 2gz.}$$

Pour v_0 donné on voit que la vitesse $|v|$ du point M ne dépend que de sa cote z c'est-à-dire de sa hauteur au-dessus du sol. On vérifie que le mouvement est retardé lorsque z croît (car v^2 est décroissant), accéléré lorsque z décroît. La vitesse est minimum lorsque M est en S sommet de la trajectoire.

EXERCICES

266. Démontrer que si, dans le mouvement d'un point M , l'hodographe relatif à l'origine O est une droite issue de O , on a $\overrightarrow{OM} = A(t) \overrightarrow{I} + \overrightarrow{K}$ où \overrightarrow{I} et \overrightarrow{K} désignent des vecteurs constants et $A(t)$ une fonction de t . En déduire que le mouvement du point M est un mouvement rectiligne.

267. Si l'hodographe relatif au point O est une droite ne passant pas par O , démontrer les relations (où \overrightarrow{I} , \overrightarrow{J} , \overrightarrow{K} sont des vecteurs constants) :

$$\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{V} = a(t) \overrightarrow{I} + \overrightarrow{J} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} = A(t) \overrightarrow{I} + t \overrightarrow{J} + \overrightarrow{K}.$$

En déduire que le mouvement du point M résulte de la composition de deux mouvements rectilignes, l'un d'eux étant uniforme, et que la trajectoire est plane.

268. Démontrer que si l'hodographe relatif à O est situé dans un plan P passant par O et de vecteurs de base \overrightarrow{I} et \overrightarrow{J} , on a les relations :

$$\overrightarrow{V} = a(t) \overrightarrow{I} + b(t) \overrightarrow{J} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} = A(t) \overrightarrow{I} + B(t) \overrightarrow{J} + \overrightarrow{K}.$$

En déduire que la trajectoire du point M est située dans un plan parallèle à P .

269. Lorsque l'hodographe relatif à O est dans un plan P ne passant pas par O , on peut écrire, en désignant par \overrightarrow{I} , \overrightarrow{J} , \overrightarrow{K} , \overrightarrow{L} des vecteurs constants tels que \overrightarrow{K} soit perpendiculaire au plan P contenant \overrightarrow{I} et \overrightarrow{J} :

$$\overrightarrow{V} = a(t) \overrightarrow{I} + b(t) \overrightarrow{J} + \overrightarrow{K} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} = A(t) \overrightarrow{I} + B(t) \overrightarrow{J} + t \overrightarrow{K} + \overrightarrow{L}.$$

En déduire que le mouvement de M résulte de la composition d'un mouvement curviligne dans le plan P et d'un mouvement rectiligne uniforme, suivant une droite Δ perpendiculaire au plan P .

270. 1° Dans tout mouvement uniforme, l'hodographe relatif au point O est une courbe tracée sur une sphère de centre O et le plan normal en tout point m de l'hodographe passe par O .

2° Démontrer que l'une des deux propriétés précédentes entraîne l'autre et que dans ce cas on a affaire à un mouvement uniforme.

271. Un point M mobile dans l'espace rapporté au repère $Oxyz$ est soumis à une accélération définie par $\frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$.

1° Démontrer que les coordonnées x, y, z de M vérifient la même équation différentielle $x'' + \omega^2 x = 0$ dont la solution s'écrit $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$.

En déduire que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{I} \cos \omega t + \overrightarrow{J} \sin \omega t$ où \overrightarrow{I} et \overrightarrow{J} sont deux vecteurs arbitraires constants.

2° Soient M_0 et \overrightarrow{V}_0 la position et la vitesse initiales du point M au temps $t = 0$. Exprimer \overrightarrow{I} , \overrightarrow{J} et \overrightarrow{OM} en fonction de \overrightarrow{OM}_0 et \overrightarrow{V}_0 . Que peut-on en conclure pour la trajectoire de M ?

3° En posant $\omega t = \varphi - \alpha$, écrire \overrightarrow{OM} sous la forme $\overrightarrow{OA} \cos \varphi + \overrightarrow{OB} \sin \varphi$ et déterminer α pour que l'on ait $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. En déduire que la trajectoire est une ellipse de centre O .

272. Dans un repère orthonormé xOy le mouvement du point $M(x, y)$ est défini en fonction du temps par :

$$x = 2t - 1; \quad y = 2t^2 - 2t + 1.$$

1° Déterminer et construire la trajectoire du point M .

2° Calculer les composantes du vecteur-vitesse et construire ce vecteur-vitesse à l'instant $t = 1$. Calculer les composantes du vecteur-accélération et montrer que ce vecteur reste équipollent à un vecteur fixe. Construire le vecteur accélération à l'instant $t = 1$.

3° Construire l'hodographe du mouvement relatif au point O . Calculer la valeur absolue de la vitesse et indiquer quand t varie de 0 à $+\infty$ la nature du mouvement (accélééré ou retardé).

273. On considère, dans un repère orthonormé xOy , la parabole (P) d'équation $y^2 = 2px$ ($p > 0$). Un point M , mobile sur cette parabole, est tel que sa projection K sur Oy est animée d'un mouvement uniforme de vitesse positive a et passe en O à la date $t = 0$. On désigne par \overrightarrow{MR} le vecteur-vitesse du point M et par \overrightarrow{MS} son vecteur-accélération.

1° Calculer en fonction du temps t les coordonnées x et y de M et les composantes des vecteurs \overrightarrow{MR} et \overrightarrow{MS} .

2° Trouver l'hodographe du mouvement, puis l'ensemble des points S .

3° Calculer les coordonnées du point R. Par quelle transformation ponctuelle passe-t-on de la parabole (P) à la courbe décrite par R ?

4° Soient O le sommet et F le foyer de la parabole (P). Soient M et M' deux points de P, K et K' leurs projections orthogonales sur Oy et soit Q l'intersection de la droite M'K' et de la tangente en M à (P). Démontrer la relation $4 \overline{QM'} \cdot \overline{OF} = \overline{KK'}^2$.

En déduire l'ensemble des points Q lorsque, M décrivant la parabole P, la distance KK' reste égale à une longueur constante a .

274. 1° Calculer $\cos 3t$ en fonction de $\cos t$.

2° Un point M, mobile sur la courbe d'équation $y = 4x^3 - 3x$, a pour abscisse $x = \cos t$ à l'instant t . Construire dans un repère orthonormé xOy la trajectoire de M. Montrer que le mouvement projeté de M sur Oy est un mouvement sinusoïdal dont on précisera le centre, l'amplitude, la période.

3° Calculer les abscisses du mobile à ses passages aux points de sa trajectoire d'ordonnée $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

275. Dans le plan du repère orthonormé xOy , un point mobile P décrit Ox d'un mouvement uniforme de vitesse $a > 0$ et a pour abscisse x_0 au temps $t = 0$. Un deuxième point mobile Q décrit Oy d'un mouvement uniformément varié. Au temps $t = 0$, il a pour ordonnée y_0 et une vitesse $v_0 > 0$ et au temps $t = 1$, sa vitesse est égale à $v_0 - g$ (g constante positive donnée).

1° Donner les coordonnées à l'instant t des mobiles P et Q. Construire la trajectoire (C) du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. Équation de cette trajectoire (C) et coordonnées x_1, y_1 de son sommet.

2° Former la relation indépendante de t à laquelle doivent satisfaire les données pour que les mobiles P et Q se rencontrent en O et indiquer la date de cette rencontre.

3° a) On se donne x_0 et y_0 , montrer qu'il existe une valeur et une seule de v_0 pour laquelle il y a une rencontre de P et Q.

b) On se donne v_0 et y_0 . Montrer que, sous certaine condition, il y a deux valeurs de x_0 pour lesquelles il y a rencontre. Calculer les valeurs de la vitesse v du mobile Q au moment de ces rencontres et montrer qu'elles sont de signes différents.

276. 1° Un projectile est lancé verticalement vers le haut à partir du point O avec une vitesse v_0 qui lui permet d'atteindre une hauteur de 25 m. Calculer $\frac{v_0^2}{g}$ où $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ désigne l'accélération due à la pesanteur. Dans la suite du problème, v_0 désigne la valeur ainsi définie.

2° On lance le projectile à partir de O, avec la vitesse v_0 suivant une direction Ou faisant avec l'horizontale Ox un angle de tir $(Ox, Ou) = \alpha$ tel que $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}$. Déterminer le point P où le projectile atteint le plan horizontal H de cote $-6,25 \text{ m}$, au-dessous du point O.

3° Trouver un deuxième angle de tir β permettant d'atteindre le même point P. Calculer le rapport des durées des trajets de ces deux mouvements. Sous quel angle γ faut-il tirer, avec la même vitesse initiale v_0 pour atteindre un point aussi éloigné que possible sur le plan H (on pourra calculer $\cos 2\gamma$).

277. Dans le plan du repère orthonormé xOz où Oz est vertical ascendant, on considère le mouvement d'un projectile pesant M défini par : $x = v_0 t \cos \alpha$; $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha$.

dans lequel le module v_0 de \vec{V}_0 est donné, mais où on fait varier l'angle de tir α de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

1° Étudier le cas où $\alpha = +\frac{\pi}{2}$. Calculer l'altitude maximum z atteinte par M. Exprimer à tout instant le carré de la vitesse v^2 du point M uniquement en fonction de g et de $h = z_1 - z$.

2° Déterminer l'ensemble des positions du projectile M à un instant donné t lorsque α varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. Écrire l'équation de la trajectoire C_α correspondant à une valeur donnée de α . Montrer que la directrice de C_α est une droite fixe Δ de cote $z = z_1$. Lieux du foyer F et du sommet S de C_α . Exprimer v^2 en fonction de g et $h = z_1 - z$.

3° Déterminer α , par sa tangente, pour que la trajectoire C_α passe par un point donné A (x_0, y_0). Établir l'existence d'une parabole (Γ) dite de *sûreté*, limitant l'ensemble des points A pouvant être atteints par le projectile M. Montrer qu'en tout point de (Γ) la trajectoire unique C_α qui y passe est tangente en ce point à (Γ). Quelle relation y a-t-il entre les deux valeurs de α permettant d'atteindre un point B ($x = a, y = 0$) de Ox ?

MOUVEMENT CIRCULAIRE

159. Mouvement circulaire. — Considérons, dans un plan rapporté au repère orthonormé xOy , le cercle (C) de centre O et de rayon R (fig. 109). Ce cercle coupe Ox en A (R, 0), Oy en B (0, R). La position d'un point M sur le cercle est déterminée par son *angle polaire* : $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$ mesuré en radians à $2k\pi$ près ou par son *abscisse curviligne* :

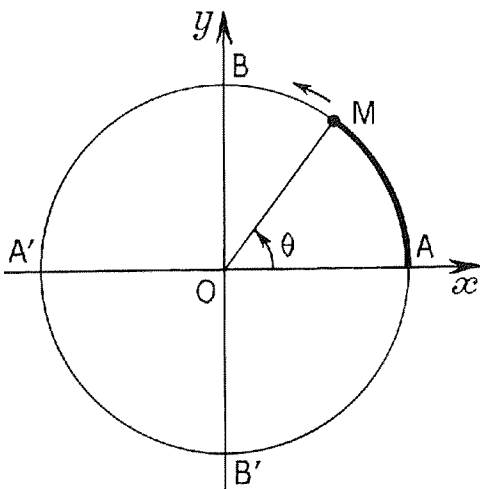


Fig. 109

$$s = \widehat{AM} \implies \boxed{s = R\theta} \quad (1)$$

Les coordonnées de M sont alors :

$$\boxed{x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta.} \quad (2)$$

Comme $\vec{OA} = R \vec{i}$ et $\vec{OB} = R \vec{j}$ le vecteur $\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$ s'écrit :

$$\vec{OM} = R \vec{i} \cos \theta + R \vec{j} \sin \theta \iff \boxed{\vec{OM} = \vec{OA} \cos \theta + \vec{OB} \sin \theta.} \quad (3)$$

Lorsque le point M est mobile sur le cercle, le mouvement est déterminé par la relation $\theta = f(t)$. On obtient l'équation horaire :

$$s = R \theta \implies s = R f(t). \quad (4)$$

160. Vitesse angulaire. — En posant $\frac{d\theta}{dt} = f'(t) = \theta'$, la vitesse algébrique du point M s'écrit :

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \iff \boxed{v = R \theta'.} \quad (5)$$

Cette vitesse est donc le produit de R par θ' :

La dérivée $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$ de l'angle polaire θ du point M est appelée vitesse angulaire du point M sur le cercle.

L'unité de vitesse angulaire est le radian par seconde (1 rd/s). C'est la vitesse angulaire d'un mobile parcourant un arc de 1 radian par seconde.

De même en posant $\frac{d^2\theta}{dt^2} = f''(t) = \theta''$ (accélération angulaire) on voit que l'accélération tangentielle s'écrit :

$$\gamma_T = \frac{d^2s}{dt^2} = R \frac{d^2\theta}{dt^2} \implies \gamma_T = R \theta'' \tag{6}$$

Lorsque θ'' est nul quel que soit t , la vitesse angulaire θ' est une constante ω et la vitesse algébrique $v = R\omega$ est constante. Le mouvement circulaire est uniforme.

161. Composantes cartésiennes de \vec{V} et $\vec{\Gamma}$. — Compte tenu des relations :

$$\theta = f(t), \quad \theta' = \frac{d\theta}{dt} = f'(t) \quad \text{et} \quad \theta'' = \frac{d^2\theta}{dt^2} = f''(t), \quad \text{nous obtenons :}$$

$$\vec{OM} \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \implies \vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt} \begin{cases} x' = -R \theta' \sin \theta \\ y' = R \theta' \cos \theta. \end{cases}$$

et
$$\vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} \begin{cases} x'' = -R \theta'' \sin \theta - R \theta'^2 \cos \theta \\ y'' = R \theta'' \cos \theta - R \theta'^2 \sin \theta. \end{cases}$$

Pour interpréter ces formules, il faut chercher les projections de \vec{V} et $\vec{\Gamma}$ sur le rayon OM et la tangente Mλ au cercle. Il est plus facile d'opérer comme suit.

162. Composantes tangentielles et normales de \vec{V} et $\vec{\Gamma}$. — Désignons par \vec{I} et \vec{J} les vecteurs unitaires d'angles polaires θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$ (fig. 110).

On obtient :

$$\vec{I} \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases}$$

$$\vec{J} \begin{cases} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \theta \\ \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \theta. \end{cases}$$

Le vecteur \vec{I} n'est autre que le vecteur unitaire de l'axe \vec{OM} . La relation $(\vec{I}, \vec{J}) = +\frac{\pi}{2}$ montre que \vec{J} est égal au vecteur unitaire \vec{T} tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens direct (θ croissant). Par dérivation, on obtient :

$$\frac{d\vec{I}}{d\theta} \begin{cases} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{J}}{d\theta} \begin{cases} -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{cases} \implies \frac{d\vec{I}}{d\theta} = \vec{J} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{J}}{d\theta} = -\vec{I}$$

Comme $\vec{OM} = R \vec{I}$, on obtient en dérivant par rapport à t :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt} = R \frac{d\vec{I}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \implies \boxed{\vec{V} = R \theta' \vec{J}} \tag{7}$$

et
$$\vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = R \theta'' \vec{J} + R \theta' \frac{d\vec{J}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \implies \boxed{\vec{\Gamma} = R \theta'' \vec{J} - R \theta'^2 \vec{I}} \tag{8}$$

La relation $\vec{V} = R \theta' \vec{J}$ montre que le vecteur-vitesse, d'origine M, est porté par la tangente et a, sur cette tangente orientée par \vec{J} , pour mesure algébrique : $R \theta'$, c'est-à-dire $v = \frac{ds}{dt}$ (n° 138).

La relation $\vec{\Gamma} = R \theta'' \vec{J} - R \theta'^2 \vec{I}$ montre que le vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ admet pour composantes $\vec{\Gamma}_T = R \theta'' \vec{J}$ sur la tangente et $\vec{\Gamma}_N = -R \theta'^2 \vec{I}$ sur la normale OM.

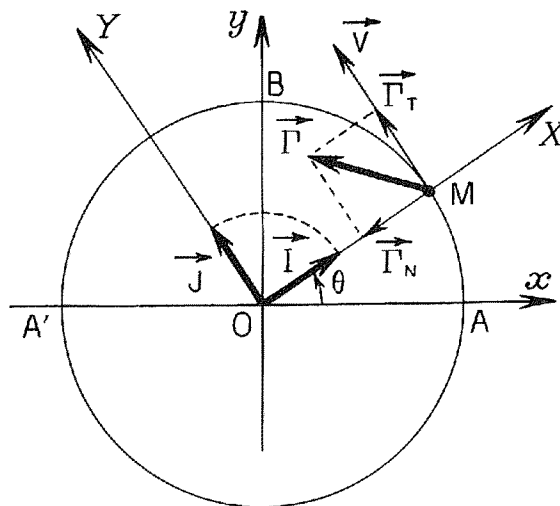


Fig. 110

La mesure algébrique de la composante $\vec{\Gamma}_T$ sur la tangente est l'accélération tangentielle $\gamma_T = R \theta'' = \frac{d^2s}{dt^2}$ (n° 143). La composante $\vec{\Gamma}_N$ portée par MO et dirigée vers le centre du cercle (C) est donc située dans la concavité de la trajectoire. Son module $\gamma_N = R \theta'^2$ est l'accélération normale. Compte tenu de la relation $v = R \theta'$ on obtient :

$$\gamma_N = R \theta'^2 = \frac{v^2}{R}$$

163. Mouvement circulaire uniforme. — Un mouvement circulaire est uniforme lorsque sa vitesse angulaire θ' est une constante ω , ce qui implique $\theta'' = 0$ et $\theta = \omega t + \alpha$.

Le point M décrit le cercle (C) d'une façon uniforme dans le sens direct pour $\omega > 0$ (fig. 111), dans le sens rétrograde pour $\omega < 0$. En supposant ω positif on voit que la période T du mouvement vérifie :

$$\omega T = 2\pi \iff T = \frac{2\pi}{\omega}$$

C'est la durée d'une révolution du point M sur le cercle.

La fréquence du mouvement est le nombre de tours (ou cycles) par seconde :

$$n = \frac{1}{T} \iff n = \frac{\omega}{2\pi}$$

En posant $\vec{OM} = R \vec{I} = R \vec{i} \cos \theta + R \vec{j} \sin \theta$, on obtient :

$$x = R \cos(\omega t + \alpha); \quad y = R \sin(\omega t + \alpha).$$

Le vecteur-vitesse $\vec{V} = R \omega \vec{J}$ a un module constant $|v| = R \omega$ et l'hodographe est un cercle de rayon $R \omega$ décrit d'un mouvement uniforme.

Le vecteur-accelération se réduit à $\vec{\Gamma} = -R \omega^2 \vec{I}$. L'accélération tangentielle est nulle et l'accélération normale est $\gamma_N = R \omega^2$, c'est-à-dire $\gamma_N = \frac{v^2}{R}$. D'autre part puisque $\vec{OM} = R \vec{I}$, on obtient : $\vec{\Gamma} = -\omega^2 \vec{OM}$.

164. Mouvement rectiligne vibratoire simple. — Rappelons que lorsqu'un point M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon R d'un mouvement uniforme tel que $\theta = \omega t + \alpha$, sa projection orthogonale P sur Ox est animée (fig. 112) d'un mouvement vibratoire simple (ou sinusoïdal) :

$$x = R \cos(\omega t + \alpha) \iff \vec{OP} = \vec{OA} \cos(\omega t + \alpha).$$

Le point P décrit, alternativement dans chaque sens, le segment AA'. La période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et la phase $\omega t + \alpha$ du mouvement sont celles du mouvement circulaire du point M. Notons que le vecteur-vitesse et le vecteur-accelération de P :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\omega \vec{OA} \sin(\omega t + \alpha)$$

et
$$\frac{d^2\vec{P}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{OA} \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 \vec{OP}$$

sont respectivement les projections orthogonales sur Ox des vecteurs $\frac{d\vec{M}}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$.

De même la projection orthogonale Q du point M sur Oy est définie par :

$$y = R \sin(\omega t + \alpha) \iff \vec{OQ} = \vec{OB} \sin(\omega t + \alpha) = \vec{OB} \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

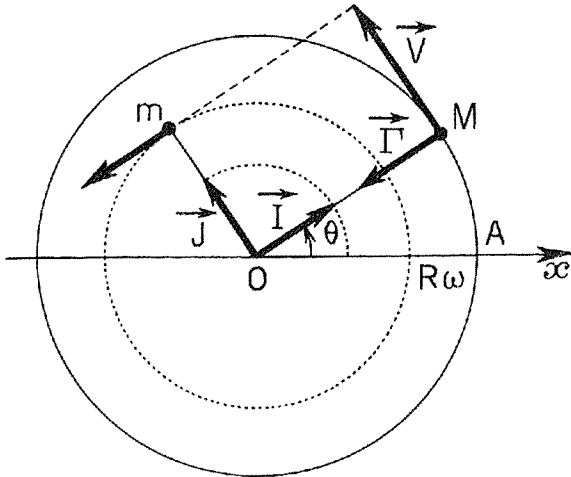


Fig. 111

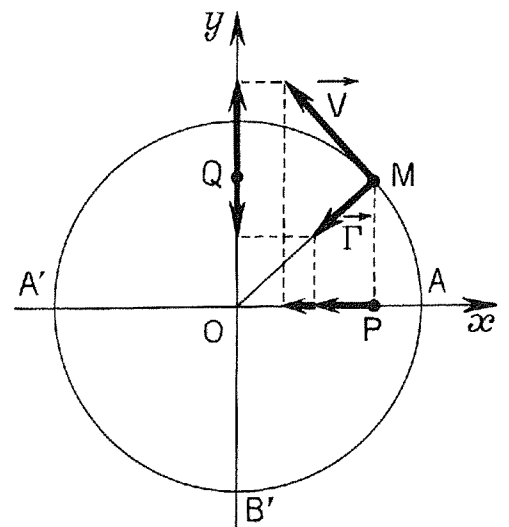


Fig. 112

Le point Q est donc animé d'un mouvement sinusoïdal de même centre O, de même période T et de même amplitude R que celui du point P, mais déphasé de $\frac{\pi}{2}$.

La relation $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ montre que :

Tout mouvement circulaire uniforme résulte de la composition de deux mouvements sinusoïdaux de même centre, de même amplitude et de même période, mais déphasés de $+\frac{\pi}{2}$ et s'effectuant dans deux directions rectangulaires.

Lorsque $\vec{OM} = \vec{OA} \cos(\omega t + \alpha) + \vec{OB} \sin(\omega t + \alpha)$ le mouvement de M est un mouvement circulaire uniforme si $OA = OB$ et $\vec{OA} \perp \vec{OB}$.

Comme à tout vecteur \vec{OA} on peut associer un vecteur \vec{OB} de même module que \vec{OA} et perpendiculaire à \vec{OA} , on voit réciproquement, que tout mouvement sinusoïdal $\vec{OP} = \vec{OA} \cos(\omega t + \alpha)$ peut être considéré comme la projection orthogonale d'un mouvement circulaire uniforme.

MOUVEMENT HÉLICOÏDAL UNIFORME

165. Hélice circulaire. — Dans le repère orthonormé *Oxyz*, considérons l'hélice circulaire (H) définie (fig. 113) en fonction du paramètre θ par :

$$\vec{OM} : \quad x = a \cos \theta; \quad y = a \sin \theta; \quad z = h \theta. \quad (1)$$

La longueur a est le rayon du cylindre de révolution (S) d'axe *Oz* et d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ sur lequel est tracé l'hélice (H). La constante h est le pas réduit de cette hélice. Soit A ($a, 0, 0$) le point origine des arcs $s = \widehat{AM}$ sur cette hélice orientée dans le sens θ croissant.

Désignons par P la projection orthogonale du point M sur le plan *xOy* et par Q sa projection sur *Oz*, ce qui entraîne : $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ}$.

Le point P décrit le cercle (C), cercle de base du cylindre (S) et θ est l'angle polaire (\vec{Ox}, \vec{OP}) du point P dans le plan *xOy*. L'arc $\sigma = \widehat{AP}$ du cercle (C) est égal à $a\theta$ et la cote $z = \overline{PM}$ du point M est égale à $h\theta$.

En désignant comme au n° 160 par :

$$\vec{I} \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{vmatrix} \text{ et } \vec{J} \begin{vmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{vmatrix} \text{ les vecteurs unitaires}$$

d'angles polaires θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$ du plan *xOy* on obtient : $\vec{OP} = a\vec{I}$ et $\vec{OQ} = h\theta\vec{k}$:

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ} = a\vec{I} + h\theta\vec{k}. \quad (2)$$

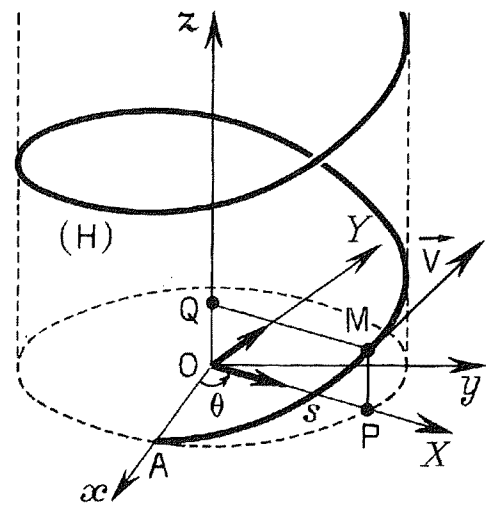


Fig. 113

166. Mouvement hélicoïdal. — La position du point M (θ) mobile sur l'hélice (H) est définie en fonction du temps t par la loi horaire $\theta = f(t)$.

En posant $\theta' = \frac{d\theta}{dt} = f'(t)$, on obtient les composantes du vecteur-vitesse \vec{V} du point M en dérivant les relations (1) :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt} : \quad x' = -a \theta' \sin \theta; \quad y' = a \theta' \cos \theta; \quad z' = h \theta'. \quad (3)$$

Donc, d'après ces relations, ou en dérivant la relation (2) :

$$\vec{V} = a \theta' \vec{J} + h \theta' \vec{k}.$$

Ce qui donne : $\vec{V}^2 = v^2 = a^2 \theta'^2 + h^2 \theta'^2 = (a^2 + h^2) \theta'^2$.

L'hélice étant orientée dans le sens θ croissant, $v = \frac{ds}{dt}$ et $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$ sont de même signe, soit :

$$v = \sqrt{a^2 + h^2} \theta' \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + h^2} \frac{d\theta}{dt}.$$

Cette relation entraîne, puisque s et θ sont nuls en A :

$$ds = \sqrt{a^2 + h^2} d\theta \implies \boxed{s = \theta \sqrt{a^2 + h^2}.} \quad (4)$$

La longueur de l'arc $s = \widehat{AM}$ de l'hélice est proportionnelle à θ , donc à $\sigma = \widehat{AP}$.

167. Mouvement hélicoïdal uniforme. — Le mouvement du point M sur l'hélice (H) est uniforme si la vitesse algébrique $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + h^2} \theta'$ est constante. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que θ' soit une constante ω et

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \omega \implies \boxed{\theta = \omega t + \alpha} \quad (5)$$

d'où les équations cartésiennes du mouvement :

$$\vec{OM} : \quad x = a \cos(\omega t + \alpha); \quad y = a \sin(\omega t + \alpha); \quad z = h(\omega t + \alpha).$$

Le point P décrit le cercle (C) d'un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire ω et le point Q décrit Oz d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $h\omega$.

Et puisque : $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ}$:

Un mouvement hélicoïdal uniforme résulte de la composition d'un mouvement circulaire uniforme sur un cercle (C) et d'un mouvement rectiligne uniforme suivant l'axe du cercle (C).

168. Vecteur-vitesse. — En dérivant la relation : $\vec{OM} = a\vec{I} + h\theta\vec{k}$ et compte tenu des relations (n° 162) :

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \omega; \quad \frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d\vec{I}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \omega \vec{J} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{J}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\omega \vec{I}$$

on obtient :
$$\vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt} = \omega a \vec{J} + h \omega \vec{k}. \quad (7)$$

Le vecteur-vitesse \vec{V} lié au point M (fig. 114) se projette donc sur le plan xOy suivant le vecteur $\omega a \vec{J}$, vecteur-vitesse du point P , de module ωa . Il se projette sur Oz suivant le vecteur constant $h \omega \vec{k}$ de module ωh .

Le vecteur \vec{V} a donc un module constant $|v| = \omega \sqrt{a^2 + h^2}$ et fait avec Oz un angle constant φ tel : $\text{tg } \varphi = \frac{\omega a}{\omega h} = \frac{a}{h}$. Ce vecteur \vec{V} étant tangent en M à l'hélice (H) est évidemment situé dans le plan tangent au cylindre (S) suivant la génératrice PM .

Le point m tel que $\vec{Om} = \vec{V}$, a pour coordonnées (3) :

$$x' = -a \omega \sin \theta; \quad y' = a \omega \sin \theta; \quad z' = h \omega.$$

L'hodographe, lieu du point m est donc, dans le

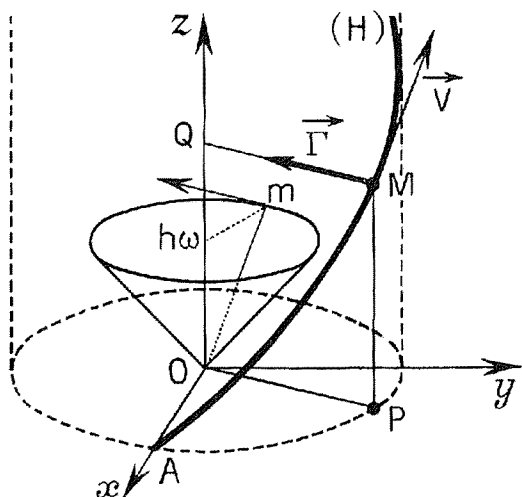


Fig. 114

plan $z = h \omega$, un cercle (C') d'axe Oz, de rayon $a \omega$, décrit d'un mouvement uniforme. Le lieu du segment Om est un cône de révolution d'axe Oz et de demi-angle au sommet égal à φ .

169. Vecteur-accélération. — En dérivant la relation (7), on obtient :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d^2 \vec{M}}{dt^2} = -\omega^2 a \vec{I}.$$

Or $\vec{OP} = \vec{QM} = a \vec{I}$. Donc $\vec{\Gamma} = -\omega^2 \vec{OP} = \omega^2 \vec{MQ}$.

Le vecteur accélération $\vec{\Gamma}$, lié au point M, est donc un vecteur de module constant $\omega^2 a$, équipollent au vecteur-accélération du point P. Il est porté par la droite MQ et dirigé vers l'intérieur du cylindre (S). Il est donc normal en M à ce cylindre et par suite à l'hélice (H). Le vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ se réduit donc à sa composante $\vec{\Gamma}_N$, ce qui résulte du fait que le mouvement est uniforme (n° 143).

170. Exemples de mouvements hélicoïdaux. — Lorsqu'une hélice circulaire glisse sur elle-même, tout point M lié à cette hélice est animé d'un mouvement hélicoïdal (mouvement d'un tire-bouchon, d'une vis, d'un foret hélicoïdal, d'un écrou ou d'un boulon).

Le mouvement hélicoïdal est uniforme lorsque la vitesse angulaire autour de l'axe de l'hélice est constante. Tout point de l'hélice d'un bateau (ou d'un avion) qui se déplace en ligne droite, à vitesse constante, est animé d'un mouvement hélicoïdal uniforme. Il en est de même du mouvement d'un point du vilebrequin ou du volant d'embrayage d'une voiture automobile (à moteur longitudinal) lorsque cette dernière roule en ligne droite à vitesse constante.

EXERCICES

278. Un point M est mobile dans le plan du repère orthonormé xOy et ses coordonnées en fonction du temps t sont :

$$x = 2 \cos t - \sin t; \quad y = 2 \sin t + \cos t.$$

1° Montrer que le point M est animé d'un mouvement circulaire uniforme. Construire sa trajectoire et déterminer son rayon R.

2° Calculer les composantes du vecteur-vitesse \vec{V} , son module v et construire l'hodographe du mouvement relatif à O.

3° Déterminer le vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ et démontrer que $\vec{\Gamma} = -\vec{OM}$.

279. Dans un plan rapporté au repère orthonormé xOy , on considère les deux cercles de centre O et de rayons respectifs a et $3a$, coupant la demi-droite Ox en A et B. Un premier mobile P parti de B au temps $t = 0$ décrit le grand cercle avec une vitesse angulaire constante de 1 radian par seconde. Un second mobile Q parti de A à l'instant $t = 0$ décrit le petit cercle avec une vitesse angulaire constante de 3 radians par seconde.

1° Quelles sont à l'instant t , évalué en secondes, les coordonnées du point P, du point Q, du milieu M de PQ et du milieu N de MQ ?

2° Déterminer les composantes du vecteur-vitesse \vec{V} du point M ainsi que celles du vecteur \vec{ON} . Comparer les directions et les modules de ces deux vecteurs.

280. On considère le point mobile M dont les coordonnées, en fonction du temps t , dans le repère orthonormé xOy sont : $x_M = R \cos \omega t$; $y_M = R \sin \omega t$. On désigne par P la projection orthogonale de M sur Ox et on construit le point N tel que

$$\vec{ON} = \vec{OM} \sin \omega t.$$

1° Étudier les mouvements des points M, P et N. Construire les trajectoires des points M et N, puis comparer les modules de leurs vecteurs-vitesse et de leurs vecteurs-accélération.

2° Calculer la longueur du segment NP à l'instant t . A quels moments cette longueur est-elle maximum ou minimum ? Quelle est alors l'ordonnée de N ? Démontrer qu'à ces instants les projections des vecteurs-vitesse de N et de P sur la droite NP sont des vecteurs équipollents.

281. Le plan étant rapporté au repère orthonormé xOy , on considère les cercles égaux (C) et (C') de centres respectifs C ($a, 0$) et C' ($-a, 0$) tangents en O à Oy et de diamètres OA et OA'. Un angle de droites constant $(OU, OV) = \frac{3\pi}{4}$ tourne autour de son sommet avec une vitesse angulaire constante ω .

1° Montrer que les points d'intersection M et M' de OU avec (C) et de OV avec (C') ont une vitesse constante et que l'angle $(\vec{CM}, \vec{C'M'})$ garde une valeur constante.

2° On suppose qu'au temps $t = 0$ le point M est en A. Écrire les coordonnées de M, de M' et du milieu I du segment MM'. Montrer que la trajectoire de I est un cercle de centre O. Calculer le rayon de ce cercle.

3° Trouver les coordonnées du centre Ω de la rotation qui transforme \vec{CM} en $\vec{C'M'}$. Former l'équation de la droite MM'. Déterminer l'ensemble des points du plan par où passe au moins une droite MM' et l'équation de la courbe (H) limitant cet ensemble. Préciser les éléments de (H).

282. 1° On désigne par t un paramètre réel tel que $0 < t < 2\pi$ et par u le nombre complexe $\frac{1}{2} \left(\cotg \frac{t}{2} + i \right)$. Calculer le nombre complexe $z = u^2$ sous la forme $x + iy$. Déterminer son module ρ et son argument θ . Établir la relation : $\rho = x + \frac{1}{2}$.

2° Le paramètre t représente le temps et on considère le mobile m d'affixe $z = x + iy$ dans le repère orthonormé xOy . Déterminer la trajectoire (C) du mouvement et former son équation cartésienne. Indiquer les dates de passage du point m aux points de (C) qui ont pour abscisse $\frac{1}{2}$.

3° On associe les positions m et m_1 relatives aux instants t et $t_1 = t + \pi$. Soient M et M_1 leurs homologues dans l'inversion de pôle O et de puissance 1. Évaluer les mesures algébriques : \overline{OM} sur l'axe d'angle polaire t , $\overline{OM_1}$ sur l'axe d'angle polaire $t + \pi$ et calculer la distance MM_1 . Trouver lorsque t varie la trajectoire du milieu I de MM_1 et la nature de son mouvement.

283. On considère le mouvement vibratoire elliptique d'un point M défini dans un repère orthonormé par :

$$x = a \cos \omega t; \quad y = b \sin \omega t.$$

1° Construire l'ellipse (E) trajectoire du point M. Déterminer la période T du mouvement. Comparer le vecteur-vitesse \vec{V} du point M au vecteur $\overrightarrow{OM_1}$, le point M_1 étant la position de M au temps $+\frac{T}{4}$. Démontrer la relation $\vec{V} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$.

2° On construit les points : $I \begin{cases} x = (a+b) \cos \omega t \\ y = (a+b) \sin \omega t \end{cases}$ et $J \begin{cases} x = (a-b) \cos \omega t \\ y = (b-a) \sin \omega t \end{cases}$

Nature des mouvements de I et J ? Montrer que M est le milieu de IJ. Comparer en grandeur et direction les vecteurs MI et OM_1 . Que représente IJ pour l'ellipse (E) ?

3° Soient P et Q les projections de I sur Ox et Oy. Montrer que PQ passe par le milieu R de OI et par le point M, que $RP = RQ = RO = RI$, que $MP = b$ et $MQ = a$. Connaissant les points O, M et M_1 , en déduire une construction géométrique de I, R, P, Q et des sommets de l'ellipse (E).

284. Le plan est rapporté au repère orthonormé xOy . Sur le cercle (C) de centre O et de rayon R on considère les deux points M_1 et M_2 d'angles polaires :

$$(\vec{Ox}, \overrightarrow{OM_1}) = \theta_1 \quad \text{et} \quad (\vec{Ox}, \overrightarrow{OM_2}) = \theta_2.$$

Soient \vec{T}_1 et \vec{T}_2 les vecteurs unitaires tangents au cercle en M_1 et M_2 respectivement, définis par $(\overrightarrow{OM_1}, \vec{T}_1) = (\overrightarrow{OM_2}, \vec{T}_2) = +\frac{\pi}{2}$.

1° Écrire les coordonnées de M_1 et M_2 , les composantes des vecteurs \vec{T}_1 et \vec{T}_2 , l'équation de la droite M_1M_2 et les composantes des vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\vec{T}_1 + \vec{T}_2$. Montrer que ces deux derniers sont parallèles.

2° On suppose que M_1 et M_2 sont variables sur le cercle (C) de telle sorte que :

$$\theta_1 = \omega_1 t + \varphi_1; \quad \theta_2 = \omega_2 t + \varphi_2 \quad (\text{où } \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2 \text{ sont des constantes et } t \text{ le temps}).$$

Exprimer les vecteurs-vitesse de M_1 et M_2 en fonction de R, ω_1 , ω_2 , \vec{T}_1 et \vec{T}_2 . Soit G le barycentre de M_1 affecté du coefficient ω_2 et de M_2 affecté du coefficient ω_1 . Déterminer les composantes de \overrightarrow{OG} et du vecteur-vitesse du point G. Exprimer ce dernier en fonction de R, ω_1 , ω_2 , $\vec{T}_1 + \vec{T}_2$ et déterminer son support.

3° On suppose que $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = -3\omega$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ et $R = \frac{a}{2}$. Exprimer $\cos^3 t$ et $\sin^3 t$ en fonction de $\sin t$, $\cos t$, $\sin 3t$ et $\cos 3t$. Écrire pour ces valeurs particulières les coordonnées de G sous forme de puissances de $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$. Que représente la droite M_1M_2 pour le lieu de G ?

285. Dans un repère orthonormé xOy on considère sur l'axe Ox, les points fixes A, B, C, d'abscisses respectives a , $-a$ et $2a$ ($a > 0$).

1° Un point mobile P se déplace sur un cercle de centre A et de rayon a , avec une vitesse angulaire positive constante ω . Au temps $t = 0$, il se trouve en C. Un point mobile Q se déplace sur un cercle de centre B et de rayon a avec la vitesse angulaire négative constante $-\omega$. A la date $t = 0$, l'angle (\vec{BO}, \vec{BQ}) a pour valeur $+\frac{\pi}{2}$. Calculer à l'instant t , les coordonnées des mobiles P et Q, puis celles du milieu M de PQ. Montrer que M est animé d'un mouvement rectiligne vibratoire simple. Préciser sa période et son amplitude.

2° Un mobile S se déplace sur le cercle de centre C et de rayon $2a$ avec une vitesse angulaire constante $-\omega$. Au temps $t = 0$, il se trouve en O. Calculer les coordonnées du point N barycentre des points Q (2) et S (1). Démontrer que N est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

286. On considère le repère cartésien orthonormé xOy de vecteurs de base \vec{i} et \vec{j} et les trois points mobiles P, P' et M tels que :

$$\vec{OP} = (1 + \cos t)\vec{i} + \sin t\vec{j}; \quad \vec{OP'} = (-1 + \sin t)\vec{i} + \cos t\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OP'}$$

1° Démontrer que les mouvements de P et P' sont circulaires uniformes. Déterminer leurs vitesses angulaires. Construire au même instant t le vecteur-vitesse et le vecteur-accelération de chacun de ces points.

2° Démontrer que le mouvement de M est un mouvement rectiligne vibratoire simple. Préciser le support de la trajectoire, l'amplitude et la période de ce mouvement.

287. Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $Oxyz$, on considère le point mobile M dont les coordonnées (x, y, z) sont définies en fonction de t par les formules :

$$x = 3 \cos 2t; \quad y = 3 \sin 2t; \quad z = 8t.$$

1° Déterminer les composantes du vecteur-vitesse \vec{V} , la vitesse algébrique v sur la trajectoire orientée dans le sens t croissant et la longueur s de l'arc \widehat{AM} décrit par le point M entre les instants 0 et t .

2° Nature de l'hodographe relatif à O du mouvement. Déterminer les composantes du vecteur-accelération $\vec{\Gamma}$ et le module de ce vecteur. Exprimer le module en fonction de v et du rayon r de l'hodographe.

3° Nature de la trajectoire du point M? Construire sa projection sur le plan xOz .

288. On donne un repère orthonormé $Oxyz$ et dans le plan xOz , l'axe variable OX d'angle polaire $(\vec{Ox}, \vec{OX}) = \theta$.

1° Connaissant les coordonnées (X, z) d'un point M du plan XOz par rapport au repère XOz, calculer ses coordonnées (x, y, z) dans le repère $Oxyz$.

2° On désigne par a une constante positive et on suppose $X = a, z = a\theta$. Calculer les coordonnées x, y, z de M. Identifier le lieu de M et construire ses projections sur les trois plans de coordonnées.

3° On suppose que $\theta = t$, où t désigne le temps. Étudier l'hodographe, relatif à O, du mouvement du point M.

On mène par le point M la droite parallèle au vecteur $\vec{V}(0, 1, -1)$. Déterminer les coordonnées du point M' où cette droite coupe le plan xOy . Étudier le mouvement du point M'. Construire sa trajectoire et l'hodographe de ce mouvement.

MOUVEMENT DE TRANSLATION D'UN SOLIDE

171. Translation dans l'espace. — *La translation est une transformation dans laquelle le vecteur joignant un point à son transformé est égal à un vecteur donné \vec{T} appelé vecteur-translation.*

Soit \vec{T} un vecteur fixe et non nul. Construisons le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{T}$ (fig. 117).

M' est le transformé de M par la translation \vec{T} et si M décrit une figure F , le point M' décrit une figure F' transformée de la figure F dans la translation \vec{T} .

1° Il n'existe pas de point double dans une translation.

2° Toute droite et tout plan parallèles au vecteur-translation \vec{T} sont globalement invariants dans la translation. Pour toute figure F située dans un plan P parallèle au support de \vec{T} la transformation se réduit à une translation plane (n° 44).

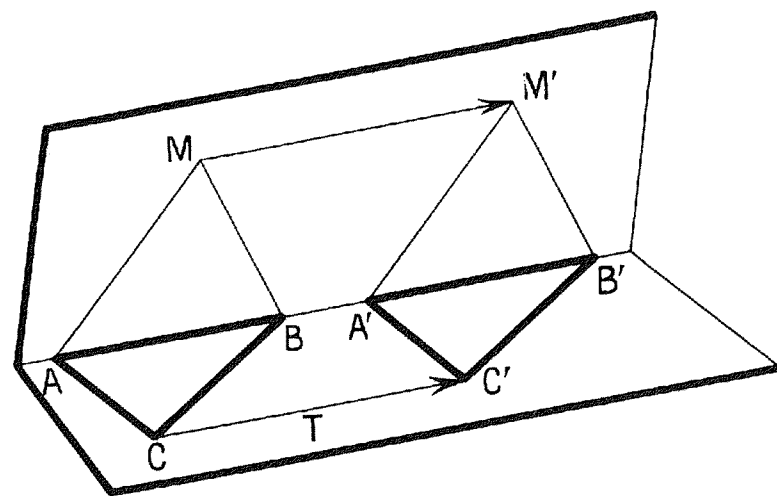


Fig. 115

3° *La translation dans l'espace transforme toute figure F en une figure égale F' .*

Soient A, B, C trois points fixes non alignés tels que AB soit parallèle au support du vecteur \vec{T} et M un point quelconque de l'espace (fig. 115). Désignons par A', B', C' et M' leurs homologues respectifs dans la translation \vec{T} . La droite AB , les demi-plans ACB et MAB d'arête AB sont parallèles au vecteur \vec{T} , donc globalement invariants dans la translation \vec{T} (n° 44).

Les égalités $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'} = \vec{T}$ entraînent $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$ et, dans le demi-plan MAB , les angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ et $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'})$ sont égaux. Si l'on fait glisser sur lui-même le dièdre (C, AB, M) de façon à amener le triangle ABC sur le triangle directement égal $A'B'C'$, le segment AM vient en coïncidence avec le segment $A'M'$. Tout point M de la figure F coïncide avec son homologue dans la figure F' et tout vecteur \overrightarrow{AM} de la figure F est égal à son homologue $\overrightarrow{A'M'}$ de la figure F' .

172. Réciproque. — *Toute transformation ponctuelle dans laquelle le vecteur qui joint deux points est égal au vecteur qui joint leurs transformés est une translation.*

Soient deux points l'un fixe A, l'autre variable M de l'espace. Leurs transformés A' et M' sont, par hypothèse, tels que $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$. Par conséquent : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. Le point M' est l'homologue de M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

173. Définition. — Rappelons qu'on appelle *système invariable* ou *corps solide* tout ensemble S de points dont les coordonnées par rapport à un repère donné ω XYZ sont constantes.

Si le repère ω XYZ, lié au solide S est mobile par rapport à un repère Oxyz supposé fixe, le solide S est lui-même en mouvement par rapport au repère Oxyz (fig. 116). Il est clair que la position S du solide au temps t et sa position S₀ au temps t₀ sont deux figures géométriques directement égales qui se correspondent par déplacement.

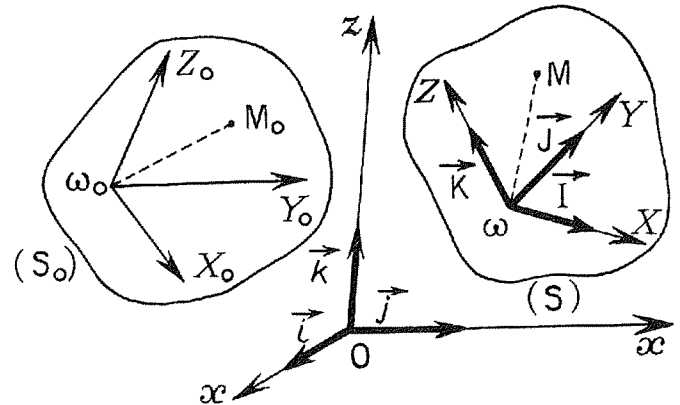


Fig. 116

174. Mouvement de translation. — *Un solide est animé d'un mouvement de translation si à tout instant t sa position S se déduit par translation de sa position S₀ au temps t₀.*

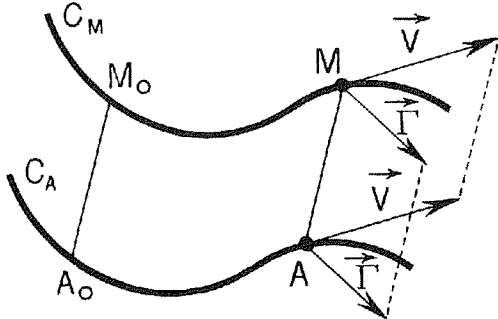


Fig. 117

Soit Oxyz le repère supposé fixe. Désignons (fig. 117) par A et M deux points quelconques de S, par A₀ et M₀ les positions de ces points au temps t₀. D'après la définition il existe un vecteur \vec{T} tel que :

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{A_0A} = \vec{T} \implies \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_0M_0}. \quad (1)$$

Tout vecteur \overrightarrow{AM} de S reste équipollent au vecteur $\overrightarrow{A_0M_0}$ de S₀. — Autrement dit tout vecteur du solide S reste équipollent à lui-même. Réciproquement, supposons que le système S vérifie pour toute valeur de t cette condition, on obtient en supposant A donné et M quelconque :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_0M_0} \implies \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{A_0A}. \quad (2)$$

Le système S, à chaque instant t, se déduit de S₀ par la translation de vecteur $\vec{T} = \overrightarrow{A_0A}$. Le système S, égal à S₀, est donc un solide animé d'un mouvement de translation.

175. Trajectoires. — *Dans tout mouvement de translation d'un solide les trajectoires de tous les points sont égales et se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par translation.*

Désignons par C_A la trajectoire du point donné A et par C_M la trajectoire du point quelconque M du solide S. La relation $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_0M_0}$ montre que C_M est l'homologue de C_A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{A_0M_0}$.

On donne le nom de la trajectoire au mouvement de translation. On obtient ainsi un mouvement de translation rectiligne si la trajectoire de tout point est une droite, curviligne si cette trajectoire est une courbe.

176. Vecteur-vitesse et vecteur-accelération. — Dans tout mouvement de translation les différents points d'un solide ont à chaque instant même vecteur-vitesse et même vecteur-accelération.

La relation $\vec{AM} = \vec{A_0M_0}$ s'écrit $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{A_0M_0}$. Le vecteur $\vec{A_0M_0}$ étant constant, on obtient en dérivant par rapport à t :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{dt} &= \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{0} & \iff & \vec{V}_M = \vec{V}_A \\ \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} &= \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} & \iff & \vec{\Gamma}_M = \vec{\Gamma}_A. \end{aligned}$$

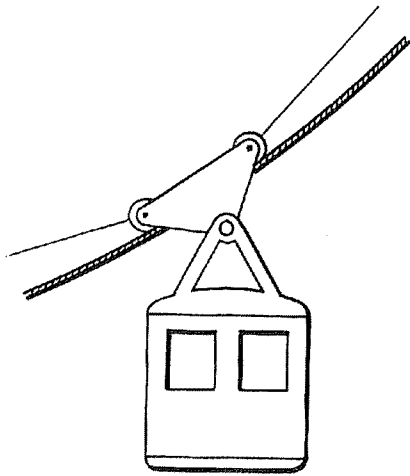


Fig. 118

Les vecteurs \vec{V} et $\vec{\Gamma}$ respectivement équipollents au vecteur-vitesse \vec{V}_M et au vecteur-accelération $\vec{\Gamma}_M$ de tout point M du solide S sont appelés vecteur-vitesse et vecteur-accelération du solide S dans le mouvement de translation.

177. Remarque. — Notons que réciproquement tout système S dont, à chaque instant t , tous les points ont même vecteur-vitesse, ne peut être qu'un solide animé d'un mouvement de translation. En effet, quels que soient A et M :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \implies \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{C} \iff \vec{AM} = \vec{C} \text{ (vecteur constant).}$$

Pour $t = t_0$, on obtient $\vec{A_0M_0} = \vec{C} \implies \vec{AM} = \vec{A_0M_0} \iff \vec{M_0M} = \vec{A_0A}$. Le système S se déduit de S_0 par la translation de vecteur $\vec{A_0A}$ (n° 174).

178. Exemples. — La cabine d'un téléphérique est animée d'un mouvement de translation dont la trajectoire est peu différente du câble porteur (fig. 118). Certaines planchettes de dessinateur sont équipées d'une équerre mobile pouvant effectuer tout mouvement de translation à l'exclusion de tout autre.

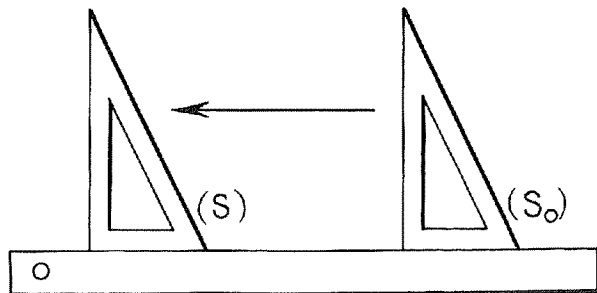


Fig. 119

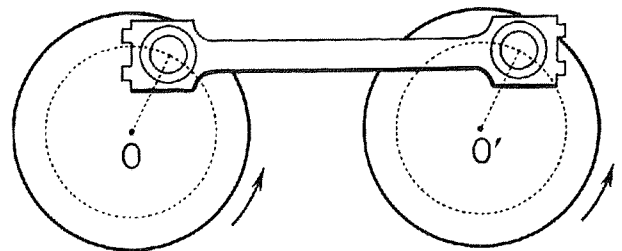


Fig. 120

Lorsqu'un solide S est animé d'un mouvement de translation rectiligne, la trajectoire de tout point est une droite de direction définie Δ . Il en est ainsi du mouvement d'un tiroir, d'un ascenseur ou d'une équerre le long d'une règle plate (fig. 119). Toute droite s du solide S parallèle à Δ glisse sur elle-même (*glissières du mouvement*) et il en est de même de tout cylindre de S dont les génératrices sont parallèles à Δ (rainures d'un tiroir, patins et guides de l'ascenseur, arêtes de l'équerre et de la règle, etc.).

La bielle d'accouplement de deux roues ou poulies à axes fixes est animée d'un mouvement de translation circulaire (fig. 120). Par contre la bielle d'accouplement des roues motrices d'une locomotive à vapeur est animée d'un mouvement de translation cycloïdal résultant d'une translation circulaire et d'une translation rectiligne.

CHANGEMENT DE REPÈRE

179. Problème du changement de repère. — Supposons connu, en fonction du temps t , le mouvement d'un point M par rapport à un repère ωXYZ de vecteurs de base $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ (fig. 121).

Lorsque le repère ω XYZ est lui-même animé d'un mouvement connu, par rapport à un second repère Oxyz de vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, le point M est en général mobile par rapport au repère Oxyz supposé fixe. On appelle :

Mouvement absolu M/Oxyz, le mouvement du point M par rapport au repère fixe Oxyz.

Mouvement d'entraînement ω XYZ/Oxyz, le mouvement du repère mobile ω XYZ par rapport au repère fixe Oxyz.

Mouvement relatif M/ ω XYZ, le mouvement du point M par rapport au repère mobile ω XYZ.

On dit encore que le mouvement absolu M/Oxyz résulte de la composition du mouvement d'entraînement ω XYZ/Oxyz et du mouvement relatif M/ ω XYZ.

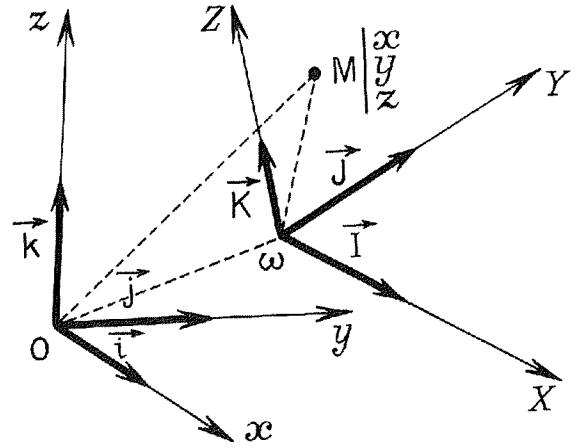


Fig. 121

180. Équations cartésiennes. — Le mouvement relatif du point M est déterminé par ses coordonnées X, Y, Z dans le repère ω XYZ telles que :

$$\vec{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K} \quad \text{avec} \quad X = f(t), \quad Y = g(t), \quad Z = h(t).$$

Ces relations définissent le lieu du point M dans le repère ω XYZ, c'est-à-dire la *trajectoire relative* du point M.

Le mouvement d'entraînement du repère ω XYZ est déterminé lorsqu'on connaît, en fonction du temps t , dans le repère fixe Oxyz, les coordonnées x_0, y_0, z_0 , du point ω et les composantes des vecteurs $\vec{I}(p, q, r)$, $\vec{J}(p', q', r')$ et $\vec{K}(p'', q'', r'')$.

Les coordonnées x, y, z du point M dans le repère Oxyz sont données par les formules de changement de repère qui s'obtiennent à partir de la relation :

$$\vec{OM} = \vec{O\omega} + X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K} \tag{1}$$

par projection sur les axes Ox, Oy, Oz :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + pX + p'Y + p''Z \\ y &= y_0 + qX + q'Y + q''Z \\ z &= z_0 + rX + r'Y + r''Z. \end{aligned} \tag{2}$$

Les coordonnées $x(t), y(t), z(t)$ ainsi obtenues, déterminent dans le repère Oxyz la *trajectoire absolue* du point M.

181. Composition des vitesses. — *Le vecteur-vitesse du point M dans le repère fixe Oxyz est son vecteur-vitesse absolue* $\vec{V}_a = \frac{d\vec{M}}{dt}$.

Or la relation :
$$\vec{OM} = \vec{O\omega} + X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

entraîne :

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{\omega}}{dt} + X \frac{d\vec{I}}{dt} + Y \frac{d\vec{J}}{dt} + Z \frac{d\vec{K}}{dt} + \frac{dX}{dt} \vec{I} + \frac{dY}{dt} \vec{J} + \frac{dZ}{dt} \vec{K} \tag{3}$$

En posant :
$$\vec{V}_r = \frac{dX}{dt} \vec{I} + \frac{dY}{dt} \vec{J} + \frac{dZ}{dt} \vec{K}$$

et
$$\vec{V}_e = \frac{d\vec{\omega}}{dt} + X \frac{d\vec{I}}{dt} + Y \frac{d\vec{J}}{dt} + Z \frac{d\vec{K}}{dt}.$$

On obtient :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r. \tag{4}$$

Si on suppose le repère ω XYZ fixe, les vecteurs $\vec{O}\omega$, \vec{I} , \vec{J} , \vec{K} , sont alors constants et \vec{V}_a se réduit à \vec{V}^r .

Le vecteur \vec{V}^r est le vecteur-vitesse relative du point M par rapport au repère mobile ω XYZ.

Si on suppose le point M fixe dans le repère ω XYZ, les composantes X, Y, Z de $\vec{\omega}\vec{M}$ sont constantes et \vec{V}_a se réduit à \vec{V}_e .

Le vecteur \vec{V}_e est le vecteur-vitesse d'entraînement du point M. Ce n'est autre que la vitesse du point m, lié au repère ω XYZ, et avec lequel le point M coïncide à l'instant t (point coïncidant).

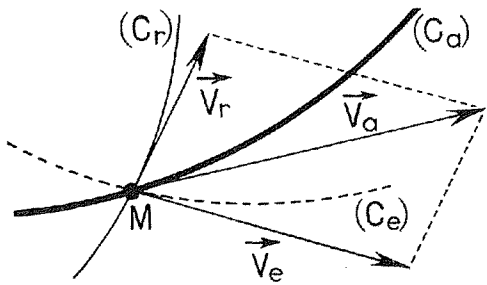


Fig. 122

A tout instant le vecteur-vitesse absolue \vec{V}_a d'un point M est la somme de son vecteur-vitesse d'entraînement \vec{V}_e et de son vecteur-vitesse relative \vec{V}_r .

Si on désigne par C_a la trajectoire absolue de M, par C_e la trajectoire d'entraînement, c'est-à-dire la trajectoire du point m du repère ω XYZ qui coïncide avec M à l'instant t, et par C_r la position à l'instant t de sa trajectoire relative, les trois vecteurs \vec{V}_a , \vec{V}_e et \vec{V}_r sont respectivement tangents en M à ces trois trajectoires (fig. 122).

182. Remarque. — En dérivant la relation (3) du paragraphe précédent, on définit l'accélération absolue $\vec{\Gamma}_a = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$ du point M. On pourra vérifier que $\vec{\Gamma}_a$ est la somme de trois vecteurs :

$$\vec{\Gamma}_e = \frac{d^2\vec{\omega}}{dt^2} + X \frac{d^2\vec{I}}{dt^2} + Y \frac{d^2\vec{J}}{dt^2} + Z \frac{d^2\vec{K}}{dt^2} \quad (\text{accélération d'entraînement}).$$

$$\vec{\Gamma}_r = \frac{d^2X}{dt^2} \vec{I} + \frac{d^2Y}{dt^2} \vec{J} + \frac{d^2Z}{dt^2} \vec{K} \quad (\text{accélération relative}).$$

$$\vec{\Gamma}_c = 2 \left(\frac{dX}{dt} \frac{d\vec{I}}{dt} + \frac{dY}{dt} \frac{d\vec{J}}{dt} + \frac{dZ}{dt} \frac{d\vec{K}}{dt} \right) \quad (\text{accélération complémentaire ou de Coriolis})$$

Les accélérations ne se composent pas, en général, aussi simplement que les vitesses.

183. Mouvement d'entraînement de translation. — Le mouvement d'entraînement ω XYZ/Oxyz est un mouvement de translation lorsque les vecteurs \vec{I} , \vec{J} , \vec{K} sont équipollents à des vecteurs fixes du repère Oxyz. On peut choisir :

$$\vec{I} = \vec{i}, \quad \vec{J} = \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{K} = \vec{k}.$$

Le mouvement relatif M/ ω XYZ est alors défini par :

$$\vec{\omega}\vec{M} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k} \quad \text{avec } X, Y, Z \text{ fonctions de } t.$$

Le mouvement d'entraînement ω XYZ/Oxyz est défini par :

$$\vec{O}\omega = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$$

avec x_0, y_0, z_0 fonctions de t.

Le mouvement absolu M/Oxyz est tel que $\vec{O}\vec{M} = \vec{O}\omega + \vec{\omega}\vec{M}$, soit :

$$\vec{O}\vec{M} = (x_0 + X) \vec{i} + (y_0 + Y) \vec{j} + (z_0 + Z) \vec{k}.$$

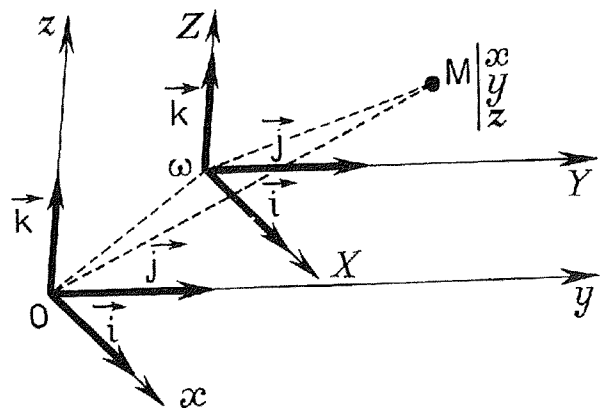


Fig. 123

La vitesse relative \vec{V}_r , vitesse de M dans son mouvement par rapport au repère XYZ, est égale à $\frac{d(\vec{\omega M})}{dt} = X' \vec{i} + Y' \vec{j} + Z' \vec{k}$.

La vitesse d'entraînement \vec{V}_e , vitesse du point M supposé fixe dans le repère ω XYZ, est donc égale à : $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = x'_0 \vec{i} + y'_0 \vec{j} + z'_0 \vec{k}$.

On vérifie que la vitesse absolue : $\vec{V}_a = \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{d(\vec{\omega M})}{dt} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$ est la somme de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative de M.

Dans ce cas particulier où le mouvement d'entraînement est une translation, on voit de même que l'accélération absolue $\vec{\Gamma}_a = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$ est la somme de l'accélération d'entraînement : $\vec{\Gamma}_e = \frac{d^2\vec{\omega}}{dt^2} = x''_0 \vec{i} + y''_0 \vec{j} + z''_0 \vec{k}$ et de l'accélération relative $\vec{\Gamma}_r = \frac{d^2(\vec{\omega M})}{dt^2} = X'' \vec{i} + Y'' \vec{j} + Z'' \vec{k}$, ce qui n'a pas lieu en général (n° 182).

184. Remarque. — Si on pose $\vec{O}\omega_1 = \vec{\omega M} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$, on obtient $\vec{O}\vec{M} = \vec{O}\omega + \vec{O}\omega_1$ et le mouvement de M résulte de la composition à partir de O, des mouvements de ω et ω_1 , tel que cela a été défini au n° 151.

Par suite, si on considère le repère mobile $\omega_1 X_1 Y_1 Z_1$ de vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, le mouvement de M résulte également du mouvement d'entraînement de translation $\omega_1 X_1 Y_1 Z_1 / Oxyz$ défini par $\vec{O}\omega_1 = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$ et du mouvement relatif M/ $\omega_1 X_1 Y_1 Z_1$ défini par $\vec{\omega}_1 \vec{M} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$.

185. Exemple. — Considérons (fig. 124) dans un repère fixe $Oxyz$ orthonormé de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le point mobile Q sur Oz tel que $\vec{O}\vec{Q} = h\omega t \vec{k}$. Dans le repère QXYZ qui se déduit du repère fixe $Oxyz$ par la translation de vecteur $\vec{O}\vec{Q}$, considérons le point mobile M, défini par les composantes de $\vec{Q}\vec{M}$:

$$X = a \cos \omega t, \quad Y = a \sin \omega t, \quad Z = 0. \quad (1)$$

Le mouvement relatif du point M est un mouvement circulaire uniforme sur le cercle (C) de centre Q et de rayon a du plan XQY. Le mouvement d'entraînement du repère $\omega X Y Z$ est un mouvement de translation rectiligne uniforme défini par $\vec{O}\vec{Q} = h\omega t \vec{k}$, soit par

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad z_0 = h\omega t. \quad (2)$$

Le mouvement absolu du point M est donc défini par $\vec{O}\vec{M} = \vec{O}\vec{Q} + \vec{Q}\vec{M}$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + X = a \cos \omega t; & y &= y_0 + Y = a \sin \omega t; \\ z &= z_0 + Z = h\omega t. \end{aligned} \quad (3)$$

La trajectoire relative du point M est le cercle (C) lié au repère QXYZ. La trajectoire d'entraînement est la droite PM parallèle à Oz. En posant : $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OP}) = \omega t$, on voit que la trajectoire absolue est l'hélice (H) :

$$x = a \cos \theta; \quad y = a \sin \theta; \quad z = h\theta. \quad (4)$$

Comme $\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \omega$ est constant, le mouvement du point M est un mouvement hélicoïdal uniforme (n° 167).

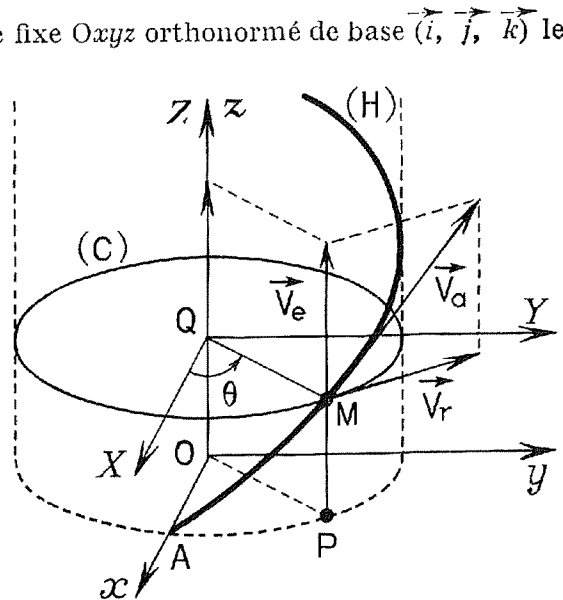


Fig. 124

On vérifie que la vitesse absolue \vec{V}_a tangente en M à (H) :

$$\vec{V}_a : \quad x' = -a\omega \sin \omega t; \quad y' = a\omega \cos \omega t; \quad z' = h\omega$$

est la somme de la vitesse relative \vec{V}_r tangente en M à (C) :

$$\vec{V}_r : \quad X' = -a\omega \sin \omega t; \quad Y' = a\omega \cos \omega t; \quad Z' = 0$$

et de la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e = \frac{d\vec{Q}}{dt}$ portée par PM :

$$\vec{V}_e : \quad x'_e = 0; \quad y'_e = 0; \quad z'_e = h\omega.$$

EXERCICES

289. Deux points mobiles P et M décrivent respectivement d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω , un cercle fixe de centre O, de rayon égal à $\sqrt{3}$ et un cercle (mobile) de centre \overline{P} , de rayon égal à 1. Ces deux cercles sont dans un même plan. A l'origine des temps les vecteurs \overline{OP} et \overline{PM} font avec l'axe Ox des angles respectivement égaux à $+\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{6}$.

1° Calculer à une date t quelconque les angles $(\overline{Ox}, \overline{OP})$, $(\overline{Ox}, \overline{PM})$ et $(\overline{OP}, \overline{PM})$.

2° Montrer que M est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

290. 1° Tracer les courbes représentatives des deux fonctions x et y de la variable t :

$$x = \sin t + \cos 2t \quad \text{et} \quad y = \cos t + \sin 2t.$$

2° Dans un repère orthonormé, on considère le point M dont les coordonnées $x = \overline{OH}$ et $y = \overline{OK}$ sont données en fonction du temps t par les relations précédentes. Calculer les vecteurs-vitesse et accélération du point M. Calculer à l'instant t la distance OM. Déterminer les positions de M les plus éloignées de O. Quelles sont les valeurs de t pour lesquelles le mobile M passe par O.

3° Montrer que le mouvement de M résulte de la composition des mouvements de P ($x = \cos 2t$; $y = \sin 2t$) et de Q ($x = \sin t$; $y = \cos t$). Nature de ces deux mouvements. Retrouver ainsi les valeurs de t pour lesquelles OM est maximum ou nul.

291. On considère par rapport à un repère orthonormé $Oxyz$, un point mobile M dont les coordonnées en fonction du temps t sont :

$$x = 3(t + \cos 2t); \quad y = 3(t + \sin 2t); \quad z = 6t.$$

1° Déterminer les composantes scalaires du vecteur-vitesse. En déduire que l'hodographe relatif à l'origine O est un cercle.

2° Déterminer les composantes du vecteur accélération et la longueur de ce vecteur.

3° Montrer que le mouvement du point M résulte de la composition d'un mouvement circulaire uniforme et d'un mouvement rectiligne uniforme.

292. Un plan mobile P rapporté au repère orthonormé $X\omega Y$ glisse sur le plan fixe du repère orthonormé xOy . Le point ω et les vecteurs de base \vec{I} et \vec{J} du repère $X\omega Y$ sont définis en fonction du temps t par :

$$\vec{O}\omega \begin{cases} x_\omega = a \cos t \\ y_\omega = a \sin t \end{cases} \quad \vec{I} \begin{cases} \cos t \\ -\sin t \end{cases} \quad \vec{J} \begin{cases} \sin t \\ \cos t \end{cases}$$

1° Déterminer les coordonnées x et y du point M défini dans le plan P par ses coordonnées X et Y. En déduire les composantes du vecteur-vitesse \vec{V} du point M.

2° Montrer qu'il existe à chaque instant t un point R du plan P dont la vitesse est nulle. Comparer les vecteurs \vec{V} et \vec{RM} en grandeur et en direction.

3° En désignant par α un angle donné, trouver la trajectoire et la nature du mouvement des points du plan P :

$$A (X = a \cos 2\alpha, \quad Y = a \sin 2\alpha) \quad \text{et} \quad B (X = -a \cos 2\alpha, \quad Y = -a \sin 2\alpha).$$

En déduire la trajectoire et le mouvement du point M de la droite AB défini par $X = b \cos 2\alpha$, $Y = b \sin 2\alpha$. Si P et Q désignent les positions de M aux temps $t = \alpha$ et $t = \alpha + \frac{\pi}{2}$, établir que :

$$\vec{OM} = \vec{OP} \cos(t - \alpha) + \vec{OQ} \sin(t - \alpha).$$

293. On considère, dans le plan du repère orthonormé xOy , un axe mobile OX , d'angle polaire $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OX}) = \omega t$ (t est le temps et ω est constant). Cet axe coupe en M le cercle fixe (C) d'équation : $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$.

1° Étudier le mouvement du point M sur le cercle (C), puis sur l'axe mobile OX . Construire géométriquement à l'aide de la composition des vitesses, la vitesse relative de M sur l'axe OX .

2° On porte sur OX , à partir de M dans le sens \vec{OX} un segment MP de longueur constante a . Construire le vecteur-vitesse du point P dans le plan xOy .

3° Soit I le point diamétralement opposé au point M sur le cercle (C). Montrer que le vecteur-vitesse \vec{PP}' du point P fait un angle de $+\frac{\pi}{2}$ avec le vecteur \vec{IP} et que l'on a : $PP' = \omega IP$.

294. Dans le plan du repère orthonormé xOy une plaque P glisse d'un mouvement de translation circulaire de telle sorte que le point S décrive le cercle de centre O et de rayon R suivant la loi :

$$x = R \cos \omega t; \quad y = R \sin \omega t.$$

On rapporte la plaque P au repère $XS Y$ se déduisant de xOy dans la translation \vec{OS} .

1° Écrire dans le plan xOy , l'équation de la trajectoire du point $M(X, Y)$ supposé fixe dans le plan P . Nature de cette trajectoire.

2° On considère dans le plan P les deux cercles de centres respectifs $I(X = R \cos \alpha, Y = 0)$ et $J(X = -R \cos \alpha, Y = 0)$ et de rayon R et qui se coupent en A et B . Montrer que ces deux cercles passent respectivement chacun par un point fixe C ou D .

3° Établir que le quadrangle $ABCD$ est orthocentrique, que les angles (AC, AD) et (BC, BD) sont constants et donner leurs valeurs en fonction de α .

295. On considère un repère orthonormé fixe $Oxyz$ et un repère mobile $OXYZ$. L'axe OZ est confondu avec Oz et dans le plan xOy on a : $(\vec{Ox}, \vec{OX}) = (\vec{Oy}, \vec{OY}) = \alpha$. On désigne par t le temps et par R, ω, α des constantes positives données.

1° Un point M , mobile dans le plan XOZ a pour coordonnées :

$$X = R(1 + \cos \alpha \cos \omega t), \quad Y = 0, \quad Z = R \cos \alpha \sin \omega t.$$

Montrer que la trajectoire relative (γ) du point M est un cercle décrit d'un mouvement uniforme. Calculer le vecteur-vitesse relative \vec{V}_r de M en fonction des vecteurs de base $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ du repère mobile.

2° L'angle θ varie avec le temps suivant la loi : $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega t}{2}$. Calculer en fonction de α et de ωt les valeurs de $\cos \theta, \sin \theta$ et les composantes de $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ dans le repère fixe. Établir que M a pour coordonnées absolues :

$$x = R(\cos \alpha + \cos \omega t); \quad y = R \sin \alpha \sin \omega t; \quad z = R \cos \alpha \sin \omega t.$$

Montrer que la trajectoire absolue de M est un cercle (C) décrit d'un mouvement uniforme et dont on demande le plan, le centre et le rayon.

3° Calculer les composantes de la vitesse absolue \vec{V}_a du point M dans le repère $Oxyz$, puis dans le repère $OXYZ$. Montrer que la vitesse d'entraînement \vec{V}_e a un module constant, que la vitesse relative \vec{V}_r est la projection orthogonale de \vec{V}_a sur le plan XOZ et que l'angle (\vec{V}_a, \vec{V}_r) est constant et égal à α .

296. Sur un axe OX situé dans le plan du repère orthonormé xOy se déplace un point mobile M dont l'abscisse sur OX est $r = 2a \cos \omega t$ (t est le temps, a et ω sont des constantes données).

1° On suppose OX fixe. Décrire le mouvement du point M (vitesse, accélération, allure du mouvement).

2° On suppose maintenant que l'axe OX tourne autour de O dans le plan xOy suivant la loi : $(\vec{Ox}, \vec{OX}) = \omega t$. Le mouvement décrit dans le 1° devient alors un mouvement relatif. Construire le vecteur-vitesse du point M et montrer que son support forme avec OX et Oy un triangle isocèle de sommet O .

3° Calculer les coordonnées de M en fonction de t . En déduire le mouvement absolu de M et sa trajectoire absolue. De quelle façon cette trajectoire est-elle décrite par M ?

4° Que peut-on dire du mouvement absolu de M si la loi du mouvement de OX est remplacée par $(\vec{Ox}, \vec{OX}) = \omega t + \alpha$ (α constante donnée) ?

297. On donne un repère orthonormé fixe xOy et un segment AB de longueur constante $2a$ de milieu ω . L'extrémité A décrit Ox , l'extrémité B décrit Oy . On considère le repère orthonormé mobile $X\omega Y$, l'axe ωX admettant comme vecteur directeur $\vec{\omega A}$ et où l'angle $(\vec{Ox}, \vec{O\omega}) = t$ désigne le temps.

1° Un point M étant donné par ses coordonnées relatives X, Y dans le repère ω XY, calculer ses coordonnées absolues x et y dans le repère xOy . (On commencera par exprimer les vecteurs de base \vec{I} et \vec{J} du repère mobile en fonction des vecteurs de base \vec{i} et \vec{j} du repère fixe). Réciproquement trouver X et Y en fonction de x et y .

2° Le point M étant mobile dans le repère ω XY, déterminer les composantes de sa vitesse absolue dans le repère ω XY.

3° Montrer qu'il existe à chaque instant un point I lié au repère ω XY et un seul dont la vitesse absolue est nulle. Déterminer ses coordonnées X, Y et x, y . Caractériser l'ensemble (C) des positions de I dans le repère x XY, puis l'ensemble (C₁) des positions de I dans le repère fixe Oxy . Soient A et A₁ les positions de I au temps $t = 0$. Comparer les arcs \widehat{AI} et $\widehat{A_1I}$ sur (C) et (C₁) et en déduire que la courbe (C) roule sans glisser sur (C₁).

298. On considère un repère orthonormé fixe Oxy et le repère mobile ω XY qui s'en déduit par la translation de vecteur $\vec{O\omega}$ de composantes :

$$x_0 = a \cos t; \quad y_0 = a \sin t \quad (t \text{ varie de } 0 \text{ à } 2\pi).$$

Un point variable M a pour coordonnées dans le repère mobile :

$$X = at \sin t; \quad Y = -at \cos t.$$

1° Quelle est la trajectoire (γ) du point ω ? Soit A la position de ω au temps $t = 0$. Comparer l'arc $\widehat{A\omega}$ décrit par ω au temps t à la longueur ωM . Que représente la droite ωM pour la courbe (γ)?

2° Calculer les coordonnées du point M dans le repère Oxy et les composantes de son vecteur vitesse absolue \vec{MR} . Comparer en grandeur et direction les vecteurs $\vec{\omega M}$ et \vec{MR} . Que représente ωM pour la trajectoire absolue (C) du point M?

3° Calculer les composantes du vecteur accélération \vec{MJ} du point M, les coordonnées de J et enfin le lieu du point J lorsque t varie de 0 à 2π .

STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

13^e Leçon

ANALYSE COMBINATOIRE

186. Arrangement. — *Étant donné un ensemble E contenant m éléments distincts, on appelle arrangement p à p de ces m éléments tout sous-ensemble rangé de E formé de p éléments distincts.*

Deux arrangements donnés diffèrent soit par ce qu'ils ne contiennent pas les mêmes éléments, soit parce que les éléments qu'ils contiennent ne sont pas rangés dans le même ordre.

Ainsi avec 5 lettres A, B, C, D, E on peut former les arrangements 3 à 3 distincts :

(ABC), (BAC), (CBA), (ABD), (ACE), (DEA), etc.

On désigne par A_m^p le nombre des arrangements p à p de m éléments.

187. Calcul de A_m^p . — Remarquons d'abord que $A_m^1 = m$ car chaque élément constitue un arrangement 1 à 1 et un seul.

Ainsi les arrangements une à une des 5 lettres A, B, C, D, E sont (A), (B), (C), (D), (E).

Supposons établi le tableau T_m^{p-1} des A_m^{p-1} arrangements p — 1 à p — 1 des m éléments. A la droite de chacun d'eux plaçons successivement chacun des (m — p + 1) éléments qu'il ne contient pas. Nous formons ainsi un nouveau tableau T' contenant $A_m^{p-1} \times (m - p + 1)$ arrangements p à p des m éléments donnés.

1^o Tout arrangement p à p est ainsi obtenu. Ainsi l'arrangement (BCED) des 5 lettres A, B, C, D, E, 4 à 4 s'obtient en plaçant à la droite de (BCE) la lettre D qui n'y figure pas.

2^o Tous les arrangements ainsi obtenus sont distincts car ils diffèrent soit par l'arrangement de leurs (p — 1) premiers éléments, soit par leur dernier élément, s'ils proviennent d'un même arrangement du tableau T_m^{p-1} .

Le tableau T' est donc le tableau T_m^p des A_m^p arrangements p à p des m éléments, ce qui entraîne :

$$A_m^p = A_m^{p-1} (m - p + 1).$$

Écrivons : $A_m^1 = m$

puis pour p = 2 $A_m^2 = A_m^1 (m - 1)$

pour p = 3 $A_m^3 = A_m^2 (m - 2)$

.....

$$A_m^p = A_m^{p-1} (m - p + 1)$$

En multipliant membre à membre et en supprimant les facteurs communs aux deux membres on obtient :

$$A_m^p = m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1).$$

Donc : $A_m^1 = m$, $A_m^2 = m(m-1)$, $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$.

Ainsi : $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$; $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$; $A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3\,024$.

188. Permutation. — *On appelle permutation de m éléments distincts tout arrangement m à m de ces m éléments.*

Les permutations des 3 lettres A, B, C sont :

(ABC), (ACB), (BAC), (BCA), (CAB) et (CBA).

On désigne par P_m le nombre des permutations de m éléments distincts.

On a donc : $P_m = A_m^m$ soit en faisant $p = m$ dans l'expression de A_m^p :

$$P_m = m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1.$$

P_m est donc le produit des m premiers entiers naturels non nuls que l'on désigne par $m!$ (lire « factorielle m »). Donc :

$$P_m = 1.2.3 \dots (m-1)m. \quad \text{soit} \quad P_m = m!$$

Ainsi : $P_6 = 6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$; $P_{10} = 10! = 1.2.3 \dots 9.10 = 3\,628\,800$.

189. Combinaison. — *Étant donné un ensemble E de m éléments distincts on appelle combinaison p à p de ces m éléments tout sous-ensemble de E formé de p éléments distincts (non rangés).*

Ici on ne fait plus intervenir l'ordre des éléments. Ainsi avec les 5 lettres A, B, C, E D, on forme les combinaisons 3 à 3 distinctes : ABC, ABD, ACD, BCD, etc. On désigne par C_m^p le nombre des combinaisons p à p de m éléments.

Calcul de C_m^p . — Soit T le tableau des C_m^p combinaisons p à p de m éléments.

Sur les p éléments de chacune de ces combinaisons effectuons les $p!$ permutations possibles. Nous obtenons ainsi un tableau T' contenant $C_m^p \cdot p!$ arrangements p à p de ces m éléments. Tout arrangement p à p est ainsi obtenu et un arrangement donné ne peut être obtenu qu'une fois. Le tableau T' est donc le tableau T_m^p des A_m^p arrangements p à p , ce qui entraîne :

$$A_m^p = C_m^p \cdot p! \quad \text{soit} : \quad C_m^p = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}. \quad (1)$$

En multipliant les deux termes du rapport par $(m-p)! = 1.2 \dots (m-p)$, on obtient la formule condensée :

$$C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!}. \quad (2)$$

Ainsi : $C_5^2 = \frac{5.4}{1.2} = 10$; $C_7^3 = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35$; $C_8^3 = \frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$.

190. Applications. — 1° $C_m^p = C_m^{m-p}$. Cette formule se démontre en remplaçant

p par $m-p$ dans la formule (2) de C_m^p et s'écrit aussi bien $C_{n+p}^p = C_{n+p}^n$.

On vérifie d'ailleurs que toute combinaison p à p admet une combinaison complémentaire $m - p$ à $m - p$ et réciproquement. Le nombre des premières est donc égal à celui des secondes.

$$\text{Ainsi : } C_3^1 = C_3^2 = 3; \quad C_5^2 = C_5^3 = \frac{5.4}{1.2} = 10; \quad C_{10}^3 = C_{10}^7 = 120.$$

2° $C_m^0 = C_m^m = 1$ car l'une correspond au sous-ensemble vide \emptyset , l'autre à l'ensemble E lui-même. Or la formule (2) donne :

$$C_m^0 = C_m^m = \frac{m!}{m! 0!} = 1, \text{ ce qui conduit à poser : } 0! = 1.$$

3° $C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}$. En effet :

$$\begin{aligned} C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1} &= \frac{(m-1)!}{p! (m-p-1)!} + \frac{(m-1)!}{(p-1)! (m-p)!} = \frac{(m-1)!}{p! (m-p)!} [(m-p) + p] \\ &= \frac{m!}{p! (m-p)!} = C_m^p. \end{aligned}$$

On vérifie que, si A désigne l'un des éléments de E , il y a C_{m-1}^p combinaisons p à p qui ne contiennent pas A et C_{m-1}^{p-1} où A est associé à une combinaison $p - 1$ à $p - 1$ des $(m - 1)$ éléments autres que A . D'où la formule proposée.

Ainsi : $C_7^3 = C_6^3 + C_6^2$. On vérifie que :

$$\frac{7.6.5}{1.2.3} = \frac{6.5.4}{1.2.3} + \frac{6.5}{1.2} \quad \text{ou} \quad 35 = 20 + 15.$$

191. Remarque. — On peut écrire :

$$C_m^p = \frac{(m-p+1)(m-p+2)\dots(m-1) \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \cdot p}$$

C_m^p est donc le quotient du produit des p nombres entiers consécutifs terminant à m par le produit de p premiers nombres entiers. Comme C_m^p est obligatoirement un nombre entier, il en résulte que :

Le produit de p nombres entiers consécutifs est toujours divisible par $p!$ produit des p premiers entiers.

192. Formule du binôme. — Il s'agit d'établir que pour tout entier $m \in \mathbb{R}^+$:

$$(a + b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \dots + C_m^{m-1} a b^{m-1} + C_m^m b^m. \quad (1)$$

Cette formule se vérifie pour les premières valeurs de l'entier m :

$$(a + b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3.$$

Supposons que la formule soit vérifiée pour $m = n$, donc que :

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^p a^{n-p} b^p + \dots + C_n^n b^n$$

et calculons : $(a + b)^{n+1} = a(a + b)^n + b(a + b)^n$. Nous obtenons :

$$(a + b)^{n+1} = \begin{cases} C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b + \dots + C_n^p a^{n-p+1} b^p + \dots + C_n^n a b^n \\ + C_n^0 a^n b + \dots + C_n^{p-1} a^{n-p+1} b^p + \dots + C_n^{n-1} a b^n + C_n^{n+1} b^{n+1}. \end{cases}$$

Compte tenu de la formule $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$ (n° 190, 3°) on voit que :

$$(a + b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \dots + C_{n+1}^p a^{n-p+1} b^p + \dots + C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}.$$

Ce qui est bien la formule (1) pour $m = n + 1$.

La formule étant vraie pour $m = 1, m = 2, m = 3$, c'est donc pour $m = 3 + 1 = 4$ puis pour $m = 4 + 1 = 5$ et de proche en proche pour toute valeur entière de m . Ainsi :

$(a + b)^1 = a + b$	Coefficients	1	1			
$(a + b)^2 = a^2 + 2 ab + b^2$		1	2	1		
$(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 ab^2 + b^3$		1	3	3	1	
$(a + b)^4 = a^4 + 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 ab^3 + b^4$		1	4	6	4	1
				↓		
$(a + b)^5 = a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 ab^4 + b^5$		1	5	10	10	5
$(a + b)^6 = a^6 + 6 a^5 b + 15 a^4 b^2 + 20 a^3 b^3 + 15 a^2 b^4 + 6 ab^5 + b^6$		1	6	15	20	15
.....	

Le tableau triangulaire des coefficients (*triangle de Pascal*) s'obtient aisément, car tout élément C_m^p est la somme de l'élément C_{m-1}^p placé au-dessus de lui et de l'élément C_{m-1}^{p-1} qui précède ce dernier.

193. Démonstration par récurrence. — Le procédé utilisé ci-dessus est appelé *démonstration par récurrence*. Il permet de vérifier un grand nombre de propriétés faisant intervenir un entier naturel m . On peut l'énoncer :

Pour qu'une propriété $P(m)$ soit vraie pour tout entier naturel $m \geq \alpha$ il faut et il suffit :

- 1° **Qu'elle soit vraie pour $m = \alpha$.**
- 2° **Qu'étant vraie pour $m = n$, elle le soit aussi pour $m = n + 1$.**

En général α est l'un des nombres 0, 1, 2 ou 3.

EXEMPLES : 1° Vérifier que : $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (1)

La formule est vérifiée pour $n = 1$ car $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$. Admettons $S_n = \frac{n}{n+1}$:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1}$$

La formule (1) vraie pour $n = 1$ l'est donc pour tout entier $n \geq 1$.

2° $\Sigma(p, n) = C_p^0 + C_{p+1}^1 + C_{p+2}^2 + \dots + C_{p+n}^n = C_{p+n+1}^n$. (2)

La formule est vraie pour $n = 0$ car $\Sigma(p, 0) = C_p^0 = 1 = C_{p+1}^0$.

Admettons, pour $n - 1$, que l'on ait : $\Sigma(p, n - 1) = C_{p+n}^{n-1}$, on obtient :

$$\Sigma(p, n) = \Sigma(p, n - 1) + C_{p+n}^n = C_{p+n}^{n-1} + C_{p+n}^n = C_{p+n+1}^n$$

d'après la formule (n° 190, 3°) : $C_{m-1}^{p-1} + C_{m-1}^p = C_m^p$.

La formule (2) vraie pour $n = 0$, l'est donc pour tout entier n . Elle peut d'ailleurs s'écrire puisque (n° 190, 1°) : $C_{p+k}^k = C_{p+k}^p$:

$$\Sigma(p, n) = C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}. \quad (3)$$

Dans le triangle de Pascal (n° 192) tout élément est la somme des éléments placés au-dessus de son voisin de gauche.

PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

194. Exemples. — 1° De combien de façons peut-on disposer 12 convives autour d'une table ?

Chacune des dispositions constitue une permutation de l'ensemble des 12 convives. Il y a donc $P_{12} = 12! = 479\,001\,600$ dispositions possibles.

Quand il s'agit d'un repas où un ménage reçoit des amis, la place du maître et celle de la maîtresse de maison sont en général déterminées à l'avance. Il ne reste alors que $10!$ dispositions possibles pour les dix invités. Lorsqu'il y a parmi ceux-ci autant d'hommes que de femmes que l'on désire faire alterner, il y a seulement $5!$ dispositions pour les messieurs, autant pour les dames, ce qui donne : $(5!)^2 = 14\,400$ répartitions possibles.

2° Une course hippique comprend au départ 20 chevaux. Quel est le nombre de tiercés possibles dans l'ordre ou sans ordre ?

Le tiercé est la liste des chevaux classés aux 3 premières places. Un tiercé dans l'ordre est un arrangement des 20 chevaux 3 à 3. Il y en a donc $A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6\,840$ différents.

Un tiercé sans ordre est une combinaison des 20 chevaux 3 à 3. Il y en a donc :

$$C_{20}^3 = \frac{6\,840}{6} = 1\,140 \text{ différents.}$$

195. Anagrammes. — Il s'agit de trouver le nombre de mots distincts qu'il est possible de former avec un ensemble donné de n lettres mobiles, ces mots ayant un sens ou non.

Ainsi avec les 8 lettres distinctes du mot TOURAINÉ, on peut former AUTORINE, RATOUNIE, TAUNOIRE, etc. Chacun de ces mots réalise une permutation des huit lettres qu'il contient. Leur nombre est donc $P_8 = 8!$

Le problème se complique lorsque certaines lettres sont répétées. Ainsi le mot AVANTAGE contient 8 lettres dont 3 fois A. Affectons à chacune des lettres A l'indice 1, 2 ou 3 de façon à les considérer comme lettres distinctes. A chaque anagramme tel que TAVAGANE nous pouvons associer 3! mots tels que $TA_2VA_3GA_1NE$ correspondant chacun à une permutation des indices 1, 2, 3. Le nombre total de ces mots à indices étant $8!$, le nombre d'anagrammes du mot AVANTAGE est donc $\frac{8!}{3!}$.

On verrait de même que SAVANNAH qui compte 8 lettres dont 3 fois A et 2 fois N admet $\frac{8!}{3! 2!}$ anagrammes.

Un mot de n lettres qui contient des lettres multiples en nombres respectifs α, β, γ , admet $\frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!}$ anagrammes distincts.

Cette règle s'étend d'elle-même aux nombres distincts qu'il est possible de former avec un ensemble de n chiffres, contenant des chiffres multiples en nombre α, β, γ (anagrammes d'un nombre).

Ainsi avec les 10 chiffres de 2 718 281 828 qui contient 4 chiffres huit, 3 chiffres deux, 2 chiffres un et le seul chiffre sept, on peut former $\frac{10!}{4! 3! 2!}$ nombres distincts.

196. Jeux de pile ou face. — Lorsqu'on lance une pièce de monnaie elle retombe sur le sol en laissant apparaître son côté pile P ou son côté face F. Donc deux cas possibles.

Si on répète cette opération n fois (ou si on lance simultanément n pièces), on obtient

$2 \times 2 \dots \times 2 = 2^n$ éventualités possibles. Pour chacune les piles et les faces se succèdent dans un ordre symbolisé par exemple par $P_1 F_2 F_3 P_4 F_5 P_6 P_7 \dots F_{n-2} F_{n-1} P_n$.

Toute éventualité comportant un nombre donné k de piles et par suite de $(n - k)$ faces correspond à une combinaison telle que $(1, 4, 6, 7 \dots n)$ des n opérations (ou des n pièces) k à k . Leur nombre est donc C_n^k .

Ainsi dans une partie à 10 pièces (ou dans n parties consécutives à une seule pièce) il y a C_{10}^4 manières de réaliser 4 piles et 6 faces.

197. Jeux de dés. — On utilise des dés cubiques dont les faces sont numérotées par des points de 1 à 6 (fig. 125).

1° Dans une partie à 3 dés, on peut envisager le nombre formé par les 3 chiffres classés dans un ordre décroissant :

653, 421, 544, 443, 222.

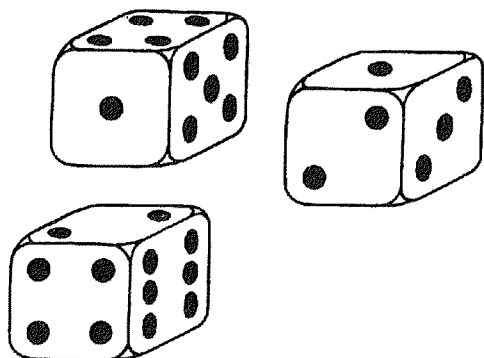


Fig. 125

Comme il y a 6 possibilités pour chacun des dés A, B, C, il y a pour l'ensemble des trois dés :

$$6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216 \text{ cas possibles.}$$

Un seul cas correspond à un nombre donné tel que 222 à trois chiffres identiques. Il y en a 3 pour un nombre donné tel que 544 ou 443 où deux chiffres sont égaux car le chiffre simple peut être obtenu par l'un ou l'autre des 3 dés. Enfin il y a $3! = 6$ cas pour un nombre donné tel que 653, à 3 chiffres différents, car chacun de ces cas correspond à une permutation de A, B, C.

Comme il y a 6 nombres possibles tels que 222, $A_6^2 = 6.5 = 30$ nombres possibles à deux chiffres égaux et $C_6^3 = 20$ nombres à trois chiffres différents. On retrouve le nombre total des cas possibles.

$$(1 \times 6) + (3 \times 30) + (6 \times 20) = 6 + 90 + 120 = 216.$$

2° Dans une partie de dés, on peut aussi envisager la somme des chiffres obtenus. Ainsi avec 3 dés on peut obtenir un total de 12 points en réalisant comme ci-dessus les nombres :

651, 642, 633, 552, 543 ou 444.

Ce qui se produit dans : $6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$ cas différents.

Le total minimum 3 ne peut être réalisé que dans le cas de 111 et le total maximum 18 que dans le cas de 666.

198. Jeux de cartes. — Un jeu de bridge de 52 cartes comporte 4 couleurs : *Trèfle Carreau, Cœur, Pique* et dans chacune de ces couleurs, 13 cartes qui se nomment dans l'ordre décroissant : *As, Roi, Dame, Valet, Dix, Neuf, Huit, Sept, Six, Cinq, Quatre, Trois, Deux*. Les cinq premières de l'As au Dix sont les *Honneurs* et les huit dernières sont les basses cartes. Il y a au total 20 honneurs et 32 basses cartes.

Le bridge se joue à 4 joueurs : *Sud, Ouest, Nord* et *Est*, chacun d'eux reçoit à la distribution un jeu (ou main) de 13 cartes.

1° Chacun de ces jeux particuliers constitue une combinaison de 13 cartes prises parmi les 52 cartes du total. Le nombre des jeux différents que peut recevoir un joueur de bridge est donc :

$$C_{52}^{13} = \frac{52.51 \dots 41.40}{13.12 \dots 2.1} \approx 6,35.10^{11}.$$

Le jeu de Sud par exemple, étant fixé, le jeu d'Ouest est une combinaison de 13 des 39 cartes qui restent. Pour tout jeu de Sud il y a C_{39}^{13} jeux possibles pour Ouest, puis

ensuite C_{26}^{13} jeux possibles pour Nord, ce qui détermine le jeu d'Est. Le nombre des répartitions distinctes possibles à une table de bridge est donc :

$$C_{52}^{13} \cdot C_{39}^{13} \cdot C_{26}^{13} = \frac{52!}{(13!)^4} \approx 5,36 \cdot 10^{28}.$$

2° Tout jeu de 13 cartes contenant par exemple les 4 as provient de l'adjonction à ces 4 as d'une combinaison de 9 des 48 autres cartes. Il y a donc C_{48}^9 jeux distincts contenant les 4 as.

Tout jeu contenant 7 honneurs provient de la réunion d'une combinaison de 7 honneurs sur 20 et d'une combinaison de 6 basses cartes sur 32. Il y a donc $C_{20}^7 \cdot C_{32}^6$ jeux de 13 cartes contenant 7 honneurs.

De même le nombre des jeux de 13 cartes contenant α as, β rois, γ dames, δ valets et μ autres cartes sur les 36 qui restent est égal à $C_4^\alpha C_4^\beta C_4^\gamma C_4^\delta C_{36}^\mu$.

3° Le nombre des jeux de 13 cartes contenant 5 piques, 4 cœurs, 3 carreaux et 1 trèfle est $C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1$. En permutant les couleurs ce nombre est multiplié par 4! Le nombre des jeux distribués (5, 4, 3, 1) est donc 24 $C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1$.

Par contre le nombre des distributions (5, 4, 2, 2) est seulement 12 $C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^2 C_{13}^2$ car 5 422 n'admet que $\frac{4!}{2!}$ anagrammes (n° 195). Le nombre des distributions (4, 3, 3, 3) est de même 4 $C_{13}^4 \cdot C_{13}^3 C_{13}^3 C_{13}^3$ car 4 333 admet $\frac{4!}{3!} = 4$ anagrammes.

199. Remarque. — Dans un jeu de 32 cartes (poker, belote, manille) les 20 plus basses cartes du bridge sont supprimées. Chaque couleur : *Trèfle, Carreau, Cœur, Pique* ne comporte que 8 cartes : *As, Roi, Dame, Valet, Dix, Neuf, Huit et Sept*.

Il y a C_{32}^8 jeux de 8 cartes possibles, soit $\frac{32!}{(8!)^4}$ répartitions possibles. Parmi ces jeux, il y a C_{28}^4 jeux contenant le carré d'as, $C_{20}^5 C_{12}^3$ jeux contenant 5 honneurs et 3 basses cartes, 6 $C_8^3 C_8^3 C_8^1 C_8^1$ jeux distribués (3, 3, 1, 1), etc.

EXERCICES

299. Démontrer les formules suivantes :

$$1^\circ C_m^p = \frac{m}{p} C_{m-1}^{p-1} = \frac{m(m-1)}{p(p-1)} C_{m-2}^{p-2}.$$

2° $C_m^p = C_{m-2}^p + 2 C_{m-2}^{p-1} + C_{m-2}^{p-2}$. (Procéder par raisonnement en distinguant deux éléments A et B des $m-2$ autres).

$$3^\circ C_m^p = C_{m-3}^p + 3 C_{m-3}^{p-1} + 3 C_{m-3}^{p-2} + C_{m-3}^{p-3}.$$

300. Soit h un entier inférieur à l'entier p . On suppose que, parmi les m éléments d'un ensemble, il y en a h distincts des $m-h$ autres.

1° Montrer que toute combinaison p à p des m éléments de l'ensemble est la réunion d'une combinaison x à x des h premiers éléments et d'une combinaison $p-x$ à $p-x$ des $m-h$ derniers :

$$2^\circ \text{ En déduire que : } C_m^p = \sum_{x=0}^h C_h^x C_{m-h}^{p-x}.$$

301. 1° Démontrer que le nombre S_m des sous-ensembles (y compris \emptyset et E_m) d'un ensemble E_m formé de m éléments est le double du nombre S_{m-1} des sous-ensembles de E_{m-1} composé de $(m-1)$ éléments.

$$2^\circ \text{ En déduire que : } S_m = C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^m = 2^m.$$

3° Démontrer que $S'_m = C_m^0 + C_m^2 + C_m^4 + \dots$ et $S''_m = C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \dots$ sont égaux pour m impair et aussi pour m pair. Établir que $S'_m = S''_m = 2^{m-1}$.

302. 1° Calculer $(1 + 1)^m$ et $(1 - 1)^m$ en fonction des valeurs S_m , S'_m et S''_m de l'exercice précédent.

2° En déduire ainsi les valeurs de S_m , S'_m et S''_m .

303. 1° Démontrer par récurrence que : $2.6.10 \dots (4n - 2) = (n + 1)(n + 2) \dots (2n)$.

2° Vérifier directement en montrant que la relation précédente peut s'écrire :

$$2^n.1.3.5 \dots (2n - 1) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

304. Démontrer que $C_a^a \cdot C_{a+b}^b \cdot C_{a+b+c}^c \cdot C_{a+b+c+d}^d = \frac{(a + b + c + d)!}{a! b! c! d!}$.

305. 1° Soient des entiers a , b , p tels que $a \geq p$ et $b \geq p$. Démontrer la formule :

$$C_{a+b}^p = \sum_{x=0}^p C_a^x C_b^{p-x}.$$

2° On suppose $a = b = p = n$. Déduire de la formule précédente que :

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

— Démontrer par récurrence les formules suivantes :

306. $S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1).$

307. $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1).$

308. $S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2(n + 1)^2.$

309. $S'_1(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$

310. $S'_2(n) = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3} n(2n - 1)(2n + 1).$

311. $S'_3(n) = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$

312. $\Sigma_2(n) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n + 1) = \frac{1}{3} n(n + 1)(n + 2).$

313. $\Sigma_3(n) = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n + 1)(n + 2) = \frac{1}{4} n(n + 1)(n + 2)(n + 3).$

314. On appelle « mot » toute permutation de lettres données ; par exemple avec a , i , m et r , les mots rima, mari, mria, ..., airm...

Avec les lettres du mot « François », combien peut-on former de mots :

a) commençant et finissant par une voyelle ;

b) commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?

315. Une classe comporte 45 élèves, dont 15 filles (toutes externes) et 20 internes. On se propose de former un bureau constitué :

— d'un président nécessairement interne ;

— d'une secrétaire (une fille),

— de trois autres membres, quelconques.

Quel est le nombre de bureaux possibles ?

316. De combien de manières peut-on former un comité de 3 femmes et de 4 hommes dans une société de 8 femmes et de 7 hommes ?

De combien de manières peut-on former un comité où figureraient simultanément Monsieur X et Monsieur Y ?

317. On dispose de 9 jetons numérotés de 1 à 9.

1° Combien, avec 3 d'entre eux, peut-on former de nombres de 3 chiffres distincts ?

2° Combien peut-on former de nombres de 3 chiffres distincts en prenant 3 jetons de toutes les façons possibles ?

3° Parmi ces derniers nombres, combien y en a-t-il qui sont divisibles par 5 ?

318. Déterminer le nombre des anagrammes de chacun des mots suivants : DAUPHINÉ, LANGUEDOC, CONSTANTINOPLE, ABRACADABRANT.

319. Trouver le nombre de mots distincts formés avec 6 lettres du mot AVANTAGEUX suivant que l'on a utilisé 0, 1, 2 ou 3 fois la lettre A.

320. Combien de nombres distincts $\overline{\alpha\beta\gamma}$ peut-on former avec trois chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 :

1° En supposant les 3 chiffres α, β et γ distincts ?

2° En supposant que chaque chiffre peut être répété 2 fois ou 3 fois ?

3° Reprendre ces deux problèmes sachant que l'on utilise seulement les chiffres impairs 1, 3, 5, 7, 9.

321. Démontrer la formule $G(\alpha, \beta, \gamma, 1, \dots, 1) = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!}$ où $n = \alpha + \beta + \gamma + 1 \dots + 1$ des anagrammes d'un mot de n lettres comportant des lettres multiples en nombre α, β, γ , en plaçant d'abord les α lettres (C_n^α possibilités) puis les β lettres ($C_{n-\alpha}^\beta$ possibilités), etc. puis chacune des $p = n - (\alpha + \beta + \gamma)$ lettres simples (P_p possibilités).

322. Montrer que la formule des anagrammes $G(\alpha, \beta, \gamma, 1, \dots, 1) = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!}$, où n désigne $\alpha + \beta + \gamma + 1 \dots + 1$ permet de retrouver les 3 formules fondamentales des permutations P_n , des arrangements A_n^p et des combinaisons C_n^p suivant que :

1° $\alpha = \beta = \gamma = 1$. 2° $\alpha = n - p, \beta = \gamma = 1$. 3° $\alpha = n - p, \beta = p$.

323. On désigne par $y_n(x)$ le nombre des façons dont il est possible d'obtenir un nombre de x points avec n dés. Ce nombre $y_n(x)$ étant nul pour $x < n$ et pour $x > 6n$.

1° Démontrer les relations :

$$y_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^6 y_n(x-k) \quad \text{et} \quad y_{n+1}(x+1) = y_{n+1}(x) + y_n(x) - y_n(x-6).$$

2° En supposant que les faces opposées de chaque dé soient numérotées 1 et 6, 2 et 5, 3 et 4, établir que $y_n(x) = y_n(7n - x)$.

3° Utiliser les résultats ci-dessus pour établir un tableau donnant $y_n(x)$ en fonction de x limité à $x \in [0, 20]$ et $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

324. Soit $y(x)$ le nombre des manières d'obtenir x points avec 3 dés :

1° Vérifier (cf. exercice précédent) le tableau :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
y	0	0	1	3	6	10	15	21	25	27

2° Établir les relations : $1 < x < 8 \implies y = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$,

$7 < x < 14 \implies y = 15 - (x-7)(x-14)$; $13 < x < 20 \implies y = \frac{1}{2}(x-19)(x-20)$.

3° Construire le diagramme en bâtons de la relation $y(x)$ en utilisant les courbes (en pointillé) des relations ci-dessus.

325. Pour évaluer, en vue des enchères, une main de 13 cartes au bridge, on compte les points d'honneur : 4 pour un As, 3 pour un Roi, 2 pour une Dame et 1 pour un Valet.

1° Déterminer les ensembles tels que (1 As, 2 Rois, 1 Dame, 1 Valet) réalisant le total de 13 points, minimum recommandé pour ouvrir les enchères.

2° Évaluer le nombre de cas où on obtient chacune des dispositions précédentes et en déduire le nombre total des jeux distincts comportant 13 points d'honneur.

NOTION DE PROBABILITÉ

200. Définition. — *Un événement est dit aléatoire lorsque sa réalisation est soumise au hasard.*

Amener face en lançant une pièce de monnaie, obtenir le chiffre 5 en faisant rouler un dé, sortir le roi de cœur en tirant au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes sont des événements aléatoires.

Un tel événement est possible dès la première épreuve et on finit toujours par le réaliser en répétant autant de fois qu'il le faut cette épreuve. Il est relativement facile d'amener face avec une pièce de monnaie, car il n'y a que deux éventualités possibles, pile ou face, pour cette pièce. Il est déjà moins facile d'obtenir le 5 avec un dé, car on peut, à chaque épreuve, amener l'un ou l'autre des cinq autres chiffres. Quant à sortir le roi de cœur d'un jeu de 52 cartes, on risque de répéter l'épreuve assez longtemps avant de la réussir.

C'est pourquoi on dit, dans le langage courant, que le premier événement aléatoire (1 chance sur 2 d'obtenir face) est plus probable que le second (1 chance sur 6 d'obtenir le 5), lui-même plus probable que le troisième (1 chance sur 52 de sortir le roi de cœur).

201. Événements également probables. — Nous admettrons que deux ou plusieurs événements aléatoires, qui s'excluent mutuellement, sont également probables si aucune raison matérielle ne vient favoriser la réalisation de l'un de ces événements au détriment des autres. Ainsi peuvent être considérés comme également probables les événements tels que :

- 1^o Réaliser pile ou face en lançant une pièce de monnaie.
- 2^o Obtenir l'un ou l'autre des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 avec un dé.
- 3^o Sortir un trèfle, un carreau, un cœur ou un pique d'un jeu de 52 cartes comportant 13 cartes de chaque couleur.
- 4^o Tirer au sort l'un quelconque des numéros (ou des noms, des boules, etc.) mélangés à cet effet dans une urne.

Il n'en est plus de même si une des faces du dé a été lestée (dé pipé), car cela favorise l'obtention du chiffre de la face opposée ou si on utilise un jeu de cartes comportant par exemple 10 trèfles, 12 carreaux, 6 cœurs et 8 piqués.

202. Probabilité d'un événement. — Considérons une épreuve comportant un nombre fini N de cas possibles, tous également probables. Supposons que n d'entre eux entraînent la réalisation d'un événement A tandis que les $N - n$ autres entraînent la non-réalisation de A ou événement contraire \bar{A} . Par définition :

La probabilité de l'événement A est le rapport du nombre n des cas favorables à cet événement et du nombre N des cas possibles, tous ces cas étant également probables.

$$\text{Probabilité de A} = \frac{\text{nombre de cas favorables (n)}}{\text{nombre de cas possibles (N)}}$$

Soit :

$$\boxed{\text{Pr (A)} = \frac{n}{N}}$$

La probabilité d'amener face en lançant une pièce de monnaie est $\frac{1}{2}$, car il n'y a que deux éventualités, pile ou face, également probables. La probabilité d'obtenir avec un dé un chiffre supérieur à 4 est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, car il y a deux cas favorables (5 et 6) sur les 6 cas également probables. La probabilité de sortir un « honneur » en tirant au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes est de $\frac{20}{52} = \frac{5}{13}$, car il y a 20 cas favorables sur les 52 cas également possibles (n° 198).

203. Propriétés. — 1° Le nombre $\text{Pr (A)} = \frac{n}{N}$ est un nombre compris entre 0 et 1 car :

$$0 \leq n \leq N \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{n}{N} \leq 1.$$

Un événement dont la probabilité est 1 est un événement certain, tandis qu'un événement dont la probabilité est 0 est impossible.

Tirons une carte d'un paquet de 13 cartes à cœur. La probabilité de sortir un cœur est $\frac{13}{13} = 1$ (événement certain) tandis que la probabilité de sortir un trèfle est nulle : $\frac{0}{13}$ (événement impossible).

2° Le nombre de cas favorables à la réalisation de \bar{A} , événement contraire de A, est $N - n$, donc :

$$\text{Pr}(\bar{A}) = \frac{N - n}{N} = 1 - \frac{n}{N} = 1 - \text{Pr (A)}.$$

Soit :

$$\boxed{\text{Pr (A)} + \text{Pr}(\bar{A}) = 1.}$$

Les deux probabilités Pr (A) et $\text{Pr}(\bar{A})$ sont dites complémentaires.

Ainsi la probabilité d'amener 5 ou 6 avec un dé et la probabilité de ne pas amener l'un de ces chiffres sont respectivement $\frac{2}{6}$ et $\frac{4}{6}$ dont la somme est 1.

3° Le calcul direct d'une probabilité se ramène au dénombrement de l'ensemble de tous les cas possibles également probables et à la détermination du nombre des cas favorables à l'événement envisagé.

204. Exemple. — Une urne contient a boules blanches et b boules rouges. On extrait au hasard 2 boules. Trouver les probabilités pour que ce soit 2 boules blanches, 2 boules rouges, 1 boule blanche et 1 boule rouge.

On extrait une combinaison de 2 boules prises parmi les $a + b$ boules de l'urne. Il y a donc $C_{a+b}^2 = \frac{1}{2}(a + b)(a + b - 1)$ cas possibles. Parmi ceux-ci il y en a C_a^2 qui correspondent à 2 boules blanches, C_b^2 qui correspondent à 2 boules rouges et enfin $C_a^1 C_b^1 = ab$ où 1 boule blanche est associée à 1 boule rouge. On vérifie que :

$$C_a^2 + C_b^2 + C_a^1 C_b^1 = \frac{1}{2} a(a-1) + \frac{1}{2} b(b-1) + ab = \frac{1}{2} (a+b)(a+b-1) = C_{a+b}^2.$$

Les probabilités demandées sont donc : $\Pr(BB) = \frac{C_a^2}{C_{a+b}^2} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$

$$\Pr(RR) = \frac{C_b^2}{C_{a+b}^2} = \frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)} \quad \text{et} \quad \Pr(BR) = \frac{ab}{C_{a+b}^2} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

205. Jeux de pile ou face. — Déterminer la probabilité d'amener pile k fois et face $(n-k)$ fois au cours de n parties successives à pile ou face.

Rappelons (n° 196) qu'il y a 2^n éventualités possibles lorsqu'on lance n fois de suite une pièce de monnaie. Ces éventualités sont toutes également probables et chacune d'elles est associée à un symbole tel que :

$$P_1 F_2 F_3 F_4 F_5 P_6 P_7 \dots F_{n-2} F_{n-1} P_n.$$

Chacun des cas comprenant k piles correspond à une combinaison k à k des n premiers entiers. Leur nombre est donc C_n^k . La probabilité d'amener k fois pile et $n-k$ fois face est donc :

$$\Pr\left(\frac{k \text{ piles}}{n \text{ parties}}\right) = \frac{1}{2^n} C_n^k.$$

Ainsi la probabilité d'amener 4 piles et 6 faces en 10 parties est :

$$\Pr\left(\frac{4 \text{ piles}}{10 \text{ parties}}\right) = \frac{C_{10}^4}{2^{10}} = \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{105}{512} \approx 0,205.$$

206. Jeux de dés. — 1° Trouver la probabilité de réaliser l'un des nombres 222, 544 ou 653 à l'aide de 3 dés.

Avec 3 dés, il y a $6^3 = 216$ éventualités possibles (n° 197) toutes également probables.

1° Le nombre 222 ne correspond qu'à l'une de ces éventualités. On a donc :

$$\Pr(222) = \frac{1}{216}.$$

2° Le nombre 544 se réalise de 3 manières suivant que le 5 est amené par le dé A, B ou C. Donc : $\Pr(544) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

3° Le nombre 653 s'obtient de 6 façons correspondant aux 6 permutations : 653, 635, 563, 536, 365 et 356, soit :

$$\Pr(653) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

2° Quelle est la probabilité de réaliser une somme de 12 points avec 3 dés ?

Le total de 12 points peut s'obtenir en réalisant (n° 197) :

$$651, \quad 642, \quad 633, \quad 552, \quad 543 \quad \text{et} \quad 444.$$

Ce qui correspond à $6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$ cas différents. Donc :

$$\Pr(12 \text{ points}) = \frac{25}{216} \approx 0,116.$$

207. Jeux de cartes. — Trouver la probabilité d'avoir au bridge les 4 as dans un jeu de 13 cartes.

Il y a C_{52}^{13} jeux possibles de 13 cartes (n° 198) tous également probables. Dans un jeu qui contient les 4 as, ces derniers sont associés à une combinaison de 9 cartes prises parmi les $52 - 4 = 48$ autres cartes. D'où C_{48}^9 cas favorables et :

$$\text{Pr (4 as au bridge)} = \frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}} = \frac{48!}{9! 39!} \cdot \frac{13! 39!}{52!} = \frac{10.11.12.13}{49.50.51.52} = \frac{11}{4\ 165} \approx 2,6.10^{-3}.$$

Soit environ une chance sur 400. On verrait de même qu'à la belote la probabilité d'un carré de valets (ou d'une autre carte) est :

$$\text{Pr (carré de valets à la belote)} = \frac{C_{28}^4}{C_{32}^8} = \frac{5.6.7.8}{29.30.31.32} = \frac{7}{3\ 596} \approx \frac{1}{500}.$$

2° Calculer la probabilité d'obtenir au bridge un jeu de 13 cartes contenant 7 cartes de la même couleur.

Dans le jeu de 13 cartes, il faut par exemple 7 trèfles sur les 13 trèfles possibles et 6 autres cartes sur les 39 autres. Soit $C_{13}^7 \cdot C_{39}^6$ jeux possibles avec 7 trèfles. Il y en a un même nombre avec 7 carreaux, 7 cœurs ou 7 piques et ces jeux sont tous distincts. Le nombre des cas favorables est donc $4 C_{13}^7 \cdot C_{39}^6$ sur les C_{52}^{13} cas possibles également probables. Donc :

$$\text{Pr (longueur de 7 cartes)} = \frac{4 \cdot C_{13}^7 C_{39}^6}{C_{52}^{13}} \approx 3,53.10^{-2} \text{ ou } \frac{1}{28}.$$

3° Déterminer les probabilités d'avoir au bridge un jeu de 13 cartes distribué (5, 4, 3, 1), (5, 4, 2, 2) ou (4, 3, 3, 3).

On sait (n° 198, 3°) que les nombres des jeux ainsi distribués sont respectivement : $24 C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1$, $12 C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^2 C_{13}^2$ et $4 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^3 C_{13}^3$.

D'où les probabilités, puisqu'il y a C_{52}^{13} jeux possibles :

$$\text{Pr (5, 4, 3, 1)} = \frac{24}{C_{52}^{13}} C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1 \approx 0,168$$

$$\text{Pr (5, 4, 2, 2)} = \frac{12}{C_{52}^{13}} C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^2 C_{13}^2 \approx 0,137$$

$$\text{Pr (4, 3, 3, 3)} = \frac{4}{C_{52}^{13}} C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^3 C_{13}^3 \approx 0,137.$$

208. Probabilités complémentaires. — Pour déterminer la probabilité $\text{Pr}(A)$, il est parfois plus facile de déterminer la probabilité $\text{Pr}(\bar{A}) = 1 - \text{Pr}(A)$ de l'événement contraire \bar{A} .

Ainsi pour trouver la probabilité d'avoir au moins 1 as dans un jeu de 13 cartes au bridge, recherchons la probabilité d'un jeu sans as. Sur les C_{52}^{13} jeux possibles il y en a C_{48}^{13} composés de 13 des 48 cartes autres que les 4 as. Donc :

$$\text{Pr (jeu sans as)} = C_{48}^{13} : C_{52}^{13} = \frac{36.37.38.39}{49.50.51.52} = \frac{6\ 327}{20\ 825}.$$

$$\text{Pr (un as au moins)} = 1 - \frac{6\ 327}{20\ 825} = \frac{14\ 498}{20\ 825} \approx 0,70.$$

209. Probabilités totales. — Si un événement aléatoire E résulte de la réalisation de l'un ou l'autre des événements A, B, C s'excluant mutuellement, la probabilité de E est la somme des probabilités partielles de A, B et de C .

$$\boxed{\text{Pr (E)} = \text{Pr (A)} + \text{Pr (B)} + \text{Pr (C)}. \quad (1)}$$

Supposons que parmi les N cas élémentaires, tous également probables, il y en ait n_1 qui réalisent A , n_2 qui réalisent B et n_3 qui réalisent C . Les événements A, B, C étant mutuellement incompatibles, nous obtenons $n_1 + n_2 + n_3$ cas distincts favorables à la réalisation de E . D'où la formule annoncée :

$$\text{Pr (E)} = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{N} = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \frac{n_3}{N} = \text{Pr (A)} + \text{Pr (B)} + \text{Pr (C)}.$$

On dit qu'un événement E qui résulte de la réalisation de l'un ou l'autre des événements A, B, C est la somme de ces événements : $E = A + B + C$.

Dans le cas où les événements A, B, C sont mutuellement incompatibles, on obtient

$$\text{Pr (A} + \text{B} + \text{C)} = \text{Pr (A)} + \text{Pr (B)} + \text{Pr (C)}. \quad (2)$$

Lorsque les événements, mutuellement incompatibles A, B, C , comprennent la totalité des cas possibles d'une épreuve, on dit qu'ils forment un système de constituants de cette épreuve et on obtient alors :

$$\text{Pr (A} + \text{B} + \text{C)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Pr (A)} + \text{Pr (B)} + \text{Pr (C)} = 1 \quad (3)$$

propriété qui généralise celle des probabilités complémentaires (n° 208).

210. Exemples. — 1° La probabilité de réaliser 12 points avec 3 dés est la somme des probabilités de réaliser 651, 642, 633, 552, 543 ou 444 (n° 206, 1°) :

$$\text{Pr (12 points)} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72} + \frac{1}{72} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} = \frac{25}{216} \approx 0,116.$$

On retrouve le résultat du n° 206, 2°.

2° Les probabilités d'avoir 0, 1, 2, 3 ou 4 as au bridge sont respectivement :

$$P_0 = \frac{C_4^0 \cdot C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}}, \quad P_1 = \frac{C_4^1 \cdot C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}}, \quad P_2 = \frac{C_4^2 \cdot C_{48}^{11}}{C_{52}^{13}}, \quad P_3 = \frac{C_4^3 \cdot C_{48}^{10}}{C_{52}^{13}}, \quad P_4 = \frac{C_4^4 \cdot C_{48}^9}{C_{52}^{13}}.$$

En effet un jeu de 13 cartes qui contient 2 as par exemple résulte d'une combinaison de 2 as sur 4 et d'une combinaison de 11 cartes sur les 48 autres cartes. Il y a ainsi $C_4^2 \cdot C_{48}^{11}$ cas favorables sur les C_{52}^{13} cas possibles. On obtient :

$$P_0 = \frac{6\,327}{20\,825}, \quad P_1 = \frac{9\,139}{20\,825}, \quad P_2 = \frac{4\,446}{20\,825}, \quad P_3 = \frac{858}{20\,825}, \quad P_4 = \frac{55}{20\,825}.$$

Soit (cf. n° 208) : $\text{Pr (1 as au moins)} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{14\,498}{20\,825}$.

De même : $\text{Pr (3 as au moins)} = P_3 + P_4$; $\text{Pr (1 ou 3 as)} = P_1 + P_3$, etc.

3° Un joueur de bridge Sud possède entre son jeu et celui du mort Nord 9 cartes à la couleur d'atout. Déterminer les probabilités qu'il a de trouver les 4 atouts adverses partagés 4-0, 3-1 ou 2-2.

Le partage 3-1 signifie 3 atouts chez Ouest et 1 chez Est ou vice versa. Il y a C_{26}^{13} jeux possibles pour Ouest qui possède 13 des 26 cartes que ne voit pas Sud. Parmi ces jeux il y a C_{22}^{13} qui ne possèdent pas d'atout, $C_4^1 C_{22}^{12}$ en possèdent un, $C_4^2 C_{22}^{11}$ en possèdent deux, $C_4^3 C_{22}^{10}$ en possèdent trois et $C_4^4 C_{22}^9$ en possèdent quatre. Les probabilités de trouver 0, 1, 2, 3, 4 atouts en Ouest sont donc :

$$P_0 = \frac{C_{22}^{13}}{C_{26}^{13}}; \quad P_1 = \frac{C_4^1 C_{22}^{12}}{C_{26}^{13}}; \quad P_2 = \frac{C_4^2 C_{22}^{11}}{C_{26}^{13}}; \quad P_3 = \frac{C_4^3 C_{22}^{10}}{C_{26}^{13}}; \quad P_4 = \frac{C_4^4 C_{22}^9}{C_{26}^{13}};$$

Soit : $p_0 = p_4 = \frac{11}{230}$; $p_1 = p_3 = \frac{143}{575}$ et $p_2 = \frac{234}{575}$. D'où :

Partage (4 - 0) : $\text{Pr}(4 - 0) = p_0 + p_4 = \frac{11}{115} \approx 9,6 \%$.

Partage (3 - 1) : $\text{Pr}(3 - 1) = p_1 + p_3 = \frac{286}{575} \approx 49,7 \%$.

Partage (2 - 2) : $\text{Pr}(2 - 2) = p_2 = \frac{234}{575} \approx 40,7 \%$.

On pourra vérifier ainsi les autres résultats du tableau suivant donnant les probabilités des différents partages des cartes adverses dans une couleur donnée.

6 cartes		5 cartes		4 cartes		3 cartes		2 cartes	
6 - 0	1,5 %	5 - 0	3,9 %	4 - 0	9,6 %	3 - 0	22 %	2 - 0	48 %
5 - 1	14,5 %	4 - 1	28,3 %	3 - 1	49,7 %	2 - 1	78 %	1 - 1	52 %
4 - 2	48,5 %	3 - 2	67,8 %	2 - 2	40,7 %				
3 - 3	35,5 %								

211. Probabilités composées. — *Si un événement aléatoire E exige la réalisation des deux événements A et B, sa probabilité est le produit de la probabilité de A par la probabilité pour que B se réalise après A.*

Cette probabilité de voir B se réaliser lorsque A est déjà réalisé se désigne par $\text{Pr}(B/A)$ (lire « probabilité de B après A »). On obtient :

$$\text{Pr}(E) = \text{Pr}(A) \cdot \text{Pr}(B/A).$$

Considérons l'épreuve susceptible d'amener la réalisation de A ou de \bar{A} et celle de B ou de \bar{B} . Il peut se produire 4 éventualités :

A et B dans n_1 cas, A et \bar{B} dans n_2 cas, \bar{A} et B dans n_3 cas et \bar{A} et \bar{B} dans n_4 cas.

Ces éventualités s'excluant mutuellement le nombre total des cas supposés également probables, est donc : $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$.

Seule la première éventualité réalise A et B et par suite E, ce qui donne: $\text{Pr}(E) = \frac{n_1}{N}$.

L'événement A se réalise dans $n_1 + n_2$ cas $\implies \text{Pr}(A) = \frac{n_1 + n_2}{N}$.

Si A s'est réalisé nous avons affaire seulement aux $n_1 + n_2$ cas favorables à A et parmi ceux-ci, n_1 réalisent B $\implies \text{Pr}(B/A) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$.

On vérifie que :

$$\text{Pr}(E) = \frac{n_1}{N} = \frac{n_1 + n_2}{N} \cdot \frac{n_1}{n_1 + n_2} = \text{Pr}(A) \cdot \text{Pr}(B/A).$$

On dit qu'un événement E qui exige la réalisation de plusieurs autres A, B, C est le produit ABC de ces événements. On voit ainsi par symétrie que l'on peut écrire :

$$\text{Pr}(AB) = \text{Pr}(A) \cdot \text{Pr}(B/A) = \text{Pr}(B) \cdot \text{Pr}(A/B)$$

et plus généralement :

$$\text{Pr}(ABC) = \text{Pr}(A) \cdot \text{Pr}(B/A) \cdot \text{Pr}(C/AB).$$

212. Exemples. — 1° Une urne contient 20 boules blanches et 10 boules rouges. On extrait 2 boules. Quelle est la probabilité pour que ces 2 boules soient 2 boules blanches ?

Extrayons les deux boules successivement. La probabilité de sortir une première boule blanche est évidemment $\frac{20}{30}$. Cet événement s'étant réalisé, il reste dans l'urne 29 boules dont 19 boules blanches. La probabilité de sortir une seconde boule blanche est donc $\frac{19}{29}$.

$$\Pr(\text{BB}) = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} = \frac{20 \cdot 19}{30 \cdot 29} = \frac{C_{20}^2}{C_{30}^2}$$

résultat en accord avec le calcul direct (n° 204).

2° On tire au hasard 3 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 honneurs à trèfle ?

Il y a 5 honneurs à trèfle sur les 52 cartes. Les probabilités de tirer (sans remise) successivement 3 honneurs à trèfle sont : $\frac{5}{52}$, puis $\frac{4}{51}$ et $\frac{3}{50}$, ce qui donne :

$$\Pr(3 \text{ H à trèfle}) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{C_5^3}{C_{52}^3}$$

résultat que donne le calcul direct.

On peut également dire que la probabilité de sortir 3 trèfles est $\frac{C_{13}^3}{C_{52}^3}$ et ceci s'étant réalisé, la probabilité pour que ces 3 trèfles soient 3 honneurs est : $\frac{C_5^3}{C_{13}^3}$.

$$\text{D'où : } \Pr(3 \text{ H à trèfle}) = \Pr(3 \text{ trèfles}) \times \Pr(3 \text{ H}/3 \text{ trèfles}) = \frac{C_{13}^3}{C_{52}^3} \times \frac{C_5^3}{C_{13}^3} = \frac{C_5^3}{C_{52}^3}$$

213. Événements indépendants. — Deux ou plusieurs événements A, B, C sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de chacun des autres, ce qui entraîne :

$$\Pr(B/A) = \Pr(B); \quad \Pr(C/AB) = \Pr(C).$$

Le théorème des probabilités composées s'écrit alors simplement :

$$\Pr(ABC) = \Pr(A) \cdot \Pr(B) \cdot \Pr(C).$$

EXEMPLE. — On forme 3 paquets de cartes contenant respectivement 12 cartes dont 3 trèfles, 15 cartes dont 4 trèfles et 25 cartes dont 6 trèfles. On tire au hasard une carte de chaque paquet. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir 3 trèfles ?

Les probabilités d'obtenir séparément 1 trèfle en tirant une carte de chaque paquet sont indépendantes et égales à $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{15}$ et $\frac{6}{25}$.

D'où :

$$\Pr(3 \text{ trèfles}) = \frac{3}{12} \times \frac{4}{15} \times \frac{6}{25} = \frac{2}{125} = 0,016.$$

EXERCICES

326. On jette trois dés cubiques identiques. Les faces de chacun de ces dés sont numérotées de 1 à 6. Calculer la probabilité pour que la somme des points obtenus soit égale à 6.

327. D'un jeu de 32 cartes on tire, au hasard, 8 cartes. Quelle est la probabilité pour que, parmi ces 8 cartes :

- 1° figure l'as de cœur ;
- 2° ne figure aucun as ;
- 3° figure au moins un as ?

328. Une urne renferme 32 boules parmi lesquelles 4 sont blanches, les autres noires. On extrait successivement 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité :

- 1° pour qu'elles soient blanches toutes les trois ?
- 2° pour qu'il y en ait une blanche et 2 noires ?

329. Un sac contient trois boules rouges, quatre boules bleues et cinq boules jaunes, indiscernables au toucher. On extrait, au hasard, trois boules du sac. Quelle est la probabilité :

- a) que ces trois boules soient jaunes ;
- b) de n'avoir aucune boule rouge ;
- c) d'avoir au moins une boule rouge ;
- d) que ces trois boules soient de couleurs différentes ?

N. B. — On donnera, pour chacune de ces probabilités, une valeur approchée à $\frac{1}{10^3}$ près.

330. Trois dés cubiques ont leurs faces respectives numérotées de 1 à 6. On lance ces trois dés. Quelle est la probabilité :

- a) d'amener trois 6 ;
- b) d'amener trois numéros égaux ;
- c) d'amener trois numéros consécutifs ;
- d) d'amener trois numéros dont la somme est inférieure à 6 ?

331. Une première urne contient 3 boules bleues, 3 blanches et 3 rouges ; on en extrait au hasard 3 boules à la fois et on les introduit dans une seconde urne, qui contient déjà 6 boules blanches ; de la seconde urne on extrait ensuite au hasard 3 boules à la fois ; quelle probabilité a-t-on d'obtenir ainsi un tirage tricolore ?

332. Une loterie comporte 100 billets, parmi lesquels : 1 billet gagne un lot de 1 000 F ; 5 billets gagnent chacun un lot de 300 F ; 10 billets gagnent chacun un lot de 100 F.

- 1° Quelle est la probabilité pour qu'un acheteur de 3 billets gagne exactement 300 F ?
- 2° Quelle est la probabilité pour qu'un acheteur de 3 billets gagne au moins 300 F ?

333. On met dans une urne les lettres mobiles susceptibles de former le mot ÉCONOMIE et l'on tire successivement cinq lettres au hasard. Quelle est la probabilité pour que, dans l'ordre d'obtention, ces lettres forment le mot MOINE :

- a) si l'on remet la lettre après chaque tirage ;
- b) si on laisse la lettre hors de l'urne après chaque tirage ?

334. 1° Combien existe-t-il de combinaisons de 5 éléments pris dans un ensemble de 11 éléments ?

2° Une urne contient 5 boules noires et 6 boules blanches. On tire 5 boules au hasard. Calculer la probabilité :

- p_1 pour qu'on ait les 5 boules noires ;
- p_2 pour qu'on ait 5 boules blanches ;
- p_3 pour qu'on ait au moins 3 boules noires ?

335. Dans une classe de 30 élèves, il y a 12 filles et 18 garçons. On organise un voyage pour 4 élèves tirés au sort. Donner la probabilité de chaque composition possible du groupe désigné (4 filles, 3 filles et 1 garçon, ...), soit p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 .

On en donnera les valeurs approchées avec quatre chiffres décimaux en utilisant la table de logarithmes.

336. 1° Un club de football, A, possède 18 joueurs. Combien d'équipes différentes peut-il former, si l'on ne tient pas compte de la place des joueurs ?

2° Un second club, B, possède 20 joueurs. Quelle est la probabilité pour que Monsieur X, du club A, fasse partie de l'équipe qui jouera contre l'équipe où se trouve Monsieur Y, du club B ?

N. B. — Une équipe de football comporte 11 joueurs.

337. Dans une urne contenant 240 boules numérotées de 1 à 240, on tire une boule au hasard et on lit son numéro.

- 1° Quelle est la probabilité d'obtenir un numéro divisible respectivement par 5, par 6, par 30 ?
- 2° Quelle est la probabilité d'obtenir un numéro divisible à la fois par 3, 5 et 6 ?

338. D'un jeu de 52 cartes on extrait 5 cartes au hasard.

- 1° Quelle est la possibilité de tirer un carré d'as, c'est-à-dire une combinaison comportant les 4 as ?
- 2° Quelle est, de même, la probabilité de tirer une combinaison comportant 3 as et 3 seulement ?
- 3° Quelle est enfin la probabilité de tirer une combinaison comprenant 3 as et deux autres cartes semblables ? Par exemple 3 as et 2 rois, ou 2 dames, ou..., etc.

339. Dans une tombola, on distribue 50 enveloppes, dont 10 seulement renferment chacune un bon pour un lot. On achète 3 enveloppes.

- 1° Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi 3 de ces bons ?
- 2° Quelle est la probabilité de n'avoir aucun lot ?
- 3° Quelles sont les probabilités d'obtenir, soit deux lots, soit un seul lot ? Vérification.

340. On dispose de 4 urnes, désignées par les lettres A, B, C et D. La première, A, contient 30 boules blanches ; la deuxième, B, contient 40 boules noires ; le troisième, C, contient 10 boules blanches et 25 boules rouges ; la quatrième, D, contient 5 boules blanches, 3 boules bleues et 2 boules rouges. On choisit l'une des quatre urnes, au hasard, et de cette urne on prélève une boule, au hasard. Quelle est la probabilité pour que la boule tirée soit blanche ?

341. Une urne contient 2 boules blanches, 1 boule noire, 7 boules rouges. On extrait successivement 2 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'extraire une boule noire et une boule blanche quel que soit l'ordre d'extraction des boules, la première boule tirée n'étant pas remise dans l'urne avant le deuxième tirage ?

342. On prend 3 nombres au hasard parmi les 50 premiers nombres 1, 2, 3, ..., 49, 50.

- 1° Calculer la probabilité P_1 pour que, parmi ces 3 nombres, figurent deux multiples de 5 et deux seulement.
- 2° Calculer la probabilité P_2 pour que, parmi ces trois nombres, figure au moins un carré parfait (cette question est indépendante de la précédente).

N. B. — On exprimera P_1 et P_2 à 10^{-3} près.

343. Un sac contient 7 boules blanches, 5 rouges, 3 bleues. Quelle est la probabilité, dans l'épreuve qui consiste à tirer 3 boules simultanément :

- a) de tirer 3 boules de couleurs différentes ;
- b) de tirer 3 boules dont 2 au moins soient rouges ;
- c) de tirer au moins 1 blanche sur les 3 ?

344. Dans une course il y a 10 concurrents : A, B, C, D, E, F, G, H, I, J.

- 1° On tire au sort, successivement, 3 noms parmi ces 10 concurrents. Quelle est la probabilité pour que ces 3 noms soient, dans l'ordre du tirage, les mêmes que ceux des 3 premiers de la course dans l'ordre d'arrivée ?
- 2° Quelle est la probabilité pour que les 3 noms tirés au sort soient ceux des trois premiers de la course, sans tenir compte de l'ordre d'arrivée ?
- 3° Cette fois, on tire au sort 4 noms. Quelle est la probabilité pour que, parmi ces quatre noms, figurent ceux des trois premiers de la course ?

345. 1° Déterminer la probabilité de réaliser un total de 15 points à l'aide de 3 dés cubiques dont les faces portent respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6 points.

2° Quelle est la probabilité de réaliser avec ces 3 dés une séquence, c'est-à-dire l'un ou l'autre des nombres 123, 234, 345, ou 456 ?

3° Trouver de même la probabilité de réaliser une séquence avec 4 ou 5 dés analogues et la probabilité de réaliser la séquence 123456 avec 6 dés.

346. On lance 6 boules numérotées de 1 à 6 dans 6 cases numérotées de 1 à 6.

- 1° Quelle est la probabilité que la boule 3 entre dans la case 3 ?
- 2° Quelle est la probabilité que les boules 3 et 4 entrent respectivement dans les cases 3 et 4 ?
- 3° Quelle est la probabilité que chacune des 6 boules soit dans la case de même numéro ?

347. Les 90 billets d'une loterie sont désignés par les nombres entiers de deux chiffres ; les billets gagnants sont ceux terminés par 0 ou 5. Possédant 4 billets, quelle est la probabilité :

- a) de gagner un lot et un seul ; b) de gagner au moins un lot ?

348. Dans la suite des nombres 1, 2, 3, ..., 9, 10 on prend au hasard 6 nombres distincts. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait, parmi eux :

- a) trois nombres pairs et 3 seulement ;
- b) au moins 1 nombre impair ;
- c) un seul nombre impair ;
- d) au moins 2 nombres impairs ?

349. On rappelle qu'un jeu de 32 cartes comprend 4 couleurs, notées respectivement pique, cœur, carreau et trèfle. Chaque couleur est composée de 8 cartes, appelées respectivement : as, roi, dame, valet, dix, neuf, huit et sept. On prend 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

- 1° Quelle probabilité y a-t-il pour que, parmi les 5 cartes, il y ait 3 cartes de pique et 3 seulement ?
- 2° Quelle probabilité y a-t-il pour que, parmi les 5 cartes, il y en ait 3 de la même couleur ?
- 3° Quelle probabilité y a-t-il pour que, parmi 5 cartes, il y ait 1 seul roi ?

350. Un jeu de 32 cartes contient 8 piques, 8 trèfles, 8 cœurs et 8 carreaux. On tire 2 cartes au hasard.

Trouver la probabilité :

- 1° pour que les 2 cartes tirées soient 2 piques ;
- 2° pour que les 2 cartes tirées soient 1 trèfle et 1 cœur.

351. Une fabrication automatique de pièces embouties donne un pourcentage de rebuts s'élevant à 5 %. On considère un échantillon de 10 pièces issues de cette fabrication.

Calculer au millième près la probabilité de trouver dans cet échantillon deux rebuts au plus (c'est-à-dire, 0, 1 ou 2 rebuts).

352. Les 6 faces d'un dé cubique portent respectivement les lettres a, a, a, b, b, c .

- 1° On jette ce dé 3 fois de suite. Quelle est la probabilité pour qu'apparaissent, dans l'ordre, les lettres a, b, c ?
- 2° On jette le dé 5 fois de suite. Quelle est la probabilité pour que la lettre b apparaisse 2 fois ou 3 fois ?

353. Une loterie comporte 50 billets et 10 lots ; un joueur achète 2 billets.

- 1° Combien y a-t-il de couples possibles de billets pour ce joueur ?
- 2° Combien y a-t-il de cas possibles dans lesquels ce joueur sera perdant ?
- 3° Quelle est la probabilité qu'a ce joueur de gagner au moins un lot ?

354. On dispose de 26 jetons identiques. Sur chacun d'eux on inscrit une des 26 lettres de l'alphabet (2 jetons ne portent pas la même lettre). On les met dans un sac et on en tire trois successivement, sans remise.

Quelle est la probabilité de tirer :

- 1° trois consonnes ;
- 2° trois voyelles ;
- 3° les lettres B, A, C :
 - a) dans cet ordre ;
 - b) sans tenir compte de l'ordre ?

(L'alphabet se compose de 20 consonnes et de 6 voyelles.)

355. 1° Une épreuve conduit aux 4 éventualités mutuellement incompatibles $AB, A\bar{B}, \bar{A}B$ et $\bar{A}\bar{B}$. Établir les formules :

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(AB) + \Pr(A\bar{B}); \\ \Pr(B) &= \Pr(AB) + \Pr(\bar{A}B); \\ \Pr(A + B) &= \Pr(AB) + \Pr(A\bar{B}) + \Pr(\bar{A}B). \end{aligned}$$

En déduire que : $\Pr(A + B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB).$

2° Généraliser pour 3 événements A, B, C ou plus. Que devient le résultat lorsque les événements sont incompatibles 3 à 3 ou 2 à 2 ?

356. Quelle est la probabilité de sortir au hasard d'un jeu de 52 cartes une carte qui soit un honneur ou un cœur ?

357. Une urne contient des jetons numérotés de 1 à 210. On tire au hasard un de ces jetons. Quelle est la probabilité d'obtenir un numéro :

- 1° qui soit multiple de 3 ou de 7 ;
- 2° qui soit multiple de 2, de 3 ou de 5 ?

358. Trouver la probabilité d'avoir dans une main de 13 cartes au bridge :

1° une longueur de 6 trèfles ;

2° une longueur de 6 trèfles et une longueur de 6 carreaux ;

3° une longueur de 6 cartes dans une quelconque des 4 couleurs ?

359. La roue d'une loterie comporte 24 numéros et un seul gagnant. Indépendamment l'un de l'autre 3 joueurs misent, l'un A sur 3 numéros, le second, B, sur 4 numéros et le troisième, C, sur 6 numéros. Trouver :

1° la probabilité de gain de chaque joueur ;

2° la probabilité pour que l'un des joueurs A et B au moins soit gagnant, l'un des joueurs A et C ou l'un des joueurs B et C ;

3° la probabilité pour qu'il y ait au moins un gagnant parmi les 3 joueurs A, B et C ?

360. Déterminer la probabilité d'avoir 13 points d'honneur dans une main de 13 cartes au bridge. On compte (cf. ex n° 325) 4 points pour un as, 3 pour un roi, 2 pour une dame et 1 pour un valet.

LOIS DE PROBABILITÉ

214. Variable aléatoire discrète. — *On appelle variable aléatoire tout nombre réel X dont la valeur est déterminée par le hasard, c'est-à-dire par le résultat d'une épreuve ou d'un groupe d'épreuves déterminé.*

Le nombre des faces obtenu en lançant 10 pièces de monnaie, le nombre des trèfles dans une main de 13 cartes au bridge, le nombre total des points obtenus à l'aide de 3 dés, le rang de la première épreuve réalisant un événement aléatoire donné sont des variables aléatoires.

Une variable aléatoire X est dite *discontinue (ou discrète) d'ordre fini* lorsqu'elle ne peut prendre que des valeurs isolées en nombre fini : $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$.

La réalisation de $X = x_\alpha$ est un événement aléatoire E_α dont la probabilité p_α se note :

$$\Pr (X = x_\alpha) = p_\alpha.$$

Les événements E_α sont mutuellement incompatibles et la réalisation de l'un d'eux est un événement certain. Donc (n° 209) :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

ou

$$\sum_{\alpha=1}^n p_\alpha = 1.$$

Lorsque le nombre n des valeurs isolées x_α devient infiniment grand, on dit que la variable aléatoire discrète X est *d'ordre infini*.

$$X : x_1, x_2, x_3 \dots x_n, \dots$$

Dans ce cas le nombre $P_n = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha$ est un nombre positif inférieur à 1, qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. On écrit :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1 \quad \text{ou} \quad \sum_{\alpha=1}^{\infty} p_\alpha = 1.$$

215. Loi de probabilité. — La correspondance entre chacune des valeurs x_α de la variable X et sa probabilité $\Pr (X = x_\alpha) = p_\alpha$ constitue la *loi de probabilité de la variable discrète X*.

Cette loi peut être définie par la donnée de $p_\alpha = f(x_\alpha)$ ou $\varphi(\alpha)$. De toute façon la loi de probabilité est déterminée si on sait calculer x_α et sa probabilité p_α pour toute valeur de α . On pourra établir un tableau de correspondance entre x_α et p_α et construire le diagramme en bâtons de cette correspondance.

216. Exemples. — 1° La probabilité d'avoir un nombre k d'as dans une main de 13 cartes au bridge est donnée par la formule :

$$\Pr(X = k) = \frac{C_4^k C_{48}^{13-k}}{C_{52}^{13}}. \text{ On obtient (n° 210) le tableau :}$$

X	0	1	2	3	4
Pr(X)	0,304	0,439	0,213	0,041	0,003

Ce qui se traduit graphiquement par le diagramme (fig. 126).

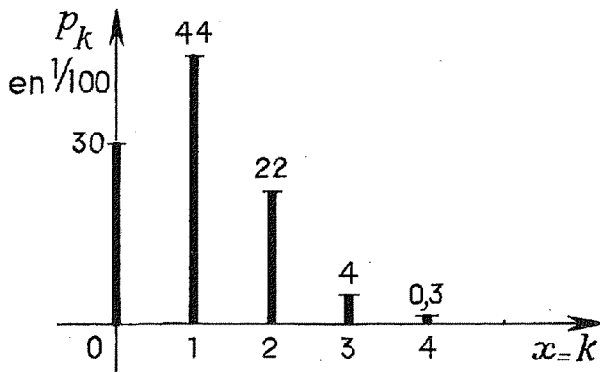


Fig. 126

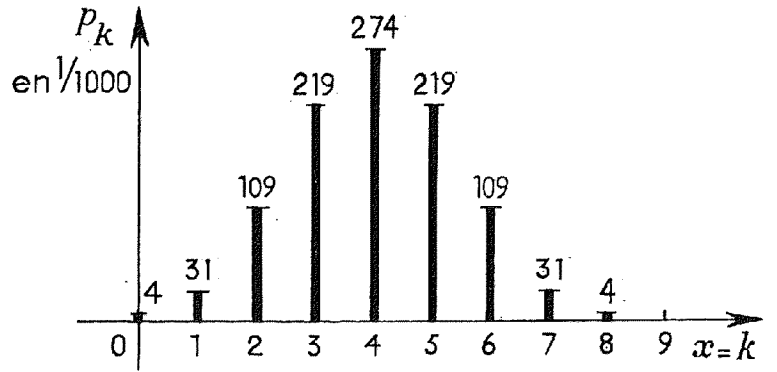


Fig. 127

2° La probabilité d'amener k piles en lançant 8 pièces de monnaie (ou dans 8 lancers d'une seule pièce) est (n° 205) : $p_k = \frac{1}{2^8} C_8^k$, soit :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

Le diagramme de la figure 127 est symétrique par rapport à la droite $x = 4$.

3° Considérons une partie de pile ou face à l'aide d'une pièce de monnaie qu'on lance autant de fois qu'il le faut pour obtenir une première fois pile. La probabilité d'obtenir $(k - 1)$ fois face, puis pile au $k^{\text{ème}}$ lancer est $\Pr(X = k) = \frac{1}{2^{k-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$.

Il n'est pas exclu de voir la variable X prendre des valeurs très grandes. On obtient :

$$\Pr(X \leq n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

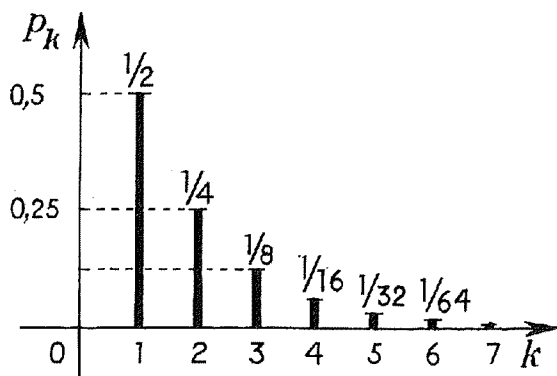


Fig. 128

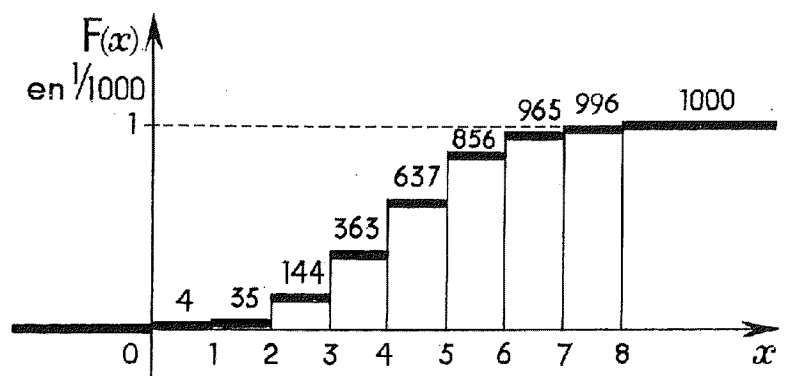


Fig. 129

La probabilité de voir X prendre une valeur supérieure à un nombre entier n est donc $\frac{1}{2^n}$. Elle tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On obtient le diagramme de la figure 128.

217. Fonction de répartition. — On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la probabilité F (x) de voir X prendre une valeur inférieure à x.

$$F(x) = \Pr(X < x).$$

Dans le 2^e exemple du numéro précédent la fonction de répartition est définie par :

X	$x \leq 0$	$0 < x \leq 1$	$1 < x \leq 2$	$2 < x \leq 3$...	$6 < x \leq 7$	$7 < x \leq 8$	$x > 8$
F(x)	0	$\frac{1}{256}$	$\frac{9}{256}$	$\frac{37}{256}$...	$\frac{247}{256}$	$\frac{255}{256}$	1

Cette fonction F (x) est représentée par une courbe en escalier (fig. 129), confondue avec y = 0 pour x ≤ 0, avec y = 1 pour x > 8. Notons que dans cet exemple $p_k = \Pr(X = k) = F(k + 1) - F(k)$. Plus généralement si les valeurs x_α sont classées dans l'ordre croissant :

$$\Pr(X = x_\alpha) = F(x_{\alpha+1}) - F(x_\alpha).$$

218. Valeurs typiques. — 1^o On appelle valeur moyenne, ou espérance mathématique de la variable aléatoire X le nombre :

$$m = E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \quad \text{ou} \quad E(x) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} x_{\alpha}. \quad (1)$$

Ce qui compte tenu de $\sum_{\alpha} p_{\alpha} = 1$, n'est autre que la moyenne arithmétique pondérée des valeurs x_{α} affectées chacune du coefficient p_{α} .

On appelle moment d'ordre 2 de la variable X, l'espérance mathématique m_2 de son carré X^2 .

$$m_2 = E(x^2) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} x_{\alpha}^2. \quad (2)$$

2^o La différence $Z = X - m$ est l'écart entre la variable X et sa valeur moyenne m. Le moment d'ordre 2 de l'écart X - m est appelé la variance de X et on la désigne par σ^2 :

$$\sigma^2 = E[(X - m)^2] = \sum_{\alpha} p_{\alpha} (x_{\alpha} - m)^2. \quad (3)$$

La valeur σ , appelée écart moyen quadratique ou écart type, est un indice de dispersion de X de part et d'autre de m. On démontre que la probabilité d'un écart absolu | X - m | supérieur à une valeur donnée λ est inférieure à $\frac{\sigma^2}{\lambda^2}$ (Inégalité de Bienaymé-Tchebytschef) :

$$\Pr(|X - m| > \lambda) < \frac{\sigma^2}{\lambda^2}. \quad (4)$$

Notons que $\sigma^2 = \sum p_{\alpha} x_{\alpha}^2 - 2m \sum p_{\alpha} x_{\alpha} + m^2 \sum p_{\alpha} = m_2 - 2m \cdot m + m^2$

d'où :
$$\sigma^2 = m_2 - m^2 \quad \text{ou} \quad \sigma^2(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \quad (5)$$

formule qui facilite souvent le calcul de σ .

219. Loi binomiale de probabilité. — Considérons le jeu de pile ou face généralisé où les deux éventualités contraires que nous désignerons encore par P et F ont pour probabilités respectives p et q = 1 - p.

Si par exemple p = 0,36 et q = 0,64, on pourra placer dans une urne 36 boules P et 64 boules F. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule P ou F que l'on replacera dans l'urne avant le tirage suivant (tirages avec remise).

Nous désignerons par X le nombre aléatoire de boules P extraites au cours d'une épreuve comportant n tirages successifs. En affectant à chaque lettre P ou F extraite un indice égal à son rang de tirage, toute épreuve de n tirages est caractérisée par un symbole tel que : P₁ F₂ F₃ P₄ ... F_{n-1} P_n.

D'après le principe des probabilités composées (n° 213) la probabilité d'un tel symbole est égale à : $pqqp \dots qp = p^k q^{n-k}$. Tout symbole comportant de même k fois la lettre P correspond à une combinaison de k entiers pris dans les n premiers entiers. Le nombre de ces symboles étant C_n^k , on obtient :

$$P_k = \Pr (X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Les différentes valeurs de P_k ne sont autres que les termes du développement du binôme de Newton : $(p + q)^n$. En effet :

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} \implies 1 = \sum_{k=0}^n P_k.$$

D'où le nom de loi binomiale et la vérification de la relation $\sum P_k = 1$.

Pour $n = 10$ et $p = 0,4$, on obtient (diagramme fig. 130) :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10^4 \cdot P_k$	60	403	1 209	2 150	2 508	2 007	1 115	425	106	16	1

La valeur k pour laquelle P_k est maximum vérifie :

$$\frac{P_k}{P_{k-1}} > 1 > \frac{P_{k+1}}{P_k} \implies \frac{(n-k+1)p}{kq} > 1 > \frac{(n-k)p}{(k+1)q} \implies k < (n+1)p < k+1.$$

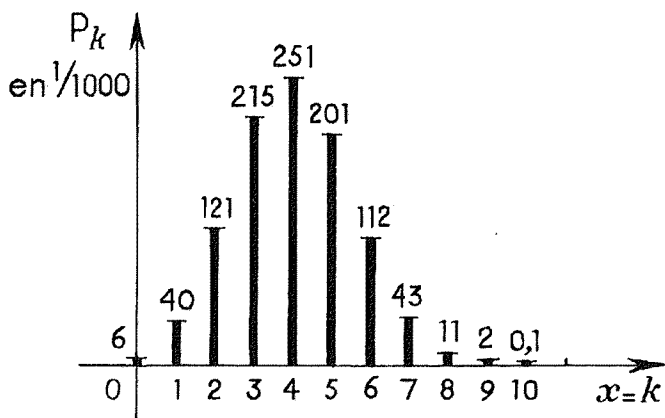


Fig. 130

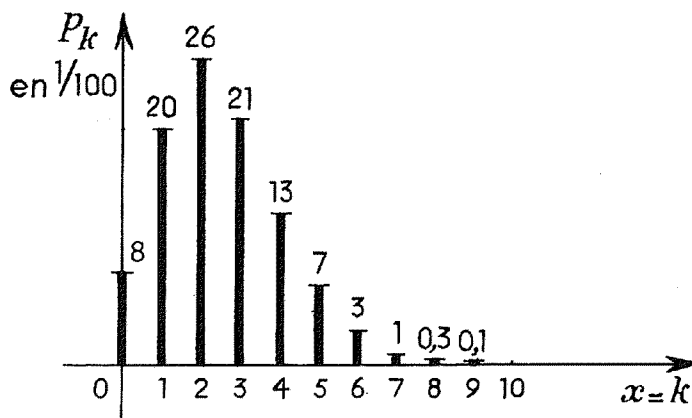


Fig. 131

Cette valeur k est la partie entière de $(n + 1)p$, c'est-à-dire l'unique entier compris entre $np - q$ et $np + p$. Toutefois si ces deux valeurs sont entières elles correspondent à une même valeur maximum.

Le calcul donne pour *valeur moyenne* $m = E(x) = np$, pour moment d'ordre deux : $m_2 = E(x^2) = n^2p^2 + npq$ ce qui implique pour variance $\sigma^2 = npq$, et pour *écart type* $\sigma = \sqrt{npq}$.

Notons que la *fréquence* $Z = \frac{X}{n}$ de l'événement de probabilité p a pour valeur moyenne

$$E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{np}{n} = p \text{ et pour écart type } \sigma\left(\frac{X}{n}\right) = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

220. Loi de Poisson. — Soit m une constante positive donnée et $k \in \mathbb{N}$ un entier naturel. La variable aléatoire X satisfait à la loi de Poisson si :

$$p_k = \Pr (X = k) = e^{-m} \frac{m^k}{k!}$$

On obtient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = e^{-m} \left[1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \dots + \frac{m^n}{n!} + \dots \right].$$

On admettra que la somme entre crochets est une fonction $y(m)$ vérifiant $y(0) = 1$ et $\frac{dy}{dm} = y$ ou $\frac{dy}{y} = dm$; ce qui implique $\text{Log } y = m$ et $y = e^m$.

Donc : $\sum p_k = e^{-m} \cdot e^m = 1$. On a bien affaire à une loi de probabilité.

Pour $m = 2,5$, on obtient $p_k = e^{-2,5} \frac{(2,5)^k}{k!}$ d'où le tableau :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$10^4 p_k$	821	2 052	2 565	2 139	1 336	668	278	99	31	9	2	0

et le diagramme de la figure 131. Noter que la valeur de p_k tend rapidement vers 0 lorsque k augmente.

La valeur k qui correspond au maximum de p_k vérifie :

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} > 1 > \frac{p_{k+1}}{p_k} \implies \frac{m}{k} > 1 > \frac{m}{k+1} \iff m-1 < k < m.$$

Cette valeur k est donc la partie entière de m . Toutefois si m est entier les deux valeurs p_{m-1} et p_m sont égales au maximum $e^{-m} \frac{m^m}{m!}$.

Le calcul donne pour valeur moyenne $E(X) = m$, pour moment d'ordre deux : $E(X^2) = m^2 + m$ ce qui implique pour variance $\sigma^2 = m$ et pour écart type $\sigma = \sqrt{m}$.

221. Relation avec la loi binomiale. — Considérons une loi binomiale dans laquelle la probabilité p est très faible (de l'ordre de $\frac{1}{100^e}$ par exemple) et le nombre n suffisamment grand de façon que le produit $np = m$ soit un nombre fini (de l'ordre de 1 à 20 par exemple). En tenant compte de $p = \frac{m}{n}$ on obtient :

$$P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{m^k}{n^k} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n.$$

Soit :
$$P_k = \frac{m^k}{k!} \frac{1}{(1-p)^k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n.$$

Tous les facteurs entre parenthèses sont très voisins de 1 sauf le dernier $\left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \approx e^{-m}$.
Ce qui montre que $P_k \approx \frac{m^k}{k!} e^{-m}$ (loi de Poisson avec $m = np$).

Ainsi pour $n = 250$, $p = 0,01$ le calcul direct de $P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ donne :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$10^4 \cdot P_k$	811	2 047	2 573	2 149	1 341	666	275	97	30	9	2	0

Les valeurs de P_k vérifient à $1/1\,000^e$ près celles de $p_k = e^{-2,5} \frac{(2,5)^k}{k!}$ du numéro précédent.

Pour les petites probabilités, notamment en physique corpusculaire, la loi de Poisson permet de disposer d'une formule approchée $P_k \approx e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$ plus maniable que la formule binomiale $P_k = C_n^k p^k (1-p)^k$.

222. Variable aléatoire continue. — Une variable aléatoire est continue lorsqu'elle peut prendre toute valeur réelle d'un intervalle $[a, b]$.

Une loi de probabilité de la variable continue X est définie par une fonction de répartition F (x) telle que :

$$\Pr (X < x) = F (x). \tag{1}$$

La fonction de répartition F (x) définie sur $(-\infty, +\infty)$ est nulle pour $x \leq a$, croissante pour $x \in [a, b]$, égale à + 1 pour $x \geq b$ (fig. 132).

D'après le théorème des probabilités totales on obtient :

$$\Pr (x_1 < X < x_2) = F (x_2) - F (x_1) = [F (x)]_{x_1}^{x_2}. \tag{2}$$

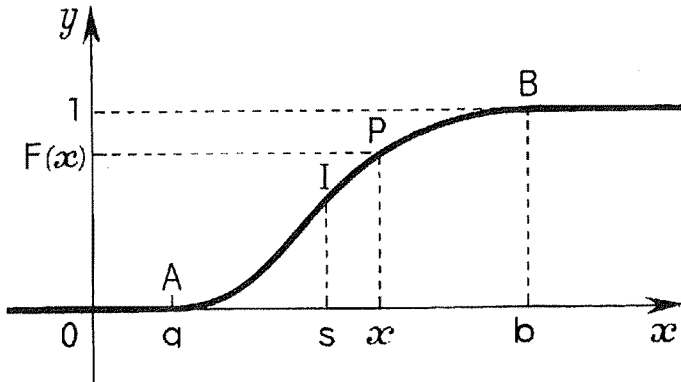


Fig. 132

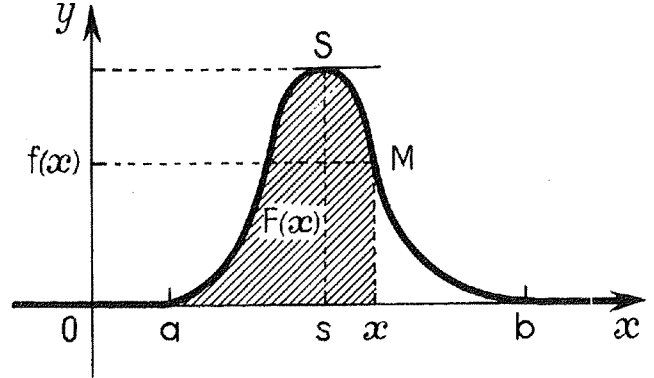


Fig. 133

Si la fonction F (x) est dérivable sur [a, b] et admet pour dérivée f (x), on obtient :

$$\Pr (x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f (x) dx. \tag{3}$$

La fonction f (x) est appelée densité de probabilité et le produit f (x) dx est la probabilité élémentaire.

Cette probabilité élémentaire n'est autre que la probabilité de voir X prendre une valeur de l'intervalle [x, x + dx]. Cette probabilité tend vers 0 en même temps que dx. Par suite la probabilité de voir X prendre une valeur isolée x est nulle.

Notons que l'on peut toujours supposer f (x) défini sur $(-\infty, +\infty)$ en posant f (x) = 0 pour x < a et pour x > b.

223. Théorème. — Pour qu'une fonction f (x) définisse une densité de probabilité, il faut et il suffit que :

1° f (x) soit définie, positive ou nulle, sur $]-\infty, +\infty[$.

2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f (x) dx = 1$.

En effet la fonction continue $F (x) = \int_{-\infty}^x f (x) dx$ est croissante de 0 à 1 lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Ces propriétés impliquent que f (x) tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. D'où l'allure de courbe en cloche de la courbe $y = f (x)$ lorsque f (x) n'admet qu'un maximum (fig. 133).

On définit comme au n° 218 les valeurs typiques relatives à la variable aléatoire continue X. Les principales sont l'espérance mathématique ou valeur moyenne :

$$m = E (X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f (x) dx$$

le moment d'ordre deux :

$$m_2 = E (X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f (x) dx$$

la variance :

$$\sigma^2 = E [(X - m)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f (x) dx = m_2 - m^2$$

ce qui donne l'écart type σ .

224. Loi de Laplace-Gauss ou loi normale. — C'est une loi dans laquelle la probabilité élémentaire est définie par :

$$f(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (1)$$

On démontre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Les deux paramètres m et σ sont précisément la *valeur moyenne* et l'*écart type* de cette loi désignée en abrégé par *loi normale* $N(m; \sigma)$.

$$\Pr(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (2)$$

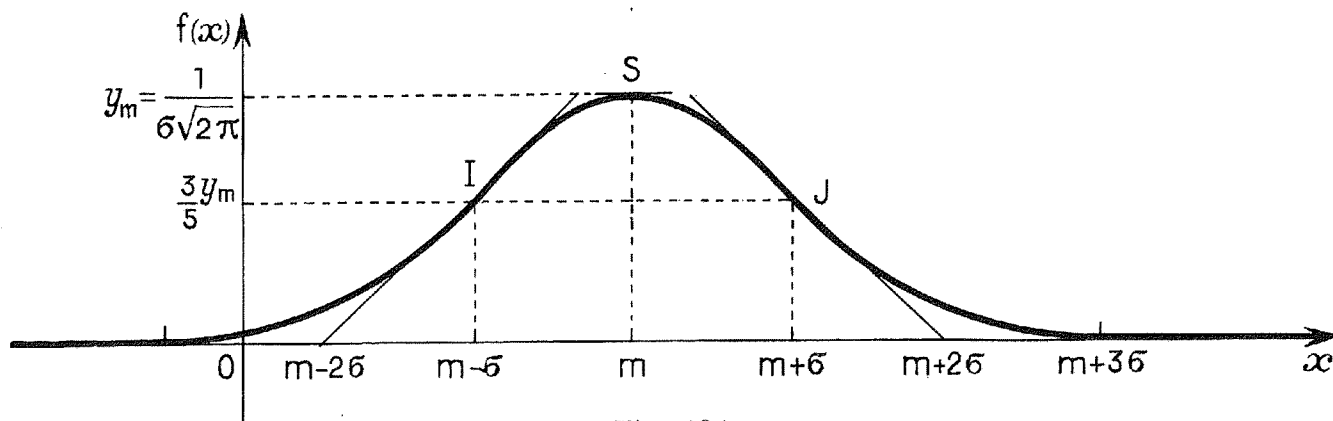


Fig. 134

La courbe $y = f(x)$ est la courbe en cloche de Gauss (fig. 134). Elle a Ox pour asymptote, la droite $x = m$ pour axe de symétrie et sur cet axe le sommet d'ordonnée maximum $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \approx \frac{0,4}{\sigma}$. La courbe est d'autant plus aplatie que σ est grand, mais l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe et l'axe Ox reste égale à 1.

225. Équation réduite. — Prenons pour nouvelle variable, l'*écart réduit* : $t = \frac{x - m}{\sigma}$. On obtient en remplaçant x par $m + \sigma t$ dans la formule (2) :

$$\Pr(x_1 < x < x_2) = \Pr(t_1 < t < t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3)$$

L'écart réduit t vérifie donc une loi normale $N(0; 1)$ de valeur moyenne 0 et d'écart type 1 (fig. 135).

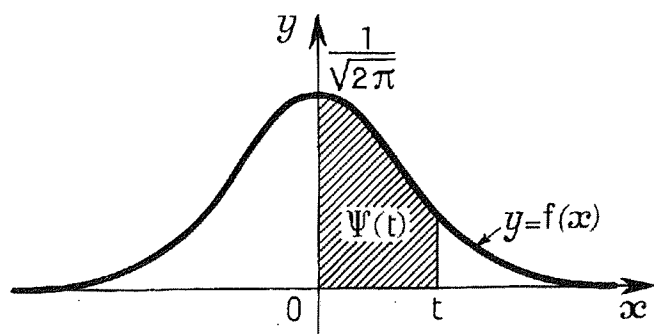


Fig. 135

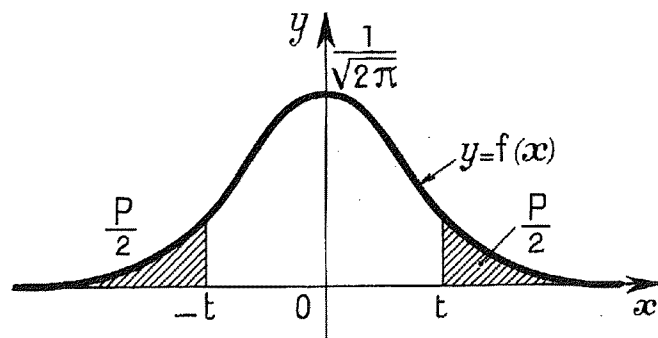


Fig. 136

Les calculs sont facilités par les tables (page 171) donnant les valeurs de l'intégrale :

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4) \quad \text{avec } \Psi(-t) = -\Psi(t) \quad \text{et} \quad \Psi(\infty) = \frac{1}{2}.$$

On obtient :

$$\Pr(x_1 < x < x_2) = \Pr(t_1 < t < t_2) = \Psi(t_2) - \Psi(t_1) \quad (5)$$

$$\Pr(|x - m| > \lambda \sigma) = \Pr(|t| > \lambda) = 1 - 2 \Psi(\lambda). \quad (6)$$

Ainsi : $\Pr(|x - m| > 4 \sigma) = \Pr(|t| > 4) = 1 - 2 \Psi(4) < 10^{-4}$.

Un écart absolu supérieur à 4 écarts types a donc une probabilité si faible qu'un tel écart doit être considéré comme pratiquement impossible.

Inversement (fig. 136) la valeur $t = \frac{x - m}{\sigma}$ telle que $1 - 2 \Psi(t) = P$ est la valeur de t ayant la probabilité P d'être dépassée en valeur absolue. La table page 172 donne t connaissant P . Ainsi :

a) $P = 0,5 \implies t = 0,6745 \approx \frac{2}{3}$. L'écart absolu $|x - m|$ a donc une chance sur deux de ne pas dépasser $\frac{2}{3} \sigma$ (écart médian μ ou écart probable des artilleurs).

b) $P = 0,01 \implies t = 2,5758$ légèrement inférieur à $\frac{8}{3}$. Un écart absolu supérieur à 4 écarts médians a moins d'une chance sur 100 de se produire.

c) $P = 0,05 \implies t = 1,96 \approx 2$. Un écart absolu $|x - m|$ supérieur à deux écarts types a moins de 5 chances sur 100 de se produire. Par suite :

$$\boxed{\Pr(m - 2 \sigma < x < m + 2 \sigma) > 0,95}$$

formule qu'on utilise le plus souvent.

226. Remarque. — La loi normale ou de Laplace-Gauss est d'une importance capitale en Probabilités. On démontre, et on constate expérimentalement en Statistique, que la plupart des lois de probabilité finissent par s'identifier à une telle loi lorsque le nombre des épreuves devient très grand. Il en est en particulier ainsi lorsque la variable est la somme ou la moyenne arithmétique de variables aléatoires en nombre n suffisamment grand.

227. Application aux fréquences binomiales. — Dans la loi binomiale (n° 219) :

$$P_k = \Pr(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (1)$$

Lorsque n est suffisamment grand le calcul de P_k devient pénible. Mais on peut alors remplacer, d'une façon approchée, $n!$ par $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2 \pi n}$ (formule de Stirling). On obtient, si p et q ne sont pas trop faibles :

$$P_k = \Pr(x = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2 \pi n p q}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2 npq}}$$

ce qui entraîne très approximativement :

$$\Pr(x_1 \leq x < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2 \pi n p q}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-np)^2}{2 npq}} dx. \quad (2)$$

Pour n assez grand, on peut donc remplacer la loi binomiale discontinue par une loi de Laplace-Gauss continue de même valeur moyenne $m = np$ et de même écart type $\sigma = \sqrt{npq}$.

Considérons la fréquence $z = \frac{x}{n}$ de l'événement de probabilité p , c'est-à-dire le

quotient du nombre x des cas favorables par le nombre n des épreuves. On obtient en remplaçant x par nz dans la formule (2) la loi des fréquences binomiales :

$$\Pr(z_1 < z < z_2) = \sqrt{\frac{n}{2\pi pq}} \int_{-z_1}^{z_2} e^{-\frac{n(z-p)^2}{2pq}} dz. \quad (3)$$

La fréquence z de l'événement de probabilité p obéit à une loi de Gauss de valeur moyenne p et d'écart type $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$.

Dans les applications pratiques où n est assez grand ($n > 50$) les formules (2) et (3) remplacent avantageusement la formule (1).

228. Loi des grands nombres. — La fréquence $z = \frac{k}{n}$ d'un événement de probabilité $p = 1 - q$ est donc assimilable à une variable aléatoire normale (laplacienne ou gaussienne) de valeur moyenne p et d'écart type $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ lorsque le nombre des épreuves n est assez grand.

Soit ε un nombre réel positif arbitrairement petit. La probabilité d'avoir un écart absolu $|z - p|$ supérieur à ε donc à $\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \sigma$ est (n° 225) :

$$\Pr(|z - p| > \varepsilon) = 1 - 2 \Psi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 1 - 2 \Psi(t) \quad \text{avec } t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, il en est de même de t et $1 - 2 \Psi(t)$ tend vers 0. On obtient le *théorème de Bernoulli* ou *loi des grands nombres* :

La probabilité pour que l'écart absolu $|z - p|$ entre la fréquence observée z et la probabilité p d'un événement aléatoire, soit supérieur à un nombre donné ε , tend vers zéro lorsque le nombre n des épreuves augmente indéfiniment.

Notons que ceci résulte également de l'inégalité de Bienaymé-Tchébicheff qui permet d'ailleurs d'étendre le théorème à d'autres lois de probabilité normales ou non.

Ainsi d'après la formule 4 (n° 218) et en utilisant seulement les résultats de la loi binomiale (n° 219) on voit que :

$$\Pr(|z - p| > \varepsilon) < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{pq}{n \varepsilon^2} \quad \text{tend vers 0 avec } \frac{1}{n}.$$

229. Commentaires. — En abrégé on peut dire que :

La fréquence observée $z = f_n$ d'un événement aléatoire tend vers sa probabilité p lorsque le nombre n des épreuves devient suffisamment grand.

Cette loi du hasard se vérifie expérimentalement. Sur 2000 parties de pile ou face on a pu compter 1 016 piles et 984 faces. Donc $f_{2000} = 0,508 \approx \frac{1}{2}$.

Il ne faut cependant pas croire que le nombre $x = n f_n$ des cas favorables tend vers np . Au contraire, la relation $\sigma(x) = n \sigma(z) = \sqrt{npq}$ montrent que les écarts absolus $|x - np|$ augmentent proportionnellement à \sqrt{n} . Ainsi on a autant de chances d'avoir un nombre de piles compris entre 980 et 1 020 sur 2 000 parties, qu'entre 99 800 et 100 200 sur 200 000 parties.

Inversement la fréquence f_n d'un événement aléatoire donne une valeur approchée de sa probabilité p , d'autant plus précise que le nombre n des épreuves est grand.

Ceci permet une détermination expérimentale ou statistique de la probabilité p d'un événement aléatoire.

EXEMPLE. — Une urne contient 10 boules qui ne diffèrent que par la couleur, rouge pour les unes, blanche pour les autres. On a fait 1 000 tirages avec remise et obtenu 420 fois une boule rouge et 580 fois une boule blanche. Trouver le nombre de boules de chaque couleur.

La fréquence d'une boule rouge est $f = 0,42$ et la probabilité p de tirer une boule ne peut être qu'un des nombres $\frac{k}{10} : 0,1 ; 0,2 ; \dots ; 0,8 ; 0,9$.

Avec $p = 0,4$, on obtient pour écart type $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{1\,000}} = \frac{\sqrt{240}}{1\,000} \approx 0,015$.

Un écart absolu observé $z = |f - p| = 0,42 - 0,40 = 0,020 \approx \frac{4}{3} \sigma$ est très possible. Par contre avec $p = 0,3$ ou $0,5$ et à plus forte raison avec les autres valeurs possibles de p , on obtient $|f - p| > 0,080 > 5 \sigma$, ce qui est un écart pratiquement impossible (n° 225). Donc $p = 0,4$, ce qui montre qu'il y a : $0,4 \times 10 = 4$ boules rouges et 6 boules blanches dans l'urne.

EXERCICES

361. Une loi de probabilité discrète est définie pour toute valeur entière de X comprise entre 0 et 10 par $p_k = \Pr(X = k) = ak(10 - k)$.

1° Déterminer la valeur de a pour que la relation $\sum_0^{10} p_k = 1$ soit vérifiée. Établir le tableau des valeurs de p_k et le diagramme correspondant.

2° Vérifier que la valeur moyenne $\sum_0^{10} kp_k$ est égale à 5 et calculer l'écart type σ tel que

$$\sigma^2 = \sum_0^{10} (k - 5)^2 p_k.$$

362. Reprendre le problème précédent pour $p_k = ak^2(8 - k)^2$ (valeur moyenne 4).

363. Soit X le nombre de points obtenus avec 2 dés numérotés de 1 à 6.

1° Déterminer $p_k = \Pr(X = k)$ pour toutes les valeurs possibles de k et construire le diagramme en bâtons correspondant.

2° Vérifier que $\sum p_k = 1$ et $\sum p_k k = 7$. Calculer la variance $\sigma^2 = \sum p_k (k - 7)^2$ et déterminer σ .

364. Les probabilités $\Pr(X = k) = p_k$ d'obtenir un nombre k de points à l'aide de 3 dés sont données par le tableau :

k	1	2	3	4	5	6	7	9	9	10
$216 p_k$	0	0	1	3	6	10	15	21	25	27

1° Vérifier le tableau pour $k = 4, 7$ et 10 et construire le diagramme.

2° Vérifier la relation $\sum p_k = 1$ et calculer $\sum kp_k$.

365. Reprendre le même problème pour 4 dés et le tableau

k	1	2	3	4	5	6	7	18	9	10	11	12	13	14
$1\,296 p_k$	0	0	0	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146

que l'on vérifiera pour $k = 9$ et $k = 14$.

366. On désigne par $p_n(x)$ la probabilité d'obtenir un nombre de x points à l'aide de n dés.

1° Démontrer (cf. exercice 323) les relations :

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 p_n(x - k); \quad p_{n+1}(x + 1) = p_{n+1}(x) + \frac{1}{6} [p_n(x) - p_n(x - 6)]$$

$$p_n(x) = p_n(7n - x) \quad \text{et} \quad p_n(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x < n \quad \text{et} \quad x > 6n.$$

2° Vérifier les valeurs des tableaux des exercices précédents et établir le tableau pour $n = 5$ et le diagramme correspondant.

367. 1° Établir que la probabilité d'avoir un nombre de trèfles $X = k$ dans une main de 13 cartes au bridge est donnée par $P_k = \frac{1}{C_{52}^{13}} C_{13}^k C_{39}^{13-k}$.

2° Démontrer que $\frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{(13 - k + 1)^2}{k(26 + k)}$.

3° Calculer P_0 puis, par logarithmes, $P_1, P_2, \dots, P_k \dots$ à 1/100 près et construire le diagramme correspondant.

368. Reprendre le problème précédent pour une main de 8 cartes dans un jeu de 32 cartes :

$$P_k = \frac{1}{C_{32}^8} C_8^k C_{24}^{8-k} \quad \text{et} \quad \frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{(8 - k + 1)^2}{k(16 + k)}$$

369. 1° Montrer que la probabilité d'avoir $X = k$ honneurs dans un jeu de 13 cartes au bridge est : $P_k = \frac{1}{C_{52}^{13}} C_{20}^k C_{32}^{13-k}$.

2° Démontrer que $\frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{(21 - k)(14 - k)}{k(19 + k)}$. Calculer $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k \dots$ à 0,01 près et construire le diagramme de ces valeurs.

370. Une urne contient 20 boules rouges et 30 boules blanches. On tire simultanément (ou successivement sans remise) 10 boules. Soit X le nombre de boules rouges sorties.

1° Montrer que $P_k = \Pr(X = k) = \frac{C_{20}^k \cdot C_{30}^{10-k}}{C_{50}^{10}}$.

2° Calculer les valeurs de P_k et construire le diagramme de ces valeurs.

3° Vérifier la relation : $\sum_{k=0}^{10} P_k = 1$.

371. Un sac contient 40 boules blanches et 60 boules noires. On fait un nombre n de tirages successifs avec remise et on désigne par X le nombre de boules blanches sorties :

1° Montrer que $P_k = \Pr(X = k) = C_n^k \frac{4^k \cdot 6^{n-k}}{10^n}$.

2° On fait $n = 8$. Calculer à 1/1 000 près les valeurs de P_k . Vérifier la relation $\sum P_k = 1$ et construire le diagramme de ces valeurs.

372. D'un sac où se trouvent 12 jetons blancs et 8 jetons noirs, on sort successivement les jetons (tirages sans remise). Soit X le rang de sortie du premier jeton blanc.

1° Démontrer que $p_k = \Pr(X = k) = \frac{12}{20} \frac{C_8^{k-1}}{C_{19}^{k-1}} = \frac{C_{20-k}^{9-k}}{C_{20}^8}$ et vérifier que $\sum_{k=1}^9 p_k = 1$.

2° Calculer à 10^{-4} près les valeurs des p_k et construire le diagramme de ces valeurs.

373. On fait tourner la roue d'une loterie donnant au hasard un numéro de 1 à 100. Soit X le rang de l'épreuve où, pour la première fois on obtient un multiple de 5 :

1° Établir que $p_k = \Pr(X = k) = \frac{4^{k-1}}{5^k}$ et $\Pr(X \leq n) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$. En déduire la limite de $\sum_{k=1}^n p_k$ lorsque n tend vers l'infini.

2° Calculer à 1/1 000 près les 20 premières valeurs de p_k et construire le diagramme.

374. Un sac contient 100 jetons numérotés de 1 à 100.

1° Quelle est la probabilité p de sortir le jeton numéroté 100 en un tirage.

2° On fait $n = 400$ tirages (avec remise) et on admet que la probabilité de sortir X fois le nombre 100 est donnée par la formule de Poisson :

$$p_k = \Pr(X = k) = e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$$

Calculer les valeurs de p_k supérieures à 1/2 000, leur somme et construire le diagramme de ces valeurs.

375. 1° Calculer les probabilités définies par une loi de Poisson : $P_k = \frac{e^{-m} m^k}{k!}$ de paramètre $m = 3$ à 1/1 000 près.

2° Calculer la somme des valeurs obtenues et construire le diagramme.

376. 1° Déterminer le coefficient numérique A pour que $y = f(x) = A \sin x$ définisse sur $[0, \pi]$ une densité de probabilité (avec $y = 0$ pour $x > \pi$ ou pour $x < 0$).

2° Déterminer la fonction de répartition $Y = F(x)$ et vérifier que $F(0) = 0$ et $F(\pi) = 1$.

3° Construire les courbes $y = f(x)$ et $Y = F(x)$.

— Reprendre le problème précédent pour les fonctions $y = f(x)$:

377. $y = A x(10 - x)$ sur $[0, 10]$.

378. $y = A x^2(8 - x)^2$ sur $[0, 8]$.

379. $y = A(1 - \cos x)$ sur $[0, 2\pi]$.

380. $y = A \sin^2 x$ sur $[0, \pi]$.

381. $y = A x(x - 9)^2$ sur $[0, 9]$; $y = A \frac{x}{(x^2 + 12)^2}$ sur $[0, \infty]$.

382. 1° Construire la courbe de Gauss : $y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ pour diverses valeurs de σ

(0,5, 1, 2, 4). Poser $x = \sigma t$, $y = \frac{1}{\sigma} f(t)$ et utiliser la table (page 171) donnant $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

2° Déterminer les coordonnées du point d'inflexion I d'abscisse positive et le lieu de ce point lorsque σ varie.

3° Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la courbe y_1 à la courbe $y\sigma$?

383. On considère une loi binominale de probabilité avec $p = \frac{1}{5}$ et $n = 100$ où

$$P_k = C_{100}^k \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{100-k}.$$

1° Établir que $\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{100 - k}{4(k + 1)}$. En partant de $P_{20} = 0,0993$ calculer les diverses valeurs de P_k pour $k \in [10, 30]$.

2° On assimile la loi à une loi normale telle que :

$$P_k = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-20)^2}{32}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \right) \text{ en posant } t = \frac{k-20}{4}.$$

En utilisant les tables (page 171), établir une liste des valeurs de P_k que l'on comparera aux précédentes.

384. La moyenne des capacités respiratoires X d'un échantillon de 400 personnes du sexe masculin est de 3,7 l, avec un écart type de 0,7 l.

Sachant que les capacités respiratoires X sont distribuées suivant une loi normale, trouver le nombre de personnes ayant une capacité respiratoire comprise entre 3 l et 4,4 l.

On rappelle que, dans une distribution normale, la probabilité d'avoir un écart réduit égal à un écart type est voisine de 0,68.

385. On lance $n = 10\,000$ fois une pièce de monnaie. Le nombre des sorties de pile est désigné par X et on assimile la loi de probabilité de X à une loi normale de valeur moyenne $np = 5\,000$ et d'écart type $\sqrt{npq} = 50$.

1° Calculer la densité de probabilité $\Pr(x = 5\,000)$ et trouver la probabilité $\Pr(\lambda_1 \leq x < \lambda_2)$ à l'aide de la fonction $\Psi(t)$.

2° En déduire la probabilité de voir sortir pile entre 4 940 et 5 060 fois, plus de 5 100 fois, moins de 4 850 fois.

3° Est-il vraisemblable de voir sortir pile plus de 5 200 fois ou moins de 4 800 fois ?

STATISTIQUE APPLIQUÉE

ÉTUDE DES ÉCHANTILLONS

230. Généralités. — Dans le cours de Première, nous avons vu que la statistique a pour objet l'étude des caractères bien déterminés de populations à effectifs généralement nombreux. Ce caractère a pu être schématisé par un histogramme qui est une représentation de la loi de densité dans la population. Le statisticien se propose de remplacer cet histogramme par une courbe théorique représentant *une loi de probabilité* dont il faut définir le type. La figure n° 137 représente l'histogramme donnant la répartition de 1320 adultes d'après leur taille et la courbe continue s'ajustant au mieux à cet histogramme. Cette courbe présente une allure « normale » au sens de la « distribution normale » définie dans la précédente leçon.

Dans cette leçon, on supposera que la loi de probabilité est une loi normale dite de Laplace-Gauss. Nous savons (n° 224) que cette loi est la loi d'une variable aléatoire continue définie dans l'intervalle $] - \infty, + \infty [$ avec une densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Elle dépend de deux paramètres : la moyenne m et l'écart type σ . La distribution de la population est donc entièrement définie si ces deux paramètres sont déterminés à partir de renseignements ou de mesures faites sur les éléments de la population.

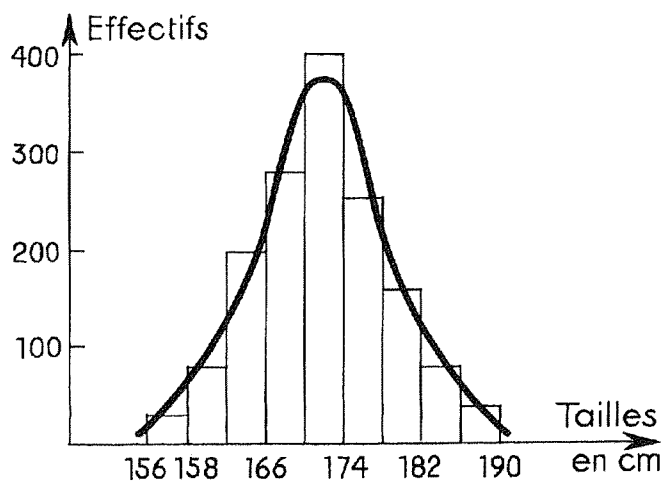


Fig. 137

231. Procédé de l'échantillonnage. — Généralement le statisticien n'étudie pas le caractère de la population sur tous les effectifs qu'elle comprend pour les raisons suivantes :

— La taille N de la population étant élevée, le coût de l'opération correspondant à l'étude du caractère (enquête, dépouillement...) serait trop important.

— Ou bien l'étude du caractère détruirait les éléments de la population : on conçoit clairement qu'on ne peut étudier « la durée moyenne de vie » des lampes provenant d'une certaine fabrication en opérant sur toutes les lampes. On détruirait ainsi l'ensemble de la population.

On comprend donc la nécessité de prélever une ***fraction de la population***. Ce sous-ensemble constitue un ***échantillon*** dont les éléments seront soumis à l'observation du statisticien. L'opération ainsi limitée est qualifiée de sondage.

A partir d'un échantillon E de n éléments prélevés au hasard sur la population dont la distribution de la variable aléatoire est normale, on détermine la moyenne m et la variance σ^2 (carré de l'écart type) de cette variable. Il est bien évident que les valeurs de ces deux paramètres (moyenne, variance) calculées à partir de l'échantillon expérimental diffèrent des vraies valeurs correspondant à la population entière. Il s'agit de savoir entre quelles limites se trouvent la moyenne et la variance du caractère de la population totale, c'est-à-dire avec quelle sécurité (ou quel risque d'erreur) un échantillon nous renseigne sur l'ensemble de la population.

Le procédé de l'échantillonnage permet de fournir une estimation du caractère à étudier d'une population à partir des observations d'un échantillon expérimental et de déterminer la précision de ces estimations.

232. Choix de l'échantillon. — Au cours d'un sondage, le prélèvement des unités doit être fait au hasard afin d'assurer l'application des lois du calcul des probabilités. Remarquons qu'il n'est pas toujours facile d'exécuter un choix au hasard. Par exemple, pour interroger la population d'une grande ville, on évitera de le faire systématiquement dans la rue de huit heures à midi, car on éliminera la plupart des travailleurs et des enfants en âge scolaire.

Un bon échantillon doit constituer une image réduite de l'ensemble de la population dont on veut étudier un caractère bien défini.

233. Distribution de la moyenne d'échantillon. — Considérons une variable aléatoire X de moyenne arithmétique m et d'écart type σ . On extrait au hasard un échantillon E_1 de n unités et on détermine pour cet échantillon la moyenne \bar{x}_1 . Si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sont les valeurs des éléments de cet échantillon :

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

En répétant l'opération un très grand nombre de fois, on définit pour des échantillons de même dimension une série des moyennes des échantillons $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots$ qui représente les valeurs d'une nouvelle variable aléatoire \bar{X} .

On démontre le résultat suivant :

La distribution des moyennes des échantillons d'effectif n est une distribution normale, de valeur moyenne m , moyenne de la population, et de variance $\frac{\sigma^2}{n}$, quelle que soit la distribution de la variable aléatoire X dans la population, pourvu que n soit assez grand.

La taille d'un échantillon est considérée grande si n est au moins égal à 30.

REMARQUE. — On démontre que si le caractère X est distribué normalement dans la population, la distribution des moyennes des échantillons d'effectif n est normale quelle que soit la dimension de l'échantillon, avec $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ pour écart type, pourvu que le prélèvement des éléments n'entraîne pas de modification dans la structure de la population. Pour cela les tirages doivent être opérés avec remises (tirages non exhaustifs).

234. Intervalle de confiance. — Étant donné une population \mathcal{P} , on peut estimer un paramètre de cette population : par exemple, la moyenne m d'une variable aléatoire

représentant un caractère quantitatif. A partir d'un échantillon prélevé dans \mathcal{X} , on veut déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\Pr(a < m < b) \geq \alpha.$$

Le nombre α est appelé coefficient de confiance ou seuil de confiance. Si $\alpha = 0,95$, on cherche un intervalle (a, b) tel qu'on puisse affirmer avec moins de 5 chances sur 100 de se tromper (ou plus de 95 chances sur 100 de ne pas se tromper) que le paramètre m appartienne à l'intervalle (a, b) appelé intervalle de confiance. Le nombre $1 - \alpha$ est aussi appelé coefficient de risque.

ESTIMATION D'UNE MOYENNE

235. Estimation de la moyenne d'une loi normale. — A partir des observations recueillies sur un échantillon on cherche à induire des renseignements sur la population, en consentant à l'avance un coefficient de confiance. Sur un échantillon de dimension n , si x_1, x_2, \dots, x_n représentent les valeurs de la variable aléatoire X pour chaque élément de l'échantillon, on définit la moyenne de l'échantillon :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

On veut savoir dans quel intervalle on peut définir la moyenne inconnue m de X en imposant le seuil de confiance α .

On envisage deux cas, suivant que l'écart type de l'aléa X est connu ou inconnu.

236. L'écart type σ de la variable X est connu. — On sait que la loi de \bar{x} , moyenne d'échantillon est normale et admet pour paramètres m et $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (n° 233). Utilisons la variable

réduite $t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Elle suit donc une loi normale $N(0,1)$ de moyenne 0 et d'écart type 1 (n° 225).

Donc :

$$\Pr\left(-t < \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \alpha.$$

Or :

$$-t < \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < t \implies -\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t < \bar{x} - m < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t.$$

Donc :

$$\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

(1)

Avec la probabilité $\alpha = 0,95$, la table de la loi normale fournit $t = 1,96 \approx 2$. Donc l'intervalle de confiance à 95 % est défini par $\left(x - \frac{1,96 \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{1,96 \sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (fig. 138).

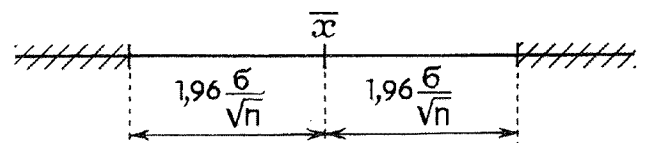


Fig. 138

L'observation d'une moyenne \bar{x} sur un échantillon de dimension n permet d'assigner à la moyenne inconnue m un intervalle de confiance à 95 % d'extré-

mités $\bar{x} \pm 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

La formule (1) montre que l'intervalle de confiance ayant pour amplitude $2t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ est d'autant plus petit pour t fixé, donc pour α donné, que n est plus grand. Quand le nombre d'individus de l'échantillon est multiplié par 4, l'intervalle de confiance est réduit de moitié.

EXEMPLE. — On veut estimer la moyenne m d'une variable aléatoire X à l'aide d'un échantillon de 100 tirages indépendants. Sachant que la variance $\sigma^2 = 9$ dans la population et que la moyenne d'échantillon observée est 8, estimer la moyenne m de X dans la population, au moyen d'un intervalle de confiance à 95 %.

La moyenne et l'écart type de la loi normale suivie par \bar{x} sont respectivement $m = 8$ et $\frac{3}{\sqrt{100}} = 0,3$ (n° 233). Avec la probabilité 0,95, l'intervalle de confiance admet pour extrémités : $8 \pm (2 \times 0,3) = 8 \pm 0,6$ soit 7,4 et 8,6. L'intervalle de confiance est donc (7,4 ; 8,6), autrement dit :

$$\text{Pr}(7,4 < m < 8,6) = 0,95.$$

237. L'écart type de la variable X est inconnu. — C'est le cas le plus fréquent. Sur un échantillon de n sujets, on peut calculer l'expression $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, dans laquelle x_i est la valeur prise par un élément de l'échantillon et \bar{x} la moyenne de l'échantillon.

La valeur $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ n'est pas une estimation tout à fait satisfaisante de la variance σ^2 du caractère de la population. En effet, on a calculé les écarts $(x_i - \bar{x})^2$ par rapport à la moyenne observée \bar{x} au lieu de la moyenne théorique m et on a certainement :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

car la somme des carrés des écarts d'une série par rapport à leur moyenne \bar{x} est toujours plus petite que par rapport à n'importe quel nombre (Première, n° 47). Donc $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ est une estimation trop faible de σ^2 . On démontre que la meilleure estimation de la variance σ^2 s'obtient par la formule :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

On diminue le dénominateur de une unité pour compenser le numérateur trop petit. Remarquons que si σ' est l'écart type de l'échantillon,

$$\sigma'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \implies s^2 = \frac{n}{n-1} \sigma'^2.$$

On remplace dans l'évaluation de l'intervalle de confiance σ par s qui représente une estimation acceptable dans le cas d'un échantillon suffisamment grand ($n \geq 30$).

EXEMPLE. — On veut estimer la moyenne m d'une variable aléatoire normale X à l'aide d'un échantillon de 100 tirages indépendants. Sachant que la variance de l'échantillon tiré est $\sigma'^2 = 9,12$ et que la moyenne \bar{x} d'échantillon observée est 8, estimer la moyenne m de l'aléa X au moyen d'un intervalle de confiance à 0,95.

Puisque l'échantillon est grand ($n \geq 30$), l'estimation de la variance est :

$$s = \sqrt{\frac{100}{99}} \sigma' = \sqrt{\frac{100}{99}} \cdot 3,02 = 3,035.$$

Avec la probabilité 0,95 l'intervalle de confiance a pour extrémités :

$$8 \pm 2 \times 0,3035 = 8 \pm 0,607 \quad \text{soit} \quad 7,39 \text{ et } 8,61.$$

L'intervalle de confiance cherché est (7,39 ; 8,61) et l'on est assuré que :

$$\text{Pr}(7,39 < m < 8,61) = 0,95.$$

REMARQUE. — Si l'échantillon est de petite taille, on peut estimer par s la variance du caractère de la population, mais dans ce cas, la variable réduite $t = \frac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ où $s = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sigma'$ ne suit pas la loi de Laplace-Gauss mais une loi dite de Student. C'est pour cela que l'on supposera dans la suite des échantillons à effectifs nombreux.

238. Dimension minimale de l'échantillon pour une précision donnée. — On veut déterminer la *taille minimale* d'un échantillon extrait d'une population dont on veut estimer la moyenne m d'un caractère distribué de façon normale. Désignons par \bar{x} la moyenne d'échantillon, σ l'écart type du caractère de la population, k la précision relative désirée. Si α représente le coefficient de confiance, l'intervalle de confiance de la moyenne inconnue m est :

$$\left(\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (\text{n}^\circ 236)$$

où t est fournie par la table de Gauss ($t = 1,96 \approx 2$ si $\alpha = 0,95$).

$$\text{On veut réaliser :} \quad \frac{t \sigma}{\sqrt{n}} \leq k m \implies n \geq \frac{t^2 \sigma^2}{k^2 m^2}.$$

La taille minimale de l'échantillon sera donc :

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{k^2 m^2}.$$

Pour cela, un sondage préalable permettra de déterminer grossièrement m et σ .

EXEMPLE. — Pour estimer, à 10 % près, la moyenne du caractère d'une population, d'écart type σ , de moyenne m telle que $\frac{\sigma}{m} = 3$, avec un seuil de confiance de 95 %, la taille minimale de l'échantillon nécessaire est :

$$n = 9 \times \left(\frac{2}{0,1} \right)^2 = 3\,600.$$

APPLICATIONS

239. Comparaison des moyennes d'échantillons. — On dispose de deux échantillons provenant de deux populations différentes et dont les caractéristiques sont les suivantes :

Échantillon E_1 : dimension n_1 , moyenne \bar{x}_1 ; il provient d'une population dont la variance du caractère est σ_1^2 .

Échantillon E_2 : dimension n_2 , moyenne \bar{x}_2 ; il provient d'une population dont la variance du caractère est σ_2^2 .

On veut savoir s'il existe une différence sensible entre les moyennes inconnues m_1 et m_2 des deux populations. On fait pour cela l'hypothèse que les deux échantillons appartiennent à des populations de même moyenne et on cherche si cette hypothèse conduit à des conséquences vraisemblables ou non.

Pourvu que les échantillons soient suffisamment grands, leurs moyennes \bar{x}_1 et \bar{x}_2 fluctuent suivant une loi normale (n° 233), d'écart type $\frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}$ pour le premier, $\frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}$

pour le second. On démontre que la différence de deux variables aléatoires normales indépendantes $z = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ suit une loi normale de moyenne 0, d'écart type

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

La variable réduite $t = \frac{z}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ satisfait à la loi de Gauss N (0,1).

Si $|t| \leq 1,96$, on en conclut que cette variable est intérieure à l'intervalle de confiance de coefficient 0,95 et que l'hypothèse $m_1 = m_2$ est acceptable. On dit que la différence des moyennes n'est pas significative. Il n'y a pas, avec un risque d'erreur de 0,05, de différence sensible entre les deux populations.

Si $|t| > 1,96$ la différence des moyennes est dite significative et on rejette l'hypothèse $m_1 = m_2$.

EXEMPLE. — On a effectué un sondage le 1^{er} janvier en 40 points de vente pris au hasard à Paris, et on a noté le prix de détail d'un produit bien spécifié ; on a trouvé : moyenne $\bar{x}_1 = 25$ F, écart type 2 F. Un deuxième sondage effectué six mois plus tard dans les mêmes conditions dans 30 points de vente a permis de trouver pour le même produit : moyenne $\bar{x}_2 = 27$ F, écart type 2,10 F.

Peut-on conclure que la moyenne générale des prix du produit considéré a varié durant ces deux périodes ?

Si la moyenne générale m est inchangée, \bar{x}_1 et \bar{x}_2 sont deux estimations de m . Or

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{4}{40} + \frac{4,41}{30}} = 0,49 \text{ F.}$$

Dans ces conditions la variable aléatoire « différence des moyennes » doit se trouver pour un coefficient de confiance à 0,95, dans l'intervalle d'extrémités :

$$\pm 2 \times 0,49 = \pm 0,98 \text{ F soit } (-0,98 ; 0,98).$$

Comme la différence $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 2$ F, on ne peut donc pas considérer que la moyenne m du prix de détail n'a pas varié entre les deux sondages. On peut affirmer avec moins de 5 chances sur 100 de se tromper que la moyenne générale a augmenté. Remarquons que l'augmentation de m se trouve avec un seuil de confiance égal à 0,95 dans l'intervalle d'extrémités :

$$2 \pm 2 \times 0,98 \text{ soit } 0,04 \text{ F et } 3,96 \text{ F.}$$

240. Problème de contrôle statistique. — Afin de surveiller le bon fonctionnement d'une machine à fabriquer des pièces en série, un contrôle statistique s'impose.

Une dimension de référence mesurée sur un très grand nombre de pièces donne une distribution normale de moyenne $m = 10$ cm, d'écart type 0,4 cm. On veut contrôler en cours de fabrication la dimension de référence des pièces. On prélève au hasard un échantillon de 100 pièces ; soit \bar{x} la moyenne observée.

Il y a une probabilité 0,95 que \bar{x} se trouve dans l'intervalle d'extrémités $m \pm 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\Pr \left(m - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < m + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 0,95.$$

L'intervalle $\left(m - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ est appelé *intervalle de surveillance*.

Si \bar{x} s'approche des limites de surveillance, on effectue un nouveau contrôle qui montrera si le résultat précédent était ou non exceptionnel.

Il y a une probabilité 0,998 que \bar{x} appartienne à l'intervalle :

$$\left(m - 3,09 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m + 3,09 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

appelé *intervalle de contrôle*. Si \bar{x} est à l'extérieur de cet intervalle la machine est certainement déréglée. On stoppe la fabrication pour vérifier le fonctionnement de la machine.

Ce dernier cas se produit si la moyenne d'échantillon observée est $\bar{x} = 10,2$ cm. En effet les extrémités de l'intervalle de contrôle sont :

$$10 \pm 3,09 \times \frac{0,4}{10} = 10 \pm 0,1236 \text{ cm.}$$

La moyenne d'échantillon est bien à l'extérieur de l'intervalle de contrôle :

$$(9,87 \text{ cm ; } 10,13 \text{ cm}).$$

EXERCICES

386. On tire un échantillon de dimension 36 dans une loi normale de variance 144, de moyenne inconnue m . La moyenne d'échantillon obtenue est 30,2. Quel est l'intervalle de confiance de m à 95 %, à 99 %.

387. Pour déterminer la moyenne m d'une variable aléatoire normale X , on utilise un échantillon de dimension 100. La moyenne d'échantillon observée est 5,1.

1° Sachant que la variance de la population, est 8,41, estimer la moyenne m au moyen d'un intervalle de confiance à 95 %, à 99 %.

2° On ignore la variance de la population mais on connaît la variance de l'échantillon $\sigma^2 = 8,41$. Estimer la moyenne m au moyen d'un intervalle de confiance à 95 %, à 99 %.

388. Un échantillon de 900 membres a fourni une moyenne de 3,4. Peut-il être raisonnablement regardé comme tiré d'une population dont la moyenne est 3,5 et l'écart-type 2,61 ; les divers nombres expriment des centimètres.

389. Estimation de la moyenne vraie à l'aide d'un échantillon. Dans une usine employant 20 000 ouvriers, on a fait un sondage portant sur 900 ouvriers ; on a trouvé comme moyenne des salaires journaliers 40 F, avec un écart type de 15 F. On demande d'estimer avec une probabilité de 95 % l'intervalle dans lequel se trouve la moyenne vraie. On rappelle qu'une probabilité de 95 % correspond dans une distribution gaussienne à un écart réduit d'environ 2 écarts types.

390. Une machine fabrique des pièces en série ; une observation portant sur un très grand nombre de pièces conduit à évaluer la moyenne de leur poids à 12 g et leur écart type à 0,4 g. La distribution des poids est sensiblement normale.

1° On prélève au hasard des échantillons de 64 pièces. Entre quelles valeurs sont comprises 95 % ou 50 % des moyennes de ces échantillons.

2° Quelle est la taille d'un échantillon pour être sûr avec moins de 5 chances d'erreur sur 100 que la moyenne trouvée ne s'écarte pas de 12 g de plus de 0,3 g.

391. On veut contrôler la fabrication des pièces faites par une machine. La répartition est normale et l'on trouve comme moyenne du diamètre $m = 3,5$ cm avec un écart type $\sigma = 0,8$ cm. On prélève au hasard des échantillons de 100 pièces.

1° Déterminer la variance des moyennes d'échantillons de dimension 100.

2° Entre quelles limites seront comprises les moyennes des diamètres de 95 % et de 50 % des échantillons.

392. Des mesures de densité faites au $\frac{1}{1000}$ près ont donné pour 10 échantillons d'un minerai

$$d = 3,289 ; 3,278 ; 3,283 ; 3,282 ; 3,280 ; 3,285 ; 3,279 ; 3,281 ; 3,284 ; 3,277.$$

1° Déterminer la moyenne, la variance, l'écart type de cette distribution.

2° En supposant que la distribution des densités d'échantillon de ce minerai soit normale, la moyenne et l'écart type ayant les valeurs trouvées à partir des 10 échantillons, quel est l'intervalle dans lequel la densité d'un échantillon a la probabilité 0,95 de se trouver.

394. Une cantine sert un très grand nombre de repas comportant une ration de viande. On suppose que les poids des rations de viande se répartissent suivant une loi de Laplace-Gauss. On prélève un échantillon de 122 rations de viande : la moyenne de leur poids \bar{x} est 120 g et l'écart type des poids dans l'échantillon prélevé est 8 g. Donner une estimation de la moyenne des poids de l'ensemble des rations de viande avec un seuil de confiance à 0,95, à 0,99.

395. Un fabricant de piles électriques annonce que la durée de vie moyenne du matériel qu'il produit est égale à 170 (cent soixante-dix) heures. Un bureau de vérification des annonces publicitaires prélève au hasard un échantillon de 100 (cent) piles et en étudie la durée de vie. Les résultats sont les suivants : durée de vie moyenne pour l'échantillon observé : 159 heures ; écart type : 30 heures.

En estimant l'écart type de la population totale par la valeur trouvée pour l'échantillon considéré, quel est l'intervalle de confiance à 99 % pour la durée de vie moyenne observée sur un échantillon de 100 piles prélevées au hasard, si l'on admet que la durée de vie moyenne pour la population totale est celle annoncée par le fabricant ? On rappelle :

1° que la taille de l'échantillon est suffisante pour que les durées de vie moyenne observées suivent une loi normale ;

2° que, pour une variable normale centrée réduite, U , on a :

$$\text{Prob} (-2,57 < U < +2,57) = 0,99.$$

Au niveau de confiance de 99 % doit-on refuser la valeur annoncée par le constructeur, compte tenu de l'échantillon observé ?

396. Qu'entend-on par la comparaison des échantillons nombreux de deux populations ?

Application : dans une grande ville, une enquête portant sur un groupe de 600 hommes a révélé que 400 étaient des fumeurs ; dans une autre ville, sur 900 hommes, on a trouvé que 450 étaient des fumeurs. Est-ce que les données indiquent une différence significative entre les deux villes en ce qui concerne les fumeurs ?

397. Au cours d'essais de vitesse sur un circuit, une voiture A fait 40 tours en un temps moyen de 196,24 secondes par tour avec un écart type de 2,47 secondes. Une voiture B fait 65 tours à la moyenne de 195,58 secondes avec un écart type de 2,36 secondes. Peut-on dire, au seuil de signification 0,95, que la voiture B est plus rapide que la voiture A ?

On rappelle qu'au seuil 0,95 correspond un écart réduit de 1,96.

PROBLÈMES DE RÉVISION

398. On donne sur un axe Ox les points A, B, C d'abscisses respectives a, b, c .

1° Montrer qu'il existe sur l'axe un point unique I tel que $\overline{IA}^3 + \overline{IB}^3 + \overline{IC}^3 = 3 \overline{IA} \cdot \overline{IB} \cdot \overline{IC}$. Déterminer son abscisse x .

2° Démontrer que pour tout point O de l'axe, on a les relations :

$$a) \overline{OA}^3 + \overline{OB}^3 + \overline{OC}^3 - 3 \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC} = \frac{3}{2} \overline{OI} (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2).$$

$$b) \overline{OA}^3 \overline{BC} + \overline{OB}^3 \overline{CA} + \overline{OC}^3 \overline{AB} + 3 \overline{OI} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

399. On considère un rectangle $ABCD$.

1° Quel est l'ensemble des points M du plan du rectangle tels que :

$$| \overrightarrow{MA} + 3 \overrightarrow{MB} | = | \overrightarrow{MC} + 3 \overrightarrow{MD} | ?$$

2° Quel est l'ensemble des points M du plan du rectangle tels que

$$(\overrightarrow{MA} + 3 \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} + 3 \overrightarrow{MD}) = k,$$

k étant un nombre relatif donné ?

400. ABC étant un triangle équilatéral, trouver l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2 \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = k^2,$$

k étant un réel donné.

Discuter en fonction de k et du côté a du triangle.

401. Sur un axe Ox on prend les points $A (+1), B (-2), C (+\sqrt{2})$ affectés des masses respectives $2\sqrt{2}, \sqrt{3}, 3\sqrt{3}$.

Déterminer l'abscisse du barycentre, G , de ces trois points, à $\frac{1}{100}$ près.

402. On donne un cercle Γ , de centre O et de rayon R , ainsi qu'un point fixe, G , tel que :

$$OG = kR, \quad k \text{ donné}, \quad 0 < k < \frac{1}{3}.$$

1° On appelle T tout triangle ABC inscrit dans Γ et ayant G pour centre de gravité.

a) Construire le triangle T lorsqu'on en donne un sommet A .

b) Préciser, lorsque A décrit Γ , le lieu γ du milieu A' de BC et sa position par rapport à Γ .

c) Montrer que tous les triangles T ont le même orthocentre H et qu'ils ont leurs angles tous aigus.

2° On appelle t tout triangle ABC inscrit dans Γ ; son centre de gravité, g , peut varier alors avec et n'est plus, d'ordinaire, G .

Établir les relations : $3 Og^2 + gA^2 + gB^2 + gC^2 = 3 R^2,$
 $BC^2 + CA^2 + AB^2 = 9 (R^2 - Og^2).$

403. On considère un triangle ABC et ses médianes, AM, BN et CP . Démontrer que :

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}.$$

I étant un point donné, on construit les points J et K définis par $\vec{IJ} = \vec{CP}$ et $\vec{IK} = -\vec{BN}$. Démontrer (IE étant la médiane issue de I du triangle IJK) que $\vec{IE} = -\frac{3}{4}\vec{BC}$.

404. a) Démontrer que, dans un repère constitué par un trièdre orthonormé direct $Oxyz$, les équations $x - 2 = y + 1 = z - 3$ sont celles d'une droite (D).

b) Démontrer que, dans le même repère, les équations :

$$x = \frac{4t}{t+1}, \quad y = \frac{1-3t}{t+1} \quad \text{et} \quad z = \frac{2t+4}{t+1} \quad (t \neq -1)$$

donnent les coordonnées d'un point se déplaçant sur une droite (Δ).

c) Montrer que les droites (D) et (Δ) ont un point commun.

d) Déterminer les composantes scalaires d'un vecteur \vec{V} orthogonal au plan formé par (D) et (Δ).

405. Un plan est rapporté à un repère orthonormé Ox, Oy . (p, q) étant un couple de nombres réels, à chaque point C (p, q) du plan on fait correspondre le barycentre, G, du système des trois points A $(q, 0)$, B $(0, p)$, C (p, q) affectés de coefficients égaux à 1.

1° Calculer les coordonnées de G en fonction de p et q . Quel est l'ensemble (D) des points G lorsque le couple (p, q) varie? Soit G_0 un point de (D) d'abscisse λ . Trouver l'ensemble (Δ) des points C qui ont pour correspondant le point G_0 ?

En déduire que l'application qui transforme C en G est la composée (ou produit) de deux transformations simples.

2° Étant donné un couple (p, q) fixe, montrer que l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(p^2 + q^2)$ est un cercle (Γ) passant par O.

406. On construit, dans le plan orienté, de part et d'autre d'un segment AB, deux triangles : un triangle équilatéral AMB, dans lequel $(\vec{MA}, \vec{MB}) = +60^\circ$, un triangle isocèle ANB, possédant un angle de 30° et tel que $NA = NB$. On envisagera deux cas de figure, suivant que l'angle de 30° est à la base ou au sommet du triangle ANB.

On effectue dans l'ordre indiqué les symétries par rapport aux quatre droites MA, MB, NB et NA. Quel est le produit de ces quatre symétries? Dans chaque cas de figure les candidats préciseront les éléments permettant de définir la transformation produit.

407. Étant donné, dans le plan, un point O et une droite (D) passant par O, on considère la transformation ponctuelle T qui, à chaque point M du plan, associe le point $M' = T(M)$ tel que : $OM' = 2OM$, (\vec{OM}, \vec{OM}') a pour bissectrice (D).

Peut-on considérer cette transformation T comme la composée de deux transformations simples? Exprimer quatre décompositions possibles.

408. Une transformation ponctuelle T est définie par :
$$\begin{cases} x' = 4y + 3 \\ y' = 9x + 8. \end{cases}$$

1° Trouver le point double de T et effectuer une translation des axes de coordonnées en prenant ce point comme nouvelle origine. Peut-on décomposer T en un produit de transformations ponctuelles connues? Un tel produit est-il commutatif?

2° Montrer qu'il existe deux droites issues de la nouvelle origine qui sont globalement invariantes dans T. Montrer que, pour les points de l'une (ou l'autre) de ces deux droites, la transformation T est équivalente à une homothétie, dont, pour chacune des deux droites, on précisera le rapport.

M étant un point quelconque du plan, donner une construction géométrique de son transformé M' en utilisant ce qui précède.

409. On considère la transformation ponctuelle qui, dans un repère cartésien orthonormé, fait correspondre à tout point M (x, y) le point $M'(x', y')$ déterminé par les relations :

$$x' = 2x + y - 1 \quad \text{et} \quad y' = -x + 2y + 1.$$

1° Quelle est la transformation inverse? Y a-t-il un point double?

2° Montrer que la transformée de la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une droite (D'), dont on donnera l'équation.

3° Posant $(D, D') = \varphi + k\pi$, montrer que φ est constant, à $k\pi$ près, quand a varie.

4° On suppose que $b = 1$. Comment varient (D) et (D') quand a varie? Trouver le lieu de leur point de rencontre P. (Une solution géométrique est préférable.)

5° ω étant le point double de la transformation, comparer ωM et $\omega M'$, puis calculer l'angle $(\vec{\omega M}, \vec{\omega M}')$. Quelle est la transformation étudiée? Donner une construction simple du transformé M' d'un point M donné, en s'inspirant des résultats du 4°.

410. Le repère de référence Ox, Oy sera, dans tout le problème, orthonormé. On considère la transformation ponctuelle (S) qui, au point M de coordonnées (x, y) , fait correspondre le point M de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{aligned} x' &= 2 \cos \alpha - x \cos 2\alpha - y \sin 2\alpha, \\ y' &= 2 \sin \alpha - x \sin 2\alpha + y \cos 2\alpha, \end{aligned}$$

α étant un angle donné tel que $-\pi < \alpha < \pi$.

- 1° Déterminer par son équation l'ensemble (D) des points doubles de (S).
- 2° Quelle est la transformation réciproque de (S) ? (S) est-elle involutive ? Montrer que (S) définit une bijection du plan sur lui-même.
- 3° Montrer que (S) est une isométrie, c'est-à-dire qu'elle conserve les distances. Quelle est la figure transformée d'un cercle du plan ? Que peut-on dire d'un cercle centré sur (D) ?
- 4° Quelle est la figure (Δ') transformée d'une droite (Δ) ? Montrer que (Δ) et (Δ') se coupent sur (D) ou sont parallèles à (D).
- 5° Montrer que MM' est perpendiculaire à (D). Identifier alors la transformation (S).

411. Un plan est rapporté à un système d'axes orthonormé direct $\vec{x'Ox}, \vec{y'Oy}$. Au point M de ce plan qui a pour coordonnées x et y , on associe le point M' de coordonnées x' et y' définies par les relations : $\begin{cases} y'(x-a) = y(x'-a), \\ x+x' = 0, \end{cases}$ (1) où a désigne une constante positive donnée.

1° Montrer que les relations (1) associent à tout point M du plan un point M' unique, sauf si l'on prend M sur une droite, dont on déterminera l'équation. Dans toute la suite du problème on suppose que M n'appartient pas à cette droite. On désigne par T la transformation qui au point M fait correspondre le point M'.

Déterminer l'ensemble des points doubles de la transformation T. Montrer que T est involutive. Prouver que la droite MM' passe par le point fixe A $(a, 0)$. En déduire une construction géométrique simple du point M' lorsque le point M est donné.

2° Trouver l'équation de la transformée (Δ') , par la transformation T, de la droite (Δ) qui a pour équation $y = mx + p$, où m et p désignent deux constantes réelles données.

Construire (Δ') en supposant que $m = p = 1$ et que $a = 4$.

3° Étudier les variations et tracer le graphe de la fonction : $y = (a-x) \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

En déduire le tracé de la courbe (Γ) , transformée par T du cercle (C) dont le centre est O et dont le rayon est a .

412. Dans un plan, on considère la similitude S, de centre I, d'angle α , de rapport k (k est un réel positif et différent de 1) et la rotation R, de centre J (J différent de I) d'angle β .

1° Quelle est la transformation $R \circ S$? Le symbole \circ indique le produit de deux transformations, le premier facteur étant S. Pour la construction du point invariant, on étudiera seulement les deux cas suivants :

a) $IJ = 3$ unités, $k = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$;

b) $IJ = 3$ unités, $k = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = -\frac{\pi}{6}$.

2° On suppose que M, point quelconque, se transforme en M_1 par S et que M_1 se transforme en M_2 par R.

Quel est l'ensemble des points M tels que $M_1M_2 = 2a$ (a longueur donnée) ? On suppose ici que β est compris entre 0 et π (intervalle ouvert).

413. Soit un axe $x'x$, un point O de cet axe, un vecteur \vec{V} parallèle à $x'x$ et de mesure algébrique $u \neq 0$. On considère la translation (T) définie par \vec{V} et l'homothétie (H) de centre O et de rapport k réel ($k \neq 0$ et $k \neq 1$).

Quelle est la nature de la transformation $(T) \circ (H) \circ (T)$? Préciser les éléments servant à la définir.

414. Relativement à un repère orthonormé xOy , on considère les points fixes F, de coordonnées $x = d, y = 0$ ($d > 0$), et I, milieu de OF.

1° Soit (T_1) la transformation ponctuelle $M \rightarrow \Theta \rightarrow M' = T_1(M)$, qui fait correspondre au point M du plan le point M' intersection des droites MF et $I\varphi$, φ étant la projection de M sur Oy, lorsque ces droites sont définies et sécantes.

Quel est l'ensemble, E, des points du plan pour lesquels la transformation n'est pas définie ? Quel est le transformé d'un point quelconque de la droite Oy autre que O ? Montrer géométriquement que la transformation (T_1) est involutive.

2° Quelle est la disposition des points M, M' et F lorsque MM' est parallèle à Oy ? Lorsque MM' n'est pas parallèle à Oy, soit L le point d'intersection de la droite Oy et de la droite MM' ; préciser la disposition des quatre points M, M', F et L. Exprimer les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.

3° On considère maintenant la transformation (T) qui au point M (x, y) fait correspondre le point M' (x', y') tel que $x' = \frac{dx}{2x-d}$, $y' = -\frac{dy}{2x-d}$. En quels points du plan cette transformation n'est-elle pas définie? Vérifier analytiquement qu'elle est involutive.

Comparer T et T₁.

4° On considère les courbes :

$$(\Gamma_1), \text{ d'équation } y^2 - 2dx + d^2 = 0,$$

$$(\Gamma_2), \text{ d'équation } \frac{x^2}{2} + y^2 - 2dx + d^2 = 0,$$

$$(\Gamma_3), \text{ d'équation } y^2 - x^2 - 2dx + d^2 = 0.$$

a) Trouver analytiquement leurs transformées respectives par (T).

b) Construire rapidement ces courbes. Montrer qu'elles ont une définition géométrique commune.

415. On donne un repère orthonormé xOy; l'unité de longueur est 2 cm.

1° Reconnaître géométriquement et construire la courbe d'équation $y = \sqrt{x \cdot |x-1|}$, où $|x-1|$ représente la valeur absolue du nombre $x-1$.

2° Soit m un nombre positif donné; discuter, suivant les valeurs de m, le nombre des racines réelles de l'équation $\sqrt{x \cdot |x-1|} - m = 0$.

Résoudre cette équation pour $m = \frac{1}{2}$.

416. Soit deux axes orthonormés x'Ox, y'Oy, a et b deux longueurs données, $a > b$, (E) l'ensemble des points M définis en fonction du paramètre t par : $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

1° Calculer les composantes du vecteur dérivé de la fonction vectorielle \vec{OM} de la variable t. Former l'équation de la tangente à (E) en M.

2° Déterminer les valeurs de t correspondant aux points de contact des tangentes à (E) passant par le point A donné, de coordonnées $x = a\sqrt{2}$, $y = b\sqrt{2}$.

417. Dans le plan (II) rapporté à un repère orthonormé (\vec{Ox} , \vec{Oy}) on considère la courbe représentée par l'équation : $y^2 = 2px + qx^2$. (1)

A tout couple de nombres réels (p, q) correspond une courbe, notée $\Gamma(p, q)$, d'équation (1). Pour quelles valeurs de q les courbes $\Gamma(p, q)$ sont-elles :

1° des paraboles;

2° des hyperboles;

3° des ellipses d'axe focal Ox;

4° des ellipses d'axe focal parallèle à Oy?

418. A) Dans un repère orthonormé x'Ox, y'Oy on considère la courbe (C) définie par

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Montrer qu'il s'agit d'une hyperbole, dont on déterminera le centre, les sommets, les foyers et les asymptotes.

B) Dans le même repère, on se donne la transformation ponctuelle f qui, au point M (x, y), fait correspondre le point M' (x', y') à l'aide des relations :

$$\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{2}{3}y, \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{5}}{3}y. \end{cases}$$

1° Montrer que f admet une droite de points doubles (Δ), que l'on déterminera.

2° Montrer que $\vec{MM'}$ reste perpendiculaire à (Δ). Quel est l'ensemble des milieux de MM'? En déduire la nature de la transformation f?

C) Dans la transformation f la courbe (C) a pour transformée une courbe (C').

1° Établir l'équation de (C'); on trouvera une équation de la forme $y = g(x)$.

2° Étudier les variations de g(x) et tracer (C'); mettre en évidence l'existence d'une asymptote oblique par rapport aux axes. Montrer que la connaissance de (C) et de la transformation f permettait la prévision du résultat obtenu ici.

419. Les coordonnées x et y d'un mobile M sont données en fonction du temps par

$$x = \sin t \quad \text{et} \quad y = \sin 3t$$

(repère orthonormé, module des vecteurs unitaires : 3 cm).

1° Déterminer la position du mobile pour $t = 0$, $t = \frac{\pi}{6}$; $t = \frac{\pi}{3}$.

Calculer les composantes scalaires des vecteurs vitesse et accélération pour ces mêmes valeurs de t .
Construire les vecteurs vitesse pour ces valeurs de t . Construire le vecteur accélération pour $t = \frac{\pi}{3}$.

2° Trouver l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile M; construire cette trajectoire en utilisant le repère déjà employé dans la question 1°. Étudier le déplacement du mobile sur sa trajectoire lorsque t croît de 0 à 2π .

420. Un mouvement rectiligne a pour équation horaire $x = t^3 - 5t + 1$ (l'unité de longueur est le centimètre, l'unité de durée est la seconde).

1° Quelle est l'abscisse du mobile à l'instant de date 2? Quelle est sa vitesse moyenne entre les instants de dates 2 et 5?

2° Quelle est sa vitesse à l'instant de date 2? A quel autre instant le mobile a-t-il la même vitesse?

421. 1° Calculer $\cos 3t$ en fonction de $\cos t$.

2° Un point M, mobile sur la courbe d'équation $y = 4x^3 - 3x$, a pour abscisse $x = \cos t$ à l'instant t . Construire, dans un repère orthonormé Ox, Oy , la trajectoire de M. Montrer que le mouvement projeté de M sur Oy est un mouvement sinusoïdal, dont on précisera le centre, l'amplitude, la période.

3° Calculer les abscisses du mobile à ses passages aux points de sa trajectoire d'ordonnée $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

422. 1° Calculer une primitive $F(t)$ de la fonction $f(t) = -6t^2 - 5$.

2° Un point mobile est animé d'un mouvement rectiligne. La mesure algébrique, v , du vecteur vitesse en fonction du temps est donnée par la relation $v = -6t^2 - 5$.

Donner, en fonction de t , l'expression de l'abscisse x du mobile, sachant que $x = 0$ à la date $t = 1$.

423. Un point M est animé d'un mouvement vibratoire simple sur un axe $x'Ox$. Le centre de ce mouvement est l'origine. La période du mouvement est $\frac{1}{10}$ seconde et, à l'instant initial, le mobile est à 5 cm du centre et a une vitesse de 6 cm/s. Écrire l'équation du mouvement de ce mobile.

424. Montrer, par une méthode algébrique ou graphique, que le mouvement rectiligne d'équation horaire $x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{5}t - \frac{\pi}{2}\right) + 4 \sin\frac{2\pi}{5}t + 2$ est un mouvement sinusoïdal simple. Préciser le centre de la vibration, l'amplitude, la période. Les unités sont le centimètre et la seconde.

425. Un mobile M est animé d'un mouvement rectiligne. La trajectoire étant orientée, on sait qu'à l'instant $t = 2$, M est au point d'abscisse $x = -5$. De plus, la vitesse de M, à l'instant t , a pour valeur algébrique $v = 1 - 3t^2$.

1° Quelle est, à l'instant t , l'abscisse x du mobile M?

2° Étudier et représenter par rapport à un même système d'axes orthogonaux les deux fonctions $x(t)$ et $v(t)$ de la variable t , entre les valeurs $t = -1$ et $t = +2$. (Le segment unité, sur chacun des axes, a pour longueur 1,5 cm.)

3° Le graphe (C_1) de la fonction $x(t)$ et le graphe (C_2) de la fonction $v(t)$, dans les limites indiquées, se coupent en deux points. Calculer les coordonnées de ces deux points: on en donnera les valeurs exactes, puis des valeurs approchées par défaut à $\frac{1}{10}$ près.

426. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(x'Ox, y'Oy)$, on considère le mobile M dont les coordonnées sont définies, en fonction du temps t , pour $t \geq \frac{1}{e}$, par $x = 2 \log t$, $y = -t^2$.

1° Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile M. Construire cette trajectoire.

2° Déterminer les vecteurs vitesse et accélération en fonction du temps.

427. Le plan est rapporté à un repère orthonormé xOy . Une droite Δ mobile dans le plan rencontre Ox en M, Oy en N, de façon que: $\overline{OM} = 2a \cos t$, $\overline{ON} = 2a \cos^2 \frac{t}{2}$ (a longueur donnée, t est le temps). A l'instant zéro, M est en A sur Ox , N est en B sur Oy .

1° Calculer les coordonnées du point C milieu de MN et en déduire l'étude de son mouvement: trajectoire, vitesse, accélération, nature du mouvement; dessiner avec soin le vecteur accélération à l'instant t .

2° Comparer les valeurs de \overline{AM} et \overline{BN} et en déduire que M et N se correspondent dans une similitude, c'est-à-dire dans une rotation suivie d'une homothétie de même centre: déterminer le rapport d'homothétie, l'angle de rotation et le centre commun I.

428. On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Trouver les probabilités d'avoir dans ces 5 cartes :

1° Le « carré » d'as, c'est-à-dire les 4 as et une autre carte.

2° Un « brelan », soit 3 cartes de même hauteur et deux autres cartes de hauteurs différentes.

3° Un « full », c'est-à-dire l'association d'un brelan et d'une « paire » de deux autres cartes de même hauteur.

429. Un questionnaire comporte 10 questions où l'on ne peut répondre que par « vrai » ou « faux ». On décide de répondre « au hasard ». Quelle probabilité a-t-on d'avoir au moins huit réponses exactes ?

430. Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire une boule et on ne la remet pas dans l'urne. On effectue un second tirage. Calculer la probabilité pour que l'on obtienne après ces deux tirages :

a) deux boules noires ; b) au moins une boule noire.

431. Un sac contient 8 boules blanches et 7 boules noires. On en extrait simultanément 2 boules.

a) Quelle est la probabilité pour que ces 2 boules soient de couleurs différentes ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'elles soient toutes les deux blanches ?

432. Dans un récipient se trouvent n objets blancs ($n \geq 10$) et 10 objets noirs. On tire au hasard, et simultanément, 10 objets du récipient ; on admet que tous les tirages sont également probables. Évaluer la probabilité P_n pour qu'on ait tiré 5 noirs.

On veut savoir si P_n croît ou décroît quand n croît : on formera le rapport $\frac{P_{n+1}}{P_n}$, on le simplifiera et l'on conclura.

433. On considère une urne contenant 20 plaquettes numérotées de 1 à 20. On effectue un tirage au hasard de l'une de ces plaquettes ; on note le numéro correspondant, puis on replace la plaquette tirée dans l'urne. On considère comme événement favorable la sortie d'un numéro multiple de 5. Établir le tableau donnant la loi de la variable aléatoire x représentant le nombre d'événements favorables obtenu au cours de 3 tirages successifs. Calculer l'espérance mathématique et la variance de x .

434. 1° Dans un récipient se trouvent 10 objets blancs et 10 objets noirs. De combien de façons peut-on en extraire des groupes de 10 objets formés de 5 objets blancs et de 5 objets noirs ?

On tire, au hasard, et simultanément, 10 objets du récipient ; on admet que tous les tirages sont également probables. Quelle est la probabilité P pour qu'on ait tiré 5 noirs ? On donnera une valeur approchée de P à $\frac{1}{100}$ près.

2° On désigne par K_p le nombre de façons dont on peut extraire du récipient des groupes de 10 objets contenant p objets noirs ($0 \leq p \leq 10$) ; évaluer K_p , puis évaluer, de façon simple, la somme

$$K_0 + K_1 + \dots + K_9 + K_{10}.$$

435. On place dans une urne 6 boules blanches et 4 boules noires.

1° On tire 3 boules au hasard. Quelle est la probabilité pour que les 3 boules soient blanches ; pour qu'elles soient noires ?

2° On tire 4 boules au hasard. Quelle est la probabilité pour en avoir 3 blanches et 1 noire ; 1 blanche et 3 noires ?

3° On tire 3 boules au hasard. Quelle est la probabilité pour avoir au moins une boule blanche ?

4° On tire d'abord 3 boules, que l'on ne remet pas dans l'urne, puis on tire à nouveau 4 boules. Quelle est la probabilité pour que les 3 premières soient blanches et que, dans les 4 suivantes, il y ait 1 blanche et 3 noires ?

436. 1° Un joueur, Jean, joue successivement n coups de « pile ou face » avec une pièce symétrique. Quelle est la probabilité que pile sorte exactement p fois durant ces n coups ?

2° Jean joue maintenant $2n$ coups. Quelle est la probabilité que pile sorte autant de fois que face durant ces $2n$ coups ?

3° Un second joueur, Pierre, joue en même temps que Jean avec une autre pièce symétrique ; on appelle « coup » le lancer, par chacun des joueurs, de sa pièce. Quelle est la probabilité que Jean et Pierre obtiennent le même résultat en un coup ? Quelle est la probabilité que Jean et Pierre obtiennent le même résultat à chaque coup d'une série de n coups ?

4° Quelle est la probabilité qu'au bout de n coups Pierre ait sorti pile autant de fois que Jean ? Montrer que cette probabilité est égale à celle trouvée au 2°.

5° Quelle est la probabilité qu'au bout de n coups Pierre ait sorti pile un nombre de fois plus grand que Jean ?

437. Dans une course de relais, chaque équipe se compose de 4 coureurs.

L'association sportive d'un lycée compte 10 coureurs et leur entraîneur doit former une équipe

de relais qui disputera le championnat, en précisant l'ordre dans lequel les 4 élèves sélectionnés prendront leur départ.

1° Entre combien d'équipes possibles l'entraîneur devra-t-il choisir si les 10 coureurs sont de valeur égale ? Deux équipes ayant les mêmes coureurs, mais dans des ordres différents, sont considérées comme distinctes.

2° Quelle est, dans ces conditions, la probabilité pour que l'un quelconque des 10 élèves soit sélectionné ?

3° La sélection étant faite, 3 des 10 élèves tombent malades. Quelle est la probabilité pour que l'entraîneur soit amené à modifier la composition de l'équipe ?

438. Dans une ville, il existe deux lycées, l'un de garçons, l'autre de filles ; chaque lycée a une classe de Mathématiques élémentaires, une de Sciences expérimentales et une de Philosophie.

Une bourse de voyage est offerte par la ville à six élèves pris parmi les élèves des six classes terminales.

Pour cela, on choisit les six meilleurs élèves de chaque classe, soit, en tout, 36 élèves, et les noms des six boursiers sont alors déterminés par tirage au sort parmi ces 36 élèves. On demande de calculer les probabilités suivantes :

- 1° pour que les 6 boursiers soient les 6 élèves de la classe de Sciences expérimentales *garçons* ;
- 2° pour que les 6 boursiers soient des élèves de Sciences expérimentales ;
- 3° pour que les 6 boursiers soient 6 filles ;
- 4° pour que les 6 boursiers soient 3 garçons et 3 filles ;
- 5° pour que, dans les 6 boursiers, il y ait moins de 3 garçons.

439. On dispose de 8 jetons, qu'on peut imaginer sous la forme de petits disques numérotés de 1 à 8 sur une seule face de façon que rien ne les différencie quand ils sont placés sur une table en présentant à l'œil leur face non numérotée. Les jetons sont mêlés avant chaque expérience : on procède alors à l'expérience, les faces numérotées des jetons n'étant pas visibles, puis on constate le résultat en retournant chaque jeton.

1° On dispose les jetons en ligne droite. Quelle est la probabilité pour que les numéros soient placés dans l'ordre 1 2 3 4 5 6 7 8, qu'on lise de droite à gauche, ou de gauche à droite, indifféremment ?

2° On dispose les jetons en cercle. Quelle est la probabilité pour que les numéros soient placés dans le même ordre que dans la question 1°, qu'on les lise indifféremment en tournant dans un sens ou dans l'autre le long du cercle ?

3° On sépare les 8 jetons en 4 groupes de 2 jetons. Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres portés par les 2 jetons de chaque groupe soit la même, c'est-à-dire 9 ?

4° On retire 4 jetons sur les 8. Quelle est la probabilité pour que les 4 jetons retirés portent tous des numéros pairs ?

5° On retire 6 jetons sur les 8 ; la somme des nombres portés par les 6 jetons tirés est un nombre Z . Montrer que Z est un nombre entier de l'intervalle (21, 33).

440. 1° Un sac, A, contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \leq 9$) ; on retire, l'un après l'autre, 2 jetons du sac. Exprimer en fonction de n la probabilité p_1 que les chiffres portés par ces 2 jetons forment, dans l'ordre de leur tirage, un nombre fixé à l'avance et composé de 2 chiffres distincts pris parmi les chiffres de 1 à n .

2° Un autre sac, B, contient $2m$ jetons numérotés de 1 à $2m$; on extrait 2 jetons du sac. Exprimer en fonction de m la probabilité p_2 que la somme des points portés par ces 2 jetons soit égale à $2m + 1$.

3° On considère le jeu suivant : un joueur tire 2 jetons du sac A ; si les jetons tirés satisfont à la condition prévue au 1°, le joueur doit remettre son gain en cause, à pile ou face.

a) S'il sort face, il est définitivement gagnant. Exprimer en fonction de n la probabilité p'_1 que la partie se termine ainsi.

b) S'il sort pile, il doit extraire 2 jetons du sac B et il gagne alors la partie si les jetons tirés remplissent la condition prévue au 2°. Exprimer, en fonction de n et de m , la probabilité p'_2 que le joueur gagne la partie à l'issue de ce dernier tirage.

c) Sachant que le jeu cesse quel que soit le résultat de ce dernier tirage, exprimer, en fonction de n et de m , la probabilité, P , pour le joueur, de gagner la partie, d'une manière ou d'une autre.

4° Le jeu a été prévu pour que $P = \frac{1}{58}$. En déduire l'expression de m en fonction de n .

5° Sachant que m et n remplissent les conditions suivantes : $m \geq 2$, $n \geq 2$, établir à l'aide de l'expression obtenue au 4° la double inégalité $29 < n(n - 1) < 39$. En déduire la seule valeur possible (entière) de n , puis celle de m (entière également).

441. Les grenouilles hébergent divers parasites, en particulier des vers Trématodes. On étudie l'abondance de ces Trématodes parasites dans une population de grenouilles habitant un étang. On prélève donc, au hasard, dans cet étang, 100 grenouilles et on compte les Trématodes que chacune d'elles héberge. Les 100 résultats sont groupés dans la distribution de fréquences suivante :

x (nombre de Trématodes par grenouille).....	0	1	2	3	4	5
Fréquence	4	33	30	25	8	0

On demande :

- 1° la moyenne arithmétique de cette distribution ;
- 2° sa variance et son écart type ;
- 3° une estimation de l'écart type de la population ;
- 4° une estimation de la moyenne en définissant l'intervalle de confiance à 95 %.

442. Le charbon d'une mine, qui contient une certaine quantité de cendre, est expédié à l'industrie consommatrice par wagons. On admet que la distribution des teneurs en cendres de ces wagons obéit à une loi de Laplace-Gauss.

On se propose d'estimer les paramètres caractéristiques de cette distribution à l'aide d'un échantillon de 20 wagons pris au hasard, dont le tableau ci-dessous donne les teneurs en cendres x %.

16,4	17,8	21,7	14,6	16,9
12,8	18,4	23,1	12,2	15,1
14,4	17,6	14,7	18,1	21,4
17,7	18,5	15,5	18,1	19,6

1° Écrire à priori la loi de distribution (densité de probabilité d'une valeur x de la teneur en cendres pour cent) en notant m la moyenne et σ l'écart-type.

2° Calculer numériquement, à l'aide du tableau, la moyenne \bar{x} , la variance v et l'écart type de l'échantillon.

3° Estimer la moyenne m de la population totale au moyen d'un intervalle de confiance à 95 %, puis à 99 %.

443. Les statistiques de la maternité d'un hôpital parisien indiquent des poids de nouveau-nés :
 41 garçons : poids moyen 3,450 kg ; écart type 0,380 kg ;
 65 filles : poids moyen 3,370 kg ; écart type 0,370 kg.

Peut-on déduire de ces indications une différence suivant le sexe des poids des nouveaux-nés ?



FONCTIONS DE LAPLACE-GAUSS

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}; \quad \Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad P = 1 - 2\Psi(t).$$

t	$f(t)$	$\Psi(t)$	$P = 1 - 2\Psi(t)$
0,0	0,398 94	0,000 0	1
0,1	0,396 95	0,039 8	0,920 4
0,2	0,391 04	0,079 3	0,841 4
0,3	0,381 39	0,117 9	0,764 2
0,4	0,368 27	0,155 5	0,689 0
0,5	0,352 07	0,191 5	0,617 0
0,6	0,333 22	0,225 8	0,548 4
0,7	0,312 25	0,258 0	0,484 0
0,8	0,289 69	0,288 1	0,423 8
0,9	0,266 09	0,315 9	0,368 2
1,0	0,241 97	0,341 3	0,317 4
1,1	0,217 85	0,364 3	0,271 4
1,2	0,194 19	0,384 9	0,230 2
1,3	0,171 37	0,403 2	0,193 6
1,4	0,149 73	0,419 2	0,161 6
1,5	0,129 52	0,433 2	0,133 6
1,6	0,110 92	0,445 2	0,109 6
1,7	0,094 05	0,455 4	0,089 2
1,8	0,078 95	0,464 1	0,071 8
1,9	0,065 62	0,471 3	0,057 4
2,0	0,053 99	0,477 3	0,045 4
2,1	0,043 98	0,482 1	0,035 8
2,2	0,035 47	0,486 1	0,027 8
2,3	0,028 33	0,489 3	0,021 4
2,4	0,022 39	0,491 8	0,016 4
2,5	0,017 53	0,493 8	0,012 4
2,6	0,013 58	0,495 3	0,009 4
2,7	0,010 42	0,496 5	0,007 0
2,8	0,007 92	0,497 4	0,005 2
2,9	0,005 95	0,498 1	0,003 8
3,0	0,004 43	0,498 7	0,002 6
3,5	0,000 87	0,499 767 4	0,000 465 2
4,0	0,000 13	0,499 968 3	0,000 063 4
4,5	0,000 02	0,499 996 6	0,000 006 8
5	0,000 00	0,499 999 713	0,000 000 574

TABLE DE DISTRIBUTION DE t **Loi de Laplace-Gauss : $1 - 2 \Psi(t) = P$.**Valeur de t ayant la probabilité P d'être dépassée en module.

P	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,5758	2,3263	2,1701	2,0537	1,9600	1,8808	1,8119	1,7507	1,6954
0,1	1,6449	1,5982	1,5548	1,5141	1,4758	1,4395	1,4051	1,3722	1,3408	1,3106
0,2	1,2816	1,2536	1,2265	1,2004	1,1750	1,1503	1,1264	1,1031	1,0803	1,0581
0,3	1,0364	1,0152	0,9945	0,9741	0,9542	0,9346	0,9154	0,8965	0,8779	0,8596
0,4	0,8416	0,8239	0,8064	0,7892	0,7722	0,7554	0,7388	0,7225	0,7063	0,6903
0,5	0,6745	0,6588	0,6433	0,6280	0,6128	0,5978	0,5828	0,5681	0,5534	0,5388
0,6	0,5244	0,5101	0,4959	0,4817	0,4677	0,4538	0,4399	0,4261	0,4125	0,3989
0,7	0,3853	0,3719	0,3585	0,3451	0,3319	0,3186	0,3055	0,2924	0,2793	0,2663
0,8	0,2533	0,2404	0,2275	0,2147	0,2019	0,1891	0,1764	0,1637	0,1510	0,1383
0,9	0,1257	0,1130	0,1004	0,0878	0,0753	0,0627	0,0502	0,0376	0,0251	0,0125

Table pour les petites valeurs de P .

P	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
t	3,2905	3,8906	4,4172	4,8916	5,3267	5,7307	6,1094

LOGARITHMES DE n ET $n!$ Calcul de C_n^k et $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

n	$\log n$	$\log (n!)$	n	$\log n$	$\log (n!)$
5	0,698 970 0	2,079 181 2	55	1,740 362 7	73,103 680 7
10	1,000 000 0	6,559 763 0	60	1,778 151 3	81,920 174 8
15	1,176 091 3	12,116 499 6	65	1,812 913 4	90,916 330 3
20	1,301 030 0	18,386 124 6	70	1,845 098 0	100,078 405 7
25	1,397 940 0	25,190 645 7	75	1,875 061 3	109,394 611 2
30	1,477 121 3	32,423 660 1	80	1,903 090 0	118,854 727 7
35	1,544 068 0	40,014 232 6	85	1,929 418 9	128,449 802 9
40	1,602 060 0	47,911 645 1	90	1,954 242 5	138,171 935 8
45	1,653 212 5	56,077 811 8	95	1,977 723 6	148,014 091 1
50	1,698 970 0	64,483 073 6	100	2,000 000 0	157,970 003 7

Rapports trigonométriques naturels de DEGRÉ en DEGRÉ

Deg.	Radians	Sin	$\frac{1}{\text{Sin}}$	Tang.	Cotg	$\frac{1}{\text{Cos}}$	Cos		
0	0,0000	0,0000	infini	0,000	infini	1,000	1,0000	1,5708*	90
1	0,0175*	0,0175*	57,30*	0,0175*	57,29*	1,000	0,9998	1,5533	89
2	0,0349	0,0349*	28,65	0,0349	28,64*	1,001*	0,9994*	1,5359*	88
3	0,0524*	0,0523	19,11*	0,0524	19,08	1,001*	0,9986	1,5184	87
4	0,0698	0,0698*	14,34*	0,0699	14,30	1 002	0,9976*	1,5010*	86
5	0,0873*	0,0872*	11,47	0,0875*	11,43	1,004*	0,9962*	1,4835	85
6	0,1047	0,1045	9,567*	0,1051	9,514	1,006*	0,9945	1,4661*	84
7	0,1222*	0,1219*	8,205*	0,1228*	8,144	1,008*	0,9925	1,4486	83
8	0,1396	0,1392*	7,185	0,1405	7,115	1,010	0,9903*	1,4312*	82
9	0,1571*	0,1564	6,392	0,1584*	6,314*	1 012	0,9877*	1,4137	81
10	0,1745	0,1736	5,759*	0,1763	5,671	1,015	0,9848	1,3963*	80
11	0,1920*	0,1908	5,241*	0,1944*	5,145*	1,019*	0 9816	1,3788	79
12	0,2094	0,2079	4,810*	0,2126*	4,705*	1,022	0,9781	1,3614*	78
13	0,2269*	0,2250*	4,445	0,2309*	4,331	1,026	0,9744*	1,3439	77
14	0,2443	0 2419	4,134*	0,2493	4,011*	1,031*	0,9703*	1,3265*	76
15	0,2618*	0,2588	3,864*	0,2679	3,732	1,035	0,9659	1,3090*	75
16	0,2793*	0,2756	3,628*	0,2867	3,487	1,040	0,9613*	1,2915	74
17	0,2967	0,2924*	3,420	0,3057	3,271*	1,046*	0,9563	1,2741*	73
18	0,3142*	0,3090	3,236	0,3249*	3,078*	1,051	0,9511*	1,2566	72
19	0,3316	0,3256*	3,072*	0,3443	2,904	1 058*	0,9455	1,2395*	71
20	0,3491*	0,3420	2,924*	0,3640*	2,747	1,064	0,9397*	1,2217	70
21	0,3665	0,3584*	2,790	0,3839*	2,605	1,071	0,9336*	1,2043*	69
22	0,3840*	0,3746	2,669	0,4040	2,475	1,079*	0,9272*	1,1868	68
23	0,4014	0,3907	2,559	0,4245*	2,356*	1,086	0,9205	1,1694*	67
24	0,4189*	0,4067	2,459*	0,4452	2,246	1,095*	0,9135	1,1519	66
25	0,4363	0,4226	2,366	0,4663	2,145*	1,103	0,9063	1,1345*	65
26	0,4538*	0,4384*	2,281	0,4877	2,050	1,113*	0,8988*	1,1170	64
27	0,4712	0,4540*	2,203*	0,5095	1,963*	1,122	0,8910	1,0996*	63
28	0,4887*	0,4695*	2,130	0 5317	1,881*	1,133*	0,8929	1,0821	62
29	0,5061	0,4848	2,063*	0,5543	1,804	1,143	0,8746	1,0647*	61
30	0,5236*	0,5000	2,000	0,5774*	1,732	1,155*	0,8660	1,0472*	60
31	0,5411*	0,5150	1,942*	0,6009*	1,664	1,167*	0,8572*	1,0297	59
32	0,5585	0,5299	1,887	0,6249*	1,600	1,179	0,8480	1,0123*	58
33	0,5760*	0,5446	1,836	0,6494	1,540*	1,192	0,8387*	0,9948	57
34	0,5934	0,5592*	1,788	0,6745	1,483*	1,206	0,8290	0,9774*	56
35	0,6109*	0,5736*	1,743	0,7002	1,428	1,221*	0,8192*	0,9599	55
36	0,6283	0,5878*	1,701	0,7265	1,376	1,236	0,8090	0,9425*	54
37	0,6458*	0,6018	1,662*	0,7536*	1,327	1,252	0,7986	0,9250	53
38	0,6632	0,6157*	1,624	0,7813*	1,280*	1,269	0,7880	0,9076*	52
39	0,6807*	0,6293	1,589	0,8098*	1,235*	1,287*	0,7771	0,8901	51
40	0,6981	0,6428*	1,556*	0,8391*	1,192*	1,305	0,7660	0,8727*	50
41	0,7156*	0,6561*	1,524	0,8693*	1,150	1,325	0,7547	0,8552	49
42	0,7330	0,6691	1,494	0,9004	1,111*	1,346*	0,7431	0,8378*	48
43	0,7505*	0,6820*	1,466	0,9325	1 072	1,367	0,7314	0,8203	47
44	0,7679	0,6947*	1,440*	0,9657*	1,036*	1,390	0,7193	0,8029*	46
45	0,7854*	0,7071	1,414	1,0000	1,000	1,414	0,7071	0,7854*	45
		Cos	$\frac{1}{\text{Cos}}$	Cotg	Tang.	$\frac{1}{\text{Sin}}$	Sin	Radians	Deg.

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

Rapports trigonométriques naturels de GRADE en GRADE

Grad.	Radians	Sin	$\frac{1}{\text{Sin}}$	Tang.	Cotg.	$\frac{1}{\text{Cos}}$	Cos		
0	0,000	0,0000	infini	0,0000	infini	1,000	1,000	1,571*	100
1	0,016*	0,0157	63,66	0,0157	63,66*	1,000	0,9999*	1,555	99
2	0,031	0,0314	31,84*	0,0314	31,82	1,000	0,9995	1,539	98
3	0,047	0,0471	21,23*	0,0472*	21,20	1,001	0,9989*	1,524*	97
4	0,063*	0,0628*	15,93*	0,0629	15,89	1,002*	0,9980	1,508*	96
5	0,079*	0,0785*	12,75*	0,0787	12,71*	1,003	0,9969*	1,492	95
6	0,094	0,0941	10,63*	0,0945	10,58*	1,004	0,9956*	1,477*	94
7	0,110*	0,1097	9,113*	0,1104	9,058*	1,006	0,9940*	1,461*	93
8	0,126*	0,1253	7,979*	0,1263	7,916*	1,008*	0,9921	1,445	92
9	0,141	0,1409	7,097	0,1423	7,026	1,010	0,9900	1,429	91
10	0,157	0,1564	6,392	0,1584*	6,314*	1,012	0,9877*	1,414*	90
11	0,173*	0,1719	5,816	0,1745	5,730*	1,015	0,9851	1,398	89
12	0,188	0,1874*	5,337*	0,1908*	5,242	1,018	0,9823*	1,382	88
13	0,204	0,2028*	4,931	0,2071*	4,829*	1,021	0,9792	1,367*	87
14	0,220*	0,2181	4,584	0,2235	4,474*	1,025*	0,9759	1,351*	86
15	0,236*	0,2334	4,284*	0,2401*	4,165	1,028	0,9724*	1,335	85
16	0,251	0,2487*	4,201	0,2568*	3,895*	1,032	0,9686*	1,319	84
17	0,267	0,2639	3,790*	0,2736*	3,655	1,037*	0,9646*	1,304*	83
18	0,283*	0,2790*	3,584	0,2905	3,442	1,041	0,9603*	1,288	82
19	0,298	0,2940	3,401*	0,3076	3,251*	1,046	0,9558*	1,272	81
20	0,314	0,3090	3,236	0,3249	3,078*	1,051	0,9511*	1,257*	80
21	0,330*	0,3239	3,087	0,3424*	2,921*	1,057*	0,9461*	1,241*	79
22	0,346*	0,3387	2,952	0,3600	2,778*	1,063*	0,9409*	1,225	78
23	0,361	0,3535*	2,829	0,3779*	2,646	1,069	0,9354	1,210*	77
24	0,377*	0,3681	2,716	0,3959	2,526*	1,076*	0,9298*	1,194*	76
25	0,393*	0,3827*	2,613	0,4142	2,414	1,082	0,9239*	1,178	75
26	0,408	0,3971	2,518*	0,4327	2,311*	1,090*	0,9178*	1,162	74
27	0,424	0,4115	2,430	0,4515	2,215*	1,097	0,9114	1,147*	73
28	0,440*	0,4258*	2,349*	0,4706*	2,125	1,105	0,9048	1,131*	72
29	0,456*	0,4399	2,273	0,4899*	2,041	1,114*	0,8980	1,115	71
30	0,471	0,4540*	2,203*	0,5095	1,963*	1,122	0,8910	1,100*	70
31	0,487*	0,4679	2,137	0,5295*	1,889*	1,132*	0,8838*	1,084*	69
32	0,503*	0,4818*	2,076*	0,5498*	1,819*	1,141	0,8763	1,068	68
33	0,518	0,4955*	2,018	0,5704*	1,753	1,151	0,8686	1,052	67
34	0,534	0,5090	1,964	0,5914*	1,691*	1,162*	0,8607	1,037*	66
35	0,550*	0,5225*	1,914*	0,6128	1,632*	1,173*	0,8526	1,021	65
36	0,565	0,5358	1,866	0,6346	1,576*	1,184	0,8443	1,005	64
37	0,581	0,5490	1,821	0,6569*	1,522	1,196	0,8358	0,990*	63
38	0,597*	0,5621*	1,779	0,6796*	1,471	1,209	0,8271*	0,974*	62
39	0,613*	0,5750	1,739	0,7028	1,423*	1,222	0,8181	0,958	61
40	0,628	0,5878*	1,701	0,7265	1,376	1,236	0,8090	0,942	60
41	0,644	0,6004	1,666*	0,7508	1,332*	1,250	0,7997*	0,927*	59
42	0,660*	0,6129	1,632*	0,7757*	1,289	1,266*	0,7902*	0,911	58
43	0,675	0,6252	1,599	0,8012*	1,248	1,281	0,7804	0,895	57
44	0,691	0,6374	1,569*	0,8273*	1,209*	1,298*	0,7705	0,880*	56
45	0,707*	0,6494	1,540*	0,8541*	1,171*	1,315	0,7604	0,864*	55
46	0,723*	0,6613	1,512	0,8816	1,134	1,333	0,7501	0,848	54
47	0,738	0,6730	1,486*	0,9099	1,099*	1,352	0,7396	0,833*	53
48	0,754*	0,6845	1,461*	0,9391*	1,065*	1,372*	0,7290*	0,817*	52
49	0,770*	0,6959	1,437*	0,9691*	1,032*	1,393*	0,7181	0,801	51
50	0,785	0,7071	1,414	1,0000	1,000	1,414	0,7071	0,785	50
		Cos.	$\frac{1}{\text{Cos}}$	Cotg	Tang	$\frac{1}{\text{Sin}}$	Sin	Radians	Grad.

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

TABLE DES MATIÈRES

GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

<i>Première leçon.</i>	— Coordonnées d'un vecteur dans l'espace — Repère cartésien dans l'espace	7
<i>Deuxième leçon.</i>	— Représentation paramétrique d'une droite — Produit scalaire dans l'espace	15
<i>Troisième leçon.</i>	— Barycentre	23
<i>Quatrième leçon.</i>	— Transformations ponctuelles du plan — Translation plane — Rotation plane — Homothétie — Similitude directe de centre donné.....	31
<i>Cinquième leçon.</i>	— Transformation : $z' = az + b$	42
<i>Sixième leçon.</i>	— Symétrie axiale dans le plan — Affinité dans le plan.	50
<i>Septième leçon.</i>	— Courbes d'équation : $y^2 = ax^2 + bx + c$ — Propriétés de l'ellipse — Propriétés de l'hyperbole.....	61
<i>Huitième leçon.</i>	— Fonctions vectorielles — Hélice circulaire — Tangente et normale aux coniques.....	76

CINÉMATIQUE

<i>Neuvième leçon.</i>	— Mouvement d'un point — Vecteur-vitesse d'un point — Vecteur accélération d'un point.....	87
<i>Dixième leçon.</i>	— Projection d'un mouvement — Mouvement à accélération constante.....	98
<i>Onzième leçon.</i>	— Mouvement circulaire — Mouvement hélicoïdal uniforme	106
<i>Douzième leçon.</i>	— Mouvement de translation d'un solide. — Changement de repère.....	114

STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

<i>Treizième leçon.</i>	— Analyse combinatoire — Problèmes de dénombrement.	123
<i>Quatorzième leçon.</i>	— Notion de probabilité	132
<i>Quinzième leçon.</i>	— Lois de probabilité	143
<i>Seizième leçon.</i>	— Statistique appliquée.....	155
	— Problèmes de révision	163
	— Tables numériques	171

IMPRIMERIE CRÉTÉ
Paris, Corbeil-Essonnes
362-9-1967.
Dépôt légal : 3^e trimestre 1967.
N° d'éditeur : C. 11096-I
(AL. b. SB. 4).
Imprimé en France.
