

# Première année Bac Sciences

## Mathématiques

Tome 1

08 Cours bien détaillés

08 Résumés bien précis

08 Séries d'exercices

04 Devoirs libres corrigés

08 Devoirs surveillés

2025/2026

Préparé par **Aissa HIYAB** professeur d'enseignement secondaire qualifiant

## Table des matières

### 1 : Notions de logique

Cours 1.....	03
Résumé 1.....	12
Série 1.....	13

### 2 : Les ensembles

Cours 2.....	16
Résumé 2.....	20
Série 2.....	21

Devoir Libre 1.....	23
---------------------	----

Devoir surveillé 1-A.....	24
---------------------------	----

Devoir surveillé 1-B.....	25
---------------------------	----

### 3 : Les applications

Cours 3.....	26
Résumé 3.....	31
Série 3.....	32

### 4 : Fonctions numériques

Cours 4.....	34
Résumé 4.....	46
Série 4.....	48

Devoir Libre 2.....	51
---------------------	----

Devoir surveillé 2-A.....	52
---------------------------	----

Devoir surveillé 2-B.....	53
---------------------------	----

### 5 : Barycentre

Cours 5.....	54
Résumé 5.....	62
Série 5.....	63

### 6 : Analytique du produit scalaire dans le plan

Cours 6.....	65
Résumé 6.....	80
Série 6.....	81

Devoir Libre 3.....	83
---------------------	----

Devoir surveillé 3-A.....	84
---------------------------	----

Devoir surveillé 3-B.....	85
---------------------------	----

### 7 : Suites numériques

Cours 7.....	86
Résumé 7.....	99
Série 7.....	92

### 8 : Trigonométrie

Cours 8.....	94
Résumé 8.....	99
Série 8.....	100

Devoir Libre 4.....	102
---------------------	-----

Devoir surveillé 4-A.....	103
---------------------------	-----

Devoir surveillé 4-B.....	104
---------------------------	-----

Corrections des devoirs libres :



# 1) Proposition – Fonction propositionnelle – Quantificateurs

## A retenir 1 :

1/ On appelle **proposition** (ou assertion) tout énoncé mathématique ayant un sens et qui pouvant être soit vrai soit faux (il ne peut être à la fois vrai et faux).

2/ On appelle **fonction propositionnelle** tout énoncé mathématique qui contient une variable (ou plus) appartenant à un ensemble donné, et qui devient une proposition chaque fois qu'on remplace cette variable par un élément de cet ensemble.

## Remarques 1 :

1/\*/ Si une proposition est vraie, alors on dit que sa valeur de vérité est vraie et on la note par : V ou 1

\* / Si une proposition est fautive, alors on dit que sa valeur de vérité est fautive et on la note par :

F ou 0.

\*Le tableau suivant est appelé le **tableau de vérité** de la proposition  $P$  :

P
V
F

2/ Une proposition est souvent notée par les lettres :  $P, Q, R, \dots$

3/ Selon le nombre des variables, les fonctions propositionnelles sont notées :

$P(x), Q(x;y), R(x;y;z), \dots$

## Exemple 1 :

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P_1$  " 1 est un entier relatif "

$P_2$  "  $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$  "

$P_3$  "  $\frac{2}{5}$  est un nombre décimale "

$P_4$  " 2 est le seul nombre pair et premier "

$P_5$  " Un carré est un parallélogramme "



## Exemple 2 :

Déterminer la nature des énoncés mathématiques suivants :

$P$  "  $\pi = 3,14$  "

$Q$  "  $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 \in \mathbb{N}$  "

$A(x)$  "  $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$  "

$B(x)$  "  $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$  "

$R$  "  $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel "

$C(n)$  "  $n \in \mathbb{N}^*, n^2 + n + 1$  est un nombre premier "

$D(n;m)$  "  $(n;m) \in \mathbb{N}^2, n + m = 10$  "

## Activité 1 :

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :  $x^2 - x - 6 < 0$

2) En déduire la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P_1$  " Quel que soit  $x$  appartient à  $]-2;3[$  :  $x^2 - x - 6 < 0$  "

$P_2$  " Il existe au moins un nombre  $x$  appartient à  $\mathbb{R}$  tel que  $x^2 - x - 6 < 0$  "

$P_3$  " Quel que soit  $x$  appartient à  $\mathbb{R}$  :  $x^2 - x - 6 < 0$  "

$P_4$  " Il existe au moins un nombre  $x$  appartient à  $]-2;3[$  tel que  $x^2 - x - 6 < 0$  "

$P_5$  " Il existe un unique nombre réel  $x$  tel que  $x^2 - x - 6 = 0$  "

## A retenir 2 :

1/ L'expression " **quel que soit** " s'appelle le quantificateur universel et se note  $\forall$

2/ L'expression " **il existe au moins** " s'appelle quantificateur existentiel et se note  $\exists$

3/ L'expression " **il existe un unique** " s'appelle quantificateur existentiel de l'unicité et se note  $\exists!$

4/ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par un ou plusieurs quantificateurs on obtient une proposition.



\*/ La négation de la proposition  $(\forall x \in E) P(x)$  est la proposition  $(\exists x \in E) \overline{P(x)}$

\*/ La négation de la proposition  $(\exists x \in E) P(x)$  est la proposition  $(\forall x \in E) \overline{P(x)}$

### Exemple 6 :

Déterminer la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

$$P_1: \sqrt{1+\sqrt{4}}=3 \quad ; \quad P_2: \pi > 3,14 \quad ; \quad P_3: \sqrt{11} \in [3;4] \quad ; \quad P_4: (\exists x \in \mathbb{R}) x^2 = 36 \quad ; \quad P_5: (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq x$$

**Exemple 7 :** Déterminer la valeur de vérité et la négation des propositions suivantes :

$P_1: (\exists x \in \mathbb{N}) x^2 = 36$	$P_4: (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) y = \frac{x}{2}$
$P_2: (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq x$	$P_5: (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) y = \sqrt{x}$
$P_3: (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) y = 2x$	$P_6: (\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) y = \sqrt{x}$

### Application 2 :

Exercices 2 et 3 de la série 1

## 3) Opérations sur deux propositions

### A retenir 4 :

1/ **La conjonction** de deux propositions  $P$  et  $Q$  est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions  $P$  et  $Q$  sont vraies en même temps on la note **( $P$  et  $Q$ )** ou  $P \wedge Q$

2/ **La disjonction** de deux propositions  $P$  et  $Q$  est la proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie on la note **( $P$  ou  $Q$ )** ou  $P \vee Q$

Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions :

3/ La proposition **( $\overline{P}$  ou  $Q$ )** qui est fausse seulement si  $P$  est vraie et  $Q$  est fausse s'appelle **l'implication** de deux propositions  $P$  et  $Q$  (dans cet ordre) se note  $P \Rightarrow Q$

4/ **L'équivalence** de deux propositions  $P$  et  $Q$ , est la proposition qu'on note  $P \Leftrightarrow Q$  et elle est vraie seulement si  $P$  et  $Q$  ont la même valeur de vérité.

$P$	$Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

### Exemple 8 :

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

Proposition	Valeur de vérité
$P_1 \quad 2 < 7 \text{ et } 10 = 5$	
$P_1 \quad 2 < 7 \text{ ou } 10 = 5$	
$\pi \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \neq 2$	
$1 = 2 \Rightarrow 3 = 4$	
5 est un nombre impair $\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 0$	
$P:  -4  = 4 \Leftrightarrow 3 \leq 12$	
$Q: 1 + \sqrt{6}^2 = 7 \Leftrightarrow 12 = 2^2 \times 3^2$	

### Remarques 3 :

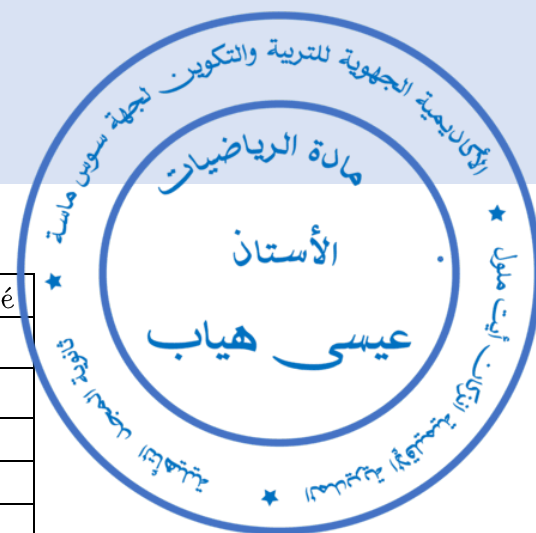
1/ L'implication :  $P \Rightarrow Q$  se lit :

\*/  $P$  implique  $Q$ .

\*/ Si on a  $P$  alors  $Q$ .

2/ Les propositions  $P \Rightarrow Q$  et  $Q \Rightarrow P$  n'ont pas la même table de vérité, alors l'implication logique n'est pas commutative.

3/ L'implication  $Q \Rightarrow P$  s'appelle **l'implication réciproque** de l'implication  $P \Rightarrow Q$



#### Remarques 4 :

1/ L'équivalence :  $P \Leftrightarrow Q$  se lit :

\* /  $P$  est équivalente à  $Q$ .

\* /  $P$  si et seulement si  $Q$ .

\* /  $P \Rightarrow Q$  et  $Q \Rightarrow P$

2/  $P \Leftrightarrow Q$  et  $Q \Leftrightarrow P$  ont la même table de vérité, alors l'équivalence logique est commutative.

#### Exemple 9 :

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1)  $(\exists x \in \mathbb{R}) x+1=0$  et  $(\exists x \in \mathbb{R}) x-2=0$

2)  $(\exists x \in \mathbb{R}) x+1=0$  et  $x-2=0$

3)  $(\forall x \in \mathbb{R}) x \leq 0$  ou  $(\forall x \in \mathbb{R}) x \geq 0$

4)  $(\forall x \in \mathbb{R}) x \leq 0$  ou  $x \geq 0$

#### Remarques 5 :

1/ On dit que deux propositions sont équivalentes si elles ont la même valeur de vérité.

2/ Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions :

Les propositions :

\* /  $P \wedge Q$  et  $Q \wedge P$  sont équivalentes, on dit que la conjonction logique est commutative.

\* /  $P \vee Q$  et  $Q \vee P$  sont équivalentes, on dit que la disjonction logique est commutative.

\* /  $(P \wedge Q) \wedge R$  et  $P \wedge (Q \wedge R)$  sont équivalentes, on dit que la conjonction logique est associative.

\* /  $(P \vee Q) \vee R$  et  $P \vee (Q \vee R)$  sont équivalentes, on dit que la disjonction logique est associative.

3/ Soit  $P(x)$  et  $Q(x)$  deux fonctions propositionnelles d'une variable  $x$  d'un ensemble non vide  $E$ .

\* / Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$[(\forall x \in E) P(x) \text{ et } Q(x)] \text{ et } [(\forall x \in E) P(x) \text{ et } (\forall x \in E) Q(x)]$$

$$[(\exists x \in E) P(x) \text{ ou } Q(x)] \text{ et } [(\exists x \in E) P(x) \text{ ou } (\exists x \in E) Q(x)]$$

\* / Les propositions suivantes ne sont pas équivalentes :

$$[(\forall x \in E) P(x) \text{ ou } Q(x)] \text{ et } [(\forall x \in E) P(x) \text{ ou } (\forall x \in E) Q(x)]$$

$$[(\exists x \in E) P(x) \text{ et } Q(x)] \text{ et } [(\exists x \in E) P(x) \text{ et } (\exists x \in E) Q(x)]$$

## 4) Lois logiques

#### Activité 2 :

Dresser le tableau de vérité de la proposition :  $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

#### A retenir 5 :

Une **loi logique** est une proposition formée de plusieurs propositions  $P, Q, \dots$  liée entre elles par des connecteurs logiques et qui est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité de chacune des propositions  $P, Q, \dots$

#### Remarque 6 :

Pour montrer qu'une proposition est une loi logique il suffit de dresser sa table de vérité.

#### Exemple 10 :

$P, Q$  et  $R$  sont des propositions. Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

1)  $P \Rightarrow (\bar{P} \Rightarrow Q)$

2)  $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$

#### Solution :

1) (Voir le cahier)

2) On a :



$P$	$Q$	$R$	$Q \text{ et } R$	$P \text{ ou } Q$	$P \text{ ou } R$	$P \text{ ou } (Q \text{ et } R)$	$(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Donc l'équivalence  $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$  est vraie dans tous les cas, d'où la proposition  $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$  est une loi logique.

### A retenir 6 : La négation de la conjonction, disjonction, implication et l'équivalence :

Quelles que soit les propositions  $P$  et  $Q$ , les propositions suivantes sont des lois logiques :

#### Lois de Morgan :

$$\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}) \quad (\text{On dit que la négation de } (P \text{ et } Q) \text{ est } (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}))$$

$$\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q}) \quad (\text{On dit que la négation de } (P \text{ ou } Q) \text{ est } (\overline{P} \text{ et } \overline{Q}))$$

#### Négation de l'implication :

$$\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \text{ et } \overline{Q}) \quad (\text{On dit que la négation de } (P \Rightarrow Q) \text{ est } (P \text{ et } \overline{Q}))$$

#### Négation de l'équivalence :

$$\overline{(P \Leftrightarrow Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \Leftrightarrow Q) \quad (\text{On dit que la négation de } (P \Leftrightarrow Q) \text{ est } (\overline{P} \Leftrightarrow Q))$$

$$\overline{(P \Leftrightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow \overline{Q}) \quad (\text{On dit que la négation de } (P \Leftrightarrow Q) \text{ est } (P \Leftrightarrow \overline{Q}))$$

$$\overline{(P \Leftrightarrow Q)} \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow \overline{P})] \quad (\text{On dit que la négation de } (P \Leftrightarrow Q) \text{ est } [(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow \overline{P})])$$



#### Exemple 11 :

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , déterminer la négation des propositions suivantes :

$$P: x > 2 \Rightarrow x \leq 5$$

$$Q: a = b \text{ ou } b = c$$

$$R: x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{R}$$

$$S: a < b \text{ et } b < c$$

#### Remarque 7 : la négation de $\exists$ !

Soit  $P(x)$  une fonction propositionnelle d'une variable  $x$  d'un ensemble non vide  $E$

La proposition  $Q: (\exists x \in E) P(x)$  signifie que  $[(\exists x \in E) P(x)]$  et  $[(\forall x, y \in E) (P(x) \text{ et } P(y)) \Rightarrow x = y]$

Donc la négation de la proposition  $Q$  est  $\overline{Q}: [(\forall x \in E) \overline{P(x)}]$  ou  $[(\exists x, y \in E) P(x) \text{ et } P(y) \text{ et } x \neq y]$

#### Remarque 8 :

Quelles que soient les propositions  $P, Q$  et  $R$ , les propositions suivantes sont des lois logiques :

#### 1/ Lois logiques usuelles :

$$\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P \quad ; \quad (P \text{ ou } \overline{P}) \quad ; \quad (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } Q)$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)] \quad ; \quad (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q})$$

#### 2/ La commutativité :

$$(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$$

$$(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$$

#### 3/ L'associativité :

$$[(P \text{ et } Q) \text{ et } R] \Leftrightarrow [P \text{ et } (Q \text{ et } R)]$$

$$[(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R] \Leftrightarrow [P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)]$$

#### 4/ La distributivité :

$$[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$$

$$[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$$

Application 3 : Exercices 4-5-6 de la série 1.

## 5) Raisonnements mathématiques

### 5-1 Raisonnement par contre-exemple

#### A retenir 7 :

Pour montrer qu'une proposition de type  $(\forall x \in E) P(x)$  est fausse, il suffit de trouver  $x \in E$  tel que  $P(x)$  soit fausse.

Ce type de démonstration est appelé **raisonnement par contre-exemple**.

#### Exemple 12 :

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

$$1) (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + x - 2 = 0 ; \quad 2) (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) : 3x + 5y = 8 \quad ; \quad 3) (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : \frac{4xy}{4+y^2} > 1$$

#### Application 4 :

Exercice 7 de la série 1.

### 5-2 Raisonnement direct (déductif)

#### A retenir 8 :

Pour démontrer qu'une implication  $P \Rightarrow Q$  est vraie, on utilise l'une des méthodes suivantes :

$$1/ \text{ On montre que } \begin{cases} P \Rightarrow \dots \\ \Rightarrow \dots \\ \Rightarrow \dots \text{ à l'aide des opérations et des propriétés mathématiques.} \\ \dots \\ \Rightarrow Q \end{cases}$$

$$[(P \Rightarrow R) \text{ et } (R \Rightarrow Q)] \Rightarrow [P \Rightarrow Q]$$

2/ On suppose  $P$  est vraie et on montre que  $Q$  est vraie.

Ce type de démonstration est appelé **raisonnement direct** ou raisonnement déductif ou raisonnement par des implications successives.

#### Exemples 13 :

$$1) \text{ Montrer que } : (\forall x \in \mathbb{R}) : |x| \leq 2 \Rightarrow |3x+1| \leq 7$$

$$2) \text{ Montrer que } : (\forall x \in \mathbb{R}) : x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

#### Application 5 :

Exercice 8 de la série 1.

### 5-3 Raisonnement par contraposée

#### A retenir 9 :

Pour montrer que  $P \Rightarrow Q$  des fois on montre que  $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ .

Ce type de démonstration est appelé **raisonnement par contraposée**.

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$$

#### Exemples 14 :

$$1) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ montrer que } : n^2 \text{ est pair} \Rightarrow n \text{ est pair}$$

$$2) \text{ Soit } a \text{ et } b \text{ deux nombres réels tel que } a \neq -b. \text{ Montrer que } : a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$$

$$3) \text{ Soit } x \text{ et } y \text{ deux nombres réels. Montrer que } : (x \neq y \text{ et } x+y \neq -1) \Rightarrow x^2 + x \neq y^2 + y$$

#### Remarques 9 :

1/ Il faut bien distinguer entre la négation, la contraposée et la réciproque.

\* / la négation de  $P \Rightarrow Q$  est  $(P \text{ et } \bar{Q})$

\* / la réciproque de  $P \Rightarrow Q$  est  $Q \Rightarrow P$

\* / **la contraposée** de  $P \Rightarrow Q$  est  $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

2/ Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $n^2 \text{ est pair} \Rightarrow n \text{ est pair}$

#### Application 6 :

Exercice 9 de la série 1.



## 5-4 Raisonnement par équivalence

### A retenir 10 :

1/ Pour démontrer qu'une équivalence  $P \Leftrightarrow Q$  est vraie, on utilise l'un des méthodes suivantes :

\* / On montre que  $\begin{cases} P \Leftrightarrow \dots \\ \Leftrightarrow \dots \\ \dots \\ \Leftrightarrow Q \end{cases}$  à l'aide des opérations et des propriétés mathématiques.

$$[(P \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow Q)] \Rightarrow [P \Leftrightarrow Q]$$

➤ Ce type de démonstration est appelé **raisonnement par des équivalences successives**.

\* / On montre que les deux implications  $P \Rightarrow Q$  et  $Q \Rightarrow P$  sont vraies.

2/ Pour démontrer qu'une proposition  $P$  est vraie il suffit de trouver une proposition  $Q$  vraie tel que :

$$\begin{cases} P \Leftrightarrow \dots \\ \Leftrightarrow \dots \\ \dots \\ \Leftrightarrow Q \end{cases}$$

### Exemples 15 :

1) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$

2) Montrer que  $(\forall x \in [-2; 2]) \quad \sqrt{4-x^2} < x + 2\sqrt{2}$

### Remarque 10 : Raisonnement par double implication

Pour prouver une équivalence de type  $P \Leftrightarrow Q$ , des fois il suffit de prouver les double implications :

$$P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P$$

Ce type de démonstration est appelé **raisonnement par double implication**.

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)]$$

### Exemples 16 :

1) Montrer que  $(\forall x; y \in \mathbb{R}) \quad x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ et } y=0)$

2) Montrer que  $(\forall x \in [1; +\infty[)(\forall y \in [4; +\infty[) \quad \frac{x+y}{2} = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} \Leftrightarrow x=2 \text{ et } y=8$

**Application 7 :** Exercice 10 de la série 1.

## 5-5 Raisonnement par disjonction des cas

### A retenir 11 :

Pour montrer qu'une proposition de type  $(\forall x \in E) P(x)$  est vraie, il suffit de montrer que  $P(x)$  est vraie dans tous les cas de la variable  $x$  dans  $E$ .

$$[(R \Rightarrow P) \text{ et } (Q \Rightarrow P)] \Rightarrow [(R \text{ ou } Q) \Rightarrow P]$$

Ce type de démonstration est appelé **raisonnement par disjonction des cas**.

### Exemples 17 :

1) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - x + 1 \geq |x-1|$

2) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n(n+1)$  est pair.

### Application 8 :

Exercice 11 de la série 1.

## 5-6 Raisonnement par l'absurde

### A retenir 12 :

Pour montrer qu'une proposition est vraie par le **raisonnement par l'absurde** on suppose que  $\bar{P}$  est vraie (C'est-à-dire que  $P$  est fausse) et on cherche à trouver une contradiction.

$$[(\bar{P} \Rightarrow Q) \text{ et } (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q})] \Rightarrow P$$

### Exemples 18 :

1) Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $A = \frac{n+3}{n+5}$ , montrer que  $A \neq 1$

3) Soit  $ABC$  un triangle et  $a > 0$  tel que  $BC = 3a$ ,  $CA = 2a$  et  $AB = 4a$ . Montrer que  $ABC$  n'est pas rectangle.

### Solution :

1) On suppose que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , donc  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$  et  $a \wedge b = 1$  (d'après la remarque 2)

Donc  $2 = \frac{a^2}{b^2}$ , c'est-à-dire  $a^2 = 2b^2$  (I)

Donc  $a^2$  est pair. On déduit que  $a$  est pair (d'après la remarque 9)

Donc  $(\exists k \in \mathbb{N}) a = 2k$ , on remplace dans (I) on obtient  $b^2 = 2k^2$  donc  $b^2$  est pair.

Par suite  $b$  est pair (d'après la remarque 10), or  $a$  est pair, alors  $a \wedge b \neq 1$ , contradiction !

2) et 3) (Voir le cahier)

**Application 9 :** Exercice 12 de la série 1.

## 5-7 Raisonnement par récurrence

### A retenir 13 : Principe de récurrence

Soit  $P(n)$  une fonction propositionnelle sur  $\mathbb{N}$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{cases} P(n_0) \\ (\forall n \geq n_0) P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow (\forall n \geq n_0) P(n)$$

Pour montrer que la proposition  $(\forall n \geq n_0) P(n)$  est vraie, on suit les étapes suivantes :

- Initialisation : On vérifie que  $P(n_0)$  est vraie.
- Hérédité : Soit  $n \geq n_0$ , on suppose que  $P(n)$  est vraie et on montre que  $P(n+1)$  est vraie.

### Exemples 19 :

1) Montrer que la proposition :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$  est vraie.

2) Soit  $a \in \mathbb{R}^+$ , montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (1+a)^n \geq 1+na$  ; 3) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 7$  divise  $2^{3n+2} - 4$

### Solution :

1) Montrons par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

On a dans cette question  $P(n)$ : " $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ " et  $n_0 = 1$

Vérifions que  $P(1)$  est vraie. C'est-à-dire vérifions que  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

On a  $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$  donc  $P(1)$  est vraie

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons que  $P(n)$  est vraie et montrons que  $P(n+1)$  est vraie.

C'est-à-dire supposons que  $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$  et montrons que  $1+2+3+\dots+n+1 = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

On a :

$$1+2+3+\dots+n+1 = 1+2+3+\dots+n+(n+1) = (1+2+3+\dots+n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc d'après le principe de récurrence on a C.Q.F.D.

2) et 3) (Voir le cahier)

### Remarque 11 :

Les symboles sigma «  $\sum$  » et Pi «  $\prod$  » permet de simplifier l'écriture d'une somme et d'une produit respectivement.

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$	$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n = \prod_{k=1}^n a_k$
$1+2+3+\dots+n = \sum_{k=1}^n k$	$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{n} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{i}$
$1+3+5+\dots+2n+1 = \sum_{k=0}^n (2k+1)$	$1 \times 3 \times 5 + \dots \times (2n+1) = \prod_{k=0}^n (2k+1)$

$$\bullet \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\bullet \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \left( \sum_{k=0}^n a_k \right) + a_{n+1}$$

• Si  $\alpha$  ne dépend pas de  $k$   
alors  $\sum_{k=0}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=0}^n a_k$

**Application 10 :** Exercice 13 de la série 1.

## Proposition-fonction propositionnelle

- 1/ Une proposition (ou assertion) est tout énoncé mathématique ayant un sens et qui pouvant être soit vrai soit faux (il ne peut être à la fois vrai et faux).
- 2/ On appelle fonction propositionnelle tout énoncé mathématique qui contient une variable (ou plus) appartenant à un ensemble donné, et qui devient une proposition chaque fois qu'on remplace cette variable par un élément de cet ensemble.
- 3/ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par un ou plusieurs quantificateurs on obtient une proposition.

## Opérations sur les propositions

		conjonction	disjonction	implication	équivalence
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

## Négation

1/ Tableau de vérité de la négation :

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

2/ La négation des symboles usuels :

Symbole	$\forall$	$\exists$	=	$\in$	$\leq$	$\geq$	<	>
Négation	$\exists$	$\forall$	$\neq$	$\notin$	>	<	$\geq$	$\leq$

3/ Négation d'une proposition quantifiée :

A/ La négation de la proposition  $(\forall x \in E) P(x)$  est la proposition  $(\exists x \in E) \bar{P}(x)$

B/ La négation de la proposition  $(\exists x \in E) P(x)$  est la proposition  $(\forall x \in E) \bar{P}(x)$

4/ Négation de la conjonction, disjonction, implication et équivalence :

A/ La négation de  $(P \text{ et } Q)$  est  $(\bar{P} \text{ ou } \bar{Q})$

B/ La négation de  $(P \text{ ou } Q)$  est  $(\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$

C/ La négation de  $(P \Rightarrow Q)$  est  $(P \text{ et } \bar{Q})$

D/ La négation de  $(P \Leftrightarrow Q)$  est  $(\bar{P} \Leftrightarrow Q)$   
(ou bien  $(P \Leftrightarrow \bar{Q})$  ou bien  $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow \bar{P})]$ )

## Loi logique

1/ Une loi logique est une proposition formée de plusieurs propositions  $P, Q, \dots$  liée entre elles par des connecteurs logiques et qui est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité de chacune des propositions  $P, Q, \dots$ .

2/ Pour montrer qu'une proposition est une loi logique il suffit de dresser sa table de vérité

## Astuces pour utiliser les raisonnements mathématiques

Méthode d'utilisation	Raisonnement concernable	Question
Voir à retenir 10	Raisonnement par équivalence (ou par double implication)	Montrer que $P \Leftrightarrow Q$
Voir à retenir 8	Type 1 : Si $P$ et $Q$ ne contiennent pas le symbole $\#$ , on utilise souvent le rais. direct.	Montrer que $P \Rightarrow Q$
Voir à retenir 9	Type 2 : Si $P$ et $Q$ contiennent le symbole $\#$ , on utilise souvent le rais. par contraposée	Montrer que $P$
Voir à retenir 11	Type 1 : Si $P$ contient la valeur absolue, on utilise souvent le rais. par disjonction des cas. On utilise aussi ce type de raisonnement dans les équations et inéquations.	Montrer que $P$
Voir à retenir 12	Type 2 : Si $P$ contient l'un des mots : n'appartient pas, n'admet pas, n'est pas..., on utilise souvent le rais. par l'absurde.	Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) P(n)$ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) P(n)$
Voir à retenir 10	Type 2 : Si $P$ est une proposition ni de type 1 ni de type 2, on utilise souvent le rais. par équivalence	Montrer que $(\forall x \in E) P(x)$ est fausse
Voir à retenir 13	On utilise souvent le rais. par récurrence	
Voir à retenir 7	On utilise le rais. par contre-exemple	

Il existe d'autres raisonnements mathématiques (de base) comme le calcul de la différence de deux expressions (Comparaison) ou la simplification d'une expression pour obtenir une autre (Égalité de deux expressions).

**Exercice 1**

Ecrire en utilisant les quantificateurs les propositions suivantes :

$P$  : Pour tout entier naturel  $n$  il existe un entier naturel  $m$  tel que  $n+m=10$

$Q$  : Il existe un réel  $M$  tel que pour toute  $x$  de  $\mathbb{R}$  on a :  $x \leq M$

$R$  : Il existe un nombre rationnel  $x$  tel que :  $x^2 = 2$

$S$  : Il n'existe aucun nombre rationnel solution de l'équation :  $x^2 = 2$

$T$  : Entre deux réels il existe toujours un rationnel.

**Exercice 2**

Déterminer la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

$$P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}) \sqrt{x^2} = x$$

$$P_2 : (\forall x \geq 0) x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$P_3 : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) y < -x$$

$$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) y < -x$$

$$P_5 : (\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*) x^2 + y^2 \neq 1$$

$$P_6 : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) y \neq \sin(x)$$

**Exercice 3**

Donner la négation de chacune des phrases suivantes :

$P$  : Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.

$Q$  : Certains nombres entiers sont pairs.

$R$  : Tout entier naturel divisible par 3 est divisible par 9

**Exercice 4**

Déterminer la négation des propositions suivantes :

$$P : (\forall x \in \mathbb{R})(x=0 \text{ ou } x < 50)$$

$$Q : (\exists x \in \mathbb{R})(x^2 < 54 \text{ et } x \in \mathbb{Z})$$

$$R : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) x < y - 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq x^2 + y^2$$

$$S : a > b \Rightarrow a \leq c$$

**Exercice 5 : Loi logique**

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

$$1) \overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$$

$$2) \overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$$

$$3) (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } Q)$$

$$4) \overline{(P \Leftrightarrow Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \Leftrightarrow Q)$$

$$5) \overline{(P \Leftrightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow \overline{Q})$$

$$6) [P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$$

$$7) [P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } \overline{Q}) \Rightarrow R]$$

**Exercice 6**

$a, b, c \in \mathbb{R}$ , déterminer la négation des propositions suivantes :

$$R_1 : a > b \Rightarrow a \leq c$$

$$R_2 : a = b = c$$

$$R_3 : a \leq b \leq c$$

$$R_4 : (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) -1 \leq x + y \leq 2 \Rightarrow |x + y| \leq 2$$

$$R_5 : (\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*) x - y = 1 \Leftrightarrow x > 1$$

$$R_6 : (\forall x \in \mathbb{R}) x \geq 0 \text{ ou } x \leq 0$$

$$R_7 : (\forall a; b \in \mathbb{R}^*)(\exists x \in \mathbb{R}) \cos(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(x) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Exercice 7 : Rais. par contre-exemple**

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1) Tous les nombres premiers est impair.

2) Tous les nombres impairs est premier.

3)  $(\forall n \in \mathbb{N}) n^2 + n + 1$  est premier.

$$4) (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) 3x + 5y = 8$$

$$5) (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) |x| + |y| = |x + y|$$

$$6) (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \cos(x + y) = \cos(x) + \cos(y)$$

$$7) (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \sin(x + y) = \sin(x) + \sin(y)$$

$$8) (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x^2 - xy + y^2 = 0$$

**Exercice 8 : Rais. direct**

Montrer que :

$$1) (\forall x \in \mathbb{R}) |x| \leq 2 \Rightarrow |3x + 1| \leq 7$$

$$2) (\forall x \in \mathbb{R}) x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$3) (\forall x \in \mathbb{R}) x > 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 > 0$$

$$4) (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) 1 + xy = x + y \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } y = 1)$$

$$5) (a \in \mathbb{Q} \text{ et } b \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (a + b) \in \mathbb{Q}$$

$$6) (\forall a \in \mathbb{R}^*)(\forall b; c \in \mathbb{R}) ac \leq 0 \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}) ax^2 + bx + c = 0$$

**Exercice 9 : Rais. par contraposée**

$$1) (\forall x; y \in \mathbb{R}) x \neq y \Rightarrow (x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$$

$$2) (\forall x \in \mathbb{R}^+) x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x + 1} \neq 1 + \frac{x}{2}$$

$$3) (\forall x; y \in \mathbb{R}) (x \neq y \text{ et } xy \neq 1) \Rightarrow \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1}$$

$$4) (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 + x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

$$5) (\forall n \in \mathbb{N}) n^2 \text{ est impair} \Rightarrow n \text{ est impair}$$

$$6) (\forall x; y \in \mathbb{R}) (x \neq y \text{ et } x + y \neq 2) \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$$

$$7) (\forall x; y; z \in \mathbb{R}) x + y \leq z \Rightarrow \left( x \leq \frac{1}{2}z \text{ ou } y \leq \frac{1}{2}z \right)$$

**Exercice 10 : Rais. par équivalence**

1) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}_+) \sqrt{2x+2} = 1 + \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$

2) Montrer que  $(\forall x \in [1; +\infty[) \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$

3) Montrer que :  $(\forall x; y \in \mathbb{R})$

$|x| + |y| = |x+y| \Leftrightarrow xy \geq 0$

4) Montrer que  $(\forall x \in [-2; 2]) \sqrt{4-x^2} < x + 2\sqrt{2}$

**Exercice 11 : Rais. par disjonction des cas**1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$-x^2 + |x-4| + 2 = 0$

2) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \sqrt{x^2+1} + x > 0$

3) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) n(n+1)$  est pair.4) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation

$\sqrt{x^2-5x+6} > x+4$

5) Soit  $m \in \mathbb{R}^*$ , résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

suivante :  $mx^2 - (m+1)x + m - 1 = 0$

6) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $n(n+1)(n+2)$  est divisible par 3.**Exercice 12 : Rais. par l'absurde**1) Soit  $ABC$  un triangle et  $a > 0$  tel que

$BC = 3a, CA = 2a$  et  $AB = 4a$ .

Montrer que  $ABC$  n'est pas rectangle.2) Soit  $a; b \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $ab = 1$ , montrer que :

$(a \leq 1 \text{ ou } b \leq 1)$

3) Soit  $a; b \in \mathbb{Q}$  tel que  $a - b\sqrt{2} = 0$ , montrer que :

$(a = 0 \text{ et } b = 0)$

4) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$  (on admetque si  $a \wedge b = 1$  alors  $a^2 \wedge b^2 = 1$  et que  $n \wedge (n+1) = 1$ )**Exercice 13 : Rais. par récurrence**

1)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2)  $(\forall n \in \mathbb{N}) \sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

3)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

4)  $(\forall n \in \mathbb{N}) \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$

5)  $(\forall n \in \mathbb{N}) 2^n > n$

6)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 3^n \geq 2n+1$

7)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \times (k+1)} = \frac{n}{n+1}$  (par deux méthodes)

8)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{4} - \frac{(-1)^{n+1}}{4 \times 3^n}$

9)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

10)  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{2}$

11) 9 divise  $10^n - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ **Exercice 14**

1) Montrer que 0 n'est pas une racine du polynôme

$P(x) = x^4 + 5x^7 + 5x^2 - 8x - 1$

2) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : \sqrt{1+x^2} \neq 1 + \frac{x^2}{2}$

3)  $x, y$  et  $z$  des nombres réels tel que :  $x+y+z > 1$ .Montrer que  $x > \frac{1}{3}$  ou  $y > \frac{1}{3}$  ou  $z > \frac{1}{3}$ 4)  $x$  et  $y$  deux nombres réels positifs non nuls.

Montrer que :  $\left|\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right| \neq 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \neq \sqrt{5}$

5) Sachant que  $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ , montrer que  $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$ .**Exercice 15**1) Montrer que l'assertion  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) x + \frac{1}{x} \geq 2$  est fausse.2) Soit  $a$  et  $b$  deux réels positifs

a) Montrer que :  $\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} < \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} \Leftrightarrow a < b$

b) Montrer que :  $a\sqrt{a^2+1} = b\sqrt{b^2+1} \Leftrightarrow a = b$

3) Montrer que

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : |2x^2 + 5xy + 3y^2| \leq 3 \Rightarrow |x+y| \leq \sqrt{3} \text{ ou } |2x+3y| \leq \sqrt{3}$

4) a) Montrer que tout entier naturel impair  $n$  s'écrit sous la forme  $n = 4k+1$  ou  $n = 4k+3$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .b) En déduire que si l'entier  $n^2 - 1$  n'est pas divisible par 8, alors l'entier  $n$  est pair.5) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \sqrt{n^2 + 4n + 2} \notin \mathbb{N}$ .**Exercice 16**1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ll 17 \text{ divise } 2^{6n+3} + 3^{4n+2} \gg$ 2) a) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 3/n^2 \Rightarrow 3/n$ b) Montrer que  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ 3) Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  tel que  $a^2 + b^2 = 1$ .

Montrer que :  $|a+b| \leq \sqrt{2}$

4) Soient  $a, b$  et  $c$  des réels.

a) Montrer que :  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

b) Montrer que :  $(a^3 + a = b^3 + b) \Leftrightarrow a = b$

**Exercice 17**

Sans utiliser le tableau de vérité montrer que la proposition  $[P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } \bar{Q}) \Rightarrow R]$  est une loi logique.

**Exercice 18**

Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

- 1) «  $3^{3n+2} + 2^{n+4}$  est divisible par 25 »
- 2) «  $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$  est divisible par 23 »
- 3) « 11 divise  $3^{2n} + 2^{6n-5}$  »
- 4)  $\left(1 + \frac{1}{1^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n}$
- 5)  $\frac{3n}{2n+1} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
- 6)  $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$
- 7)  $\sum_{k=1}^n k(3k+1) = n(n+1)^2$
- 8)  $\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$
- 9)  $\sum_{k=1}^n (k+1)k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

**Exercice 19**

1) Montrer par récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists (a_n; b_n) \in \mathbb{N}^2) : (1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$$

2) Déterminer  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .

3) Calculer  $(1 + \sqrt{2})^5$ .

**Exercice 20 : Inégalité d'olympiade**

- 1)  $a, b \in \mathbb{R}$ , M.q :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1}$
- 2)  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ , M.q :  $(\forall n \in \mathbb{N}) x^{n+1} + y^{n+1} \geq x^n y + x y^n$

**Exercice 21**

Soit  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ .

- 1) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$
- 2) Supposons que  $x+y=1$ 
  - a) Montrer que  $xy \leq \frac{1}{4}$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) x^n + y^n \geq \frac{1}{2^{n-1}}$
  - b) En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \left(1 + \frac{1}{y^n}\right) \geq (1 + 2^n)^2$

**Exercice 22**

- 1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$
- 2) Déduire que si  $a, b \in \mathbb{N}$  tels que  $a > b > 0$ , alors :  $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \notin \mathbb{N}$ .

**Exercice 23**

- 1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$
- 2) Soient  $a$  et  $b$  deux nombres de  $\mathbb{Q}$  tels que  $a \neq b$

Montrer que :  $\frac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \notin \mathbb{Q}$

- 3) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n^2 + 5n + 8} \notin \mathbb{N}$
- 4) Soit  $a \in \mathbb{N}$ . Montrer que :

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{4a^2 + \sqrt{16a^2 + 8a + 3}}} \notin \mathbb{N}$$

**Exercice 24**

Soient  $a, b$  etc des réels.

- 1) Montrer que :  $\left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| < c \Rightarrow (|b| < c \text{ et } |a| < c)$
- 2) Montrer que :  $(|b| < c \text{ et } |a| < c) \Rightarrow \left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| < c$

**Exercice 25**

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tel que  $(\forall x \in [-1; 1]) |ax^2 + bx + c| \leq 1$ .

- 1) Montrer que  $|c| \leq 1$ ,  $|a+b+c| \leq 1$  et  $|a-b+c| \leq 1$ .
- 2) En déduire que  $|a+c| \leq 1$  et  $|a| \leq 2$ .
- 3) a) Montrer que  $2(a^2 + b^2 + c^2) \leq (a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + 4|ca|$

b) En déduire que  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$ .

**Exercice 26**

Soit  $a, b$  et  $c$  des entiers relatifs distincts de 1.

Montrer que  $\begin{cases} a+b \leq ab \\ b+c \leq bc \end{cases} \Rightarrow c+a \leq ca$ .

**Exercice 27**

Soit  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$  tel que  $ab < c$ . Montrer que  $a+b < c$

**Exercice 28**

Soit  $a, b$  et  $c$  des mesures des côtés d'un triangle tel que

$$a+b+c=1. \text{ Montrer que } \frac{1}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}.$$

**Exercice 29**

Soit  $ABC$  un triangle isocèle de sommet  $B$ .

$I$  et  $J$  deux points appartenant respectivement aux segments  $[AB]$  et  $[AC]$  tels que :  $(IJ) // (BC)$

Soit  $K$  un point du segment  $[BC]$

Montrer que  $(JK) // (AB) \Leftrightarrow AI = BK$

**Exercice 30 : Inégalité d'olympiade**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$  on admet l'inégalité

$$\text{suivante : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^n \geq n^n \times \prod_{k=1}^n x_k$$

- 1) En déduire que  $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+) (x+y+z)^3 \geq 27xyz$
- 2) En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq \prod_{k=1}^n k$

02

# Les ensembles



## 1) Extension - Compréhension

### A retenir 1

Un ensemble  $E$  est une collection d'objets satisfaisants un certain nombre de propriétés et chacun de ces objets est appelé élément de cet ensemble. Si  $x$  est un élément de l'ensemble  $E$ . On dit que  $x$  appartient à  $E$  et on note  $x \in E$ .

Si  $x$  n'appartient pas à  $E$ , on note  $x \notin E$

Il existe deux méthodes fondamentales pour définir ou écrire un ensemble :

**Ecriture en extension** : Ecriture donne la liste de tous les éléments de l'ensemble.

**Ecriture en compréhension** : Ecriture donne une propriété qui caractérise les éléments de l'ensemble.

Un **diagramme de Venn** est une courbe fermée qui entoure les éléments d'un ensemble.

### Exemple 1

1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \right\}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 = 0 \}$$

$$C = \{ x \in \mathbb{Z} / x^2 + (x+1)^2 + (x^2 - 2)^2 = 0 \}$$

2) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$$E = \{ 0; 2; 4; 6; 8; 10; \dots \}$$

$$F = \{ 1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots \}$$

$$G = \{ 0; 1; 4; 9; 16; 25; \dots \}$$

## 2) Inclusion et égalité

### A retenir 2

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ .

• On dit que  $A$  est **inclue** dans  $B$  si chaque élément de  $A$  est un élément de  $B$ . On écrit  $A \subset B$

$$A \subset B \Leftrightarrow [(\forall x \in E); x \in A \Rightarrow x \in B]$$

$$A \not\subset B \Leftrightarrow [(\exists x \in E); x \in A \text{ et } x \notin B]$$

$$A = B \Leftrightarrow [(\forall x \in E); x \in A \Leftrightarrow x \in B]$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$$

• Si  $A \subset B$  et  $B \subset C$  alors  $A \subset C$

### Exemple 2

On considère les ensembles suivants :

$$A = \{-3; -1; 0; 1; 3\} ; B = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{4}{|x|+1} \in \mathbb{Z} \right\} ; C = \{ 2k+1 / k \in \mathbb{Z} \} ; D = \left\{ \frac{2k'-1}{3} / k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

Montrer que  $A \subset B$  ;  $C \subset D$  ;  $D \not\subset C$

### Exemple 3

On considère les ensembles suivants :  $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left| 1 - \frac{x}{2} \right| < 1 \right\}$  et  $B = ]0; 4[$ . Montrer que  $A = B$

## 3) Ensemble des parties

### A retenir 3

• On appelle **ensemble des parties** de  $E$ , et on note  $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble des sous-ensembles de  $E$ .

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

• On a  $E \in \mathcal{P}(E)$  et  $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$

$$a \in E \Leftrightarrow \{a\} \subset \mathcal{P}(E)$$

• Si  $E$  est un ensemble fini de  $n$  éléments, alors  $\mathcal{P}(E)$  contient  $2^n$  éléments.

### Exemple 4

On pose  $E = \{a; b\}$  ;  $F = \{a; b; c\}$ . Déterminer en extension  $\mathcal{P}(E)$  et  $\mathcal{P}(F)$

## 4) Le complémentaire

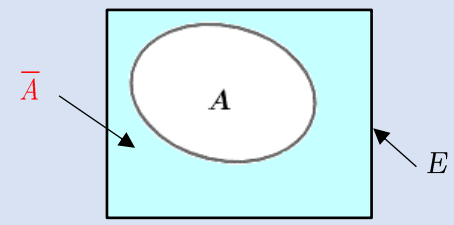
### A retenir 4

Soit  $A$  une partie d'un ensemble  $E$ .



• L'ensemble des éléments de  $E$  qui n'appartient pas à l'ensemble  $A$  est appelé **le complémentaire** de  $A$  dans  $E$ . On le note  $C_E^A$  ou  $\bar{A}$

- $C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$
- $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$
- $\bar{\bar{E}} = \emptyset$  ;  $\bar{\bar{\emptyset}} = E$  ;  $\bar{\bar{A}} = A$
- $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$
- Si  $A = \{x \in E / p(x)\}$  alors  $C_E^A = \{x \in E / \bar{p}(x)\}$



**Exemple 5**

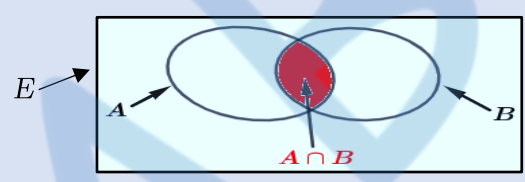
On considère l'ensemble  $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 4x > 0\}$ . Déterminer en extension  $C_{\mathbb{N}}^A$

**5) Intersection**

**A retenir 5**

Soient  $A, B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble  $E$ .

- **L'intersection** des ensembles  $A$  et  $B$ , notée  $A \cap B$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui sont dans  $A$  **et** dans  $B$ .
- $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$
- $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$
- $A \cap B = B \cap A$  ;  $A \cap A = A$  ;  $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $A \cap E = A$  ;  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B \subset A$  ;  $A \cap B \subset B$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  (Associativité)



**Exemple 6**

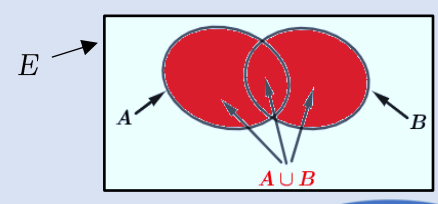
Soit  $A = \{x \in \mathbb{R} / |x-1| < 3\}$  et  $B = \{x \in \mathbb{Z} / x \leq 2\}$ . Déterminer en extension  $A \cap B$

**6) Réunion**

**A retenir 6**

Soient  $A, B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble  $E$ .

- **La réunion** des ensembles  $A$  et  $B$ , notée  $A \cup B$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui sont dans  $A$  **ou** dans  $B$
- $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$
- $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- $A \cup B = B \cup A$  ;  $A \cup A = A$  ;  $A \cup \bar{A} = E$
- $A \cup E = E$  ;  $A \cup \emptyset = A$
- $A \subset A \cup B$  ;  $B \subset A \cup B$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$  (Associativité)



**Exemple 7**

Soit  $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 < 19\}$  et  $B = \{x \in \mathbb{Z} / |x+3| \leq 5\}$ . Déterminer en extension puis en compréhension  $A \cup B$

**7) Règles de calcul**

**Activité**

$A, B$  et  $C$  des parties d'un ensemble  $E$ . Montrer que :

- 1)  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- 2)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- 3)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 4)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 5)  $(A \subset B \text{ et } A \subset C) \Leftrightarrow A \subset (B \cap C)$
- 6)  $(A \subset B \text{ ou } A \subset C) \Rightarrow A \subset (B \cup C)$  puis donner un exemple des ensembles  $A, B$  et  $C$  dont la réciproque est fautive.



## A retenir 7

Soit  $A, B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble  $E$ . On a :

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (Distributivité)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (Distributivité)

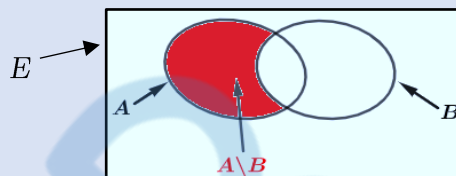
## 8) Différence de deux ensembles

### A retenir 8

Soit  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ .

• **La différence** des ensembles  $A$  et  $B$  dans cet ordre, notée  $A \setminus B$  est l'ensemble des éléments de  $A$  qui ne sont pas dans  $B$ .

- $x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$
- $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$
- On a  $A \setminus B = A \cap C_E^B$  et  $E \setminus A = C_E^A = \overline{A}$



### Exemple 8

$A, B$  et  $C$  des parties d'un ensemble  $E$ . Montrer que :

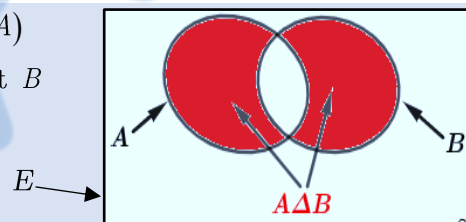
- 1)  $A \setminus B = A \cap \overline{B}$  ; 2)  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$
- 3)  $A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$  (Utiliser les raisonnements par double implication et par l'absurde)

## 9) Différence symétrique de deux ensembles

### A retenir 9

Soit  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ . On pose  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

L'ensemble  $A \Delta B$  est appelé **la différence symétrique** des ensembles  $A$  et  $B$



### Exemple 9

$A, B$  et  $C$  des parties d'un ensemble  $E$ . Montrer que :

- 1)  $\overline{A \Delta B} = A \Delta \overline{B}$  ; 2)  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

**Remarque :** Soit  $A, B$  et  $C$  des parties d'un ensemble  $E$ . On a  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

## 10) Produit cartésien

### A retenir 10

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles.

- **Le produit cartésien** des ensembles  $E$  et  $F$ , noté  $E \times F$  est l'ensemble des couples  $(x; y)$  tels que  $x \in E$  et  $y \in F$
- $(x; y) \in E \times F \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in F)$
- $E \times F = \{(x; y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$

### Exemple 10

On considère les ensembles suivants :  $E = \{a; b; c\}$  et  $F = \{1; 2\}$

- 1) Déterminer  $E \times F$  et  $F^2$  ; 2) Construire le diagramme cartésien de  $E \times F$

### Exercice de révision

On considère les ensembles suivants :

$$A = \{n \in \mathbb{N} / n^2 - 8n + 12 \leq 0\} ; B = \left\{ n \in \mathbb{N} / \frac{12}{n+2} \in \mathbb{N} \right\} ; C = \{x \in \mathbb{R} / |x-4| \leq 2\}$$

- 1) Déterminer en extension  $A$  et  $B$
- 2) Déterminer en extension  $A \cup B$  et  $A \cap B$
- 3) Montrer que  $A \subset C$
- 4) Construire dans un repère orthonormé le diagramme cartésien de  $B \times C$



## Ecriture en extension/en compréhension

- **Ecriture en extension** : Ecriture donne la liste de tous les éléments de l'ensemble.
- **Ecriture en compréhension** : Ecriture donne une propriété qui caractérise les éléments de l'ensemble.

## Inclusion et égalité

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ .

- On dit que  $A$  est **inclue** dans  $B$  si chaque élément de  $A$  est un élément de  $B$ . On écrit  $A \subset B$
- $A \subset B \Leftrightarrow [(\forall x \in E); x \in A \Rightarrow x \in B]$
- $A \not\subset B \Leftrightarrow [(\exists x \in E); x \in A \text{ et } x \notin B]$
- $A = B \Leftrightarrow [(\forall x \in E); x \in A \Leftrightarrow x \in B]$
- $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$
- Si  $A \subset B$  et  $B \subset C$  alors  $A \subset C$

## Ensemble des parties

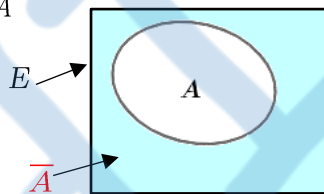
- On appelle **ensemble des parties** de  $E$ , et on note  $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble des sous-ensembles de  $E$ .
- $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$
- On a  $E \in \mathcal{P}(E)$  et  $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$
- $a \in E \Leftrightarrow \{a\} \subset \mathcal{P}(E)$
- Si  $E$  est un ensemble fini de  $n$  éléments, alors  $\mathcal{P}(E)$  contient  $2^n$  éléments.

## Le complémentaire

Soit  $A$  une partie d'un ensemble  $E$ .

L'ensemble des éléments de  $E$  qui n'appartient pas à l'ensemble  $A$  est appelé **le complémentaire** de  $A$  dans  $E$ . On le note  $C_E^A$  ou  $\bar{A}$

- $C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$
- $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$
- $\bar{\bar{E}} = \emptyset$  ;  $\bar{\emptyset} = E$  ;  $\bar{\bar{A}} = A$
- $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$

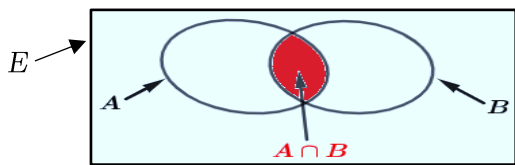


- Si  $A = \{x \in E / p(x)\}$  alors  $C_E^A = \{x \in E / \overline{p(x)}\}$

## Intersection

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble  $E$ .

• **L'intersection** des ensembles  $A$  et  $B$ , notée  $A \cap B$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui sont dans  $A$  et dans  $B$ .

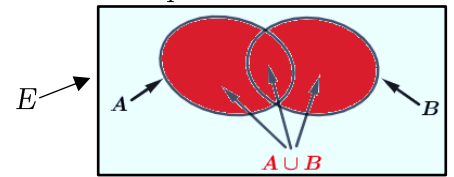


- $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$
- $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$
- $A \cap B = B \cap A$  ;  $A \cap A = A$  ;  $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $A \cap E = A$  ;  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B \subset A$  ;  $A \cap B \subset B$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  (Associativité)

## Réunion

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble  $E$ .

• **La réunion** des ensembles  $A$  et  $B$ , notée  $A \cup B$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui sont dans  $A$  ou dans  $B$

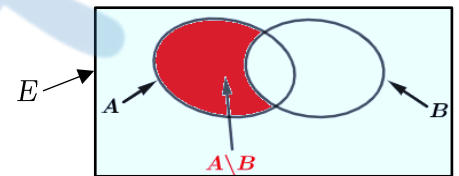


- $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$
- $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- $A \cup B = B \cup A$  ;  $A \cup A = A$  ;  $A \cup \bar{A} = E$
- $A \cup E = E$  ;  $A \cup \emptyset = A$
- $A \subset A \cup B$  ;  $B \subset A \cup B$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$  (Associativité)

## Différence de deux ensembles

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ .

• **La différence** des ensembles  $A$  et  $B$  dans cet ordre, notée  $A \setminus B$  est l'ensemble des éléments de  $A$  qui ne sont pas dans  $B$ .



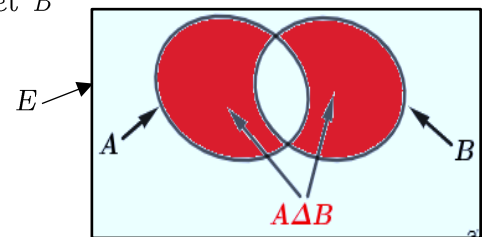
- $x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$
- $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$
- On a  $A \setminus B = A \cap C_E^B$  et  $E \setminus A = C_E^A = \bar{A}$

## Différence symétrique de deux ensembles

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ .

On pose  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

L'ensemble  $A \Delta B$  est appelé **la différence symétrique** des ensembles  $A$  et  $B$



## Règles de calcul

- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (Distributivité)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (Distributivité)
- $A \setminus B = A \cap \bar{B}$  •  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

## Produit cartésien

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

- **Le produit cartésien** des ensembles  $E$  et  $F$ , noté  $E \times F$  est l'ensemble des couples  $(x; y)$  tels que  $x \in E$  et  $y \in F$
- $(x; y) \in E \times F \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in F)$
- $E \times F = \{(x; y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$

**Exercice 1**

1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / |2x - 1| \leq 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} / (x^2 - 2)(|x| - 6) = 0\}$$

$$C = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - 4y^2 = 12\}$$

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$$

2) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$$E = \{1; 2; 4; 8; 16; 32; \dots\}$$

$$F = \left\{ \dots; \frac{1}{9}; \frac{1}{3}; 1; 3; 9; \dots \right\}$$

$$G = \{ \text{Les entiers relatifs qui sont multiples de } 5 \}$$

**Exercice 2**

$A$ ,  $B$  et  $C$  des parties d'un ensemble  $E$ , tels que :

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$$

$$A = \{1; 3; 4; 7; 8; 9; 10\}$$

$$B = \{2; 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 12\} \text{ et } C = \{2; 3; 9; 11\}$$

Déterminer les ensembles :

$$A \cap B; A \cap C; A \cup B; A \cup C; A \cap B \cap C;$$

$$A \setminus B; B \setminus A; C \setminus A; C_E^A; C_E^B; C_E^A \cup C_E^B;$$

$$C_E^{A \cap B}; C_E^A \cap C_E^B; C_E^{A \cup B}; \mathcal{P}(C)$$

**Exercice 3**

On considère l'ensemble  $E = \{1; 2; 3; \dots; 18\}$  et les parties :

$$A = \{x \in E / (\exists k \in E) : x = 2k\}$$

$$B = \{x \in E / (\exists k \in E) : x = 3k\}$$

1) Ecrire en compréhension l'ensemble  $E$  et écrire en extension les ensembles  $A$  et  $B$ .

2) Déterminer en extension  $\bar{A}$ ,  $\overline{A \cup B}$ ,  $\overline{A \cap B}$  et  $A \cap B$

3) Déterminer  $\mathcal{P}(A \cap B)$

**Exercice 4**

Soit  $E = \{x; y; z\}$ , déterminer les propositions vraies

parmi les propositions suivantes :

$$x \in E; x \subset E; \{x\} \in E; \{x\} \subset E; \{x\} \subset \mathcal{P}(E)$$

$$\{x\} \in \mathcal{P}(E); \emptyset \in E; \emptyset \subset E; \emptyset \in \mathcal{P}(E); \emptyset \subset \mathcal{P}(E)$$

$$E \in E; E \subset E; \{x; y\} \subset E; x, z \in E; (x; z) \subset E$$

**Exercice 5**

On pose  $A = \{5n + 2 / n \in \mathbb{Z}\}$  et  $B = \{5n' - 3 / n' \in \mathbb{Z}\}$

Montrer que  $A = B$

**Exercice 6**

$A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ , tels que :

$$A \cap B = \{a; b\}; A \cup B = \{a; b; c; d; e\}; A \setminus B = \{c\}$$

Déterminer  $A; B; B \setminus A; A \Delta B; \overline{A \Delta B}$

**Exercice 7 / Classique**

$A, B, C$  et  $D$  des parties d'un ensemble  $E$ . Montrer que :

$$1) A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$$

$$2) A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$$

$$3) A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \text{ et } B = \emptyset$$

$$4) A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$$

$$5) A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$$

$$6) \text{ a) } A \cup B = E \Leftrightarrow \bar{A} \subset B$$

$$\text{ b) } A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \bar{B}$$

$$7) \begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$$

$$8) \text{ a) } A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$$

$$\text{ b) } A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow \bar{A} \cap B = \bar{A} \cap C$$

$$9) A \cap (A \Delta B) = A \setminus B \text{ et } \bar{A} \Delta \bar{B} = A \Delta B$$

$$10) A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C \text{ (utiliser des questions précédentes)}$$

$$11) A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = \emptyset \text{ et } B = \emptyset$$

$$12) A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$$

$$13) \begin{cases} B \subset A \\ C = A \setminus B \end{cases} \Rightarrow A = B \cup C$$

$$14) \begin{cases} (B \setminus C) \subset A \\ (C \setminus D) \subset A \end{cases} \Rightarrow (B \setminus D) \subset A$$

$$15) A \times B \subset A \times C \Rightarrow B \subset C$$

$$16) A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

**Exercice 8 / Classique**

$A, B$  et  $C$  des parties d'un ensemble  $E$ . Montrer que :

$$1) A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

$$2) A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$3) (A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$$

$$4) (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$$

$$5) (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$$

$$6) (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$$

$$7) (A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$$

$$8) (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$$

$$9) A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$$

$$10) A \setminus B = (A \cup B) \Delta B$$

$$11) C \cap (A \Delta B) = (C \cap A) \Delta (C \cap B)$$

$$12) C \cup (A \Delta B) \subset (C \cup A) \Delta (C \cup B)$$

$$13) (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

$$14) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$15) (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$16) (A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

$$17) \overline{A \times B} = (\bar{A} \times E) \cap (E \times \bar{B})$$

**Exercice 9**

On considère les ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\} ; B = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k'\pi}{6} / k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

- 1) Vérifier que  $\frac{\pi}{12} \in B$
- 2) Est-ce-que  $\frac{\pi}{4} \in A$  ?
- 3) Montrer que  $A \subset B$  et  $B \not\subset A$

**Exercice 10**

On pose  $A = \left\{ x \in \mathbb{N} / \frac{3x+2}{x-2} \in \mathbb{Z} \right\}$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{N} / \frac{5x+7}{x-1} \in \mathbb{N} \right\}$$

- 1) Ecrire en extension  $A$  et  $B$ .
- 2) Déterminer  $A \Delta B$
- 3) On considère l'ensemble  $C = \{3;6;9;12\}$   
Vérifier que  $C \cup (A \Delta B) \subset (C \cup A) \Delta (C \cup B)$

**Exercice 11**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , on pose :

$$E = [-2; 2] ; F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$G = \{x \in \mathbb{R} / |x+1| < \alpha\} ; H = \{x \in \mathbb{R} / |x-1| < \frac{3}{2}\}$$

- 1) a) Montrer que  $F \neq \emptyset$  et  $G \neq \emptyset$   
b) Montrer que  $F \subset E^2$
- 2) Déterminer s'il existe des valeurs de  $\alpha$  tel que :  
a)  $G = H$   
b)  $G \cap H = \emptyset$

**Exercice 12**

1) Déterminer l'ensemble

$$[-3\pi; 2\pi] \cap \left[ -\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{4} / k \in \mathbb{Z} \right]$$

2) On considère les ensembles  $A = \{(2k+1)\pi / k \in \mathbb{Z}\}$  et

$$B = \left\{ -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ montrer que } A \subset B$$

3) On considère les ensembles :  $C = \left\{ -\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\text{et } D = \left\{ -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ Montrer que } C \cap D = \emptyset$$

**Exercice 13**

Déterminer les ensembles :

$$A = \left[ x \in \mathbb{N} / \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right],$$

$$B = \left[ x \in \mathbb{N} / \frac{x+10}{x-5} \in \mathbb{N} \right], A \cap B, A \cup B, A \setminus B.$$

**Exercice 14**

On considère l'ensembles :

$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 < y \text{ et } y^2 \leq x\}$$

- 1) Montrer que  $F \neq \emptyset$
- 2) Montrer que  $F \subset [0; 1] \times [0; 1]$

**Exercice 15/Classique**

$E$  et  $F$  deux ensembles, montrer que :

- 1)  $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F)$
- 2)  $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$

**Exercice 16**

Soit  $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy - 2y^2 = 5\}$

- 1) Vérifier que :  
 $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy - 2y^2 = (x-y)(x+2y)$
- 2) Déterminer en extension l'ensemble  $F = E \cap \mathbb{Z}^2$
- 3) Montrer que :  $E = \left\{ \left( \frac{2t^2-5}{3t}; \frac{-t^2-5}{3t} \right) / t \in \mathbb{R}^* \right\}$

**Exercice 17**

Soit  $E$  un ensemble non vide et  $A, X, Y \in \mathcal{P}(E)$  tel que

$$X \cap A = Y \cup A, \text{ montrer que : } Y \subset A \subset X$$

**Exercice 18**

Soit  $E$  un ensemble non vide et  $A, B \in \mathcal{P}(E)$

Résoudre dans  $\mathcal{P}(E)$  les équations :

- 1)  $X \cup A = B$
- 2)  $X \cap A = B$

**Exercice 19**

Soit  $E$  un ensemble non vide,

$A, B \in \mathcal{P}(E)$  tel que  $B \subset A$ , montrer que :

- 1)  $(\forall X \in \mathcal{P}(E)) : A \cap X = B \Leftrightarrow B \subset X \subset \bar{A} \cup B$
- 2)  $(\forall X \in \mathcal{P}(E)) : A \setminus X = B \Leftrightarrow A \cap \bar{B} \subset X \subset \bar{B}$

**Exercice 20**

Soit  $E$  un ensemble non vide et  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

- 1) Montrer que :  
a)  $(\forall X \in \mathcal{P}(E)) : X = (X \cup A) \cap (X \cup \bar{A})$   
b)  $(\forall X \in \mathcal{P}(E)) : X = (X \cap A) \cup (X \cap \bar{A})$
- 2) Résoudre dans  $\mathcal{P}(E)$  l'équation  $X \setminus A = A \setminus X$
- 3) Supposons que  $B \subset A$  et  $A \cap C = \emptyset$

Résoudre dans  $\mathcal{P}(E)$  le système  $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$

4) Sachant que  $A \subset B$ , résoudre dans  $\mathcal{P}(E)$  l'équation  $X \cap B = X \cup A$

5) Supposons que  $B \subset A \subset C$

- a) Résoudre dans  $\mathcal{P}(E)$  le système  $\begin{cases} A \cap X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$
- b) Résoudre dans  $\mathcal{P}(E)$  le système  $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = \bar{C} \end{cases}$

## Exercice 1 (Notions de logique)

1) a) Ecrire en utilisant les quantificateurs les propositions :

$P_1$  : Le produit de deux nombres entiers naturels consécutifs est pair.

$P_2$  : Entre deux réels il existe toujours un rationnel.

$P_3$  : Il n'existe aucun nombre rationnel solution de l'équation :  $x^2 = 2$

b) Déterminer la valeur de vérité et la négation des propositions  $P_1$  et  $P_3$

2) Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$

a) Montrer que :  $\sqrt{a} \neq 8\sqrt{b} \Rightarrow \frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}} \neq \frac{2}{3}$

b) Montrer que :  $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

c) En déduire que

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+) a + b + c \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

3) a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

b) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 6 \text{ divise } n^3 - n$

4) Soit  $x, y \in \mathbb{Q}^+$  tel que  $x^3y + xy^3 = 8$ , montrer que  $x \neq y$

5) a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \sqrt{x^2 + 1} > |x| \text{ (rappel } (\forall x \in \mathbb{R}) |x|^2 = x^2)$$

b) Montrer par disjonction des cas que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \sqrt{x^2 + 1} > -x$$

6) Soit  $a, b, x, y \in \mathbb{R}^*$ , montrer que :

$$ax + by = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} \leq a^2 + b^2$$

7) Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ , montrer que :

$$(|x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1) \Rightarrow \left| \frac{x+y}{1+xy} \right| \leq 1$$

8) Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions.

Montrer que la proposition :

$$[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (\bar{P} \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q \text{ est une loi logique.}$$

9) Soient  $a, b$  et  $c$  des réels.

a) Montrer que :

$$\left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| < c \Rightarrow (|b| < c \text{ et } |a| < c)$$

b) Montrer que :

$$(|b| < c \text{ et } |a| < c) \Rightarrow \left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| < c$$

10) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$\sqrt{x^2 - x + 2} > 3x - 4 \quad ; \quad E\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x+4}{3}$$

## Exercice 2 (Les ensembles)

1) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$$A = \{1; 4; 16; 64; \dots\}, B = \{1; 3; 9; 27; \dots\} \text{ et } C = \left\{-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\right\}$$

2) Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} / \frac{5x+7}{x-1} \in \mathbb{N}\right\}, B = \left\{x \in \mathbb{N} / \frac{x^2 - 2x + 6}{x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / (x+y)(x+2y) = 1\}$$

3) Soit  $A, B$  et  $C$  des parties d'un ensemble  $E$ . Montrer que

a)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

b)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

c)  $\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ B \setminus A = C \setminus A \end{cases} \Leftrightarrow B = C$

4) On considère les ensembles :

$$A = ]-\infty; -1[ \text{ et } B = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{x}{x+1} > 1\right\}. \text{ Montrer que : } A = B$$

5) On considère les ensembles :

$$A = \left\{\left(x; \sqrt{x+1}\right) / x \in [-1; +\infty[ \right\} \text{ et } B = \left\{\left(x^2 - 1; x\right) / x \in \mathbb{R}^+\right\}$$

Montrer que  $A = B$

6) On pose :

$$A = \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}, B = \left\{-\frac{7\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\text{et } C = \left\{-\frac{3\pi}{8} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

a) Montrer que  $A = B$

b) A-t-on  $B = C$  ?

7) On considère les deux ensembles  $A$  et  $B$  tel que

$$A = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ et } B = \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Montrer que  $A \cap B = \emptyset$

8) On considère les ensembles  $A$  et  $B$  tels que :

$$A \cap B = \{2; 3; 4\}, A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}, 1 \notin B \setminus A \text{ et } 5 \notin A \setminus B$$

a) Montrer que :

$$\{1\} \subset A \setminus B \quad ; \quad A \setminus B \subset \{1\} \text{ et } B \setminus A = \{5\}$$

b) Ecrire en extension les ensembles  $A$  et  $B$



Correction

**Note :**

- Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.
- Chaque tentative de tricher vaut un zéro.

Exercice 1 (10pts)

- 1) Déterminer la valeur de vérité et la négation de la proposition  $P: 10=8 \Rightarrow 3+4=7$  .....1.5pt
- 2) Montrer que :  $(\forall x; y \in \mathbb{R}) |x|+|y|=|x+y| \Leftrightarrow xy \geq 0$  .....1.5pt
- 3) a) En utilisant le raisonnement par double implication montrer que :  
 $(\forall x; y \in \mathbb{R}) x^2+y^2=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ et } y=0)$  .....1pt
- b) Montrer que  $(\forall x \in [3; +\infty[)(\forall y \in [-1; +\infty[) \frac{x+y+24}{2} = \sqrt{x-3} + 5\sqrt{y+1} \Leftrightarrow x=4 \text{ et } y=24$  .....1pt
- 4) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sqrt{n^2+4n} \notin \mathbb{N}$  .....1pt
- 5) a) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  .....1.5pt
- b) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) 17$  divise  $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$  (Indication : remarquer que  $5^2 = 2^3 + 17$ ) .....1.5pt
- 6) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , Montrer que  $n(n+1)(n+2)$  est divisible par 3. ....1pt

Exercice 2 (4pts)

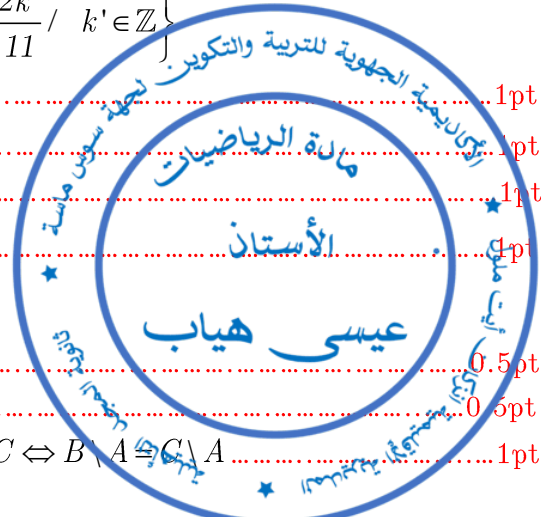
On considère les ensembles  $A = \left\{ (x; y) \in \mathbb{N}^{*2} / \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \right\}$  et  $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{x+2}{1-x} \in \mathbb{Z} \right\}$

- 1) a) Vérifier que  $x \in B \Leftrightarrow (x \in \mathbb{Z} \text{ et } -1 + \frac{3}{1-x} \in \mathbb{Z})$  .....0.5pt
- b) En déduire l'écriture de  $B$  en extension. ....1pt
- 2) a) Vérifier que  $(x; y) \in A \Leftrightarrow ((x; y) \in \mathbb{N}^{*2} \text{ et } (x-2)(y-2) = 4)$  .....0.5pt
- b) En déduire l'écriture de  $A$  en extension (remarquer que  $(x; y) \in A \Rightarrow (x-2 \geq -1 \text{ et } y-2 \geq -1)$ ) ....1pt
- 3) Montrer que  $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$  et  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  .....1pt

Exercice 3 (6pts)

1) On considère les ensembles  $E = \left\{ \frac{3}{11} + \frac{2k}{11} / k \in \mathbb{Z} \right\}$  et  $F = \left\{ 1 + \frac{2k'}{11} / k' \in \mathbb{Z} \right\}$

- a) Montrer que  $(1; -1) \in E \times F$  .....1pt
- b) Montrer que  $E = F$  .....1pt
- c) Montrer que  $(\forall (x; y) \in E^2) x+2y \in E$  .....1pt
- d) Déterminer en extension  $E \cap ]0; 1[$  .....1pt
- 2) On pose  $G = \left\{ a+b\sqrt{2} / (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ 
  - a) Vérifier que  $G \neq \emptyset$  .....0.5pt
  - b) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) : x \in G \Rightarrow x^2 \in G$  .....0.5pt
- 3) Soit  $A, B$  et  $C$  des parties de  $E$ . Montrer que  $A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow B \setminus A \subseteq C \setminus A$  .....1pt



**Note :**

- Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.
- Chaque tentative de tricher vaut un zéro.

**Exercice 1 (10pts)**

- Déterminer la valeur de vérité et la négation de la proposition  $P: 10=8 \Leftrightarrow 3+4 \neq 7$  .....1.5pt
- Montrer que :  $(\forall x; y \in \mathbb{R}) |x|+|y|=|x+y| \Leftrightarrow xy \geq 0$  .....1.5pt
- a) En utilisant le raisonnement par double implication montrer que :  
 $(\forall x; y \in \mathbb{R}) x^2+y^2=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ et } y=0)$  .....1pt
- b) Montrer que  $(\forall x \in [-1; +\infty])(\forall y \in [3; +\infty]) \frac{x+y+24}{2} = 5\sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} \Leftrightarrow x=24 \text{ et } y=4$  .....1pt
- Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \sqrt{n^2+4n+2} \notin \mathbb{N}$  .....1pt
- a) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  .....1.5pt
- b) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) 11 \text{ divise } 3^{2n} + 2^{6n+5}$  (Indication : remarquer que  $2^6 = 3^2 + 5 \times 11$ ) .....1.5pt
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ , Montrer que  $n(n+1)(n+2)$  est divisible par 3. ....1pt

**Exercice 2 (4pts)**

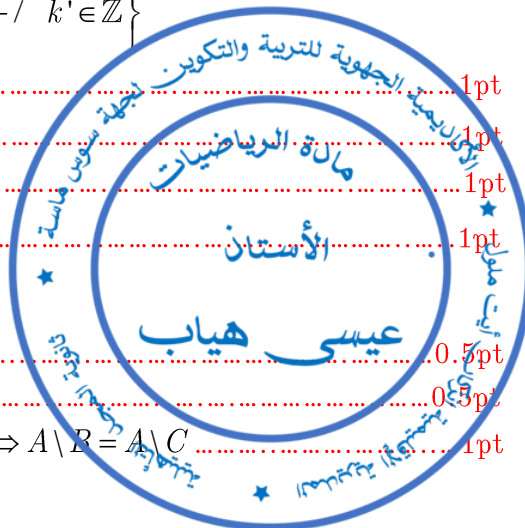
On considère les ensembles  $A = \left\{ (x; y) \in \mathbb{N}^{*2} / \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \right\}$  et  $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{x+1}{1-x} \in \mathbb{Z} \right\}$

- a) Vérifier que  $x \in B \Leftrightarrow (x \in \mathbb{Z} \text{ et } -1 + \frac{2}{1-x} \in \mathbb{Z})$  .....0.5pt
- b) En déduire l'écriture de  $B$  en extension. ....1pt
- a) Vérifier que  $(x; y) \in A \Leftrightarrow ((x; y) \in \mathbb{N}^{*2} \text{ et } (x-3)(y-3) = 9)$  .....0.5pt
- b) En déduire l'écriture de  $A$  en extension (remarquer que  $(x; y) \in A \Rightarrow (x-3 \geq -2 \text{ et } y-3 \geq -2)$ ) ....1pt
- Montrer que  $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$  et  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  .....1pt

**Exercice 3 (6pts)**

1) On considère les ensembles  $E = \left\{ 1 + \frac{2k}{11} / k \in \mathbb{Z} \right\}$  et  $F = \left\{ \frac{3}{11} + \frac{2k'}{11} / k' \in \mathbb{Z} \right\}$

- a) Montrer que  $(1; -1) \in E \times F$  .....1pt
- Montrer que  $E = F$  .....1pt
- Montrer que  $(\forall (x; y) \in E^2) x+2y \in E$  .....1pt
- Déterminer en extension  $E \cap ]0; 1[$  .....1pt
- On pose  $G = \left\{ a + b\sqrt{3} / (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ 
  - Vérifier que  $G \neq \emptyset$  .....0.5pt
  - Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) : x \in G \Rightarrow x^2 \in G$  .....0.5pt
- Soit  $A, B$  et  $C$  des parties de  $E$ . Montrer que  $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \setminus B = A \setminus C$  .....1pt







## Propriétés 2

- $f^{-1}(F) = E$
- $C = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(C) = \emptyset$
- $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

**Démonstration :** Voir l'exercice 10 de la série 3.

## Exemple 5

On considère l'application  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2 + 2x$

- 1) Déterminer  $f^{-1}([-1;0])$  et  $f^{-1}([3;+\infty[)$
- 2) Déterminer  $f^{-1}([-1;0] \cap [3;+\infty[)$

## 3) Egalité de deux applications

### A retenir 3

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ , et  $g$  une application d'un ensemble  $E'$  vers un ensemble  $F'$ . On dit que les applications  $f$  et  $g$  sont égales, et on écrit  $f = g$  si elles ont le même ensemble de départ ( $E = E'$ ), le même ensemble d'arrivée ( $F = F'$ ), et si  $(\forall x \in E) f(x) = g(x)$

$$\text{Ainsi } f = g \Leftrightarrow \begin{cases} E = E' \\ F = F' \\ (\forall x \in E) f(x) = g(x) \end{cases}$$

### Exemple 6

Montrer que les applications suivantes sont égales :

$$f: \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 - (\cos(x) - \sin(x))^2 \quad \quad \quad x \mapsto \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$



## 4) Restriction et prolongement

### A retenir 4

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application et  $A$  une partie de  $E$

On appelle **restriction** de  $f$  à (ou sur) la partie  $A$ , l'application  $g$  définie par  $g: A \rightarrow F$   
 $x \mapsto f(x)$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} g: A \rightarrow F \\ x \mapsto g(x) \end{cases} \text{ est la restriction de } f \text{ sur } A \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset E \\ (\forall x \in A) g(x) = f(x) \end{cases}$$

### Exemple 7

On considère l'application  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2x - |x| + 3$ . Déterminer l'application  $g$  la restriction de  $f$  sur  $]-\infty; 0]$

### A retenir 5

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application et  $G$  un ensemble tel que  $E \subset G$

On appelle **prolongement** de  $f$  à (ou sur) la partie  $G$ , toute application  $h$  définie par  $h: G \rightarrow F$   
 $x \mapsto f(x)$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} h: G \rightarrow F \\ x \mapsto h(x) \end{cases} \text{ est un prolongement } f \text{ sur } G \Leftrightarrow \begin{cases} E \subset G \\ (\forall x \in E) h(x) = f(x) \end{cases}$$

### Exemple 8

On considère l'application  $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x^2}{x} + 5$ . Déterminer un prolongement de  $h$  à la partie  $\mathbb{R}$

## 5) Application injective

### A retenir 6

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

- On dit que  $f$  est **injective** si tout élément de  $F$  a **au plus un antécédent** dans  $E$  par  $f$ .
- $f$  est injective  $\Leftrightarrow [(\forall (x,y) \in E^2) f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$
- $f$  n'est pas injective  $\Leftrightarrow [(\exists (x,y) \in E^2); f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y]$

### Exemple 9

On considère l'application  $f: ]1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$ . Montrer que  $f$  est injective.

### Exemple 10

1) On considère l'application  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$$

a) Déterminer  $f^{-1}(\{2\})$

b) En déduire que  $f$  n'est pas injective.

2) Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $] -\infty; 0[$ . Montrer que  $g$  est injective.

## 6) Application surjective

### A retenir 7

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

- On dit que  $f$  est surjective si tout élément de  $F$  a **au moins un antécédent** dans  $E$  par  $f$ .
- $f$  est surjective  $\Leftrightarrow [(\forall y \in F)(\exists x \in E) y = f(x)]$
- $f$  est surjective  $\Leftrightarrow f(E) = F$
- $f$  n'est pas surjective  $\Leftrightarrow$  Il existe  $y \in F$  qui n'admet aucun antécédent
- $f$  n'est pas surjective  $\Leftrightarrow f(E) \neq F$

### Exemple 11

Montrer que l'application  $f: ]-\infty; 4[ \rightarrow ]-\infty; 1[$   
 $x \mapsto \frac{x+1}{x-4}$  est surjective.

### Exemple 12

1) On considère l'application  $g$  de l'exemple 10.

a) Résoudre dans  $] -\infty; 0[$  l'équation  $g(x) = 0$

b) En déduire que  $g$  n'est pas surjective.

2) On considère l'application  $h: ]-\infty; 0[ \rightarrow ]1; +\infty[$   
 $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$

Montrer que  $h$  est surjective.

## 7) Application bijective

### A retenir 8

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

- On dit que  $f$  est bijective si tout élément de  $F$  admet **exactement un antécédent** dans  $E$  par  $f$ .
- $f$  est bijective  $\Leftrightarrow [(\forall y \in F)(\exists! x \in E) y = f(x)]$
- $f$  est bijective  $\Leftrightarrow f$  est injective et surjective
- $f$  n'est pas bijective  $\Leftrightarrow f$  n'est pas injective ou n'est pas surjective



### Exemple 13

On considère l'application  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow [-\frac{1}{3}; 1[$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$$

Montrer que  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}^+$  sur  $[-\frac{1}{3}; 1[$

## 8) Application réciproque d'une bijection

### A retenir 9 :

• Soit  $f$  est une application bijective d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ . En associant à tout élément  $y$  de  $F$  son unique antécédent par  $f$ , on définit une application de  $F$  dans  $E$ . Cette application est appelée **la bijection réciproque** de l'application  $f$ , ou simplement **la réciproque** de  $f$ , et noté  $f^{-1}$ .

Si  $f: E \rightarrow F$  est une application bijective, alors la bijection réciproque  $f^{-1}: F \rightarrow E$  est caractérisée par

$$\text{l'équivalence : } \begin{cases} y = f(x) \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in F \end{cases}$$

### Remarque 1 :

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application bijective.

• Pour déterminer l'expression de l'application réciproque  $f^{-1}: F \rightarrow E$  de  $f$  **on résout l'équation  $f(x) = y$  d'inconnue  $x \in E$ .**

### Exemple 14

Déterminer la bijection réciproque  $f^{-1}$  de l'application  $f$  de l'exemple 13.

## 9) Composition des applications

### A retenir 10

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ , et  $g$  une application de  $F$  dans  $G$ . L'application  $h$  définie de  $E$  dans  $G$ , par  $h(x) = g(f(x))$  est appelé **composée des applications**  $f$  et  $g$  dans cet ordre. Elle est noté  $gof$ . On a alors :

$$gof: E \rightarrow G \text{ et } (\forall x \in E) \ gof(x) = g(f(x))$$

### Exemple 15

On considère les applications :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + 2 \quad \text{et} \quad x \mapsto 3 + \sqrt{x}$$

Déterminer les applications :  $gof$ ,  $fog$  et  $fof$

### Remarque 2 :

- La composition des applications n'est pas une opération commutative.
- La composition des applications est une opération associative.
- On note l'application identité d'un ensemble  $E$  par  $Id_E: C$ 'est-à-dire :

$$Id_E: E \rightarrow E$$
$$x \mapsto x$$

$$(gof)oh = go(foh)$$

### Propriétés 3

- La composée de deux applications injectives est injective.
- La composée de deux applications surjectives est surjective.
- La composée de deux applications bijectives est bijective.

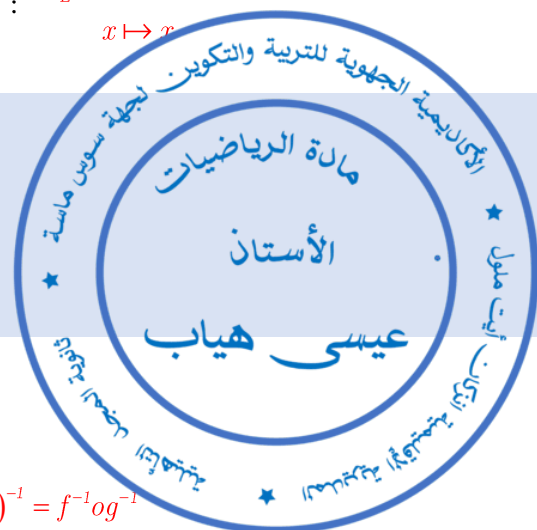
• Soit  $f: E \rightarrow F$

Si  $f$  est bijective alors  $(\forall x \in F) \ fof^{-1}(x) = x$  et  $(\forall x \in E) \ f^{-1}of(x) = x$

**Démonstration :** Dans la classe.

### Remarque 3 :

- Si  $f: E \rightarrow F$  est bijective alors  $fof^{-1} = Id_F$  et  $f^{-1}of = Id_E$
- Si  $f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow G$  sont bijectives alors  $gof$  bijective et  $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$



## Résumé 3 : Les applications

### Définition d'une application

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides.

- On appelle application de  $E$  vers  $F$  toute relation  $f$  qui, à tout élément  $x$  de  $E$  associe un unique élément  $y$  de  $F$ . On écrit  $y = f(x)$
- $f$  application de  $E$  vers  $F \Leftrightarrow (\forall x \in E)(\exists! y \in F) ; y = f(x)$
- Toute fonction numérique est une application de son ensemble de définition vers  $\mathbb{R}$

### Image directe d'une partie

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

$A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

- L'image directe de  $A$  par  $f$ , notée  $f(A)$  est définie par :

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$$

- $y \in f(A) \Leftrightarrow [(\exists x \in A); y = f(x)]$
- $f(A) = C \Leftrightarrow [(\forall x \in E); x \in A \Leftrightarrow f(x) \in C]$
- $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$

Propriétés

- $A = \emptyset \Leftrightarrow f(A) = \emptyset$
- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

### Image réciproque d'une partie

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

$C$  et  $D$  deux parties de  $F$ .

- L'image réciproque de  $C$  par  $f$ , notée  $f^{-1}(C)$  est définie par :

$$f^{-1}(C) = \{x \in E / f(x) \in C\}$$

- $x \in f^{-1}(C) \Leftrightarrow f(x) \in C$
- $f^{-1}(C) = A \Leftrightarrow [(\forall x \in E); x \in f^{-1}(C) \Leftrightarrow x \in A]$

Propriétés

- $f^{-1}(F) = E$
- $C = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(C) = \emptyset$
- $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

### Application injective

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

- On dit que  $f$  est injective si tout élément de  $F$  a **au plus un antécédent** dans  $E$  par  $f$ .

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow [(\forall (x,y) \in E^2) f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$$

$$f \text{ n'est pas injective} \Leftrightarrow [(\exists (x,y) \in E^2); f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y]$$

### Application surjective

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

- On dit que  $f$  est surjective si tout élément de  $F$  a **au moins un antécédent** dans  $E$  par  $f$ .
- $f$  est surjective  $\Leftrightarrow [(\forall y \in F)(\exists x \in E) y = f(x)]$
- $f$  est surjective  $\Leftrightarrow f(E) = F$
- $f$  n'est pas surjective  $\Leftrightarrow \exists y \in F$  qui n'admet **aucun** antécédent
- $f$  n'est pas surjective  $\Leftrightarrow f(E) \neq F$

### Application bijective

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

- On dit que  $f$  est bijective si tout élément de  $F$  admet **exactement un antécédent** dans  $E$  par  $f$ .

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow [(\forall y \in F)(\exists! x \in E) y = f(x)]$$

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow f \text{ est injective et surjective}$$

$$f \text{ n'est pas bijective} \Leftrightarrow f \text{ n'est pas injective ou n'est pas surjective}$$

### Application réciproque d'une bijection

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application bijective

- Pour déterminer l'expression de l'application réciproque  $f^{-1} : F \rightarrow E$  de  $f$  **on**

$$\text{résout l'équation } f(x) = y \text{ d'inconnue } x \in E, \text{ on a : } \begin{cases} y = f(x) \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in F \end{cases}$$

### Composition des applications

- La composée de deux applications injectives est injective.
- La composée de deux applications surjectives est surjective.
- La composée de deux applications bijectives est bijective.
- Soit  $f : E \rightarrow F$

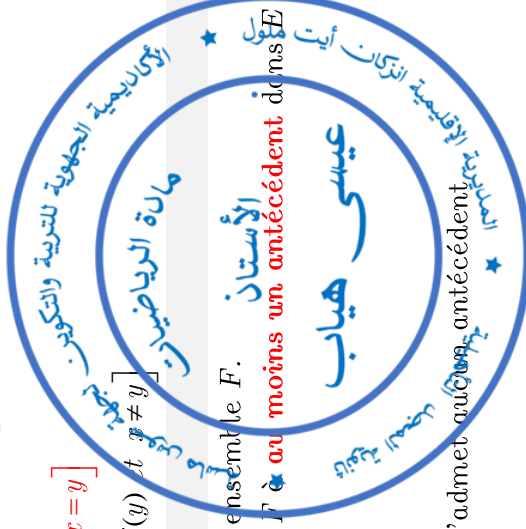
$$\text{Si } f \text{ est bijective alors } (\forall x \in F) f \circ f^{-1}(x) = x \text{ et } (\forall x \in E) f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$f \circ f^{-1} = Id_F$$

$$f^{-1} \circ f = Id_E$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$$



**Exercice 1**

On considère l'application  $f$  définie de  $]1; +\infty[$  vers

$$]2; +\infty[ \text{ par } f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

- 1) Montrer que  $f$  est injective.
- 2) Montrer que  $f$  est surjective.
- 3) En déduire que  $f$  est bijective puis donner sa bijection réciproque  $f^{-1}$ .

**Exercice 2**

On considère l'application  $f$  définie de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}+2}$$

- 1) a) Déterminer  $f^{-1}\left(\left\{1; \frac{1}{2}\right\}\right)$
- b) L'application  $f$  est-elle surjective ? Justifier.
- 2) Montrer que  $f(\mathbb{R}^+) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$

3) Soit  $g$  l'application définie de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$

par :  $g(x) = f(x)$ .

- a) Montrer que  $g$  est injective.
- b) En déduire que  $g$  est bijective puis définir  $g^{-1}$

**Exercice 3**

On considère l'application  $f$  définie de  $[1; +\infty[$  vers

$$]2; +\infty[ \text{ par } f(x) = x + \frac{1}{x}$$

- 1) a) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) x \in [1; +\infty[ \Leftrightarrow f(x) \in ]2; +\infty[$
- b) En déduire que  $f$  est surjective.
- c) Montrer que  $f$  est injective.
- d) En déduire que  $f$  est bijective puis définir  $f^{-1}$

2) Soit  $g$  l'application définie de  $[-2; +\infty[$  vers

$$]2; +\infty[ \text{ par } : g(x) = \frac{x^2 + 6x + 10}{x+3}$$

- a) Montrer que  $(\forall x \geq -2) g(x) = f \circ h(x)$  où  $h$  est définie de  $[-2; +\infty[$  vers  $[1; +\infty[$  par  $h(x) = x+3$
- b) En déduire que  $g$  est bijective puis définir  $g^{-1}$ .

**Exercice 4**

Soit  $f$  l'application définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$$

- 1) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = \frac{1}{3}$
- b)  $f$  est-elle injective ?
- 2) a) Montrer que  $f(\mathbb{R}) \subset \left[0; \frac{4}{3}\right]$

b)  $f$  est-elle surjective ?

3) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $]0; +\infty[$ , montrer que  $g$  est bijective de  $]0; +\infty[$  sur  $]0; 1[$  puis définir  $g^{-1}$ .

**Exercice 5**

On pose  $I = \mathbb{R}_+^*$  et soit  $f$  l'application définie de  $I \times I$

$$\text{vers } I \times I \text{ par } : f((x; y)) = \left(xy; \frac{x}{y}\right)$$

- 1) Montrer que  $f$  est injective.
- 2) Montrer que  $f$  est bijective puis définir  $f^{-1}$ .

**Exercice 6**

On considère l'application  $f$  définie de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$$

- 1) a) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$
- b) L'application  $f$  est-elle surjective ?

2) Montrer que  $f$  est injective.

3) Montrer que  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}^+$  sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  puis définir  $f^{-1}$ .

**Exercice 7**

Soit  $f$  une application définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

1) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \sqrt{x^2 + 1} > x$

2) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) - f(y) = (x - y) \left( \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} - 1 \right)$$

- 3) En déduire que  $f$  est injective.
- 4)  $f$  est-elle surjective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  ? Justifier.
- 5) Montrer que  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^+$  puis définir  $f^{-1}$ .

**Exercice 8**

$$\text{On pose } f(x) = \frac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$

- 1) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$
- 2) L'application  $f$  est-elle injective ?

**Exercice 9**

Soit  $f$  l'application définie de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$\text{par } : f((x; y)) = (x^2 - y^2; xy)$$

- 1) a) Soit  $(a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , montrer que l'équation  $x^2 - ax - b^2 = 0$  admet deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  de signes opposés. (Sans les déterminées).
- b) En déduire que  $f$  est surjective.
- 2) L'application  $f$  est-elle injective ?

**Exercice 10/Classique**

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .

$A$  et  $B$  deux parties de  $E$ ,  $C$  et  $D$  deux parties de  $F$

Montrer que :

- 1)  $A = \emptyset \Leftrightarrow f(A) = \emptyset$
- 2)  $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
- 3)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- 4)  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- 5)  $f^{-1}(F) = E$
- 6)  $C = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(C) = \emptyset$
- 7)  $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$
- 8)  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- 9)  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
- 10)  $A \subset f^{-1}(f(A))$
- 11)  $f(f^{-1}(C)) \subset C$
- 12)  $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$
- 13)  $f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) = f^{-1}(C \setminus D)$

**Exercice 11/Classique**

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ . Montrer que :

- 1)  $f$  est injective  $\Leftrightarrow (\forall A, B \in \mathcal{P}(E)) f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- 2)  $f$  est injective  $\Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{P}(E)) A = f^{-1}(f(A))$
- 3)  $f$  est surjective  $\Leftrightarrow (\forall C \in \mathcal{P}(F)) f(f^{-1}(C)) = C$
- 4)  $f$  est injective  $\Leftrightarrow (\forall A, B \in \mathcal{P}(E)) f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$
- 5)  $f$  est bijective  $\Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{P}(E)) f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$

**Exercice 12/Classique**

Soit  $E$  un ensemble non vide et  $A$  une partie de  $E$ .

On considère l'application  $f_A$  définie de  $E$  vers  $\mathbb{R}$  par

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $(\forall A, B \in \mathcal{P}(E)) A = B \Leftrightarrow f_A = f_B$
- 2) Montrer que  $f_{\bar{A}} = 1 - f_A$
- 3) Montrer que  $(\forall A, B \in \mathcal{P}(E))$  :
  - a)  $f_{A \cap B} = f_A \times f_B$
  - b)  $f_{A \setminus B} = f_A - f_A \times f_B$
  - c)  $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A \times f_B$
  - d)  $f_{A \Delta B} = f_A + f_B - 2f_A \times f_B$
- 4) En déduire que  $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$  :
  - a)  $\overline{A \Delta B} = A \Delta B$
  - b)  $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$
  - c)  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
  - d)  $C \cap (A \Delta B) = (C \cap A) \Delta (C \cap B)$

**Exercice 13/Classique**

On considère deux applications :

$f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow G$ , montrer que :

- 1)  $g \circ f$  est injective  $\Rightarrow f$  est injective
- 2)  $\begin{cases} g \circ f \text{ est injective} \\ f \text{ est surjective} \end{cases} \Rightarrow g$  est injective
- 3)  $g \circ f$  est surjective  $\Rightarrow g$  est surjective
- 4)  $\begin{cases} g \circ f \text{ est surjective} \\ g \text{ est injective} \end{cases} \Rightarrow f$  est surjective

**Exercice 14**

1) Soit  $E$  un ensemble non vide. Montrer que l'application  $f$  une définie de  $\mathcal{P}(E)$  vers  $\mathcal{P}(E)$  par  $f(A) = \bar{A}$  est injective, surjective et bijective.

2) Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan.

On considère les translations  $t_{\vec{u}}$  et  $t_{\vec{v}}$

Déterminer  $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$

**Exercice 15**

Montrer que si  $f$  est une fonction numérique strictement monotone, alors  $f$  est injective.

**Exercice 16**

Soit  $f$  une application définie de  $I = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$  vers  $\mathbb{R}$  tel que  $(\forall x \in I) f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x + 1$ .

On pose  $g(x) = \frac{x-1}{x}$

- 1) Vérifier que  $(\forall x \in I) g(x) \in I$
- 2) Calculer  $g \circ g(x)$  et  $g \circ g \circ g(x)$  pour tout  $x \in I$
- 3) Montrer que  $(\forall x \in I) f(x) + f(g \circ g(x)) = -\frac{1}{x-1} + 1$
- 4) Calculer  $f(g(x)) + f(g \circ g(x))$  en fonction de  $x$
- 5) En déduire l'expression de  $f$  en fonction de  $x$

**Exercice 17**

Soit  $f: I = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$(\forall x \in I) f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{x} - x + 1.$$

On pose  $g(x) = \frac{x+1}{x}$

- 1) Vérifier que  $(\forall x \in I) g(x) \in I$
- 2) Calculer  $g \circ g(x)$  et  $g \circ g \circ g(x)$  pour tout  $x \in I$
- 3) Montrer que :

$$(\forall x \in I) f(x) + f(g \circ g(x)) = \frac{1}{g \circ g(x)} - g \circ g(x) + 1$$

4) En déduire  $(\forall x \in I) f(x) = 1 - x$

**Exercice 18**

$f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  tel que  $f((n; m)) = n + (n+m)(n+m+1)$

Montrer que  $f$  est injective.

04

# Fonctions numériques



## Introduction

Une fonction  $f$  est une relation qui, à chaque nombre réel  $x$  d'un ensemble  $D$ , associe au plus, un nombre réel  $y$  noté  $f(x)$ .

- Une fonction  $f$  se note également par  $f: x \mapsto f(x)$
- Le nombre  $f(x)$  est appelé **l'image** de  $x$  par la fonction  $f$ .
- Le nombre  $x$ , s'il existe tel que  $f(x)=y$ , s'appelle **antécédent** de  $y$  par la fonction  $f$ .
- Pour déterminer les antécédents  $x$  d'un nombre  $b$  par la fonction  $f$ , on résout l'équation  $f(x)=b$  d'inconnue  $x$ .

## 1) Ensemble de définition d'une fonction numérique

### Définition 1 :

Soit  $f$  une fonction numérique d'une variable réelle  $x$ .

**L'ensemble de définition** de la fonction  $f$ , noté  $D$  ou  $D_f$  est l'ensemble des nombres réels  $x$  pour lesquels l'image  $f(x)$  est calculable dans  $\mathbb{R}$ .

### Remarques 1 :

- Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction numérique, il faut se limiter aux nombres réels dont le **dénominateur est différent de zéro** et ce qui est à l'intérieur de la racine est positif...
- On dit qu'une fonction numérique  $f$  est **définie** sur  $I$  si  $I$  est une partie de  $D_f$ .
- L'ensemble de définition d'une fonction numérique  $f$  est appelé aussi le **domaine** de définition de  $f$ .

### Propriété 1 :

Soit  $P(x)$  et  $Q(x)$  deux polynômes ;

La fonction $f$	Ensemble de définition
$f = \text{Polynôme}$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$
$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$



### Exemple 1 :

Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$  dans les cas suivants :

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad f(x) = \frac{1}{x-1} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad f(x) = \frac{2x+3}{x^2-x-2} \quad f(x) = \sqrt{x^2-x-2} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3} \quad f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3} \quad f(x) = \sqrt{7-x} \quad f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

### Remarque 2 : Egalité de deux fonctions

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions.  $D_f$  et  $D_g$  sont leurs ensembles de définition respectifs.

On dit que  $f$  et  $g$  sont **égales**, et on écrit  $f=g$ , si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $D_f = D_g$
- $f(x) = g(x)$  pour tout  $x$  de  $D_f$

### Remarques 3 :

- Dans un plan muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la **courbe représentative** d'une fonction  $f$ , notée souvent  $(C_f)$ , est l'ensemble des points  $M(x; f(x))$  du plan où  $x$  parcourt  $D_f$
- Autrement dit :  $M(x, y) \in (C_f) \Leftrightarrow x \in D_f$  et  $y = f(x)$

**Intersection avec les axes du repère :**

- Les points  $M(x; 0)$  tel que  $x$  est une solution de l'équation  $f(x)=0$  sont les points d'intersection de  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses.
- Le point  $B(0; f(0))$  est le point d'intersection de  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées.

## 2) Fonction paire - Fonction impaire

### Définition 2 :

Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $D$  est **symétrique par rapport à zéro** si pour tout  $x \in D$  on a  $-x \in D$ .

### Exemple 2 :

Déterminer les parties symétriques par rapport à zéro parmi les parties suivantes :

$[-2;2]$  ;  $[-2;1]$  ;  $[-3;-2] \cup [2;4]$  ;  $]2;9[$  ;  $\mathbb{R}$  ;  $\{-2;5;7;2;-7;-5;0\}$  ;  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$  ;  $\mathbb{R}^*$  ;  $[-3;-2] \cup [2;3]$  ;  $] -1;1[$  ;  $[0;+\infty[$  ;  $\{-2;5;7;2;-7;0\}$

### Définition 3 :

Soit  $f$  une fonction numérique et  $D_f$  son domaine de définition.

1) On dit que  $f$  est une **fonction paire** si :

- $D_f$  est symétrique par rapport à zéro ;
- Pour tout  $x \in D_f$  :  $f(-x) = f(x)$

2) On dit que  $f$  est une **fonction impaire** si :

- $D_f$  est symétrique par rapport à zéro ;
- Pour tout  $x \in D_f$  :  $f(-x) = -f(x)$

### Exemple 3 :

Etudie la parité de la fonction  $f$  dans les cas suivants :

$$f(x) = x^2 + 1 \quad f(x) = x + \frac{1}{4x} \quad f(x) = |x| + 5 \quad f(x) = x^2 + 3x + 1 \quad f(x) = \sqrt{x-3}$$

### Remarques 4 :

- $x \mapsto \sin(x)$  et  $x \mapsto \tan(x)$  sont des fonctions impaires et  $x \mapsto \cos(x)$  est une fonction paire.
- La courbe d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère.

## 3) Variations d'une fonction numérique

### Définition 4 :

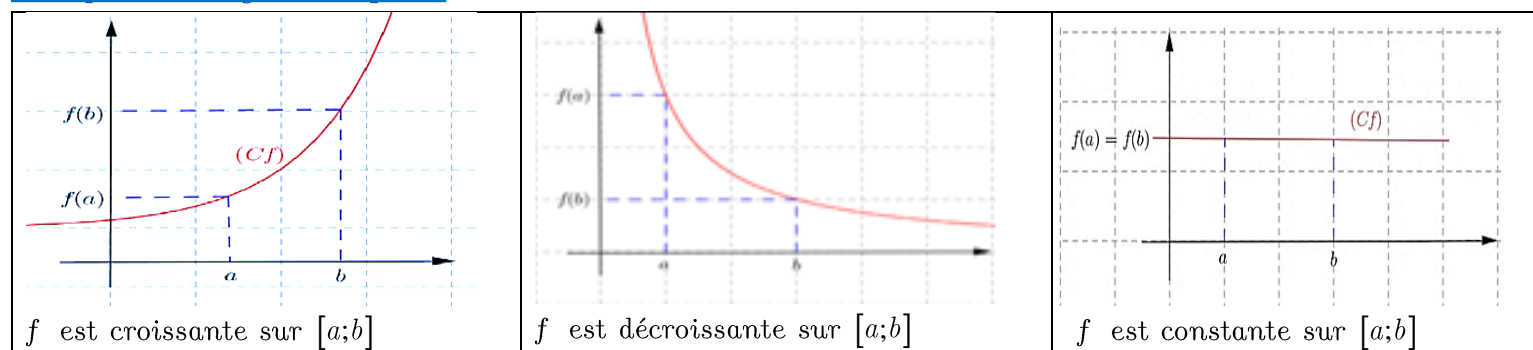
Soit  $f$  une fonction et  $I$  un intervalle inclus dans son ensemble de définition. On dit que :

- $f$  est **croissante** sur  $I$  si pour tous nombres  $x$  et  $y$  de  $I$  : si  $x < y$ , alors  $f(x) \leq f(y)$
- $f$  est **strictement croissante** sur  $I$  si pour tous nombres  $x$  et  $y$  de  $I$  : si  $x < y$ , alors  $f(x) < f(y)$
- $f$  est **décroissante** sur  $I$  si pour tous nombres  $x$  et  $y$  de  $I$  : si  $x < y$ , alors  $f(x) \geq f(y)$
- $f$  est **strictement décroissante** sur  $I$  si pour tous nombres  $x$  et  $y$  de  $I$  : si  $x < y$ , alors  $f(x) > f(y)$
- $f$  est **constante** sur  $I$  si pour tous nombres  $x$  et  $y$  de  $I$  on a  $f(x) = f(y)$

### Remarques 5 :

- Une fonction est dite monotone sur un intervalle  $I$ , si elle est croissante ou décroissante sur  $I$ .
- Une fonction est dite strictement monotone sur un intervalle  $I$ , si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur  $I$ .
- En général on résume les variations d'une fonction dans un tableau appelé **tableau de variations** où on indique par une flèche « vers le haut » que la fonction est croissante et par une flèche « vers le bas » que la fonction est décroissante.

### Interprétations géométriques :



### Définition 5 : Taux de variation

Soient  $f$  une fonction numérique,  $D_f$  son ensemble de définition,  $x$  et  $y$  deux nombres distincts de  $D_f$ .

Le nombre  $T = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$  est appelé **taux de variation** de  $f$  entre  $x$  et  $y$ .

### Propriété 2 :

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$ .  $x$  et  $y$  sont deux éléments distincts de  $I$ .

$T$  est le taux de variation de  $f$  entre  $x$  et  $y$ .

- Si  $T \geq 0$  pour tous  $x$  et  $y$  de  $I$ , alors  $f$  est croissante sur  $I$ .
- Si  $T > 0$  pour tous  $x$  et  $y$  de  $I$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si  $T \leq 0$  pour tous  $x$  et  $y$  de  $I$ , alors  $f$  est décroissante sur  $I$ .
- Si  $T < 0$  pour tous  $x$  et  $y$  de  $I$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .
- Si  $T = 0$  pour tous  $x$  et  $y$  de  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .

### Propriété 3 : Variations et parité

Soit  $f$  une fonction numérique telle que son domaine de définition  $D_f$  est symétrique par rapport à 0.

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}^+$  inclus dans  $D_f$  et  $J$  le symétrique de  $I$  par rapport à 0 ( $J = \{-x / x \in I\}$ ).

→ Dans le cas où  $f$  est paire, on a :

- Si  $f$  est croissante sur  $I$ , alors  $f$  est décroissante sur  $J$ .
- Si  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors  $f$  est croissante sur  $J$ .

→ Dans le cas où  $f$  est impaire, on a :

- $f$  à le même sens de variations sur  $I$  et  $J$ .

### Exemple 4 :

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x + \frac{1}{4x}$

1) Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

2) Vérifier que  $f$  est impaire.

3) Montrer que pour tout  $x$  et  $y$  distincts de  $D_f$  on a :  $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 1 - \frac{1}{4xy}$

4) Etudier les variations de  $f$  sur :  $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$  et  $\left]0; \frac{1}{2}\right]$ .

5) En déduire les variations de  $f$  sur :  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$  et  $\left[-\frac{1}{2}; 0\right[$ .

6) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

### Remarques 6 :

- Il suffit d'étudier les variations des fonctions paires et des fonctions impaires sur  $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$
- L'ensemble  $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$  est appelé **l'ensemble d'étude** (des fonctions paires et des fonctions impaires)

## 4) Fonction majorée-minorée-bornée / Extremums d'une fonction

### Activité 1 :

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par :  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  et  $g(x) = x^2 + 6x + 5$ .

1) a) Montrer que  $(\forall x \in ]-\infty; 0[) f(x) \leq -2$

On dit que  $f$  est **majorée** par  $-2$  sur  $]-\infty; 0[$ .

b) En déduire que  $f$  est majorée par  $-3$  sur  $]-\infty; 0[$ .

2) a) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) \geq -4$  et déduire que  $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) \geq -7$

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations  $g(x) = -4$  et  $g(x) = -7$

c) En déduire que  $-4$  est la valeur minimale de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .



### Définition 6 :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On dit que :

- $f$  est **majorée** sur  $I$  s'il existe un réel  $M$  tel que  $(\forall x \in I): f(x) \leq M$ .
- $f$  est **minorée** sur  $I$  s'il existe un réel  $m$  tel que  $(\forall x \in I): f(x) \geq m$ .
- $f$  est **bornée** sur  $I$  si elle est à la fois majorée et minorée sur  $I$

### Exemple 5 :

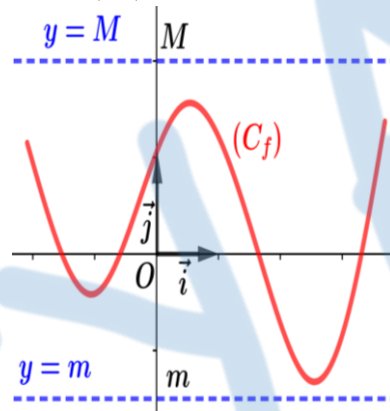
On considère  $f$  et  $g$  les fonctions définies respectivement par  $f(x) = 3 - \sqrt{1-2x}$  et  $g(x) = \sqrt{x^2+4}$ .

- 1) Déterminer  $D_f$  et  $D_g$ .
- 2) Montrer que  $f$  est majorée par 3 sur  $D_f$ .
- 3) Montrer que  $g$  est minorée par 2 sur  $D_g$

### Remarques 7 :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $(C_f)$  sa courbe.

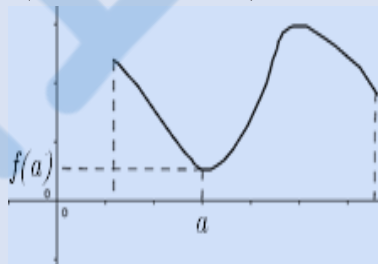
- $f$  est bornée sur  $I$  s'il existe des réels  $M$  et  $m$  tels que  $(\forall x \in I): m \leq f(x) \leq M$ .
- $f$  est bornée sur  $I \Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in I) |f(x)| \leq M$
- Si  $f$  est majorée par un réel  $M$  sur  $I$ , alors  $(C_f)$  est au-dessous de la droite d'équation  $y = M$  sur  $I$ .
- Si  $f$  est minorée par un réel  $m$  sur  $I$ , alors  $(C_f)$  est au-dessus de la droite d'équation  $y = m$  sur  $I$ .



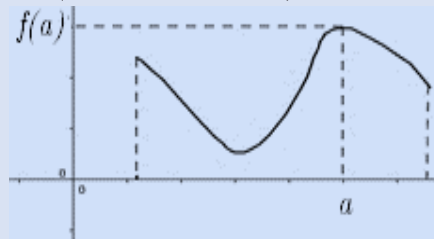
### Définition 7 :

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

- On dit que  $f(a)$  est **la valeur minimale** (ou le **minimum**) de  $f$  sur  $I$  si pour tout  $x$  de  $I$  on a :  $f(x) \geq f(a)$



- On dit que  $f(a)$  est **la valeur maximale** (ou le **maximum**) de  $f$  sur  $I$  si pour tout  $x$  de  $I$  on a :  $f(x) \leq f(a)$



- On dit que  $f(a)$  est un **extrémum** de  $f$  sur  $I$  si  $f(a)$  est la valeur maximale ou la valeur minimale de  $f$  sur  $I$

### Propriété 4 :

- $M$  valeur maximale de  $f$  sur  $I \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M \text{ pour tout } x \in I \\ \text{l'équation } f(x) = M \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$
- $m$  valeur minimale de  $f$  sur  $I \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m \text{ pour tout } x \in I \\ \text{l'équation } f(x) = m \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$

### Remarques 8 :

• Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle et  $c$  un élément de  $I$

→ Si le tableau de variations de  $f$  sur  $I$  s'écrit :

$x$	$c$
$f(x)$	$f(c)$

Alors  $f(c)$  est la valeur minimale de  $f$  sur  $I$

→ Si le tableau de variations de  $f$  sur  $I$  s'écrit :

$x$	$c$
$f(x)$	$f(c)$

Alors  $f(c)$  est la valeur maximale de  $f$  sur  $I$

• Les extremums de  $f$  sur  $I = D_f$  sont appelés **valeur maximale globale** (ou absolue) et **valeur minimale globale** (ou absolue).

• Les extremums de  $f$  sur  $I \neq D_f$  sont appelés **valeur maximale locale** et **valeur minimale locale**.

• On dit que  $f$  est **positive** sur  $I$  et on écrit  $f \geq 0$  si  $(\forall x \in I): f(x) \geq 0$ .

• On dit que  $f$  est **negative** sur  $I$  et on écrit  $f \leq 0$  si  $(\forall x \in I): f(x) \leq 0$ .

### 5) Etude de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ tel que $a \neq 0$

#### Activité 2 :

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

1) Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

2) Montrer que  $f$  est ni paire, ni impaire.

3) Dresser le tableau de variations de  $f$  et déduire qu'elle admet un extremum en  $I$  à préciser.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe  $(C_f)$ .

5) Tracer  $(C_f)$  dans un repère orthonormé.



#### Propriété 5 :

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$

La courbe de la fonction  $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$  dans un repère du plan est une **parabole** de **sommet**

$\Omega\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$  et d'**axe de symétrie** la droite  $x = -\frac{b}{2a}$

	$a > 0$	$a < 0$																
La courbe $(C_f)$																		
Tableau de variations de $f$	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>+\infty</math></td> <td><math>-\frac{b}{2a}</math></td> <td><math>-\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td></td> <td><math>f\left(-\frac{b}{2a}\right)</math></td> <td></td> </tr> </table>	$x$	$+\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$-\infty$	$f(x)$		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$		<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>+\infty</math></td> <td><math>-\frac{b}{2a}</math></td> <td><math>-\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td></td> <td><math>f\left(-\frac{b}{2a}\right)</math></td> <td></td> </tr> </table>	$x$	$+\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$-\infty$	$f(x)$		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	
$x$	$+\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$-\infty$															
$f(x)$		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$																
$x$	$+\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$-\infty$															
$f(x)$		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$																
Extremums	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est la valeur minimale de $f$ sur $\mathbb{R}$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est la valeur maximale de $f$ sur $\mathbb{R}$																

**Remarque 9 :**

$(C_f)$  est symétrique par rapport à la droite  $(\Delta): x = -\frac{b}{2a}$

Donc il suffit de tracer  $(C_f)$  sur  $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$  et déduire  $(C_f)$  sur  $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$  en utilisant la symétrie axiale d'axe  $(\Delta)$

**6) Etude de la fonction  $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$  tel que  $a; b; c; d \in \mathbb{R}, c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$**

**Activité 3 :**

On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{x+7}{x+1}$

- 1) Déterminer  $D_g$  l'ensemble de définition de la fonction  $g$ .
- 2) Dresser le tableau de variations de  $g$ .
- 3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe  $(C_g)$ .
- 4) Tracer  $(C_g)$  dans un repère orthonormé.

**Propriété 6 :**

- La fonction  $f: x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$  tel que  $a; b; c; d \in \mathbb{R}, c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$  est appelée **fonction homographique**.
- La courbe de la fonction  $f: x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$  tel que  $a; b; c; d \in \mathbb{R}, c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$  dans un repère du plan est une **hyperbole** de centre  $\Omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$  et d'asymptotes les droites  $x = -\frac{d}{c}$  et  $y = \frac{a}{c}$ .



	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$																
La courbe $(C_f)$																		
Tableau de variations de $f$	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-\frac{d}{c}</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	$f(x)$				<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-\frac{d}{c}</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	$f(x)$			
$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$															
$f(x)$																		
$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$															
$f(x)$																		

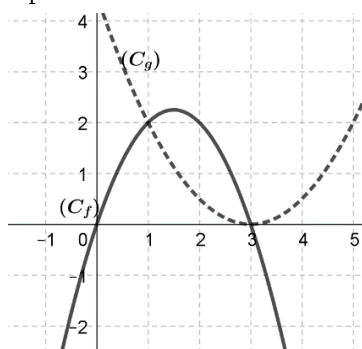
**Remarque 10 :**

$(C_f)$  est symétrique par rapport au point  $\Omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$

**7) Résolution graphique et algébrique des équations et inéquations**

**Activité 4 :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par ses courbes ci-contre :



- 1) Résoudre graphiquement les équations suivantes :  $f(x)=2$  ;  $f(x)=0$  ;  $f(x)=g(x)$  .
- 2) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :  $f(x)<2$  ;  $g(x)\geq 0$  ;  $f(x)>g(x)$

### Propriétés 7 :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques,  $(C_f)$  et  $(C_g)$  leurs courbes respectives dans un repère et  $m$  un nombre réel.

- Les solutions de l'équation  $f(x)=m$  sont les abscisses des points d'intersection de  $(C_f)$  et la droite  $y=m$
- Les solutions de l'inéquation  $f(x)\geq m$  (resp.  $f(x)\leq m$ ) sont les intervalles dont  $(C_f)$  est située au-dessus (resp. au-dessous) de la droite d'équation  $y=m$
- Les solutions de l'équation  $f(x)=g(x)$  sont les abscisses des points d'intersection des courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$ .
- Les solutions de l'inéquation  $f(x)\geq g(x)$  (resp.  $f(x)\leq g(x)$ ) sont les intervalles dont  $(C_f)$  est située au-dessus (resp. au-dessous) de  $(C_g)$ .

### Exemple 6 :

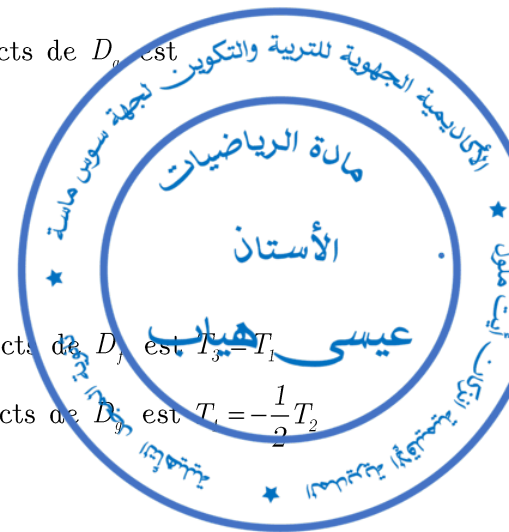
- 1) En utilisant la courbe  $(C_f)$  de la fonction  $f$  de l'activité 2 :  $f(x)=-x^2+2x+3$  :
  - a) Résoudre graphiquement puis algébriquement les équations :  $f(x)=3$  et  $f(x)=0$
  - b) Résoudre graphiquement puis algébriquement les inéquations :  $f(x)\leq 3$  et  $f(x)>0$
- 2) a) Représenter  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans le même repère, où  $g$  est la fonction de l'activité 3 :  $g(x)=\frac{x+7}{x+1}$ .
  - b) Résoudre graphiquement :  $f(x)=g(x)$  et  $f(x)\geq g(x)$
- 3) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) f(x)-g(x)=\frac{-(x-1)(x-2)(x+2)}{x+1}$
- 4) Résoudre algébriquement :  $f(x)=g(x)$  et  $f(x)\geq g(x)$  (On pourra remarquer que  $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$ ).

### 8) Etude des fonctions : $x \mapsto \sqrt{x+a}$ ; $x \mapsto ax^3$ ; $x \mapsto f(x)+c$ ; $x \mapsto c \times f(x)$

#### Activité 5 :

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies par :  $f(x)=\sqrt{x+2}$  et  $g(x)=-2x^3$

- 1) Déterminer  $D_f$  et  $D_g$
- 2) a) Montrer que le taux de variations de  $f$  entre deux réels  $x$  et  $y$  distincts de  $D_f$  est  $T_1 = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2}}$ 
  - b) En déduire que  $f$  est strictement croissante sur  $D_f$ .
- 3) a) Montrer que le taux de variations de  $g$  entre deux réels  $x$  et  $y$  distincts de  $D_g$  est
 
$$T_2 = -2 \left[ \left( x + \frac{1}{2}y \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right]$$
  - b) En déduire que  $g$  est strictement décroissante sur  $D_g$ .
- 3) Soient  $h$  et  $k$  les fonctions définies par :  $h(x)=f(x)+5$  et  $k(x)=-\frac{1}{2}g(x)$ 
  - a) Montrer que le taux de variations de  $h$  entre deux réels  $x$  et  $y$  distincts de  $D_h$  est  $T_3 = T_1$
  - b) Montrer que le taux de variations de  $k$  entre deux réels  $x$  et  $y$  distincts de  $D_k$  est  $T_4 = -\frac{1}{2}T_2$
  - c) En déduire les variations des fonctions  $h$  et  $k$



### Propriétés 8 :

#### 1) Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$ :

Soient  $a$  un nombre réel non nul et  $f: x \mapsto \sqrt{x+a}$  .

- On a  $D_f = [-a; +\infty[$ .
- $f$  est strictement croissante sur  $[-a; +\infty[$ .

Tableau de variations			Représentation graphique	
$x$	$-a$	$+\infty$		
$f(x)$				

2) Représentation graphique de la fonction  $x \mapsto ax^3$  :

Soient  $a$  un nombre réel non nul et  $f : x \mapsto ax^3$ .

- On a  $D_f = \mathbb{R}$  et  $f$  est une fonction impaire

$a > 0$			$a < 0$				
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$				$f(x)$			

Exemple 7 :

- 0
- 1) Etudier les variations de  $f$  et  $g$ .
- 2) Construire  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- 3) Résoudre graphiquement l'inéquation  $\sqrt{x+3} + x^3 < 0$  sur  $[-2; +\infty[$ .

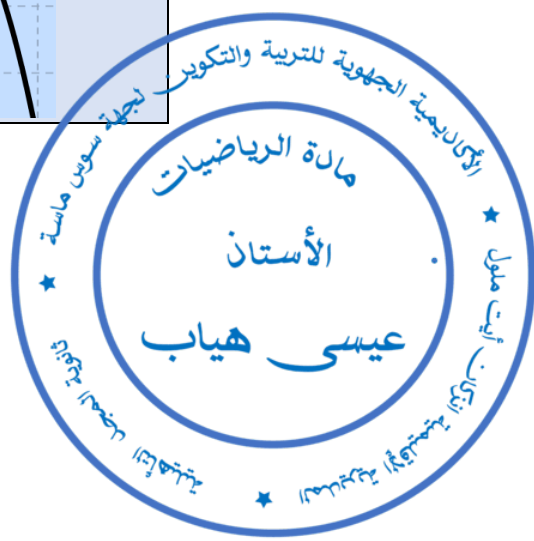
Remarque 11 :

Soit  $f$  une fonction numérique  
**Etude de la fonction**  $h : x \mapsto f(x) + c$

- $D_h = D_f$
- La fonction  $h$  a les mêmes variations que  $f$

**Etude de la fonction**  $k : x \mapsto c \times f(x)$

- $D_k = D_f$
- Si  $c > 0$  alors la fonction  $k$  a les mêmes variations que  $f$
- Si  $c < 0$  alors  $k$  et  $f$  sont de variations opposées.



### Exemple 8 :

En utilisant les tableaux des variations des fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$  et  $g(x) = \frac{x+7}{x+1}$  (les fonctions des activités 2 et 3), donner les tableaux des variations des fonctions  $h$  et  $k$  définies par :

$$h(x) = f(x) - 3 \text{ et } k(x) = \frac{-5x - 35}{x+1}$$

## 9) Image d'un intervalle par une fonction numérique

### Définition 8 et propriétés 9 :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

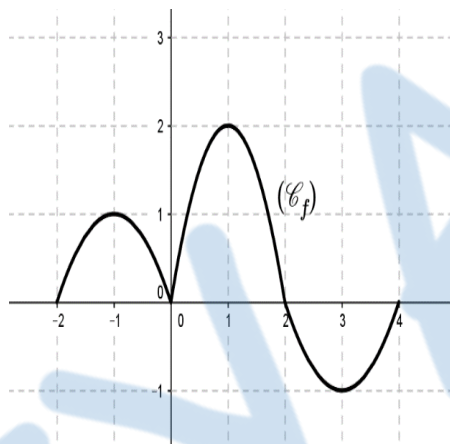
• L'ensemble des valeurs de  $f(x)$  tels que  $x \in I$  est appelé **image de l'intervalle**  $I$  par la fonction  $f$  et on le note par  $f(I)$ .

Autrement dit :  $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$ .

• Si  $m$  et  $M$  sont respectif la valeur minimale et la valeur maximale de  $f$  sur  $I$ , alors  $f(I) = [m; M]$

### Exemple 9 :

La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $[-2; 4]$ .



Déterminer :  $f([1; 3])$  ;  $f([1; 4])$  ;  $f([-2; 2])$  ;  $f([-1; 1])$

### Remarque 12 :

• On peut déterminer  $f(I)$  à partir de la courbe  $(C_f)$  ou à partir du tableau de variations de  $f$  ou par une méthode algébrique.

•  $[(\forall x \in \mathbb{R}) : x \in I \Leftrightarrow f(x) \in J] \Leftrightarrow f(I) = J$

### Exemple 10 :

1) On considère la courbe  $(C_f)$  de la fonction  $f$  de l'activité 2.

Déterminer par deux méthodes l'image de l'intervalle  $I$  par la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

$I = [1; 2]$  ;  $I = [-2; 4]$  ;  $I = [2; +\infty[$  ;  $I = \mathbb{R}$ .

2) Déterminer par deux méthodes l'image de l'intervalle  $I = [2; +\infty[$  par la fonction  $g$  de l'activité 3.

### Exemple 11 :

On considère la fonction  $f$  définie par son tableau de variations sur  $[-1; 4]$  :

$x$	-1	0	3	4
$f(x)$	-2	5	-3	1

1) Déterminer les extrémums de  $f$  sur  $[-1; 4]$

2) Comparer  $f(1)$  et  $f(2)$

3) Déterminer  $f([-1; 0])$  ;  $f([-1; 3])$  ;  $f([0; 4])$

4) Sachant que  $f$  est paire dresser sa table de variations sur  $[-4; 4]$

## 10) Composé de deux fonctions

### Activité 6 :

On considère deux fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = -x + 5$  et  $g(x) = \sqrt{x}$ .

- a) Calculer  $f(1)$  puis  $g(f(1))$ .  
b) Calculer  $f(-4)$  puis  $g(f(-4))$ .  
c) Calculer  $f(8)$ . Peut-on calculer  $g(f(8))$  ?
- a) Déterminer l'intervalle  $I$  tel que  $g(f(x))$  est calculable pour tout  $x$  de  $I$ .  
b) Déterminer l'expression de  $g(f(x))$  pour tout  $x$  de  $I$ .

### Définition 9 :

$g$  est une fonction définie sur un intervalle  $J$  et  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  telle que : pour tout  $x \in I$ , on a  $f(x) \in J$ .

La fonction **composée** de  $f$  et  $g$  dans cet ordre, noté  $g \circ f$ , est la fonction définie pour tout  $x \in I$  par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

### Remarques 13 :

- $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$  ;
- $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$  ;
- En général on a :  $g \circ f \neq f \circ g$ .

### Exemple 12 :

On pose :  $f(x) = x^2 + x$  ;  $g(x) = 2x - 1$  ;  $h(x) = (2x - 1)^2 + 1$  ;  $k(x) = \sin(2x + 1)$

- Déterminer  $g \circ f$  et  $f \circ g$  puis conclure.
- Ecrire la fonction  $h$  sous forme de composé de deux fonctions.
- Ecrire la fonction  $k$  sous forme de composé de deux fonctions.

### Exemple 13 :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques définies par  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$ .

- Déterminer  $D_f$ ,  $D_g$  et  $D_{g \circ f}$ .
- Donner l'expression de la fonction  $g \circ f$ .

### Propriétés 10 : Variations de composé de deux fonctions

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques définies respectivement sur les intervalles  $I$  et  $J$  tel que  $f(I) \subset J$ .

- Si  $f$  et  $g$  ont même sens de variations, respectivement sur  $I$  et  $J$ , alors la fonction composée  $g \circ f$  est croissante sur  $I$ .
- Si  $f$  et  $g$  ont des sens de variations contraires, respectivement sur  $I$  et  $J$ , alors la fonction composée  $g \circ f$  est décroissante sur  $I$ .

### Exemple 14 :

On pose :  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$  et  $g(x) = \frac{x+7}{x+1}$

- Déterminer  $g \circ f(x)$  pour tout  $x \in D_{g \circ f}$ .
- En utilisant les tableaux des variations de  $f$  et  $g$  déduire les variations de la fonction  $g \circ f$  sur  $I = [1; 2]$ .

### Exemple 15 :

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  et  $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$ .

- Donner  $D_f$ ,  $D_g$  et  $D_{g \circ f}$ .
- Déterminer  $g \circ f(x)$  pour tout  $x \in D_{g \circ f}$ .
- Dresser les tableaux de variations de  $f$  et  $g$ .
- Déterminer  $f(]-\infty; 1])$  et  $f([1; +\infty[)$ .
- Etudier les variations de la fonction  $g \circ f$  sur  $]-\infty; 1]$  et sur  $[1; +\infty[$ .



## 10) Fonction périodique

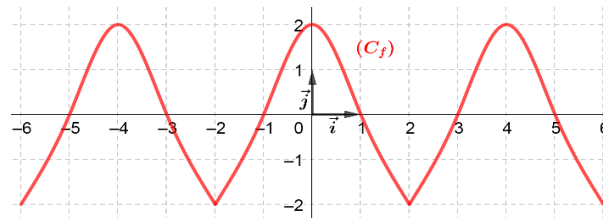
### Activité 7 :

La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

1) Vérifier que  $f(-2) = f(2)$ ,

$f(0) = f(4)$  et  $f(1) = f(5)$ .

2) Soit  $x \in \mathbb{R}$ , déterminer la relation entre  $f(x+4)$  et  $f(x)$ .



### Définition 10 :

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$  et  $T$  un nombre réel strictement positif.

On dit que  $f$  est **périodique** (ou  $T$ -périodique) sur  $D$  si :

- $x+T \in D$  pour tout  $x$  de  $D$  ;
- $f(x+T) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $D$ .

### Exemples classiques :

• Cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période :  $T = 2\pi$  car :

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :  $\begin{cases} (x+2\pi) \in \mathbb{R} \\ \cos(x+2\pi) = \cos(x) \end{cases}$  et  $\begin{cases} (x+2\pi) \in \mathbb{R} \\ \sin(x+2\pi) = \sin(x) \end{cases}$

• La fonction tangente est périodique de période :  $T = \pi$  car :

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$  on a :  $\begin{cases} (x+\pi) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \\ \tan(x+\pi) = \tan(x) \end{cases}$

### Exemple 16 :

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies respectivement sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos^2(x)$  et  $g(x) = \sin(2\pi x)$ .

Montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  sont périodiques de périodes respectives  $\pi$  et 1

### Remarques 14 :

Soit  $f$  une fonction périodique de période  $T$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

• Pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ , le nombre  $kT$  est aussi une période de la fonction  $f$ .

• La courbe  $(C_f)$  est invariante par toute translation de vecteur  $kT\vec{i}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

• Ainsi pour étudier une fonction périodique de période  $T$ , il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur  $T$

(Très souvent, on choisit un des deux intervalles  $[0; T]$  ou  $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ ).

## 11) Fonction partie entière

### Définition 11 :

• Soit  $x \in \mathbb{R}$  la **partie entière** de  $x$  est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ . On le note par  $E(x)$  ou  $[x]$

•  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad E(x) \leq x < E(x) + 1$

**Exemple 17 :** Calculer  $E(\pi)$ ,  $E(\sqrt{2})$ ,  $E(12,9)$ ,  $E(-12,9)$  et  $E(6)$

### Exemple 18

1) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x - 1 < E(x) \leq x$

2) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad E(x+n) = E(x) + n$

3) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists r \in [0; 1[) \quad x = E(x) + r$

4) Tracer la courbe de la fonction  $x \mapsto E(x)$  sur l'intervalle  $[-2; 5[$

### Propriétés 11 :

•  $(\forall x \in \mathbb{Z}) \quad E(x) = x$  ; •  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x - 1 < E(x) \leq x$  ; •  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad E(x) = m \Leftrightarrow (m \leq x < m+1 \text{ et } m \in \mathbb{Z})$

•  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad E(x+n) = E(x) + n$  ; •  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad x \in [k; k+1[ \Leftrightarrow E(x) = k$

• La fonction  $x \mapsto E(x)$  est constante sur tout intervalle de type  $[k; k+1[$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$



# Résumé 4 : Fonctions numériques

Soit  $f$  une fonction numérique,  $D_f$  son ensemble de définition,  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soit  $x$  et  $y$  deux éléments distincts de  $D_f$ , on pose  $T(x;y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$  (Le taux de variation de  $f$  entre  $x$  et  $y$ ).

$I$  un intervalle de  $D_f$ .

## Ensemble de définition d'une fonction

- $D_f = \{\text{les réels } x \text{ pour lesquels on peut calculer } f(x)\}$
- Si  $f$  est un polynôme alors  $D_f = \mathbb{R}$
- Si  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  alors  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
- Si  $f(x) = \sqrt{P(x)}$  alors  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$

## Parité d'une fonction

**Définition :**

- $f$  est paire  $\Leftrightarrow \begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ (\forall x \in D_f) f(-x) = f(x) \end{cases}$
- $f$  est impaire  $\Leftrightarrow \begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ (\forall x \in D_f) f(-x) = -f(x) \end{cases}$

**Propriété :**

- $f$  est paire  $\Leftrightarrow \begin{cases} (C_f) \text{ est symétrique par rapport} \\ \text{à l'axe des ordonnés} \end{cases}$
- $f$  est impaire  $\Leftrightarrow \begin{cases} (C_f) \text{ est symétrique par rapport} \\ \text{à l'origine du repère} \end{cases}$

## Variations d'une fonction

**Définition :**

- $f$  est croissante sur  $I \Leftrightarrow [(\forall x;y \in I) : x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)]$
- $f$  est décroissante sur  $I \Leftrightarrow [(\forall x;y \in I) : x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)]$
- $f$  est constante sur  $I \Leftrightarrow [(\forall x;y \in I) : x > y \Rightarrow f(x) = f(y)]$

**Propriété :**

- $f$  est croissante sur  $I \Leftrightarrow (\forall x,y \in I) : T(x;y) \geq 0$
- $f$  est décroissante sur  $I \Leftrightarrow (\forall x,y \in I) : T(x;y) \leq 0$
- $f$  est constante sur  $I \Leftrightarrow ((\forall x,y \in I) : T(x;y) = 0)$

## Variations et parité :

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles symétriques par rapport à  $0$  de  $D_f$

- Si  $f$  est paire, alors :  
 $f$  est croissante sur  $I \Leftrightarrow f$  est décroissante sur  $J$   
 $f$  est décroissante sur  $I \Leftrightarrow f$  est croissante sur  $J$
- Si  $f$  est impaire, alors :  
 $f$  est croissante sur  $I \Leftrightarrow f$  est croissante sur  $J$   
 $f$  est décroissante sur  $I \Leftrightarrow f$  est décroissante sur  $J$

## Fonction majorée, minorée, bornée et extremums

**Définition :** Soit  $M, m \in \mathbb{R}$

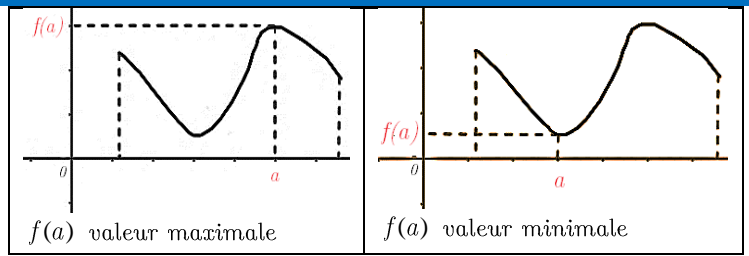
- $f$  est majorée par  $M$  sur  $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) f(x) \leq M$
- $f$  est minorée par  $m$  sur  $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) f(x) \geq m$
- $f$  est bornée sur  $I \Leftrightarrow f$  est majorée et minorée sur  $I$

**Propriété :**

- $f$  est bornée sur  $I \Leftrightarrow (\exists m, M \in \mathbb{R}) (\forall x \in I) m \leq f(x) \leq M$
- $f$  est bornée sur  $I \Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in I) |f(x)| \leq M$

**Définition :**

- $f(a)$  valeur maximale de  $f$  sur  $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) f(x) \leq f(a)$
- $f(a)$  valeur minimale de  $f$  sur  $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) f(x) \geq f(a)$



- $f(a)$  est un extremum de  $f \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) \text{ valeur maximale de } f \\ \text{ou} \\ f(a) \text{ valeur minimale de } f \end{cases}$

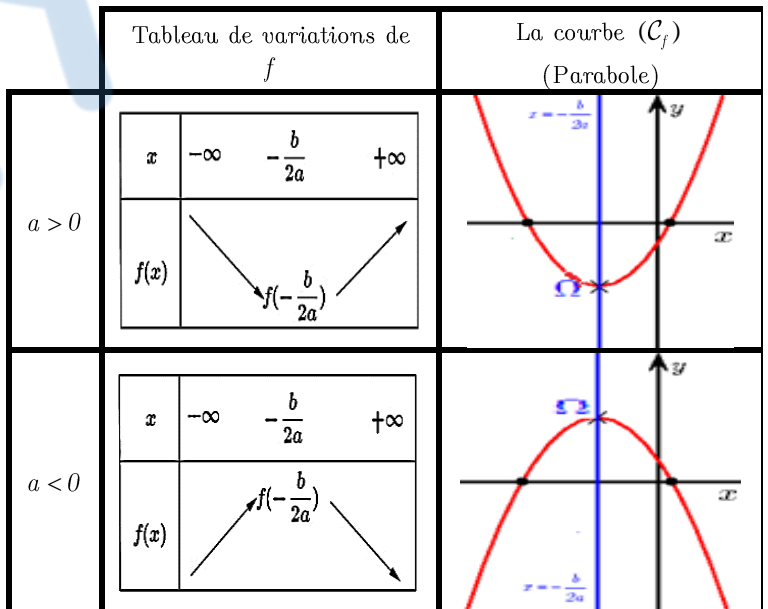
**Propriété :**

- $M$  valeur maximale de  $f$  sur  $I$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est majorée par } M \text{ sur } I \\ \text{l'équation } f(x) = M \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$
- $m$  valeur minimale de  $f$  sur  $I$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est minorée par } m \text{ sur } I \\ \text{l'équation } f(x) = m \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$

## Etude de la fonction $f$ tel que $f(x) = ax^2 + bx + c$

- $f$  est appelé : fonction polynomiale de deuxième degré.
- $D_f = \mathbb{R}$
- $(C_f)$  est une parabole de **sommet**  $\Omega_1 \left( -\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$  et d'**axe**

de **symétrie** la droite  $x = -\frac{b}{2a}$



## Etude de la fonction $g$ tel que $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

- $g$  est appelé : fonction homographique
- $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$
- $(C_g)$  est une hyperbole de **centre**  $\Omega_2 \left( \frac{-d}{c}; \frac{a}{c} \right)$  et d'**asymptotes**

les droites  $x = \frac{-d}{c}$  et  $y = \frac{a}{c}$

	Tableau de variations de $g$	La courbe ( $C_g$ ) (Hyperbole)								
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-\frac{d}{c}</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>g(x)</math></td> <td colspan="2">↗</td> <td>↘</td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	$g(x)$	↗		↘	
$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$							
$g(x)$	↗		↘							
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-\frac{d}{c}</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>g(x)</math></td> <td colspan="2">↘</td> <td>↗</td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	$g(x)$	↘		↗	
$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$							
$g(x)$	↘		↗							

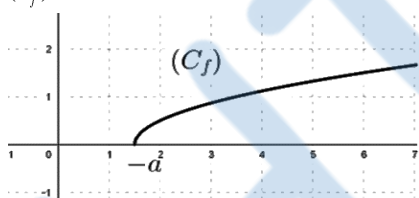
### Résolution graphique des équations et inéquations

L'équation	$f(x) = m$	$f(x) = g(x)$
Les abscisses des points d'intersection de	( $C_f$ ) avec la droite $y = m$	( $C_f$ ) avec ( $C_g$ )
L'inéquation	$f(x) > m$	$f(x) > g(x)$
Sont les intervalles dont	( $C_f$ ) est au-dessus de la droite $y = m$	( $C_f$ ) est au-dessus de ( $C_g$ )

**Etude de fonctions**  $f(x) = \sqrt{x+a}$ ,  $g(x) = ax^3$ ,  $h(x) = f(x)+c$  et  $k(x) = c \times f(x)$

**Etude de la fonction**  $f(x) = \sqrt{x+a}$

- $D_f = [-a; +\infty[$
- $f$  est strictement croissante sur  $D_f$
- La courbe ( $C_f$ )



**Etude de la fonction**  $g(x) = ax^3$

- $D_g = \mathbb{R}$
- $g$  est une fonction impaire

	Les variations de $g$	La courbe ( $C_g$ )
$a > 0$	$g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	
$a < 0$	$g$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	

**Etude de la fonction**  $h(x) = f(x)+c$

- $D_h = D_f$
- La fonction  $h$  a les mêmes variations que  $f$

**Etude de la fonction**  $k(x) = c \times f(x)$

- $D_k = D_f$
- Si  $c > 0$  alors la fonction  $k$  a les mêmes variations que  $f$
- Si  $c < 0$  alors  $k$  et  $f$  sont de variations opposées.

### Image d'un intervalle par une fonction

Soit  $I$  un intervalle

- $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$
- Si  $m$  et  $M$  sont respectivement la valeur minimale et la valeur maximale de  $f$  sur  $I$ , alors  $f(I) = [m; M]$
- On peut déterminer  $f(I)$  à partir de ( $C_f$ ) ou à partir du tableau de variations de  $f$  ou par une méthode algébrique.
- $[(\forall x \in \mathbb{R}) : x \in I \Leftrightarrow f(x) \in J] \Leftrightarrow f(I) = J$

### Composé de deux fonctions

- $(\forall x \in D_{g \circ f}) \quad g \circ f(x) = g(f(x))$
- $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$
- $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$

### Variations de $g \circ f$

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions monotones sur  $I$  et  $f(I)$  (resp.)

- Si  $f$  et  $g$  sont de même variations sur  $I$  et  $f(I)$  respectivement alors  $g \circ f$  est croissante sur  $I$ , sinon  $g \circ f$  est décroissante sur  $I$

### Fonction périodique

**Définition :**

Soit  $T \in ]0; +\infty[$

$f$  est périodique de période  $T \Leftrightarrow (\forall x \in D_f) \begin{cases} (x+T) \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

**Exemples classiques :**

- Cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période :  $T = 2\pi$
- La fonction tangente est périodique de période :  $T = \pi$

### Fonction partie entière

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . la partie entière de  $x$  est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ . On le note par  $E(x)$  ou  $[x]$

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad E(x) \leq x < E(x) + 1$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x - 1 < E(x) \leq x$
- $(\forall x \in \mathbb{Z}) \quad E(x) = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad E(x) = m \Leftrightarrow (m \leq x < m+1 \text{ et } m \in \mathbb{Z})$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad E(x+n) = E(x) + n$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad x \in [k; k+1[ \Leftrightarrow E(x) = k$
- La fonction  $x \mapsto E(x)$  est constante sur tout intervalle de type  $[k; k+1[$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$

**Remarques :**

- $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} D_f = D_g \\ (\forall x \in D_f) \quad f(x) = g(x) \end{cases}$  (Égalité de deux fonctions)
- $M(x; y) \in (C_f) \Leftrightarrow x \in D_f \text{ et } f(x) = y$

**Intersection avec les axes du repère :**

- Les points  $M(x; 0)$  tel que  $x$  est une solution de l'équation  $f(x) = 0$  sont les points d'intersection de ( $C_f$ ) avec l'axe des abscisses.
- Le point  $B(0; f(0))$  est le point d'intersection de ( $C_f$ ) avec l'axe des ordonnées.

**Exercice 1 :**

Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$

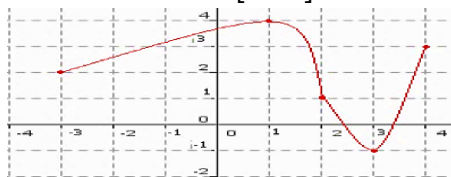
$$f(x) = \sqrt{x-5} \quad f(x) = \frac{1}{|x^2-1|-3} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{|1-|x-1|}}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad f(x) = \frac{1}{1-E(x)}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-E(x)}$$

**Exercice 2 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-3;4]$  par sa courbe :



- 1) Donner la valeur maximale et la valeur minimale de  $f$ .
- 2) En déduire que  $(\forall x \in [-3;4]) -1 \leq f(x) \leq 4$
- 3) Déterminer graphiquement  $f([-3;1])$  ;  $f([-3;2])$  ;  $f([2;4])$  ;  $f([3;4])$
- 4) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

**Exercice 3 :**

On considère la fonction  $f$  définie par son tableau de variations sur  $[-1;4]$  :

$x$	-1	0	3	4
$f(x)$	-2	5	-3	1

- 1) Déterminer les extrémums de  $f$  sur  $[-1;4]$
- 2) Comparer  $f(1)$  et  $f(2)$
- 3) Déterminer  $f([-1;0])$  ;  $f([-1;3])$  ;  $f([0;4])$
- 4) Sachant que  $f$  est paire dresser sa table de variations sur  $[-4;4]$

**Exercice 4 :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x^2+1}$$

- 1) Déterminer  $D_f$  puis étudier la parité de  $f$
- 2) Montrer que  $f$  est majorée par  $\frac{1}{2}$  sur  $D_f$ . Est-ce que  $\frac{1}{2}$  est un maximum de  $f$  sur  $D_f$  ?
- 3) Montrer que  $f$  est minorée par  $-3$  sur  $D_f$ . Est-ce que  $-3$  est un minimum de  $f$  sur  $D_f$  ?
- 4) Montrer que pour tous réels distinct  $x$  et  $y$  de  $D_f$  on a : 
$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{7(x+y)}{(2x^2+1)(2y^2+1)}$$
- 5) Etudier les variations de  $f$  sur  $[0;+\infty[$  puis déduire les variations de  $f$  sur  $]-\infty;0]$

**Exercice 5 :**

On considère les fonctions numériques  $f$  et  $g$  définies par

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2x - 3$$

- 1) Déterminer  $D_f$ ,  $D_g$  puis dresser les tableaux de variations de  $f$  et  $g$
- 2) En déduire un extremum global de  $g$
- 3) Déterminer les points d'intersection de  $(C_f)$  et  $(C_g)$  avec les axes du repère.
- 4) Tracer la courbe  $(C_\varphi)$  de la fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(x) = x^2 - 2|x| - 3$  (remarquer que  $\varphi$  est paire et que  $(\forall x \in [0;+\infty[) \varphi(x) = g(x)$ )
- 5) Résoudre graphiquement l'inéquation  $g(x) \geq 0$
- 6) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation  $g(x) = m$  avec  $m \in \mathbb{R}$
- 7) On considère la fonction numérique  $h$  définie par  $h(x) = g \circ f(x)$ 
  - a) Déterminer  $D_h$
  - b) Montrer que  $(\forall x \in D_h) h(x) = x - 1 - 2\sqrt{x+2}$
  - c) Etudier les variations de  $h$  sur  $[-2;-1]$  et  $[-1;+\infty[$  puis dresser le tableau de variation de  $h$

**Exercice 6 :**

A) On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 + 2x - 3$

- 1) Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction
- 2) Déterminer les points d'intersection de  $(C_f)$  avec les axes du repère.
- 3) Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  distincts de  $D_f$ , on a :  $T = x + y + 2$
- 4) Etudier les variations de  $f$  sur  $[-1;+\infty[$  et  $]-\infty;-1]$
- 5) Dresser le tableau de variations de  $f$  et déduire les extrémums de  $f$
- 6) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe  $(C_f)$  puis le construire.

B) On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{4x}{|x|+1}$

- 1) Déterminer  $D_g$  l'ensemble de définition de la fonction  $g$
- 2) Montrer que  $g$  est impaire.
- 3) Montrer que  $g(x) = \frac{4x}{x+1}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$
- 4) En déduire les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}^+$
- 5) Dresser le tableau de variations de  $g$  sur  $D_g$
- 6) Tracer  $(C_g)$  dans le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- 7) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation  $(x^2 + 2x - 3)(|x| + 1) = 4x$

**Exercice 7 :**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \cos(3x+5)$

Montrer que  $f$  est périodique de période :  $T = \frac{2\pi}{3}$ .

**Exercice 8 :**

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{9x-10}{2x-3} \text{ et } g(x) = x^3$$

- Déterminer la nature de  $(C_f)$  et ses éléments caractéristiques.
- Dresser les tableaux de variations de  $f$  et  $g$
- Vérifier que les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  sont concourantes aux points  $A(1;1)$  et  $B(2;8)$
- Tracer  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- Résoudre graphiquement l'inéquation :  $\frac{9x-10}{2x-3} - x^3 \geq 0$
- a) Résoudre graphiquement l'inéquation :  $f(x) \geq 8$   
b) Résoudre algébriquement l'inéquation :  $f(x) \geq 8$
- Déterminer graphiquement l'image des intervalles  $\left] -\infty; \frac{3}{2} \right]$  et  $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$  par la fonction  $f$
- On considère la fonction  $h$  définie par 
$$h(x) = \left( \frac{9x-10}{2x-3} \right)^3$$
  - Déterminer  $D_h$  l'ensemble de définition de  $h$
  - Vérifier que  $(\forall x \in D_h) \quad h(x) = g \circ f(x)$
  - Etudier les variations de  $h$  sur  $\left] -\infty; \frac{3}{2} \right]$  et  $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$

**Exercice 9 :**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x+2}$

$$\text{et } g(x) = \sqrt{x+2}$$

- Tracer les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans le même repère.
- Résoudre graphiquement l'inéquation  $(x+2)\sqrt{x+2} \leq 1$
- On pose  $h = f \circ g$ 
  - Déterminer  $D_h$  l'ensemble de définition de  $h$
  - En utilisant les variations de  $f$  et  $g$  déduire les variations de  $h$
  - Montrer que  $h$  est minorée par 0 sur  $D_h$  et que  $\frac{1}{2}$  est sa valeur minimale sur  $D_h$ .

**Exercice 10 :**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x+2-2\sqrt{x+1}$

- Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$
- Etudier les variations de  $f$  sur  $[-1;0]$  et  $[0;+\infty[$
- En déduire que  $f$  admet un extremum en 0

**Exercice 11 :****Partie 1 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

- Vérifier que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$  et déduire que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2+x+1 > 0$
- Montrer que  $f$  est majorée par 3 sur  $D_f$ .  
Est-ce que 3 est un maximum de  $f$  sur  $D_f$  ?
- Montrer que  $f$  est minorée par  $\frac{1}{3}$  sur  $D_f$ .  
Est-ce que  $\frac{1}{3}$  est un minimum de  $f$  sur  $D_f$  ?
- a) Vérifier que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+x+1}$   
b) Soit  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x \neq y$ .  
Montrer que 
$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{(xy-2)}{(x^2+x+1)(y^2+y+1)}$$
- Montrer que  $f$  est décroissante sur  $[-1;1]$  et croissante sur  $[1;+\infty[$
- Déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $[-1;+\infty[$

**Partie 2 :**

Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = \sqrt{x+1}$  et  $(D)$  la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

- Déterminer  $D_g$  puis dresser le tableau de variation de  $g$
- Calculer  $g(-1)$ ,  $g(3)$  puis construire dans le même repère  $(C_g)$  et la droite  $(D)$

- Déterminer graphiquement  $g([-1;0])$  et  $g([0;+\infty[)$

- Résoudre graphiquement l'équation  $\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

- Résoudre graphiquement l'inéquation  $\sqrt{x+1} \geq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

**Partie 3 :** Soit  $h$  la fonction définie sur  $[-1;+\infty[$  par

$$h(x) = \frac{x+2-\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}}$$

- Vérifier que  $(\forall x \in [-1;+\infty[) \quad f \circ g(x) = h(x)$
- Déterminer les variations de  $h$  sur  $[-1;0]$  et  $[0;+\infty[$

**Exercice 12 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+2}}$

- Montrer que  $f$  est majorée par 2 et minorée par  $-\frac{1}{2}$
- On pose  $u(x) = \sqrt{x}$  déterminer la fonction  $v$  tel que  $f = v \circ u$
- En déduire les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$

**Exercice 13 :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie par

$$f(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{x+3}$$

- 1) Déterminer  $D_f$
- 2) a) Montrer que  $f$  est minorée par 0 sur  $D_f$ .  
b) Est-ce que 0 est un minimum de  $f$  sur  $D_f$  ?
- 2) a) Montrer que  $f$  est majorée par 2 sur  $D_f$ .  
b) Est-ce que 2 est un maximum de  $f$  sur  $D_f$  ?

**Exercice 14 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

- 1) a) Montrer que  $f$  est impaire.
- b) M.q.  $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \leq 1$  et  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$
- 2)  $f$  est-elle surjective ? est-elle injective ? Justifier
- 3) a) Soit  $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$  tel que  $x \neq y$ .

$$\text{Montrer que } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{2(1 - xy)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$$

- b) Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $[1; +\infty[$  et qu'elle est strictement croissante sur  $[0; 1]$

- 4) a) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$   
b) Montrer que :

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) \quad a + b \geq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{(a+b)^2 + 1}{a+b} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

- 5) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = [1; +\infty[$ .

On pose  $J = ]0; 1]$

Montrer que  $g$  est une bijection de  $I$  sur  $J$  et donner sa bijection réciproque  $g^{-1}$ .

**Exercice 15 :**

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{5\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} \text{ et } g(x) = \frac{x \sin(x)}{x^2 + 1}$$

- 1) Montrer que  $f$  est bornée par -2 et 5 sur  $\mathbb{R}^+$ .
- 2) a) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq 1$   
b) En déduire que  $g$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 16 :**

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + x + 9}$

- 1) Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$
- 2) Montrer que  $f$  admet une valeur minimale en -4
- 3) a) Montrer que  $(\forall x \in D_f) |f(x)| < 1$   
b) Que peut-on conclure pour la fonction  $f$  ?  
c) Que peut-on conclure pour la courbe de la fonction  $f$  ?

**Exercice 17 :**

- 1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que :

$$E(x) = m \Leftrightarrow 0 \leq x - m < 1 \text{ et } m \in \mathbb{Z}$$

- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $E\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{x+1}{3}$

**Exercice 18 :**

- 1) On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x - E(x)$   
Montrer que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$

- 2) On considère la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{x}}$

- a) Déterminer  $D_g$  l'ensemble de définition de  $g$

- b) Montrer que  $g$  est bornée sur  $D_g$

- 3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer  $E\left(\frac{n}{n+1}\right)$  et  $E\left(\frac{n+1}{n}\right)$

**Exercice 19 :**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x - E(x)}{x + 1 - E(x)}$

- 1) Montrer que  $D_f = \mathbb{R}$

- 2) Montrer que la fonction  $f$  est périodique de période 1.

- 3) a) Montrer que  $(\forall x \in [0; 1[) f(x) = \frac{x}{x+1}$

- b) Tracer la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-1; 3[$

**Exercice 20 :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = x - E(x)$

- 1) Montrer que la fonction  $f$  est périodique de période 1.

- 2) Donner l'expression de  $f$  sur  $[0; 1]$

- 3) Tracer la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[0; 1]$

**Exercice 21 :**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = (-1)^{E(x)} \left( x - E(x) - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

- 1) Montrer que la fonction  $f$  est périodique de période 2.

- 2) Donner l'expression de  $f(x)$  pour tout  $x \in [0; 1[$  puis pour tout  $x \in ]1; 2[$

**Exercice 22 :**

- 3) Tracer la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-4; 6]$

- 1) Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Montrer que  $f$  est bornée sur  $I$  si et seulement si :

$$(\exists M \in \mathbb{R}) (\forall x \in I) |f(x)| \leq M$$

- 2) Montrer que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x^2 + 2x + 3$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 1 (Les applications)**

Soit  $f$  une application définie de  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  vers  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1}$$

- 1) a) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) f(x) < 1$   
 b) En déduire que  $f$  n'est pas surjective.
- 2) a) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) f(-x-2) = f(x)$   
 b) En déduire que  $f$  n'est pas injective.
- 3) Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $]-1; +\infty[$   
 a) Montrer que  $g$  est bijective de  $]-1; +\infty[$  sur  $]-\infty; 1[$   
 b) Déterminer  $g^{-1}(0)$  (remarquer que  $f(0) = 0$  et  $f(-2) = 0$ )  
 c) Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in ]-\infty; 1[$

**Exercice 2 (Les applications)**

On considère les applications :

$$f: [-1; 0] \rightarrow \left[0; \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad g: [-1; 0] \rightarrow [0; 1]$$

$$x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto x^2$$

- 1) Montrer que  $f$  est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

- 2) Montrer que  $g$  est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
- 3) Déterminer une application  $h$  tel que  $f = hog$
- 4) En déduire que  $h$  est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

**Exercice 3 (Les applications)**

$A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble non vide  $E$ .

$$f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$

On considère l'application  $X \mapsto (X \cap A; X \cap B)$

- 1) Déterminer  $f(\emptyset)$ ,  $f(A \cup B)$  et  $f(E)$
- 2) Montrer que :  $E = A \cup B \Rightarrow f$  est injective
- 3) M.q :  $(E = A \cup B \text{ et } A \cap B = \emptyset) \Rightarrow f$  est surjective
- 4) Donner une condition suffisante pour que  $f$  soit bijective puis déterminer  $f^{-1}$

**Exercice 4 (Les applications)**

$$f: \mathbb{Z} \times [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$$

On considère l'application  $(n; x) \mapsto n + x$

- 1) Montrer que  $f$  est bijective. (rappel :  $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists! n \in \mathbb{Z}) n = E(y)$ )
- 2) Déterminer la bijection réciproque  $f^{-1}$  de  $f$

**Exercice 5 (Fonctions numériques)**

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies par :  $f(x) = -x^2 + 2x + 1$  et  $g(x) = \sqrt{x-1}$

- 1) Montrer que  $f$  est ni paire ni impaire.
- 2) Dresser les tableaux de variations de  $f$  et de  $g$ .
- 3) Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  distincts de  $D_f$ , on a :  $T = -x - y + 2$
- 4) En déduire par une autre méthode les variations de  $f$  sur  $[1; +\infty[$  et  $]-\infty; 1]$
- 5) Déterminer les points d'intersection de  $(C_f)$  avec les axes du repère et montrer que  $A(2; 1) \in (C_f) \cap (C_g)$
- 6) Tracer  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans le même repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 7) a) Résoudre graphiquement l'équation :  $f(x) = -2$   
 b) Résoudre algébriquement l'équation :  $f(x) = -2$
- 8) Résoudre graphiquement l'équation :  $x^2 - 2x - 1 + \sqrt{x-1} = 0$
- 9) Résoudre graphiquement l'inéquation :  $f(x) > -2$
- 10) Résoudre graphiquement l'inéquation :  $x^2 - 2x - 1 + \sqrt{x-1} < 0$
- 11) Déterminer par deux méthodes l'image de chacun des intervalles  $[0; 1]$  et  $[1; 2]$  par la fonction  $f$
- 12) On considère la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \sqrt{x(2-x)}$   
 a) Déterminer  $D_h$  l'ensemble de définition de  $h$   
 b) Vérifier que  $(\forall x \in D_h) h(x) = gof(x)$   
 c) Etudier les variations de  $h$  sur  $[0; 1]$  et  $[1; 2]$

Correction



**Note :**

- Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.
- Chaque tentative de tricher vaut un zéro.
- **Rappel :**  
Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs :  
Si  $-a < x < b$  alors  $0 \leq x^2 < \max(a^2; b^2)$

Exercice 1 (10pts)

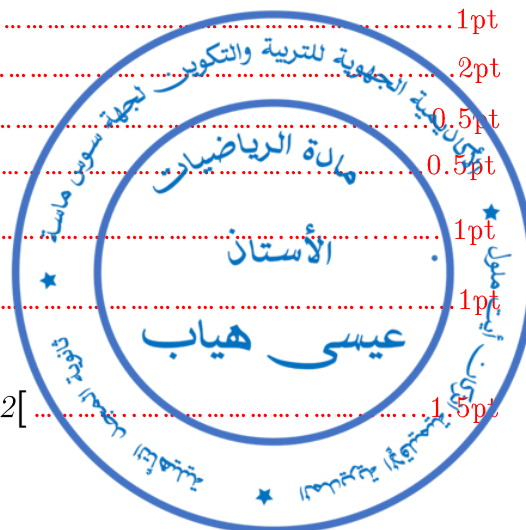
On considère l'application  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto (x+3)^2 - 1$

- 1) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations  $f(x)=0$  et  $f(x)=-2$  .....1pt
- b)  $f$  est-elle injective ? est-elle surjective ? Justifier .....1pt
- 2) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $[-3; +\infty[$ . Montrer que  $g$  est injective. ....2pt
- 3) Montrer que  $f^{-1}([-1; 3]) = [-5; -1]$  .....1.5pt
- 4) Montrer que  $f([-5; 5]) \subset [-1; 63]$  et  $f([-3; +\infty[) = [-1; +\infty[$  .....1.5pt
- 5) Soit  $h$  l'application définie de  $[-3; +\infty[$  vers  $[-1; +\infty[$  par  $h(x) = f(x)$   
Montrer que  $h$  est bijective et déterminer sa bijection réciproque  $h^{-1}$  .....2pt
- 6) Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  .....1pt

Exercice 2 (10pts)

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies par :  $f(x) = \frac{x-4}{-x+2}$  et  $g(x) = x^2 - 2x - 2$

- 1) Vérifier que  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$  .....0.5pt
- 2) Montrer que  $g$  est minorée par  $-3$  sur  $\mathbb{R}$  .....1pt
- 3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $(C_f)$  et de  $(C_g)$  .....1pt
- 4) Dresser les tableaux de variations de  $f$  et de  $g$  .....1pt
- 5) Tracer  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans le même repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .....2pt
- 6) Résoudre graphiquement l'inéquation :  $g(x) \geq 1$  .....0.5pt
- 7) Résoudre graphiquement l'équation :  $f(x) = g(x)$  .....0.5pt
- 8) Résoudre graphiquement l'inéquation :  $\frac{x-4}{-x+2} - x(x-2) + 2 \geq 0$  .....1pt
- 9) Déterminer  $f([2; 3])$  et  $f([0; 2])$  .....1pt
- 10) On considère la fonction  $h$  définie par  $h(x) = gof(x)$   
Déterminer  $D_h$  puis étudier les variations de  $h$  sur  $]2; 3]$  et  $[0; 2[$  .....1.5pt



**Note :**

- Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.
- Chaque tentative de tricher vaut un zéro.
- **Rappel :**  
Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs :  
Si  $-a < x < b$  alors  $0 \leq x^2 < \max(a^2; b^2)$

**Exercice 1 (10pts)**

On considère l'application  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto (x+4)^2 - 4$

- 1) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations  $f(x)=0$  et  $f(x)=-5$  .....1pt
- b)  $f$  est-elle injective ? est-elle surjective ? Justifier .....1pt
- 2) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $[-4; +\infty[$ . Montrer que  $g$  est injective. ....2pt
- 3) Montrer que  $f^{-1}([-4; 0]) = [-6; -2]$  .....1.5pt
- 4) Montrer que  $f([-5; 4]) \subset [-4; 60[$  et  $f([-4; +\infty]) = [-4; +\infty[$  .....1.5pt
- 5) Soit  $h$  l'application définie de  $[-4; +\infty[$  vers  $[-4; +\infty[$  par  $h(x) = f(x)$   
Montrer que  $h$  est bijective et déterminer sa bijection réciproque  $h^{-1}$  .....2pt
- 6) Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$  .....1pt

**Exercice 2 (10pts)**

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies par :  $f(x) = \frac{-x+4}{-x+2}$  et  $g(x) = -x^2 + 2x + 2$

- 1) Vérifier que  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$  .....0.5pt
- 2) Montrer que  $g$  est majorée par 3 sur  $\mathbb{R}$  .....1pt
- 3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $(C_f)$  et de  $(C_g)$  .....1pt
- 4) Dresser les tableaux de variations de  $f$  et de  $g$  .....1pt
- 5) Tracer  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans le même repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .....2pt
- 6) Résoudre graphiquement l'inéquation :  $g(x) \leq -1$  .....0.5pt
- 7) Résoudre graphiquement l'équation :  $f(x) = g(x)$  .....0.5pt
- 8) Résoudre graphiquement l'inéquation :  $\frac{-x+4}{-x+2} + x(x-2) - 2 \leq 0$  .....1pt
- 9) Déterminer  $f([2; +\infty[)$  et  $f(]-\infty; 2])$  .....1pt
- 10) On considère la fonction  $h$  définie par  $h(x) = gof(x)$   
Déterminer  $D_h$  puis étudier les variations de  $h$  sur  $]2; +\infty[$  et  $]-\infty; 2]$  .....2.5pt



05

# Barycentre



## Introduction

Soit  $A$  un point du plan et  $a$  un nombre réel.

→ Le couple  $(A;a)$  est appelé **point pondéré** ou point massif. Le réel  $a$  est appelé le **poids** ou la masse de  $A$ .

On dit aussi que le point  $A$  est affecté du coefficient  $a$  ou de la masse algébrique  $a$ .

→ Un **système pondéré** est une collection de points pondérés.

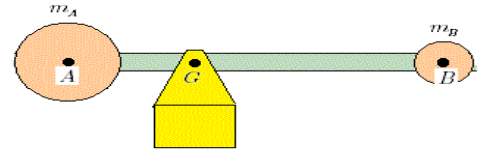
## 1) Barycentre de deux points pondérés

### Activité 1 :

On considère un levier porte deux masses  $m_A$  et  $m_B$

Principe du levier d'Archimède :

« Dans le cas d'équilibre on a  $m_A \times GA = m_B \times GB$  »



1) Montrer que dans le cas d'équilibre on a  $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

2) Le point  $G$  défini par la relation vectorielle  $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0}$  s'appelle le **barycentre** des points pondérés (ou massifs)  $(A;m_A)$ ,  $(B;m_B)$  et on le note  $G = \text{Bar}\{(A;m_A);(B;m_B)\}$

$$\text{Montrer que : } m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{m_B}{m_A + m_B} \overrightarrow{AB}$$

3) En déduire la position du point  $G$  tel que  $G = \text{Bar}\{(A;m_A);(B;m_B)\}$  dans chacun des cas suivants :

a)  $m_A = m_B = 1$  ;      b)  $m_A = 3$  et  $m_B = 5$

4) Déterminer  $m_B$  sachant que  $m_A = 2$  et  $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}$

### Activité 2 :

$a$  et  $b$  deux réels.

Soit  $A$  et  $B$  deux points distinct du plan et  $G$  un point tel que  $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

1) Montrer que  $(a+b) \overrightarrow{AG} = b \overrightarrow{AB}$

2) En déduire que si  $a+b=0$  alors le point  $G$  n'existe pas.

3) On suppose que  $a+b \neq 0$  et soit  $G'$  un point du plan tel que  $\overrightarrow{AG'} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$

a) Montrer que  $G' = G$

b) En déduire que le point  $G$  vérifiant la relation vectorielle  $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \vec{0}$  est unique et que  $G \in (AB)$

→ Le point  $G$  est appelé le **barycentre** des points pondérés  $(A;a)$  et  $(B;b)$  on note  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\}$

4) Montrer que :  $G = \text{bar}\{(A;1);(B;1)\} \Leftrightarrow G$  le milieu du segment  $[AB]$

5) Montrer que :  $G = \text{bar}\{(A;1);(B;0)\} \Leftrightarrow G = A$  et  $G = \text{bar}\{(A;0);(B;1)\} \Leftrightarrow G = B$

### Définition

Soit  $(A;a)$  et  $(B;b)$  deux points pondérés du plan tel que :  $a+b \neq 0$

Il existe un unique point  $G$  vérifiant la relation vectorielle  $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Le point  $G$  est appelé le **barycentre** des points pondérés  $(A;a)$  et  $(B;b)$

On dit aussi que  $G$  est le barycentre du système  $\{(A;a);(B;b)\}$ , on écrit  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\}$

$$\boxed{1} \quad G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\} \Leftrightarrow a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

### Exemple 1

Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tel que  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\}$  dans les cas suivants :

1)  $2 \overrightarrow{GA} + 3 \overrightarrow{BA} = \vec{0}$  ;    2)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3 \overrightarrow{AB}$  ;    3)  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$

### Solution

1)  $2 \overrightarrow{GA} + 3 \overrightarrow{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow 2 \overrightarrow{GA} + 3(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2 \overrightarrow{GA} + 3 \overrightarrow{BG} + 3 \overrightarrow{GA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 5 \overrightarrow{GA} - 3 \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$



$$\Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A;5);(B;-3)\} \text{ donc } a=5 \text{ et } b=-3 \quad (5+(-3) \neq 0)$$

$$2) \overline{GA} + \overline{GB} = 3\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{GA} + \overline{GB} = 3(\overline{AG} + \overline{GB})$$

$$\Leftrightarrow \overline{GA} + \overline{GB} = -3\overline{GA} + 3\overline{GB}$$

$$\Leftrightarrow 4\overline{GA} - 2\overline{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A;4);(B;-2)\} \text{ donc } a=4 \text{ et } b=-2 \quad (4+(-2) \neq 0)$$

$$3) \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{2}{3}(\overline{AG} + \overline{GB})$$

$$\Leftrightarrow \overline{AG} - \frac{2}{3}\overline{AG} - \frac{2}{3}\overline{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\overline{GA} - \frac{2}{3}\overline{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow G = \text{bar}\left\{(A;-\frac{1}{3});(B;-\frac{2}{3})\right\} \text{ donc } a=-\frac{1}{3} \text{ et } b=-\frac{2}{3} \quad (-\frac{1}{3}+(-\frac{2}{3}) \neq 0)$$



### Application 1

Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tel que  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\}$  dans les cas suivants :

$$1) 2\overline{AG} - 3\overline{GB} = \vec{0} \quad ; \quad 2) 2\overline{GA} + 3\overline{BA} = \vec{0} \quad ; \quad 3) \overline{GA} + \overline{GB} = 3\overline{AB} \quad ; \quad 4) \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AB}$$

### Remarque 1

- Le point le plus proche du barycentre  $G$  est celui dont le coefficient à la plus grande valeur absolue.
- Le barycentre  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\}$  est sur le segment  $[AB]$  si les poids sont de même signe.
- Le point  $G = \text{bar}\{(A;1);(B;1)\}$  est appelé isobarycentre des points  $A$  et  $B$  c'est le milieu de  $[AB]$ .
- Si  $x$  et  $y$  deux réels tel que  $x+y=0$  alors le système  $\{(A;x);(B;y)\}$  n'admet pas de barycentre.

### Construction du barycentre de deux points pondérés

Soit  $(A;a)$  et  $(B;b)$  deux points pondérés du plan tel que :  $a+b \neq 0$

$$\boxed{2} \quad G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{b}{a+b}\overline{AB}$$

Cette relation permet de construire le point  $G$ .

### Exemple 2

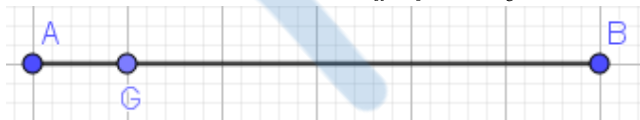
Soit  $A$  et  $B$  deux point du plan, construire le point  $G$  dans chacun des cas suivants :

- $G = \text{bar}\{(A;-5);(B;-1)\}$  et  $AB=6$  ;
- $G = \text{bar}\{(A;-1);(B;6)\}$  et  $AB=5$
- $G = \text{bar}\{(A;5);(B;-1)\}$  et  $AB=4$  ;
- $G = \text{bar}\{(A;-8);(B;5)\}$  et  $AB=3$

### Solution

1) On a

$$G = \text{bar}\{(A;-5);(B;-1)\} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{b}{a+b}\overline{AB} = \frac{1}{6}\overline{AB}$$



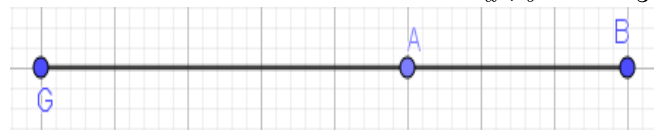
$$2) \text{ On a } G = \text{bar}\{(A;-1);(B;6)\} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{b}{a+b}\overline{AB} = \frac{6}{5}\overline{AB}$$



$$3) \text{ On a } G = \text{bar}\{(A;5);(B;-1)\} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{b}{a+b}\overline{AB} = -\frac{1}{4}\overline{AB}$$



$$4) \text{ On a } G = \text{bar}\{(A;-8);(B;5)\} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{b}{a+b}\overline{AB} = -\frac{5}{3}\overline{AB}$$



### Application 2

Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan, construire le point  $G$  dans chacun des cas suivants :

- $G = \text{bar}\{(A;-5);(B;-1)\}$  et  $AB=6$  ;
- $G = \text{bar}\{(A;-1);(B;6)\}$  et  $AB=5$
- $G = \text{bar}\{(A;5);(B;-1)\}$  et  $AB=4$  ;
- $G = \text{bar}\{(A;-8);(B;5)\}$  et  $AB=3$
- $G = \text{bar}\{(A;-2);(B;3)\}$  et  $AB=2$  ;
- $G = \text{bar}\{(A;6);(B;-5)\}$  et  $AB=1$

## Remarque 2

- $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{BA}$
- Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan, on a :
  - $G$  est le milieu du segment  $[AB] \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A;1);(B;1)\}$
  - $(\exists a;b \in \mathbb{R}) G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\} \Leftrightarrow G \in (AB)$

## Activité 3 :

Soit  $a$  et  $b$  deux réels non nuls tel que  $a+b \neq 0$  on pose  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\}$

- 1) Soit  $k \in \mathbb{R}^*$  vérifier que :  $\frac{a}{k} \overrightarrow{GA} + \frac{b}{k} \overrightarrow{GB} = \vec{0}$
- 2) En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{R}^*$  on a  $G = \text{bar}\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k})\right\}$
- 3) Soit  $M$  un point du plan ( $P$ ) montrer que :  $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} - (a+b) \overrightarrow{MG} = \vec{0}$
- 4) En déduire que si  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\}$  alors pour tout  $M \in (P)$  on a  $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = (a+b) \overrightarrow{MG}$
- 5) Montrer que si pour tout  $M \in (P)$  on a  $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = (a+b) \overrightarrow{MG}$  alors  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\}$
- 6) Soit  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  un repère du plan, on pose  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ 
  - a) En déduire que  $\overrightarrow{OG} = \frac{a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB}}{a+b}$
  - b) Déterminer les coordonnées des vecteurs  $a \overrightarrow{OA}$  et  $b \overrightarrow{OB}$  en fonction de  $a, b, x_A, y_A, x_B$  et  $y_B$
  - c) En déduire les coordonnées de vecteur  $\frac{a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB}}{a+b}$  en fonction de  $a, b, x_A, y_A, x_B$  et  $y_B$
  - d) En déduire que  $G\left(\frac{ax_A + bx_B}{a+b}; \frac{ay_A + by_B}{a+b}\right)$



## Homogénéité

Soit  $(A;a)$  et  $(B;b)$  deux points pondérés du plan tel que :  $a+b \neq 0$

On a  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\} \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A;k \times a);(B;k \times b)\}$  et  $\boxed{3} G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\} \Leftrightarrow G = \text{bar}\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k})\right\}$  pour tout  $k \in \mathbb{R}^*$ .

En d'autres termes : le barycentre de deux points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle **homogénéité** du barycentre.

## Exemple 3

Soit  $A$  et  $B$  deux points distinct du plan et  $G$  un point tel que  $G = \text{bar}\{(A;200);(B;300)\}$

Montrer que  $G = \text{bar}\{(A;2);(B;3)\}$

## Solution

On a  $G = \text{bar}\{(A;200);(B;300)\}$  donc d'après la propriété de l'homogénéité  $G = \text{bar}\left\{(A;\frac{200}{100});(B;\frac{300}{100})\right\}$

C'est-à-dire  $G = \text{bar}\{(A;2);(B;3)\}$

## La propriété caractéristique du barycentre de deux points pondérés

On a  $\boxed{4} G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\} \Leftrightarrow a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = (a+b) \overrightarrow{MG}$  pour tout point  $M$  du plan ( $P$ )

Cette propriété s'appelle **la propriété caractéristique** du barycentre.

## Exemple 4

Soit  $ABC$  un triangle, on pose  $G = \text{bar}\{(A;2);(B;3)\}$  et  $G' = \text{bar}\{(A;-2);(C;7)\}$

1) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur  $G$  et  $G'$

Montrer que :  $(\forall M \in (P)) \quad 3 \overrightarrow{MB} + 7 \overrightarrow{MC} = 5 \overrightarrow{MG} + 5 \overrightarrow{MG}'$

2) Soit  $I$  un point du plan tel que  $I = \text{bar}\{(B;3);(C;7)\}$

- a) Simplifier par deux méthodes le vecteur  $3\vec{IB} + 7\vec{IC}$   
 b) En déduire que  $I$  est le milieu du segment  $[GG']$

### Solution

1) On a  $G = \text{bar}\{(A;2);(B;3)\}$  et  $G' = \text{bar}\{(A;-2);(C;7)\}$

$$\text{Donc } (\forall M \in (P)) \quad 2\vec{MA} + 3\vec{MB} = 5\vec{MG} \quad \text{et} \quad (\forall M \in (P)) \quad -2\vec{MA} + 7\vec{MC} = 5\vec{MG}'$$

$$\text{Donc } (\forall M \in (P)) \quad (2\vec{MA} + 3\vec{MB}) + (-2\vec{MA} + 7\vec{MC}) = 5\vec{MG} + 5\vec{MG}'$$

$$\text{C'est-à-dire } (\forall M \in (P)) \quad 3\vec{MB} + 7\vec{MC} = 5\vec{MG} + 5\vec{MG}'$$

2) a) On a  $I = \text{bar}\{(B;3);(C;7)\}$  donc par définition  $3\vec{IB} + 7\vec{IC} = \vec{0}$

$$\text{D'autre part on a } (\forall M \in (P)) \quad 3\vec{MB} + 7\vec{MC} = 5\vec{MG} + 5\vec{MG}' \quad \text{en particulier } 3\vec{IB} + 7\vec{IC} = 5\vec{IG} + 5\vec{IG}'$$

b) D'après la question précédente en déduit que  $5\vec{IG} + 5\vec{IG}' = \vec{0}$

$$\text{Donc } \vec{IG} + \vec{IG}' = \vec{0}$$

$$\text{C'est-à-dire } I = \text{bar}\{(G;1);(G';1)\}$$

Ainsi  $I$  est le milieu du segment  $[GG']$

### Remarque 3 : Les ensembles des points usuels du plan :

Soit  $A$  et  $B$  deux points distinct du plan et  $R$  un réel strictement positif

L'ensemble des points $M$ du plan tel que	Nature
$MA = R$	Le cercle de centre $A$ et de rayon $R$ .
$MA = 0$	Le singleton $\{A\}$
$MA = -R$	L'ensemble vide.
$MA = MB$	La médiatrice de segment $[AB]$

### Exemple 3

Soit  $A$  et  $B$  deux points distinct du plan et  $G$  un point tel que  $G = \text{bar}\{(A;2);(B;3)\}$

Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan dans chacun des cas suivants :

$$1) \quad \|\vec{2MA} + 3\vec{MB}\| = 0 \quad 2) \quad \|\vec{2MA} + 3\vec{MB}\| = 20 \quad 3) \quad \|\vec{2MA} + 3\vec{MB}\| = \|\vec{3MA} + 2\vec{MB}\|$$

### Solution

1) On a  $G = \text{bar}\{(A;2);(B;3)\}$  donc d'après la propriété caractéristique :

$$\text{Pour tout } M \in (P) \quad 2\vec{MA} + 3\vec{MB} = (2+3)\vec{MG} = 5\vec{MG}$$

$$\text{Donc } \|\vec{2MA} + 3\vec{MB}\| = 0 \Leftrightarrow \|5\vec{MG}\| = 0 \Leftrightarrow MG = 0, \text{ donc cet ensemble est le singleton } \{G\}$$

2) On a  $\|\vec{2MA} + 3\vec{MB}\| = 20 \Leftrightarrow \|5\vec{MG}\| = 20 \Leftrightarrow MG = 4$ , donc cet ensemble est le cercle de centre  $G$  et de rayon 4

3) Soit  $G' = \text{bar}\{(A;3);(B;2)\}$  donc d'après la propriété caractéristique :

$$\text{Pour tout } M \in (P) \quad 3\vec{MA} + 2\vec{MB} = (3+2)\vec{MG}' = 5\vec{MG}'$$

$$\text{Donc } \|\vec{2MA} + 3\vec{MB}\| = \|\vec{3MA} + 2\vec{MB}\| \Leftrightarrow \|5\vec{MG}\| = \|5\vec{MG}'\| \Leftrightarrow MG = MG', \text{ donc cet ensemble est la médiatrice de } [GG']$$

### Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

Soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points d'un repère.

$$\text{On a } \boxed{5} \quad G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\} \Leftrightarrow G\left(\frac{ax_A + bx_B}{a+b}; \frac{ay_A + by_B}{a+b}\right)$$

### Application 3

Dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  du plan, on considère les points  $A(2;0)$  ;  $B(5;6)$  ;  $C(-4;2)$  ;  $D(-1;5)$

On pose  $G = \text{bar}\{(A;1);(B;2)\}$  et  $G' = \text{bar}\{(C;1);(D;2)\}$

1) Déterminer les coordonnées de  $G$  et de  $G'$

2) Soient  $I$ ,  $J$  et  $K$  les milieux des segments  $[AC]$ ,  $[BD]$  et  $[GG']$  respectivement.

a) Déterminer les coordonnées des points  $I$ ,  $J$  et  $K$

b) Montrer par deux méthodes que les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont alignés.

## 2) Barycentre de trois points pondérés

### Activité 4 :

$a, b$  et  $c$  trois réels.

Soit  $A$  et  $B$  deux points distinct du plan et  $G$  un point tel que  $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

1) Montrer que  $(a+b+c)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$

2) En déduire que si  $a+b+c=0$  alors le point  $G$  n'existe pas.

3) On suppose que  $a+b+c \neq 0$  et soit  $G'$  un point du plan tel que  $\overrightarrow{AG'} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

a) Montrer que  $G' = G$

b) En déduire que le point  $G$  vérifiant la relation vectorielle  $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$  est unique.

→  $G$  est appelé le **barycentre** du système pondérés  $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$  on note  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$

c) En déduire que  $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

4) Montrer que  $(\forall k \in \mathbb{R}^*) \quad G = \text{bar}\left\{\left(A; \frac{a}{k}\right); \left(B; \frac{b}{k}\right); \left(C; \frac{c}{k}\right)\right\}$

5) Montrer que  $(\forall M \in (P)) \quad a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$

6) Soit  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  un repère du plan, on pose  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$

Montrer que  $G\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$

### Barycentre de trois points pondérés

Soit  $(A;a), (B;b)$  et  $(C;c)$  trois points pondérés du plan tel que :  $a+b+c \neq 0$

1) Il existe un unique point  $G$  vérifiant la relation vectorielle  $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Le point  $G$  est appelé le **barycentre** des points pondérés  $(A;a), (B;b)$  et  $(C;c)$

On dit aussi que  $G$  est le barycentre du système  $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$  on note  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$

$$\boxed{1} \quad G = \text{bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

2) Si  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$  alors  $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

$$\boxed{2} \quad G = \text{bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

Cette dernière relation permet de construire le point  $G$ .

3)  $\boxed{3} \quad G = \text{bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow G = \text{bar}\left\{\left(A; \frac{a}{k}\right); \left(B; \frac{b}{k}\right); \left(C; \frac{c}{k}\right)\right\}$  pour tout  $k \in \mathbb{R}^*$ . En d'autres termes : le

barycentre de trois points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle **homogénéité** du barycentre.

4) On a  $\boxed{4} \quad G = \text{bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$  pour tout  $M \in (P)$ . Cette propriété

s'appelle **la propriété caractéristique** du barycentre.

5) Soit  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$  et  $C(x_C; y_C)$  trois points d'un repère.

On a  $\boxed{5} \quad G = \text{bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow G\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$

### Remarque 4

• Si  $x, y$  et  $z$  trois réels tel que  $x+y+z=0$ , alors le système  $\{(A;x);(B;y);(C;z)\}$  n'admet pas de barycentre.

• Le point  $G = \text{bar}\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$  est appelé isobarycentre des points  $A, B$  et  $C$  c'est le centre de gravité du triangle  $ABC$ .

### Exemple 5

1) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tel que  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$  sachant que  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$



2) Placer les points  $A(0;3)$ ,  $B(1;0)$  et  $C(-2;1)$  dans un repère puis placer les points  $H$  et  $D$  sachant que :

$$H = \text{bar}\{(A;6);(B;-3);(C;-6)\} \text{ et } D = \text{bar}\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$$

3) Montrer que  $H = \text{bar}\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$

4) Montrer vectoriellement que le quadrilatère  $ADHC$  est un parallélogramme.

5) Déterminer les coordonnées de  $H$  et  $D$

6) Montrer en utilisant les coordonnées que le quadrilatère  $ADHC$  est un parallélogramme.

7) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tel que  $\|3\overline{MA} - 2\overline{MB} - 2\overline{MC}\| = \|2\overline{MA} - \overline{MB} - 2\overline{MC}\|$

### Solution

1) On a  $\overline{GA} + \overline{GB} - 2\overline{GC} = 3\overline{AB} - \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{GA} + \overline{GB} - 3\overline{GC} = 3(\overline{AG} + \overline{GB}) - (\overline{AG} + \overline{GC})$

$$\Leftrightarrow \overline{GA} + \overline{GB} - 3\overline{GC} = -3\overline{GA} + 3\overline{GB} + \overline{GA} - \overline{GC}$$

$$\Leftrightarrow 3\overline{GA} - 2\overline{GB} - 2\overline{GC} = \vec{0}$$

On pose  $a=3$ ;  $b=-2$  et  $c=-2$  puisque  $a+b+c \neq 0$  alors  $G = \text{bar}\{(A;3);(B;-2);(C;-2)\}$

2) On a  $H = \text{bar}\{(A;6);(B;-3);(C;-6)\}$

$$\text{Donc } \overline{AH} = \frac{b}{a+b+c} \overline{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overline{AC} = \frac{-3}{6+(-3)+(-6)} \overline{AB} + \frac{-6}{6+(-3)+(-6)} \overline{AC} = \overline{AB} + 2\overline{AC}$$

On a  $D = \text{Bar}\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$

$$\text{Donc } \overline{AD} = \frac{b}{a+b+c} \overline{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overline{AC} = \frac{-1}{1+(-1)+(-1)} \overline{AB} + \frac{-1}{1+(-1)+(-1)} \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AC}$$

3) On a  $H = \text{bar}\{(A;6);(B;-3);(C;-6)\}$

$$\text{Donc } H = \text{bar}\left\{\left(A; \frac{6}{3}\right); \left(B; \frac{-3}{3}\right); \left(C; \frac{-6}{3}\right)\right\}$$

C'est-à-dire  $H = \text{bar}\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$

4) Il suffit de montrer que  $\overline{AD} = \overline{CH}$  vectoriellement.

On a  $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$

Donc il suffit montrer que  $\overline{CH} = \overline{AB} + \overline{AC}$

On a  $\overline{AH} = \overline{AB} + 2\overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AC} + \overline{CH} = \overline{AB} + 2\overline{AC}$

$$\Leftrightarrow \overline{CH} = \overline{AB} + \overline{AC} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

5) On a  $H = \text{bar}\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$  donc  $H\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$

$$\text{C'est-à-dire } H\left(\frac{2 \times 0 + (-1) \times 1 + (-2) \times (-2)}{2 + (-1) + (-2)}; \frac{2 \times 3 + (-1) \times 0 + (-2) \times 1}{2 + (-1) + (-2)}\right) \text{ d'où } H(-3; -4)$$

On a  $D = \text{bar}\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$  donc  $D\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$

$$\text{C'est-à-dire } D\left(\frac{1 \times 0 + (-1) \times 1 + (-1) \times (-2)}{1 + (-1) + (-1)}; \frac{1 \times 3 + (-1) \times 0 + (-1) \times 1}{1 + (-1) + (-1)}\right) \text{ d'où } D(-1; -2)$$

6) Il suffit de montrer que  $\overline{AD} = \overline{CH}$  par des coordonnées.

$$\text{On a } \overline{AD}(x_D - x_A; y_D - y_A) = \overline{AD}(-1 - 0; -2 - 3) = \overline{AD}(-1; -5)$$

$$\text{Et } \overline{CH}(x_H - x_C; y_H - y_C) = \overline{CH}(-3 + 2; -4 - 1) = \overline{CH}(-1; -5)$$

Ainsi les vecteurs  $\overline{AD}$  et  $\overline{CH}$  ont de mêmes coordonnées donc  $\overline{AD} = \overline{CH}$  C.Q.F.D.

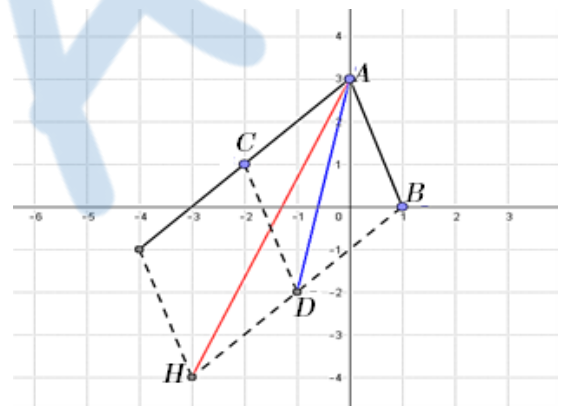
7) On a  $G = \text{bar}\{(A;3);(B;-2);(C;-2)\}$  donc  $(\forall M \in (P)) \quad 3\overline{MA} - 2\overline{MB} - 2\overline{MC} = (3 + (-2) + (-2))\overline{MG} = -\overline{MG}$

$$\text{Et } H = \text{Bar}\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\} \text{ donc } (\forall M \in (P)) \quad 2\overline{MA} - \overline{MB} - 2\overline{MC} = (2 + (-1) + (-2))\overline{MH} = -\overline{MH}$$

$$\text{On a donc } \|3\overline{MA} - 2\overline{MB} - 2\overline{MC}\| = \|2\overline{MA} - \overline{MB} - 2\overline{MC}\| \Leftrightarrow \|-\overline{MG}\| = \|-\overline{MH}\|$$

$$\Leftrightarrow MG = MH$$

Ainsi cet ensemble est la médiatrice du segment  $[GH]$



### Activité 5 :

$a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $a+b+c \neq 0$  et  $a+b \neq 0$

Soit  $ABC$  un triangle,  $G$  et  $H$  les points du plan tels que

$G = \text{bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$  et  $H = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\}$

1) a) Vérifier que  $a\overline{GA} + b\overline{GB} = -c\overline{GC}$

b) En utilisant la propriété caractéristique du barycentre sur  $H$  montrer que  $a\overline{GA} + b\overline{GB} = (a+b)\overline{GH}$

c) En déduire que  $G = \text{bar}\{(H;a+b);(C;c)\}$  et que  $G \in (CH)$

### Application :

2) On suppose que  $a = b = c = 1$

a) En déduire que  $G \in (CH)$

b) Que présente le point  $H$  pour le segment  $[AB]$  ?

c) Soit  $I$  le milieu du segment  $[BC]$  montrer que  $G \in (AI)$

d) En déduire que  $G$  est le centre de la gravité du triangle  $ABC$

3) Supposons que  $b+c \neq 0$  et  $a+c \neq 0$

On pose  $H = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\}$  ;  $K = \text{bar}\{(B;b);(C;c)\}$  et  $L = \text{bar}\{(A;a);(C;c)\}$

Montrer que les droites  $(CH)$  ;  $(AK)$  et  $(BL)$  sont concourantes en  $G$ .

### L'associativité du barycentre.

Si  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$  et  $H = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\}$  alors  $G = \text{bar}\{(H;a+b);(C;c)\}$ . En d'autres termes : le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme des deux poids.

$$\boxed{6} \quad G = \text{bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \text{ et } H = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\} \Rightarrow G = \text{bar}\{(H;a+b);(C;c)\}$$

Cette propriété s'appelle **l'associativité** du barycentre.

### Exemple 6

$ABC$  un triangle.

1) Placer les points  $D$  et  $G$  tel que  $D = \text{bar}\{(A;2);(B;-3)\}$  et  $G = \text{bar}\{(A;2);(B;-3);(C;-1)\}$

2) En utilisant l'associativité du barycentre vérifier que  $G$  est le milieu du segment  $[CD]$

3) On pose  $H = \text{bar}\{(A;-4);(B;1)\}$  ;  $E = \text{bar}\{(B;1);(C;5)\}$  et  $F = \text{bar}\{(A;-4);(C;5)\}$

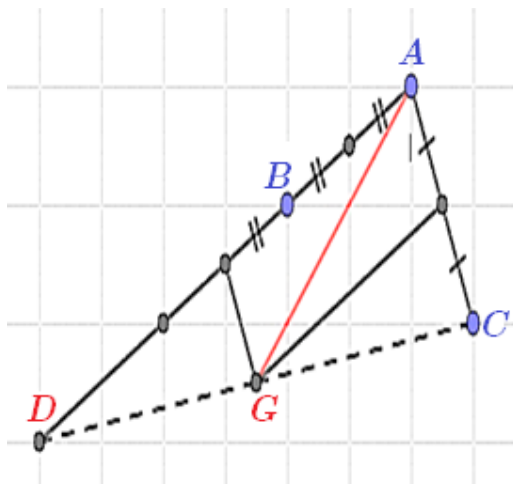
Montrer que les droites  $(CH)$ ,  $(AE)$  et  $(BF)$  sont concourantes en un point à préciser.

### Solution

$$1) \text{ On a } D = \text{bar}\{(A;2);(B;-3)\} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{b}{a+b} \overline{AB} = \frac{-3}{2+(-3)} \overline{AB} = 3\overline{AB}$$

Et  $G = \text{bar}\{(A;2);(B;-3);(C;-1)\}$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \overline{AG} &= \frac{b}{a+b+c} \overline{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overline{AC} = \frac{-3}{2+(-3)+(-1)} \overline{AB} + \frac{-1}{2+(-3)+(-1)} \overline{AC} \\ &= \frac{3}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AC} \end{aligned}$$



2) On a  $G = \text{bar}\{(A;2);(B;-3);(C;-1)\}$  et  $D = \text{bar}\{(A;2);(B;-3)\}$  donc par l'associativité du barycentre on obtient  $G = \text{bar}\{(D;2+(-3));((C;-1))\}$  par suite  $G = \text{bar}\{(D;-1);((C;-1))\}$  donc  $G$  est le milieu du segment  $[CD]$

3) On a les points  $H, E$  et  $F$  sont des barycentres partiels du barycentre  $G' = \text{bar}\{(A;-4);(B;1);(C;5)\}$

(Le points  $G'$  existe est unique car  $-4+1+5 \neq 0$ )

-En appliquons l'associativité du barycentre sur  $G'$  et  $H$ , on obtient  $G' = \text{bar}\{(H;-3);(C;5)\}$  donc  $G' \in (HC)$

- En appliquons l'associativité du barycentre sur  $G'$  et  $E$ , on obtient  $G' = \text{bar}\{(A;-4);(E;6)\}$  donc  $G' \in (AE)$

- En appliquons l'associativité du barycentre sur  $G'$  et  $F$ , on obtient  $G' = \text{bar}\{(F;1);(B;1)\}$  donc  $G' \in (FB)$

Ainsi les droites  $(CH), (AE)$  et  $(BF)$  sont concourantes en  $G'$ .

### 3) Barycentre de quatre points pondérés

• De la même manière, on étend à quatre points les définitions et les propriétés vues pour le barycentre de trois points.

• L'associativité du barycentre : Le barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on remplace deux ou trois d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme de leurs poids.

## Résumé 5 : Barycentre

	Barycentre de deux points	Barycentre de trois points
	$(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés du plan tel que : $a+b \neq 0$	$(A;a), (B;b)$ et $(C;c)$ trois points pondérés du plan tel que : $a+b+c \neq 0$
Définition	1] $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\} \Leftrightarrow a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$	1] $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$
Construction	2] $\vec{AG} = \frac{b}{a+b} \vec{AB}$	2] $\vec{AG} = \frac{b}{a+b+c} \vec{AB} + \frac{c}{a+b+c} \vec{AC}$
Homogénéité	3] $G = \text{bar}\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k})\right\}$	3] $G = \text{bar}\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k});(C;\frac{c}{k})\right\}$
Propriété caractéristique	4] $a\vec{MA} + b\vec{MB} = (a+b)\vec{MG}$	4] $a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} = (a+b+c)\vec{MG}$
Coordonnées	5] $G\left(\frac{ax_A + bx_B}{a+b}; \frac{ay_A + by_B}{a+b}\right)$	5] $G\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$
Associativité	6] Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme des deux poids.	

### Remarques :

Soit  $A, B$  et  $C$  trois points distincts du plan.

1)  $G$  est le milieu du segment  $[AB] \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A;1);(B;1)\}$

2)  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$

3) Pour montrer que  $G \in (AB)$  il suffit de :

Trouver  $a; b \in \mathbb{R}$  tel que  $G = \text{bar}\{(A;a);(B;b)\}$  (ou montrer que les points  $A, B$  et  $G$  sont alignés).



**Exercice 1**

On considère un triangle  $ABC$  et les points  $G$ ,  $K$  et  $I$  tels que :  $G = \text{bar}\{(A; -1); (B; -4); (C; 3)\}$

$$K = \text{bar}\{(A; -1); (B; -4)\} \quad ; \quad I = \text{bar}\{(B; -4); (C; 3)\}$$

- 1) Construire les points  $G$ ,  $K$  et  $I$
- 2) En utilisant l'associativité du barycentre montrer que  $G$  est le milieu de  $[AI]$ .

3) a) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre montrer que :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{CB}$$

b) En déduire que les points  $C$ ,  $K$  et  $G$  sont alignés.

4) On considère le point  $F = \text{bar}\{(A; -1); (C; 3)\}$  montrer que  $G \in (BF)$

5) En déduire que les droites  $(AI)$ ,  $(CK)$  et  $(BF)$  sont concourantes en un point à déterminer.

6) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $\|-\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = 32$

**Exercice 2**

On considère un triangle  $ABC$  et les points  $G$ ,  $H$  et  $D$  tels que :  $G = \text{bar}\{(A; 1); (B; 2); (C; 1)\}$  ;

$H = \text{bar}\{(A; 5); (B; 2); (C; -3)\}$  ;  $D$  est le milieu de  $[AC]$

1) a) Montrer que  $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{-3}{4}\overrightarrow{AC}$

b) Construire les points  $H$  et  $D$

2) a) Exprimer  $D$  sous forme du barycentre de deux points.

b) En appliquons la propriété de l'associativité du barycentre déduire que  $G$  est le milieu de  $[DB]$

c) Placer le point  $G$  dans la figure.

3) a) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur  $G$  montrer que  $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

b) En déduire que  $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

c) En déduire que le quadrilatère  $CGHA$  est un parallélogramme.

4) Soit  $E$  le milieu de  $[AB]$ , montrer que les points  $H$ ,  $E$  et  $G$  sont alignés.

5) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $\|5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

**Exercice 3**

On considère un triangle  $ABC$  et les points  $G$ ,  $I$  et  $K$  tels que  $G = \text{bar}\{(A; 3); (B; 2); (C; -1)\}$  ;  $I$  est le milieu de  $[AC]$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

1) Montrer que  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) En déduire que  $(BI) \parallel (AG)$

3) a) Montrer que  $K = \text{bar}\{(A; 3); (B; 2)\}$

b) Montrer que les points  $C$ ,  $K$  et  $G$  sont alignés.

4) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tel que :

$$\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 10$$

**Exercice 4**

On considère un triangle  $ABC$  et l'on désigne par  $G$  le barycentre de  $(A; 1)$ ,  $(B; 4)$  et  $(C; -3)$ .

1) Construire le barycentre  $I$  de  $(B; 4)$  et  $(C; -3)$ .

2) Montrer que  $G = \text{bar}\{(A; 1); (I; 1)\}$

3) En déduire la position de  $G$  sur  $(AI)$ .

**Exercice 5**

1) Placer dans un repère les points :

$A(1; 2)$ ,  $B(3; 4)$  et  $C(2; 5)$ .

2) Soit  $G$  le barycentre des points pondérés :

$(A; 3)$ ,  $(B; 2)$  et  $(C; 4)$ .

a) Quelles sont les coordonnées de  $G$  ? Placer  $G$ .

b) La droite  $(BG)$  passe-t-elle par l'origine du repère ?

**Exercice 6**

Soit  $ABC$  un triangle.

1) a) Construire le point  $I$  tel que  $\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{BC}$

b) Montrer que  $I = \text{Bar}\{(B; -2); (C; 3)\}$

c) Montrer que  $\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

2) Soit  $G = \text{bar}\{(A; -3); (B; -2); (C; 3)\}$ .

$$\text{Montrer que} \quad \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

3) a) En déduire que les points  $A$ ,  $I$  et  $G$  sont alignés.

b) Construire le point  $G$ .

4) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan dans chacun des cas suivants :

$$a) \quad \|-3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = \|-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}\|$$

$$b) \quad \|-2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = 3$$

**Exercice 7**

$ABCD$  un quadrilatère dans le plan, on considère les points  $H$ ,  $I$  et  $J$  tels que :

$$\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$$

$$I = \text{bar}\{(A;3);(C;-5)\}$$

$$J = \text{bar}\{(D;-1);(B;2)\}$$

1) Montrer que  $H = \text{bar}\{(A;3);(B;2);(C;-5);(D;-1)\}$

2) En appliquons la propriété de l'associativité du barycentre montrer que  $H = \text{bar}\{(I;-2);(J;1)\}$

2) En déduire que  $I$  est le milieu de  $[JH]$

**Exercice 8**

Dans le plan muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on considère les points  $A(1;2)$ ,  $B(-3;2)$  et  $C(2;4)$

1) Déterminer les coordonnées du point  $G$  barycentre du système pondéré  $\{(A;4);(B;-3);(C;3)\}$

2) Soit  $m \in \mathbb{R}$ , on considère le point  $G_m$  barycentre du système pondéré

$$\{(A;3m+1);(B;-2m-3);(C;3-m)\}$$

a) Etablir l'existence du point  $G_m$

b) Trouver les coordonnées de  $G_m$

c) Quel est l'ensemble des points  $G_m$  lorsque  $m$  varie sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 9**

Soit  $ABC$  un triangle.  $Y$  est le milieu de  $[BC]$ .

1) Placer, en justifiant, le barycentre  $U$  de  $(A;4)$  et  $(C;1)$  puis placer le barycentre  $E$  de  $(A;4)$  et  $(B;1)$

2) Soit  $G = \text{bar}\{(A;4);(B;1);(C;1)\}$ . Montrer que  $G$  est aussi barycentre de  $(E;5)$  et  $(C;1)$ .

3) Démontrer que les droites  $(EC)$ ,  $(AY)$  et  $(BU)$  sont concourantes.

**Exercice 10**

Soit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$  et  $ABCD$  un trapèze tel que :

$$\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{CD}$$

1) Déterminer les réels  $b$  et  $c$  pour que le point  $D$  soit le barycentre du système pondéré

$$\{(A;1);(B;b);(C;c)\}$$

2) On suppose dans cette équation que  $a = -1$

Soit  $E$  et  $F$  les milieux respectifs de  $[AC]$  et  $[BE]$

Déterminer le nombre  $x$  pour que  $F$  soit le barycentre du système  $\{(A;1);(B;-1);(C;1);(E;x)\}$

**Exercice 11**

Étant donné un triangle  $ABC$  et  $k$  un réel non nul donné, on définit les points  $D$  et  $E$  par les relations :

$$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA}$$

1) Faire une figure illustrant ces données lorsque

$$k = \frac{1}{3}, \quad \text{puis lorsque} \quad k = -1.$$

2) Montrer que  $D = \text{bar}\{(A;1-k);(B;k)\}$

3) Montrer que  $E = \text{bar}\{(C;1-k);(A;k)\}$

4) En déduire que pour tout point  $M$  du plan, on a :  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{MB'} + k\overrightarrow{B'C'})$  où  $B'$

et  $C'$  sont les milieux respectifs de  $[AC]$  et  $[AB]$ .

5) Soit  $I$  le milieu de  $[DE]$ . Déduire de la question précédente que  $I$ ,  $B'$  et  $C'$  sont alignés.

**Exercice 12**

$ABC$  est un triangle de centre de gravité  $G$ . On note  $I$ ,  $J$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $R$  et  $S$  les points définis par

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{BR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

Démontrer que les droites :

$(IS)$ ,  $(MR)$  et  $(NJ)$  sont concourantes en  $G$ .

**Exercice 13**

Soit  $ABCD$  un parallélogramme, on définit les points  $M$ ,  $N$ ,  $R$  et  $S$  par :

$$M = \text{bar}\{(A;3);(D;2)\} \quad ;$$

$$N = \text{bar}\{(A;3);(C;3);(D;2)\} \quad ; \quad \overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} \quad ;$$

$$\overrightarrow{BS} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BN}$$

1) Montrer que  $S = \text{bar}\{(A;3);(B;12);(C;2)\}$

2) Montrer que  $M$ ,  $S$  et  $R$  sont alignés.

3) Soit  $T$  et  $U$  les points tel que  $\overrightarrow{CT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$  et

$$\overrightarrow{AU} = k\overrightarrow{AB} \quad \text{où} \quad k \in [0;1]$$

Déterminer  $k$  tel que les points  $S$ ,  $T$ , et  $U$  sont alignés.

**Exercice 14**

Soit  $ABCD$  un parallélogramme et  $\alpha \in ]0; +\infty[$

On considère les points  $K$  et  $L$  définis par

$$\overrightarrow{DK} = (\alpha + 2)\overrightarrow{DB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CL} = \alpha\overrightarrow{BC}$$

Soit  $M$  le point d'intersection de  $(CK)$  et  $(DL)$

$$\text{Montrer que} \quad \overrightarrow{DM} = \frac{\alpha + 2}{\alpha^2 + 2\alpha + 2}\overrightarrow{DL}$$

06

# Analytique du produit scalaire dans le plan



## Rappel

### 1- Repère dans le plan :

1) Tous trois points  $O$ ,  $I$  et  $J$  distincts non alignés déterminent un repère du plan notée  $(O;I;J)$  ou  $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$

2) Si on pose  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ , alors ce repère se note également  $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

Le couple  $(\vec{i},\vec{j})$  est appelé une base du plan

Si  $\vec{i} \perp \vec{j}$  on dit que  $(\vec{i},\vec{j})$  est une base orthogonale et que  $(O;\vec{i};\vec{j})$  est un repère orthogonal.

Si  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$  on dit que  $(\vec{i},\vec{j})$  est une base normée et que  $(O;\vec{i};\vec{j})$  est un repère normé.

Si  $\vec{i} \perp \vec{j}$  et  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$  on dit que  $(\vec{i},\vec{j})$  est une base orthonormée et que  $(O;\vec{i};\vec{j})$  est un repère orthonormé.

### 2- Coordonnées du milieu - coordonnées d'un vecteur

Soit  $(O;\vec{i};\vec{j})$  un repère du plan.

1) Pour tout point  $A$  du plan, il existe un unique couple  $(x_A, y_A)$  de nombres réels tel que :  $\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$   
 $(x_A, y_A)$  est appelé couple de coordonnées de  $A$  dans le repère  $(O;\vec{i};\vec{j})$  et on écrit  $A(x_A, y_A)$

On a donc :  $A(x_A, y_A) \in (O;\vec{i};\vec{j}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$

2) Pour tout vecteur  $\vec{u}$  du plan, il existe un unique couple  $(x; y)$  de nombres réels tel que :  $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$   
 $(x; y)$  est appelé couple de coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i};\vec{j})$  et on écrit  $\vec{u}(x; y)$

On a donc :  $\vec{u}(x; y) \in (\vec{i};\vec{j}) \Leftrightarrow \vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$

3) Si  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  deux points distincts du plan alors les coordonnées du point  $I$  le milieu du segment  $[AB]$  est  $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

4) Si  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  deux points du plan alors les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est  $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

### 3-Formule trigonométrique du produit scalaire :

• Quel que soit les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha) \text{ ou } \alpha \text{ est une mesure de l'angle } (\widehat{\vec{u};\vec{v}})$$

Autrement dit quel que soit les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  du plan on a  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Cette formule est appelée la formule trigonométrique du produit scalaire.

• Le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  est appelé le carré scalaire de  $\vec{u}$  on le note  $\vec{u}^2$  donc  $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 \quad ; \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad ; \quad \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$$

### Produit scalaire et orthogonalité :

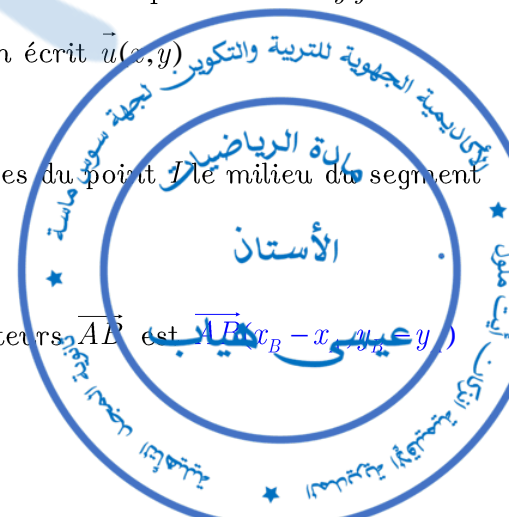
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (AB) \perp (CD)$$

### 4- Déterminant de deux vecteurs :

Soient  $\vec{u}(a; b)$  et  $\vec{v}(a'; b')$  deux vecteurs du plan rapporté à un repère  $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

Le nombre  $ab' - a'b$  est appelé déterminant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans cet ordre, on le

$$\text{note par } \det(\vec{u};\vec{v}) \text{ ou } \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \text{ et on écrit : } \det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$



## Déterminant et colinéarité :

$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

## 5- Vecteur directeur - équation cartésienne d'une droite

• Soit  $(D)$  une droite du plan. Tout vecteur non nul  $\vec{u}$  et de même direction de  $(D)$  est appelé vecteur directeur de la droite  $(D)$ .

• Toute droite  $(D)$  du plan est un ensemble des points  $M(x;y)$  vérifiant l'équation  $ax+by+c=0$  tel que  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $(a,b) \neq (0,0)$ .

L'équation  $(D): ax+by+c=0$  est appelé une équation cartésienne de la droite  $(D)$ .

Le vecteur  $\vec{u}(-b;a)$  est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne  $(D): ax+by+c=0$

## 6- Représentation paramétrique d'une droite

Soit  $B(x_B, y_B)$  un point du plan et  $\vec{u}(a'; b')$  un vecteur non nul du plan rapporté à un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

• La droite  $(D)$  passant par le point  $B(x_B, y_B)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(a'; b')$  est l'ensemble des points

$$M(x;y) \text{ du plan vérifient le système } \begin{cases} x = x_B + a' \times t \\ y = y_B + b' \times t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$

• Le système  $(D): \begin{cases} x = x_B + a' \times t \\ y = y_B + b' \times t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$  est appelé une représentation paramétrique de la droite  $(D)$ .

## 7- Résolution graphique d'une inéquation de premier degré de deux inconnus

Soit  $(D)$  une droite d'équation  $(D): ax+by+c=0$  dans un plan rapporté à un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

• La droite  $(D)$  partage le plan en deux demi-plans  $(D^+)$  et  $(D^-)$  tel que :

$(D^+)$  est l'ensemble des points  $M(x;y)$  du plan tel que  $ax+by+c > 0$

$(D^-)$  est l'ensemble des points  $M(x;y)$  du plan tel que  $ax+by+c < 0$

• Pour déterminer  $(D^+)$  ou  $(D^-)$  graphiquement, on procède de la façon suivante :

On trace la droite  $(D)$  ;

On choisit un point du plan en dehors de la droite  $(D)$  et on teste s'il appartient au demi-plan cherché ou pas. Le plus souvent, quand la droite ne passe pas par l'origine, on choisit  $O(0,0)$  qui fournit le résultat facilement, mais si la droite passe par l'origine du repère on choisit un autre point.

## 8- Mesures principal usuelles :

Soit  $\theta \in ]-\pi; \pi]$  la mesure principale d'un angle orienté  $(\vec{u}; \vec{v})$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} ; \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} ; \quad \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} ; \quad \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3}$$
$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} ; \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} ; \quad \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} ; \quad \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{6}$$
$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} ; \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} ; \quad \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} ; \quad \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4}$$

Dans tous les paragraphes de ce chapitre on considère le plan rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

## 1) La formule analytique du produit scalaire-norme d'un vecteur-formule de $\cos(\vec{u}; \vec{v})$ - distance entre deux points-formule de $\sin(\vec{u}; \vec{v})$

### Activité 1 :

Soient  $\vec{u}(x;y)$  et  $\vec{v}(x';y')$  deux vecteurs non nuls du plan.

1) Développer et simplifier le produit scalaire suivant  $(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$

2) En déduire que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$  puis montrer que  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) Vérifier que  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$

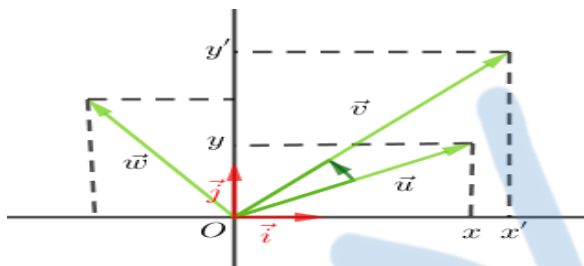
4) On considère les points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$

a) Déterminer les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$

b) En déduire que  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

5) Soit  $\vec{w}$  un vecteur du plan tel que  $(\vec{u}; \vec{w}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et  $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|$  (Voir la figure ci-contre)

a) Montrer que  $(\vec{v}; \vec{w}) \equiv \frac{\pi}{2} - (\vec{u}; \vec{v}) [2\pi]$  et  $\vec{w}(-y; x)$



$$\vec{u}(x;y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$AB^2 = \|\vec{AB}\|^2$$

$$(\vec{v}; \vec{u}) \equiv -(\vec{u}; \vec{v}) [2\pi]$$

$$(\vec{v}; \vec{w}) \equiv (\vec{v}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{w}) [2\pi]$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

b) Calculer  $\cos(\vec{v}; \vec{w})$  par deux méthodes et en déduire que  $\sin(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$

### A retenir 1 :

Soient  $\vec{u}(x;y)$  et  $\vec{v}(x';y')$  deux vecteurs du plan, on a :

• 1  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

• 2  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

• 3  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

• Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  alors 4  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$  et 5  $\sin(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$

•  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$



### Exemple 1

On considère les vecteurs suivants  $\vec{u}(5;-1)$ ,  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  et  $\vec{w} = (5m+2)\vec{i} - \vec{j}$  ( $m \in \mathbb{R}$ )

1) Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{v}\|$

2) Calculer  $\cos(\vec{u}; \vec{v})$ ,  $\sin(\vec{u}; \vec{v})$  et déduire  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

3) Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{w}$  en fonction de  $m$ .

4) En déduire la valeur de  $m$  pour que  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  soient orthogonaux.

5) On considère les points  $A(1;4)$  et  $B(-5;1)$ , calculer la distance  $AB$ .

### Solution

1) On a  $\vec{u}(5;-1)$  et  $\vec{v}(2;-3)$

Donc :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x \times x' + y \times y' = 5 \times 2 + (-1) \times (-3) = 13$  ;  $\|\vec{u}\| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$  ;  $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$$2) \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{13}{\sqrt{26} \times \sqrt{13}} = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{\sqrt{26} \times \sqrt{13}} = \frac{-13}{13\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Et par conséquent } (\vec{u}; \vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$3) \text{ On a } \vec{u}(5; -1) \text{ et } \vec{w}(5m+2; -1), \text{ donc } \vec{u} \cdot \vec{w} = 5 \times (5m+2) + (-1) \times (-1) = 25m+11$$

$$4) \text{ On a } \vec{u} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \text{ donc } \vec{u} \perp \vec{w} \Leftrightarrow 25m+11=0, \text{ d'où } \vec{u} \perp \vec{w} \Leftrightarrow m = -\frac{11}{25}$$

$$5) AB = \sqrt{(-5-1)^2 + (1-4)^2} = 3\sqrt{5}$$

### Remarque 1

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$  ; •  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = x_{AB} \times x_{AC} + y_{AB} \times y_{AC}$  ; •  $AB = \sqrt{(x_{AB})^2 + (y_{AB})^2}$
- $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x_{AB} & x_{AC} \\ y_{AB} & y_{AC} \end{vmatrix}$  ; •  $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$  ; •  $\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}{AB \times AC}$
- L'aire d'un triangle  $ABC$  est :  $S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})|$
- $S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})|$  ; •  $S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})|$

### Exemple 2

Calculer l'aire du triangle  $ABC$  sachant que  $A(2; -4)$ ,  $B(1; 3)$  et  $C(-2; 7)$

#### Solution

$$\text{On a } \overrightarrow{AB}(-1; 7) \text{ et } \overrightarrow{AC}(-4; 11) \text{ donc } \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = 17.$$

$$\text{Par suite l'aire du triangle } ABC \text{ est : } S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = \frac{17}{2} = 4.5$$

### Application 1

On considère les points :  $A(5; 7)$ ,  $B(2; 3)$  et  $C(9; 4)$

- 1) Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  et  $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$
- 2) En déduire la nature du triangle  $ABC$
- 3) Calculer les distances  $AB$ ,  $BC$  et  $CA$
- 4) a) Calculer  $\cos(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$  et  $\sin(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$
- b) En déduire la mesure principale de l'angle orienté  $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$
- 5) Calculer l'aire du triangle  $ABC$

## 2) Vecteur normal à une droite – équation cartésienne d'une droite

### Activité 2 :

Soit  $(\Delta)$  la droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  tels que  $a; b; c \in \mathbb{R}$  et  $(a; b) \neq (0; 0)$

- 1) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur  $\vec{u}$  de  $(\Delta)$
- 2) Montrer que le vecteur  $\vec{n}(a; b)$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux.

On dit que  $\vec{n}(a; b)$  est un **vecteur normal** à la droite  $(\Delta)$

- 3) Soit  $(D)$  la droite passant par  $A(x_A; y_A)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(a; b)$

$$\text{a) Montrer que pour tout point } M(x; y) \text{ du plan, on a : } M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

$$\text{b) En déduire que } M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$



## A retenir 2 :

Soit  $(D)$  une droite du plan.

- Tout vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite  $(D)$  est appelé vecteur normal à la droite  $(D)$
- Si une équation cartésienne de  $(D)$  est  $ax+by+c=0$  alors : **7** le vecteur  $\vec{n}(a;b)$  est normal à la droite  $(D)$  et  $\vec{u}(-b;a)$  est un vecteur directeur de la droite  $(D)$
- L'équation cartésienne de  $(D)$  la droite passant par  $A(x_A;y_A)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(a;b)$  s'obtient par l'équivalence **8**  $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

### Exemple 3

1) Déterminer un vecteur normal à la droite  $(D)$  dans les cas suivants :

a)  $(D):x-4y+1=0$  ; b)  $(D):\frac{2}{3}x+3=0$  ; c)  $(D):y=2$

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(D)$  passant par le point  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  dans les cas suivants :

a)  $A(4;-1)$  et  $\vec{n}(1;-3)$

b)  $A(\sqrt{2};-\sqrt{2})$  et  $\vec{n}(2\sqrt{2};3\sqrt{2})$

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(D)$  passant par  $A(4;2)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(-1;3)$

### Solution

1) a) On a l'équation cartésienne de  $(D)$  s'écrit :  $1x+(-4)y+1=0$  donc le vecteur  $\vec{n}(1;-4)$  est un vecteur normal à la droite  $(D)$

b) On a l'équation cartésienne de  $(D)$  s'écrit :  $\frac{2}{3}x+0y+3=0$  donc le vecteur  $\vec{n}(\frac{2}{3};0)$  est un vecteur normal à la droite  $(D)$

c) On a l'équation cartésienne de  $(D)$  s'écrit :  $0x+1y-2=0$  donc le vecteur  $\vec{n}(0;1)$  est un vecteur normal à la droite  $(D)$

2) a)

#### Méthode 1

On a  $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$  or  $\vec{n}(1;-3)$  et  $\overrightarrow{AM}(x-4;y+1)$

Alors  $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow 1(x-4)+(-3)(y+1)=0$

$$\Leftrightarrow x-3y-7=0. \text{ Ainsi } (D):x-3y-7=0$$

#### Méthode 2

L'équation cartésienne de  $(D)$  s'écrit :  $(D):ax+by+c=0$

C'est-à-dire :  $(D):1x-3y+c=0$

Puisque  $A \in (D)$  alors  $1x_A-3y_A+c=0$

C'est-à-dire :  $1 \times 4 - 3 \times (-1) + c = 0$ , d'où  $c = 7$

Ainsi  $(D):x-3y-7=0$ .

b) On a  $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$  or  $\vec{n}(2\sqrt{2};3\sqrt{2})$  et  $\overrightarrow{AM}(x-\sqrt{2};y+\sqrt{2})$

Alors  $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow 2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+3\sqrt{2}(y+\sqrt{2})=0$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}x-4+3\sqrt{2}y+6=0. \text{ Ainsi } (D):2\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y+2=0$$

3) Rappel : si  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de la droite  $(D)$  passant par  $A$ , alors :

$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\overrightarrow{AM}$  sont colinéaires.

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$$

On a :  $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & -1 \\ y-y_A & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & -1 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x-4)+(y-2)=0$

$$\Leftrightarrow 3x+y-14=0. \text{ Ainsi l'équation cartésienne de } (D) \text{ est } (D):3x+y-14=0$$



## Application 2

Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(D)$  dans les cas suivants :

- 1)  $(D)$  passe par le point  $A(1;2)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(2; \frac{1}{2})$
- 2)  $(D)$  passe par le point  $A(2;3)$  et parallèle à la droite  $(\Delta): x+2y-3=0$
- 3)  $(D)$  passe par le point  $A(5;-2)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(1;2)$
- 4)  $(D)$  passe par le point  $A(-2;1)$  et orthogonal à la droite  $(\Delta): \begin{cases} x=4+2t \\ y=-1+3t \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$
- 5)  $(D)$  passe par les points  $A(1;-1)$  et  $B(1;3)$
- 6)  $(D)$  à une représentation paramétrique s'écrit :  $(D): \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$
- 7)  $(D)$  à une équation réduite s'écrit :  $(D): y = \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$

## Remarque 2 : Condition de perpendicularité de deux droites

Si les droites  $(D)$  et  $(D')$  sont définies respectivement par les équations cartésiennes  $ax+by+c=0$  et  $a'x+b'y+c'=0$  alors  $\boxed{9} (D) \perp (D') \Leftrightarrow aa'+bb'=0$

## Exemple 4

Etudier la perpendicularité des droites  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  dans chacun des cas suivants

- 1)  $(\Delta): x-6y+2=0$  et  $(\Delta'): 6x+y+1=0$
- 2)  $(\Delta): 2x-y+3=0$  et  $(\Delta'): x+y+2=0$
- 3)  $(\Delta): x-y+4=0$  et  $(\Delta'): \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$

## Solution

- 1) Puisque  $1 \times 6 + (-6) \times 1 = 0$  alors :  $(\Delta) \perp (\Delta')$
- 2) Puisque  $2 \times 1 + (-1) \times 1 = 1 \neq 0$  alors :  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  ne sont pas perpendiculaires.
- 3) On a le vecteur  $\vec{n}(1;-1)$  est normal à  $(\Delta)$  et  $\vec{u}(2;3)$  est un vecteur directeur de  $(\Delta')$ .  
Or  $\det(\vec{n}; \vec{u}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3+2=5 \neq 0$  alors  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  ne sont pas perpendiculaires.



## 3) Distance d'un point à une droite

### Activité 3 :

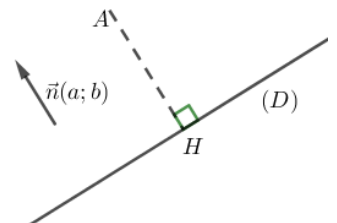
Soit  $(D)$  la droite du plan d'équation  $ax+by+c=0$  et de vecteur normal  $\vec{n}(a;b)$

On considère le point  $H$  le projeté orthogonal de  $A(x_A; y_A)$  sur la droite  $(D)$

- 1) Vérifier que  $ax_H + by_H = -c$  et  $|\cos(\overrightarrow{AH}; \vec{n})| = 1$
- 2) En déduire que  $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = -(ax_A + by_A + c)$  et  $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$

La distance  $AH$  est appelé la **distance du point  $A$  à la droite  $(D)$**  et on la note  $d(A;(D))$

- 3) En déduire que  $d(A;(D)) = AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



### A retenir 3 :

Soit  $(D)$  la droite du plan d'équation  $ax+by+c=0$  et  $A(x_A; y_A)$  un point du plan.

La distance du point  $A$  à la droite  $(D)$  est  $\boxed{10} d(A;(D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

## Exemple 5

Calculer la distance du point  $A(5;-3)$  à la droite  $(D)$  d'équation  $3x+2y+4=0$

## Solution

La distance du point  $A$  à la droite  $(D)$  est :  $d(A;(D)) = \frac{|3x_A + 2y_A + 4|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \times 5 + 2 \times (-3) + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$

### Application 3

Calculer la distance du point  $A$  à la droite  $(D)$  dans les cas suivants :

$$1) A(2;-3) \text{ et } (D): x-y+3=0 \quad ; \quad 2) A(1;-1) \text{ et } (D): 2x-4y+3=0 \quad ; \quad 3) A(5;-4) \text{ et } (D): \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$$

## 4) Equation cartésienne d'un cercle

### Activité 4 :

A- Soit  $(C)$  le cercle de centre  $\Omega(1;1)$  et de rayon 2

$$1) a) \text{ Calculer les distances } \Omega A, \Omega B \text{ et } \Omega C \text{ tels que } A(3;1), B(2;2) \text{ et } C(\sqrt{3}+1;2)$$

b) En déduire les points appartenant à  $(C)$  parmi les points  $A, B$  et  $C$

2) Soit  $M(x;y)$  un point du plan.

a) Calculer la distance  $\Omega M$  en fonction de  $x$  et  $y$

b) En déduire que  $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$

L'équation  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$  est appelé **l'équation cartésienne de cercle**  $(C)$

B- Soit  $(C)$  le cercle de centre  $\Omega(a;b)$  et de rayon  $R$  (avec  $a;b;R \in \mathbb{R}$  et  $R > 0$ )

1) Montrer que l'équation  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  est l'équation cartésienne de cercle  $(C)$

2) Montrer que l'équation précédente peut s'écrire sous la forme  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  où  $c = a^2 + b^2 - R^2$

C- Soit  $A(3;1)$  et  $B(2;2)$  deux points distincts dans le plan et  $(C)$  le cercle de diamètre  $[AB]$

1) Vérifier que  $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow \overline{AM} \perp \overline{BM}$

2) En déduire que  $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5x - 3y + 8 = 0$

### A retenir 4 :

1) • Soit  $\Omega$  un point du plan et  $R$  un réel strictement positif.

Le cercle  $(C)$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tel que :  $\Omega M = R$

On le note  $C(\Omega;R)$ .

• L'ensemble des points du plan  $M(x;y)$  tel que **[11]**  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  est un cercle de centre  $\Omega(a;b)$  et de rayon  $R$ .

• L'équation  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  est appelée l'équation cartésienne du cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(a;b)$  et de rayon  $R$ .

• On peut écrire l'équation cartésienne du cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(a;b)$  et de rayon  $R$  sous la forme :

$$\text{[12]} \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad \text{où } c = a^2 + b^2 - R^2$$

2) Soit  $A(x_A;y_A)$  et  $B(x_B;y_B)$  deux points distincts du plan :

• Le cercle de diamètre  $[AB]$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tel que  $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$

• L'équation cartésienne du cercle de diamètre  $[AB]$  est **[13]**  $(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$

### Exemple 6

Déterminer l'équation cartésienne du cercle  $(C)$  dans chacun des cas suivants :

1)  $(C)$  est de centre  $\Omega(2;-1)$  et de rayon  $R = 2\sqrt{2}$ .

2)  $(C)$  est de centre  $\Omega(1;3)$  et passant par  $A(-1;2)$ .

3)  $(C)$  est de diamètre  $[AB]$  tels que  $A(-4;3)$  et  $B(2;-1)$ .

4)  $(C)$  est de centre  $\Omega(2;-1)$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $(\Delta): x-3y+5=0$  tangente à  $(C)$ .

### Solution

1) On a :  $a=2$  ,  $b=-1$  et  $R=2\sqrt{2}$

#### Méthode 1

L'équation cartésienne du cercle  $(C)$  est :  $(x-2)^2 + (y-(-1))^2 = (2\sqrt{2})^2$

C'est-à-dire  $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 8$  ce qui donne :  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$



## Méthode 2

L'équation cartésienne du cercle (C) est  $x^2 + y^2 - 2 \times 2x - 2 \times (-1)y + c = 0$  où  $c = a^2 + b^2 - R^2$

On a :  $c = 2^2 + (-1)^2 - (2\sqrt{2})^2 = -3$ , d'où l'équation cartésienne du cercle (C) est  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$

2) On a :  $a = 1$ ,  $b = 3$  et le rayon de (C) est  $R = A\Omega = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{5}$

Donc l'équation cartésienne du cercle (C) est  $x^2 + y^2 - 2 \times 1x - 2 \times 3y + c = 0$  où  $c = a^2 + b^2 - R^2$

On a :  $c = 1^2 + 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 5$ , d'où l'équation cartésienne du cercle (C) est  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

## 3) Méthode 1

L'équation cartésienne du cercle (C) est :  $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

C'est-à-dire  $(x - (-4))(x - 2) + (y - 3)(y - (-1)) = 0$  ce qui donne :  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$

## Méthode 2

Le centre du cercle (C) est le milieu  $\Omega$  de  $[AB]$

On sait que :  $a = x_\Omega = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = -1$  et  $b = y_\Omega = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$

Le rayon du cercle (C) est  $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(2 + 4)^2 + ((-1) - 3)^2}}{2} = \sqrt{13}$

Donc l'équation cartésienne du cercle (C) est  $x^2 + y^2 - 2 \times (-1)x - 2 \times 1y + c = 0$  où  $c = a^2 + b^2 - R^2$

On a :  $c = (-1)^2 + 1^2 - (\sqrt{13})^2 = -11$ , d'où l'équation cartésienne du cercle (C) est  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$

4) On a :  $a = 2$ ,  $b = -1$  et puisque  $(\Delta)$  est tangente à (C) alors le rayon de (C) est :

$$R = d(\Omega; (\Delta)) = \frac{|x_\Omega - 3y_\Omega + 5|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - 3 \times (-1) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Donc l'équation cartésienne du cercle (C) est  $x^2 + y^2 - 2 \times 2x - 2 \times (-1)y + c = 0$  où  $c = a^2 + b^2 - R^2$

On a :  $c = 2^2 + (-1)^2 - (\sqrt{10})^2 = -5$ , d'où l'équation cartésienne du cercle (C) est  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$

## Application 4

Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) dans les cas suivants :

- 1) (C) est de centre  $\Omega(-1; 2)$  et de rayon  $R = 3$
- 2) (C) est de centre  $\Omega(-4; 3)$  et passant par  $A(-1; 0)$
- 3) (C) est de diamètre  $[AB]$  tels que :  $A(-1; 3)$  et  $B(0; 3)$
- 4) (C) est de centre  $\Omega(-1; 1)$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $(\Delta): 4x - 5y + 3 = 0$  tangente à (C)
- 5) (C) est le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  tels que  $A(1; 2)$ ,  $B(7; 4)$  et  $C(-1; 0)$
- 6) (C) passe par les points  $A(4; -3)$ ,  $B(0; 5)$  et de centre  $\Omega$  appartient à la droite  $(D)$  d'équation  $x + y - 1 = 0$
- 3)  $A(5; -4)$  et  $(D): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$

## 5) Ensembles des points $M(x; y)$ du plan tel que $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

### Activité 5 :

Soient  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$  et  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan vérifiant l'équation  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

1) Montrer que  $M(x; y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

2) On pose  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ , en déduire que  $M(x; y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

3) En déduire la nature de  $(\Gamma)$  dans chacun des cas suivants  $a^2 + b^2 - 4c > 0$ ,  $a^2 + b^2 - 4c = 0$  et  $a^2 + b^2 - 4c < 0$

### A retenir 5 :

**14** Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan vérifiant :  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  où  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$

Si  $a^2 + b^2 - 4c > 0$  alors  $(\Gamma)$  est le cercle de centre  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$  et de rayon  $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$

Si  $a^2 + b^2 - 4c = 0$  alors  $(\Gamma)$  est  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$

Si  $a^2 + b^2 - 4c < 0$  alors  $(\Gamma)$  est l'ensemble vide.

### Exemple 7

Déterminer la nature de l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M(x;y)$  du plan dans chacun des cas suivants :

1)  $(\Gamma): x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$  ; 2)  $(\Gamma): x^2 + y^2 + 6x - 4y + 16 = 0$  ; 3)  $(\Gamma): x^2 + y^2 + 4x + 10y + 29 = 0$

### Solution

#### 1) Méthode 1

On a :  $a = 4$  ,  $b = -6$  et  $c = 9$  donc  $a^2 + b^2 - 4c = 4^2 + (-6)^2 - 4 \times 9 = 16 > 0$  par conséquent  $(\Gamma)$  est le cercle de centre  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$  et de rayon  $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$  c'est-à-dire  $\Omega(-2; 3)$  et de rayon  $R = 2$

#### Méthode 2

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (\Gamma) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 2 \times 2x + 2^2) - 4 + (y^2 - 2 \times 3y + 3^2) - 9 + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4 = 2^2 \end{aligned}$$

Donc (d'après la règle 11) :  $(\Gamma)$  est le cercle de centre  $\Omega(-2; 3)$  et de rayon  $R = 2$

#### 2) Méthode 1

On a :  $a = 6$  ,  $b = -4$  et  $c = 16$  donc  $a^2 + b^2 - 4c = 6^2 + (-4)^2 - 4 \times 16 = -12 < 0$  par conséquent  $(\Gamma)$  est l'ensemble vide.

#### Méthode 2

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (\Gamma) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = -3 < 0 \end{aligned}$$

Donc :  $(\Gamma)$  est l'ensemble vide.

#### 3) Méthode 1

On a :  $a = 4$  ,  $b = 10$  et  $c = 29$  donc  $a^2 + b^2 - 4c = 4^2 + 10^2 - 4 \times 29 = 0$  , d'où  $(\Gamma)$  est le singleton  $\Omega(-2; -5)$

#### Méthode 2

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (\Gamma) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 10y + 29 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 4x) + (y^2 + 10y) + 29 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y+5)^2 - 25 + 29 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+5)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2=0 \text{ et } y+5=0) \\ &\Leftrightarrow (x=-2 \text{ et } y=-5) \end{aligned}$$

Donc  $(\Gamma)$  est le singleton  $\Omega(-2; -5)$

### Application 5

Déterminer la nature de l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M(x;y)$  du plan dans chacun des cas suivants :

1)  $x^2 + y^2 + x - 4y + 5 = 0$  ; 2)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  ; 3)  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$  ; 4)  $x^2 + y^2 = 1$

## 6) Intérieur et extérieure d'un cercle

### A retenir 6 :

**[15]** Soit  $(C)$  le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  ,  $M$  est un point du plan :

→  $M$  est sur le cercle  $(C) \Leftrightarrow \Omega M = R$

→  $M$  est à l'intérieur du cercle  $(C) \Leftrightarrow \Omega M < R$



→  $M$  est à l'extérieur du cercle  $(C) \Leftrightarrow \Omega M > R$

**16** Si  $(C): x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  est une équation cartésienne du cercle  $(C)$  alors :

→  $M(x_M; y_M)$  est sur le cercle  $(C) \Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 + ax_M + by_M + c = 0$

→  $M(x_M; y_M)$  est à l'intérieur du cercle  $(C) \Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 + ax_M + by_M + c < 0$

→  $M(x_M; y_M)$  est à l'extérieur du cercle  $(C) \Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 + ax_M + by_M + c > 0$

### Exemple 8

1) Déterminer la position du point  $M$  par rapport au cercle  $(C)$  dans chacun des cas suivants :

a)  $C(\Omega(2;3);1)$  et  $M(-1;2)$  ; b)  $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$  et  $M(0;0)$

2) a) Déterminer l'ensemble des points  $M(x;y)$  du plan tel que :  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation :  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 < 0$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation :  $x - y > 0$

d) Résoudre graphiquement le système suivant :  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 < 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$

### Solution

1) a) On a : le rayon de  $(C)$  est  $R=1$  et

$$\Omega M = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10} > 1$$

Donc  $M$  est à l'extérieur du cercle  $(C)$

b) On sait que :  $(C)$  est de centre  $\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$  et de

$$\text{rayon } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

Or  $a=-2, b=4$  et  $c=0$  alors  $\Omega(1;-2)$  et  $R = \sqrt{5}$

$$\text{On a } \Omega M = \sqrt{(0-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{5} = R$$

Donc  $M$  est sur le cercle  $(C)$ .

2) a) On a :  $a=-2 ; b=2$  et  $c=-7$ .

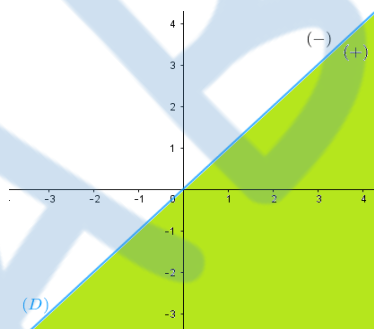
$$\text{Donc } a^2 + b^2 - 4c = (-2)^2 + 2^2 - 4 \times (-7) = 36 > 0.$$

Par conséquent  $(C)$  est le cercle de centre

$$\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}) = \Omega(1;-1) \text{ et de rayon } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = 3$$

b) Les solutions graphiques de l'inéquation  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 < 0$  sont les couples  $(x;y)$  de coordonnées des points situés à l'intérieur du cercle  $(C)$  précédente.

c) Les solutions graphiques de l'inéquation  $x - y > 0$  sont les couples  $(x;y)$  de coordonnées des points situés dans le demi-plan  $(D^+)$  tel que  $(D)$  est la droite d'équation :  $x - y = 0$  :

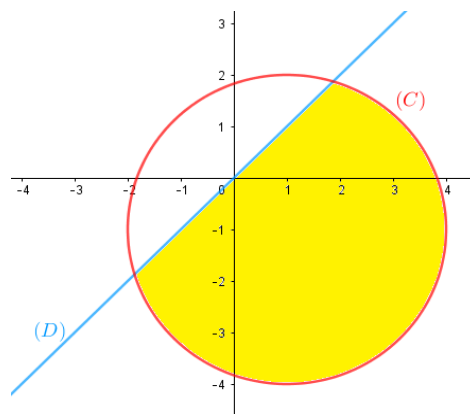


d) Les solutions graphiques du système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 < 0 \\ x - y > 0 \end{cases} \text{ sont les couples } (x;y) \text{ de}$$

coordonnées des points situés à l'intersection de l'intérieur du cercle  $(C)$  avec  $(D^+)$

C'est-à-dire les couples  $(x;y)$  des points appartenant à la partie colorée de la figure ci-dessous :



### Application 6

1) Déterminer la position du point  $A$  par rapport au cercle  $(C)$  dans les cas suivants :

a)  $C(\Omega(-1;2); \sqrt{10})$  et  $A(2;1)$

b)  $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$  et  $A(-1;0)$

2) a) Déterminer la nature de l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M(x;y)$  du plan tel que  $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation :  $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 < 0$

3) a) Résoudre graphiquement l'inéquation :  $x + 2y - 1 < 0$

b) En déduire les solutions graphiques du système :  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 < 0 \\ x + 2y - 1 < 0 \end{cases}$

## 7) Représentation paramétrique d'un cercle

### Activité 6 :

Soit  $(C)$  un cercle de centre  $\Omega(a;b)$  et de rayon  $R$

**Partie 1 :**  $M$  un point de  $(C)$  tel que  $(\vec{i}; \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta[2\pi]$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ )

1) Montrer que  $\vec{i} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = R \cos(\theta)$

2) Vérifier que  $(\vec{j}; \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta[2\pi]$  et en déduire que  $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = R \sin(\theta)$

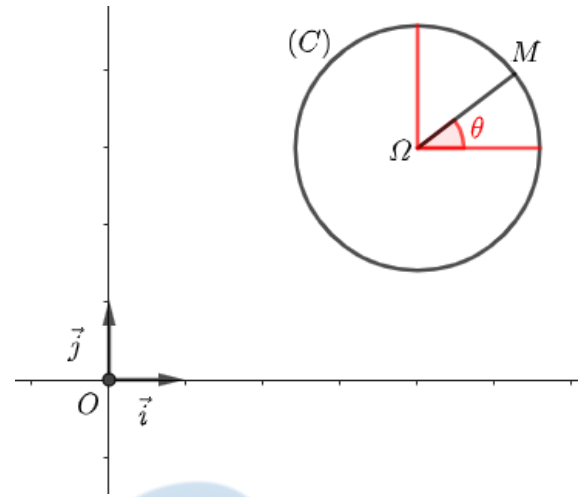
3) Soit  $(x;y)$  le couple des coordonnées du point  $M$

a) Déterminer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{\Omega M}$  et en déduire que :

$$\overrightarrow{\Omega M} = (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j}$$

b) En déduire que  $\vec{i} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = x-a$  et  $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = y-b$

c) En déduire que  $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + R \cos(\theta) \\ y = b + R \sin(\theta) \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$



**Partie 2 :** Soit  $M(x;y)$  un point du plan. Montrer que  $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow (\exists \theta \in \mathbb{R}) / \begin{cases} x = a + R \cos(\theta) \\ y = b + R \sin(\theta) \end{cases}$

Le système  $\begin{cases} x = a + R \cos(\theta) \\ y = b + R \sin(\theta) \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$  est appelé une **représentation paramétrique** du cercle  $(C)$

### A retenir 7 :

Le cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(a;b)$  et de rayon  $R$  est l'ensemble des points  $M(x;y)$  du plan qui vérifient le système

$$\boxed{17} \quad (S) : \begin{cases} x = a + R \cos(\theta) \\ y = b + R \sin(\theta) \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$$

Le système  $(S)$  est appelé une **représentation paramétrique** du cercle  $(C)$

### Exemple 9

1) Déterminer une représentation paramétrique du cercle  $(C)$  dans chacun des cas suivants :

a)  $(C)$  est de centre  $\Omega(2;3)$  et de rayon  $R=5$  ;      b)  $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$

2) Déterminer l'ensemble  $(C)$  des points  $M(x;y)$  du plan tel que :  $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos(\theta) \\ y = -3 + \sqrt{2} \sin(\theta) \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$

3) Déterminer l'équation cartésienne du cercle  $(C)$  de représentation paramétrique :  $\begin{cases} x = 1 + 3 \cos(t) \\ y = -1 + 3 \sin(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

### Solution

1) a) une représentation paramétrique du cercle  $(C)$  est donnée par  $\begin{cases} x = 2 + 5 \cos(\theta) \\ y = 3 + 5 \sin(\theta) \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$

b) Déterminons le centre et le rayon de  $(C)$

$$M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 6y - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 16 = 4^2. \text{ D'où } (C) \text{ est de centre } \Omega(1;-3) \text{ et de rayon } R=4$$

Donc une représentation paramétrique du cercle  $(C)$  est le système :  $\begin{cases} x = 1 + 4 \cos(\theta) \\ y = -3 + 4 \sin(\theta) \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$

2) On a  $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos(\theta) \\ y = -3 + \sqrt{2} \sin(\theta) \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{2} \cos(\theta) \\ y+3 = \sqrt{2} \sin(\theta) \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$

$$\text{Donc } M(x;y) \in (C) \Rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2 \cos^2(\theta) + 2 \sin^2(\theta) = 2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = 2 = \sqrt{2}^2$$

C'est-à-dire que  $(C)$  est le cercle de centre  $\Omega(1;-3)$  et de rayon  $R = \sqrt{2}$

3) On a  $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3 \cos(t) \\ y = -1 + 3 \sin(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 3 \cos(t) \\ y+1 = 3 \sin(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$$\text{Donc } (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9 \cos^2(t) + 9 \sin^2(t) = 9(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 9$$

C'est-à-dire  $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 9$  d'où finalement  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

### Application 7

1) Déterminer une représentation paramétrique du cercle  $(C)$  dans les cas suivants :

a)  $(C)$  est de centre  $\Omega(1; -4)$  et de rayon  $R = \sqrt{3}$

b)  $(C): (x-3)^2 + (y+5)^2 = 9$

c)  $(C): x^2 + y^2 + 6x - 8y + 23 = 0$

2) Déterminer l'équation cartésienne du cercle  $(C)$  dans les cas suivants :

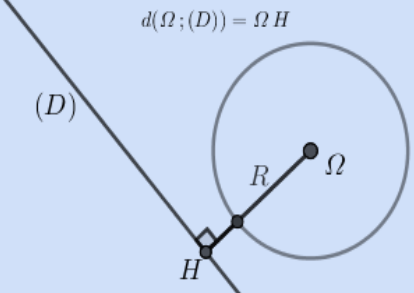
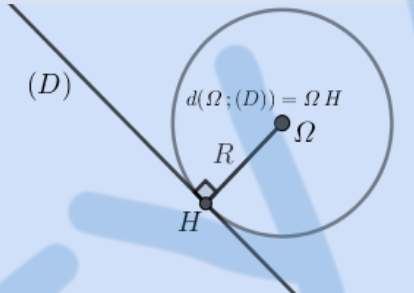
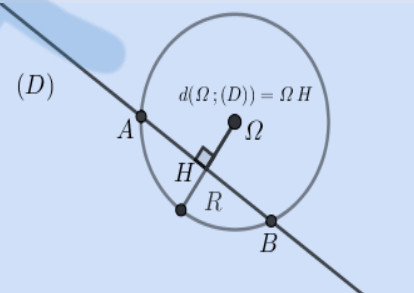
a)  $(C): \begin{cases} x = 1 + 5\cos(\theta) \\ y = -2 + 5\sin(\theta) \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$

b)  $(C): \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = -3 + \sin(t) \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

## 8) Positions relatives d'une droite et d'un cercle

### A retenir 8 :

**18** Soit  $(C)$  le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  et  $(D)$  une droite dans le plan et soit  $d = d(\Omega; (D))$  la distance du point  $\Omega$  à la droite  $(D)$

<p>Si <math>d(\Omega; (D)) &gt; R</math> alors l'intersection de <math>(D)</math> et <math>(C)</math> est vide : <math>(D) \cap (C) = \emptyset</math></p> 	<p>Si <math>d(\Omega; (D)) = R</math> alors l'intersection de <math>(D)</math> et <math>(C)</math> est le singleton <math>\{H\}</math> ou <math>H</math> est le point de contact de <math>(D)</math> et du cercle <math>(C)</math> : <math>(D) \cap (C) = \{H\}</math></p> 	<p>Si <math>d(\Omega; (D)) &lt; R</math> alors l'intersection de <math>(D)</math> et <math>(C)</math> est un bipoint <math>\{A; B\}</math> : <math>(D) \cap (C) = \{A; B\}</math></p> 
--	---	--

### Solution

1) On sait que  $(C)$  est de centre  $\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$  et de rayon  $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$

Or  $a = -1$  ;  $b = -6$  et  $c = 0$  alors  $(C)$  est de centre  $\Omega(\frac{1}{2}; 3)$  et de rayon  $R = \frac{\sqrt{37}}{2}$

On a  $d(\Omega; (D)) = \frac{|x_\Omega - y_\Omega - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\frac{1}{2} - 3 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|\frac{-7}{2}|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$  donc  $d(\Omega; (D)) < R$

Par conséquent, la droite  $(D)$  coupe le cercle  $(C)$  en deux points  $A$  et  $B$

Déterminons le couple des coordonnées de  $A$  et de  $B$

$$M(x; y) \in (D) \cap (C) \Leftrightarrow \begin{cases} M(x; y) \in (D) \\ M(x; y) \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ (y + 1)^2 + y^2 - (y + 1) - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 2y^2 - 5y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y(2y - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y = 0 \text{ ou } y = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 1 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ainsi les points d'intersection de  $(D)$  et  $(C)$  sont :  $A(1; 0)$  et  $B(\frac{7}{2}; \frac{5}{2})$

2) On a  $(C)$  est de centre  $\Omega(1; -1)$  et de rayon  $R = \sqrt{5}$

On a  $d(\Omega; (D)) = \frac{|2x_\Omega + y_\Omega + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2 \times 1 - 1 + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$  donc  $d(\Omega; (D)) = R$  par conséquent, la droite  $(D)$  coupe le cercle

$(C)$  en un point  $H$ .  $(D)$  est tangente au cercle  $(C)$



Déterminons le couple des coordonnées du point  $H$  :

$$\begin{aligned}
 M(x;y) \in (D) \cap (C) &\Leftrightarrow \begin{cases} M(x;y) \in (D) \\ M(x;y) \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+4=0 \\ (x-1)^2+(y+1)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ (x-1)^2+(-2x-4+1)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ (x-1)^2+(-2x-3)^2=5 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ x^2-2x+1+4x^2+12x+9=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ 5x^2+10x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4 \\ (x+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y=-2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}, \text{ ainsi le point d'intersection de } (D) \text{ et } (C) \text{ est } H(-1;-2).
 \end{aligned}$$

3) On a  $(C)$  est de centre  $\Omega(0;0)$  et de rayon  $R=3$  et  $(D):0x+1y-4=0$

$$\text{On a } d(\Omega;(D)) = \frac{|0x_\Omega + y_\Omega - 4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|0 \times 0 + 0 - 4|}{1} = 4, \text{ donc } d(\Omega;(D)) > R, \text{ par conséquent } (D) \cap (C) = \emptyset$$

### Application 8

Etudier l'intersection de la droite  $(D)$  et du cercle  $(C)$  dans les cas suivants :

- 1)  $(D):3x+4y-3=0$  ;  $(C):x^2+y^2-x-7y=0$
- 2)  $(D):-4x+3y-20=0$ ;  $(C):x^2+y^2-4x-2y-20=0$
- 3)  $(D):y=x-6$  ;  $(C):x^2+y^2=16$

## 9) Equation cartésienne de la tangente en un point d'un cercle

### Activité 7 :

Soit  $(C)$  le cercle de centre  $\Omega(a;b)$  et de rayon  $R$ ,  $A(x_A;y_A)$  un point du cercle  $(C)$  et  $(T)$  la tangente au cercle  $(C)$  en  $A$

- 1) Déterminer un vecteur normal à la droite  $(T)$
- 2) En déduire que  $M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$
- 3) En déduire que  $M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow (a-x_A)(x-x_A) + (b-y_A)(y-y_A) = 0$

### A retenir 8 :

Soit  $(C)$  un cercle de centre  $\Omega$  et  $A$  un point de  $(C)$

La tangente  $(T)$  au cercle  $(C)$  au point  $A$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tel que  $\overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

$$\boxed{19} \quad M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

### Exemple 11

Vérifier que le point  $A$  appartient au cercle  $(C)$  puis déterminer une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  au cercle  $(C)$  au point  $A$  dans les cas suivants :

- 1)  $(C):x^2+y^2+x-2y=0$  et  $A(0;0)$  ; 2)  $(C):(x-2)^2+(y-4)^2=4$  et  $A(2;2)$  ; 3)  $(C):x^2+y^2=1$  et  $A(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$

### Solution

1) On a :  $x_A^2 + y_A^2 + x_A - 2y_A = 0 + 0 = 0$ , donc  $A \in (C)$

On a  $(C):x^2+y^2+x-2y=0$ , donc  $(C)$  est de centre  $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}) = \Omega(-\frac{1}{2};-\frac{-2}{2}) = \Omega(-\frac{1}{2};1)$

Donc :  $M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

$$\Leftrightarrow (x_\Omega - x_A)(x - x_A) + (y_\Omega - y_A)(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow (-\frac{1}{2} - 0)(x - 0) + (1 - 0)(y - 0) = 0, \text{ ainsi } (T): \frac{1}{2}x - y = 0$$

2) On a :  $(x_A - 2)^2 + (y_A - 4)^2 = (2 - 2)^2 + (2 - 4)^2 = 4$ , donc  $A \in (C)$

On a  $(C):(x-2)^2+(y-4)^2=4$ , donc  $(C)$  est de centre  $\Omega(2;4)$

Donc :  $M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow (x_\Omega - x_A)(x - x_A) + (y_\Omega - y_A)(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow (2 - 2)(x - 2) + (4 - 2)(y - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow 2y - 4 = 0, \text{ d'où finalement } (T): y - 2 = 0$$

3) On a :  $x_A^2 + y_A^2 = (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$  donc  $A \in (C)$

On a  $(C):x^2+y^2=1$ , donc  $(C)$  est de centre  $\Omega(0;0)$

$$M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overline{A\Omega} \cdot \overline{AM} = 0 \Leftrightarrow (x_\Omega - x_A)(x - x_A) + (y_\Omega - y_A)(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow (0 + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) + (0 - \frac{\sqrt{3}}{2})(y - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 = 0, \text{ ainsi } (T): x - \sqrt{3}y + 2 = 0$$

### Application 9

Vérifier que le point  $A$  appartient au cercle  $(C)$  puis déterminer l'équation cartésienne de la tangente au cercle  $(C)$  au point  $A$  dans chacun des cas suivants :

- 1)  $(C): x^2 + y^2 - 2x + 6y - 19 = 0$  et  $A(-1; 2)$  ; 2)  $(C): (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$  et  $A(-5; 7)$  ; 3)  $(C): x^2 + y^2 = 5$  et  $A(-1; 2)$

### Exercice de synthèse 1

Trouver les tangentes au cercle  $(C)$  d'équation  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$  qui sont parallèles à  $(D): 3x - 4y = 0$

### Exercice de synthèse 2

Vérifier que le point  $A(4; -2)$  est à l'extérieur du cercle  $(C)$  d'équation  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$  puis trouver les équations cartésiennes des tangentes au cercle  $(C)$  issues de  $A$

### Exercice de synthèse 3

Soit  $(C_m)$  l'ensemble des points  $M(x;y)$  du plan vérifiant  $x^2 + y^2 - 2mx + (m+2)y - 3m - 4 = 0$  tel que  $m$  est un paramètre réel.

- 1) Montrer que  $(C_m)$  est un cercle et préciser son centre  $\Omega_m$  et son rayon  $R_m$
- 2) Déterminer  $(D)$  l'ensemble des centres  $\Omega_m$  de  $(C_m)$  si ont varié  $m$  dans  $\mathbb{R}$
- 3) Montrer que tous les cercles  $(C_m)$  passent par deux points fixes  $A$  et  $B$
- 4) Montrer que  $(D) \perp (AB)$

## 10) Inégalité de Cauchy-Schwarz / Inégalité triangulaire

### Activité 8 :

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan.

- 1) Montrer que  $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \geq |\vec{u} \cdot \vec{v}|$  et que  $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires})$
- 2) En déduire que  $\forall (x; x'; y; y') \in \mathbb{R}^4 : (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) \geq (xx' + yy')^2$
- 3) Montrer que  $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \geq \|\vec{u} + \vec{v}\|$  et que  $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\| \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires})$
- 4) En déduire que  $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \left| \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \right|$
- 5) Soit  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  des vecteurs du plan ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n \|\vec{u}_k\| \geq \left\| \sum_{k=1}^n \vec{u}_k \right\|$

### A retenir 9 :

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan.

- 1) • On a : **20**  $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \geq |\vec{u} \cdot \vec{v}|$  (cette inégalité est appelée **inégalité de Cauchy-Schwarz**)
  - $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires})$
- 2) • On a : **21**  $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \geq \|\vec{u} + \vec{v}\|$  (cette inégalité est appelée **inégalité triangulaire**)
  - $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\| \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires})$

### Application 10

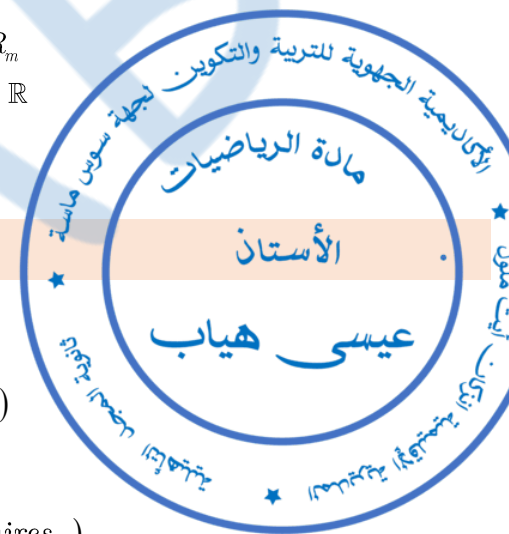
1) Soit  $(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4$ . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Montrer que :

$$a) (1+x^2)(1+y^2) \geq (x+y)^2 \quad ; \quad b) (x^2+y^2)((x-z)^2+(y-t)^2) \geq (xt-yz)^2$$

2) En utilisant l'inégalité triangulaire montrer que :  $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{2}$

### Remarque 3 : Généralisation de l'inégalité triangulaire

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tous vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  du plan on a :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n \|\vec{u}_k\| \geq \left\| \sum_{k=1}^n \vec{u}_k \right\|$





Le plan est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

**Exercice 1**

On pose :  $A(1;-1)$ ,  $B(-1;1)$ ,  $C(\sqrt{3};\sqrt{3})$  et  $D(1;0)$

- 1) Calculer  $AB$  ;  $AC$  ;  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$
- 2) Calculer  $\cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$  et  $\sin(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$
- 3) Déterminer la nature du triangle  $ABC$
- 4) Montrer que l'équation  $x+y=0$  est une équation cartésienne de la droite  $(AB)$
- 5) Calculer  $d(C; (AB))$  la distance du point  $C$  à  $(AB)$
- 6) En déduire l'aire du triangle  $ABC$  par deux méthodes.
- 7) Soit  $(C)$  le cercle passant par  $C$  et de centre  $A$ 
  - a) Vérifier que  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$  est une équation cartésienne de  $(C)$
  - b) Montrer que  $B \in (C)$  puis déterminer l'équation cartésienne de la tangente au cercle  $(C)$  au point  $B$
  - c) Soit  $(\Delta)$  la droite passant par  $D$  et parallèle à  $(AB)$ . Montrer que  $x+y-1=0$  est une équation de  $(\Delta)$
  - d) Etudier l'intersection de  $(\Delta)$  et du cercle  $(C)$

**Exercice 2**

On considère les points :

$A(2;-1)$ ,  $B(-4;-3)$ ,  $C(3;1)$  et  $D(1;-3)$

- 1) Calculer  $AB$  ;  $AC$  ;  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$
- 2) Calculer  $\cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$  et  $\sin(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$
- 3) En déduire la mesure principale de  $\left( \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \right)$
- 4) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(D)$  passant par  $B$  est perpendiculaire à  $(AD)$
- 5) Montrer que  $2\sqrt{5}$  est la distance du point  $A$  à  $(D)$
- 6) Montrer que l'équation cartésienne du cercle  $(C)$  de centre  $A$  et la droite  $(D)$  tangente à  $(C)$  s'écrit :  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$
- 7) Déterminer une représentation paramétrique de  $(C)$
- 8) Déterminer  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M(x;y)$  du plan tel que  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$
- 9) Etudier l'intersection de la droite  $(\Delta)$  d'équation :  $y = x - 3$  avec  $(\Gamma)$
- 10) Résoudre graphiquement :
 
$$\begin{cases} y > x - 3 \\ x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 < 0 \end{cases}$$

**Exercice 3**

On considère les points :  $A(-1;-1)$ ,  $B(7;3)$  et  $C(-2;6)$

- 1) Déterminer les coordonnées de  $I$ ,  $J$ ,  $K$  les milieux des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[CA]$  respectivement
  - 2) Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CA}$
  - 3) Soit  $(D_1)$  la médiatrice du segment  $[AB]$ 
    - a) Donner un point de  $(D_1)$  et un vecteur normal à  $(D_1)$
    - b) En déduire que les équations cartésiennes des médiatrices  $(D_1)$ ,  $(D_2)$  et  $(D_3)$  des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[CA]$  respectivement s'écrit sous la forme :  $(D_1): 2x+y-7=0$  ;  $(D_2): 3x-y-3=0$  ;  $(D_3): x-7y+19=0$
    - c) Montrer que  $(D_1)$ ,  $(D_2)$  et  $(D_3)$  sont sécants en un point  $\Omega$  à préciser
    - d) On suppose que  $\Omega(2;3)$
- Montrer que  $\Omega A = \Omega B = \Omega C = 5$  puis expliquer ce résultat.

**Exercice 4**

On considère les points :  $A(-1;-1)$ ,  $B(7;3)$  et  $C(-2;6)$

- 1) Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CA}$
- 2) Soit  $(D_A)$  la hauteur du triangle  $ABC$  issue de  $A$ 
  - a) Donner un point de  $(D_A)$  et un vecteur normal à  $(D_A)$
  - b) En déduire que les équations cartésiennes des hauteurs  $(D_A)$ ,  $(D_B)$  et  $(D_C)$  du triangle  $ABC$  issue de  $A$ ,  $B$  et  $C$  respectivement s'écrit sous la forme :  $(D_A): 3x-y+2=0$  ;  $(D_B): x-7y+14=0$  ;  $(D_C): 2x+y-2=0$
  - c) Montrer que  $(D_A)$ ,  $(D_B)$  et  $(D_C)$  sont sécants en un point  $H$  à préciser.
  - d) Que représente le point  $H$  pour le triangle  $ABC$  ?
- 3) a) Montrer que l'équation cartésienne de  $(AB)$  peut s'écrire sous la forme  $(AB): x-2y-1=0$ 
  - b) Déterminer les coordonnées du point  $E$  l'intersection des droites  $(D_C)$  et  $(AB)$
  - c) On suppose que  $H(0;2)$  et  $E(1;0)$  calculer l'aire du triangle  $ABC$  par deux méthodes.

**Exercice 5**

Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

- 1) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 < 0 \\ x + 2y - 1 < 0 \\ 5x + 2y + 11 > 0 \end{cases}$$
- 2) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 < 0 \end{cases}$$

**Exercice 6**

Soit le cercle :  $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

- Déterminer le centre  $\Omega$  et le rayon  $R$  de  $(C)$
- Déterminer  $A$  et  $B$  les points d'intersection de  $(C)$  et l'axe des abscisses.
- Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au cercle  $(C)$  en  $A$  et en  $B$
- Ecrire les équations cartésiennes des droites tangentes au cercle  $(C)$  dirigés par le vecteur  $\vec{u}(2;1)$ , puis déterminer leurs points de contact avec le cercle  $(C)$
- Ecrire les équations cartésiennes des tangentes au cercle  $(C)$  passants par  $C(6;1)$

**Exercice 7**

On considère les points  $A(4;-1)$ ,  $B(1;-1)$  et  $C(-2;2)$

- Construire les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et la bissectrice de l'angle  $(\hat{A}BC)$
- Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle  $(\hat{A}BC)$

**Exercice 8**

1) Trouver les tangentes au cercle  $(\Gamma)$  d'équation

$$(\Gamma): (x+1)^2 + y^2 = 4 \text{ qui sont parallèles}$$

$$\text{à } (D): 3x + 4y - 2 = 0$$

2) Trouver les tangentes au cercle  $(C)$  d'équation

$$(C): x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0 \text{ qui sont parallèles}$$

$$\text{à } (D'): 2x + y - 7 = 0$$

3) Trouver les tangentes au cercle  $(E)$  d'équation

$$(E): x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \text{ qui sont perpendiculaire}$$

$$\text{à } (\Delta): x - 2y - 345 = 0$$

**Exercice 9**

Soit  $A$  et  $B$  deux points tel que  $\overline{AB} = 4$

Soit  $H$  un point de  $[AB]$  tel que  $\overline{AB} \cdot \overline{AH} = 1$

Déterminer dans chacun des cas suivants, l'ensemble

$(\Gamma)$  des points  $M$  du plan tel que :

- |  |   |
|--|---|
| 1) $\overline{AB} \cdot \overline{AM} = 1$ | 2) $\overline{AB} \cdot \overline{AM} = -2$ |
| 3) $MA^2 - MB^2 = 3$                       | 4) $MA^2 - MB^2 = -2$                       |
| 5) $MA^2 + MB^2 = 4$                       | 6) $MA = 9MB$                               |
| 7) $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$ | 8) $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = -3$ |

**Exercice 10**

Vérifier que le point  $A(4;-2)$  est à l'extérieur du cercle  $(C): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$  puis trouver les équations cartésiennes des tangentes au cercle  $(C)$  issues de  $A$ .

**Exercice 11**

1) Déterminer l'équation cartésienne d'un cercle tangent à  $(Ox)$  et passant par  $A(-2;1)$  et  $B(5;8)$

2) Déterminer les équations cartésiennes des cercles tangents à  $x+y-10=0$  et passant par  $A(7;1)$  et  $B(-5;5)$

3) Déterminer les équations cartésiennes des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites  $x+2y-9=0$  et  $2x-y+2=0$

4) Déterminer les équations cartésiennes des cercles passant par  $A(-1;5)$  et qui sont tangents aux droites  $3x+4y-35=0$  et  $4x-3y+14=0$

**Exercice 12 : Droite d'Euler**

On considère les points  $A(-3;1)$ ,  $B(1;5)$  et  $C(3;-3)$

1) Déterminer les coordonnées de  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les milieux des segments  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$  respectivement.

2) Déterminer une équation cartésienne de chacune des médiatrices des segments  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[BC]$

3) Montrer que ces médiatrices sont concourantes en un unique point  $\Omega$

4) Déterminer une équation cartésienne de chacune des hauteurs du triangle  $ABC$

5) Montrer que ces hauteurs sont concourantes en un unique point  $H$

6) Déterminer les coordonnées du point  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$  (on pourra utiliser les coordonnées du barycentre)

7) Montrer que  $\overline{\Omega H} = 3\overline{\Omega G}$

8) Déterminer les coordonnées des points  $H_1, H_2$  et  $H_3$  les symétries du point  $H$  par rapport à les milieux des segments  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[BC]$  respectivement

9) Déterminer l'équation cartésienne de  $(C)$  le cercle circonscrit au triangle  $A'B'C'$

10) Vérifier que les points  $H_1, H_2$  et  $H_3$  appartient au cercle  $(C)$  et que le centre de  $(C)$  est le milieu de  $[\Omega H]$ .

**Exercice 13**

Pour  $m \in \mathbb{R}$  on considère la droite  $D_m$  d'équation cartésienne :  $(1-m^2)x + 2my - 4m - 2 = 0$

Montrer qu'il existe un point  $M_0$  équidistant de toutes les droites  $D_m$

**Exercice 14**

Déterminer l'équation du diamètre du cercle :  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$  qui est perpendiculaire à la droite :  $5x + 2y - 13 = 0$

### Exercice 1 (Barycentre)

$ABC$  un triangle et  $K$  le point du plan tel que

$$3\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$$

1) Montrer que  $B = \text{bar}\{(C;1);(K;3)\}$

2) On pose  $J = \text{bar}\{(A;2);(C;1);(K;3)\}$

a) Montrer que  $J = \text{bar}\{(A;2);(B;4)\}$

b) En déduire que  $J = \text{bar}\{(A;1);(B;2)\}$  α

3) On pose  $I = \text{bar}\{(A;2);(C;1)\}$

a) Montrer que  $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

b) Montrer que  $J$  est le milieu de  $[KI]$

4) On pose  $N = \text{bar}\{(C;1);(K;1)\}$

a) Vérifier que  $3\overrightarrow{NC} + 3\overrightarrow{NK} = \vec{0}$

b) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur  $B$  montrer que  $3\overrightarrow{NB} = 4\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}$

c) En déduire que  $N = \text{bar}\{(C;1);(B;2)\}$  et

$$2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN} \quad \boxed{\beta}$$

5) On pose  $L = \text{bar}\{(C;1);(I;1)\}$

Correction



a) Vérifier que  $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$

b) En déduire que  $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

6) a) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur α montrer que

$$2\overrightarrow{NB} = 3\overrightarrow{NJ} - \overrightarrow{NA} \quad \boxed{\delta}$$

b) En déduire de β et δ que  $\overrightarrow{JN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

c) En déduire que le quadrilatère  $ILNJ$  est un parallélogramme.

7) Soit  $O$  le centre du parallélogramme  $ILNJ$

a) Vérifier que  $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$

b) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur  $I, L, N$  et  $J$  montrer que

$$\begin{aligned}
 4\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} &= 6\overrightarrow{OI} & ; & & 3\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OI} &= 6\overrightarrow{OL} & ; \\
 2\overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{OB} &= 6\overrightarrow{ON} & ; & & 2\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} &= 6\overrightarrow{OJ}
 \end{aligned}$$

c) En déduire que  $O$  est le centre de gravité de  $ABC$

### Exercice 2 (Analytique du produit scalaire)

On considère les points :

$$A(0;1), B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right), C(1;0) \text{ et } D(1;-3)$$

1) Montrer que :

$$AC = \sqrt{2} ; AB = \sqrt{2} ; \det(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = -\sqrt{3} ; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$$

2) Calculer  $\cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$  et  $\sin(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$

3) En déduire la mesure principale de l'angle orienté  $\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right)$

4) Déterminer la nature du triangle  $ABC$

5) Calculer l'aire du triangle  $ABC$

6) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(\Delta)$  passant par  $C$  est perpendiculaire à  $(DA)$

7) Montrer que la droite  $(D): y = -4x + 11$  est perpendiculaire à la droite  $(\Delta)$

8) Montrer que  $\sqrt{17}$  est la distance du point  $E(22;1)$  à  $(\Delta)$

9) Déterminer l'équation cartésienne du cercle  $(C_1)$  de représentation paramétrique  $(C_1): \begin{cases} x = 3 + \cos(\theta) \\ y = 2 + \sin(\theta) \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$

10) Déterminer par deux méthodes l'équation cartésienne du cercle  $(C_2)$  du diamètre  $[AC]$

11) Déterminer une représentation paramétrique du cercle  $(C_2)$

12) Déterminer  $(C_3)$  l'ensemble des points  $M(x;y)$  du plan tel que  $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$

13) Résoudre graphiquement le système  $\begin{cases} -x + 4y + 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 12 \leq 0 \end{cases}$

14) Déterminer par deux méthodes l'équation cartésienne de  $(C_4)$  le cercle circonscrit au triangle  $ACD$

### Exercice 3 (Analytique du produit scalaire)

1) Etudier l'intersection de la droite  $(\Delta): x - 2y + 1 = 0$  et du cercle  $(C): x^2 + y^2 - 2 = 0$

2) Soit  $(C_m)$  l'ensemble des points  $M(x;y)$  du plan vérifiant  $x^2 + y^2 - 2mx + 4my - 2m - 2 = 0$  tel que  $m$  est un paramètre réel.

Montrer que  $(C_m)$  est un cercle et préciser son centre  $\Omega_m$  et son rayon  $R_m$

3) Déterminer  $(D)$  l'ensemble des centres  $\Omega_m$  de  $(C_m)$  si ont varié  $m$  dans  $\mathbb{R}$

4) Montrer que tous les cercles  $(C_m)$  passent par deux points fixes  $I$  et  $J$

5) Montrer que  $(D) \perp (IJ)$

6) Soit  $A(x_0; y_0)$  un point du plan, déterminer la position de  $A(x_0; y_0)$  pour laquelle il appartient au moins à un cercle  $(C_m)$ .

7) Vérifier que le point  $B(6;2)$  est à l'extérieur du cercle  $(C_2)$  puis trouver les équations cartésiennes des tangentes au cercle  $(C_2)$  issues de  $B$ .

8) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire montrer que pour tout réel  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  on a :

$$a) \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} \right) \geq 4$$

$$b) \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2} + \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n b_i \right)^2} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

**Note :**

- Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.
- Chaque tentative de tricher vaut un zéro.

**Exercice 1 (8pts)**

On considère un triangle  $ABC$  et les points  $I$ ,  $G$  et  $K$  tels que :

$$I = \text{bar}\{(A;1);(C;1)\}, \quad G = \text{bar}\{(A;3);(B;2);(C;-1)\} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

- 1) Montrer que  $K = \text{bar}\{(A;3);(B;2)\}$  1pt
- 2) a) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur  $I$  montrer que  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$  1pt  
 b) En déduire que  $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$  0.5pt
- 3) Montrer que  $G \in (KC)$  1pt
- 4) Montrer que  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{-1}{4}\overrightarrow{AC}$  puis construire les points  $G$ ,  $I$  et  $K$ . 1.5pt
- 5) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tel que :  $(3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2 = 400$  1pt
- 6) Soit  $H$  le point tel que  $\overrightarrow{BH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}$ . Montrer que  $G = \text{bar}\{(A;1);(H;1);(B;-1)\}$  2pt

**Exercice 2 (12pts)**

On considère les points suivants :  $A(-4;-3)$ ,  $B(2;-1)$ ,  $C(3;1)$  et  $D(1;-3)$

- 1) Montrer que  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = -10$ ;  $BA = 2\sqrt{10}$ ;  $BC = \sqrt{5}$ ;  $\det(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = 10$ . 2pt
- 2) Calculer  $\cos(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$  et  $\sin(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$ , puis déduire la mesure principale de l'angle  $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$  1.5pt
- 3) Calculer l'aire du triangle  $ABC$  0.25pt
- 4) Montrer que l'équation cartésienne de la droite  $(D)$  passant par  $A$  est perpendiculaire à  $(BD)$  est :  $(D): x + 2y + 10 = 0$  1pt
- 5) Montrer que  $2\sqrt{5}$  est la distance du point  $B$  à la droite  $(D)$  1pt
- 6) a) Montrer que  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$  est l'équation cartésienne du cercle  $(C_1)$  de centre  $B$  est tangente à la droite  $(D)$  1pt  
 b) Déterminer une représentation paramétrique du cercle  $(C_1)$  0.75pt
- 7) Déterminer  $(C_2)$  l'ensemble des points  $M(x;y)$  du plan tel que  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$  1pt
- 8) Résoudre graphiquement le système :  $\begin{cases} x + 2y + 10 < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 < 0 \end{cases}$  1pt
- 9) a) Montrer que  $(C_1)$  et  $(C_2)$  sont concourantes aux points  $F(0;-5)$  et  $G(-2;1)$  0.5pt  
 b) Montrer que le quadrilatère  $BGAF$  est un rectangle. 1pt
- 10) Déterminer les coordonnées du point  $H$  le projeté orthogonal du point  $E(-1;-2)$  sur  $(D)$  1pt

**Note :**

- Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.
- Chaque tentative de tricher vaut un zéro.

**Exercice 1 (8pts)**

On considère un triangle  $ABC$  et les points  $I$ ,  $G$  et  $K$  tels que :

$$I = \text{bar}\{(A;1);(B;1)\}, \quad G = \text{bar}\{(A;3);(B;-1);(C;2)\} \quad \text{et} \quad \overline{AK} = \frac{2}{5}\overline{AC}$$

- 1) Montrer que  $K = \text{bar}\{(A;3);(C;2)\}$  1pt
- 2) a) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur  $I$  montrer que  $\overline{CI} = \frac{1}{2}\overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{CB}$  1pt  
 b) En déduire que  $\overline{CI} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{AC}$  0.5pt
- 3) Montrer que  $G \in (KB)$  1pt
- 4) Montrer que  $\overline{AG} = -\frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}$  puis construire les points  $G$ ,  $I$  et  $K$ . 1.5pt
- 5) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tel que :  $(3\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC})^2 = 144$  1pt
- 6) Soit  $H$  le point tel que  $\overline{CH} = -\frac{1}{2}\overline{CI}$ . Montrer que  $G = \text{bar}\{(A;1);(H;1);(C;-1)\}$  2pt

**Exercice 2 (12pts)**

On considère les points suivants :  $A(-4;-2)$ ,  $B(3;2)$ ,  $C(2;0)$  et  $D(1;-2)$

- 1) Montrer que  $\overline{CB} \cdot \overline{CA} = -10$  ;  $CA = 2\sqrt{10}$  ;  $CB = \sqrt{5}$  ;  $\det(\overline{CB}; \overline{CA}) = 10$ . 2pt
- 2) Calculer  $\cos(\overline{CB}; \overline{CA})$  et  $\sin(\overline{CB}; \overline{CA})$ , puis déduire la mesure principale de l'angle  $(\overline{CB}; \overline{CA})$  1.5pt
- 3) Calculer l'aire du triangle  $ABC$  0.25pt
- 4) Montrer que l'équation cartésienne de la droite  $(D)$  passant par  $A$  est perpendiculaire à  $(CD)$  est :  $(D): x + 2y + 8 = 0$  1pt
- 5) Montrer que  $2\sqrt{5}$  est la distance du point  $C$  à la droite  $(D)$  1pt
- 6) a) Montrer que  $x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0$  est l'équation cartésienne du cercle  $(C_1)$  de centre  $C$  est tangente à la droite  $(D)$  1pt  
 b) Déterminer une représentation paramétrique du cercle  $(C_1)$  0.75pt
- 7) Déterminer  $(C_2)$  l'ensemble des points  $M(x;y)$  du plan tel que  $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$  1pt
- 8) Résoudre graphiquement le système :  $\begin{cases} x + 2y + 8 < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 < 0 \end{cases}$  1pt
- 9) a) Montrer que  $(C_1)$  et  $(C_2)$  sont concourantes aux points  $F(0;-4)$  et  $G(-2;2)$  0.5pt  
 b) Montrer que le quadrilatère  $CGAF$  est un rectangle. 1pt
- 10) Déterminer les coordonnées du point  $H$  le projeté orthogonal du point  $E(1;-2)$  sur  $(D)$  1pt

07

# Suites numériques



# 1) Définition d'une suite numérique - suite majorée - minorée - bornée

## Activité

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un ensemble  $I$  par  $f(x) = 8x + \frac{1}{2}$

On suppose que  $I = \mathbb{N}$

Calculer si possible  $f(0)$ ,  $f(2)$ ,  $f(\frac{1}{8})$ ,  $f(-3)$  et  $f(n)$  (avec  $n \in \mathbb{N}$ )

## Définition 1

- On appelle suite numérique  $u$  toute fonction définie sur  $\mathbb{N}$  ou une partie de  $\mathbb{N}$ .
- L'image d'un entier naturel  $n$  par la suite numérique  $u$  est notée  $u_n$ .
- La notation  $u_n$  se lit \*  $u$  indice  $n$  \*
- Le nombre  $u_n$  s'appelle le terme général de la suite numérique  $u$ .

## Remarque 1

Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$  et  $u$  une suite numérique définie sur  $I$

- La suite  $u$  est parfois notée  $(u_n)_{n \in I}$
- Le nombre  $u_n$  s'appelle aussi le terme du rang  $n$
- Il ne faut pas confondre entre  $u_{n+1}$  et  $u_n + 1$  car :  
 $u_{n+1}$  est le terme du rang  $n+1$   
 $u_n + 1$  est la somme du terme du rang  $n$  avec 1.
- Si  $I = \mathbb{N}$  la suite  $u$  est parfois notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)_{n \geq 0}$  ou tout simplement  $(u_n)$
- Si  $I = \mathbb{N}^*$  la suite  $u$  est parfois notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ou  $(u_n)_{n \geq 1}$

## Exemple 1

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \frac{2n+3}{5n+1}$

- 1) Calculer  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$
- 2) Déterminer  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$
- 3) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq 3$

## Exemple 2

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n}$

- 1) En remarquant que  $u_1 = u_{0+1}$  et  $u_2 = u_{1+1}$ , calculer  $u_1$  et  $u_2$
- 2) Calculer  $u_3$  et  $u_4$
- 3) Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq \frac{3}{2}$

## Remarque 2

Une suite  $(u_n)_{n \in I}$  peut être définie :

- Formule explicite : À partir d'une fonction  $f$  de la variable  $n$  :  $u_n = f(n)$ .
- Formule récurrente : À partir d'une relation de récurrence :  $(u_n)_{n \in I}$  est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

## Définition 2

- On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est majorée s'il existe un réel  $M$  tel que  $(\forall n \in I) u_n \leq M$
- On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est minorée s'il existe un réel  $m$  tel que  $(\forall n \in I) u_n \geq m$
- On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

## Exemple 3

- 1) La suite de l'exemple 1 est majorée par 3 car on a montré que  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq 3$
- 2) La suite de l'exemple 2 est minorée par  $\frac{3}{2}$  car on a montré que  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq \frac{3}{2}$



## 2) Monotonie d'une suite numérique

### Définition 3

Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique :

- $(u_n)_{n \in I}$  est croissante si  $\forall n; m \in I \quad n > m \Rightarrow u_n \geq u_m$
- $(u_n)_{n \in I}$  est décroissante si  $\forall n; m \in I \quad n > m \Rightarrow u_n \leq u_m$
- $(u_n)_{n \in I}$  est constante si  $\forall n; m \in I \quad n > m \Rightarrow u_n = u_m$

### Remarque 3

- Si  $(u_n)_{n \geq p}$  est une suite croissante alors  $\forall n \geq p \quad u_n \geq u_p$  (C-à-d est  $(u_n)_{n \geq p}$  minorée par son premier terme)
- Si  $(u_n)_{n \geq p}$  est une suite décroissante alors  $\forall n \geq p \quad u_n \leq u_p$  (C-à-d est  $(u_n)_{n \geq p}$  majorée par son premier terme)

### Propriété 1

- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite croissante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} \geq u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite décroissante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} \leq u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite constante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} = u_n$ .

### Remarque 4

Pour étudier la monotonie d'une suite  $(u_n)_{n \in I}$ , on utilise l'une des méthodes suivantes :

**Méthode 1 :** On détermine le signe de  $u_{n+1} - u_n$  pour tout  $n \in I$

**Méthode 2 :** Si  $(u_n)_{n \in I}$  est strictement positif (c-à-d  $(\forall n \in I) \quad u_n > 0$ ) on

compare  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  avec 1 pour tout  $n \in I$

### Exemple 4

- 1) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 3n + 2$
- 2) Etudier la monotonie de la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  définie par  $v_n = \frac{2n-3}{n}$

### Exemple 5

Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_0 = \frac{1}{5}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = v_n^2 + \frac{3}{4}v_n$

- 1) Calculer  $v_1$  et  $v_2$
- 2) Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < v_n < \frac{1}{4}$
- 3) Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} - v_n = v_n \left( v_n - \frac{1}{4} \right)$
- 4) En déduire la monotonie de la suite  $(v_n)$



## 3) Suite arithmétique

### Définition 4

Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique définie sur  $I$  ( $I \subset \mathbb{N}$ )

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est arithmétique s'il existe un nombre réel  $r$  tel que  $(\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n = r$ .

Le nombre  $r$  est appelé raison de la suite  $(u_n)_{n \in I}$ .

**Exemple 6 :** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = -5n + 4$ . Montrer que  $(u_n)$  est une suite arithmétique.

### Le terme général d'une suite arithmétique

#### Propriété 2

Si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite arithmétique de raison  $r$  alors pour tout  $n, p \in I$  on a  $u_n = u_p + (n-p)r$

#### Cas particulier

- Si  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_n = u_0 + nr$
- Si  $(u_n)_{n \geq 1}$  est une suite arithmétique de raison  $r$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $u_n = u_1 + (n-1)r$

### Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

#### Propriété 3

Si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite arithmétique et  $p \in I$  alors pour tout  $n \geq p$  on a :  $\sum_{k=p}^n u_k = \frac{u_p + u_n}{2} \times (n-p+1)$

### Exemple 7

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = -5n + 4$  (la suite numérique de l'exemple 6). Calculer la somme  $\sum_{k=0}^8 u_k$

### Exemple 8

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 5$  et pour tout  $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}$

- 1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- 2) On pose  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ 
  - a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique et déterminer sa raison.
  - b) Déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$
  - c) Déterminer  $u_n$  en fonction de  $v_n$  puis déduire  $u_n$  en fonction de  $n$
  - d) Calculer en fonction de  $n$  la somme :  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$

### La propriété caractéristique d'une suite arithmétique

#### Propriété 4

$(u_n)_{n \in I}$  est une suite arithmétique  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$ .

**Démonstration :** Dans la classe

#### Exemple 9

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique.

- 1) Vérifier que  $u_1 + u_3 = 2u_2$  ;
- 2) On suppose que  $u_1 + u_2 + u_3 = 15$  calculer  $u_2$

### 4) Suite géométrique

#### Définition 5

Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique définie sur  $I$  ( $I \subset \mathbb{N}$ )

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est géométrique s'il existe un nombre réel  $q$  tel que  $(\forall n \in I) u_{n+1} = qu_n$ .

Le nombre  $q$  est appelé raison de la suite  $(u_n)_{n \in I}$ .

#### Exemple 10

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2^n$ . Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique.

### Le terme général d'une suite géométrique

#### Propriété 5

Si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite géométrique de raison  $q$  alors pour tout  $n, p \in I$  on a  $u_n = u_p \times q^{n-p}$

#### Cas particulier

- Si  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_n = u_0 \times q^n$
- Si  $(u_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique de raison  $q$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

### Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

#### Propriété 6

Si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  et  $p \in I$  alors pour tout  $n \geq p$  on a :  $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$

#### Exemple 11

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n - 1 \end{cases}$  et  $v_n = u_n + 5$

- 1) Calculer  $u_1, u_2, v_0$  et  $v_1$
- 2) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) v_{n+1} = \frac{4}{5}(u_n + 5)$  puis déduire que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{4}{5}$
- 3) Déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$





4) En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$

5) Montrer que  $\sum_{k=0}^{12} v_k = 30 \left( 1 - \left( \frac{4}{5} \right)^{13} \right)$

6) Montrer que  $\sum_{k=0}^{12} u_k = -5 \left( 7 + 6 \left( \frac{4}{5} \right)^{13} \right)$

**La propriété caractéristique d'une suite géométrique**

**Propriété 7**

$(u_n)_{n \in I}$  est une suite géométrique  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2}$ .

**Démonstration :** Dans la classe

**Exemple 12**

Soient  $a, b$  et  $c$  dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique tels que  $a+b+c=7$  et  $abc=8$   
Déterminer  $a, b$  et  $c$

**Résumé 7 : Suites numériques**

- Une suite numérique est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$  ou une partie de  $\mathbb{N}$ .
- Une suite numérique  $(u_n)_{n \in I}$  peut être définie :
  - Formule explicite : À partir d'une fonction  $f$  de la variable  $n$  :  $u_n = f(n)$ .
  - Formule récurrente : À partir d'une relation de récurrence :  $(u_n)_{n \in I}$  est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

- La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est majorée par  $M \Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_n \leq M$
- La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est minorée par  $m \Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_n \geq m$
- La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite croissante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$ .
- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite décroissante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$ .
- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite constante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} = u_n$ .

	Arithmétique	Géométrique
Comment montrer qu'une suite numérique $(v_n)_{n \in I}$ est une suite :	$v_{n+1} - v_n = r$	$v_{n+1} = qv_n$
Comment déterminer $v_n$ en fonction de $n$ si $(v_n)_{n \in I}$ est une suite :	$v_n = v_p + (n-p)r$ ( $p=0$ ou $p=1$ ou.....)	$v_n = v_p \times q^{n-p}$ ( $p=0$ ou $p=1$ ou.....)
Comment calculer la somme des termes consécutifs de la suite $(v_n)_{n \in I}$ si $(v_n)_{n \in I}$ est une suite :	$\sum_{k=p}^n u_k = \frac{u_p + u_n}{2} \times (n-p+1)$	$\sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
Si $a, b$ et $c$ dans cet ordre sont des termes consécutifs d'une suite	alors $b = \frac{a+c}{2}$	alors $b^2 = a \times c$

**5) Exercices de synthèse**

**Exercice de synthèse 1**

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 4$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$ .

- 1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$
- 2) a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n + 2)}{u_n + 3}$ .
- b) En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , Calculer en fonction de  $n$  la somme  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$

d) En déduire en fonction de  $n$  la somme  $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3}{u_k + 2}$

### Exercice de synthèse 2

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{3}{2}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \frac{2}{3-u_n}$ .

1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n < 2$

2) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c) Calculer la somme  $T_n = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{u_k - 2}$

### Exercice de synthèse 3

On considère les suites numériques  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :  $a_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$  et  $b_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) Montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante.

2) Montrer que la suite  $(b_n)$  est décroissante.

3) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n < b_n$ .

4) En déduire que  $(a_n)$  est majorée et que  $(b_n)$  est minorée.

### Exercice de synthèse 4

On considère les suites numériques  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  définies par :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$  et  $v_n = \frac{u_n}{n}$

1) Vérifier que  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$  et déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$

2) Vérifier que  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \frac{1}{(n+1)^2 + k} - \frac{1}{n^2 + k} < 0$  et déduire que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est décroissante.

### Exercice de synthèse 5

On considère la suite numérique  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_1 = 1, u_2 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

1) Calculer  $u_3, u_4$  et  $v_1$

2) Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad v_{n+1} = 6 - \frac{8}{v_n}$

3) Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 < v_n < 4$

4) Montrer que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est croissante.

5) Soit  $(t_n)_{n \geq 1}$  la suite numérique définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad t_n = \frac{v_n - 4}{v_n - 2}$

a) Montrer que  $(t_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$

b) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad v_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$

6) Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = 2^{n-2}(1+2^{n-1})$



Exercice 1

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 2$  et pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}.$$

- 1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
- 2) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 1$
- 3) a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$ .  
b) En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$ .  
c) En déduire que  $(u_n)$  est majorée par 2.
- 4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ .  
a) Calculer  $v_0$  et  $v_1$ .  
b) Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.  
c) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
d) Montrer que :  $v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{(n+8)(n+1)}{8}$ .

Exercice 2

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 2$  et pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{u_n + 1}.$$

- 1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
- 2) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 < u_n < 3$ .
- 3) a) Montrer que :  
 $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n + 1}$ .  
b) En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
- 4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$ .  
a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.  
b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
c) Montrer que :  $\sum_{k=2}^n v_k = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$

Exercice 3

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 0$  et pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}.$$

- 1) Montrer que  $u_1 = -\frac{1}{3}$  et  $u_2 = -\frac{1}{2}$ .
- 2) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > -1$ .
- 3) a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n + 1)^2}{u_n + 3}$ .  
b) En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

$$4) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on pose : } v_n = \frac{1}{u_n + 1}.$$

- a) Calculer  $v_0$  puis montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{2}$
- b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$
- c) Montrer que :  $\sum_{k=4}^n v_k = \frac{(n+8)(n-3)}{4}$ .

Exercice 4

Soit  $(u_n)$  la suite tel que :  $u_0 = -\frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}$

- 1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 0$
- 2) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$
- 3) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$   
a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.  
b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
c) Calculer en fonction de  $n$  la somme :  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$

Exercice 5

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

- 1) Supposons que  $u_0 = -6$  et  $r = 4$   
Calculer  $u_6$  et  $u_{12}$
- 2) Supposons que  $u_1 = 5$  et  $u_{13} = 7$  Calculer  $r$
- 3) Supposons que  $u_{20} = 11$  et  $r = 6$   
Calculer  $u_0$  puis exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

Exercice 6

Soit  $(v_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ .

- 1) Supposons que  $v_0 = 32$  et  $q = \frac{1}{2}$  Calculer  $v_4$  et  $v_6$
- 2) Supposons que  $v_7 = \frac{1}{18}$  et  $v_5 = 3$  Calculer  $q$
- 3) Supposons que  $v_2 = -\frac{1}{81}$  et  $q = 3$   
Calculer  $v_0$  puis exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

Exercice 7

$a, b$  et  $c$  dans cet ordre sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique telle que  $a + b + c = 7$  et  $abc = 8$   
Déterminer  $a, b$  et  $c$

Exercice 8

$a, b$  et  $c$  dans cet ordre sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison  $r$  telle que :  
 $a + b + c = 21$  et  $2a + b - c = 29$   
Déterminer  $a, b, c$  et  $r$

## Exercice 9

Soit  $(u_n)_{n \geq 2}$  une suite arithmétique de raison  $r = -2$  tel que  $u_0 = 2$  et  $u_p = -18$

- Déterminer l'entier  $p$
- Calculer en fonction de  $n$  la somme  $\sum_{k=2}^n u_k$

## Exercice 10

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$  tels que  $u_2 = 23$  et  $u_p = 5$

Déterminer l'entier  $p$  puis calculer la somme  $\sum_{k=10}^{20} u_k$

## Exercice 11

Montrer sans utiliser la récurrence que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

## Exercice 12

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 15 + 21 + 27 + \dots + 603$$

$$S_2 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \dots + \frac{19}{3} + 7$$

## Exercice 13

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 0$  et pour

tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ .

- Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n \leq 1$
- Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique.

Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$

4) Trouver un entier  $N$  tel que pour tout  $n > N$  :  $u_n > 0,99$

## Exercice 14

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite numérique définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

- Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est majorée par 1.
- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est minorée par  $\frac{1}{2}$ .

## Exercice 15 : Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci noté  $(F_n)_{n \geq 1}$  débute de la manière suivante :

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; 610....

" On place dans un enclos un couple (mâle et femelle) de lapereaux. Chaque couple âgé de deux mois donne naissance chaque mois à un nouveau couple (mâle et femelle). Si aucun lapin ne meurt.

La suite de Fibonacci donne le nombre  $F_n$  de lapins vivant au bout de  $n$  mois.

Elle vérifie la relation  $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$

1) Calculer  $F_{16}$ .

2) Montrer que l'équation :  $x^2 - x - 1 = 0$  possède une unique solution positive que nous noterons  $\varphi$ . Le nombre  $\varphi$  est appelé le nombre d'or.

3) Montrer les égalités :  $\varphi + 1 = \varphi^2$ ,  $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ ,

$$1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi}{1 + \varphi^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

4) Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$V_n = \alpha \times \varphi^n + \beta \times \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n.$$

a) Vérifier que la suite  $(V_n)_{n \geq 1}$  satisfait à la relation :  $V_{n+1} + V_n = V_{n+2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  de sorte que  $v_1 = v_2 = 1$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V_n = F_n$  désigne le nombre de lapins au bout de  $n$  mois.

c) Vérifier que  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$  et en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) F_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

d) A l'aide d'une calculatrice retrouver  $F_{16}$ .

5) On considère la suite  $(W_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $W_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

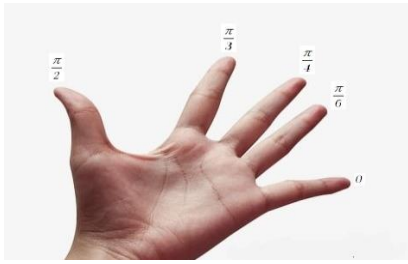
a) Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) W_n = \frac{(-1)^{n+1} \times \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n+1} - \varphi}{(-1)^n \times \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n} - 1}$ .

b) En déduire :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) W_n = \frac{(-1)^n \varphi + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n+1}}{(-1)^n + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n}}$ .



# 1) Rappel

## Lignes trigonométriques usuelles :



Soit  $\alpha \in \left\{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{\text{Nombre de doigts au dessus de } \alpha}}{2}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{\text{Nombre de doigts en dessous de } \alpha}}{2}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{\text{Nombre de doigts en dessous de } \alpha}}{\sqrt{\text{Nombre de doigts au dessus de } \alpha}}$$

## Les relations entre les lignes trigonométriques :

	$x + 2k\pi$	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$\sin$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$
$\cos$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$
$\tan$	$\tan(x)$	$-\tan(x)$	$-\tan(x)$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\tan(x)}$	$-\frac{1}{\tan(x)}$

### Exercice de révision 1

1) Calculer :  $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \tan\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

2) Calculer :  $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right), \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right), \tan\left(\frac{7\pi}{6}\right), \tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

### Exercice de révision 2

1) Déterminer l'abscisse curviligne principale des points suivants :  $A\left(-\frac{123\pi}{12}\right)$  et  $B\left(\frac{39\pi}{4}\right)$

2) Placer les points A et B dans le même cercle trigonométrique.

3) Déterminer la mesure principale des angles  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA})$  et  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$

### Exercice de révision 3

1) Calculer  $\cos(x)$  sachant que  $\sin(x) = -\frac{1}{5}$  et  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$

2) Calculer  $\tan(y)$  sachant que  $\cos(y) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$  et  $y \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

3) Soit  $\alpha$  un réel tel que  $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  et  $\tan(\alpha) = \sqrt{2}$ . Calculer  $\cos(\alpha)$  et  $\sin(\alpha)$

### Exercice de révision 4

Ecrire, en fonction de  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ , les expressions suivantes :

$$A = 4\sin(x + 7\pi) - 2\sin(13\pi - x) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$$

## Parité des fonctions $x \mapsto \cos(x)$ , $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \tan(x)$ :

Fonction	Ensemble de définition	Parité	Relation mathématique
$x \mapsto \cos(x)$	$D_{\cos} = \mathbb{R}$	Paire	$\cos(-x) = \cos(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$D_{\sin} = \mathbb{R}$	Impaire	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$	Impaire	$\tan(-x) = -\tan(x)$

## Tableau de signe de $\cos(x)$ , $\sin(x)$ et $\tan(x)$ sur $[-\pi; \pi]$ :

X	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin(X)$	○ —	—	○ +	+	○
$\cos(X)$	—	○	+ —	+	○ —
$\tan(X)$	○ +		○ —	+ —	○

## Propriétés trigonométriques

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$



$$B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(51\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(29\pi - x)$$

$$C = \cos^2(x + 111\pi) + \sin^2(9\pi - x) + \cos^2\left(x - \frac{9\pi}{2}\right)$$

### Exercice de révision 5

On pose :  $A = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{6\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{9\pi}{10}\right)$  ;

$$B = \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{9\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

1) Montrer que  $A = 2$  (on pourra remarquer que  $\frac{6\pi}{10} = \pi - \frac{4\pi}{10}$ ,  $\frac{9\pi}{10} = \pi - \frac{\pi}{10}$  et  $\frac{4\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$ )

2) Montrer que  $B = 3$

## 2) Transformation de $\cos(a-b)$ et ses résultats

### Activité 1

1) Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

$$(P_1) (\forall x; y \in \mathbb{R}) \cos(x+y) = \cos(x) + \cos(y)$$

$$(P_2) (\forall x; y \in \mathbb{R}) \sin(x+y) = \sin(x) + \sin(y)$$

2) On considère un repère orthonormé directe  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  et  $(U)$  le cercle trigonométrique du centre  $O$ . Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels.

On considère les points  $A$  et  $B$  tels que :  $(\vec{i}; \overrightarrow{OA}) \equiv a[2\pi]$  et  $(\vec{i}; \overrightarrow{OB}) \equiv b[2\pi]$

a) Montrer que  $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv a - b[2\pi]$  et en déduire que :  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \cos(a-b)$

b) Vérifier que  $\overrightarrow{OA} = \cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \cos(b)\vec{i} + \sin(b)\vec{j}$

c) En déduire que  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

d) En déduire que  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  (en pourra remarquer que  $a+b = a - (-b)$ )

e) En déduire que  $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$  (en pourra remarquer que  $2a = a + a$ )

f) Sachant que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  et  $(\forall x \in \mathbb{R}) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Vérifier que  $\sin(a-b) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right)$  et déduire que  $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

g) En déduire que  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

h) En déduire que  $\sin(2a) = 2\cos a \sin a$

### A retenir 1

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. On a les formules suivantes :

$$\boxed{1} \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\boxed{2} \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\boxed{3} \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\boxed{4} \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

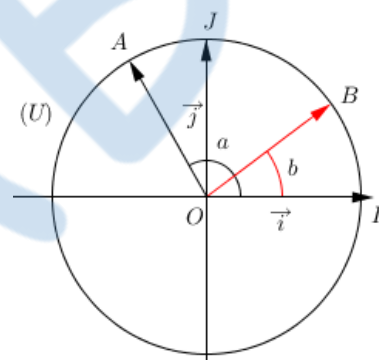
$$\boxed{5} \quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \quad ; \quad \boxed{6} \quad \sin(2a) = 2\cos a \sin a$$

### Exemple 1

1) a) Vérifier que  $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

b) Calculer  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ;  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ;  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ;  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

2) a) En remarquant que  $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$ , montrer que  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$



b) En déduire que  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) Montrer par deux méthodes que  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

d) Vérifier par deux méthodes que  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

### 3) Transformation de $\tan(a-b)$ et ses résultats – transformation de $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$

#### Activité 2

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels.

1) Montrer que :  $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$  et  $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

2) On suppose que  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ;  $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ;  $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ;  $a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

a) Simplifier l'expression suivant :  $\frac{\frac{\cos(a) + \cos(b)}{\sin(a)} \times \frac{\cos(b)}{\sin(b)}}{1 - \frac{\cos(a)}{\sin(a)} \times \frac{\cos(b)}{\sin(b)}}$  et déduire que  $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

b) En déduire que si  $2a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  alors :  $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

c) Montrer que  $\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

#### A retenir 2 :

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. On a les formules suivantes :

$\boxed{7}$   $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$  ;  $\boxed{8}$   $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

Si  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ;  $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ;  $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ;  $a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  pour tous  $k \in \mathbb{Z}$ , alors :

$\boxed{9}$   $\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$  ;  $\boxed{10}$   $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

Si  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  et  $2a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  pour tous  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $\boxed{11}$   $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

#### Exemple 2

1) Sachant que  $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$  calculer  $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  et  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

2) a) Soit  $x$  un nombre réel, montrer que :  $\boxed{7}$   $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2}$  et  $\boxed{8}$   $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{2}$

b) Soit  $x$  un nombre réel, montrer par deux méthodes que :  $1 + \cos(x) + 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2$

### 4) Transformation des produits en sommes et inversement

#### Activité 3

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels.

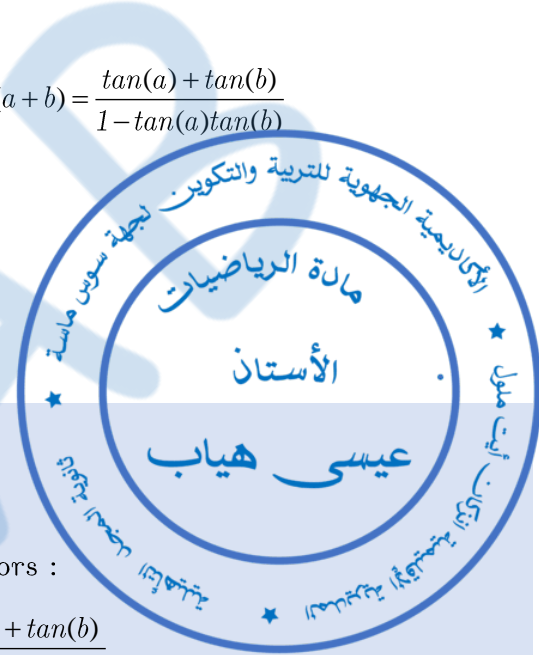
1) Vérifier que :  $\frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] = \cos(a)\cos(b)$

2) Montrer que  $\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

3) Montrer que  $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

4) Montrer que  $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

5) On pose  $p = a+b$  et  $q = a-b$



a) Vérifier que  $a = \frac{p+q}{2}$  et  $b = \frac{p-q}{2}$

b) En déduire que :  $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$  ;  $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$  ;  
 $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$  ;  $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

### A retenir 3

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. On a les formules suivantes :

$\boxed{12} \begin{cases} \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)] \\ \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)] \end{cases}$	$\boxed{13} \begin{cases} \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{cases}$
--	--

### Exemple 3

1) Ecrire sous forme de somme les produits suivants :

$A(x) = \cos(x)\cos(5x)$  ,  $B(x) = \cos(3x)\sin(4x)$  ,  $C(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  ,  $D(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

2) Transformer en produits les expressions suivantes :

$A(x) = \cos(x) - \cos(3x)$  ,  $B(x) = \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$  ,  $C(x) = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$

3) Montrer que :  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

### 5) Transformation de l'expression $a \times \cos(x) + b \times \sin(x)$

#### Activité 4

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $(a;b) \neq (0;0)$

Pour tout réel  $x$  on pose :  $A(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

1) Vérifier que  $\sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \sin(x) \right) = A(x)$

2) Vérifier que  $\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$

3) En déduire qu'il existe un nombre  $\alpha$  tel que  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos(\alpha)$  et  $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin(\alpha)$

4) En déduire que :  $a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$

### A retenir 4

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $(a;b) \neq (0;0)$ . Alors il existe un réel  $\alpha$  tel que :

$$\boxed{14} \begin{cases} a\cos(x) + b\sin(x) = r \cos(x - \alpha) \\ \text{avec } r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos(\alpha) = \frac{a}{r} \text{ et } \sin(\alpha) = \frac{b}{r} \end{cases}$$

### Exemple 4

1) Ecrire sous la forme  $r\cos(x - \alpha)$  les expressions suivantes :  $A(x) = \cos(x) + \sin(x)$  ;  $B(x) = \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)$

2) Montrer que :

a)  $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$  ; b)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

### Remarque

$$\begin{cases} a\cos(x) + b\sin(x) = r \sin(x + \beta) \\ \text{avec } r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos(\beta) = \frac{b}{r} \text{ et } \sin(\beta) = \frac{a}{r} \end{cases}$$



## 6) Equations et inéquations trigonométriques

### A retenir 5

(Les équations de base) : 15

$$\begin{cases} \cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi & /k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi & /k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi & /k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi & /k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \tan(x) = \tan(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi & /k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

16 Pour résoudre une inéquation de base dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation de base qui lui associé.

### Exemple 5

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :  $(E_1): \cos(x) = \frac{1}{2}$  ;  $(E_2): \sin(x) = \frac{1}{2}$  ;  $(E_3): \tan(x) = 1$
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :  $(E_4): \cos(x) = -\frac{1}{2}$  ;  $(E_5): \sin(x) = -\frac{1}{2}$  ;  $(E_6): \tan(x) = -1$

### Exemple 6

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans l'intervalle  $]-\pi; \pi]$  l'équation suivante :  $(E_7): \sin(3x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

### Exemple 7

Résoudre dans  $I = ]-\pi; \pi]$  les inéquations suivantes :

$$(E_8): \cos(x) > -\frac{\sqrt{3}}{2} ; (E_9): \sin(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} ; (E_{10}): \tan(x) \geq -\sqrt{3}$$

$$(E_{11}): (2\sin(x) + \sqrt{2})(2\cos(x) + 1) < 0 ; (E_{12}): -1 \leq \tan(x) \leq 1$$

### Exemple 8

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[0; 2\pi]$  l'équation suivante :  $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$
- 2) Résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'inéquation suivante :  $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) < 1$

## Résumé 8 : Trigonométrie

1  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

2  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

3  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

4  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

5  $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

6  $\sin(2a) = 2\cos a \sin a$

7  $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$  ; 8  $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$

9  $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

10  $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$  ; 11  $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

14  $\begin{cases} a\cos(x) + b\sin(x) = r\cos(x - \alpha) \\ \text{avec } r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos(\alpha) = \frac{a}{r} \text{ et } \sin(\alpha) = \frac{b}{r} \end{cases}$

12  $\begin{cases} \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)] \\ \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)] \end{cases}$

13  $\begin{cases} \cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) \\ \cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2}) \\ \sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) \\ \sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2}) \end{cases}$

15  $\begin{cases} \cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi & /k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi & /k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi & /k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi & /k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \tan(x) = \tan(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi & /k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

16 Pour résoudre une inéquation de base dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation de base qui lui associé.



**Exercice 1**1) Soit  $x$  un nombre réel, montrer par deux méthodes :

a)  $\cos(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3})$

b)  $\sin(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \sin(x - \frac{\pi}{3})$

2) Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tel que

$$0 < a < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < b < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \sin a = \cos b = \frac{1}{3}$$

a) Calculer  $\cos a$  et  $\sin b$ b) Calculer  $\sin(a+b)$  et en déduire la valeur de  $a+b$ **Exercice 2**1) Soit  $x$  un nombre réel tels que :

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{et} \quad x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Montrer que :  $\tan(\frac{\pi}{4} - x) \times \tan(\frac{\pi}{4} + x) = 1$

2) Soit  $x$  un nombre réel tels que :  $x \neq k\pi$ 

Montrer que :  $\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \tan(\frac{x}{2})$

**Exercice 3**

1) Ecrire sous forme de somme les produits suivants :

$$A(x) = \cos(3x)\sin(x), \quad B(x) = \sin(2x)\sin(x),$$

$$C(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})\cos(2x),$$

$$D(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})\cos(x - \frac{\pi}{3})$$

2) Transformer en produits les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos(7x) - \cos(3x)$$

$$B(x) = \cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)$$

3) Montrer que :

$$\sin(\frac{\pi}{12}) + \sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}}{2}; \quad \sin(\frac{\pi}{12}) \times \sin(\frac{7\pi}{12}) = \frac{1}{4}$$

**Exercice 4**1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $I$  les équations suivantes :

$$(E_1) \quad 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}; \quad I = [0; 2\pi[$$

$$(E_2) \quad \cos(3x) + \sin(3x) = -1; \quad I = [-\pi; \pi[$$

$$(E_3) \quad \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 0; \quad I = \mathbb{R}$$

$$(E_4) \quad \tan^2(x) - \sqrt{2}\tan(x) + \sqrt{2} - 1 = 0; \quad I = [-5\pi; -3\pi[$$

2) Résoudre dans  $I$  les inéquations suivantes :

$$(E_1) \quad 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) \geq \sqrt{3}; \quad I = [0; 2\pi[$$

$$(E_2) \quad \cos(3x) + \sin(3x) \leq -1; \quad I = [-\pi; \pi[$$

$$(E_3) \quad \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) > 0; \quad I = \mathbb{R}$$

$$(E_4) \quad \tan^2(x) - \sqrt{2}\tan(x) + \sqrt{2} - 1 < 0; \quad I = [-5\pi; -3\pi[$$

**Exercice 5**

On considère l'expression

$$A(x) = \sin^2(\frac{\pi}{8} + x) + \cos^2(\frac{\pi}{8} - x) - 1$$

1) Calculer  $A(\frac{\pi}{8})$  et  $A(\frac{\pi}{4})$ 2) Montrer que  $2\sin^2(\frac{\pi}{8} + x) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(2x) - \sin(2x))$ 

Et  $2\cos^2(\frac{\pi}{8} + x) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(2x) + \sin(2x))$

3) Déduire que  $A(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)$ 4) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $A(x) = \frac{1}{2}$ **Exercice 6**Soit  $x, y \in \mathbb{R}$  montrer que :

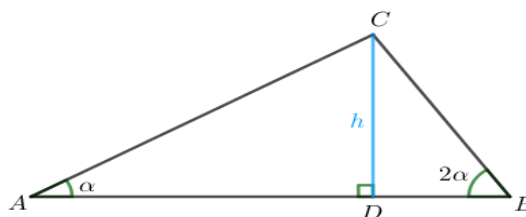
1)  $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$  et

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$$

2)  $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{\tan(x) - \tan(y)}$

3)  $\tan(x) - \tan(y) = \frac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$

4)  $\frac{\cos(x+y)\cos(x-y)}{\cos^2(x)\cos^2(y)} = \frac{\tan^2 x - \tan^2 y}{\tan(x+y)\tan(x-y)}$

**Exercice 7**Soit  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{4}[$ . On considère la figure suivante :1) Montrer que  $\tan(\alpha) \notin \{0; 1; \sqrt{3}\}$ 

2) Montrer que  $\frac{1}{\tan(2\alpha)} + \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{AB}{h}$

3) En déduire que :  $h = 2AB \times \frac{\tan(\alpha)}{3 - \tan^2(\alpha)}$

**Exercice 8**Soient  $A, B$  et  $C$  les mesures des angles d'un triangle ABC

$$(A + B + C = \pi)$$

Montrer que :

1)  $\sin(A) + \sin(B) + \sin(C) = 4\cos(\frac{A}{2})\cos(\frac{B}{2})\cos(\frac{C}{2})$

2)  $\tan(\frac{A}{2})\tan(\frac{B}{2}) + \tan(\frac{B}{2})\tan(\frac{C}{2}) + \tan(\frac{C}{2})\tan(\frac{A}{2}) = 1$

**Exercice 9**

1) Soit  $x$  un nombre réel, on pose

$$A(x) = 2\sin(2x) + 2\sin(x) - \sqrt{3}(2\cos(x) + 1)$$

2) Montrer que :

$$A(x) = (2\sin(x) - \sqrt{3})(2\cos(x) + 1)$$

3) Résoudre dans  $]-\pi; \pi[$  et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique l'équation  $A(x) = 0$

4) Etudier le signe de  $A(x)$  sur l'intervalle :  $]-\pi; \pi[$

**Exercice 10**

1) Soit  $x$  un nombre réel, on pose

$$A(x) = 2\cos^3(x) - \cos(x) + 2\sin(x) - 2\sin^3(x)$$

2) Montrer que :

$$\sin(x) - \sin^3(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)\cos(x)$$

$$\text{et } 2\cos^3(x) - \cos(x) = \cos(2x)\cos(x)$$

3) En déduire que  $A(x) = \sqrt{2}\cos(x) \times \cos(2x - \frac{\pi}{4})$

4) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $A(x) = 0$

5) Résoudre dans  $[0; \pi]$  l'inéquation  $A(x) \geq 0$

**Exercice 11**

1) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos(2x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{4})\sin(x + \frac{\pi}{4})$$

2) En déduire dans  $\mathbb{R}$  les solutions de l'équation

$$4\cos(x + \frac{\pi}{4})\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$$

3) Soit  $x$  un nombre réel, on pose

$$A(x) = 4\cos^3(x) + 8\cos^2(x) - 3\cos(x) - 6$$

a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad A(x) = (2 + \cos(x))(4\cos^2(x) - 3)$$

b) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 2 + \cos(x) > 0$

c) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $A(x) = 0$

**Exercice 12**

1) a) Vérifier que  $8 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$2x^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})x + \sqrt{3} = 0$$

2) Soit  $x$  un nombre réel, on pose

$$A(x) = 2\sin(2x) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\cos(x) - \sin(x)) - (2 + \sqrt{3})$$

a) Simplifier l'expression  $(\cos(x) - \sin(x))^2$  et déduire  $\sin(2x)$  en fonction de  $\cos(x) - \sin(x)$

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $A(x) = 0$

3) a) Montrer que :

$$A(x) = -16\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{24})\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{24})\cos(\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{24})\cos(\frac{x}{2} + \frac{7\pi}{24})$$

b) Etudier le signe de  $A(x)$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]$

**Exercice 13**

Soit  $x$  un nombre réel

1) Calculer  $\cos(3x)$  en fonction de  $\cos(x)$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$(E) : 4(\cos(x))^3 - 2(\cos(x))^2 - 3\cos(x) + 1 = 0$$

3) En déduire les solutions de l'équation (E) dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$

4) On considère l'équation (F) :  $4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = 0$

a) Vérifier que 1 est une solution de (F) puis déterminer les autres solutions.

b) Montrer que  $\cos(\frac{2\pi}{5})$  est une solution de (F)

c) En déduire que  $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

**Exercice 14**

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos(4x) = \sin(3x)$

2) Montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} \sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x) \\ \cos(4x) = 8\sin^4(x) - 8\sin^2(x) + 1 \end{cases}$$

3) En déduire que les solutions de l'équation  $8t^4 + 4t^3 - 8t^2 - 3t + 1 = 0$  est :

$$S = \left\{ -1; -\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right); \sin\left(\frac{\pi}{14}\right); \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) \right\}$$

4) Factoriser le polynôme  $P(t) = 8t^4 + 4t^3 - 8t^2 - 3t + 1$

5) En déduire que  $\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) = \frac{1}{2}$  et

$$\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) \times \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) \times \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) = \frac{1}{8}$$

**Exercice 15**

Soit  $x$  un nombre réel tel que  $x \neq 2k\pi$  pour tout  $k \in \mathbb{R}$

Montrer que :

$$1) (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \prod_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{nx}{2})\cos(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

$$2) (\forall n \in \mathbb{N}) : \prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(2x)}{2^{n+1}\sin(\frac{x}{2^n})}$$

$$3) (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin(2x)}$$



**Exercice 1 (6pts)**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 5$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \frac{7u_n + 4}{2u_n + 5}$ .

- 1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$  .....0.5pt
- 2) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 2$  .....1pt
- 3) a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-2(u_n + 1)(u_n - 2)}{2u_n + 5}$  .....1pt
- b) En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$  .....0.5pt
- 4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$ .
- a) Calculer  $v_0$  puis montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$  .....1pt
- b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$  .....1pt
- c) Montrer que :  $\sum_{k=1}^n v_k = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right)$  .....1pt

**Exercice 2 (5pts)**

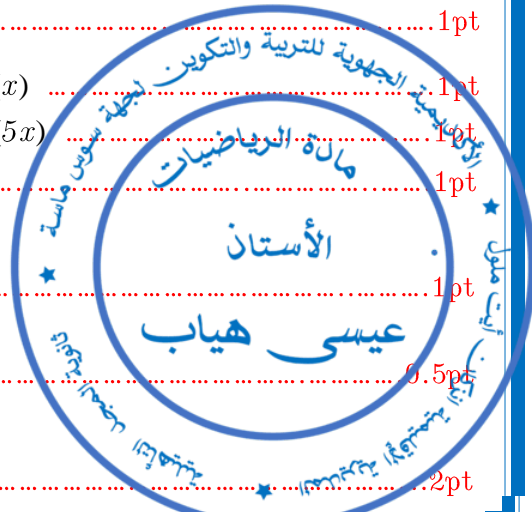
Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$u_0 = a$  ;  $v_0 = b$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$  et  $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

- 1) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < v_n$  .....1pt
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante.....1.5pt
- 3) a) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$  .....1pt
- b) En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$  .....1pt
- 4) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n v_n = ab$  .....0.5pt

**Exercice 3 (9pts)**

- 1) Sachant que  $\tan(x) = \frac{1}{2}$  et  $\tan(y) = \frac{1}{3}$  calculer  $\tan(x+y)$ ,  $\tan(x-y)$  et  $\tan(2x)$  .....1.5pt
- 2) Calculer  $\cos(2a)$  sachant que  $\cos(a) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$  .....1pt
- 3) Ecrire sous forme de somme le produit suivant :  $A(x) = \cos(5x)\cos(x)$  .....1pt
- 4) Transformer en produits l'expression suivante :  $B(x) = \cos(x) - \cos(5x)$  .....1pt
- 5) Ecrire sous la forme  $r\cos(x - \alpha)$  l'expression :  $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$  .....1pt
- 6) Soit  $x$  un nombre réel tel que  $x \neq k\pi$  pour tout  $k \in \mathbb{R}$
- a) Montrer que :  $\cos(x)\cos(2x)\cos(4x) = \frac{\sin(8x)}{8\sin(x)}$  .....1pt
- b) Calculer  $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$  (sans utiliser la calculatrice).....0.5pt
- 7) Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  les mesures des angles d'un triangle  $ABC$   
 Montrer que  $\sin(2A) + \sin(2B) + \sin(2C) = 4\sin(A)\sin(B)\sin(C)$  .....2pt





*Trouc commun sciences et trouc commun technologique*

10 Cours bien détaillés  
 10 Résumés bien précis  
 10 Séries d'exercices corrigées  
 03 Devoirs libres corrigés  
 03 Devoirs surveillés

Exercices et stratégies d'olympiades

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*Première année Bac Sciences Mathématiques*

08 Cours bien détaillés  
 08 Résumés bien précis  
 08 Séries d'exercices  
 04 Devoirs libres corrigés  
 08 Devoirs surveillés

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*Trouc commun sciences et trouc commun technologique*

05 Cours bien détaillés  
 05 Résumés bien précis  
 05 Séries d'exercices corrigées  
 03 Devoirs libres corrigés  
 03 Devoirs surveillés

Exercices et stratégies d'olympiades

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*Première année Bac Sciences Mathématiques*

06 Cours bien détaillés  
 06 Résumés bien précis  
 06 Séries d'exercices  
 04 Devoirs libres corrigés  
 08 Devoirs surveillés

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*Première année Bac sciences expérimentales*

06 Cours bien détaillés  
 06 Résumés bien précis  
 06 Séries d'exercices corrigées  
 03 Devoirs libres corrigés  
 06 Devoirs surveillés

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*2BACSPT & 2BACSVTF*

06 Cours bien détaillés  
 06 Résumés bien précis  
 06 Séries d'exercices corrigées  
 03 Devoirs libres corrigés  
 06 Devoirs surveillés

Extrait du bar  
 Examen blanc corrigé

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*Première année Bac sciences expérimentales*

06 Cours bien détaillés  
 06 Résumés bien précis  
 06 Séries d'exercices corrigées  
 03 Devoirs libres corrigés  
 06 Devoirs surveillés

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*2BACSPT & 2BACSVTF*

05 Cours bien détaillés  
 05 Résumés bien précis  
 05 Séries d'exercices corrigées  
 03 Devoirs libres corrigés  
 06 Devoirs surveillés

Extrait du bar  
 04 Examens blancs corrigés

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*Première année Bac sciences économiques et la gestion*

10 Cours bien détaillés  
 10 Résumés bien précis  
 10 Séries d'exercices  
 6 Devoirs libres corrigés  
 6 Devoirs surveillés

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*2BSM A&B*

Résumés des cours  
 8 Séries d'exercices et problèmes  
 8 Devoirs libres corrigés  
 Extraits du bac  
 Examen blanc corrigé  
 Activités pour les concours

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant