2BACSPF & 2BACSVTF

Tome 2

05 Cours bien détaillés

05 Résumés bien précis

05 Séries d'exercices corrigées

03 Devoirs libres corrigés

06 Devoirs surveillés

Extraits du bac

04 Examens blancs corrigés

2025/2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Version, 27/06/2025

Table des matières

Corrections des séries et les devoirs libres :

https://drive.google.com/file/d/1briEonJPH_eO_0t7oA8h3tY5zFEp0LVC/view?usp=sharing

08

Fonctions exponentielles

1) Fonction exponentielle népérienne

Activité 1

1) Montrer que la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=ln(x)$ admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle J à déterminer.

La fonction réciproque de $x \mapsto ln(x)$ est appelée la fonction **exponentielle népérienne** et se note par exp.

2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}),\ exp(x)>0$.

3) Calculer $ln(e^2)$, $ln(e)$, $ln(1)$ et $ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$.

4) En déduire $exp(2)$, $exp(1)$, $exp(0)$ et $exp(-2)$.

5) Tracer $(\mathcal{C}_{ln})$ et $(\mathcal{C}_{exp})$ sur un même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} exp(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} exp(x)$.

Définition 1 :

On appelle **fonction exponentielle népérienne,** notée exp, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien ln et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0;+\infty[);\ exp(x)=y \Leftrightarrow x=ln(y)$.

Notation e^x :

Soit r un rationnel. On a : $ln(exp(r))=r$ et on sait que $ln(e^r)=rln(e)=r$.

Donc $(\forall r \in \mathbb{Q}): ln(exp(r))=ln(e^r)$.

On prolonge cette relation de l'ensemble $\mathbb{Q}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$, on aura : $(\forall x \in \mathbb{R}):\ exp(x)=e^x$

Propriétés 1 :

- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}):\ e^x>0$.
- $(\forall x \in]0;+\infty[)(\forall y \in \mathbb{R}):\ e^y=x \Leftrightarrow ln(x)=y$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}):\ ln(e^x)=x$ et $(\forall x \in]0;+\infty[);e^{ln(x)}=x$.
- $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}):\ e^a>e^b \Rightarrow a>b$.
- $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}):\ e^a=e^b \Rightarrow a=b$.

Application 1

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{3e^x}{2e^x+4}$.

1) Déterminer D_f puis montrer que f est continue sur D_f.

2) Calculer $f(0)$ et $f(ln(2))$.

Application 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$e^{1-x}=e^{x-x^2}$ $\qquad$ $e^{x^2-x}=1$ $\qquad$ $(e^x)^2-3e^x+2=0$

$(e^x)^2-3e^x+2<0$ $\qquad$ $(e^x+2)(e^{-x+1}-4)\geq 0$ $\qquad$ $\dfrac{e^x+1}{e^{-x}-e}\leq 0$

Propriétés 2 : Les propriétés algébriques de $x \mapsto e^x$:

Soient x et y deux réels et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$e^{x+y}=e^x e^y$ $\qquad$ $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ $\qquad$ $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ $\qquad$ $(e^x)^r=e^{rx}$

Application 3

1) Simplifier les expressions suivantes :

$$A=\frac{e^{2x}\times e^{3x}}{\left(e^{x}\right)^{4}} \qquad B=\left(e^{2-x}\right)^{2}\times e^{3x-4} \qquad C=e^{2x}\left(\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}+\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}\right)$$

2) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$: $\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

Propriétés 3 : Limites de référence

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty \quad \left(n\in\mathbb{N}^{*}\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n}\,e^{x}=0 \quad \left(n\in\mathbb{N}^{*}\right)$

Exemple 1 :

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-x=+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^{x}}{x}-1\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$.

Application 4

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1\right)e^{-x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x+4}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^{2}}}{x^{3}+x+1}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{3x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^{3}+3x}}{x^{3}-1}$

Remarque 1 : $\lim f(x)=+\infty\Rightarrow \lim e^{f(x)}=+\infty$ et $\lim f(x)=-\infty\Rightarrow \lim e^{f(x)}=0$

Propriété 4 : La dérivée de $x\mapsto e^{x}$

La fonction $x\mapsto e^{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ $\left(e^{x}\right)'=e^{x}$.

Démonstration :

On pose $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)$ $f\left(x\right)=ln\left(x\right)$, donc $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ $f^{-1}\left(x\right)=e^{x}$.

Et on sait que $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$: $\left(f^{-1}\right)'\left(x\right)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}\left(x\right)\right)}$, d'où $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$: $\left(e^{x}\right)'=\dfrac{1}{\frac{1}{e^{x}}}=e^{x}$.

Application 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=x-\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$, et soit $\left(C_{f}\right)$ sa représentation graphique sur le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$: $f\left(x\right)=x+1-\dfrac{2e^{x}}{e^{x}+1}$ et déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$.

2) Montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$: $f\left(x\right)=x-1-\dfrac{2}{e^{x}+1}$ et déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$.

3) Étudier les branches infinies de $\left(C_{f}\right)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

4) Montrer de f est impaire.

5) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

6) Donner le tableau des variations de f .

7) Tracer $\left(C_{f}\right)$

Propriété 5 :

Si u est une fonction dérivable sur I , alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$(\forall\ x \in I):\quad \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$.

Application 6

Déterminer $f'(x)$ dans les cas suivants :

❶ $f(x) = e^{x^2+3x}$ ❷ $f(x) = e^{x-2ln(x+1)}$ ❸ $f(x) = \left(e^{2x} - e^{-x}\right)^2$ ❹ $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$

Propriété 6 :

Soit u une fonction dérivable sur I .

Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + c$ tel que $c \in \mathbb{R}$.

Application 7

Déterminer les primitives de f dans les cas suivants :

❶ $f(x) = 2e^{2x} - e^{-x}$ ❷ $f(x) = e^{5x+4}$ ❸ $\left(x^2+1\right)e^{x^3+3x}$ ❹ $f(x) = \dfrac{2x+1}{e^{x^2+x+1}}$

2) Fonction exponentielle de base a

Définition 2 et propriété 7 :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

• La fonction réciproque de $x \mapsto log_a(x)$ est appelée **fonction exponentielle de base** a qui est définie sur $\mathbb{R}$ et notée par $exp_a(x)$ ou a^x .

• Pour tout réel x on a : $a^x = e^{xln(a)}$

Démonstration

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $a^x = y \Leftrightarrow x = log_a(y)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{ln(y)}{ln(a)}$$

$$\Leftrightarrow xln(a) = ln(y)$$

$$\Leftrightarrow e^{xln(a)} = y\,.$$

D'où : $a^x = e^{xln(a)}$.

Exemple 2 :

$2^x = e^{xln(2)}$; $4^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}ln(4)} = e^{2\sqrt{2}ln(2)}$; $\sqrt{3}^x = e^{xln\left(\sqrt{3}\right)} = e^{\frac{x}{2}ln(3)}$

Remarque 2 :

$(\forall x \in \mathbb{R}):\ 1^x = 1$.

Propriétés 8 :

Soient x et y deux réels et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$a^{x+y} = a^x a^y$; $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$; $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$; $a^{rx} = (a^x)^r$; $exp_e(x) = e^x$

Application 8

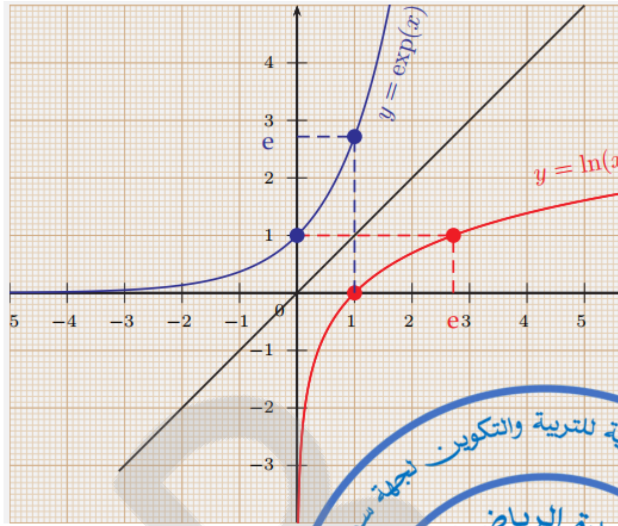
Montrer que : $\dfrac{9^{\frac{2}{ln(3)}} \times 8^{\frac{3}{ln(4)}}}{25^{\frac{4}{ln(5)}}} = \sqrt{e}$.

Résumé 8 : Fonctions exponentielles

Définition :

On appelle **fonction exponentielle népérienne,** notée exp, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien ln et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0;+\infty[)$; $exp(x) = y \Leftrightarrow x = ln(y)$.



Propriétés :

- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $(\forall x \in \mathbb{R})$: $e^x > 0$.
- $(\forall x \in]0;+\infty[)(\forall y \in \mathbb{R})$: $e^y = x \Leftrightarrow ln(x) = y$.
- $(\forall x \in \mathbb{R})$: $ln(e^x) = x$ et $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $e^{ln(x)} = x$.
- $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})$: $e^a > e^b \Rightarrow a > b$.
- $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})$: $e^a = e^b \Rightarrow a = b$.
- Soient x et y deux réels et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad (e^x)^r = e^{rx}$$

Limites de référence :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Propriétés :

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :$(\forall x \in \mathbb{R})$ $(e^x)' = e^x$.

- Si u est une fonction dérivable sur I, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$(\forall\ x \in I)$: $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$.

- Soit u une fonction dérivable sur I.

Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + c$ tel que $c \in \mathbb{R}$.

Fonction exponentielle de base a :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

- La fonction réciproque de $x \mapsto log_a(x)$ est appelée **fonction exponentielle de base** a qui est définie sur $\mathbb{R}$ et notée par $exp_a(x)$ ou a^x.
- Pour tout réel x on a : $a^x = e^{x ln(a)}$
- Soient x et y deux réels et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad ; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad ; \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad ; \quad a^{rx} = (a^x)^r \quad ; \quad exp_e(x) = e^x$$

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 2BACSPF-2BACSVT	**Série 8** **Fonctions exponentielles**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$e^x = 7$; $e^{x^2-3x+2} = 1$; $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$; $e^{x^2} = \frac{1}{16}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$e^{-x+7} > e^x$; $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$; $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0$

$\ln(e^x - 2e^{-x}) < 0$

Exercice 2 :

Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$; $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 3}$

$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$; $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 5}{e^x + 1}\right)$

Exercice 3 :

Simplifier les nombres suivants :

$A = \frac{e^{4x+5}}{e^{4x-3}}$; $B = \left(e^x\right)^7 \times \left(e^{-3x}\right)^2$

$C = \frac{e^{2x} \times \sqrt{e^{x+2}}}{e^{1,2} \times \sqrt[6]{e^{2x}}}$; $D = e^{\ln(x+1)} - e^{\ln(x)}$

Exercice 4 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 4x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x^3 - x^2 + 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - e^{3x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} - 5e^x + 4}{e^{2x} - 3}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{3x+4}{x-4}}$; $\lim\limits_{x \to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \sin(x) \times e^{\frac{2}{x}}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^{2x} - e^x + 1) - 2x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{1 + e^{2x}} - e^x\right)$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{2x^2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{e^x - 3}{e^x + 7}\right) + x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

Correction

Exercice 5 :

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

$f(x) = e^{-3x^2+2x-7}$; $f(x) = e^{\sqrt{2x-6}}$; $f(x) = \left(3x + e^{-4x}\right)^5$

$f(x) = \sin(x) \times e^{\cos(x)}$; $f(x) = \ln(4 + e^{5x})$;

$f(x) = e^{\frac{x+4}{x+1}}$; $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{-x} + 1}$; $f(x) = \sqrt[3]{e^{\frac{4}{x}}}$

Exercice 6 :

Déterminer les primitives de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x) = e^{-2x+5} + \sqrt{e^{3x}}$; $f(x) = xe^{x^2+1}$; $f(x) = e^{-x} + x - 1$

$f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{2e^{2x} + 3}}$; $f(x) = x^4 + \frac{1}{e^x + 1}$; $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

Exercice 7 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{4}$; $3^x > 9^x$; $10^{2x} + 2 \times 10^x - 3 > 0$

2) Calculer la dérivée des fonctions f et g telles que $f(x) = 2^{x^2+2x+2}$ et $g(x) = x^x$.

3) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4^x - 2^x}{3^x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4^x - 2^x}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Exercice 8 :

Considérons la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(e^x + \frac{1}{4}e^{-x}\right)$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) a) M.q $f'(x) = \frac{(2e^x - 1)(2e^x + 1)}{4e^{2x} + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variations de la fonction f.

3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
$f(x) = \ln(4e^{2x} + 1) - (x + 2\ln(2))$.

c) En déduire l'équation de l'asymptote oblique à la courbe représentative (C_f) au voisinage de $-\infty$.

4) Déterminer le point d'intersection de la courbe représentative (C_f) avec l'axe des ordonnées.

5) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C_f).

6) On considère l'équation $(E): f(x) = m$ où $m \in \mathbb{R}$

a) Discuter selon les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

b) Résoudre algébriquement l'équation (E).

Exercice 9 :

1) Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on a : $e^x \geq x + 1$

2) Montrer que $(\forall a; b \in \mathbb{R})$; $\frac{e^a + e^b}{2} \leq e^{\frac{a+b}{2}}$

Exercice 10 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$3^{-x} = 4^{1-2x}$; $9^{2x+1} = \frac{36}{6^x}$; $9^x + 2 \times 3^x - 8 = 0$

$-5 \times 4^{x+1} + 2 \times 4^{-x} = 3$; $3^x - 5\sqrt{3^x} + 4 = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} 7e^x - \ln(y) = 20 \\ 3e^x - 2\ln(y) = 7 \end{cases}$

3) Simplifier les nombres suivants : $A = 2^{-\frac{1}{\ln(2)}}$; $B = 3^{\frac{1}{\ln(9)}}$

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 2BACSPF-2BACSVT	**Série 8** **Fonctions exponentielles**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 11 :

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x par: $f(x)=x+\dfrac{4}{1+e^{x}}$, On désigne par (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=\left(\dfrac{1-e^{x}}{1+e^{x}}\right)^2$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que $I(0;2)$ est un point d'inflexion

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ et interpréter graphiquement le résultat trouvé.

4) Montrer que la droite (D) d'équation $y=x+4$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$

5) Etudier la position relative de (C_f) et (D).

6) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$, et que $-4<\alpha<-3$

7) En déduire que : $e^{\alpha}=-1-\dfrac{4}{\alpha}$.

8) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\left(e^{-x}-1\right)^2$

On désigne par (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : 2cm)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, et interpréter graphiquement le résultat.

2) Montrer que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique de (C_f) au voisinage de $-\infty$

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=2e^{-x}\left(1-e^{-2x}\right)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion.

5) Soit g la restriction de la fonction f sur $[0;+\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}

b) Montrer que $(\forall x\geq 0):\ g^{-1}(x)=-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$

6) Tracer (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 13 : S.R.2019

<u>Première partie :</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=2+8\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité : 1cm)

1) a) Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, et interpréter graphiquement le résultat.

b) Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$ on a :
$$f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$$

b) Vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R});\ x^2-2x+4>0$

c) Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;2]$, et strictement croissante sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $[2;+\infty[$.

d) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$

4) Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5) a) Vérifier que la fonction $H:x\mapsto \dfrac{1}{x}e^{x-4}$ est une primitive de la fonction $h:x\mapsto\dfrac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2;4]$.

b) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\ f(x)=2+8e^{x-4}-32\dfrac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$

c) Calculer l'intégrale $\int_2^4 e^{x-4}\,dx$.

d) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=4$.

Deuxième partie :

1) Soit g la fonction définie sur $[2;4]$ par:
$$g(x)=8\left(x-2\right)e^{x-4}-x^2$$

a) Calculer $g(4)$.

b) Vérifier que pour tout x de $[2;4]$,
$$g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2\left(e^{x-4}-1\right)$$

c) Vérifier que pour tout x de $[2;4]$: $e^{x-4}-1\leq 0$ puis en déduire que pour tout x de $[2;4]$: $g(x)\leq 0$.

2) a) Vérifier que $\forall x\in[2;4]$: $f(x)-x=\left(\dfrac{x-2}{x^2}\right)g(x)$

b) En déduire que pour tout x de $[2;4]$: $f(x)\leq x$.

3) On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0=3$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\ 2\leq u_n\leq 4$.

b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n), puis en déduire quelle est convergente.

c) Calculer la limite de (u_n).

09
Equations différentielles

1) Equations différentielles du premier ordre :

1-1 L'équation différentielle $y' = ay$ $(a \in \mathbb{R}^*)$

Activité :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-4x}$.

On pose $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$.

Montrer que : $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Définition :

Toutes les équations où l'inconnue est une fonction, et qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction et ses dérivées est appelée **équation différentielle.**

Propriété 1 :

Soit a un nombre réel non nul.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ke^{ax}$ où k est un nombre réel quelconque.

Remarque :

Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution unique f de l'équation différentielle $y' = ay$, vérifiant la condition $f(x_0) = y_0$.

Exemple :

1) Les solutions de l'équation $(E): y' + 2y = 0$ sont

2) Si f est une solution de l'équation (E) vérifiant la condition $f(0) = 3$.

Alors :

Application 1 :

1) Résoudre les équations différentielles suivantes : (E_1): $y' = 3y$; (E_2): $y' + 5y = 0$

2) a) Résoudre l'équation (E): $3y' - 2y = 0$.

b) Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(3) = -1$.

1-2 L'équation différentielle $y' = ay + b$

Propriété 2 :

Soient a et b deux nombres réels tel que $a \neq 0$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est un réel quelconque.

Application 2 :

1) Résoudre l'équation différentielle : $(E): y' + 2y - 4 = 0$

2) Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par le point $A(-\ln(2), 6)$

2) Equation différentielles du second ordre : $y'' + ay' + by = 0$

Définition :

Soient a et b deux nombres réels.

L'équation $r^2 + ar + b = 0$, où r est l'inconnue, s'appelle **l'équation caractéristique** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

Propriété 3 :

Soit Δ le discriminant de l'équation **caractéristique** $r^2 + ar + b = 0$ de l'équation différentielle $(E): y'' + ay' + by = 0$. On a :

	L'équation **caractéristique** admet	Les solutions de (E) sont les fonctions
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles r_1 et r_2	$y : x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$
$\Delta = 0$	Une seule solution réelle r	$y : x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{rx}$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées $p \pm iq$	$y : x \mapsto e^{px}\left(\alpha cos(qx) + \beta sin(qx)\right)$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

Cas particulier :

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$,sont les fonctions :

$y : x \mapsto acos(\omega x) + bsin(\omega x)y$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Application 3 :

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1) : y'' - 3y' + 2y = 0$; $(E_2) : y'' + 4y' + 4y = 0$; $(E_3) : y'' - 4y' + 13y = 0$.

2) a) Résoudre l'équation différentielle : $(E') : y'' - 5y' + 6y = 0$

b) Déterminer la solution g de l'équation (E') vérifiant les conditions initiales : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$

Résumé 9 : Equations différentielles

Equation différentielle linéaire du 1er ordre : $y' = ay + b$

Définitions :

1) L'équation suivante : $(E) : y' = ay + b$ ou a et b deux constante, est appelé équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1, ou y est la fonction inconnue.

2) On appelle solution de l'équation différentielle (E), toute fonction f qui vérifie (E)

Propriétés :

- Les solutions de $(E) : y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où k est un réel.
- L'équation différentielle (E) admet une **unique** solution f qui vérifie $f(x_0) = y_0$ où $(x_0;y_0) \in \mathbb{R}^2$

Equation différentielle linéaire du 2nd ordre : $y'' + ay' + by = 0$

- L'équation $r^2 + a.r + b = 0$, s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = 0$
- **Résolution d'une équation** $(E) : y'' + ay' + by = 0$:

Soit Δ le discriminant de l'équation **caractéristique**.

Δ	L'équation **caractéristique** admet	Les solutions de (E) sont les fonctions
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles r_1 et r_2	$y : x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$
$\Delta = 0$	Une seule solution réelle r	$y : x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{rx}$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées $p \pm iq$	$y : x \mapsto e^{px}\left(\alpha cos(qx) + \beta sin(qx)\right)$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

Cas particulier :

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$, sont les fonctions :

$y : x \mapsto acos(\omega x) + bsin(\omega x)y$ où $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : 2BACSPF-2BACSVT

Série 9
Equations différentielles

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 1 :

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1): y' = 2y \quad (E_2): y' = 3y \quad (E_3): y' = \frac{3}{2}y$

$(E_4): y' = \frac{-5}{3}y \quad (E_5): y' = \sqrt{6}y$

$(E_6): y' + 5y = 0 \quad (E_7): y' - 3y = 0$.

2) a) Résoudre l'équation différentielle (E_8) telle que :

$(E_8): 3y' - 2y = 0$.

b) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E_8) vérifiant $f(3) = 1$.

3) a) Résoudre l'équation différentielle (E_8) telle que :

$(E_8): 2y' - 3y = 0$.

b) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E_8) vérifiant $f(2) = 1$.

Exercice 2 :

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1): y' = 2y + 1 \quad (E_2): y' = 3y + 1$

$(E_3): y' = -3y - 1 \quad (E_4): y' = \sqrt{2}y + \frac{1}{2}$

$(E_5): 2y' + 2y = 1 \quad (E_6): 3y' + 3y = 1$

$(E_7): \frac{2}{3}y' - 2y = \frac{1}{4} \quad (E_8): y' - 3y = \frac{1}{4}$.

2) a) Résoudre l'équation différentielle (E_9) telle que :

$(E_9): 3y' - 5y - 2 = 0$.

b) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E_9) vérifiant la courbe (C_f) passe par le point $A(0;1)$.

3) a) Résoudre l'équation différentielle (E_{10}) telle que :

$(E_{10}) : 2y' - 9y - 3 = 0$.

b) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E_{10}) vérifiant la courbe (C_f) passe par le point $A(0;1)$.

Exercice 3 :

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1): y'' - 3y' + 2y = 0$

$(E_2): 4y'' + 8y' + 4y = 0$

$(E_3): y'' - y' + y = 0$

$(E_4): y'' - 6y' + 5y = 0$

$(E_5): 2y'' - 2\sqrt{6}y' + 3y = 0$

$(E_6): 2y'' - 3y' + 2y = 0$.

Correction

2) a) Résoudre l'équation différentielle (E_7) telle que :

$(E_7): y'' - 5y' + 6y = 0$.

b) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E_7) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

3) a) Résoudre l'équation différentielle (E_8) telle que :

$(E_8): 2y'' - 3y' + y = 0$.

b) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E_8) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

4) a) Résoudre l'équation différentielle (E_9) telle que :

$(E_9) : y'' - 9y' = 0$.

b) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E_9) vérifiant $f(\pi) = 2$ et $f'(\pi) = -1$

Exercice 4 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1): 5y' - 2y = 0 \quad (E_2): 3y'' + y' = 0$

$(E_3): y'' - y' + y = 0 \quad (E_4): y'' + 4y' + 4y = 0$

$(E_5): 2y'' - 5y = 0 \quad (E_6): 2y'' + 6y = 0$

$(E_7): y'' - 2y' + y = 0 \quad (E_8): y'' - 2y' + 2y = 0$

$(E_9): y'' + y' + y = 0 \quad (E_{10}): y'' + 6y' + 5y = 0$

Exercice 5 :

1) Résoudre l'équation différentielle (E) telle que :

$(E) : y'' - 4y' + 5y = 0$. .

2) Déterminer la solution f . de l'équation différentielle (E) . vérifiant $f(0) = 1$. et $f'(0) = -1$. .

Exercice 6 :

1) Résoudre l'équation différentielle (E) . telle que :

$(E) : y'' - 6y' + 8y = 0$. .

2) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Exercice 7 :

1) Résoudre l'équation différentielle (E_1) telle que :

$(E_1) : y'' - 2\cos(\theta)y' + y = 0$ où θ est un nombre réel différent de $k\pi$ et k un entier relatif.

2) Résoudre l'équation différentielle (E_2) telle que :

$(E_2): y'' - y' + \frac{1}{4}\cos(\theta)y = 0$ où θ est un nombre réel.

Exercice 8 :

Soit l'équation différentielle (E): $y' - y = \frac{e^x}{x^2}$. On se propose de résoudre (E) sur $]0;+\infty[$

1) Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y' - y = 0$

2) Montrer que $f(x) = \frac{e^x}{x}$ est une solution de (E)

3) a) Montrer que $(g - f)$ est solution de (E_0) sur $]0;+\infty[$ si et seulement si g est solution de (E)

b) Déduire les solutions de (E) sur $]0;+\infty[$

4) La vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre des bactéries en présence.

On note $N(t)$ le nombre de bactéries (en million) d'individu et $N'(t)$ la vitesse d'accroissement.

On suppose que $N(t)$ vérifies (E) et on pose $N(0) = N_0$

En combien de temps (t en seconde) le nombre de bactérie sera le double ?

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{2x}-5e^{x}+6=0$; $\left(e^{x}\right)^{15}\times e^{x^{2}+5}=\dfrac{e^{5x}}{e^{4}}$; $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-3}}>e^{-x+2}$

2) a) Résoudre l'équation différentielle : $(E):\ y''+4y=0$

b) Déterminer la solution g de l'équation (E) vérifiant les conditions initiales : $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ et $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$

Exercice 2 (Fonctions exponentielles)

I. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{2x}-2x$.

1) Déterminer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis donner le tableau des variations de g.

2) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$,$g(x)>0$.

II. Soit la fonction f qui définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=ln\left(e^{2x}-2x\right)$

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

b) Vérifier que : $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\dfrac{e^{2x}}{x}-2\right)\dfrac{ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2) a) Vérifier que $(\forall x\geq 0):1-\dfrac{2x}{e^{2x}}>0$ et que $2x+ln\left(1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)=f(x)$. ; b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c) Montrer que la droite d'équation $(D):y=2x$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

d) Montrer que $(\forall x\geq 0):f(x)-2x\leq 0$ puis déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (D) sur $[0,+\infty[$.

3) a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}):f'(x)=\dfrac{2\left(e^{2x}-1\right)}{g(x)}$. ; b) Donner le tableau des variations de f .

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et (D) sur le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 3 (Fonctions exponentielles)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^{2}$

Correction

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

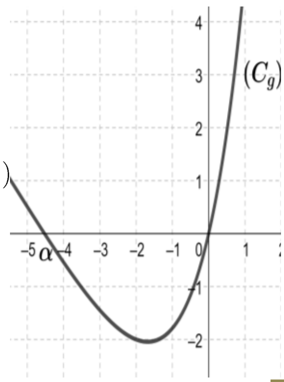
3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.

b) Etudier le signe $(f(x)-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ).

4) a) Montrer que $f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^{2}+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$.

c) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.



5) a) Montrer que $f''(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$; où $g(x)=(2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) A partir de la courbe ci-contre de la fonction g , déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (R.q : $g(\alpha)=0$)

c) Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.

6) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (R.q : $ln(4)\simeq 1.4$, $\alpha\simeq -4.5$ et $f(\alpha)\simeq -3.5$)

7) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(ln4)$.

بسم الله الرحمن الرحيم

DS4

2BACSPF-A

2heures

Aissa HIYAB

- ✓ **Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.**
- ✓ **Chaque tentative de tricher vaut un zéro.**

Exercice 1 (4points)

1) a) Résoudre l'équation différentielle (E_1) telle que : $(E_1): y' = 3y + 6$ 1pt

b) Déterminer la solution y de l'équation différentielle (E_1) vérifiant $y(0) = 3$ 1pt

2) Résoudre l'équation différentielle (E_2) telle que : (E_2) : $y'' - 8y' + 7y = 0$ 2pt

Exercice 2 (16points)

I.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + e^x(x-1)$.

1) Montrer que $g'(x) = xe^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis donner le tableau de variations de g 1.5pt

2) En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ 0.5pt

II.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-4)e^x + 2x + 2$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ 1.5pt

b) Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} = \left(2 - \dfrac{4}{x}\right)e^x + 2 + \dfrac{2}{x}$ et déduire la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ 1pt

c) Montrer que la droite (D): $y = 2x + 2$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ 1pt

2) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (D) 1pt

3) a) Montrer que $f'(x) = 2g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ 1.5pt

b) Donner le tableau des variations de f 0.5pt

4) Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et déduire que $I(0;-2)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$ 1pt

5) Donner l'équation de (T) la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point I 0.5pt

6) a) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α tel que $\alpha \in [1;2]$ 0.5pt

b) Montrer que $\alpha \neq 2$ et que $e^\alpha = -\dfrac{\alpha+1}{\alpha-2}$ 0.5pt

7) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. 0.5pt

b) Déterminer $f^{-1}(6)$ et $f^{-1}(0)$ 0.5pt

8) Tracer $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$, (D) et (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (on donne $\alpha \approx 1,4$) 2pt

9) a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^\alpha xe^x dx = (\alpha - 1)e^\alpha + 1$ 1pt

b) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$, la droite (D) et les droites d'équations :

$x = 0$ et $x = \alpha$. Montrer que $\mathcal{A} = 8 \times \dfrac{\alpha^2 - 5\alpha + 3}{\alpha - 2} cm^2$ 1pt

بسم الله الرحمن الرحيم

DS4

2BACSPF-B

2heures

Aissa HIYAB

- ✓ **Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.**
- ✓ **Chaque tentative de tricher vaut un zéro.**

Exercice 1 (4points)

1) a) Résoudre l'équation différentielle (E_1) telle que : $(E_1): y' = 2y + 4$ ……………………………….1pt

b) Déterminer la solution y de l'équation différentielle (E_1) vérifiant $y(0) = -3$ ……………………….1pt

2) Résoudre l'équation différentielle (E_2) telle que : (E_2) $: y'' - 7y' + 6y = 0$ ………………………………….2pt

Exercice 2 (16points)

I.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x-1)e^x + 1$.

1) Montrer que $g'(x) = xe^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis donner le tableau de variations de g ………………1.5pt

2) En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ ……………………………………………………….0.5pt

II.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 3 + (3x-6)e^x$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ …………………………………………1.5pt

b) Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} = 3 + \dfrac{3}{x} + \left(3 - \dfrac{6}{x}\right)e^x$ et déduire la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ ……………………………………………………………………1pt

c) Montrer que la droite (D): $y = 3x + 3$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ ……….1pt

2) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (D) ……………………………………………………1pt

3) a) Montrer que $f'(x) = 3g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ ………………………………………………1.5pt

b) Donner le tableau des variations de f ………………………………………………………0.5pt

4) Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et déduire que $I(0;-3)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$ ……………….1pt

5) Donner l'équation de (T) la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point I ………………………………………….0.5pt

6) a) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α tel que $\alpha \in [1;2]$….0.5pt

b) Montrer que $\alpha \neq 2$ et que $e^\alpha = -\dfrac{\alpha+1}{\alpha-2}$ ……………………………………………0.5pt

7) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. ….0.5pt

b) Déterminer $f^{-1}(9)$ et $f^{-1}(0)$ ……………………………………………………………0.5pt

8) Tracer $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$, (D) et (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (on donne $\alpha \approx 1,4$)……………………2pt

9) a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^\alpha xe^x dx = (\alpha-1)e^\alpha + 1$……………………1pt

b) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$, la droite (D) et les droites d'équations :

$x = 0$ et $x = \alpha$. Montrer que $\mathcal{A} = 12 \times \dfrac{\alpha^2 - 5\alpha + 3}{\alpha - 2} cm^2$ ………………………………………1pt

10

Calcul intégral

1) Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Activité 1 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x)=3x^2-1$.

Déterminer deux primitives F et G de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1) Calculer $F(2)-F(0)$, $G(2)-G(0)$. Que remarquez-vous ?

2) Le nombre $F(2)-F(0)$ ne dépend pas du choix d'une primitive de la fonction f .

Le nombre $F(2)-F(0)$ s'appelle intégrale de la fonction f de 0 à 2 elle est notée $\int_0^2 f(x)dx$.

Définition 1 :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$.

Le nombre $F(b)-F(a)$ est appelé **intégrale** de f de a à b et on écrit : $\boxed{1}$ $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

Exemple 1 :

Calculons l'intégrale suivante $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$.

Donc : $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx=\int_0^1 (x+1)'\sqrt{x+1}dx$

$$=\int_0^1 (x+1)'(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x+1)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$$ (Car la fonction $\frac{1}{r+1}u^{r+1}$ est une primitive de la fonction $u'\times u^r$)

$$=\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$$

Intégrales de base :

En utilisant les primitives des fonctions usuelles et les opérations sur elles (chapitre 5) on obtient le tableau suivant :

$\int_a^b c dx=[cx]_a^b$	$\int_a^b u'(x)dx=[u(x)]_a^b$
$\int_a^b x^r dx=\left[\frac{1}{r+1}x^{r+1}\right]_a^b$	$\int_a^b (u'+v')dx=[u+v]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b$	$\int_a^b (\alpha\times u')dx=\alpha[u]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_a^b$	$\int_a^b \frac{u'}{u^2}dx=\left[-\frac{1}{u}\right]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{x}dx=[ln(\|x\|)]_a^b$	$\int_a^b \frac{u'}{u}dx=[ln(\|u\|)]_a^b$
$\int_a^b sin\, x dx=[-cos(x)]_a^b$	$\int_a^b u'e^u dx=[e^u]_a^b$
$\int_a^b cos\,(x)dx=[sin(x)]_a^b$	$\int_a^b u'\times u^r dx=\left[\frac{1}{r+1}u^{r+1}\right]_a^b$
$\int_a^b (1+tan^2(x))dx=[tan(x)]_a^b$	$\int_a^b \frac{u'}{\sqrt{u}}dx=\left[2\sqrt{u}\right]_a^b$
$\int_a^b e^x dx=[e^x]_a^b$	$\int_a^b \frac{u'}{\sqrt[n]{u^{n-1}}}dx=\left[n\sqrt[n]{u}\right]_a^b$

$\int_a^b u'sin(u)dx=[-cos(u)]_a^b$

$\int_a^b u'cos(u)dx=[sin(u)]_a^b$

Application 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_1^e \frac{1}{x}dx$; $\int_0^2 (x+4)dx$; $\int_{e^2}^{e^4} \frac{ln(x)}{x}dx$; $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(x)dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2x)dx$

Remarque 1 :

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer la variable x par n'importe quelle autre lettre.

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \ldots$

Conséquences :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous a,b et c de I on a :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasles).

Exemple 2 :

$$\int_{-3}^{2} |x|\, dx = \int_{-3}^{0} |x|\, dx + \int_{0}^{2} |x|\, dx = \int_{-3}^{0} -x dx + \int_{0}^{2} x dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = \frac{13}{2}$$

Application 2 :

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_{-1}^{1} \frac{2|x|}{x^2+1} dx$ $\qquad$ $\int_{-1}^{5} |x^2 - 4x|\, dx$ $\qquad$ $\int_{0}^{2} |e^{-x+1} - 1|\, dx$

Propriétés 1 : Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ et $k \in \mathbb{R}$.

- $\boxed{2}$ $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\boxed{3}$ $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

Application 3 :

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(3x)cos(x)dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin(3x)sin(x)dx$.

1) Vérifier que $cos(3x)cos(x) + sin(3x)sin(x) = cos(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Vérifier que $cos(3x)cos(x) - sin(3x)sin(x) = cos(4x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Calculer $I+J$ et $I-J$ puis en déduire I et J .

2) Intégrale et ordre – La valeur moyenne

2-1 Intégrale et ordre :

Propriétés 2 :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soit $a,b \in I$.

- Si $(\forall x \in I)$; $f(x) \geq 0$ et $a \leq b$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $(\forall x \in I)$; $f(x) \leq g(x)$ et $a \leq b$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Application 4 :

1) Montrer que : $\int_1^2 ln(x^2+1)dx \geq 0$.

2) Montrer que : $-\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{sin(x)}{x^2} dx \leq \frac{1}{2}$.

2-2 Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment :

Propriété 3 et Définition 2 :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

- Il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.
- Le nombre $\boxed{4}$ $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$

Exemple 3 :

La valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[1,3]$ est $\dfrac{1}{2}\int_1^3 \dfrac{2x}{1+x^2}\,dx$. C'est-à-dire : $\dfrac{1}{2}\left[ln\left(x^2+1\right)\right]_1^3 = \dfrac{ln(5)}{2}$

Application 5 :

Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \dfrac{ln^2(x)+x}{x}$ sur l'intervalle $[1;e]$.

3) Techniques de calcul d'intégrales

3-1 Utilisation des primitives :

Propriété 4 :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que sa dérivée u' est continue sur I.

Pour tout $(a,b) \in I^2$ on a : $\boxed{5}$ $\int_a^b u'(x)dx = [u(x)]_a^b$

Application 6 :

Calculer les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 te^{t^2}dt$; $J = \int_2^e \dfrac{1}{x(ln(x)+1)}dx$; $K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} tan(x)dx$ et $L = \int_0^1 \dfrac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}dx$

Application 7 :

1) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. ; 2) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$.

3-2 Intégration par parties :

Propriété 5 :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que ses dérivées u' et v' sont continues sur I.

Pour tout $(a,b) \in I^2$ on a : $\boxed{6}$ $\int_a^b u'(x)\times v(x)dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)dx$.

Démonstration :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a,b]$ telles que u' et v' sont continues sur $[a,b]$

On a : $(\forall x \in [a,b]); (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Alors : $\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$

D'où $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

Exemple 4 :

Calculons l'intégrale $I = \int_0^1 xe^x dx$.

Posons $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$, alors $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$. Il s'ensuit $I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1$.

Remarque 2 :

Le choix des fonctions $u'(x)$ et $v(x)$ n'est pas arbitraire. Leur bonne sélection joue un rôle clé dans cette technique.

Dans l'exemple précédent si notre choix est $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = e^x \end{cases}$, alors $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$.

On obtient donc $\int_0^1 xe^x dx = \left[\dfrac{1}{2}x^2e^x\right]_0^1 - \int_a^b \dfrac{1}{2}x^2e^x dx$ ce qui rend le calcul de l'intégrale voulue est très compliqué.

La règle du LPET :

Pour calculer un intégral de la forme $\int_a^b u'(x)\times v(x)dx$ ou $\int_a^b v(x)\times u'(x)dx$ en utilisant l'intégration par parties, il existe une règle qui n'est pas systématique mais qui peut t'aider à choisir qui est $u'(x)$ et qui est $v(x)$.

C'est ce qu'on appelle **la règle du LPET**.

L pour logarithme (ln), P pour polynôme, E pour exponentielle et T pour trigonométrique.

On choisit pour $v(x)$ en priorité les fonctions L, puis les fonctions P, puis E et enfin T.

Application 8 :

En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^e x^2 \ln x dx$; $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x-1)e^{-\frac{x}{2}} dx$; $I_3 = \int_2^e \ln(x+2) dx$ et $I_4 = \int_0^\pi x^2 \cos x dx$.

3-3 Décomposition des fractions rationnelles en une somme de fractions rationnelles :

Application 9 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 4}{x-1}$.

1) Déterminer les nombres réels a, b et c pour que l'on ait pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

2) En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_2^3 f(x) dx$.

3-4 Linéarisation des fonctions trigonométriques :

Application 10 :

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\cos^3(x) = \dfrac{3}{4}\cos(x) + \dfrac{1}{4}\cos(3x)$

2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3(x) dx$.

4) Calcul d'aires et de volumes

4-1 Calcul des aires :

Activité 2 :

On considéra la fonction définie par : $f(x) = -x + 2$ et $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité (1cm)

1) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et colorier le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$, puis donner une valeur de son aire en unités d'aires.

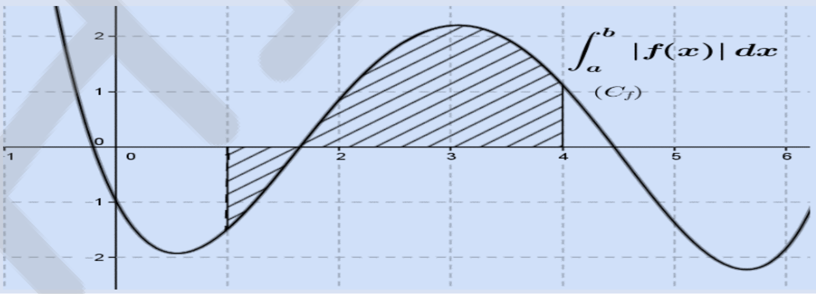
2) Calculer $\int_{-1}^{3} |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$. Que peut-on déduire ?

Propriété 6 :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- L'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à

$\boxed{7}$ $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx$ (*en unité d'aire*)



Application 11 :

Le plan est apporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1cm$ et $\|\vec{j}\| = 2cm$

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin(x)$

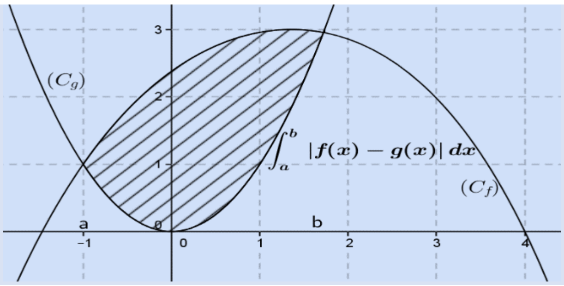
Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de f et les droites d'équations : $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

Propriété 7 :

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$, $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal.

Soit (Δ) le domaine délimité par les courbes $(\mathcal{C}_f), (\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

- L'aire du domaine (Δ) en unité d'aire est donnée par : $\boxed{8}$ $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.



Application 12 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = 2x^2 + 1$ et $g(x) = x^2 + x + 1$

Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions f et g et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

4-2 Calcul des volumes :

Propriété 8 :

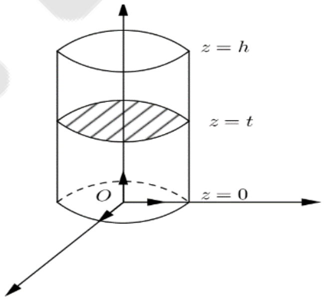
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Soit (Σ) un solide limité par les deux plans $z = a$ et $z = b$

Soit $S(t)$ l'aire de l'intersection du solide (Σ) avec le plan $z = t$ $(a \le t \le b)$.

- Si $t \to S(t)$ est continue sur $[a,b]$, alors le volume de ce solide (Σ) est $V = \int_a^b S(t)dt$. (en unité de volume).

Exemple 5 :



Calculons le volume V d'un cylindre de rayon R et de hauteur h.

L'intersection du plan $z = t$ avec le cylindre est un disque d'aire $S(t) = \pi R^2$

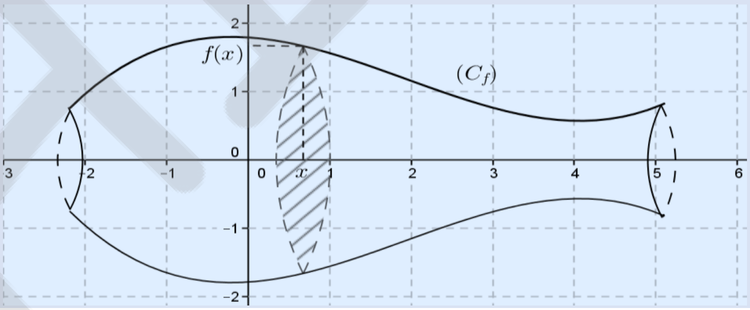
Puisque $t \to S(t)$ est continue sur $[0,h]$ alors le volume de cylindre est :

$V = \int_0^h S(t)dt = \int_0^h \pi R^2 dt = \pi R^2 \int_0^h dt = \pi R^2 h \ cm^3$.

Propriété 9 :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, et (C_f) sa courbe représentative.

- Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe (C_f) autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par la formule : $\boxed{9}$ $V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$ (en unité de volume).



Exemple 6 :

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction $x \to e^x$ sur $[0;1]$

Autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par :

$$V = \pi\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \left(e^x\right)^2 dx = \pi\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_0^1 = \frac{\pi\left(e^2 - 1\right)}{2} \quad u.a$$

Application 13 :

Soit g la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = xe^{\frac{1}{2}x}$.

1) Calculer Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction g autour de l'axe des abscisses un tour complet.

2) Répondre à la même question pour la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{cos(x)}$ sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

Résumé 10 : Calcul intégral

Intégrale d'une fonction sur un segment :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$.

Le nombre $F(b)-F(a)$ est appelé **intégrale** de f de a à b et on écrit : $\boxed{1}$ $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

Intégrales de base :

$\int_a^b c\,dx = [cx]_a^b$	$\int_a^b u'(x)dx = [u(x)]_a^b$
$\int_a^b x^r\,dx = \left[\frac{1}{r+1}x^{r+1}\right]_a^b$	$\int_a^b (u'+v')dx = [u+v]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b$	$\int_a^b (\alpha \times u')dx = \alpha[u]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_a^b$	$\int_a^b \frac{u'}{u^2}dx = \left[\frac{1}{u}\right]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \left[\ln(\lvert x\rvert)\right]_a^b$	$\int_a^b \frac{u'}{u}dx = \left[\ln(\lvert u\rvert)\right]_a^b$
$\int_a^b \sin x\,dx = [-\cos(x)]_a^b$	$\int_a^b u'e^u dx = \left[e^u\right]_a^b$
$\int_a^b \cos(x)dx = [\sin(x)]_a^b$	$\int_a^b u' \times u^r dx = \left[\frac{1}{r+1}u^{r+1}\right]_a^b$
$\int_a^b \left(1+\tan^2(x)\right)dx = [\tan(x)]_a^b$	$\int_a^b \frac{u'}{\sqrt{u}}dx = \left[2\sqrt{u}\right]_a^b$
$\int_a^b e^x dx = \left[e^x\right]_a^b$	$\int_a^b \frac{u'}{\sqrt[n]{u^{n-1}}}dx = \left[n\sqrt[n]{u}\right]_a^b$
$\int_a^b u'\sin(u)dx = [-\cos(u)]_a^b$; $\int_a^b u'\cos(u)dx = [\sin(u)]_a^b$	

Propriétés de l'intégrale :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- **Linéarité de l'intégrale :**

  $\boxed{2}$ $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et

  $\boxed{3}$ $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$
- **Additivité ou relation de Chasles** :

  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- **Positivité de l'intégrale** : Si $f(x)\geq 0$ sur I et si $a\leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- **Intégrale et ordre :** Si $f(x)\leq g(x)$ sur I et si $a\leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- **Valeur moyenne d'une fonction** :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

- Il existe au moins un réel $c\in[a,b]$ tel que :

$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

- Le nombre $\boxed{4}$ $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$

Techniques de calcul d'une intégrale :

- **Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive.**

  La connaissance des primitives de fonctions usuelles permet de calculer des intégrales. $\boxed{5}$ $\int_a^b u'(x)dx = [u(x)]_a^b$
- **Intégration par parties :** $\boxed{6}$ $\int_a^b u'(x)\times v(x)dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)dx$
- **Décomposition des fractions rationnelles en une somme de fractions rationnelles**
- **Linéarisation des fonctions trigonométrique.**

Quelques applications du calcul intégral :

Aires de surfaces planes

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.

- L'aire de la surface délimitée par (C_f) , l'axe des **abscisses** et les droites $(D): x=a$ et $(\Delta): x=b$ est

  $\boxed{7}$ $\mathcal{A} = \left(\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$
- L'aire de la surface délimitée par (C_f) , (C_g) et les droites $(D): x=a$ et $(\Delta): x=b$

Est égale à $\boxed{8}$ $\left(\int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

Volume d'un solide de révolution

- Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe (C_f) autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par la formule : $\boxed{9}$ $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$ (**unité de volume**)

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 2BACSPF-2BACSVT	**Série 10** **Calcul intégral**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$ $\qquad$ $I_2=\int_1^0(x+e^x)dx$

$I_3=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$ $\qquad$ $I_4=\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}x\cos(x^2)dx$

$I_5=\int_2^3\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}dx$ $\qquad$ $I_6=\int_1^2\frac{x}{(x^2-4)^2}dx$

$I_7=\int_{-1}^1 x|x|dx$ $\qquad$ $I_8=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2(x)dx$

$I_9=\int_0^1 t\left(t^2+1\right)^3dt$ $\qquad$ $I_{10}=\int_0^3 x\sqrt{x+1}\ dt$

$I_{11}=\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ dt$ $\qquad$ $I_{12}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\sin^3(x)\ dx$

$I_{13}=\int_0^3|2t-1|\ dt$ $\qquad$ $I_{14}=\int_2^1\frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}dx$

$I_{15}=\int_1^e\frac{\ln(x)}{x}dt$ $\qquad$ $I_{16}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(x)dt$

Exercice 2 :

Calculer les intégrales suivantes par la méthode d'intégration par parties :

$I_1=\int_1^e\ln(x)dx$ $\qquad$ $I_2=\int_1^e x\ln(x)dx$

$I_3=\int_0^1 x e^x\,dx$ $\qquad$ $I_4=\int_2^1\frac{1}{x^3}.e^{\frac{1}{x}}dx$

$I_5=\int_1^e x^2\ln(x)dx$ $\qquad$ $I_6=\int_0^1 xe^{2x}dx$

$I_7=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$ $\qquad$ $I_8=\int_1^e\frac{\ln(x)}{x^2}.dx$

$I_9=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos(x)dx$ $\qquad$ $I_{10}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos(x)dx$

$I_{11}=\int_0^{\pi}x\sin(x)dx$ $\qquad$ $I_{12}=\int_{10}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin(x)dx$

$I_{13}=\int_0^x e^t\cos(t)dt$ $\qquad$ $I_{14}=\int_1^{\sqrt{6}}2x^3\sqrt{3+x^2}\,dx$

Exercice 3 :

On considère les deux intégrales :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2(x)}dx \quad \text{et} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4(x)}dx$$

1) Calculer I .

2) Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par

$$f(x)=\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$$

a) Monter que : $f'(x)=\frac{3}{\cos^4(x)}-\frac{2}{\cos^2(x)}$.

b) Déterminer une relation entre I et J .

c) En déduire la valeur de J .

Exercice 4 :

Considérons les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}\ ;\ J=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \ \text{ et } \ K=\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,dx$$

1) Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right).$$

Correction

a) Calculer la dérivée de f .

b) En déduire la valeur de I .

2) a) Vérifier que $J+2I=K$.

b) Monter que $K=\sqrt{3}-J$

c) En déduire les valeurs de J et de K .

Exercice 5 :

Soit $f:x\mapsto\frac{1}{e^x(1-x)}$.

1) Etudier les variations de.

2) En déduire que : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)$; $1\le f(x)\le\frac{2}{\sqrt{e}}$.

3) a) Vérifier que : $1+x+\frac{x^2}{1-x}=\frac{1}{1-x}$

b) Montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx+\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{e^x(1-x)}$

c) Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x}{e^x}\,dx$.

d) Montrer que : $\frac{1}{24}\le\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\,f(x)dx\le\frac{1}{12\sqrt{e}}$.

Exercice 6 :

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^{-x}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 4 cm).

1) Déterminer l'aire $S(\lambda)$, de la surface délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$ (avec $\lambda>0$).

2) Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}S(\lambda)$.

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$f(x)=x+3+\frac{2(1-\ln(x))}{\sqrt{x}}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que la droite $(D):y=x+3$ est une asymptote à la courbe (C_f) .

b) Etudier la position de (C_f) et (D) .

2) Déterminer l'aire $S(\lambda)$ de la surface comprise entre la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x=1$, et $x=\lambda$ avec $\lambda\ge1$.

Exercice 8 :

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x-2)^3}$.

1) Déterminer D_f

2) Déterminer les réels a et b tel que :

$$(\forall x\in D_f):f(x)=\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{(x-2)^3}$$

3) Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Exercice 9 :

Pour tout réel positif a, on définit $I(a)=\int_1^a \frac{ln(x)}{x^2}dx$

1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(a)=\dfrac{ln(a)-1}{a^2}+1$.

2) En déduire $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a)$

3) On définit maintenant $J(a)=\int_1^a \frac{ln(x)}{x^2+1}dx$.

4) Vérifier que : $(\forall x\geq 1)$; $x^2\leq x^2+1\leq 2x^2$, puis montrer que $\frac{1}{2}I(a)\leq J(a)\leq I(a)$.

Exercice 10 :

1) a) Vérifier que $\dfrac{1}{(e^x+1)^2}=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

a) En déduire la valeur de $J=\int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale suivant $K=\int_0^1 \frac{x\,e^x}{(e^x+1)^3}\,dx$

2) a) En linéarisant $cos^3(x)$, montrer que $cos^3(x)=\frac{1}{4}\big(cos(3x)+3cos(x)\big)$

b) Calculer l'intégrale $J=\int_0^{\pi} cos^3(x)dx$

Exercice 11 : Bac 2002

1) Calculer l'integrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{cos^2(x)}-4\cos(2x)\right)dx$.

2) Montrer que $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)'=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ pour tout réel x

puis calculer $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$.

Exercice 12 : Bac 2003

1) Vérifier, pour tout réel x, que :
$sin^2x.cos^3x=cosx.sin^2x-cosx.sin^4x$.

2) Calculer l'integrale $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x.cos^3x dx.$

Exercice 13 : Bac 2001

1) Vérifier, pour tout $x\in[0;1]$, que :
$\dfrac{x^3+x}{x+1}=x^2-x+2-\dfrac{2}{x+1}$.

2) En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer l'integrale $I=\int_0^1\left(3x^2+1\right)ln\left(x+1\right)dx.$

Exercice 14 : Bac 2015

Soit f la fonction définie sur $]0;e[\cup]e;+\infty[$ par :
$f\left(x\right)=\dfrac{1}{x\left(1-lnx\right)}$ et $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ tel que $\vec{i}=2cm$.

1) Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x\left(1-lnx\right)}dx=ln2$. (Remarquer que $\dfrac{1}{x\left(1-lnx\right)}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\left(1-lnx\right)}$)

2) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\sqrt{e}$.

Exercice 15 : Session Rattrapage 2017

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:
$f\left(x\right)=x+1-\left(x^2+1\right)e^x$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ tel que $\vec{i}=2cm$

1) Montrer que $H:x\mapsto\left(x-1\right)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h:x\mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que:
$\int_{-1}^{0}xe^xdx=\frac{2}{e}-1$.

2) En utilisant une intégration par parties, Montrer que :
$\int_{-1}^{0}\left(x^2+1\right)e^xdx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

3) Calculer en cm^2 ,l'aire du Domaine plan délimité par $(\mathcal{C}_f)$, la droite (D) d'équation $y=x+1$ et les droites d'équations : $x=-1$ et $x=0$.

Correction

11
Géométrie de l’espace

Rappel

1) Définition vectorielle d'une droite de l'espace :

- Toute droite de l'espace est définie par un point et un vecteur directeur.
- Tous deux points distincts A et B de l'espace définissent une unique droite notée (AB).

➢ **Propriété :**

Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
(C'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$), on le note par : $D\left(A;\vec{u}\right)$

$M \in D\left(A;\vec{u}\right) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

2) Définition vectorielle d'un plan de l'espace :

➢ Tout plan de l'espace peut être défini par :
- Trois points A, B et C non alignés. (On le note par (ABC)).
- Deux droites sécantes ou strictement parallèles.
- Un point et deux vecteurs non colinéaires (sont dites vecteurs directeurs de ce plan).

➢ **Propriété :**

Soit A un point et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
Le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
(C'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ avec $\alpha;\beta \in \mathbb{R}$), on le note par : $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$

$M \in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right) \Leftrightarrow \exists \alpha;\beta \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

3) Coordonnées d'un point et d'un vecteur dans l'espace

- $M(x;y;z) \in (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- I *le milieu du segment* $[AB] \Leftrightarrow I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\dfrac{y_A + y_B}{2};\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

- $\vec{u}(x;y;z) \in (\vec{i};\vec{j};\vec{k}) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- $\vec{u}(x;y;z) \Rightarrow \alpha\vec{u}(\alpha x;\alpha y;\alpha z)$
- $\vec{u}(x;y;z)$ *et* $\vec{v}(x';y';z') \Rightarrow \vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$
- $\vec{u}(x;y;z) = \vec{v}(x';y';z') \Leftrightarrow x = x'$ *et* $y = y'$ *et* $z = z'$

4) Colinéarité

$\vec{u}(x;y;z)$ *et* $\vec{v}(x';y';z')$ *sont colinéaires*

$\Leftrightarrow$

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0\,,\quad \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0 \quad et \quad \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$$

5) Déterminant

$\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ *et* $\vec{w}(x'';y'';z'')$ *trois vecteurs*

$$det(\vec{u},\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

6) Coplanarité et alignement

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *sont coplanaires*
  $\Leftrightarrow det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$
- A, B, C *et* D *sont coplanaires*
  $\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) = 0$
- A, B *et* C *sont alignés*
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires.*

Soit (D) *la droite passant par* $A(x_A;y_A;z_A)$ *et dirigée par le vecteur* $\vec{u}(a;b;c)$

7) Représentation paramétrique de la droite (D)

$$(D):\begin{cases} x = x_A + a\times t \\ y = y_A + b\times t \\ z = z_A + c\times t \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$

8) Deux équations cartésiennes de la droite (D)

➢ *Si* $a \neq 0$, $b \neq 0$ *et* $c \neq 0$, *alors* (D): $\dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{y - y_A}{b} = \dfrac{z - z_A}{c}$

➢ *Si* $c = 0$ *alors* (D): $\begin{cases} \dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{y - y_A}{b} \\ z - z_A = 0 \end{cases}$

➢ *Si* $a = 0$ *et* $b = 0$ *alors* (D): $\begin{cases} x - x_A = 0 \\ y - y_A = 0 \end{cases}$

Soit (P) *la droite passant par un point* $A(x_A;y_A;z_A)$ *et dirigée par les vecteurs* $\vec{u}(a;b;c)$ *et* $\vec{v}(a';b';c')$

9) Représentation paramétrique du plan (P)

$$(P):\begin{cases} x = x_A + a\times\alpha + a'\times\beta \\ y = y_A + b\times\alpha + b'\times\beta \\ z = z_A + c\times\alpha + c'\times\beta \end{cases} \quad / (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

10) Equation cartésienne du plan (P)

$$(P): \begin{vmatrix} x - x_A & a & a' \\ y - y_A & b & b' \\ z - z_A & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

(Cette équation est de la forme (P): $\alpha x + \beta y + \delta z + d = 0$ *)*

Dans tout ce qui suit l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) Produit scalaire dans l'espace et applications

Définition :

Activité 1 :

On considère dans l'espace les points $A(2;1;3)$, $B(1;1;-2)$ et $C(2;-1;0)$

1) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
   b) Etudier l'alignement des points A, B et C.
2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   b) Est-ce que le point $D(4,-3,2)$ appartient à (AB) ?
   c) Donner deux équations cartésiennes de la droite (AB).
3) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

Définition 1 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan (P) contenant les points A, B et C .
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan (P) .

Remarque 1 :

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan s'étendent dans l'espace.

Conséquences :

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). On a $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace, alors $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times cos\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)$.
- Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$ est un nombre positif, noté $\vec{u}^2$, et appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.

Propriété 1 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et $k\in\mathbb{R}$.

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$; • $(k\vec{u}).\vec{v}=k(\vec{u}.\vec{v})$;
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$; • $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$.

Expression analytique du produit scalaire dans l'espace :

Propriété 2 :

Pour tous vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ de l'espace on a : $\boxed{1}$ $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

Propriétés 3 et définition 2 :

- Si $\vec{u}(x;y;z)$ alors $\boxed{2}$ $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Si $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ deux points de l'espace, alors $\boxed{3}$ $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.
- $\boxed{4}$ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont dites orthogonaux si $\vec{u}.\vec{v}=0$. On écrit $\vec{u}\perp\vec{v}$

Application 1 :

Soient $A(2,-1,1)$, $B(5,3,1)$ et $C(6,-4,1)$ trois points de l'espace.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2) Calculer AB, AC et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
3) En déduire la nature du triangle ABC.

Équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

Rappel :

1) Tout plan de l'espace peut être défini par :

- Trois points A, B et C non alignés. (On le note par (ABC)).
- Deux droites sécantes ou strictement parallèles.
- Un point et deux vecteurs non colinéaires (sont dites vecteurs directeurs de ce plan).
- Soit (P) le plan passant par un point $A(x_A;y_A;z_A)$ et dirigée par les vecteurs $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$

2) Le plan (P) est un ensemble des points $M(x;y;z)\in(D)$ de l'espace vérifiant une équation de type :

$$(P): \begin{vmatrix} x - x_A & a & a' \\ y - y_A & b & b' \\ z - z_A & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation est de la forme $(P): \alpha x + \beta y + \delta z + d = 0$ où $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ et $(\alpha;\beta;\delta) \neq (0;0;0)$

L'équation $\alpha x + \beta y + \delta z + d = 0$ est appelée **une équation cartésienne** du plan (P)

Propriétés 4 et définition 3 :

- $\boxed{5}$ Le système : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad / t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + ct \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite passant par le point

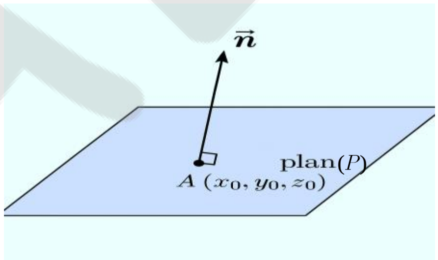
$A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c)$, on le note par $D(A;\vec{u})$

- $\boxed{6}$ Tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à un plan est appelé vecteur normal a ce plan.
- Tout plan de l'espace peut être défini par un point et un vecteur normal.
- $\boxed{7}$ Le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal au plan d'équation cartésienne $(P): \ ax + by + cz + d = 0$
- L'équation cartésienne du plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ se déduit par l'équivalence

suivant : $\boxed{8}$ $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

Exemple :

Déterminons une équation cartésienne du plan (P) passant par $A(1,-2,3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1,-3,-2)$.



Méthode 1 :

Soit $M(x,y,z)$ un point de (P). On a $\overrightarrow{AM}(x-1, y+2, z-3)$.

On a $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1) - 3(y+2) - 2(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3y - 2z - 1 = 0$$

Méthode 2 :

Puisque (P) est de vecteur normal $\vec{n}(1,-3,-2)$, alors $(P): \ x - 3y - 2z + d = 0$. (d'après la règle $\boxed{7}$)

Or $A \in (P)$, alors $x_A - 3y_A - 2z_A + d = 0$ c'est-à-dire $1 - 3(-2) - 2(3) + d = 0$ donc $d = -1$.

D'où $(P): x - 3y - 2z - 1 = 0$.

Dans les exercices, il est préférable d'utiliser la deuxième méthode.

Application 2 :

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ dans les cas suivants :

a) $A(1,0,5)$ et $\vec{n}(-1,1,0)$.

b) $A(\sqrt{2},-2,5)$ et $\vec{n}(-1,1,0)$.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par $A(2,-1,3)$ et orthogonal à la droite

$$(D): \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -3 + t \quad / t \in R \\ z = 4 - 2t \end{cases}.$$

3) Donner une équation cartésienne du plan médiateur (P) du segment $[MN]$ tel que $M(0,5,-1)$ et $N(2,1,1)$.

Orthogonalité de deux droites dans l'espace

Propriété 5 :

Soient (D_1) et (D_2) deux droites de l'espace dirigées respectivement par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

(D_1) et (D_2) sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$, on écrit $(D_1) \perp (D_2)$

Application 3 :

Montrer que $(D_1) \perp (D_2)$ dans les cas suivants :

1) (D_1) est dirigée par $\vec{u}(1,2,3)$ et $(D_2): \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 2t \quad / t \in \mathbb{R} \\ z = 5 \end{cases}$.

2) (D_1) est définie par les équations $x-2=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{5-z}{2}$ et $(D_2):\begin{cases} x=3+2t \\ y=5-3t \quad /t\in\mathbb{R} \\ z=-2-2t \end{cases}$

Orthogonalité de deux plans dans l'espace

Propriété 6 :

$\boxed{9}$ Deux plans sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Application 4 :

Etudier l'orthogonalité des plans (P) et (Q) dans les cas suivants :

1) $(P):2x+z-1=0$ et $(Q):x-2y-2z+1=0$.

2) $(P):x-y-4z+1=0$ et $(Q):4x-y-2z-3=0$

Remarque 2 :

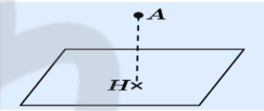
Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Distance d'un point de l'espace à un plan

Définition 4 :

Soient (P) un plan et A un point de l'espace et H la projection orthogonale de A sur (P)

La distance du point A au plan (P) est la distance AH et on la note par $d(A,(P))$.



Propriété 7 :

Soient (P) un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace.

La distance du point A au plan (P) est : $\boxed{10}$ $d(A,(P))=\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exemple :

Calculons la distance du point $A(1,-1,2)$ au plan (P) d'équation $(P):2x+y-z+1=0$.

On a $\vec{n}(2,1,-1)$ est un vecteur normal de (P).

Donc $d(A,(P))=\dfrac{|2\times1-1-2+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=0$, en déduit que $A\in(P)$.

Application 5 :

On considère le plan (P) d'équation $x+y+z+1=0$ et $A(1,2,0)$ un point de l'espace.

1) Calculer $d(A,(P))$.

2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A est orthogonal à (P).

3) Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal de A sur (P).

2) Etude analytique d'une sphère

Equation cartésienne d'une sphère

Introduction :

La sphère (S) de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tel que $\Omega M=R$

On la note par $S(\Omega,R)$.

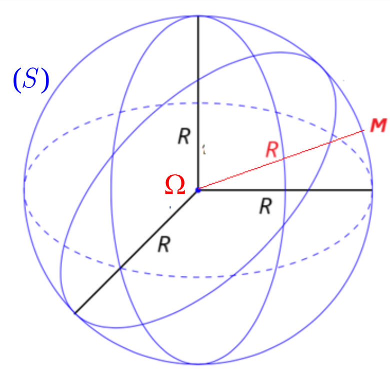
On a $M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow \Omega M=R$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2=R^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2=R^2.$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \text{ où } d=a^2+b^2+c^2-R^2$$



Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la sphère (S).

Propriétés 8 et définition 5 :

Soit Ω un point de l'espace et R un réel strictement positif.

- La sphère (S) de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tel que : $\Omega M=R$

On le note par $S(\Omega,R)$.

- L'ensemble des points de l'espace $M(x,y,z)$ tel que $\boxed{11}$ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ est une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R.
- L'équation $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ est appelée l'équation cartésienne du sphère (S) de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R.
- On peut écrire l'équation cartésienne du sphère (S) de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R sous la forme :

$\boxed{12}$ $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ où $d=a^2+b^2+c^2-R^2$

- Soit $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points distincts de l'espace :

La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

L'équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$ est : $\boxed{13}$ $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

Application 6 :

1) Donner une équation cartésienne du sphère (S_1) de centre $\Omega(2,0,1)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$.

2) a) Donner une équation cartésienne du sphère (S_2) de centre $\Omega(1,-1,2)$ et passant par le point $A(-1,4,5)$.

b) Est-ce que le point $B(1,2,-2)$ appartient à (S_2) ?

Application 7 :

Donner, par deux méthodes, une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$ telle que $A(-1,3,2)$ et $B(-3,1;0)$.

Etude de l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

Propriété 9 :

$\boxed{14}$ Soient a, b, c et d des réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

- Si $a^2+b^2+c^2-4d>0$, (S) est une sphère de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$.
- Si $a^2+b^2+c^2-4d=0$, (S) est le point $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$.
- Si $a^2+b^2+c^2-4d<0$, (S) est l'ensemble vide.

Exemple :

Déterminons (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $(S): x^2+y^2+z^2-2y+3z+2=0$.

<u>Méthode 1</u> :

Puisque $a^2+b^2+c^2-4d=0^2+(-2)^2+3^2-4\times2=5>0$, alors : (d'après la règle $\boxed{14}$) (S) est une sphère de centre $\Omega\left(-\frac{0}{2},-\frac{-2}{2},-\frac{3}{2}\right)=\Omega\left(0,1,-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

<u>Méthode 2</u> :

On a $x^2+y^2+z^2-2y+3z+2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+z^2+3z+2=0$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2-1+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

D'où (d'après la règle $\boxed{11}$) (S) est une sphère de centre $\Omega\left(0,1,-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Dans les exercices, il est préférable d'utiliser la deuxième méthode.

Application 8 :

Déterminer (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace dans les cas suivants :

1) (S): $x^2+y^2+z^2-4x-6y=0$.

2) (S): $x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+19=0$.

3) (S): $x^2+y^2+z^2+4y-2z+5=0$.

Représentation paramétrique d'une sphère

Remarque 3 :

Soit (S) une sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R. Le point $M(x,y,z)$ est sur la sphère (S) si et seulement si :

$\begin{cases} x = a + R\sin\varphi.\cos\theta \\ y = b + R\sin\varphi.\sin\theta \\ z = c + R\cos\varphi \end{cases} \quad / (\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^2$. Ce système est appelé **représentation paramétrique** de (S).

Application 9 :

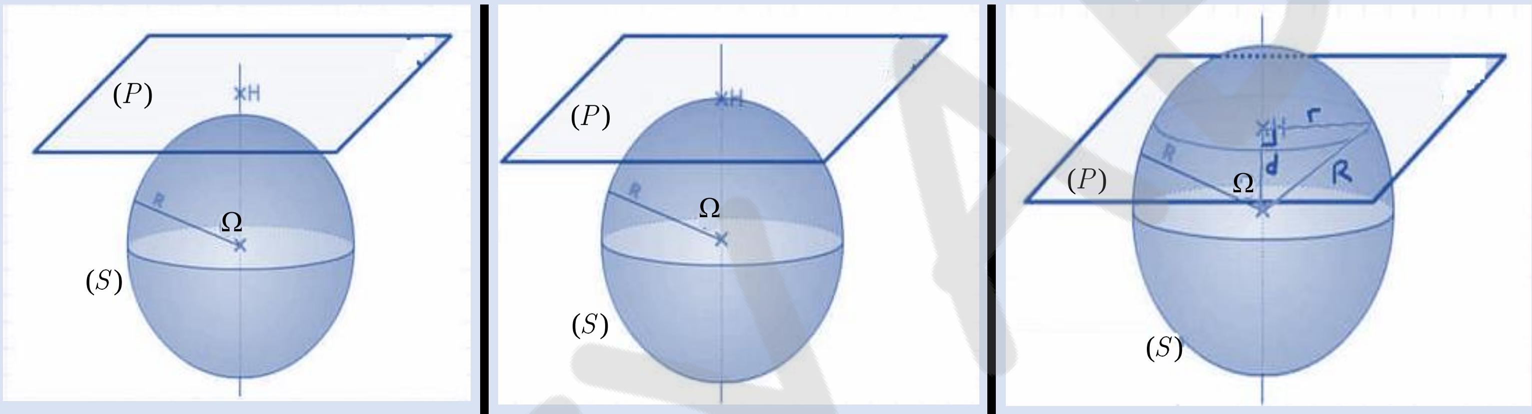
Déterminer une représentation paramétrique de la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Position relative d'une sphère et un plan

Propriété 10 :

15 Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R et (P) un plan dans l'espace.

- Si $d(\Omega;(P)) > R$, alors (P) ne coupe pas (S).
- Si $d(\Omega;(P)) = R$, alors (P) est tangent à (S) en un point H le projeté orthogonale de Ω sur (P).
- Si $d(\Omega;(P)) < R$, alors (P) coupe (S) suivant un cercle de centre H le projeté orthogonale de Ω sur (P) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



$d(\Omega;(P)) = \Omega H > R$; $d(\Omega;(P)) = \Omega H = R$; $d(\Omega;(P)) = \Omega H < R$ et $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Remarque 4 :

Pour déterminer les coordonnées du point H de la propriété précédente, on résout le système contenant l'équation cartésienne du plan (P) et une représentation paramétrique de la droite passant par Ω le centre de la sphère (S) et dirigé par un vecteur normal du plan (P))

Application 10 :

On considère l'ensemble (S) des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$

1) Montrer que (S) est une sphère en déterminant son centre Ω et son rayon R.
2) Etudier la position relative de (S) et les plans suivants :

a) $(P_1): 2x + y + 2z - 3 = 0$; b) $(P_2): x - 2y + 2z + 3 = 0$; c) $(P_3): x + 2y - z + 9 = 0$

3) Produit vectoriel

Repère direct - Repère indirect

Introduction :

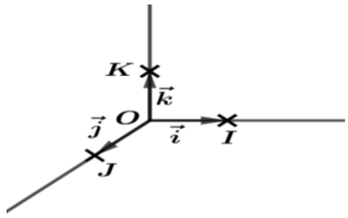
Trois demi-droites non coplanaires de l'espace $[OI)$, $[OJ)$ et $[OK)$ constituent dans cette ordre un **trièdre** noté $([OI),[OJ),[OK))$.

Le **bonhomme d'ampère** est une personne virtuelle placé le long de $[OK)$, les pieds en O et qui regarde dans la direction de $[OI)$. Si la cote $[OJ)$ est à sa gauche, on dit que le trièdre $([OI),[OJ),[OK))$ est **direct**.

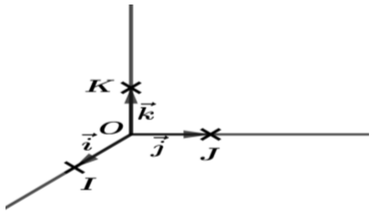
Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ des vecteurs définis par : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

Si que le trièdre $([OI),[OJ),[OK))$ est direct on dit que le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est direct.

La base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est dit directe si le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est direct.



$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est indirect



$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est direct

Définition 6 :

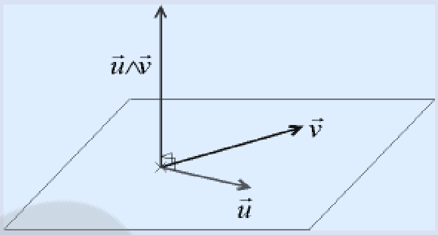
Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors le vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est tel que :

→ $\vec{w}\perp\vec{u}$ et à $\vec{w}\perp\vec{v}$.

→ La base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est de sens direct.

→ $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\left|sin\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\right|$.



Propriétés 11 :

- $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$.
- $\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}\wedge\vec{u}=\vec{0}$.
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{v}\wedge\vec{w}$.
- $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v}) \quad / \ \alpha\in\mathbb{R}$

Expression analytique du produit vectoriel

Propriété 12 :

Soient $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$ deux vecteurs de l'espace.

On a : $\boxed{16}$ $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}b & b'\\c & c'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a & a'\\c & c'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a & a'\\b & b'\end{vmatrix}\vec{k}$.

Exemple :

Calculons le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}(0,1,-2)$ et $\vec{v}(-3,1,2)$.

On a $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\-2 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & -3\\-2 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & -3\\1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}$.

Application 11 : Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}(-1,3,0)$ et $\vec{v}(2,-6,1)$.

Remarque 5 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

Equation d'un plan défini par trois points non alignés

Propriétés 13 :

Soit A, B et C trois points de l'espace orienté.

- $\boxed{17}$ A, B et C sont des points alignés $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
- Si A, B et C ne sont pas alignés alors $\boxed{18}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal du plan (ABC)

Remarque 6 :

L'équation cartésienne du plan (ABC) se déduit par l'équivalence suivant : $M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$.

Application 12 :

On considère les points $A(2,4,-5)$, $B(1,0,4)$ et $C(0,3,1)$.

1) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

L'aire d'un triangle

Propriété 14 :

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté.

L'aire du triangle ABC est $\boxed{19}$ $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.

Application 13 :

On considère les points $A(-1,2,0)$, $B(3,0,4)$ et $C(-2,1,2)$.

1) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés. ; 2) Déterminer l'aire du triangle ABC.

Distance d'un point à une droite dans l'espace

Introduction :

Soit (D) une droite passant par A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$.

La distance d'un point M de la droite (D) est la distance MH tel que H le projeté orthogonal de M sur (D). On note cette distance par $d(M,D(A,\vec{u}))$.

Pour déterminer les coordonnées du points H on utilise : $H\in(D)$ et $\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0$.

Propriété 15 :

Soit (D) une droite passant par A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$.

La distance d'un point M de l'espace à la droite (D) est donnée par : $\boxed{20}$ $d(M,(D))=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

Application 14 :

1) Calculer la distance du point $M(3,2,1)$ à la droite $(D):\begin{cases}x=1+t\\y=1\\z=-t\end{cases}\quad / t\in\mathbb{R}$.

2) a) Calculer la distance du point $N(-1,2,0)$ à la droite $(\Delta):\begin{cases}x-y=1\\y+z=2\end{cases}$.

b) Déterminer les coordonnées de H le projeté orthogonal de N sur (Δ).

Position relative d'une sphère et une droite

Propriété 16 :

$\boxed{21}$ Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R $(R>0)$, (D) une droite de l'espace, $d(\Omega,(D))$ la distance du point Ω à la droite (D) et H le projeté orthogonal du point Ω sur la droite (D).

- Si $d(\Omega,(D))=R$, alors $(D)\cap(S)=\{H\}$. On dit que la droite (D) est tangente à la sphère (S) au point H.
- Si $d(\Omega,(D))<R$, alors $(D)\cap(S)=\{A;B\}$. On dit que la droite (D) perce la sphère (S) aux points A et B.
- Si $d(\Omega,(D))>R$, alors $(D)\cap(S)=\varnothing$. On dit que la droite (D) est située à l'extérieur de la sphère (S).

Remarque 7 :

Pour déterminer les coordonnées du (des) point(s) d'intersection de la droite (D) et la sphère (S), on résout le système contenant l'équation cartésienne la sphère (S) et une représentation paramétrique de la droite (D)

Application 15 :

1) Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (S) d'équation cartésienne $(S):x^2+y^2+z^2+2x=0$

2) Soit (D) la droite passant par $A(0,1,2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;1;1)$

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D)

b) Calculer $d(\Omega,(D))$

c) En déduire la position relative de (D) et (S) en déterminant leurs points d'intersection s'ils existent.

Intersection de deux plans

Propriété 17 :

$\boxed{22}$ Soit (P) et (Q) deux plans de l'espace, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont respectivement deux vecteurs normaux aux plans (P) et (Q)

Si $\vec{n}\wedge\vec{n}'\neq\vec{0}$, alors (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (D) dirigée par le vecteur $\vec{n}\wedge\vec{n}'$.

Remarque 8 :

Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans, on résout un système dans lequel on prend des équations cartésiennes qui définissent chaque plan (en posant par exemple $z=t$ et écrire x et y en fonction de t).

Application 16 :

On considère les plans $(P): 2x+z-1=0$ et $(Q): x-2y-2z+1=0$.

1) Vérifier que (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (D) en déterminant son vecteur directeur.
2) Donner une représentation paramétrique de (D).

Résumé 11 : Géométrie de l'espace

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ de l'espace on a :

- $\boxed{1}$ $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
- $\boxed{2}$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Si $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ deux points de l'espace, alors $\boxed{3}$ $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.
- $\boxed{4}$ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- $\boxed{5}$ Le système : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \; / \, t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c)$, on le note par $D(A;\vec{u})$
- $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A; y_B-y_A; z_B-z_A)$
- Si le point I est le milieu du segment $[AB]$ alors : $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2};\frac{z_B+z_A}{2}\right)$

Plan et vecteur normal

- $\boxed{6}$ Toute vecteur directeur d'une droite orthogonale à un plan est appelé vecteur normal a ce plan.
- Tout plan de l'espace peut être défini par un point et un vecteur normal.
- $\boxed{7}$ Le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal au plan d'équation cartésienne (P): $ax+by+cz+d=0$
- L'équation cartésienne du plan passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ se déduit par l'équivalence

suivant : $\boxed{8}$ $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

- $\boxed{9}$ Deux plans sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Soient (P) un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace.

La distance du point A au plan (P) est : $\boxed{10}$ $d(A,(P)) = \dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Sphère

Soit Ω un point de l'espace et R un réel strictement positif.

- L'ensemble des points de l'espace $M(x,y,z)$ tel que $\boxed{11}$ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ est une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R.
- L'équation cartésienne du sphère (S) de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R est $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$
- On peut écrire l'équation cartésienne du sphère (S) de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R sous la forme :

$\boxed{12}$ $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ où $d = a^2+b^2+c^2-R^2$

- Soit $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points distincts de l'espace :

La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

L'équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$ est : $\boxed{13}$ $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

Etude de l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

$\boxed{14}$ Soient a, b, c et d des réels tels que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

- Si $a^2+b^2+c^2-4d>0$, (S) est une sphère de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$.

- Si $a^2+b^2+c^2-4d=0$, (S) est le point $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$.
- Si $a^2+b^2+c^2-4d<0$, (S) est l'ensemble vide.

Positions relatives d'un plan et d'une sphère

Pour étudier la position relative d'un plan (P) et d'une sphère (S) de centre Ω et de rayon R. Il suffit de comparer $d(\Omega,(P))$ au rayon R.

15 Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R et (P) un plan dans l'espace.

- Si $d(\Omega;(P))>R$, alors (P) ne coupe pas (S).
- Si $d(\Omega;(P))=R$, alors (P) est tangent à (S) en un point H le projeté orthogonale de Ω sur (P).
- Si $d(\Omega;(P))<R$, alors (P) coupe (S) suivant un cercle de centre H le projeté orthogonale de Ω sur (P) et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

Remarque

Pour déterminer les coordonnées du point H de la propriété précédente, on résout le système contenant l'équation cartésienne du plan (P) et une représentation paramétrique de la droite passant par Ω le centre de la sphère (S) et dirigé par un vecteur normal du plan (P))

Produit vectoriel

Définition

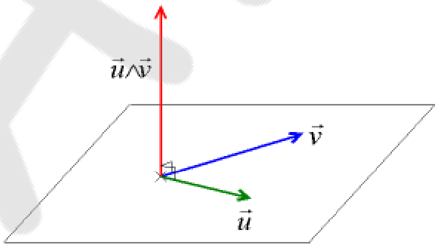
Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors le vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est tel que :

→ $\vec{w}\perp\vec{u}$ et à $\vec{w}\perp\vec{v}$.

→ La base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est de sens direct.

→ $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\left|sin\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\right|$.



Propriétés

• 16 $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}b & b'\\c & c'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a & a'\\c & c'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a & a'\\b & b'\end{vmatrix}\vec{k}$ • 17 A, B et C sont des points alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ • 18 $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal du plan (ABC)	• L'aire du triangle ABC est égale à 19 $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$ • La distance du point M à la droite $D(A;\vec{u})$ est : 20 $d(M,(D))=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

Positions relatives d'une droite et d'une sphère

21 Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R $(R>0)$, (D) une droite de l'espace, $d(\Omega,(D))$ la distance du point Ω à la droite (D) et H le projeté orthogonal du point Ω sur la droite (D).

- Si $d(\Omega,(D))=R$, alors $(D)\cap(S)=\{H\}$. On dit que la droite (D) est tangente à la sphère (S) au point H.
- Si $d(\Omega,(D))<R$, alors $(D)\cap(S)=\{A;B\}$. On dit que la droite (D) perce la sphère (S) aux points A et B.
- Si $d(\Omega,(D))>R$, alors $(D)\cap(S)=\varnothing$. On dit que la droite (D) est située à l'extérieur de la sphère (S).

Pour étudier la position relative d'une droite (D) et d'une sphère (S) de centre Ω et de rayon R. Il suffit de comparer $d(\Omega,(D))$ au rayon R.

Remarque

Pour déterminer les coordonnées du (des) point(s) d'intersection de la droite (D) et la sphère (S), on résout le système contenant l'équation cartésienne la sphère (S) et une représentation paramétrique de la droite (D)

Intersection de deux plans

22 Soient (P) et (Q) deux plans de l'espace, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont respectivement deux vecteurs normaux aux plans (P) et (Q)

Si $\vec{n}\wedge\vec{n}'\neq\vec{0}$, alors (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (D) dirigée par le vecteur $\vec{n}\wedge\vec{n}'$

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : 2BACSPF-2BACSVT

Série 11

Géométrie de l'espace

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

Exercice 1 :

On considère dans l'espace les points $A(1;1;2)$, $B(0;1;1)$ et le vecteur $\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

1) Vérifier que les points O, A et B ne sont pas alignés.
2) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
3) En déduire une équation cartésienne du plan (OAB).
4) Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point A est orthogonale au plan (OAB).

Exercice 2 :

On considère les points $A(-1,0,1)$, $B(1,2,-1)$ et $C(1,-1,2)$ et soit (P) le plan d'équation $x+y-z=0$

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Vérifier que la droite (AB) est orthogonale à (P).

c) Déterminer les coordonnés du point d'intersection de (AB) et (P).

2) Montrer que la droite (AC) est parallèle à (P).
3) Donner une équation cartésienne du plan (Q) passant par B et parallèle à (P).

Exercice 3 :

Soit (P) le plan d'équation $2x-2y-5=0$ et soit (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que :
$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+11=0$.

1) Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R.
2) Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) dont on déterminera le centre H et le rayon r.
3) Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans tangents à (S) et parallèle à (P).
4) Soit (Q) le plan d'équation $x+y+z+1=0$.
Vérifier que le plan (P) est tangent à la sphère (S) puis déterminer leur point de contact.
5) a) Vérifier que $(P)\perp(Q)$.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et (Q).

a) vérifier que le point $A(2;-1;-2)$ est un point de la sphère (S).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangente à la sphère (S) au point A.

Exercice 4 :

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1;-1;0)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$.

Donner l'équation cartésienne de (S).

On considère les droites $(D_1):\begin{cases}x=2\\ y=2+4t\\ z=5+4t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$,

$(D_2):\begin{cases}x=2-t\\ y=-2+t\\ z=1-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ et $(D_3):\begin{cases}x=-2+6t\\ y=4t\\ z=t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$.

Calculer les distances $d(\Omega,(D_1))$, $d(\Omega,(D_2))$ et $d(\Omega,(D_3))$ puis étudier les positions relatives de (S) et les droites (D_1), (D_2) et (D_3).

Exercice 5 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points :
$A(0;-2;-2)$; $B(1;-2;-4)$; $C(-3;-1;2)$

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

b) En déduire $2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Soit (S) la sphère d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$.
Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1;0;1)$ et que son rayon est $R=5$.

3) a) Vérifier que : $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t\\ z=1+t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (D) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC).

b) Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite (D) et du plan (ABC).

4) Vérifier que $d(\Omega;(ABC))=3$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4 et on déterminera le centre.

Correction

Série 11
Géométrie de l'espace

Exercice 6 : Rattrapage 2017

On considère la sphère (S) dont une équation cartésienne : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ et le plan (P) d'équation $y-z=0$.

1) a) Montrer que le centre de (S) est $\Omega(1;1;1)$ et que son rayon $R=2$.

b) Calculer $d(\Omega;(P))$ et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C).

c) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).

2) Soit (D) la droite passant par le point $A(1;-2;2)$ et orthogonal au plan (P).

a) Montrer que $\vec{u}(0;1;-1)$ est un vecteur directeur de (D)

b) Montrer que : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=\sqrt{2}\vec{u}$ et déduire que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points.

c) Déterminer le triple des coordonnées de chacun des points d'intersection de la droite (D) et la sphère (S).

Exercice 7 :

On donne les points $A(-1;2;1)$; $B(1;-6;-1)$; $C(2;2;2)$ et $I(0;1;-1)$

1) a) Calculer le produit vectoriel : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

b) Déterminer une équation du plan (ABC)

2) Soit (Q) le plan d'équation : $x+y-3z+2=0$ et (Q') le plan de repère $(O;\vec{i},\vec{k})$.

a) Pourquoi (Q) et (Q') sont-ils sécants ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q').

3) Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre I et de rayon 2.

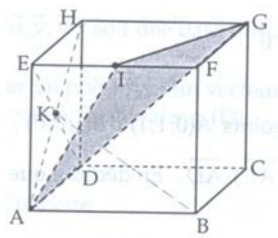
4) On considère les points J et K de coordonnées respectives : $J(-2;0;0)$ et $K(1;0;1)$

Déterminer l'intersection de la sphère (S) et la droite (JK).

Exercice 8 :

$ABCDEFCH$ est un cube de côté 1.

L'espace est orienté par le repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



I est le milieu de $[EF]$ et K est le centre du carré $ADHE$.

1) Vérifier que $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$.
En déduire l'aire du triangle ICA.

2) Calculer le volume du tétraèdre $BICA$.

3) En déduire la distance du point B au plan (ICA).

Exercice 9 :

Considérons les points $A(1;1;2)$; $B(0;1;1)$ et le vecteur $\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

1) Montrer que O, A et B ne sont pas alignés.

2) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

3) En déduire une équation du plan (OAB)

4) Soit le plan (P) : $x+y-z=0$.

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (P)

b) Déterminer les points M de (Δ) tel que : $d(M;(P))=1$.

c) Caractériser l'ensemble des points M de (P) tel que $d(M;(\Delta))=\sqrt{2}$.

5) a) Donner une équation cartésienne du plan médiateur (Q) du segment $[AB]$.

b) Montrer que (Q) et (P) sont sécants.

Exercice 10 :

On donne les points $A(1,1,0)$, $B(1,-1,1)$ et $C(0,1,1)$ et soit le plan. (P): $x+2y-2z+1=0$

1) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés

2) Montrer que : (ABC): $2x+y+2z-3=0$.

3) Vérifier que les plans $(P)\perp(ABC)$.

4) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) intersection des plans (P) et (ABC).

5) Soit le point $I(2,1,1)$ et M un point de (D).
Déterminer M pour que la distance IM soit minimale et en déduire $d(I,(D))$.

6) a) Montrer que les points I, A, B et C ne sont pas coplanaires.

b) Calculer le volume du tétraèdre $IABC$.

c) Calculer $d(I;(ABC))$ et en déduire l'aire du triangle ABC.

7) Soit l'ensemble (S) des points $M(x,y,z)$ vérifiant :

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z+\frac{38}{9}=0.$$

a) Montrer que S est une sphère de centre I et tangente au plan (ABC).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangent à la sphère (S) et strictement parallèle à (ABC).

DL5

2BACSPF-2BACSVT
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Calcul intégral)

Correction

1) Calculer (au moyen d'une primitive) chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \left(x+3e^{2x}\right)dx \; ; \; \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx \; ; \; \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}}dx \; ; \; \int_0^1 x^2 e^{\left(x^3+1\right)}dx \; ; \; \int_1^e \frac{(ln(x))^4}{x}dx$$

2) Calculer (au moyen d'intégration par parties) chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (1-x)e^x dx \; ; \; \int_1^2 x(ln(x))^2 dx \; ; \; \int_1^e (ln(x))^2 dx \; ; \; \int_0^1 x^2 e^{3x} dx$$

3) a) Dresser le tableau de signes de l'expression : $f(x)=2-e^{1+x}$

b) En déduire la valeur de l'intégrale $K=\int_{-1}^0 |f(x)|dx$ (indication : utiliser la relation de Chasles)

Exercice 2 (Calcul intégral)

On considère la fonction f définie par $f(x)=(1-x)^2 e^x-1$

1) Montrer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, que : $\int_0^1 (1-x)^2 e^x dx = 2e-5$

2) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})$ $f'(x)=-(1-x)^2 e^x$ et déduire que $(\forall x\in[0;1])$ $-1\leq f(x)\leq 0$

3) a) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (D): $y=x$ et les droites d'équations : $x=0$ et $x=1$

Exercice 3 (Géométrie de l'espace)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par $A(0;2;5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-4;3)$

2) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par $B(7;3;-1)$ et orthogonal à la droite (D)

3) Soit (Q) le plan d'équation cartésienne $16x+y-4z+1=0$. Montrer que $(P)\perp(Q)$

4) a) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S) de centre $\Omega(1;0;2)$ et passant par $C(1;-6;4)$

b) Montrer que $d(\Omega,(D))=\sqrt{14}$ et déduire que la droite (D) perce la sphère (S) en deux points D et F

c) Déterminer les coordonnées des points D et F

5) Donner, par deux méthodes, une équation cartésienne de la sphère (S') de diamètre $[DF]$

Exercice 4 (Géométrie de l'espace)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les points : $A(2;1;3)$; $B(3;1;1)$ et $C(2;2;1)$

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ et déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Montrer que $2x+2y+z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

3) Soit la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$

Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1;-1;0)$ et son rayon est $R=6$

4) Montrer que $d(\Omega;(ABC))=3$ et déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C)

5) Déterminer le centre du cercle (C).

6) Calculer l'aire du triangle ABC.

DS5

2BACSPF-A

2 heures

Aissa HIYAB

Exercice 1 (6points)

1) Calculer les intégrales suivantes : $\int_0^1 x^2dx$; $\int_2^3 \frac{x}{\left(x^2-3\right)^2}dx$; $\int_0^{ln(2)} x^3e^{x^4}dx$; $\int_0^{ln(2)} xe^{x}dx$ ……………………………..2pt

2) Montrer que $\int_1^{e^4} \frac{1}{x^2}dx = \frac{e^4-1}{e^4}$ et que $\int_1^{e^4} \frac{ln(x)}{x^2}dx = \frac{e^4-5}{e^4}$ ……………………………………………1pt

3) On considère la fonction f définie sur $\left[1;e^4\right]$ par $f(x)=\frac{\sqrt{4-ln(x)}}{x}$

a) Montrer que $\int_1^{e^4} f(x)dx = \frac{16}{3}$ (remarquer que $\frac{1}{x} = -\left(4-ln(x)\right)^{/}$)…………………………………1pt

b) Déduire la valeur moyenne de f sur $\left[1;e^4\right]$ ……………………………………………1pt

c) Calculer le volume de solide engendré par la rotation de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur $\left[1;e^4\right]$ autour de l'axe des abscisses (on donne $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1cm$)……………………………………………1pt

Exercice 2 (8points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points $A(0,\ 1,\ -1)$, $B(2,\ 3,\ 1)$, $C(0,\ 0,\ 1)$ et le vecteur $\vec{n}\left(3,\ -2,\ -1\right)$

1) a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés. ……………………………………1pt

b) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ……………………………1pt

c) En déduire que $3x-2y-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) ………………………1pt

2) On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2=0$ ……………………………1pt

a) Montrer que la sphère (S) est de centre $\Omega(2,1,0)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$ ……………………………1pt

b) Calculer la distance $d(\Omega,(ABC))$, puis en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C), dont on déterminera le centre et le rayon. ……………………………………2.5pt

3) Déterminer les équations de (P_1) et (P_2) les deux plans tangents à (S) et parallèles à (ABC)………………..0.5pt

Exercice 3 (6points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par $A(-4,\ 0,\ 1)$ et perpendiculaire au plan (P) d'équation $3x+2y+z-3=0$ ……………………………………………1pt

2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,\ 2,\ 3)$ et passant par $B(1,\ 3,\ 5)$

a) Vérifier que le rayon de (S) est $R=\sqrt{5}$, puis déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) ……….2pt

b) Montrer que $d(\Omega,(\Delta)) = \frac{\sqrt{6}}{2}$ et déduire que la droite (Δ) perce (S) en deux points C et D ……………………1.5pt

c) Déterminer les coordonnées des points C et D ……………………………………………1pt

3) Soit (Q) le plan d'équation $x-y+z+1=0$. Vérifier que les plans (P) et (Q) sont sécants puis déterminer l'équation du plan (R) passant par B et perpendiculaire au deux plans (P) et (Q) ……………………………0.5pt

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

بسم الله الرحمن الرحيم

DS5

2BACSPF-B

2 heures

Aissa HIYAB

Exercice 1 (6points)

1) Calculer les intégrales suivantes : $\int_0^1 x\,dx$; $\int_0^{\ln(2)} x^4 e^{x^5}\,dx$; $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}\,dx$; $\int_1^e x\ln(x)\,dx$ 2pt

2) Montrer que $\int_1^{e^3} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{e^3-1}{e^3}$ et que $\int_1^{e^3} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \frac{e^3-4}{e^3}$ 1pt

3) On considère la fonction f définie sur $\left[1;e^3\right]$ par $f(x)=\frac{\sqrt{3-\ln(x)}}{x}$

a) Montrer que $\int_1^{e^3} f(x)\,dx = 2\sqrt{3}$ (remarquer que $\frac{1}{x} = -\left(3-\ln(x)\right)'$)..................................1pt

b) Déduire la valeur moyenne de f sur $\left[1;e^3\right]$..................................1pt

c) Calculer le volume de solide engendré par la rotation de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur $\left[1;e^3\right]$ autour de l'axe des abscisses (on donne $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)..................................1pt

Exercice 2 (6points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par $A(0,-4,1)$ et perpendiculaire au plan (P) d'équation $2x+3y+z+3=0$ 1pt

2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(2,1,3)$ et passant par $B(3,1,5)$

a) Vérifier que le rayon de (S) est $R=\sqrt{5}$, puis déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) 2pt

b) Montrer que $d(\Omega,(\Delta)) = \frac{\sqrt{6}}{2}$ et déduire que la droite (Δ) perce (S) en deux points C et D 1.5pt

c) Déterminer les coordonnées des points C et D 1pt

3) Soit (Q) le plan d'équation $x+y-z+1=0$. Vérifier que les plans (P) et (Q) sont sécants puis déterminer l'équation du plan (R) passant par B et perpendiculaire au deux plans (P) et (Q) 0.5pt

Exercice 3 (8points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points $A(1,0,-1)$, $B(1,2,3)$, $C(2,1,0)$ et le vecteur $\vec{n}(1,-2,1)$

1) a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés. 1pt

b) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ 1pt

c) En déduire que $x-2y+z=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)..................................1pt

2) On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2y+2z-12=0$ 1pt

a) Montrer que la sphère (S) est de centre $\Omega(0,1,-1)$ et de rayon $R=\sqrt{14}$ 1pt

b) Montrer que $d(\Omega,(ABC)) = \frac{\sqrt{6}}{2}$, puis déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C), dont on déterminera le centre et le rayon. 2.5pt

3) Déterminer les équations de (P_1) et (P_2) les deux plans tangents à (S) et parallèles à (ABC)..................0.5pt

12
Probabilités

I. Dénombrement

1) Principe fondamental de dénombrement

Activité 1 :

Considérons les chiffres : 3 et 4 et 5.

1) Déterminer le nombre total des nombres qu'on peut composer de deux chiffres distincts parmi ces chiffres.

2) Tout résultat obtenu dans la question précédente est appelé **une possibilité**.

Représenter les possibilités sous la forme d'un arbre (appelé **arbre de choix**) et déduire par une autre façon le nombre total des possibilités.

Principe fondamental de dénombrement :

Si une situation de dénombrement nécessite p étapes.

Et qu'il y a n_1 façons possibles de réaliser la première étape,

Et qu'il y a n_2 façons possibles de réaliser la seconde étape,

….et qu'il y a n_p façons possibles de réaliser la p ième étape,

Alors le nombre total des possibilités pour cette situation de dénombrement est $N = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$

Exemple 1 :

On lance un dé (qui a 6 faces contenant les chiffres : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) deux fois successivement.

1) Déterminer le nombre de possibilités obtenues.

2) Combien de résultat possible si on veut obtenir un nombre pair dans le premier jet.

Exemple 2 :

1) Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul.

Combien peut-on former de codes distincts ?

2) Combien y a-t-il de numéro de téléphone commençant par 0663 … ?

Exemple 3 :

La porte d'entrée d'un immeuble est commandée par un code d'accès composé d'une lettre suivie de trois chiffres.

On dispose d'un clavier comportant les lettres A, B et C, et les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

1) Combien de codes peut-on proposer ?

2) Combien de codes commençant par la lettre A, peut-on proposer ?

3) Combien de codes commençant par B9, peut-on proposer ?

4) Combien de codes comportant trois chiffres distincts, peut-on proposer ?

2) Arrangements

Activité 2 :

Considérons l'ensemble : $E = \{a,b,c,d,e\}$

1) Combien de triplet qu'on peut composer en utilisant les éléments de E ?

Chaque triplet s'appelle un **arrangement avec répétition** de 3 éléments parmi 5 éléments.

2) Combien de triplet qu'on peut composer en utilisant les éléments de E sachant que les éléments du triplet sont deux à deux distinct ?

Dans ce cas chaque triplet s'appelle un **arrangement sans répétition** de 3 éléments parmi 5 éléments.

Définition 1 et propriétés 1 :

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal $n \geq 1$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$

• Tout élément de la forme $(x_1;x_2;\ldots;x_p)$ s'appelle un **arrangement avec répétition** de p éléments de E (ou une p-liste de E).

• Le nombre d'arrangement avec répétition de p éléments de E est n^p

• Tout élément de la forme $(x_1;x_2;\ldots;x_p)$ tel que $x_1,x_2,\ldots,x_p$ sont deux à deux distincts s'appelle un **arrangement sans répétition** de p éléments de E .

• Le nombre d'arrangement sans répétition de p éléments de E est l'entier naturel noté par A_n^p tel que :

$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$

Exemple 4 :

1) Calculer A_6^3 , A_4^2 et A_4^4

2) Déterminer le nombre de ligne téléphonique commençant par 06 qu'on peut utiliser au Maroc.

Remarque 1 : Avec le tirage :

- n^p correspond à un tirage **successivement et avec remise** de p boules dans une urne contenant n boules.
- A_n^p correspond à un tirage **successivement et sans remise** de p boules dans une urne contenant n boules.

Exemple 5 :

Un sac contient six boules portant les nombres : 1 ;2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. On tire au hasard 3 boules successivement et avec remise. Combien de tirages sont possibles ?

Exemple 6 :

Un sac contient 5 boules rouge et 2 boules vert. On tire au hasard 2 boules successivement et sans remise.

1) Combien de tirages sont possibles ?

2) Combien de tirages possibles sachant que les deux boules tirées sont rouges ?

Remarques 2 :

- Soit $n \in \mathbb{N}$, par convention $A_n^0 = 1$
- Avec la calculatrice A_n^p s'obtient par les boutons : $\boxed{n}$ $\boxed{shift}$ $\boxed{nPr}$ $\boxed{p}$ $\boxed{=}$

3) Permutations

Activité 3 :

Cinq personnes veulent s'asseoir sur des chaises numérotées de 1 à 5 afin que chaque chaise ne puisse accueillir qu'une seule personne. Combien de possibilités ?

Chaque possibilité est un arrangement sans répétition de 5 éléments parmi 5 éléments.

On appelle chaque arrangement sans répétition de 5 éléments parmi 5 éléments une **permutation** de 5 éléments.

Définition 2 et propriétés 2 :

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal $n \geq 1$

- On appelle **permutation** de E tout arrangement sans répétition de tous les éléments de E
- Le nombre des permutations des éléments de E est le nombre noté $n!$ ‘’ se lit : **factoriel n** ‘’ et défini par $n! = A_n^n$

Remarques 3 :

- $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1$; • $(n+1)! = (n+1)\times n!$; • $0! = 1$

Exemple 7 :

Un sac contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 2 boules bleues. On tire au hasard 3 boules successivement et sans remise.

1) Combien de tirages possibles ?

2) Déterminer le nombre de tirages possibles pour obtenir :

a) Une boule rouge puis une boule verte puis une boule bleue.

b) Trois boules de couleurs deux à deux distinct.

c) Deux boules rouges et une boule verte.

Propriété 3 :

Si p est le nombre de boules tirées (**Successif sans remise ou avec remise**) où p_1 est le nombre de boules de type 1, p_2 est le nombre de boules de type 2, ……. p_k est le nombre de boules de type k , alors le nombre de permutations est

$$\frac{p!}{p_1!\times p_2!\times\ldots\ldots\times p_k!}$$

Exemple 8 :

Une urne contient trois boules rouges, deux blanches et deux vertes. On tire successivement sans remise trois boules de l'urne.

1) Déterminer le nombre de tirages possibles.

2) Déterminer le nombre de tirages possibles pour obtenir :

a) Trois boules rouges.

b) Trois boules de couleurs deux à deux distincts.

c) Exactement deux boules rouges.

Exemple 9 :

Une course de cross-country a lieu entre 4 coureurs A, B, C et D sachant que chaque coureur occupe un seul rang.
Combien de résultat possible ?

Remarque 4 :

Avec la calculatrice $n!$ s'obtient par les boutons : $\boxed{n}$ $\boxed{shift}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$

Propriété 4 :

Pour tout $(n;p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $1\leq p\leq n$ on a : $A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$

En particulier, on a $A_n^1=n$ et $A_n^n=n!$

Exemple 10 :

Montrer que pour tout $(n;p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $1\leq p\leq n$ on a : $A_{n+1}^p=A_n^p+pA_n^{p-1}$

Exemple 11 :

Une urne contient six jetons verts et cinq jetons rouges et trois jetons bleus indiscernables au toucher.
On tire successivement et sans remise quatre jetons de l'urne

1) Déterminer le nombre de tirages possibles.
2) Déterminer le nombre de tirages où les trois premiers jetons sont verts.
3) Déterminer le nombre de tirages où le premier jeton est vert.
4) Déterminer le nombre de tirages comportant exactement un jeton vert.
5) Déterminer le nombre de tirages comportant au moins un jeton vert.

4) Combinaisons

Activité 4 :

Considérons l'ensemble : $E=\{a,b,c,d\}$.

1) Déterminer les parties de E comportant 2 éléments.

Chaque partie s'appelle une **combinaison** de 2 éléments parmi 4 éléments.

2) En déduire le nombre de combinaison de 2 éléments parmi 4 éléments.

3) Calculer $\dfrac{A_4^2}{2!}$

Définition 3 et propriété 5 :

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal $n\geq 1$ et $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $p\leq n$

- Une **combinaison** de p éléments pris parmi les n élément de E est une partie dont le cardinal est p.
- Le nombre de combinaison de p éléments parmi n est noté C_n^p et on a $C_n^p=\dfrac{A_n^p}{p!}$

Exemple 12 :

1) Calculer C_8^4

2) Le loto : c'est choisir au hasard 6 numéros parmi l'ensemble $[\![1;49]\!]$. Combien de tirages possibles ?

3) Déterminer le nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une classe de 20 élèves.

Remarque 5 :

- $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$; • $C_n^p\in\mathbb{N}$; • $C_n^0=1$; • $C_n^n=1$; • $C_n^1=n$; • $C_n^{n-1}=n$

Remarques 6 :

- Avec la calculatrice C_n^p s'obtient par les boutons : $\boxed{n}$ $\boxed{shift}$ $\boxed{nCr}$ $\boxed{p}$ $\boxed{=}$
- L'ordre n'est pas important pour les combinaisons.
- Les C_n^p sont aussi appelés **coefficients binomiaux**.

Remarque 7 : Avec le tirage

C_n^p correspond à un tirage **simultané** de p boules dans une urne contenant n boules (pas d'ordre et pas de répétition).

Exemple 13 :

Un sac contient 3 boules rouge et 4 boules vert et 2 boules bleu. On tire simultanément 3 boules.

1) Combien de tirages possibles ?

2) Combien de tirages possibles sachant que les 3 boules tirées sont vertes ?

3) Combien de tirages possibles si les 3 boules tirées ont des couleurs deux à deux distincts ?

Exemple 14 :

Une urne contient 10 boules numérotés de 0,1...,9. on tire simultanément 3 boules de l'urne.

1) Quel est le nombre total des possibilités ?

2) Quel est le nombre de possibilité pour que :

a) Les trois boules tirées portent des chiffres pairs.

b) Les boules tirées portent des nombres dont le produit est nul.

Exemple 15 :

Montrer que $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

Propriétés 6 :

1) $C_n^p = C_n^{n-p}$ (La symétrie)

2) $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ (Formule de Pascal)

Exemple 16 :

Montrer les propriétés 6.

Triangle de pascal

On a :

$C_1^0 = 1$ et $C_1^1 = 1$ donc d'après la formule de Pascal $C_2^1 = C_1^0 + C_1^{0+1} = 2$, $C_3^1 = C_2^1 + C_2^{1+1} = 3$, $C_5^3 = C_4^2 + C_4^{2+1} = 10$ ......etc

Le triangle de Pascal est une présentation des coefficients binomiaux dans un triangle.

$$C_5^3 + C_5^4 = C_6^4$$

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10 +	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Propriété 7 : Formule de binôme de Newton

Soit a et b deux réels et n un entier naturel non nul. On a : $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$

Exemple 17 :

Soit a et b deux réels. Développer $(a+b)^4$ et $(a+b)^5$

Exemple 18 :

Montrer que $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ (remarquer que $2^n = (1+1)^n$)

II. Probabilité

1) Expériences aléatoires – Probabilité d'un événement

Expérience aléatoire - événement

Introduction :

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe le nombre obtenu.

- Cette expérience est appelée **expérience aléatoire**.
- L'ensemble A : « Obtenir un nombre impair » est appelé **événement**. Il regroupe les issues $\{1;3;5\}$ on écrit $A=\{1;3;5\}$
- Le nombre des éléments de l'ensemble A est appelé **cardinal** de A, on le note $Card(A)$. On a : $Card(A)=3$
- L'ensemble B : « Obtenir un nombre multiple de 5 » est $B=\{5\}$ on dit que B est un **événement élémentaire**.
- L'ensemble $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$ de toutes les issues possibles de cette expérience est appelé l'**univers** de cette expérience aléatoire.

Définition 1 :

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

- Une **issue** est un des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- Un **événement** est un ensemble des issues.
- Le nombre des éléments d'un événement A est appelé **cardinal** de A, on le note $Card(A)$
- Tout événement formé d'une seule issue est appelé un **événement élémentaire.**
- L'**univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes ses issues possibles. On le note souvent par Ω.

Vocabulaires

Vocabulaire

Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire.

- **L'événement contraire** de A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A
- **L'intersection** des événements A et B, noté $A\cap B$, est l'événement formé de tous les éléments de Ω appartenant à A et à B.
- **La réunion** des événement A et B, noté $A\cup B$, est l'événement formé de tous les éléments de Ω appartenant à A ou à B.
- On dit que les événements A et B sont **incompatible** si $A\cap B=\varnothing$.
- L'ensemble vide $\varnothing$ est appelé **événement impossible**. ($Card(\varnothing)=0$)
- L'univers Ω est appelé **événement certain**.

Exemple 1 :

On lance un dé dodécaédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 12 et on observe le nombre obtenu.
Déterminer les événements suivants :

- A : « Obtenir un nombre pair ».
- B : « Obtenir un nombre divisible par 3 ».
- C : « Obtenir un nombre multiple de 5 ».
- D : « Obtenir un nombre supérieur de 13 ».

Application 1 :

On lance un dé cubique non truqué deux fois successives. On note les résultats de cette expérience aléatoire par le couple $(a;b)$, où a est le résultat du premier lancer et b est le résultat du second lancer.

1) Déterminer Ω l'univers de cette expérience.
2) Déterminer les événements suivants :
   - A : « Obtenir deux nombres égaux ».
   - B : « Obtenir deux nombres pairs».
   - C : « Obtenir deux nombres dont le produit est 12 ».
3) Déterminer les événements $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cap C$ et $A\cup C$.

Probabilité d'un événement

Définition 2 :

La probabilité d'un événement A est un nombre compris entre 0 et 1 et qui exprime « la chance que l'événement A se produire » et la note par $P(A)$.

Exemple introductif :

La roue de loterie ci-dessous est équilibrée et partagée en dix secteurs identiques.

On fait tourner la roue et on observe le numéro repéré.

On considère les événements suivants :

A : « Obtenir le nombre 9 » et B : « Obtenir un nombre divisible par 3 ».

Déterminons $P(A)$ et $P(B)$.

On a $A=\{9\}$, puisque tous les secteurs ont les mêmes chances, alors le secteur 9 à une chance parmi 10 pour être repéré. Ainsi $P(A)=\frac{1}{10}$.

On a $B=\{3;6;9\}$, donc l'événement B à trois chances parmi 10 pour être réaliser. Ainsi $P(B)=\frac{3}{10}$.

On remarque :

$P(\{3\})+P(\{6\})+P(\{9\})=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$.

Ainsi $P(B)=P(\{3\})+P(\{6\})+P(\{9\})$.

Définition 3 :

La probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent, on la note $P(A)$.

Remarques 1 :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- $P(\Omega)=1$ et $P(\varnothing)=0$.
- Pour tout événement A : $0\le P(A)\le 1$.

Exemple 2 :

On lance un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

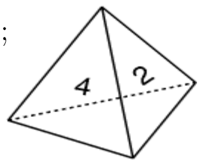
On considère les événements :

- A : « Obtenir un nombre pair et multiple de 3 ».
- B : « Obtenir un nombre premier ».

On a $A=$ --------------------- et $B=$ --------------------------

Donc : $P(A)=$ et $P(B)=$

Application 2 :



On lance un dé tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4 tel que $P(\{1\})=0,3$; $P(\{2\})=0,1$; $P(\{3\})=0,4$ et $P(\{4\})=0,2$.

Calculer la probabilité des événements suivants $A=\{2,4\}$; $B=\{1,2,4\}$ et $C=\{1,2,3,4\}$.

Propriétés 1 :

Soient A et B deux événements de Ω. On a :

- $\boxed{1}$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
- Si $A\cap B=\varnothing$, alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
- $\boxed{2}$ $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Application 3 :

On lance une pièce de monnaie non truquée trois fois successives. On considère les événements suivants :

- A : "Obtenir la face F exactement une fois".
- B : "Obtenir la face P au maximum deux fois".

1) À l'aide de l'arbre des choix, déterminer l'univers des possibilités.
2) Calculer la probabilité des événements : A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\cap B$ et $A\cup B$

Hypothèse d'équiprobabilité :

Définition 4 et propriété 2 :

- Dans une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisée, on dit qu'on est dans une **situation d'équiprobabilité**.
- Soit une expérience aléatoire d'univers Ω où tous les événements élémentaires ont même probabilité.

La probabilité d'un évènement A de Ω est $\boxed{3}$ $P(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$.

Remarque 2 :

Dans le cas de l'équiprobabilité la détermination d'une probabilité se ramène en générale à des problèmes de dénombrement.

Application 4 :

Un sac contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

1) Combien y' a-t-il de résultats possibles ?
2) Calculer la probabilité de chaque événement :
   - A :" Obtenir 3 boules rouges ".
   - B :" Obtenir 3 boules de même couleur ".
   - C :" Obtenir 3 boules de couleurs distinctes deux à deux "
   - D :" Obtenir exactement une boule rouge "
   - E :" Obtenir au moins une boule blanche "
   - $E\cap D$ et $E\cup D$.

2) Probabilité conditionnelle - indépendance de deux événements

Probabilité conditionnelle :

Activité :

Une classe est composée de 23 élevés répartis selon le tableau suivant :

	Redoublements	Nouveaux	Total
Garçons	8	3	11
Filles	7	5	12
Total	15	8	23

1) On sélectionne au hasard un élève de la classe, on suppose que tous les élèves ont la même probabilité d'être sélectionnés.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

G : "Sélection d'un garçon "

F : "Sélection d'une fille ".

I : "Sélection d'un élève redoublant ".

b) Calculer $P(G\cap I)$ et $P(F\cap I)$.

2) a) Sachant que l'élève choisi est un garçon. Quelle est la probabilité qu'il soit un redoublant ? notons cette probabilité par $P_G(I)$.

b) Vérifier que : $P_G(I)=\dfrac{P(G\cap I)}{P(G)}$.

c) Que représentent les probabilités suivantes : $P_F(I)$, $P_I(F)$ et $P_I(G)$? Calculer ces probabilités.

Définition 5 :

Soit B un événement de l'ensemble Ω , tel que $P(B)\neq 0$.

On définit sur Ω une nouvelle probabilité, notée P_B, en posant, pour tout événement A, $\boxed{4}$ $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

On note $P_B(A)=P(A/B)$ qui se lit « **probabilité de A sachant que B est réalisé** ».

Propriété 3 :

Soient A et B deux événements de l'ensemble Ω , tel que $P(B)\neq 0$.

On a : $\boxed{5}$ $P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)$.

Application 5 :

Un sac contient cinq jetons blancs avec les numéros 1,1,1,0,0, quatre jetons rouges avec les numéros 1,1,0,0 et deux jetons verts avec les numéros 0,1.

On tire successivement et avec remise trois jetons du sac.

1) Sachant que les jetons sont jetons indiscernables au toucher, calculer les probabilités des événements suivants :

- A : "Obtenir trois jetons de la même couleur".
- B : « Obtenir trois jetons de même numéro ».
- C : "Obtenir trois jetons de couleurs différentes, deux à deux."

2) Sachant que les boules ont la même couleur, quelle est la probabilité qu'elles aient le même numéro ?

3) Sachant que les boules tirées portent le même numéro, quelle est la probabilité qu'elles soient de couleurs différentes, deux à deux ?

Remarque 3 : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Formules des probabilités totales :

Propriété 4 : Formules des probabilités totales

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω

Pour tous événements A et B, on a : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$

Si $0 < P(A) < 1$, on obtient : $\boxed{6}$ $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$

On peut généraliser cette formule pour plus de deux événements.

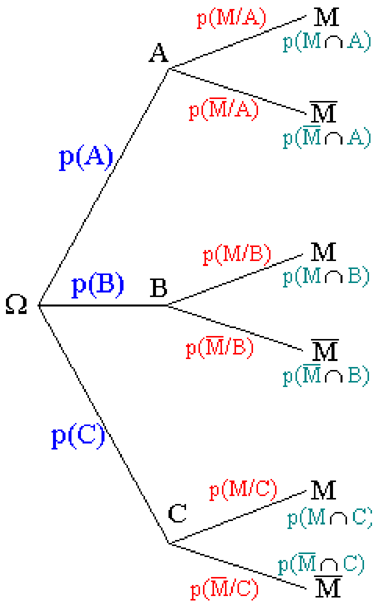
Remarque 4 : Arbre de probabilité :

C'est un arbre sur lequel on place des probabilités conditionnelles d'événements, cette présentation permet de rendre plus simple le calcul de probabilité :

Exemple 3 :

Soit p une probabilité sur un univers Ω et A, B et C trois évènements deux à deux incompatibles et leur réunion est Ω

Soit M un événement, donc nous obtenons l'arbre probabiliste ci-contre :



Remarque 5 :

Un **arbre de probabilités** comporte des **nœuds** et des **branches**.

On applique les règles suivantes :

- La somme des probabilités marquées sur des branches issues d'un même nœud est 1,
- La probabilité d'un événement qui correspond à un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des branches aboutissant à cet événement.

Donc dans l'exemple précédent : $p(M) = p(M \cap A) + p(M \cap B) + p(M \cap C)$

$$= p_A(M) \times p(A) + p_B(M) \times p(B) + p_C(M) \times p(C)$$

Indépendance de deux événements :

Définition 6 :

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.

$\boxed{7}$ On dit que A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Conséquence :

Soient A et B sont deux événements tel que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

$\boxed{8}$ A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$

Exemple 4 :

On lance un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On considère les événements :

- A : « Obtenir un nombre impair ».
- B : « Obtenir le nombre 3 » .

On a $P(A \cap B) =$-------- et $P(A) \times P(B) =$------------------.Donc :…………..

Application 6 :

Un sac contient neuf boules indiscernables au toucher :

Deux boules blanches portant le numéro 1, trois boules rouges portant les numéros 1, 1 et 2 et quatre boules noires portant les numéros 1, 1, 2 et 2.

On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

1) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : "Obtenir trois boules de couleurs différentes, deux à deux." ; B : "Obtenir trois boules portant le même numéro "

2) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Epreuves répétées :

Propriété 5 :

Soit A un événement de probabilité p dans une épreuve aléatoire.

Si cette épreuve est répétée n fois, alors la probabilité que A se produise exactement k $(k \leq n)$ fois est $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Exemple 5 :

Lorsqu'on lance un dé cubique non truqué quatre fois successives, la probabilité d'obtenir le chiffre 2 trois fois est :……

Application 7 :

La probabilité qu'un tireur d'arc touche la cible est de $\frac{2}{3}$.

Ce tireur a fait dix tentatives.

Quelle est la probabilité d'atteindre la cible exactement six fois ?

3) Variable aléatoire- variable aléatoire binomiale

Variable aléatoire :

Activité :

On lance une pièce de monnaie trois fois successives. On note X le nombre de fois que la face F apparaît.

1) Déterminer l'univers Ω puis en déduire les valeurs que peut prendre la variable X .

2) Que signifient les événements $(X=1)$ et $(X=2)$?

3) a) Vérifier que $P(X=1)=\frac{3}{8}$.

b) Remplir le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$				

Définition 7 :

Une **variable aléatoire** est une fonction de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à chaque issue de Ω associe un nombre.

On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X .

Remarque 6 :

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, …, x_n .

La loi de probabilité de X est donnée par toutes les probabilités $P(X=x_i)$.

Exemple 6 :

Une urne contient 6 jetons, numérotés de 1 à 6 indiscernables au toucher. Un joueur pioche un jeton.

- Si le numéro est pair, il gagne 5 Dh.
- S'il prélève le numéro 1, il gagne 40 Dh. Sinon il perd 15 Dh.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

La variable X peut prendre les valeurs ------------------------

Donc $X(\Omega)=$ --- et on a :

- $P(X=\ldots)=$ ---
- $P(X=\ldots)=$ ---
- $P(X=\ldots)=$ ---

On résume ces calculs dans le tableau :

x_i			
$P(X=x_i)$			

Remarque 7 :

Si X est une variable aléatoire et $X(\Omega)=\{x_1;x_2;x_3;.....;x_n\}$ l'ensemble des valeurs possibles de X

Alors : $P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_n)=1$

Application 8 :

Un sachet contient 6 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement et sans remise deux boules du sac.
Soit X la variable aléatoire qui relie chaque tirage au nombre de boules blanches tirées.

1) Déterminer $X(\Omega)$.

2) Donner la loi de probabilité X .

Définition 8 et propriétés 6 :

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire et $X(\Omega)=\{x_1,\ldots,x_n\}$.

- L'**espérance mathématique** de X est le nombre :

$\boxed{9}$ $E(X)=x_1\times P(X=x_1)+x_2\times P(X=x_2)+\ldots+x_n\times P(X=x_n)$

- La **variance** de X est le nombre positif : $V(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]$ et on a :

$\boxed{10}$ $V(X)=\left(x_1^2\times P(X=x_1)+x_2^2\times P(X=x_2)+\ldots+x_n^2\times P(X=x_n)\right)-\left(E(X)\right)^2$

- L'**écart-type** de X est le nombre : $\boxed{11}$ $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Remarque 8 :

$E(X^2)=x_1^2\times P(X=x_1)+x_2^2\times P(X=x_2)+\ldots+x_n^2\times P(X=x_n)$; $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

Exemple 7 :

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	-1	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

- L'espérance mathématique de X est :

$E(X)=$ --

- La variance de X est :

$V(X)=$ --

- L'écart-type de X est :

$\sigma(X)=$ --

Remarques 9 :

- $E(X)$ est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les valeurs $P(x_i)$.
- La variance et l'écart type sont appelés paramètres de dispersion, ils sont toujours positifs.
- Si l'écart type est grand, les données sont éloignées de $E(X)$. Inversement, plus l'écart type est petit, plus les données sont concentrées autour de $E(X)$.
- Si une variance est nulle, cela veut dire que toutes les observations sont égales à $E(X)$, ce qui implique qu'il n'y a aucune variation de celles-ci. Par contre, plus une variance est élevée plus la dispersion des observations est importante.
- L'écart type sert à déterminer la **dispersion des données d'un échantillon par rapport à** $E(X)$. Un écart type grand indique que les données sont dispersées autour de $E(X)$. Cela signifie qu'il y a beaucoup de variances dans les données observées. À l'inverse, plus les valeurs sont regroupées autour de $E(X)$, plus l'écart type est faible. Si l'écart type est proche de zéro, les données sont alors très peu dispersées par rapport à $E(X)$.
- Dans le domaine des jeux (le terme « espérance » vient de là), $E(X)$ est le gain moyen que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties. Cela permet de qualifier un jeu d'équitable (ou honnête) lorsque

$E(X)=0$;

Lorsque $E(X)>0$, le jeu est favorable au joueur, il lui est défavorable si $E(X)<0$.

Loi Binomiale :

Introduction :

On considère une expérience constituée par la répétition du même épreuve n fois. Soit A un événement de cette épreuve tel que $P(A)=p$.

On sait que la probabilité que l'événement A, se produise k fois $(k \leq n)$ est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

La variable aléatoire qui associe chaque résultat à $P(X=k)$ (k le nombre de fois que l'événement A est réalisé) est appelée une **variable aléatoire binomiale.**

Donc $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}$: $\boxed{12}$ $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Les nombres n et p sont appelés les paramètres de la variable binomiale.

Propriétés 7 :

Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètre n et p. On a :

$\boxed{13}$ $E(X)=n\times p$; $\boxed{14}$ $V(X)=n\times p\times(1-p)$

Exemple 8 :

Nous lançons une pièce de monnaie 5 fois successives. Soit X la variable aléatoire qui associe chaque résultat au nombre de fois où la F est apparu.

Nous avons une loi de probabilité binomiale à deux paramètres : $n=\ldots$ et $p=P(F)=\ldots$

On a $X(\Omega)=$ -- et :

- $P(X=\ldots)=$ ---
- $P(X=\ldots)=$ ---
- $P(X=\ldots)=$ ---
- $P(X=\ldots)=$ ---
- $P(X=\ldots)=$ ---
- $P(X=\ldots)=$ ---

Donc la loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i						
$P(X=x_i)$						

- L'espérance mathématique de X est :
  $E(X)=$ ---
- La variance de X est :
  $V(X)=$ ---
- L'écart-type de X est :
  $\sigma(X)=$ --

Application 9 :

On lance un dé cubique équilibré numéroté de 1 à 6 une seule fois. On considère l'événement :

A : « obtenir un diviseur de 3 »

1) Calculer $P(A)$.

2) On répète cette épreuve 3 fois de suite. Soit X la variable aléatoire qui égale au nombre de fois de la réalisation de l'événement A.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Résumé 12 : Probabilités

1) Dénombrement :

Principe fondamental de dénombrement :

Si une situation de dénombrement nécessite p étapes.

Et qu'il y a n_1 façons possibles de réaliser la première étape,

Et qu'il y a n_2 façons possibles de réaliser la seconde étape,

....et qu'il y a n_p façons possibles de réaliser la p ième étape,

Alors le nombre total des possibilités pour cette situation de dénombrement est $N = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$

Arrangement sans répétition :

- Tout élément de la forme $(x_1;x_2;....;x_p)$ tel que $x_1, x_2, ..., x_p$ sont deux à deux distincts s'appelle un arrangement sans répétition de p éléments de E.
- Le nombre d'arrangement sans répétition de p éléments de E est l'entier naturel noté par A_n^p tel que :

$A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$

Combinaison :

- Une combinaison de p éléments pris parmi les n élément de E est une partie dont le cardinal est p.
- Le nombre de combinaison de p éléments parmi n est noté C_n^p et on a $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

Propriétés :

- $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$; • $n! = A_n^n$
- $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$; • $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Avec la calculatrice :

- C_n^p s'obtient par les boutons : $\boxed{n}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ $\boxed{p}$ $\boxed{=}$
- A_n^p s'obtient par les boutons : $\boxed{n}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{nPr}}$ $\boxed{p}$ $\boxed{=}$
- $n!$ s'obtient par les boutons : $\boxed{n}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$

Formule de binôme de Newton :

Soit a et b deux réels et n un entier naturel non nul.

On a : $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$

Avec le tirage : On tire p éléments parmi n :

Type de tirage	$Card(\Omega)$	L'ordre
Simultané	C_n^p	N'est pas important
Successif sans remise	A_n^p	Important
Successif avec remise	n^p	Important

2) Probabilités :

Probabilité d'un événement.

- Pour tous événements A et B on a : $\boxed{1}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Pour tout événement A, $\boxed{2}$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Equiprobabilité.

Dans une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisée, on dit qu'on est dans une **situation d'équiprobabilité**.

La probabilité d'un évènement A de Ω est : $\boxed{3}$ $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$.

Probabilité conditionnelle

$\boxed{4}$ $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $\boxed{5}$ $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

$\boxed{7}$ On dit que A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$\boxed{8}$ A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$

Probabilités totales

Formule des probabilités totales :

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω

$\boxed{6}$ $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$ (On peut généraliser cette formule pour plus de deux événements)

Arbre de probabilité :

C'est un arbre sur lequel on place des probabilités conditionnelles d'événements, cette présentation permet de rendre plus simple le calcul de probabilité :

Variables aléatoires

Définition : Une variable aléatoire est une fonction de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à chaque issue de Ω associe un nombre. On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X .

Remarque : Si X est une variable aléatoire et $X(\Omega)=\{x_1;x_2;x_3;.....;x_n\}$ l'ensemble des valeurs possibles de X

Alors : $P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_n)=1$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire et $X(\Omega)=\{x_1,\ldots,x_n\}$.

- L'espérance mathématique de X est le nombre :

$\boxed{9}$ $E(X)=x_1\times P(X=x_1)+x_2\times P(X=x_2)+\ldots+x_n\times P(X=x_n)$

- La variance de X est le nombre positif : $\boxed{10}$ $V(X)=\left(x_1^2\times P(X=x_1)+x_2^2\times P(X=x_2)+\ldots+x_n^2\times P(X=x_n)\right)-\left(E(X)\right)^2$
- L'écart-type de X est le nombre : $\boxed{11}$ $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Loi Binomiale

Définition : On réalise n fois successivement et d'une manière indépendante une expérience aléatoire qui a deux résultats possibles : succès de probabilité p et échec de probabilité $(1-p)$

Donc $\forall k\in\{0,1,\ldots,n\}$: $\boxed{12}$ $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

X : nombre de succès obtenu est appelée une variable aléatoire **binomiale** de paramètre n et p.

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètre n et p . On a :

$\boxed{13}$ $E(X)=n\times p$; $\boxed{14}$ $V(X)=n\times p\times(1-p)$

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : 2BACSPF-2BACSVT

Série 13
Probabilités

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 1

Un sac contient trois jetons blancs portant les numéros 1, 1, 2 et quatre jetons noirs portant les numéros 1, 2, 2, 2. On tire successivement et sans remise trois jetons du sac.
Sachant que les jetons sont jetons indiscernables au toucher, calculer les probabilités des événements suivants :

- A : "Obtenir trois jetons de la même couleur".
- B : "Obtenir au moins un jeton blanc".
- C : "Obtenir trois jetons du même nombre".
- D : "Obtenir trois jetons dont la somme est paire".
- E "Obtenir trois jetons dont la somme est un nombre impair".

Exercice 2

Une personne lave des gobelets dans un café.
La probabilité qu'il casse la première tasse qu'il lave est de $\frac{2}{7}$.
Lorsqu'il casse le premier gobelet, son attention augmente de sorte que la probabilité de casser le deuxième est de $\frac{1}{5}$.
S'il ne casse pas le premier gobelet, la probabilité de casser le deuxième est de $\frac{3}{7}$.
On considère les événements suivants :
A : « casser le premier gobelet » ;
B : « Casser le second gobelet ».

1) Construire un arbre de probabilité.
2) Calculer la probabilité de casser le premier et le second gobelet.
3) Calculer la probabilité de casser le second gobelet.
4) Calculer la probabilité que le second gobelet reste intact étant donné que le premier gobelet reste intact.

Exercice 3

Un sac u_1 contient quatre boules blanches et une boule noire, et un autre sac u_2 contient deux boules blanches et trois boules noires.
On choisit au hasard l'un des deux sacs puis on y tire une boule.

1) Construire un arbre de probabilité.
2) Calculer la probabilité de choisir le sac u_1 et d'obtenir une boule noire.
3) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
4) En déduire la probabilité d'obtenir une boule blanche.
5) La boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle soit tirée du sac u_1 ?

Exercice 4

Un sac contient six boules blanches et quatre boules noires.
On considère le jeu suivant :
Le joueur tire 3 boules simultanément du sac, et le joueur est considéré comme gagnant si les trois boules tirées sont blanches.
Ahmed a joué ce jeu 4 fois. Quelle est la probabilité de gagner exactement 3 fois ?

Exercice 5 : S.R 2022

Une urne contient trois boules blanches, quatre boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1) On considère les événements suivants :
A: ‘’ Obtenir exactement deux boules rouges ‘’.
B: ‘’ Obtenir exactement une boule verte ‘’.
a) Montrer que $p(A)=\frac{12}{55}$ et $p(B)=\frac{21}{44}$.
b) Calculer $p(A/B)$: la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2) Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées.
c) Déterminer la loi de probabilité de X .
d) Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes.

Exercice 6 : S.N 2018

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : <u>cinq boules rouges</u> portant les nombres 1 ;1 ;2 ;2 ;2 et <u>quatre boules blanches</u> portant les nombres 1 ;2 ;2 ;2.
On considère l'experience suivante : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.
Soient les événements :
A : ‘’les trois boules tirées sont de meme couleur’’.
B : ‘’les trois boules tirées portent le meme nombre’’.
C : ‘’les trois boules tirées sont de meme couleur et portent le meme nombre’’.

1) Montrer que $p(A)=\frac{1}{6}$, $p(B)=\frac{1}{4}$ et $p(C)=\frac{1}{42}$
2) On répète l'experience précédente trois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'événement A .
a) Déterminer les paramètres de la variable alétoire binomiale X .
b) Montrer que $p(X=1)=\frac{25}{72}$ et calculer $p(X=2)$

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 2BACSPF-2BACSVT	**Série 13** **Probabilités**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 7

On tire simultanément 3 boules d'une urne qui contient boules *rouges*, 3 boules *blanches* et 7 boules *noires*.

- Calculer la probabilité des événements suivants :

A: « Obtenir une boule de chaque couleur »

B: « Obtenir trois boules de même couleur »

C: « Obtenir deux boules rouges et une boule d'une autre couleur »

D: « Obtenir au moins deux boules noires »

Exercice 8

Une urne contient deux boules blanches numérotées 1,2 et trois boules rouges numérotées 1,2,2 toutes les boules sont indiscernables au toucher .

1) On tire simultanément *deux* boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité des événements suivants:

A « Tirer deux boules de couleurs différentes »

B « Tirer deux boules de même numéro »

b) Sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différents, calculer la probabilité pour qu'elles portent le même numéro.

2) Dans cette question, l'épreuve consiste à tirer successivement et sans remise deux boules de l'urne soit X la variable aléatoire égale au nombre des boules rouges tirées, déterminer la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$.

Exercice 9

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher :5 boules rouges numérotées 1 ;1 ;2 ;2 ;2 et 4 boules blanches portant les nombres 1 ;2 ;2 ;2.

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1) Calculer la probabilité des événements suivants :

A « Les trois boules tirées sont de même couleur »

B « Les trois boules tirées portant le même nombre »

C « Les trois boules tirées sont de même couleur et portant le même nombre »

2) On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui égale nombre de fois de réalisation de A.

a) Déterminer les paramètres de la variable X.

b) Montrer que $P(X=1)=\dfrac{25}{72}$ et calculer $P(X=2)$

Exercice 10

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires, indiscernables au toucher.

Les boules blanches sont numérotées -1 ,-1,0,1,1,1 et les boules noires sont numérotées -1 ,0,1,1

On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne, et on considère les événements suivants :

A « Les 3 boules tirées sont de même couleur »

B « Les 3 boules tirées sont de même numéro »

C « Les 3 boules tirées sont de même numéro et de même couleurs »

Correction

1)a) Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

b) En déduire que $p(A\cup B)=\dfrac{17}{60}$.

2) Déterminer les probabilités des événements

D « Obtenir au moins une boule numérotée 1 »

E « La somme de numéros inscrit sur les boules tirée est égale à 0 »

Exercice 11

1) Un groupe de 26 personnes dont 10 sont des femmes doit élire un comité de 3 personnes.

Calculer la probabilité de chacun des événements :

A « Le comité contient au moins une femme ».

B « Le comité contient au moins 2 hommes ».

C « Le comité ne contient pas à la fois Madame X et Monsieur Y ».

2) Ce groupe de 26 personnes doit élire un comité composé d'un président d'un vice-président et d'un secrétaire.

- Calculer la probabilité de chacun des événements :

E « Le poste de président doit être occupé par un homme »

F « Le président est un homme, le secrétaire est une femme »

G « Les deux sexes figurent dans le comité ».

Exercice 12 : S.N.2022

Une urne contient 10 boules : 3 boules blanches, 3 boules vertes et 4 boules rouges indiscernables au toucher.

On tire au hasard simultanément trois boules de l'urne

1) Montrer que $P(A)=\dfrac{1}{6}$; où A est l'évènement :

« N'obtenir aucune boule rouge »

2) Calculer $P(B)$; où B est l'événement :

« Obtenir trois boules blanches ou 3 boules vertes »

3) Montrer que $P(C)=\dfrac{1}{2}$; où C est l'événement

4) Calculer $P(D)$: où D est l'événement « Obtenir au moins deux boules rouges »

DL6

2BACSPF-2BACSVT
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Probabilités)

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher, six boules bleues portant le chiffre 1 et quatre boules rouges dont trois portant le chiffre -1 et une portant le chiffre 1. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1) Quelle est le nombre de tirages possibles ?
2) Calculer la probabilité des événements suivants :
   - A : "tirage de trois boules de même couleur"
   - B : "tirage de trois boules portant le même chiffre"
3) Calculer $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ et $P(\overline{A})$
4) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le produit des chiffres notés sur les trois boules tirées. Déterminer la loi de la probabilité de X.
5) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$
6) On répète l'expérience aléatoire précédente quatre fois de suite et on remet les boules tirées dans l'urne après chaque tirage de trois boules. Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de même couleur exactement deux fois ?

Exercice 2 (Probabilités)

On considère un dé parfait dont les faces sont numérotées par : -2, 2, 1, 1, 1 et -1. On lance ce dé une fois ; et on note le numéro apparu sur la face supérieure.

1) Calculer la probabilité des événements suivants :
   - A : "le numéro noté est pair"
   - B : "le numéro noté est positif"
2) Calculer $P(A\cap B)$ et $P_A(B)$
3) Est-ce que les deux événements A et B sont indépendants ? Justifier votre réponse.
4) On lance ce dé cette fois trois fois de suite. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois d'apparition d'un nombre pair.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer la probabilité de l'événement C : "on obtient au maximum deux fois un nombre pair".
   c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$

Correction

Exercice 1 (14points)

On considère une urne contenant huit boules indiscernables au toucher : trois boules rouges numérotés 0 ; 1 ; 2, et cinq boules noires numérotés 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1.

On tire au hasard **successivement et sans remise** deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

- A : " Obtenir deux boules de couleurs différents "
- B : " Obtenir deux boules portant des numéros pairs "

1) Montrer que : $P(A)=\frac{15}{28}$, $P(B)=\frac{5}{14}$ et $P(\bar{A}\cap B)=\frac{1}{7}$ 3pt

2) En déduire que : $P_B(\bar{A})=\frac{2}{5}$ 1pt

3) Montrer que : $P(A\cap B)=\frac{3}{14}$ 2pt

4) Vérifier par deux méthodes que $P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(B)$ 2pt

5) Montrer que $P(A\cup B)=\frac{19}{28}$ 1pt

6) On répète cette expérience trois fois en remettant dans l'urne les deux boules tirées, après chaque tirage. On considère la variable aléatoire X qui égale au nombre de fois de réalisation de l'événement A.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. 3pt

b) Montrer par deux méthodes que :

L'espérance mathématique de X est $E(X)=\frac{45}{28}$ et que la variance de X est $V(X)=\frac{585}{784}$ 2pt

Exercice 2 (6points)

Une urne U_1 contient deux boules blanches, une boule rouge et trois boules vertes.

Une autre urne U_2 contient une boule blanche, deux boules rouges et une boule verte.

On considère l'expérience suivante : « on tire une boule de U_1 puis on tire une boule de U_2 »

On considère les événements suivants :

- A : « Les deux boules tirées sont blanches »
- B : « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

1) En utilisant le principe fondamental de dénombrement montrer que le nombre de tirages possibles est $Card(\Omega)=24$ 1pt

2) Montrer que $P(A)=\frac{1}{12}$ 1pt

3) Montrer que $P(\bar{B})=\frac{7}{24}$ et déduire que $P(B)=\frac{17}{24}$ 2pt

4) On répète cette expérience trois fois en remettant dans les urnes les deux boules tirées, après chaque tirage.

Quelle est la probabilité pour que l'événement A soit réalisé exactement deux fois ? 2pt

Exercice 1 (14points)

On considère une urne contenant sept boules indiscernables au toucher : quatre boules noires numérotés 0 ; 0 ; 1 ; 2 et trois boules rouges numérotés 1 ; 2 ; 2

On tire au hasard **successivement et sans remise** deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

- A : " Obtenir deux boules de couleurs différents "
- B : " Obtenir deux boules portant des numéros pairs "

1) Montrer que : $P(A)=\frac{4}{7}$, $P(B)=\frac{10}{21}$ et $P(\bar{A}\cap B)=\frac{4}{21}$ 3pt

2) En déduire que : $P_B(\bar{A})=\frac{2}{5}$ 1pt

3) Montrer que : $P(A\cap B)=\frac{2}{7}$ 2pt

4) Vérifier par deux méthodes que $P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(B)$ 2pt

5) Montrer que $P(A\cup B)=\frac{16}{21}$ 1pt

6) On répète cette expérience trois fois en remettant dans l'urne les deux boules tirées, après chaque tirage. On considère la variable aléatoire X qui égale au nombre de fois de réalisation de l'événement A.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. 3pt

b) Montrer par deux méthodes que :

L'espérance mathématique de X est $E(X)=\frac{12}{7}$ et que la variance de X est $V(X)=\frac{36}{49}$ 2pt

Exercice 2 (6points)

Une urne U_1 contient une boule rouge, deux boules blanches et une boule verte.

Une autre urne U_2 contient deux boules rouges, une boule blanche et deux boule verte.

On considère l'expérience suivante : « on tire une boule de U_1 puis on tire une boule de U_2 »

On considère les événements suivants :

- A : « Les deux boules tirées sont rouge »
- B : « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

1) En utilisant le principe fondamental de dénombrement montrer que le nombre de tirages possibles est $Card(\Omega)=20$ 1pt

2) Montrer que $P(A)=\frac{1}{10}$ 1pt

3) Montrer que $P(\bar{B})=\frac{3}{10}$ et déduire que $P(B)=\frac{7}{10}$ 2pt

4) On répète cette expérience quatre fois en remettant dans les urnes les deux boules tirées, après chaque tirage.

Quelle est la probabilité pour que l'événement A soit réalisé exactement deux fois ? 2pt

Examen blanc

Sujet N ° 1

Matière : Mathématiques

Classe : 2 Bac SVT&SPF

Année scolaire : 2025/2026

Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ (\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2} \end{cases}$

1/ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n > 3$.

2/ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$; $w_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

a/ Montrer que (w_n) est une suite arithmétique.

b/ En déduire w_n et u_n en fonction de n.

c/ Déterminer la limite de la suite (u_n).

3/ Calculer en fonction de n la somme : $S_n = w_0 + w_1 + \cdots\cdots + w_n$.

Exercice 2

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 10z + 26 = 0$

2/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 5 - i$, $b = 2 + 3i$, $c = 4i$ et $d = 6 + i$.

Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -2.

Correction

a/ Montrer que D est l'image du point C par l'homothétie h.

b/ Montrer que $\dfrac{a-d}{b-d} = \dfrac{1}{2}i$.

c/ En déduire que le triangle ABD est rectangle et que $BD = 2AD$.

3/ Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan vérifiant : $|z - 5 + i| = |z - 4i|$.

Exercice 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(2;2;1)$, $B(3;1;1)$, $C(1;1;-1)$ et $I(2;0;2)$.

1/ Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ et en déduire que $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2/ a/ Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par I et perpendiculaire au (ABC).

b/ Déterminer les coordonnées de H l'intersection de la droite (D) et le plan (ABC).

3/ On considère la sphère (S) de centre I et qui coupe le plan (ABC) en un cercle (C) de centre B et de rayon 1

a/ Montrer que la distance du point I au plan (ABC) est $d(I;(ABC)) = \sqrt{3}$.

b/ En déduire que le rayon de la sphère (S) est $R = 2$ puis déterminer son équation cartésienne.

Exercice 4

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : trois boules blanches numérotées 2-2-1, quatre boules rouge numérotées 2-1-1-1 et une boule verte porte le numéro 1

On tire simultanément trois boules de l'urne

Soit les évènements suivants :

A : Les trois boules tirées portent le même couleur

B : Une boule au plus porte le numéro 1

1/ Montrer que $P(A) = \dfrac{5}{56}$ et $P(B) = \dfrac{2}{7}$

2/ Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules qui portent le numéro 1.

a/ Vérifier que $X=\{0;1;2;3\}$

b/ Montrer que $P(X=1)=\dfrac{15}{56}$ et $P(X=2)=\dfrac{15}{28}$

c/ Préciser la loi de probabilité de X

Problème

A/ Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2ln(x)+1+\dfrac{3}{x^2}$

1/ a/ Montrer que $g'(x)=\dfrac{2(x^2-3)}{x^3}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

b/ En déduire que la fonction g est décroissante sur $\left]0;\sqrt{3}\right]$ est croissante sur $\left[\sqrt{3};+\infty\right[$.

2/ a/ Montrer que $g(\sqrt{3})=2+\ln 3$ puis vérifier que $g(\sqrt{3})>0$.

b/ En déduire que $g(x)>0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Correction

B/ On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(x^2+3)ln(x)$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$

tel que $\|\vec{i}\|=1cm$ et $\|\vec{j}\|=2cm$

1/ Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ (On pourra remarquer que $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{(x^2+3)}{x}ln(x)$).

b/ En déduire que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique et déterminer sa direction.

3/ a/ Montrer que $f'(x)=xg(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

b/ Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis déduire que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

4/ a/ Montrer que $f''(x)=\dfrac{2x^2ln(x)+3(x^2-1)}{x^2}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

b/ Montrer que $2x^2ln(x)$ et $3(x^2-1)$ ont le même signe sur $]0;1]$ et déduire que $f''(x)\le0$ pour tout $x\in]0;1]$.

c/ Montrer que $2x^2ln(x)$ et $3(x^2-1)$ ont le même signe sur $[1;+\infty[$ et déduire que $f''(x)\ge0$ pour tout $x\in[1;+\infty[$.

d/ En déduire que la courbe (C_f) admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

5/ Montrer que $y=4x-4$ est l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

6/ Construire (C_f) et (T) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7/ a/ Montrer que la fonction $H:x\mapsto\dfrac{x^3}{3}+3x$ est une primitive de la fonction $h:x\mapsto x^2+3$ sur $\mathbb{R}$.

b/ Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_1^e(x^2+3)ln(x)dx=\dfrac{2}{9}(14+e^3)$.

c/ Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Examen blanc

Sujet N ° 2

Matière : Mathématiques

Classe : 2 Bac SVT&SPF

Année scolaire : 2025/2026

Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{2}{3} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6} \end{cases}$

1/ a/ Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $-1 < u_n < 3$.

b/ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n+1)(u_n-3)}{u_n+6}$ et déduire que la suite (u_n) est croissante.

2/ On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

a/ Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b/ Exprimer v_n et u_n en fonction de n .

3/ Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2

A/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

B/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)$.

1/ a/ Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes a et b .

b/ Montrer que $a^{12} + b^{12} = 2^{12}\left(1 - (2+\sqrt{3})^6\right)$

2/ Soit C un point du plan complexe tels que $OA = OC$ et $\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

a/ Montrer que $|c| = 2$ et $arg(c) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ (c est l'affixe du point C).

b/ En déduire que $c = 1 + \sqrt{3}i$ et vérifier que $b = a + c$.

c/ Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un losange.

Exercice 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(0;0;-1)$, $B\left(-1;1;\dfrac{1}{2}\right)$, $C(0;1;0)$ et la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0$.

1/ a/ Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\dfrac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

b/ Montrer que l'équation cartésienne du plan (ABC) est $x - 2y + 2z + 2 = 0$

2/ Montrer que (S) est de centre $\Omega(1;-2;-2)$ et de rayon $R = 2$.

3/ Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) en un cercle (C) de rayon $r = \sqrt{3}$.

4/ Soit (D) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC) .

a/ Montrer que $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = -2 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (D)

b/ Montrer que le centre du cercle (C) est le point $H\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{4}{3}; -\dfrac{8}{3}\right)$

5/ Soit $K(a;b;-1)$ un point de la sphère (S) tel que a et b des nombres réels. On considère le plan (P) d'équation cartésienne $(a-1)x + (b+2)y + z - a + 2b + 3 = 0$

Correction

a/ Montrer que K appartient au plan (P).

b/ Montrer que le plan (P) est tangente à la sphère (S) au point K.

Exercice 4

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : trois boules blanches numérotées 2-1-1, deux boules rouges numérotées 1-1et quatre boules vertes numérotées 2-2-2-1.

On tire simultanément trois boules de l'urne.

Soit les évènements suivants :

A : Les trois boules tirées portent le même numéro

B : Obtenir trois boules deux à deux de couleurs différentes

1/ Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

2/ a/ Montrer que $P(A\cap B)=\frac{1}{21}$.

b/ Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3/ Calculer la probabilité d'obtenir trois boules deux à deux de couleurs différentes sachant qu'ils portent le même numéro.

Problème

A/ Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2\sqrt{x}-2-ln(x)$

1/ Montrer que $g'(x)=\frac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

2/ Dresser le tableau de variation de g. (Calcul des limites n'est pas demandé)

3/ En déduire que $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

B/ On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x-\sqrt{x}ln(x), \text{ si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ Montrer que f est continue à droite en 0 (On pourra poser $t=\sqrt{x}$).

2/ Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3/ a/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=-\infty$ et en déduire la nature du branche parabolique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

Correction

c/ Etudier la position relative de la droite (Δ) d'équation $y=x$ et la courbe (C_f).

4/ a/ Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

b/ Dresser le tableau de variation de f.

c/ Calculer $f'(1)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

5/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

6/ Construire, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

7/ a/ Vérifier que la fonction $H:x\mapsto\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction $h:x\mapsto\sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$.

b/ Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_1^e\sqrt{x}ln(x)dx=\frac{2e\sqrt{e}+4}{9}$.

c/ En déduire en cm^2, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

C/ Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1/ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n > 1$

2/ Montrer que la suite (u_n) est décroissante (On pourra utiliser la question B/ 3/ c/)

3/ En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Examen blanc

Sujet N ° 3

Matière : Mathématiques

Classe : 2 Bac SVT&SPF

Année scolaire : 2025/2026

Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Calcul de probabilités	03 points
Exercice 4	Géométrie dans l'espace	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 3}{u_n}$.

1 /a/ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad u_n > 3$.

b/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n}$.

c/ Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

Correction

2 /a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad u_{n+1} - 3 \leq \dfrac{1}{3}(u_n - 3)$.

b/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad u_n - 3 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

c/ Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3 / On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 1}$.

a/ Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b/ Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c/ Retrouver la valeur de la limite de (u_n).

Exercice 2

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 4z + 13 = 0$

2/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 6 + 2i$, $b = 2 + 3i$ et $c = 5 - 2i$.

Soit z' l'affixe du point M' l'image du point $M(z)$ par la rotation R de centre $\Omega(1-i)$ et d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$.

a/ Montrer que $z' = -iz + 2$.

b/ Vérifier que le point C est l'image du point B par la rotation R.

c/ Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} = i$

d/ En déduire que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

Exercice 3

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : trois boules blanches numérotées 2-1-0, deux boules rouge numérotées 2-1.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Soit les évènements suivants :

A : les deux boules tirées portent le numéro 1

B : Obtenir une boule blanche dans le premier tirage

1/ Montrer que $P(A) = \dfrac{1}{10}$.

2/ Calculer $P(B)$ et montrer que $P(A \cap B) = \dfrac{1}{20}$.

3/ Les évènements A et B sont-ils indépendants ? justifier la réponse.

4/ Soit X la variable aléatoire qui égale le produit des numéros tirées.

Préciser la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$.

Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(-1;1;1)$, $B(7;-5;5)$ et le plan (Q) d'équation $2x-3y+4z+5=0$

Soit (S) la sphère du diamètre $[AB]$

1/ Montrer que (S) est de centre $\Omega(3;-2;3)$ et de rayon $R=\sqrt{29}$.

2/ En déduire que l'équation cartésienne de (S) est $x^2+y^2+z^2-6x+4y-6z-7=0$

3/ Montrer que l'équation cartésienne du plan (P) tangente à (S) au point A est $4x-3y+2z+5=0$

4/ Montrer que le plan (Q) est tangente à (S) en un point C puis déterminer les coordonnées de C.

Problème

A/ Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1-x+xln(x)$

1/ Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est décroissante sur $]0;1]$ est croissante sur $[1;+\infty[$.

2/ Calculer $g(1)$ et en déduire que $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Correction

B/ On considère la fonction numérique f définie sur $[0;e[\cup]e;+\infty[$ par :

$f(0)=0$ et $f(x)=x+\dfrac{1}{1-ln(x)}$, si $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

b/ Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

c/ Etudier la position relative de (Δ) et (C_f).

2/ a/ Montrer que f est continue à droite en 0.

b/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3/ a/ Montrer que $f'(x)=1+\dfrac{1}{x(1-ln(x))^2}$ pour tout $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$.

b/ Dresser le tableau de variation de f.

c/ On donne :

x	3.4	3.5	3.6	3.7
$f(x)$	-1.06	-0.45	0.04	0.45

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]e;+\infty[$ et que $3.5<\alpha<3.6$.

4/ a/ Montrer que l'équation de la tangente (D) à (C_f) au point d'abscisse 1 est $y=2x$

b/ Montrer que $f(x)\geq 2x$ pour tout $x\in]0;e[$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

5/ Construire, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) et la droite (D). (On admet que le point $I(e^{-1};f(e^{-1}))$ est un point d'inflexion de (C_f) et $e\simeq 2.7$, $e^{-1}\simeq 0.4$)

6/ a/ Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_{\frac{1}{2}}^{1} xln(x)dx=\dfrac{ln(2)}{8}-\dfrac{3}{16}$.

b/ Montrer que $2x\leq f(x)\leq x+1-xln(x)$ pour tout $x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$

c/ Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{2}$ et $x=1$. Montrer que $\dfrac{3}{4}\leq A\leq\dfrac{17}{16}-\dfrac{ln(2)}{8}$.

Examen blanc

Sujet N ° 4

Matière : Mathématiques

Classe : 2 Bac SVT&SPF

Année scolaire : 2025/2026

Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Calcul de probabilités	03 points
Exercice 3	Nombres complexes	03 points
Exercice 4	Géométrie dans l'espace	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur $I=[-1;2]$ par : $f(x)=\dfrac{4x+2}{x+3}$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1/ Etudier les variations de la fonction f sur I .

2/ Montrer que $f(I)\subset I$.

3/ Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad -1\leq u_n\leq 2$.

4/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+3}$.

5/ Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

6/ En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2

Un sac contient :

*quatre boules rouges numérotées 2-1-1-1.

* cinq boules vertes numérotées 2-2-1-1-1.

(Les boules sont indiscernables au toucher).

1/ On tire au hasard, successivement et sans remise trois boules de sac.

Soit les évènements suivants :

A * les trois boules tirées portent le même couleur *

B * les trois boules tirées portent le même numéro *

a/ Montrer que $P(A)=\dfrac{1}{6}$, $P(B)=\dfrac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\dfrac{1}{42}$ et $P(A\cup B)=\dfrac{11}{28}$.

b/ Calculer $P_A(B)$.

2/ On tire simultanément trois boules de sac et soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros tirées.

Préciser la loi de probabilité de X puis donner $E(X)$.

Exercice 3

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2-6z+10=0$

2/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=2-\sqrt{2}$, $b=3-i$ et $c=\bar{b}$.

a/ Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$.

b/ En déduire que $\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

c/ Montrer que $\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)^{20}=-2^{10}$

Correction

3/ Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$

a/Montrer que l'affixe du point D l'image du point B par la rotation R est $d=-1-3i$

b/ En déduire la nature du triangle OBD

Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points $A(-2;0;4)$, $B(-1;2;1)$ et $\Omega(-1;0;2)$.

1/ Montrer que l'équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω est passante par A est :
$x^2+y^2+z^2+2x-4z=0$

2/ Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x=\alpha \\ y=-2\alpha \\ z=-3-4\alpha \end{cases} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

a/ Calculer $d(\Omega;(D))$ et en déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S)

b/ Montrer que $B\in(D)$ et $(\Omega B)\perp(D)$

c/ En déduire les coordonnées de H le point de contact entre (D) et (S)

Problème

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

A/ 1/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2/ a/ Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

b/ Dresser le tableau de variations de f

c/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

3/ a/ Justifier que la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0 a pour équation $y=x+1$

b/ Pour tout réel x on pose $g(x)=f(x)-(x+1)$

Montrer que pour tout réel x, $g'(x)=-\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ puis calculer $g(0)$.

c/ Dresser le tableau de variation de g et en déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$

4/ Tracer (C_f) et (T) (on prend $ln(3)\simeq 1.1$)

Correction

B/ 1/ a/ Montrer que pour tout réel x, $f(x)=x \Leftrightarrow g(x)=-1$

b/ En déduire que la droite (Δ) d'équation $y=x$ coupe la courbe (C_f) en un unique point d'abscisse α tel que $2<\alpha<3$

2/ a/ Montrer que pour tout réel x, $f(x)=-1+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

b/ Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=ln(2)$.

Tronc commun sciences et tronc commun technologique
Tome 1
10 Cours bien détaillés
10 Résumés bien précis
10 Séries d'exercices corrigées
03 Devoirs libres corrigés
03 Devoirs surveillés
Exercices et stratégies d'olympiades
2025|2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
Tronc commun sciences et tronc commun technologique
Tome 2
05 Cours bien détaillés
05 Résumés bien précis
05 Séries d'exercices corrigées
03 Devoirs libres corrigés
03 Devoirs surveillés
Exercices et stratégies d'olympiades
2025|2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
Première année Bac sciences expérimentales
Tome 1
06 Cours bien détaillés
06 Devoirs surveillés
2025|2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
Première année Bac sciences expérimentales
Tome 2
06 Cours bien détaillés
06 Devoirs surveillés
2025|2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
Première année Bac sciences économiques et la gestion
10 Cours bien détaillés
10 Résumés bien précis
10 Séries d'exercices
6 Devoirs libres corrigés
6 Devoirs surveillés
2025|2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
Première année Bac Sciences Mathématiques
Tome 1
08 Cours bien détaillés
08 Résumés bien précis
08 Séries d'exercices
04 Devoirs libres corrigés
08 Devoirs surveillés
2025|2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
Première année Bac Sciences Mathématiques
Tome 2
06 Cours bien détaillés
06 Résumés bien précis
06 Séries d'exercices
04 Devoirs libres corrigés
08 Devoirs surveillés
2025|2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2BACSPF & 2BACSVTF
Tome 1
06 Cours bien détaillés
06 Résumés bien précis
06 Séries d'exercices corrigées
03 Devoirs libres corrigés
06 Devoirs surveillés
Extraits du bac
Examen blanc corrigé
2025|2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2BACSPF & 2BACSVTF
Tome 2
05 Cours bien détaillés
05 Résumés bien précis
05 Séries d'exercices corrigées
03 Devoirs libres corrigés
06 Devoirs surveillés
Extraits du bac
04 Examens blancs corrigés
2025|2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2BSM A&B
Résumés des cours
8 Séries d'exercices et problèmes
8 Devoirs libres corrigés
Extraits du bac
Examen blanc corrigé
Astuces pour les concours
2025|2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant