

Recueil d'épreuves

«LA PASSION DES MATHS»

Nouvelle Edition

Initiateur : M. Sylvain AHOANGBO

Sous la supervision de : M. Charlemagne LOKONHOUNDE

Maths

Term CD

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

- * Des rappels de cours
- * Des activités d'approfondissements et leurs corrigés
- * Des situations d'évaluations selon l'APC et leurs corrigés
- * Des sujets de bac (PI et APC) de 2000 à 2015 du Bénin

Contacts : (+229) 97 47 15 27 / 94 23 23 54

www.facebook.com/ahouangbosylvain

ACTIVITES D'APPROFONDISSEMENT
TROIS

Initiateur



SOMMAIRE

Préambule	ii
Sommaire	iii
Programme de la classe de 1 ^{re} D	01
PREMIERE PARTIE: Résumé de cours	
S.A n°1 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE	02
S.A n°2 : ORGANISATION DES DONNEES	07
1. Nombres complexes	07
2. Limites et continuités	11
3. Dérivée- Etude de fonctions	14
4. Primitives	18
5. Fonction logarithme népérien :	19
6. Fonction exponentielle népérienne	20
7. Fonctions exponentielles et Fonctions puissances :	21
8. Calcul intégral	21
9. Equations différentielles linéaires à coefficients constants	24
10. Probabilités	25
11. Suites numériques :	28
12. Statistique	30
SA n°3 : APPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES AUX TRANSFORMATIONS DU PLAN	33
DEUXIEME PARTIE : les activités de réinvestissement	34
Activités d'approfondissements sur la S.A n°1 :	35
Activités d'approfondissements sur la S.A n°2 :	42
1. Nombres complexes	42
2. Limites-continuité	50
3. Dérivabilité et Etude de fonctions	52
4. Primitives	60
5. Fonction logarithme népérien	62
6. Fonctions exponentielles népériennes	72
7. Fonctions exponentielles et Fonctions puissances	80
8. Calcul intégral	82
9. Equations différentielles linéaires à coefficients constants	99
10. Probabilités	104
11. Suites numériques	117
12. Statistique	128
ACTIVITES D'APPROFONDISSEMENTS SUR LA S.A N°3 :	134
TROISIEME PARTIE: les situations d'évaluation des	141

Recueil d'épreuves « LA PASSION DES MATHS »

QUATRIEME PARTIE: les sujets du bac:

Bac série D Burkina-Faso.....	17
Bac série D Sénégal.....	18
Bac série D Niger.....	18
Bac série D Côte d'Ivoire.....	19
Bac série D Cameroun	19
Bac série D Togo.....	20
Bac série D Bénin (PI).....	21
Bac série D Bénin selon APC.....	22

CINQUIEME PARTIE: quelques corrigés

NB :

A.P.C : Approche Par Compétence

P.I : Programme Intermédiaire

S.A : Situation d'Apprentissage

C.P : Conseillé Pédagogique.

I
P
C
E
co
Pro
Sui
Stat
Situ
App
trans
sema
Écritu
lane

PROGRAMME DETAILLE DE LA CLASSE DE TERMINALE D

❖ Situation d'Apprentissage n°1 : Configurations de l'espace (30 heures (cinq semaines))

1. Vecteurs de l'espace
2. Barycentre de n points pondérés, ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)
3. Le produit scalaire
4. Equation cartésienne d'un plan -
Représentations paramétriques d'un plan
5. Système d'équations cartésiennes d'une
droite de l'espace - Représentations
paramétriques d'une droite de l'espace.
6. Produit vectoriel
7. Système d'équations linéaires

❖ Situation d'Apprentissage n°2 : Organisation des données (102 heures (dix-sept semaines))

1. Nombres complexes
2. Limites et continuité
3. Dérivée- Etude de fonctions
4. Primitives
5. Fonction logarithme népérien
6. Fonctions exponentielles népériennes
7. Fonctions exponentielles Fonctions

SA N°1 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

Ce que je dois s'avoir :

1. Vecteurs de l'espace

L'étude des vecteurs développée en géométrie plane s'étend à l'espace.

- A tout couple de points (A, B) de l'espace, on associe la grandeur notée $\overrightarrow{AB}$ appelée vecteur.
- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul noté $\vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Propriétés :

- Pour tout point O et pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point M de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
- Pour tous points A, B et C de l'espace, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles)

Vecteurs colinéaires :

- Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction ou si l'un d'entre eux est le vecteur nul.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} = k\vec{v}$, $k \in \mathbb{R}$.
- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont tels que les points A, B et C sont alignés.

Vecteurs coplanaires :

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si deux d'entre eux sont colinéaires ou bien si l'un est une combinaison linéaire des deux autres soit donc dans ce cas par exemple :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} ; (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- Trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si leurs représentants $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et

AD sont tels que les points A, B, C, D sont dans un même plan.

2. Barycentre de n points pondérés ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)

a) Définition

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$, n points de l'espace et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ n nombres réels de somme non nulle ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

On appelle barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$, l'unique point de l'espace qui vérifie l'égalité $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

On le note $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ ou encore

$$G = \text{bar} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

NB : Un système de points pondérés admet de barycentre dans le seul cas où la somme des coefficients de pondération est non nulle.

b) Quelques propriétés des barycentres :

P₁ : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont n nombres réels de somme non nulle, et $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$

on a : pour tout point M de l'espace :

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}$$

P₂ : Si $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ et si

$\mathbb{R}^*$ alors $G = \text{bar}\{(A_1, k\alpha_1), (A_2, k\alpha_2), \dots, (A_n, k\alpha_n)\}$

P₃ : On ne change pas le barycentre de plusieurs points pondérés en remplaçant certains d'entre-eux par leur barycentre affecté de la somme non nulle des coefficients correspondants.

P₄ : Coordonnées du barycentre

On suppose que l'espace est muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \dots + \alpha_n x_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \\ y_G = \frac{\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \dots + \alpha_n y_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \\ z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \dots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \end{cases}$$

c) Isobarycentre

Définition

On appelle isobarycentre de n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ de l'espace, le barycentre de ces n points affectés d'un même coefficient non nul.

Remarque :

G est isobarycentre de $A_1, A_2, \dots, A_n \Leftrightarrow$

$$G = \text{bar}\{(A_1, \alpha), (A_2, \alpha), \dots, (A_n, \alpha)\} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$$

$$G = \text{bar}\{(A_1, 1), (A_2, 1), \dots, (A_n, 1)\}. \text{ Donc l'isobarycentre est le barycentre des points affectés tous de même coefficient } = 1$$

Propriétés :

- L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$
- L'isobarycentre de trois points non alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC .
- L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le centre de ce parallélogramme.

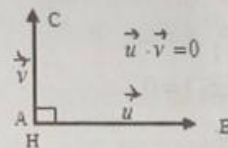
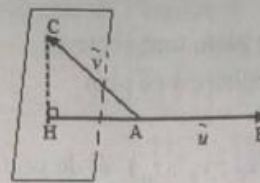
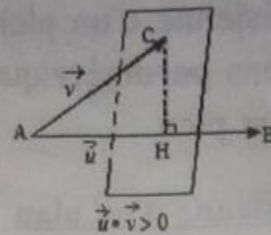
3. Le produit scalaire

Définition et propriété

Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre



Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et pour tout nombre réel α :

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ alors

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- Si l'espace est muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé si et seulement

$$\text{si } \begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \end{cases}$$

4. Equation cartésienne d'un plan - Représentations paramétriques d'un plan

a) Equation cartésienne d'un plan

Vecteur normal à un plan

On appelle vecteur normal à un plan, tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à ce plan

Propriété :

- Le plan passant par $A_0(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$, avec $\vec{n} \neq \vec{0}$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0; \text{ soit}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

- Le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

b) Représentations paramétriques d'un plan :

Soit $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

On appelle représentation paramétrique d'un plan (P) passant par un point $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ le système (S) défini par :

$$(S): \begin{cases} x = x_0 + at + a't' \\ y = y_0 + bt + b't' \\ z = z_0 + ct + c't' \end{cases}; (t; t') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Le triplet $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère cartésien du plan (P)

5. Système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace - Représentations paramétriques d'une droite de l'espace.

Une droite (D) de l'espace est l'intersection d'au moins deux plans (P) et (P') d'équations cartésiennes respectives $ax + by + cz + d = 0$ et

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Le système $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est appelé système d'équations cartésiennes de la droite (D).

Remarque :

Si (D) est une droite de repère $(A; \vec{u})$ $A(x_0; y_0; z_0)$ et $\vec{u}(a; b; c)$ alors une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$$

En éliminant t , on a un système d'équations cartésiennes de la droite (D) sous la forme :

1^{er} cas : $a \neq 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$ on a :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

2^{ème} cas : $a = 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$ (analogue si $b = 0$ ou $c = 0$)

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases}$$

3^{ème} cas : $a = 0, b = 0$ et $c \neq 0$

(analogue si $a = 0, c = 0$ et $b \neq 0$ ou bien $b = 0, c = 0$ on a :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

6. Produit vectoriel

L'espace est muni du repère $(O; I, J, K)$

a) Orientation de l'espace

Pour un observateur appelé observateur d'Ampère ayant la tête vers K, les pieds en O et fixant le point I, il y a deux possibilités :

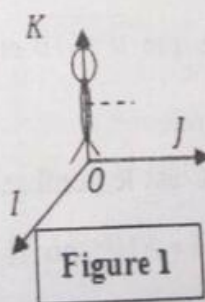


Figure 1

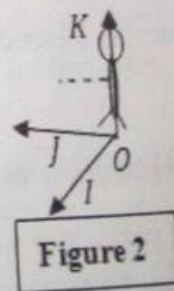


Figure 2

✓ Le point J est à gauche de l'observateur (Figure 1). On dit que le repère (O, I, J, K) est un

direct de l'espace et que la base $(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ est une base directe de l'espace.

- ✓ Le point J est à droite de l'observateur (Figure 2). On dit que le repère $(O; I, J, K)$ est un repère indirect de l'espace et que la base $(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ est une base indirecte de l'espace.

Définition : Orienter l'espace revient à distinguer ces deux types de repères.

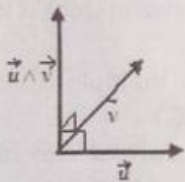
b) Définition du produit vectoriel de deux vecteurs

L'espace est orienté. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Le produit vectoriel du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires alors :

$$\begin{cases} (\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{u} \text{ et } (\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{v} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ est une base directe de l'espace} \\ \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\hat{u}, \hat{v}) \end{cases}$$



c) Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ pour tout réel α on a :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$

d) Autres propriétés

- ✓ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe si et seulement si :

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$

- ✓ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires et orthogonaux. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe de l'espace si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$
- ✓ Dans une base orthonormée directe de l'espace si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \text{ ce qui donne :}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - y'z)\vec{i} + (xz' - xz)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

- ✓ Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$
- ✓ Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$
- ✓ Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si $\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$
- ✓ L'aire du triangle ABC est

$$A = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

- ✓ L'aire du parallélogramme ABCD est

$$A = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

- ✓ Quatre points A, B, C, D de l'espace sont des sommets d'un tétraèdre si et seulement si $\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \neq 0$
- ✓ Le volume du tétraèdre ABCD est

$$V = \frac{1}{6} |\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})| \text{ (unité de volume)}$$

- ❖ La distance du point M à la droite (D) de repère

$$(A; \vec{u}) \text{ est } d = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ (unité de longueur)}$$

- ❖ La distance du point M($x_0; y_0; z_0$) au plan de

$$\text{repère } (A; \vec{u}, \vec{v}) \text{ est } d' = \frac{|\vec{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

et si le plan a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ alors cette distance vaut :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Compléments : Positions relatives de droites et de plans

Soient dans l'espace orienté $\mathbb{E}$, la droite (D_1) de repère $(A; \vec{u})$ et la droite (D_2) de repère $(B; \vec{v})$, les plans (P_1) et (P_2) de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$

- Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Les droites (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles si et seulement si $(D_1) \parallel (D_2)$ et $A \notin (D_2)$
- Les droites (D_1) et (D_2) sont confondues $\Leftrightarrow (D_1) \parallel (D_2)$ et $A \in (D_2)$
- Les droites (D_1) et (D_2) sont dites non coplanaires $\Leftrightarrow$

$$\vec{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) \neq 0$$

- Les droites (D_1) et (D_2) sont orthogonales $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

La droite (D_1) et le plan (P_1) sont parallèles $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

- La droite (D_1) et le plan (P_1) sont strictement parallèles $\Leftrightarrow (D_1) \parallel (P_1)$ et $A \notin (P_1)$

- La droite (D_1) et le plan (P_1) sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{n} = k\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$

- Les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles $\Leftrightarrow \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \vec{0}$ ou $\vec{n}_2 = k\vec{n}_1$, $k \in \mathbb{R}$

- Les plans (P_1) et (P_2) sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

Plan défini par :	a pour repère
Trois points non alignés A, B et C	$(A; \vec{AB}, \vec{AC})$
Une droite (D) de repère $(A; \vec{u})$ et un point F ($F \notin (D)$)	$(A; \vec{AF}, \vec{u})$
Deux droites sécantes de	$(A; \vec{u}, \vec{v})$ ou

repères $(A; \vec{u})$ et $(B; \vec{v})$	$(B; \vec{u}, \vec{v})$
Deux droites strictement parallèles de repères $(A; \vec{u})$ et $(B; \vec{v})$	$(A; \vec{AB}, \vec{v})$ ou $(A; \vec{u}, \vec{AB})$

NB : le vecteur normal d'un plan de repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est $\vec{u} \wedge \vec{v}$

7. Système d'équations linéaire

a) Définition:

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle système d'équations linéaires de n équations aux p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ le système :

$$(S): \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \text{ ou } a_{ij} \text{ et } b_i$$

sont des réels pour tous $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$

b) Opérations élémentaires sur lignes

Notons $L_1, L_2, \dots, L_n$ les n lignes du système (S) . On appelle opération élémentaire sur les lignes l'une des trois opérations suivantes :

- Échange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplication d'une ligne par un réel $\alpha \neq 0$: $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

Les autres lignes non concernées doivent être réécrites dans le système sans modification.

Théorème : Soit (S) un système d'équations linéaires. Le système (S') obtenu en effectuant des opérations élémentaires sur (S) est équivalent à (S) .

c) Méthode du pivot de Gauss

Elle a pour but de transformer un système (S) en un système (S') équivalent (en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes) et triangulaire supérieur. Dans ce qui suit, on considère le système

$$(S): \begin{cases} 2x - y + z = 7 & L_1 \\ x + 2y - z = 6 & L_2 \\ -x + y + 2z = 11 & L_3 \end{cases}$$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x ; \sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x ;$$

$$\tan(3x) = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

Au delà, utiliser la formule de Moivre.

Formules de linéarisation :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} ; \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}$$

Extensions :

$$\cos^3 x = \frac{\cos(3x) + 3 \cos x}{4} ;$$

$$\sin^3 x = \frac{-\sin(3x) + 3 \sin x}{4} ; \tan^3 x = \frac{-\sin(3x) + 3 \sin x}{\cos(3x) + 3 \cos x}$$

Au delà, utiliser les formules d'Euler. Les formules d'Euler permettent également de démontrer que :

Produit en somme

$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

Somme en produit

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Résolution d'équations trigonométriques :

Soient x et y deux nombres réels

$$\sin A(x) = \sin B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ A(x) = \pi - B(x) + 2k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos A(x) = \cos B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ A(x) = -B(x) + 2k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Soit } x \text{ et } y \text{ deux nombres réels de } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\tan A(x) = \tan B(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Remarque :

$$\cos A(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) ;$$

$$\sin A(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Cosinus et sinus dans angles usuels :

x (en radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

A) Généralités sur les nombres complexes

Depuis la troisième et jusqu'à présent, on ne travaillait qu'avec des nombres positifs réels sous une racine carrée. Néanmoins, il existe des nombres dont le carré est négatif.

Ces nombres sont apparus au XVI^{ème} siècle avec Cardan (et sa célèbre méthode pour résoudre certaines équations du 3^{ème} degré) et puis repris ensuite par Bombelli, Gauss...

Aujourd'hui, ces nombres imaginaires sont une partie bien réelle et très utile des mathématiques.

Forme algébrique des nombres complexes :

On appelle forme algébrique d'un nombre complexe z la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels, et i est le nombre tel que $i^2 = -1$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

- Le nombre a est appelé **partie réelle** de z , et noté $\text{Re}(z)$
- Le nombre b est appelé **partie imaginaire** de z , et noté $\text{Im}(z)$

Remarque :

- Les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe sont des nombres réels.
- Si $\text{Im}(z) = b = 0$, alors z est un **nombre réel**. on a donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Si $\text{Re}(z) = a = 0$, z est un **nombre imaginaire**. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres complexes imaginaires.
- Si $\text{Re}(z) = a = 0$ et $\text{Im}(z) = b \neq 0$ alors z est un **nombre imaginaire pur**. On note $i\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.

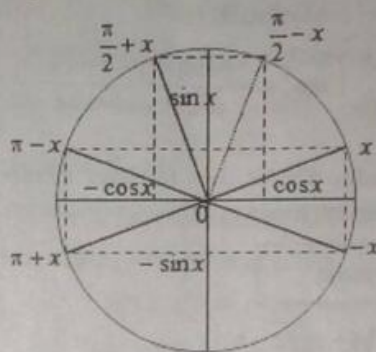
SA N° 2 : ORGANISATION DES DONNEES

Ce que je dois s'avoir :

1. Nombres complexes

Rappels sur la trigonométrie :

Angles associés



Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x & \sin(-x) &= -\sin x ; \\ \cos(\pi-x) &= -\cos x & \sin(\pi-x) &= \sin x ; \\ \cos(\pi+x) &= -\cos x & \sin(\pi+x) &= -\sin x ; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x ; \end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x ; \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x ;$$

Relations entre cos, sin et tan

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 ; 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Formules d'addition :

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a-b) &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{aligned}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Formules de duplication :

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

Extensions :

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE

1°) On place en L_1 une ligne dont le pivot est non nul. (Ce coefficient est appelé "le pivot").

Conseil : choisir, si possible un pivot égal à ± 1 .

2°) On élimine la première inconnue dans $L_2, L_3, \dots, L_n$ par l'opération élémentaire :

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1$$

$$(\lambda = -\frac{a_{i1}}{a_{11}})$$

3°) On choisit parmi $L_2, \dots, L_n$ une ligne ou le coefficient de l'inconnue suivante est non nulle et l'on utilise ce coefficient comme nouveau pivot.

4°) On recommence l'étape 2 à la ligne adéquate jusqu'à obtenir un système triangulaire supérieur.

Les solutions du système s'obtiennent par résolution d'équations de proche en proche.

Notre système (S) admet un unique triplet solution :

$$S_{\mathbb{R}} = \{(3; 4; 5)\}$$

Note on peut être amené à permuter des colonnes (ou des inconnues) afin de se ramener à des pivots plus simples.

EXEMPLE DE MISE EN ŒUVRE

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{cases} 1x + 2y - z = 6 & L_1 \\ [2]x - y + z = 7 & L_2 \\ -x + y + 2z = 11 & L_3 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 ;$$

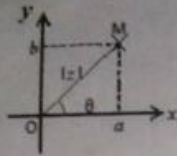
$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 & L_1 \\ 0[-5]y + 3z = -5 & L_2 \\ 0 + 3y + z = 17 & L_3 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{5}L_2$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 & L_1 \\ -5y + 3z = -5 & L_2 \\ \frac{14}{5}z = 14 & L_3 \end{cases}$$

$$z = 5 ; y = 4 ; x = 3$$

**Propriétés :**

z est un nombre complexe de forme $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et dont un argument est θ . θ vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{OM} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{OM} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$$

Propriétés de l'argument :

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, et $\forall z' \neq 0$ puis $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$P_1: \arg \bar{z} = -\arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z});$$

$$P_2: \arg \frac{1}{z} = -\arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z});$$

$$P_3: \arg \frac{z'}{z} = \arg z' - \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z});$$

$$P_4: \arg(z \times z') = \arg z + \arg z' + 2k\pi (k \in \mathbb{Z});$$

$$P_5: \arg(-z) = \pi + \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z});$$

$$P_6: \arg z^n = n \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z});$$

$$P_7: z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z = \arg z' + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

B) Forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe :

Tout nombre complexe non nul dont un argument est θ peut se mettre sous la forme :

$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ Cette forme est dite **forme trigonométrique** de z

$z = |z|e^{i\theta}$ Cette forme est dite **forme exponentielle** de z

Remarque :

Pour tout θ réel on pose : $e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)$

Formules de conversion :

Pour tout nombre complexe, on peut passer d'une forme à une autre en utilisant les formules :

Si $|z| = r$ et $\operatorname{Arg} z = \theta$ alors pour retrouver la forme algébrique de z on peut utiliser : $a = r \cos \theta$
 $b = r \sin \theta$

Forme exponentielle et opérations

Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls. Avec θ et θ' des nombres réels, $r > 0$ et $r' > 0$ alors :

$$* \bar{z} = re^{-i\theta} \quad ; \quad * z \times z' = r \times r' e^{i(\theta+\theta')} \quad * \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$* \frac{z'}{z} = \frac{r'}{r} e^{i(\theta'-\theta)} \quad * z^n = r^n e^{in\theta} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Formule de Moivre :

Pour tout réel θ et tout entier relatif n , on a :
 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

Formule d'Euler :

Pour tout nombre réel θ

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

C) Equation dans $\mathbb{C}$ **Racine carrées du nombre complexe**

Δ est un nombre complexe. On appelle racine carrée de Δ tout nombre complexe δ tel que : $\delta^2 = \Delta$.

Propriété :

$\delta = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ est une racine carrée de Δ si et seulement si on a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\Delta) \\ x^2 + y^2 = |\Delta| \\ 2xy \text{ et } \operatorname{Im}(\Delta) \text{ ont même signe} \end{cases}$$

Remarque :

Les racines carrées de $re^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in \mathbb{R}$) sont $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$)

Le discriminant de cette équation est $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta = 0$, on a une solution : $z = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux racines distinctes :
 $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$ où δ est une racine carrée de Δ .

Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe :

Z est un nombre complexe. On appelle racine $n^{\text{ièmes}}$ (n est un entier naturel et $n \geq 2$) de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de $re^{i\alpha}$ ($r \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$) sont les

nombre complexes $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

NB : Soit un plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- Pour $n=2$, les images des deux solutions sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
- Pour $n \geq 3$ les points images de ces racines $n^{\text{ièmes}}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$, O désigne l'origine du repère choisi dans le plan complexe.

D) Nature de certaines configurations planes
 A, B, C et D sont des points deux à deux distincts et $(O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct.

- ✓ $\arg(\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- ✓ $\arg(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- ✓ A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
- ✓ $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$
- ✓ ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$
- ✓ ABC est un triangle isocèle en A
 $\Leftrightarrow \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1$

- ✓ ABC est un triangle rectangle et isocèle en A
 $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
- ✓ ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
 ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
- ✓ A, B, C et D sont cocycliques $\Leftrightarrow \frac{\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}}{\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}} \in \mathbb{R}^*$
- ✓ $ABCD$ parallélogramme $z_B - z_A = z_C - z_D$

NB : Pour démontrer par exemple qu'un quadrilatère $ABCD$

- est rectangle : on pourra montrer que $ABCD$ est parallélogramme dont le triangle ABC est rectangle en B
- est un carré : on pourra montrer que $ABCD$ est un parallélogramme dont le triangle ABC est rectangle et isocèle en B .
- est un losange : on pourra montrer que $ABCD$ est un parallélogramme tel que $(AC) \perp (BD)$

2. Limites et continuités

A) Limites :

f est une fonction numérique de la variable réelle x , d'ensemble de définition D_f et a un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$

Limites d'une fonction en un point :

*) Si $a \in D_f$ et f admet une limite en a alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

*) Si $a \notin D_f$ et si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ on a les cas suivants :

1^{er} cas : $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = c$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{b}{c} \quad (c \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R})$$

2^{ème} cas : $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ ($b \in \mathbb{R}^*$) et $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = 0$ alors :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ? \infty$ le signe de b et de $v(x)$ permettent de savoir si la limite est $+\infty$ ou $-\infty$

3^{ème} cas : $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = 0$ on a une

indétermination de la forme « $\frac{0}{0}$ »

Pour lever cette indétermination, on peut :

- Factoriser $u(x)$ et $v(x)$ puis simplifier $f(x)$ par $(x-a)$ si f est une fonction rationnelle.
- Utiliser l'expression conjuguée si f est une fonction irrationnelle.
- Utiliser le développement limité de f au voisinage de 0.
- Utiliser les limites remarquables dans les autres cas.

Limites trigonométries :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}$$

Limites d'une fonction à l'infini :

Limites usuelles :

Pour tous réels A et c et pour tout $n \in \mathbb{R}^*$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} c = \lim_{x \rightarrow +\infty} c = c ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{A}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A}{x^n} = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty, & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty, & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

Règle de calcul :

*) A l'infini la limite d'une fonction polynôme est celle de son monôme de plus haut degré.

*) A l'infini la limite d'une fonction rationnelle est celle du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur

Les formes indéterminées

$$\frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty} ; 0 \times \infty ; +\infty - \infty$$

Pour lever ces indéterminations, on peut :

- Utiliser l'expression conjuguée
- Mettre une puissance convenable de x en facteur
- Factoriser ou développer l'expression selon le cas
- Utiliser les règles de calculs

- Utiliser les règles de comparaison
- Faire usage des limites remarquables
- Faire usage du développement limité au voisinage de 0.

Les formes déterminées :

$$\frac{\infty}{\text{réel}} = \infty ; \frac{0}{\text{réel}} = 0 ; \frac{\text{réel}}{0} \neq \infty ; \frac{\text{réel}}{\infty} = 0$$

NB : Ne retenir que les résultats, ces opérations n'étant pas autorisées.

Limites par composition :

Soit f et g deux fonctions telles que :

$$\lim_a f = b \text{ et } \lim_b g = l \text{ alors } \lim_a g \circ f = l$$

Limites par comparaison :

Soit f , g et h trois fonctions :

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \geq g(x) & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x_0} g = +\infty \end{cases}, \text{ alors}$$

$$\lim_{x_0} f = +\infty \text{ (} x_0 \text{ fini ou infini)}$$

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \leq g(x) & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x_0} g = -\infty \end{cases}, \text{ alors}$$

$$\lim_{x_0} f = -\infty \text{ (} x_0 \text{ fini ou infini)}$$

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \leq h(x) \leq g(x) & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x_0} f = \lim_{x_0} g = l, l \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ alors}$$

$$\lim_{x_0} h = l \text{ (} x_0 \text{ fini ou infini)}$$

B) Continuité :

Définitions :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; a + \alpha[$ ($\alpha > 0$)

f est continue à droite en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - \alpha; a]$ ($\alpha > 0$)

f est continue à gauche en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

B : Pour étudier la continuité d'une fonction f en un point a il faut que f soit définie en a , à droite de a et à gauche de a .

Propriétés :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a c'est à dire $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Si f est continue en a alors chacune des fonctions αf , $|f|$, f^n ($n \in \mathbb{N}$) est continue en a .

Si f et g sont continues en a alors les fonctions $f + g$ et fg sont continues en a .

Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a .

Si f est continue en a et positive sur l'intervalle I alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a .

Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son domaine de définition.

Chacune des fonctions sinus et cosinus est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

La fonction Tangente est continue en tout point de $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Prolongement par continuité :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf un réel a de I .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ avec ($l \in \mathbb{R}$) alors on dit que f est prolongeable par continuité en a

La fonction g définie sur I par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x), & \text{si } x \neq a \\ g(a) = l \end{cases} \text{ est continue en } a. g \text{ est le prolongement par continuité de } f \text{ en } a.$$

Continuité sur un intervalle :

Une fonction est continue sur un intervalle ouvert si elle est continue en tout point de cet intervalle

Une fonction f est continue sur un intervalle $[a; b]$ si elle est continue sur $]a; b[$, à droite en a et à gauche en b .

❖ De la même façon, on définit la continuité d'une fonction sur les intervalles $[a; b[$, $]a; b]$, $[a; +\infty[$ et $] -\infty; a]$

Propriétés :

- Si f est continue et ne s'annule pas sur K alors f garde un signe constant sur K .
- Si f est une fonction continue sur un intervalle K contenant les réels a et b et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$. Si de plus f est une fonction strictement monotone sur K alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a; b]$.

Plus généralement :

- Si f est une fonction continue sur un intervalle K contenant les réels a et b et si α est un réel compris entre les réels $f(a)$ et $f(b)$ alors l'équation $f(x) = \alpha$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.
- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur K alors :
 - ✓ f réalise une bijection de K sur $f(K)$.
 - ✓ La bijection réciproque f^{-1} de f est continue sur $f(K)$.
 - ✓ f^{-1} est strictement monotone et a le même sens de variation de f .

Image d'un intervalle K par une fonction continue f .

K	$f(K)$	
	f est strictement croissante sur K	f est strictement décroissante sur K
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a) \right]$
$]a, b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a, +\infty[$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a) \right]$
$\mathbb{R}$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$

3. Dérivée- Etude de fonctions

A) Dérivabilités :

Dérivabilité d'une fonction en un point :

Définition 1 : soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a :

On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel

$$l \text{ tel que : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

Le réel l lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f en a , il est noté : $f'(a)$

(*) Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a; f(a))$ une tangente (T)

d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Le vecteur directeur

de cette tangente est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$

Définition 2 : Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme: $]a - h; a]$ ($h > 0$)

On dit que f est dérivable à gauche en a , s'il existe un nombre réel l' tel que : $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l'$

Le réel l' lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a , il est noté $f'_g(a)$.

Définition 3 : Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme : $[a; a + h[$ ($h > 0$)

On dit que f est dérivable à droite en a , s'il existe un nombre réel l'' tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l''$$

Le réel l'' lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à droite en a , il est noté $f'_d(a)$

Conséquences :

1°) f est dérivable en a si et seulement si

$$f'_g(a) = f'_d(a) \text{ nombre fini}$$

2°) Si f est dérivable à droite de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a; f(a))$ une demi

tangente (T_d) d'équation (T_d) : $\begin{cases} x \geq a \\ y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \end{cases}$

3°) Si f est dérivable à gauche de a alors la courbe représentative de f admet au point

$M(a; f(a))$ une demi tangente (T_g) d'équation :

$$(T_g) : \begin{cases} x \leq a \\ y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \end{cases}$$

Interprétations graphiques :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$$

Si :	Interprétation graphique :
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	(C) admet au point $M(a; f(a))$ une demi tangente verticale dirigée vers le haut
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	(C) admet au point $M(a; f(a))$ une demi tangente verticale dirigée vers le bas

définie par : $\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$

Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle :

Définition :

Si une fonction f est dérivable en tout point x_0 d'un intervalle I , on dit que f est dérivable sur I . la fonction dérivée de f est notée f' .

Dérivée de fonctions usuelles :

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^r$ ($r \in \mathbb{Q}^+$)	$f'(x) = rx^{r-1}$	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$ $= \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \cos(ax + b)$ ($a \in \mathbb{R}^*$)	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax + b)$ ($a \in \mathbb{R}^*$)	$f'(x) = a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(ax + b)$ ($a \in \mathbb{R}^*$)	$f'(x) = a(1 + \tan^2(ax + b))$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Dérivée et opérations sur les fonctions :

- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors :
 - les fonctions $f + g$, αf ($\alpha \in \mathbb{R}$) et $f \times g$ sont dérivables sur I .

Si $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I .

- Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur un intervalle J tel que $J \subset f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivables sur I .

Fonctions	Dérivées
$f + g$	$f' + g'$
$\alpha \cdot f$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha \cdot f'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + g' \cdot f$
$\frac{1}{g}$ ($g \neq 0$)	$-\frac{g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$)	$\frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
f^r	$r \cdot f' \cdot f^{r-1}$
$\sqrt{f}$ ($f > 0$)	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$g \circ f$	$f' \times (g' \circ f)$
$\cos(f)$	$-f' \times \sin(f)$
$\sin(f)$	$f' \times \cos(f)$

Dérivée et sens de variation :

Une fonction strictement monotone sur un intervalle est une fonction qui est : soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur cet intervalle.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- ✓ Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est constante sur I .
- ✓ Si $f'(x) \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I .
- ✓ Si $f'(x) \leq 0$ sur I , alors f est décroissante sur I .
- ✓ Si $f'(x) > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I .

✓ Si $f'(x) < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante sur I .

Conséquence : Le sens de variation de f sur $[a; b]$ est celui de f' sur $]a; b[$

NB : Déterminer le sens de variation d'une fonction f revient à :

- Déterminer l'ensemble de définition de f
- Étudier la continuité et la dérivabilité de f .
- Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
- Conclure.

Dérivée et bijection :

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle K , telle que : $\forall x \in K, f'(x) \neq 0$ et $g: K \rightarrow f(K)$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

❖ La fonction g est une bijection de K sur $f(K)$

❖ La bijection réciproque g^{-1} est dérivable sur

$$f(K) \text{ et on a : } (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} \text{ pour tout } x \in f(K)$$

NB : si $f'(x)$ s'annule en un nombre fini de points par exemple a, b et c alors g^{-1} est dérivable sur

$$E = f(K) \setminus \{f(a); f(b); f(c)\} \text{ et on a :}$$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

Théorème des inégalités des accroissements finis :

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K contenant les réels a et b ($a < b$)

S'il existe deux nombres réels m et M tels que :

$$\forall x \in [a; b], m \leq f'(x) \leq M \text{ alors}$$

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K contenant les réels a et b ($a < b$)

S'il existe un nombre réel M tel que :

$$\forall x \in [a; b], |f'(x)| \leq M \text{ alors } |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Développement limité d'ordre n d'une fonction au voisinage de 0 ($n \in \mathbb{N}^*$) :

Si f est n fois dérivable sur un intervalle contenant 0 alors on a :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n) \text{ avec}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$$

B) Etude de fonction :

Soit f une fonction, D_f son domaine de définition et (∞) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Notation : ∞ remplace $+\infty$ ou $-\infty$)

Point d'inflexion :

Soit x_0 un réel et f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

(*) Si f' s'annule en x_0 sans changer de signe alors le point $I(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion.

(*) Si f'' s'annule en x_0 , en changeant de signe, alors le point $I(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion.

Parité :

$$\otimes f \text{ est paire} \Leftrightarrow \forall x \in D_f \text{ on a : } \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

$$\otimes f \text{ est impaire} \Leftrightarrow \forall x \in D_f \text{ on a : } \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

❖ Si f est paire ou impaire, le domaine d'étude est réduit à : $D_f \cap [0; +\infty[$.

❖ Si f est paire alors $(\mathcal{C})$ présente une symétrie par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$

❖ Si f est impaire alors $(\mathcal{C})$ présente une symétrie par rapport à l'origine du repère.

Périodicité :

$$\otimes f \text{ est périodique de période } T \Leftrightarrow \forall x \in D_f \text{ on a :}$$

$$\begin{cases} x+T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

➤ Si f est de période T , le domaine d'étude est réduit à un intervalle d'amplitude T contenu dans D_f .

Axe de symétrie :

$$\otimes (\Delta): x = a \text{ est un axe de symétrie pour } (\mathcal{C}) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in D_f \text{ on a : } \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

- Si $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C})$
alors le domaine d'étude est réduit à :
 $D_f \cap [a; +\infty[$

Centre de symétrie :

$A(a; b)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C}) \Leftrightarrow x \in D_f$

on a :
$$\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$$

- Si $A(a; b)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$
alors le domaine d'étude est réduit à :
 $D_f \cap [a; +\infty[$

Branches infinies :

Soit f une fonction numérique et a et b deux réels.

⊗ Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$

⊗ Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$.

⊗ Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, alors on calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinages de ∞

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de ∞ .

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a (a \neq 0)$, alors on calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de ∞ .
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty$, alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$.

Remarque :

$(\Delta): y = \alpha x + \alpha$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (\alpha x + \beta)] = 0$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

METHODES PRATIQUES

M₁ : Comment étudier les positions relative d'une courbe et d'une droite ?

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f ;
 (D) la droite d'équation $y = ax + b$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour étudier les positions relatives de (C_f) par rapport à (D) , on peut procéder comme suit :

1. On calcule la différence $f(x) - (ax + b)$;
2. on étudie le signe de cette différence ;
3. on conclut :
 - ❖ si sur I , $[f(x) - (ax + b)] > 0$ alors (C_f) est au dessus de (D) sur I .
 - ❖ si sur I , $[f(x) - (ax + b)] < 0$ alors (C_f) est en dessous de (D) sur I .
 - ❖ si en x_0 , $[f(x) - (ax + b)] = 0$ alors (C_f) et (D) se coupent au point d'abscisse x_0 .

M₂ : Comment encadrer une solution α de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de balayage ou de dichotomie ?

Méthode de dichotomie :

Cette méthode consiste à scinder l'intervalle initial en 2 intervalles égaux afin d'affiner l'encadrement de α .

Méthode de balayage :

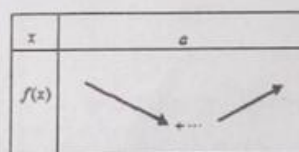
Cette méthode consiste à balayer tout intervalle sélectionné afin d'affiner encore mieux l'encadrement de α .

M₃ : Comment étudier le signe d'une fonction sur intervalle I ?

1. Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe.

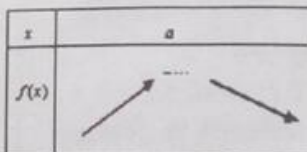
Les quatre cas les plus courants :

- Le minimum absolu est positif



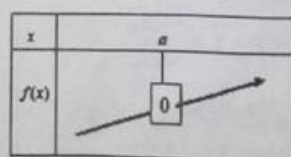
$f(x) > 0, \forall x \in I$

- Le maximum absolu est négatif



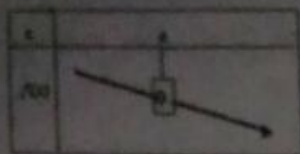
$f(x) < 0, \forall x \in I$

- f est croissante d'une valeur négative à une valeur positive



$f(x) < 0$ avant a
 $f(x) > 0$ après a

- f est décroissante d'une valeur positive à une valeur négative



$f(x) > 0$ avant a
 $f(x) < 0$ après a

2. Pour les autres expressions

Soit $f(x)$ une expression qui n'est ni une fonction polynôme du premier degré, ni du second degré.

Pour étudier le signe de $f(x)$, on peut procéder comme suit :

- On factorise $f(x)$ au maximum ;
- on résout l'équation $f(x) > 0$;
- on détermine ainsi l'intervalle sur lequel $f(x) > 0$ et on déduit l'intervalle sur lequel $f(x) < 0$, tout en tenant compte du domaine de résolution.

4. Primitives

Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur intervalle I . On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I ; F'(x) = f(x)$

Propriétés :

- Toute fonction continue sur I admet une infinité de primitives sur I .
- Si F est une primitive de f sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto F + c$ (avec $c \in \mathbb{R}$) est aussi une primitive de f et toutes les primitives de f sont de cette forme.
- Soit f une fonction continue sur I ; $a \in I$ et b un nombre réel quelconque. Il existe une et une seule primitive F de f prenant la valeur b en a ($F(a) = b$).

Primitive des fonctions usuelles

Intervalle I	Fonction f	Primitives F
$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto a, a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c ; c \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto x^n ; n \in \mathbb{Q}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ $c \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$ $c \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c ;$ $c \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$ $c \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$ $c \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto \tan^2 x$	$x \mapsto -x + \tan x + c$ $c \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \mapsto \tan x + c ;$ $c \in \mathbb{R}$

Primitive des fonctions :

Condi- tions	Fonctions f	Primitive F
$a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto au'(x)$	$x \mapsto au(x) + c;$ $c \in \mathbb{R}$
	$x \mapsto u'(x) + v'(x)$	$x \mapsto u(x) + v(x) + c; c \in \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Q}^*$	$x \mapsto u'(x)u^n(x)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}u^{n+1}(x) + c; c \in \mathbb{R}$
$\forall x \in I, u(x) \neq 0$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{u^n(x)}$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}(x)} + c; c \in \mathbb{R}$
$\forall x \in I, u(x) > 0$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$x \mapsto 2\sqrt{u(x)} + c; c \in \mathbb{R}$
	$x \mapsto u'(x)\sin[u(x)]$	$x \mapsto -\cos[u(x)] + c; c \in \mathbb{R}$
	$x \mapsto u'(x)\cos[u(x)]$	$x \mapsto \sin[u(x)] + c; c \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(ax+b)$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c; c \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(ax+b)$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c; c \in \mathbb{R}$
	$x \mapsto u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$	$x \mapsto u(x)v(x) + c; c \in \mathbb{R}$
	$x \mapsto \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$	$x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)} + c; c \in \mathbb{R}$
	$x \mapsto u'(x) \times v'[u(x)]$	$x \mapsto v \circ u(x) + c; c \in \mathbb{R}$

5. Fonction logarithme népérien :

Définition :

La fonction $\ln$ est l'unique primitive prenant la valeur 0 en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$

La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall x \in]0; +\infty[, \ln' x = \frac{1}{x}$$

Propriétés :

❖ Soit a et b deux nombres réels non nuls :

- $\ln ab = \ln|a| + \ln|b|$
- $\ln \frac{1}{a} = -\ln|a|$ et $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln|b|$
- $\ln a^r = r \ln|a|$ avec $r \in \mathbb{Q}$.

En particulier :

❖ Pour $a > 0$ et $b > 0$ pour tout nombre rationnel r

- $\ln ab = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ et $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln a^r = r \ln a$ et $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- $\ln 1 = 0, \ln e = 1$; e est un réel, $e \approx 2,718 \dots$
- $\begin{cases} \ln x < 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1[\\ \ln x > 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\end{cases}$

Ensemble de définition de fonction comportant $\ln$:

Si u est une fonction d'ensemble de définition D_u alors l'ensemble de définition de la fonction :

- $x \mapsto \ln[u(x)]$ est $D = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) > 0\}$
- $x \mapsto \ln|u(x)|$ est $D = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \neq 0\}$

Limites usuelles :

- ❖ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- ❖ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Dérivée de $\ln u$

- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et, $\ln' u = \frac{u'}{u}$
- Si u est une fonction dérivable et non nul sur un intervalle I , alors la fonction $\ln |u|$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, \ln' |u| = \frac{u'}{u}$

Primitive de $\frac{u'}{u}$

Propriété : u est une fonction dérivable sur un intervalle I , ne s'annule pas sur I , alors une primitive de la fonction $\frac{u'}{u}$ est la fonction : $x \mapsto \ln |u(x)|$.

La fonction logarithme décimal :

La fonction logarithme décimal, notée $\log$, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

- $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$; $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$.
- $\forall x \in]0; +\infty[, (\log)'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$.

6. Fonction exponentielle népérienne

Définition :

La fonction exponentielle est une bijection réciproque de la fonction $\ln$.

On la note $\exp$. Pour tout x réel, $\exp(x) = e^x$

Conséquences immédiates :

- Le domaine de définition de la fonction $\exp$ est $\mathbb{R}$.
- La fonction $\exp$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\exp$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dérivée :

La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = e^x$

Conséquence : Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto e^x$

Propriétés algébriques :

- Pour tout réel x , $e^x > 0$ et $\ln e^x = x$
- Pour tout réel x et tout réel $y > 0$, $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$ et $e^{\ln y} = y$
- Pour tous réels a et b et tout entier relatif p , on a :

$$* e^{a+b} = e^a \times e^b ; \quad * (e^a)^p = e^{ap} ;$$

$$* e^{-a} = \frac{1}{e^a} ; \quad * \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$* e^a = e^b \Leftrightarrow a = b ; \quad * e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

Fonction comportant $\exp$:

Domaine de définition :

u étant une fonction numérique d'ensemble de définition D_u , le domaine de définition de la fonction $\exp(u)$ est celui de u . ($D_{\exp(u)} = D_u$)

Dérivée de $\exp(u)$:

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I , et pour tout réel x de I , $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

Calcul de primitives :

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , alors une primitive sur I de la fonction

$x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$ est la fonction définie sur I par :

$$x \mapsto e^{u(x)}$$

Propriétés :

a est un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$ et b est un réel. u est une fonction admettant une limite en a .

$$\checkmark \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = e^b$$

✓ Si $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} e^{u(x)} = 0$

✓ Si $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} e^{u(x)} = +\infty$

7. Fonctions exponentielles et Fonctions puissances :

A) Fonctions exponentielle de base a :

Définition :

a est un nombre réel tel que ($a > 0$)

On appelle fonction exponentielle de base $a > 0$, l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$. On la note $\exp_a$

Fonction dérivée de la fonction $\exp_a$ ($a > 0$)

La fonction $x \mapsto x \ln a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\exp'_a(x) = (\ln a) e^{x \ln a}$. Donc la dérivée de la fonction

$\exp_a$ est la fonction $x \mapsto a^x \ln a$.

Sens de variation de la fonction $\exp_a$

($a > 0$ et $a \neq 1$)

- Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$ et la fonction $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$ et la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Conséquence :

a un nombre réel strictement positif, différent de 1, α et β des nombres réels

- $a^\alpha = a^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$
- Si $0 < a < 1$, alors $a^\alpha < a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$
- Si $a > 1$, alors $a^\alpha < a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

Limites en $-\infty$ et $+\infty$ de $\exp_a$ ($a > 0$)

❖ Lorsque $a > 1$, on a $\ln a > 0$ et donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty ;$$

❖ Lorsque $0 < a < 1$, on a $\ln a < 0$ et donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 .$$

B) Fonction puissance

d'exposant α :

Définition :

α étant un réel, on appelle fonction puissance d'exposant α , l'application définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Limites :

❖ Si $\alpha > 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$

❖ Si $\alpha < 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$

Limites remarquables :

Pour tout réel $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty ;$$

Dérivée :

La dérivée de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est la fonction

$$x \mapsto \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Conséquence :

- la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, si $\alpha > 0$
- la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, si $\alpha < 0$

8. Calcul intégral

A) Définition :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I contenant les réels a et b .

Si F est une primitive de f sur I , on définit l'intégrale de f de a à b comme étant le nombre réel $F(b) - F(a)$ et

on note $\int_a^b f(x) dx$ et on lit « somme ou intégrale de a à b de $f(x) dx$ ».

Remarque :

- L'intégrale de f de a à b est un nombre réel
- Ce nombre ne dépend pas de la primitive choisie pour f

- L'élément « dx » que l'on trouve dans l'expression de l'intégrale signifie que l'on détermine la primitive ou que l'on « intègre » par rapport à la variable x .

On aurait bien pu écrire $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f(t)dt$. On peut employer n'importe quelle lettre, à l'exclusion des lettres, b , d et f . On dit que cette variable est "muette".

- On écrit souvent le réel $F(b) - F(a)$ sous forme condensée $[F(x)]_a^b$ et on a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Valeur moyenne d'une fonction :

On appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$, le réel

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

B) Propriétés :

Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I , contenant les réels a , b et c . On suppose que $a \leq b$, alors on a :

$$\bullet \int_a^a f(x)dx = 0 ; \bullet \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$\bullet \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ (c'est la relation de Chasles)}$$

$$\bullet \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx ;$$

$$\bullet \alpha \text{ étant un réel, } \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

(c'est la propriété de linéarité de l'intégrale) :

$$\bullet \text{ Si pour tout } x \in I, f(x) \geq 0, \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$\bullet \text{ Si pour tout } x \in I, f(x) \leq 0, \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq 0$$

$$\bullet \text{ Si } f \text{ est paire alors, } \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

$$\bullet \text{ Si } f \text{ est impair alors, } \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

• S'il existe deux nombres réels m et M , tels que $\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \text{ (Inégalités de moyenne).}$$

• S'il existe un nombre réel M tel que $\forall x \in [a; b],$

$$|f(x)| \leq M \text{ alors, } \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M|b-a|$$

$$\bullet \text{ Si } \forall x \in I, f(x) \leq g(x), \text{ alors : } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

C) Méthodes de Calcul des intégrales :

Utilisation de primitives :

Si on peut trouver une primitive F de f sur K , alors on applique la définition.

Intégration par parties :

u et v étant deux fonctions dérivables et à dérivées continues sur K , alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \text{ (formule d'intégration par parties)}$$

Cette formule permet de se ramener au cas d'utilisation de primitives.

D) Fonction définie par une intégrale :

Soit f une fonction continue sur K contenant un réel a . Considérons la fonction F définie par :

$$F : K \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

Alors :

- La fonction F est une primitive de f sur K (donc $F' = f$)
- $F(a) = 0$ (F s'annule en a).

E) Calcul d'aire

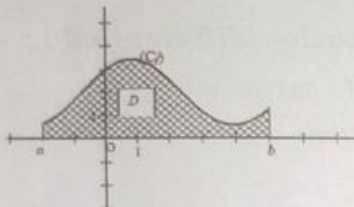
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $O; \vec{i}, \vec{j}$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

L'unité d'aire (u.a) est, $OI \times OJ$, aire du rectangle ayant pour côtés les segments $[OI]$ et $[OJ]$. f est une fonction continue sur un intervalle K contenant a et b .

➤ Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx$

désigne l'aire, exprimée en unités d'aires du domaine (D) limité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$. (D) est l'ensemble constitué des points

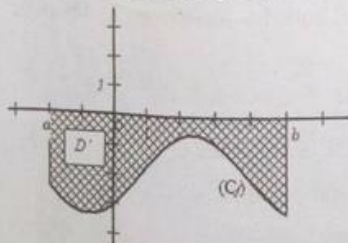
$$M(x; y), \text{ vérifiant } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$



➤ Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ est

égale à l'opposé de l'aire, exprimée en unités d'aires du domaine (D') limité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. (D') est l'ensemble constitué des points $M(x; y)$

$$\text{Vérifiant : } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$



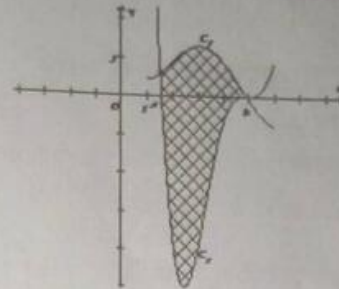
➤ Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I , et a et b deux nombres réels tels que $a < b$ de cet intervalle. Lorsque $f \geq g$ sur I , l'aire du domaine limité par

les courbes C_f et C_g , et les droites d'équations

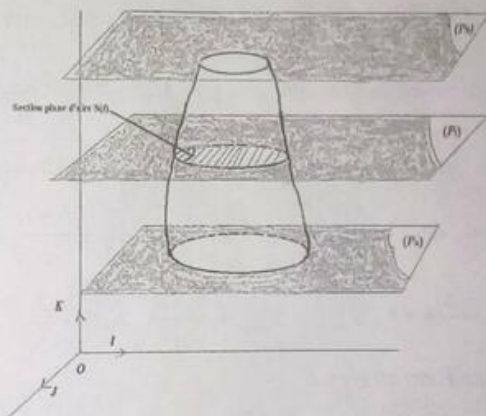
$$x=a \text{ et } x=b \text{ est égale à : } \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Le domaine peut être décrit comme l'ensemble

$$\text{des points } M(x; y), \text{ vérifiant : } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$$



F) Calcul de volume



L'espace est rapporté à un repère orthogonal $O; I, J, K$. L'unité de volume est le volume du pavé droit construit sur $[OI]$; $[OJ]$ et $[OK]$ (on la note u.v). $u.v = OI \times OJ \times OK$.

Le volume de la partie du solide limité par les plans (P_a) et (P_b) d'équations respectives $z=a$ et $z=b$ ($a \leq b$), exprimé en unité de volume est donné par la formule

$$V = \int_a^b S(t)dt \text{ où } S(t) \text{ est l'aire de la section du solide}$$

par le plan (P_t) d'équation $z=t$ avec $a \leq t \leq b$.

Propriétés :

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$ et (E) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$, alors le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du

domaine (E) est $V = \left(\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \right) u.v.$

G) Valeur approchée d'une intégrale :

f est une fonction continue et positive sur un intervalle K contenant les réels a et b .

Il n'est pas toujours possible de calculer $I = \int_a^b f(x) dx$.

Mais comme on sait que cette intégrale est, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, alors une valeur approchée de cette aire

donne une valeur approchée de $I = \int_a^b f(x) dx$. Pour cela,

on subdivise $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ et de bornes $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n}$,

$x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n} \dots, x_{n-1} = x_{n-2} + \frac{b-a}{n}$, $x_n = b$

Méthode des Rectangles :

On calcule :

$S_1 = \left(\frac{b-a}{n}\right) [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$ et

$S_2 = \left(\frac{b-a}{n}\right) [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$

- Si f est croissante sur $[a; b]$, alors on a :

$$S_1 \leq I \leq S_2$$

- Si f est décroissante sur $[a; b]$, alors on a :

$$S_2 \leq I \leq S_1$$

Dans tous les cas on a : $I \approx \frac{S_1 + S_2}{2}$

Méthodes des Trapèzes :

On calcule :

$$A = \left(\frac{b-a}{n}\right) \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + \frac{1}{2} f(x_n) \right]$$

On a : $I \approx A$.

9. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Définition :

- ❖ Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue qui est une fonction est ses dérivées successives.
- ❖ Résoudre une équation différentielle, chercher toutes les fonctions solutions de l'équation.

Résolution d'équation différentielle

o Equation différentielle du type $y' = f(x)$

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle K .

Les solutions de l'équation différentielle $y' = f(x)$ sont les primitives sur K de la fonction f

o Equation différentielle du type

$$ay' + by = 0 \quad (a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R})$$

- On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre toute équation différentielle de la forme $ay' + by = 0$ ($a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$).

- Les solutions de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ sont les fonctions f_k définies

sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{\frac{-b}{a}x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

o Equation différentielle du type

$$ay'' + by' + cy = 0 \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } (b; c) \in \mathbb{R}^2$$

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre l'équation différentielle de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$.

L'équation dans $\mathbb{C}$ d'inconnue r : $ar^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique associée à cette équation différentielle.

Remarque :
La résolution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ passe forcément par la résolution de son équation caractéristique.

Propriété :
Soit l'équation différentielle : (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$ et (E_c) l'équation caractéristique associée à (E).

Si (E _c) admet :	Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :
Une racine double r_0 (cas où $\Delta = 0$)	$f(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$, $(A; B) \in \mathbb{R}^2$
Deux racines distinctes réelles r_1 et r_2 (cas où $\Delta > 0$)	$f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, $(A; B) \in \mathbb{R}^2$
Deux racines complexes conjuguées $\alpha - i\beta$ et $\alpha + i\beta$, $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$, (cas où $\Delta < 0$)	$f(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$, $(A; B) \in \mathbb{R}^2$

NB : $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$

10. Probabilités

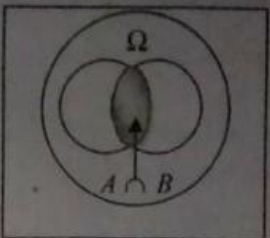
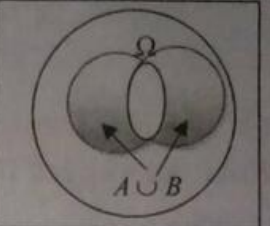
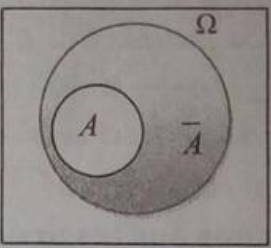
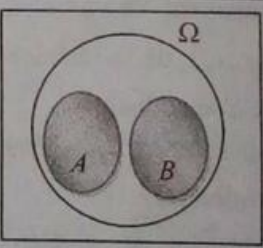
A) Rappels sur dénombrement

Technique de dénombrement :

✓ Notion sur les ensembles

Un ensemble fini est un ensemble dont on peut compter les éléments.

Si E est un ensemble fini, on note $\text{card} E$, le nombre des éléments de E . Ω est l'ensemble fini ; A et B sont deux sous-ensemble de Ω

Ensembles	Illustration et cardinal
<u>Intersection de deux ensembles finis</u> L'intersection de A et B est l'ensemble noté $A \cap B$, constitué des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B	
<u>Réunion de deux ensembles finis</u> La réunion de A et B est l'ensemble noté $A \cup B$, constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B	 $\text{Card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B - \text{card}(A \cap B)$
<u>Complémentaire d'un ensemble fini</u> Le complémentaire de A dans Ω est l'ensemble noté C_Ω^A ou $\bar{A}$, constitué des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A	 $\text{card} \bar{A} = \text{card} \Omega - \text{card} A$
<u>Ensembles finis disjoints</u> Deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \Phi$, Φ étant l'ensemble vide	 $\text{card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B$

Produit cartésien de deux ensembles finis

Le produit cartésien de A par B est l'ensemble noté $A \times B$, constitué des couples $(x; y)$ où $x \in A$ et $y \in B$.

A \ B	a	b	c
x	(a; x)	(b; x)	(c; x)
y	(a; y)	(b; y)	(c; y)

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}A \times \text{card}B$$

Dans la suite, n et p sont deux entiers naturels.

✓ **Notions sur les listes**

Définition :

E est un ensemble fini ayant n éléments.

Une liste de p éléments de E est une suite ordonnée $(a_1; a_2; \dots; a_p)$ de p éléments de E .

Une liste de p éléments de E s'appelle aussi **p -liste**.

Propriété : Nombre de listes de p éléments de E

Dans un ensemble fini ayant n éléments, le nombre de listes de p éléments est n^p .

✓ **Notions sur les arrangements**

Définition :

E est un ensemble fini ayant n éléments et p est un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$

Un arrangement de p éléments de E est une liste $(a_1; a_2; \dots; a_p)$ de p éléments de E dont les éléments sont deux à deux distincts.

Un arrangement de p éléments de E s'appelle aussi **p -arrangement**.

Un arrangement de n éléments de E s'appelle une **permutation**

Propriété : Nombre d'arrangements de p éléments de E

Dans un ensemble fini ayant n éléments, le nombre d'arrangements de p éléments est le nombre noté A_n^p et défini par :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1).$$

Dans un ensemble fini ayant n éléments, le nombre de permutations est noté A_n^n et défini par :

$$A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Le nombre A_n^n est noté $n!$ et s'appelle « factorielle n »

✓ **Notions sur les combinaisons**

Définition :

E est un ensemble fini ayant n éléments et p est un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.

Une combinaison de p éléments de E est une partie $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ de p éléments de E .

Une combinaison de p éléments de E s'appelle aussi **p -combinaison**.

Propriété : Nombre de combinaison de p éléments de E

Dans un ensemble fini ayant n éléments, le nombre de combinaisons de p éléments est le nombre noté C_n^p et

$$\text{défini par : } C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

✓ **Formule du binôme de Newton**

Pour tout nombres complexes a et b non nuls et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

a) Calcul de Probabilité

Définition :

➤ On appelle épreuve ou expérience aléatoire toute expérience dont l'issue est due au hasard mais pour laquelle on connaît l'ensemble des résultats possibles appelé univers associé à l'épreuve et noté Ω .

➤ Toute partie de Ω est appelée évènement.

➤ Tout singleton d'élément de Ω est appelé évènement élémentaire.

➤ Une probabilité sur un univers Ω , associé à une épreuve, est une application p de Ω dans $[0;1]$ qui à tout évènement A associe le nombre réel $p(A)$ appelée la probabilité de l'évènement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- $p(\Omega) = 1$

- Si A et B sont deux évènements incompatibles ($A \cap B = \Phi$) alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

➤ Deux évènements A et B sont équiprobables si et seulement si $p(A) = p(B)$

Propriété 1 :

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience aléatoire. A et B deux événements de

- $p(\Omega) = 1$ et $p(\Phi) = 0$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Propriété 2 (cas d'équiprobabilité) :

Si tous les événements élémentaires sont équiprobables

alors $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$ ou encore

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Formule des probabilités totales :

Si les événements $B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de Ω . Pour tout événement A de Ω on a :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n).$$

Probabilité conditionnelle :

A et B sont deux événements de Ω et p une probabilité sur Ω telle que $p(B) \neq 0$.

La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé (ou probabilité conditionnelle de A sachant B) est notée $p_B(A)$ ou $p(A/B)$ et est définie par :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Conséquence :

- Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ alors

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

- Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Variable aléatoire :

Soit un univers fini associé à une épreuve.

- Une variable aléatoire X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$

Les différentes valeurs de la variable aléatoire X sont souvent notées $x_1, x_2, \dots, x_n$ (Que l'on suppose rangées dans l'ordre croissant)

L'ensemble $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est appelé univers image associé à la variable aléatoire X.

- L'application qui à chaque élément x_i de $X(\Omega)$ associe le réel $p_i = p(X = x_i)$ est appelée la loi de probabilité de X. On la présente sous forme d'un tableau du type :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Fonction de répartition de X

La fonction de répartition de X est l'application notée F de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$ qui à tout nombre réel t associe le réel $F(t) = p(X \leq t)$

Dans la pratique si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on a :

$$\begin{cases} F(t) = 0 & \text{Si } t \in]-\infty; x_1[\\ F(t) = p_1 & \text{Si } t \in [x_1; x_2[\\ F(t) = p_1 + p_2 & \text{Si } t \in [x_2; x_3[\\ \vdots & \vdots \\ F(t) = 1 & \text{Si } t \in [x_n; +\infty[\end{cases}$$

Caractéristiques d'une variable aléatoire : espérance mathématique, variance et écart-type :

- L'espérance mathématique de X est

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

- La variance de X est : $V(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2$

On utilise la définition équivalente suivante :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \text{ avec}$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$$

- L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Epreuve de Bernoulli-Loi binomiale :

- ✓ Une épreuve de Bernoulli est une épreuve pour laquelle il n'y a que deux résultats possibles l'un appelé « succès » et l'autre appelé « échec ».
- ✓ Un schéma de Bernoulli est une suite de n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Propriété :

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves dont la probabilité de succès est p .
 Le nombre k de succès obtenu à l'issue des n épreuves a pour probabilité : $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.
 Dans ce cas on a : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
 On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p .

11. Suites numériques :

Définition

- Une suite numérique est une fonction numérique définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
- Soit (U_n) une suite numérique définie sur une partie E de $\mathbb{N}$
 - L'image d'un élément $n \in E$ par la suite (U_n) est notée U_n
 - La suite peut être aussi notée $(U_n)_{n \in E}$
 - U_n est appelé terme général ou terme d'indice n de la suite
- Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite numérique
 - (U_n) est une suite définie par une formule explicite si et seulement si on a :
 $\forall n \in E ; U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique.
 - (U_n) est une suite définie par récurrence si elle est définie par la donnée de son premier terme et d'une formule de récurrence de la forme $U_{n+1} = g(U_n)$ où g est une fonction numérique.

Démonstration par récurrence

Principe :

C'est la démonstration qui se fait de proche en proche.

Ainsi pour démontrer par récurrence qu'une propriété P_n est vraie pour tout $n \geq a$, on procède comme suit :

- On démontre que pour $n = a$, P_n est vraie.
- On suppose que la propriété P_n est vraie jusqu'à un ordre k et on démontre que P_{n+1} est vraie aussi à l'ordre $k+1$.
- On conclut que : pour tout $n \geq a$; P_n

Sens de variation d'une suite numérique

- Lorsque la suite est explicite, on étudie généralement son sens de variation en posant $U_n = f(n)$ et en étudiant le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- Lorsque la suite est récurrente, on étudie généralement son sens de variation en étudiant le signe de $U_{n+1} - U_n$ sur son ensemble de définition :

- $U_{n+1} - U_n < 0 \Leftrightarrow (U_n)$ est décroissante
- $U_{n+1} - U_n > 0 \Leftrightarrow (U_n)$ est croissante
- $U_{n+1} - U_n = 0 \Leftrightarrow (U_n)$ est constante

Remarque : On dit que (U_n) est monotone si elle est soit croissante soit décroissante

Suites majorées, minorées, bornées

Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite réelle.

- (U_n) est majorée si et seulement si il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , $U_n \leq M$.
- (U_n) est minorée si et seulement si il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , $U_n \geq m$.
- (U_n) est bornée si et seulement si (U_n) est minorée et majorée.
- Une suite (U_n) est bornée sur un ensemble E si et seulement s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in E$, $|U_n| \leq M$

Convergence

❖ Définition

Soit (U_n) une suite numérique.

- La suite (U_n) est **convergente** lorsqu'elle admet une limite finie c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ ($l \in \mathbb{R}$)
- La suite (U_n) est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente

❖ Calcul de limite d'une suite numérique

- Limite d'une suite (U_n) définie par
 $U_n = f(n)$

Propriété : Soit (U_n) une suite définie par $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique :

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$) alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $+\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ ou $+\infty$

• Limite de l'image d'une suite numérique par une fonction

Propriété : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle K et (U_n) une suite numérique :

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(U_n) = b$

NB : a et b peuvent être des nombres réel ou $-\infty$; $+\infty$

• Limite d'une suite définie par une formule de récurrence

Propriété : Soit g une fonction contenue sur un intervalle K et (U_n) une suite à valeur dans K , définie par la formule de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$.

Si (U_n) converge vers un réel l alors l est une solution dans K de l'équation $g(x) = x$

• Limite d'une suite monotone

Propriété :

- Une suite décroissante et minorée est convergente
- Une suite croissante et majorée est convergente
- Une suite croissante et non majorée est divergente
- Toute suite décroissante et non minorée est divergente.

Limite et comparaison

Propriété :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites numériques

- S'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $U_n \leq V_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l'$ alors $l \leq l'$
- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_0$ on a : $V_n \leq U_n \leq W_n$, où (W_n) est une suite numérique et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l$ ($l \in \mathbb{R}$) alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$
- S'il existe $l \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_0$ on a : $|U_n - l| \leq V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$

- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ on a : $U_n \geq V_n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ on a : $U_n \leq V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$

Limites des suites du types a^n , n^α avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Propriété :

- Si $a > 1$ et $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$$

- Si $0 < a < 1$ et $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = 0$$

- Si $\alpha < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$

- Si $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$

Inégalités des accroissements finis

Appliqué aux suites :

Soit (U_n) une suite définie par une relation de récurrence du type : $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$ (où $0 < k < 1$)

On vérifie les conditions suivantes :

- l'équation $f(x) = x$ possède une solution unique ; α dans I .
- $U_n \in I$; pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $|U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$; (par l'inégalité des accroissements finis)
- $|U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha|$ (par récurrence).
- Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$ (car $0 < k < 1$) donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha.$$

Suites arithmétiques et suites géométriques :

Définition :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

- La suite (U_n) est arithmétique si et seulement s'il existe une constante réelle r telle que $\forall n \in E$, $U_{n+1} = U_n + r$, r est appelé la raison de la suite (U_n) . (ou (U_n) est une suite arithmétique si et seulement si la suite $(U_{n+1} - U_n)$ est constante)
- La suite (U_n) est géométrique si et seulement s'il existe une constante réelle q telle que $\forall n \in E$, $U_{n+1} = qU_n$, le réel q est la raison de la suite (U_n) . (Ou (U_n) est une suite géométrique si et seulement si la suite $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$ est constante)

Expression de terme général :

Soit (U_n) une suite numérique de 1^{er} terme U_p

- Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r , alors $\forall n \in E$, $U_n = U_p + (n - p) \times r$
- Si (U_n) est une suite géométrique de raison q , alors $\forall n \in E$, $U_n = U_p \times q^{n-p}$

Suites arithmétiques-suite géométrique et moyennes :

- a , b et c sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $b = \frac{a+c}{2}$
- a , b et c sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = a \times c$

Somme de termes consécutifs d'une suite numérique :

Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite numérique.

Posons $S_p = U_k + U_{k+1} + \dots + U_{k+p-1}$

Dans cette somme on a p termes consécutifs de (U_n) (nombre de terme = indice du dernier terme - indice du 1^{er} terme + 1)

➤ Si (U_n) est une suite arithmétique alors

$$S_p = \frac{p(U_p + U_{k+p-1})}{2}$$

Soit $S_p = \text{nombre de terme de } S_p \times \left(\frac{1^{\text{er}} \text{ terme de } S_p + \text{dernier terme } S_p}{2} \right)$

➤ Si (U_n) est une suite géométrique de raison q avec $q \neq 1$, alors

$$S_p = U_k \times \frac{1-q^p}{1-q} \text{ soit}$$

$$S_p = 1^{\text{er}} \text{ terme de } S_p \times \frac{1-q^{\text{nombre de terme de } S_p}}{1-q}$$

Si $q = 1$ alors : $S_p = \text{nombre de terme de } S_p \times U_k$

12. Statistique

Série statistique double :

Point moyen d'un nuage de points

On appelle point moyen du nuage de points de la (x_i, y_j, n_{ij}) , le point $G(\bar{x}; \bar{y})$ où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les moyennes respectives des séries marginales (x_j, n_j) .

NB :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \dots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

$$\text{où } N = \sum_{i=1}^p n_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^p n_j y_j = \frac{n_1 \times y_1 + n_2 \times y_2 + \dots + n_p \times y_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

Détermination de la covariance :

La détermination de la covariance notée $\text{cov}(X, Y)$ se fait suivant la forme du tableau statistique que l'on utilise.

❖ **Cas 1 :** Tableau simple de la forme :

x_i	x_1	x_2	...	x_p
y_j	y_1	y_2	...	y_n

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i y_j - \bar{x} \bar{y}$$

N : effectif total,

❖ **Cas 2 :** Tableau à double entrée de la forme :

$x_i \backslash y_j$	y_1	y_2	...	y_n	Total
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1n}	n_1
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2n}	n_2
...	...	...	...	...	...
x_p	n_{p1}	n_{p2}	...	n_{pn}	n_p
Total	n_1	n_2	...	n_p	N

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p n_{ij} x_i y_j \right) - (\bar{x}_i \bar{y}_j)$$

Nuage de points :

Dans un plan rapporté à un repère orthogonal, l'ensemble des points M_{ij} de coordonnées $(x_i; y_j)$ d'effectif non nul de la série statistique à deux variables (x_i, y_j, n_{ij}) est appelé nuage de point

Ajustements :

Suivant la forme du nuage de points $M_{ij}(x_i; y_j)$, on peut essayer de trouver une fonction qui modélise le lien entre les deux caractères X et Y , de telle façon que la courbe d'équation $y = f(x)$ passe le « plus très possible » du nuage de points.

➤ Ajustement affine par la droite des moindres carrés

On démontre et nous admettons que pour un nuage de points donné, il existe deux droites qui réalisent le meilleur ajustement au sens des moindres carrés ordinaires. Ces droites s'appellent droites de régression :

- l'une appelée droite de régression de y en x a une équation de la forme $y = ax + b$;
- l'autre appelée droite de régression de x en y a une équation de la forme : $x = a'y + b'$

Propriété :

- Pour la droite de régression de y en x admettant pour équation : $y = ax + b$ $a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}$ et

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \text{ avec } V(X) = \frac{\sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^p n_i} \text{ ou}$$

$$V(X) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i x_i^2 \right) - (\bar{x})^2 \text{ la variance de la série } (x_i, n_i).$$

- Pour la droite de régression de x en y admettant pour équation : $x = a'y + b'$

$$a' = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \bar{x} - a'\bar{y} \text{ avec}$$

$$V(Y) = \frac{\sum_{j=1}^p n_j (y_j - \bar{y})^2}{\sum_{j=1}^p n_j} \text{ ou}$$

$$V(Y) = \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^p n_j y_j^2 \right) - (\bar{y})^2, \text{ la variance de la série } (y_j, n_j)$$

➤ Ajustement linéaire par la méthode de Mayer

La méthode de Mayer consiste à partager la série double en deux sous séries d'effectifs égaux (à une unité près car le nombre de valeurs peut être impair). On calcule les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chaque sous série ; résultat : la droite $(G_1 G_2)$ est une droite d'ajustement du nuage passant par le point $G(\bar{x}; \bar{y})$ appelée **droite de Mayer du nuage**

➤ Qualité de l'ajustement linéaire :

La qualité de l'ajustement se mesure par le coefficient de corrélation linéaire r .

Le coefficient de corrélation linéaire noté r est défini

$$\text{par : } r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X) \times \sigma(Y)} \text{ avec } \sigma \text{ l'écart-type. Donc } r$$

$$\text{devient : } r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \times \sqrt{V(Y)}}$$

été :

r a le même signe que la covariance.

$$-1 \leq r \leq 1$$

Interprétation du coefficient de corrélation linéaire

Si $|r|=1$, alors on dit que l'ajustement est parfait. Dans ce cas les résultats sont fiables.

Si $0,87 \leq r < 1$, alors on dit qu'il y a une forte corrélation entre les variables. Dans ce cas les résultats sont encore fiables.

- Si $|r| < 0,87$, alors on dit que la liaison entre les deux variables est lâche. Dans ce cas les résultats ne sont pas fiables.
- Si $|r|$ est voisin de 0 on dit qu'il y a indépendance linéaire statistique

TCHIKAMA

SA n°3 : APPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES AUX TRANSFORMATIONS DU PLAN

Ce qu'il faut savoir :

1. Ecriture complexe d'une transformation plane

Quelques transformations planes :

Transformations	Ecriture complexe
Translation de vecteur d'affixe b	$z' = z + b$
Homothétie de centre Ω et de rapport k	$z' - z_{\Omega} = k(z - z_{\Omega})$
Rotation de centre Ω et d'angle θ	$z' - z_{\Omega} = e^{i\theta}(z - z_{\Omega})$

2. Similitude plane directe

- ✓ On appelle similitude plane de rapport k ($k > 0$) toute transformation du plan telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N' on a : $M'N' = kMN$
- ✓ On appelle similitude plane directe toute similitude plane qui conserve l'orientation des angles.

Propriété :

- ❖ Toute écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est celle d'une similitude plane directe f de rapport $|a|$

Valeurs de a . Si	Nature et caractéristique de f
$a = 1$	f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b .
$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$	f est l'homothétie de centre I d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport a .

$a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ et $ a = 1$	f est la rotation de centre I d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\arg a$.
$a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $ a \neq 1$	f est la composée de la rotation de centre I d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\arg a$ et de l'homothétie de même centre I et de rapport $ a $

Remarque : Le point I , $\arg a$ et $|a|$ sont les caractéristiques de la similitude

Image d'une droite-Image d'un cercle par une similitude plane directe :

Propriétés :

Soit f une similitude plane directe de rapport k ($k \in \mathbb{R}_+^*$)

P_1 : L'image de la droite (AB) par f est la droite $(A'B')$ avec $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$

P_2 : L'image du cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon r est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre $I' = f(I)$ et de rayon $r' = k \times r$.

P_3 : L'image du triangle ou d'un quadrilatère d'aire A est encore le triangle ou quadrilatère d'aire $A' = k^2 \times A$.

Activités de réinvestissement par contenus notionnels

ACTIVITÉS SUR LA SA N°1 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

ACTIVITE 1 : cor. p : 224

Soient ABCD quatre points de l'espace.

Soit I le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, -5) et soit J le barycentre des points pondérés (C, -3) et (D, 1)

1°) Construis les points I et J

2°) Soit K le point de l'espace tel que : $4\vec{KA} - 10\vec{KB} + 3\vec{KC} - \vec{KD} = \vec{0}$

Démontre que les points I, J et K sont alignés.

ACTIVITE 2 :

Soit ABCD un tétraèdre, E le milieu de [CD] et F le milieu de [AB].

1°) a- Définis à l'aide d'égalités vectorielles les points G, H et I respectivement centres de gravité des triangles ABC, ABD et ABE.

b- Prouve que les points E, G, H et I appartiennent au plan (FDC).

c- Démontre que G, H et I sont alignés et que (GI) et (DC) sont parallèles. Calcule GH et GI en fonction de DC.

2°) a- Donne les coordonnées des points de la figure

relativement au repère (A; $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$)

b-

Démontre que analytiquement les résultats de la question 1.c

ACTIVITE 3 :

On considère dans l'espace ($\mathcal{E}$) les points pondérés (A, 2) (B, 1) et (C, 1)

Soit $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 1)\}$, $L = \{(A, 2); (C, 1)\}$,

$R = \{(A, 2); (B, 1)\}$ et $I = \text{bar}\{(B, 1); (C, 1)\}$

1-) Démontre que les droites (RC) et (BL) sont sécantes en G.

2-) Démontre que les points A, G et I sont alignés et que G est le milieu du segment [AI].

3-) Soit les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM}$ et

$\vec{v} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$

a- Donne une écriture plus simple du vecteur $\vec{u}$ et prouve que $\vec{v} = 2\vec{IA}$

b- Détermine géométriquement l'ensemble :

b-1 (T_1) des points M de l'espace tels que

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

b-2 (T_2) des points M de l'espace tels que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

ACTIVITE 4 : cor. p : 224

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct ($O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). On considère les droites ($\mathcal{D}_1$) et ($\mathcal{D}_2$) de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ et } \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = -t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$$

1°) Démontre que ($\mathcal{D}_1$) et ($\mathcal{D}_2$) sont non coplanaires.

2°) Détermine une équation cartésienne du plan ($\mathcal{P}$) contenant ($\mathcal{D}_2$) et parallèle à ($\mathcal{D}_1$).

3°) Soit le point K(-1; 0; -1) de $\mathcal{E}$.

Calcule la distance du point K à la droite ($\mathcal{D}_2$)

ACTIVITE 5 : cor. p : 224

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct ($O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). On considère le tétraèdre ABCD tel que :

A(1; 0; 2), B(0; 0; 1), C(0; -1; 3) et $\vec{AE} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

1°) a- Vérifie que E a pour coordonnées (0; 2; 3).

b- Calcule le volume du tétraèdre ABCE.

2°) a- Soit (P) le plan d'équation : $x - 2y - z + 5 = 0$.

Prouve que (P) est parallèle au plan (ABC).

b- Soit K le point défini par : $2\vec{KE} + \vec{KC} = \vec{0}$

Calcule les coordonnées du point K et vérifie que K appartient au plan (P).

ACTIVITE 6 : cor. p : 224

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct ($O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). On considère les points A(3; 2; 6), B(1; 2; 4) et C(4; -2; 5)

1°) a- Calcule les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

b- Déduis-en que les points A, B et C ne sont pas alignés.

c- Calcule le volume du tétraèdre OABC.

2°) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan

(ABC). Prouve que $OH = \frac{4}{3}$.

ACTIVITE 7 : cor. p : 224

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct ($O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), on donne les points : A(3; -5; 1), B(0; 2; 4) et le vecteur $\vec{u}(1; 2; -1)$.

B(0; 2; 4) et le vecteur $\vec{u}(1; 2; -1)$.

1°) Soit ($\mathcal{D}$) la droite de repère (A; $\vec{u}$).

a- Détermine une représentation paramétrique de ($\mathcal{D}$)

b- Détermine les coordonnées du point C de ($\mathcal{D}$) d'ordonnée nulle et les coordonnées du point N de ($\mathcal{D}$) dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.

2°) Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation cartésienne $2x - 3y + z - 10 = 0$.

- a- Calcule la distance d de A à $(\mathcal{P})$
- b- Démontre que la droite (AB) et le plan $(\mathcal{P})$ sont sécants en un point M dont tu détermineras les coordonnées.

3°) Soit $(\mathcal{Q})$ le plan passant par les points A et B et perpendiculaire à $(\mathcal{P})$. On désigne par (Δ) la droite d'intersection de $(\mathcal{P})$ et de $(\mathcal{Q})$.

- a- Détermine une équation cartésienne de $(\mathcal{Q})$.
- b- Donne une représentation paramétrique de (Δ) .

4°) Soit les points $E(2; -1; -4)$, $F(1; 0; -3)$ et $G(1; 2; 1)$

- a- Démontre que les points E , F et G déterminent un unique plan dont un vecteur normal est $\vec{u}$.
- b- Justifie que $AEFG$ est un tétraèdre puis calcule son volume V

ACTIVITE 8 : cor. p : 225

Dans l'espace orienté $(\mathcal{E})$ muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0; 1; -2)$; $B(-1; 0; -1)$; $C(0; -5; -5)$; $D(2; 0; -2)$ et $E(1; -4; -6)$, la droite (Δ_1) dont un système d'équations cartésiennes est

$$\frac{-x+2}{2} = -y+1 = -z \text{ et la droite } (\Delta_2) \text{ dont une}$$

$$\text{représentation paramétrique est : } \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1-) a- Démontre que les points A , B et C définissent un plan (P) et un seul

b- Détermine une équation cartésienne de (P)

c- Calcule l'aire A du triangle ABC

2-) Démontre que le quadrilatère $ABCE$ est un rectangle.

3-) a- Donne un repère de chacune des droites (Δ_1) et (Δ_2) .

b- Démontre que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires.

4-) Donne une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point D et perpendiculaire au plan (P) .

5-) On désigne par H le projeté orthogonal du point D sur le plan (P) .

- a- Détermine les coordonnées du point H .
- b- Calcule de deux manières différentes la distance du point D au plan (P) .
- c- Calcule alors le volume du tétraèdre $ABCD$.

ACTIVITE 9 : cor. p : 226

Soient les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 1)$, $C(0; -1; -1)$, $D(-1; 1; -1)$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1°) a- Calcule l'aire du triangle ABC .

b- Détermine une équation cartésienne du plan (ABC) .

c- Vérifie que D n'appartient pas au plan (ABC) .

2°) a- Détermine un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par D et perpendiculaire au plan (ABC) .

b- Détermine les coordonnées du point d'intersection H de la droite (Δ) et du plan (ABC) .

c- Déduis-en la distance du point D au plan (ABC) .

3°) Calcule le volume du tétraèdre $ABCD$.

4°) a- Détermine une équation cartésienne du plan médiateur (P) du segment $[AB]$

b- Détermine un système d'équations paramétriques de la droite (Δ') d'intersection des plans (P) et (ABC)

ACTIVITE 10 : cor. p : 227

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé

$(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les points $A(5; -5; 2)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(0; 1; 2)$ et $D(6; 6; -1)$.

1°) Détermine la nature du triangle BCD et calcule son aire

2°) a- Prouve que le vecteur $\vec{n}(-2; 3; 1)$ est un vecteur normal au plan (BCD) .

b- Détermine une équation cartésienne du plan (BCD)

3°) Détermine une représentation paramétrique de la droite (D) orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A .

4°) Détermine les coordonnées du point H , intersection de la droite (D) et du plan (BCD)

5°) Déduis le volume du tétraèdre est $ABCD$.

6°) On admet que $AB = \sqrt{76}$ et $AC = \sqrt{61}$

Détermine une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

ACTIVITE 11 : cor. p : 228

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(-1; 2; 3)$;

$B(-1; 2; -2)$ et $C(-3; 0; 4)$ et on désigne par I le

barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 3)$.

1°) Détermine les coordonnées du point I .

2°) Soit (D) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $(2\vec{MA} + 3\vec{MB}) \wedge (\vec{MA} - \vec{MC}) = \vec{0}$. Démontre que (D) est une droite dont-tu donneras un repère.

3°) Soit (Δ) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R})$$

- Démontre que (Δ) et (D) sont strictement parallèles.
 - Détermine une équation cartésienne du plan (P) déterminé par (Δ) et (D) .
- 4°) Soit (Q) le plan d'équation cartésienne : $x + y = 0$ et $K(1; 2; 0)$.
- Démontre que $(Q) \perp (P)$.
 - Calcule les distances $d(K; (P))$ et $d(K; (Q))$.
 - Déduis-en la distance du point K à la droite d'intersection de (P) et (Q) .

ACTIVITE 12 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans (P) , (Q) et (R) d'équations respectives : $2x + y + 2z + 3 = 0$;

$$x - y + 4z = 0 \text{ et } x + 2y - 2z + 3 = 0$$

1°) Démontre que les plans (P) , (Q) et (R) sont sécants selon une droite (Δ) dont tu détermineras un système d'équations paramétriques.

2°) Dans l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(1; 0; 2), B(1; 1; 4) \text{ et } C(-1; 1; 1)$$

- Détermine les coordonnées du point D projeté orthogonal de A sur la droite (Δ)
- Justifie que $ABCD$ est un tétraèdre dont tu calculeras le volume.
- Déduis-en la distance d du point D au plan (ABC)

ACTIVITE 13 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(-1; 1; 0)$ et $B(0; 1; 0)$ et les vecteurs de l'espace $\vec{u} = (m-1)\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{v} = -2m\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1°) Démontre que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de directions distinctes.

2°) Détermine une équation cartésienne des plans (P_m) passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

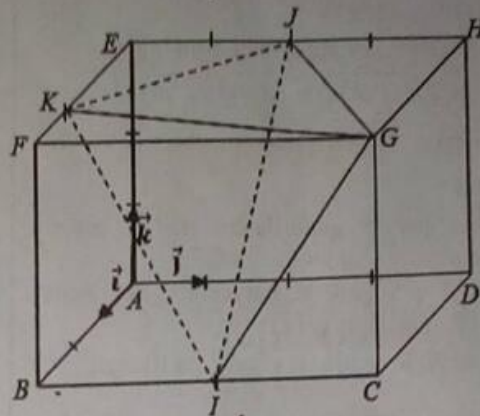
3°) Démontre que tous les plans (P_m) contiennent une droite fixe (D) dont tu donneras une représentation paramétrique.

4°) Le point B appartient-il à (P_m) .

5°) Quels sont parmi les plans (P_m) , ceux qui sont situés à la distance $\frac{\sqrt{5}}{5}$ du point B ?

ACTIVITE 14:

Soit un pavé droit $ABCDEFGH$ comme l'indique la figure ci-dessous représentée dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tels que $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$ et ; les points I et J milieux respectives des arêtes $[BC]$ et $[EH]$ et le point K est tel que $\overrightarrow{EK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



1-) Vérifie que $\overrightarrow{AG} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$

2-) a- Détermine les coordonnées de I et J et vérifie que K a pour coordonnées $(2; 0; 3)$.

b- Détermine les composantes des vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ et vérifie que $\overrightarrow{KI} \wedge \overrightarrow{KJ} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$

3-) a- Calcule l'aire du triangle IJK .

b- Calcule le volume du tétraèdre $IJKG$.

c- Déduis-en la distance de G au plan (IJK) .

4-) Ecris une équation cartésienne du plan (IJK) .

5-) Soit G' le point tel que (IJK) est le plan médiateur du segment $[GG']$ et N le projeté orthogonal de G sur le plan (IJK) .

a- Prouve que N a pour coordonnée $\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

b- Déduis-en les coordonnées du point G' .

ACTIVITE 15 : cor. p : 228

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

on considère les points $A(1; 2; -1)$ et $B(2; 1; 1)$

1°) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) passant par A et perpendiculaire à la droite (AB) .

2°) Soit (P_m) le plan d'équation $x + y + m - 3 = 0$ où m est un paramètre réel.

- a- Prouve que la droite (AB) est parallèle au plan (P_m) .
- b- Pour quelle valeur de m la droite (AB) est-elle incluse dans le plan (P_m) ?
- c- Démontre que le plan (P_m) est perpendiculaire au plan (Q) .

3°) Soit B' le projeté orthogonal de B sur (P_m) et A' le projeté orthogonal de A sur (P_m) .
Détermine les valeurs de m pour que $ABB'A'$ soit un carré.

ACTIVITE 16 : cor. p : 229

Dans l'espace $(\mathcal{E})$ orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère un cube $ABCDEFGH$ tel que : $\vec{AB} = \vec{i}$; $\vec{AD} = \vec{j}$; $\vec{AE} = \vec{k}$ et $\vec{OA} = -3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

1-) a- Démontre que le quadrilatère $ABGH$ est un parallélogramme.

b- Démontre que G est le barycentre des points pondérés $(A, -1)$; $(B, 1)$ et $(H, 1)$

2-) On désigne par K , le centre de gravité du triangle ABH ;

$$(\sigma) = \{M \in \mathcal{E} \mid (-\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MH}) \cdot (-2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MH}) = 0\}$$

$$(\Delta) = \{M \in \mathcal{E} \mid (-\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MH}) \wedge (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MH}) = \vec{0}\}$$

a- Démontre que (Δ) est une droite dont tu préciseras un repère.

b- Démontre que (σ) est un plan dont tu préciseras un vecteur normal.

3-) a- Détermine dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées des points A, B, H, G et K .

b- Détermine une équation cartésienne de (σ) et une représentation paramétrique de (Δ) .

4-) On considère les droites (D_1) et (D_2) définies par :

$$(D_1) : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 2 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t - 1 \end{cases} \text{ et } (D_2) : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = -z$$

puis le plan (Q_1) d'équation cartésienne $(Q_1) :$

$$x + y + z + 1 = 0$$

a- Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes.

b- Donne une équation cartésienne du plan (Q_2) contenant (D_1) et (D_2) .

c- Démontre que $(Q_1) \perp (Q_2)$

5-) a- Détermine l'équation cartésienne du plan (Q_3) contenant les points O et A et orthogonale à (Q_1)

b- Détermine un repère de $(Q_1) \cap (Q_3)$.

6-) On désigne par L le projeté orthogonal de O sur (Q_1)

a- Détermine une représentation paramétrique de la droite (OL) .

b- Détermine les coordonnées du point L .

7-) a- Démontre que $OABG$ est un tétraèdre.

b- Détermine le volume de $OABG$.

ACTIVITE 17 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 2 cm. On considère les points

$A(1; -1; 1)$, $B(2; -2; -3)$, $C(-2; 0; 3)$ et les plans :

$(P) : 2x + 3y - z - 4 = 0$ et $(P') : 3x - 2y + 5z - 6 = 0$

1°) a- Justifie que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants.

b- Détermine une représentation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$ intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$

c- Détermine une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$ passant par A et orthogonale à $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$

d- Calcule la distance de A à $(\mathcal{D})$

2°) a- Détermine les coordonnées du point I intersection de la droite (AB) et du plan $(\mathcal{P})$, puis du point J intersection de (AB) et $(\mathcal{P}')$

b- Calcule le volume du tétraèdre $OIJC$.

3°) a- Justifie que les points A, B et C définissent un plan $(\mathcal{R})$ dont tu donneras une équation cartésienne.

b- Calcule l'aire du triangle ABC .

4°) Détermine $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{Q}) \cap (\mathcal{R})$

ACTIVITE 18 : cor. p : 230

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J, K) . On donne les points $A(1; -2; 1)$, $B(0; 1; 2)$

$C(1; 3; 4)$ et $D(5; 1; 3)$. (D_1) et (P) sont respectivement

l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $(D_1) :$

$$\begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ et } (P) : \vec{AM} \cdot \vec{CD} = 1$$

1°) Détermine la nature et un repère de (D_1) .

2°) Détermine une équation cartésienne de (P) et sa nature.

3°) a- Démontre que les points A, B et C ne sont pas alignés et détermine une équation cartésienne de (ABC) .

b-Déduis-en que les points A, B, C et D sont non coplanaires.

c-Calcule le volume du tétraèdre ABCD.

d-Détermine une représentation paramétrique de la hauteur (Δ) issue de D du tétraèdre.

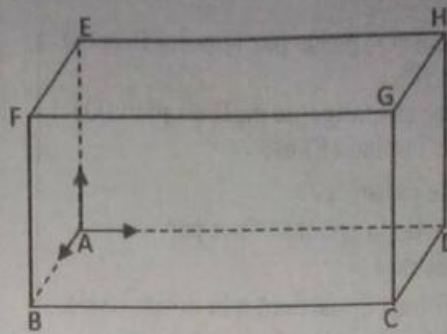
4°) Détermine les coordonnées du point E pour que le quadruplet ABCE soit un parallélogramme et calcule l'aire de ce parallélogramme.

5°) Prouve que les droites (Δ) et (D_1) sont non coplanaires.

6°) Soit (D'') la droite de système d'équations

$$\text{cartésiennes : } \frac{x-1}{2} = y = -z-1.$$

Détermine une équation cartésienne du plan (Q) parallèle à la droite (D'), orthogonal au plan (ABC) et contenant le point O.



1°) a- Vérifie que $\overrightarrow{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

b- Détermine les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$.

c- Détermine une équation cartésienne du plan (EBG).

2°) Soit α un réel différent de 1 et M le point de coordonnées $(2\alpha; 4\alpha; 3\alpha)$.

a- Vérifie que M décrit la droite (AG) privé du point G.

b- Prouve que M n'appartient pas au plan (EBG).

3°) Soit V le volume du tétraèdre MEBG.

a- Exprime V en fonction de α .

b- Calcule le volume du tétraèdre AEBG.

c- Pour quelle valeur de α , V est-il égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH.

ACTIVITE 21 : cor. p :232

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct ($O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$).

On considère les plans (P) et (P') d'équations cartésiennes respectives: $2x - y + 2z - 5 = 0$ et $2x + 2y - z - 4 = 0$

1°) Prouve que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

2°) Calcule la distance du point A(1, 2, -1) à chacun des plans (P) et (P'). Déduis-en la distance du point A à la droite (D) intersection de (P) et (P').

3°) a- Détermine un système d'équations paramétriques de la droite (D).

b- Détermine, par ses coordonnées, le point M de la droite (D) pour lequel la distance AM est minimale.

ACTIVITE 22 : cor. p :232

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé

($O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), on donne les points A(1; -1; 2) et B(-1; 1; -2)

1°) Donne une représentation paramétrique de la droite (AB).

2°) Soit (P) le plan passant par A et perpendiculaire à la droite (AB) et (Q) le plan dont une équation cartésienne est : $x - y + 2z + 6 = 0$.

a- Détermine une équation cartésienne du plan (P).

ACTIVITE 19:

L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé direct ($O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). On considère les plans (P_m) et (Q_m)

d'équations respectives : $(m-1)x + 2y - z + 2 = 0$,

$x + my + (m-1)z + 1 = 0$ où m est un paramètre réel.

1°) Démontre que quelle que soit la valeur de m , ces plans sont sécants.

2°) Pour quelle valeur de m , ces deux plans sont-ils perpendiculaires ?

Détermine dans ce cas une représentations paramétrique de leur droite d'intersection.

3°) On suppose dans cette question que $m = 2$. On désigne par (P) le plan (P_2) et (P') le plan (Q_2)

correspondant à $m = 2$.

a- Démontre que l'ensemble des points équidistants de (P) et (P') est la réunion de deux plans perpendiculaires (Q) et (Q').

Soit A(0; 1; -3). Calcule $d(A; (Q))$ et $d(A; (Q'))$.

Déduis-en la distance du point A à la droite d'intersection de (Q) et (Q').

ACTIVITE 20 : cor. p :231

L'espace est muni à un repère orthonormé directe

($A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) et ABCDEFGH est un parallélépipède tel

que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$.

b- Vérifie que le plan (Q) passe par le point B et est parallèle au plan (P).

3°) On considère la sphère (S) tangente en B au plan (Q) et dont l'intersection avec le plan (P) est le cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{3}$.

On désigne par I le centre de la sphère (S) et par (a ; b ; c) les coordonnées de I.

- Prouve que le point I appartient à la droite (AB).
- Déduis-en que $b = -a$ et $c = 2a$.
- Démontre que $IA^2 - IB^2 = 12$ et déduis-en que $a - b + 2c = 3$.
- Détermine alors les coordonnées du point I et écris une équation cartésienne de la sphère (S).

ACTIVITE 23 : cor. p : 233

Dans l'espace E muni d'un repère orthonormé direct

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$;

$B\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $C(1; 0; 3)$ et

$$(\Gamma) = \left\{ M \in E / (2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{OC} = \vec{0} \right\}$$

1°) a- Détermine les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A, 2) et (B, 3)

b- Prouve que (Γ) est une droite dont tu détermineras une représentation paramétrique.

2°) a- Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux et unitaires.

b- Détermine le vecteur $\vec{u}$ pour que $(\overrightarrow{OA}; \vec{u}; \overrightarrow{OB})$ soit une base orthonormée directe.

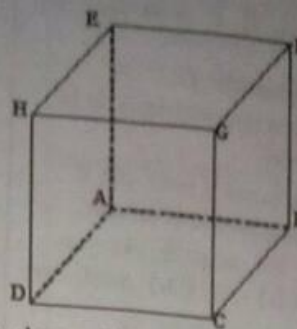
c- Détermine une équation cartésienne du plan (OAB).

d- Calcule la distance du point C au plan (OAB).

e- Déduis-en que OABC est un tétraèdre et détermine son volume.

ACTIVITE 24 :

Soit ABCDEFGH un cube, comme l'indique la figure ci-après :



On donne $AD = 8$ cm. Soient D' , B' et E' respectivement les points des segments $[AD]$, $[AB]$ et $[AE]$ tels que $AD' = AB' = AE' = 2$ cm

On admettra que l'espace affine est orienté et que $\mathcal{R} = (A; \overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AE'})$ est un repère orthonormé direct.

1°) Calcule dans le repère $\mathcal{R}$ les coordonnées des sommets de ce cube ainsi que celles de leurs isobarycentre Z.

2°) Soit I le milieu du segment $[HE]$ et J celui de $[CG]$. Calcule en cm^2 l'aire du triangle FIJ.

3°) Soit Q le projeté orthogonal de G sur la droite (IJ). Détermine les coordonnées de Q et déduis-en la distance de G à la droite (IJ).

4°) Soit $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AB'})$.

a- Démontre que $\vec{e}_1$ est unitaire.

b- Détermine les coordonnées du vecteur $\vec{e}_2$ tel que $\mathcal{R}_1 = (A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \overrightarrow{AE'})$ soit un repère orthonormé direct.

ACTIVITE 25 : cor. p : 233

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans (P_1) et (P_2)

d'équations respectives : $x - y + z - 2 = 0$ et $y + z + 1 = 0$. On suppose que (P_3) est un plan dont un repère est $(R; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ où $R(0; 1; 2)$, $\vec{u}_1(1; 0; -1)$ et $\vec{u}_2(1; 1; 1)$.

1°) a- Démontre que les plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

b- Détermine une représentation paramétrique de la droite (D_1) intersection des plans (P_1) et (P_2) .

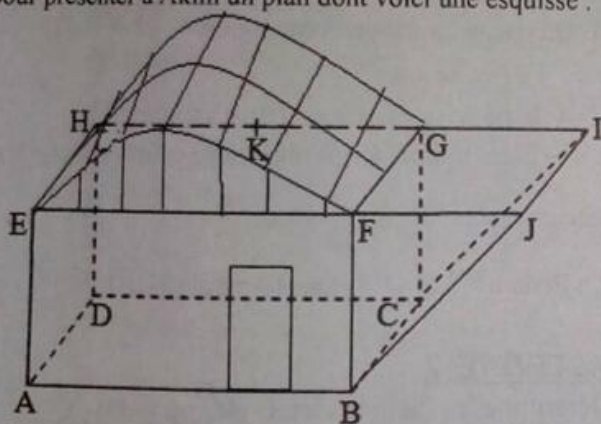
2°) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires avec (D_2) la droite de repère $(S; \vec{u})$ où $S(1; 1; 1)$ et $\vec{u}(1; 2; -3)$.

- 3°) a- Déduis-en une équation cartésienne du plan (Q) contenant la droite (D₂) et parallèle à (D₁).
 b- Détermine une représentation paramétrique de (Q).
 4°) a- Détermine un vecteur $\vec{v}_1$ unitaire colinéaire à $\vec{u}_1$ et un vecteur $\vec{v}_2$ colinéaire à $\vec{u}_2$.
 b- Détermine un vecteur unitaire $\vec{v}_3$ orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$.
 5°) Justifie que $(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ est une base orthonormée.
 6°) a- Détermine la distance du point S au plan (P₁) puis au plan (P₂).
 b- Déduis-en la distance du point S à la droite (D₁).

ACTIVITE 26 : cor. p : 235

Akim est un opérateur économique de la ville de Porto-Novo. Pour la réalisation d'un projet de construction d'une salle de cinéma équipée d'une haute technologie pour l'épanouissement des jeunes de la ville, il sollicite l'aide de Tundi un excellent ingénieur en plan bâtiment.

Vu son talent, l'ingénieur Tundi n'a ménagé aucun effort pour présenter à Akim un plan dont voici une esquisse.



Information :

- ABCDEFGH est un pavé droit tel que : $AB = 4\text{ cm}$; $AD = 2\text{ cm}$ et $AE = 2\text{ cm}$.

- Les points I, J et K sont tels que : $\vec{EJ} = \frac{3}{2}\vec{EF}$,

$\vec{EH} = \vec{JI}$ et K le milieu de [HG].

- Un projecteur sera installé au point Ω , intersection de l'ensemble (Σ) et de (Γ) tel que :

$$(\Sigma) = \left\{ M \in \mathcal{E} / (3\vec{MA} - 3\vec{MB} - 2\vec{ME}) \cdot (\vec{MF} - \vec{MH}) = 0 \right\}$$

$$(\Gamma) = \left\{ M \in \mathcal{E} / (\vec{MJ} - \vec{MB} + \vec{MC}) \wedge (\vec{MF} - \vec{MH}) = \vec{0} \right\}$$

- Tous les points de l'espace sont repérés par rapport au repère orthonormé direct $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \vec{HE}$, $\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{HG}$ et $\vec{k} = \vec{HD}$.
- Un écran sera placé sur l'un des plans (P_m) d'équation : $(m+1)x + (m-1)z - 1 - 5m = 0$

Akim ne comprenant rien de toutes ces informations sollicite l'aide de son fils Mahafous, élève en classe de terminale D, pour l'aider à mieux analyser l'esquisse.

Tâche : Tu es invité(e) à jouer le rôle de Mahafous en résolvant la consigne suivante.

Consigne :

Partie A :

- 1°) a- Détermine trois réels α , β et γ tel que :

$$J = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (E, \gamma)\}.$$

- b- Ecris I comme barycentre des points J, B et C.

- 2°) Démontre que (Σ) est un plan passant par J et d'un vecteur normal $\vec{HF}$.

- 3°) Démontre que (Γ) est une droite d'un repère $(I; \vec{HF})$.

- 4°) Justifie que (Γ) et (Σ) sont perpendiculaires.

- 5°) a- Démontre que dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a :

$H(-1; 0; -1)$, $F(0; -2; -1)$, $G(-1; -2; -1)$,

$I(-1; -3; -1)$, $B(0; -2; 0)$ et $E(0; 0; -1)$.

- b- Détermine les coordonnées de J et K.

- 6°) a- Détermine une équation cartésienne de (Σ) .

- b- Détermine une représentation paramétrique de (Γ)

- c- Détermine les coordonnées de Ω .

Parti B :

- 7°) Démontre que pour toute valeur de m , (P_m) est un plan de l'espace $\mathcal{E}$.

- 8°) a- Démontre que l'intersection de tous les plans (P_m) est une droite (Δ) dont tu donneras une représentation paramétrique.

- b- Détermine m pour que (P_m) soit parallèle à (Γ) .

- c- Détermine les coordonnées du projeté orthogonale de K sur (Γ) .

- d- Déduis-en la distance du point K à (Γ) .

S.A N°2 : ORGANISATION DES DONNEES :

1. ACTIVITES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

ACTIVITE 1 : cor. p:238

Ecris sous forme algébrique les nombres complexes ci-dessous.

$$z_1 = (2-i)(3+i) ; z_2 = (2+i\sqrt{3})(1+i) ; z_3 = (2+i)^2 ;$$

$$z_4 = (1-i)(5+8i)(1-i) ; z_5 = (i-2)^2 + (3+4i) ;$$

$$z_6 = \frac{1+i}{1-i} ; z_7 = \frac{i^2}{3i-4} ; z_8 = \frac{2+3i}{5+3i} (2-3i) ;$$

$$z_9 = \frac{(1+i)(4+3i)}{(5-i)(2+i)} ; z_{10} = (1+i)^6 ; z_{11} = (2+i)^4 ;$$

$$z_{12} = (1-2i)^4 ;$$

$$z_{13} = (2+i)(1-i) - (3-2i)^2 + (5-i)(5+i) ;$$

$$z_{14} = 3i(2+8i) + 7(5-2i) + (7-8i)(1+5i)$$

ACTIVITE 2 : cor. p:238

Donne les conjugués des nombres complexes suivants :

$$z_A = 3-8i ; z_B = -2-6i ; z_C = \frac{1}{3-i} ; z_D = \frac{3(2-4i)}{i}$$

$$; z_E = (2+4i)((1-i)(8+2i)) ; z_F = \frac{4(4-i)(3-i)}{(2+i)(3-4i)} ;$$

$$z_J = i(1-\sqrt{3}) \text{ et } z_J = 2 + \sqrt{2}$$

ACTIVITE 3 : cor. p:238

Donne la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$A = i^{25} + i^{26} + i^{27} + i^{28} ; B = i^{2045} ; C = i^{1984} ;$$

$$D = i^{2003} ; E = i^{34} ; F = i^{45678} ;$$

ACTIVITE 4 : cor. p:238

Calcule le module de chacun des nombres complexes suivants.

$$z_1 = \sqrt{3} + i ; z_2 = 1 + i\sqrt{3} ; z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} ; z_5 = 2 + 4i ; z_6 = 1 - 5i ; z_7 = -7 + i$$

$$; z_8 = -1 - 3i ; z_9 = -6i ; z_{10} = -8 ; z_{11} = \frac{2-3i}{5+4i} ;$$

$$z_{12} = \frac{1-i}{1+i}$$

ACTIVITE 5 : cor. p:238

1°) Mets sous forme algébrique les nombres complexes

$$z_1 = \frac{2+6i}{3-i} , z_2 = (1-i)(1+2i) \text{ et } z_3 = \frac{4i}{i-1}$$

2°) Place dans Le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 2i , z_B = 3+i \text{ et } z_C = 2-2i$$

ACTIVITE 6 : cor. p:238

I et II sont indépendants

I/ Soient trois nombres complexes: $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$,

$$z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6} \text{ et } z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$$

$$\text{On pose } Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$$

1°) Ecris les nombres complexes z_1 , z_2 et z_3 sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.

2°) Déduis-en une forme exponentielle du nombre complexe Z

3°) Calcule alors la forme algébrique de Z

II/ On donne les nombres complexes $u = 2\sqrt{3} - 2i$,

$$v = -1 + i \text{ et } w = u.v$$

1°) a- Ecris u , v et w sous forme exponentielle

b- Ecris w sous forme algébrique puis détermine les

$$\text{valeurs exactes de } \cos \frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12}.$$

2°) Ecris u^{2015} et v^{2015} sous forme algébrique.

ACTIVITE 7 :

Détermine les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 4 + 3i$$

$$z_2 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_3 = -7 - 24i$$

$$z_4 = i$$

$$z_5 = -3$$

ACTIVITE 8 :

$$\text{On pose : } Z = \sqrt{3} + i , Z' = i - 1 \text{ et } T = \frac{Z}{Z'}$$

1°) Calcule le module et un arguments de chacun des nombres complexes Z et Z'.

2°) a- Détermine l'écriture algébrique de T.

b- Utilise 1°) pour déterminer l'écriture trigonométrique de T.

c- Déduis-en les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

3°) a- Détermine les écritures trigonométrique et algébrique de T^3 .

b- u étant un nombre complexe, résous : $u^3 = 1$.

c- Ecris sous forme algébrique les solutions de l'équation : $z^3 = 2 + 2i$ ($z \in \mathbb{C}$)

ACTIVITE 9 :

On définit $Z = \frac{z+1}{z-2i}$

Détermine l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1°) Z soit réel.

2°) Z soit imaginaire pur.

3°) Z ait un module égal à 1.

4°) Z ait un argument égal à $\frac{\pi}{2}$.

ACTIVITE 10 : cor. p : 239

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère le nombre complexe

$$Z = \frac{z-4+3i}{z-3+2i} \text{ avec } z \neq 3-2i \text{ et on pose } Z = X + iY \text{ et}$$

$z = x + iy$ où x, y, X et Y sont des réels.

1°) a- Exprime X et Y en fonction de x et y .

b- Détermine l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que $Z \in i\mathbb{R}$

c- Justifie que si $Z \in \mathbb{R}$, alors $Z = \frac{x-4}{x-3}$

d- Démontre que si $|Z-1|=1$, alors l'ensemble des points M d'affixes z est le cercle de centre $\Omega(3; -2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

2°) Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives i , $-2+i$ et $2+i$. Détermine :

a- L'ensemble $(\mathcal{D})$ des points M d'affixe z

$$\text{vérifiant : } |\bar{z} + i| = |z + 2 + i|$$

b- L'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M d'affixe z tels que :

$$|(1+i)z - 5i| = \sqrt{10}$$

c- L'ensemble $(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{C})$.

ACTIVITE 11 :

Résous dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$$(E_1) : z^2 - (3-2i)z + 5-i = 0$$

$$(E_2) : iz^2 - (1-5i)z + 6i = 0$$

$$(E_3) : z^2 - (3+2i)z + 5+i = 0$$

$$(E_4) : iz^2 - 2z + 2-i = 0$$

$$(E_5) : z^3 + (2-5i)z^2 - (5+3i)z - 6+2i = 0 \text{ sachant que}$$

(E_5) admet une solution réelle

$$(E_6) : iz^3 - 2(2\sqrt{3}+3i)z^2 - 4(i-4\sqrt{3})z - 8(2\sqrt{3}-3i) = 0$$

sachant que (E_6) admet une solution imaginaire pure.

$$(E_7) : z^3 - (2+2i)z^2 + 8iz + 8(2-2i) = 0 \text{ sachant que}$$

(E_8) admet deux solutions symétriques par rapport à l'origine du repère complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$$(E_9) : (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2 = 0$$

$$(E_{10}) : (E_{10}) : z^4 - (5-14i)z^2 - (24+10i) = 0.$$

ACTIVITE 12 :

1°) Détermine z_1 et z_2 les racines carrées du nombre complexe $8i$.

2°) a- Détermine les nombres complexes b et c tels que pour tout complexe z , on ait :

$$z^3 - 3iz^2 - 8iz - 24 = (z-3i)(z^2 + bz + c).$$

b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^3 - 3iz^2 - 8iz - 24 = 0.$$

c- Vérifie que la somme des solutions de (E) est imaginaire pure et que leur produit est réel.

ACTIVITE 13 :

1°) Détermine les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 vérifiant les conditions suivantes :

$$a) \begin{cases} |z_2| = 2|z_1| \\ |z_3| = 2|z_2| \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{\pi}{2} \\ \arg(z_3) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$0 < \arg(z_1) < \frac{\pi}{2}$$

$$c) z_1 \times z_2 \times z_3 = 64i$$

2°) Ecris sous forme algébrique $Z = \frac{z_3}{z_2}$ et Z^{2013}

3°) Détermine le plus petit entier naturel non nul n tel que $Z^n \in i\mathbb{R}^*$

ACTIVITE 14 :

1°) Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : z^2 - 2z + 5 = 0 \text{ et}$$

$$(E_2) : z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$$

2°) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et

D'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$,

$z_C = 1 + \sqrt{3} - i$, et $z_D = 1 - 2i$.

a- Place les points A, B, C et D et précise la nature du quadrilatère $ABCD$.

b- Vérifie que : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$. Que peux-tu en

déduire pour les droites (AB) et (BD) ?

c- Prouve que les points A, B et C appartiennent à un même cercle Γ dont tu préciseras le centre et le rayon. Trace Γ .

ACTIVITE 15 : cor. p : 240

On considère les nombres complexes $\alpha = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et

$$\beta = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$$

1°) Ecris α et β sous forme exponentielle.

2) Soit θ un réel de l'intervalle $]0; \pi[$.

a- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$

On désignera par z_1 la solution ayant une partie imaginaire négative et par z_2 l'autre solution.

b- Ecris z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

3°) Détermine θ pour que l'on ait $z_1 = \alpha$ et $z_2 = \beta$.

ACTIVITE 16 : cor. p : 240

Soit le nombre $z = -1 + i$

1°) Calcule sous forme algébrique les racines carrées de z .

2°) Calcule sous forme trigonométrique les racines carrées de z .

3°) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et de

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right).$$

ACTIVITE 17 : cor. p : 241

On considère le complexe $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

1°) a- Calcule α^2 .

b- Donne le module et un argument de α^2 .

c- Déduis-en le module et un argument de α .

2°) Représente dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité 2 cm, les points M_0 , M_1 et M_2 d'affixes respectives α , $-\alpha$ et α^2 .

3°) a- Déduis de tout ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$ puis $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

b- Calcule α^{2014} sous forme algébrique.

ACTIVITE 18 : cor. p : 242

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et soit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre I passant par les points A, B et C dont les affixes sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$(E): [z^2 - 4(1+i)z + 10i][2z - (1+i)\bar{z} - 2 - 4i] = 0 \text{ avec}$$

$\operatorname{Re}(z_B) < \operatorname{Re}(z_A) < \operatorname{Re}(z_C)$. Soit D un point de $(\mathcal{C})$ tel que : $(\overline{IC}; \overline{ID}) = \frac{\pi}{3}$.

1°) Résous l'équation (E)

2°) a- Détermine les nombres complexes z_A , z_B et z_C

b- Donne la nature du triangle ABC .

3°) Place les points A, B, C, I et D et construis $(\mathcal{C})$

4°) Démontre que le point M d'affixe z appartient à $(\mathcal{C})$ si et seulement si $|z - 3(1+i)| = 2$

ACTIVITE 19 :

1°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_1): z^3 + i = 0$.

Tu donneras les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

2°) a- Résous dans $\mathbb{C}$ $(E_2): [(1-i)z]^3 + i = 0$

Tu donneras les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b- Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{17\pi}{12}$ et

$$\sin\frac{17\pi}{12}$$

ACTIVITE 20 : cor. p : 243

1°) Résous, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes,

$$\text{l'équation : } 2z^2 - 2(1+i)z + \frac{1}{2} + i = 0$$

2°) Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et (E_θ)

$$\text{l'équation : } 2z^2 - (1 + 2\cos\theta + 2i)z + \cos\theta + i = 0 \text{ avec } z \in \mathbb{C}.$$

a- Démontre que l'équation (E_θ) admet une racine réelle que tu calculeras.

b- Calcule l'autre racine en fonction de θ .

3°) Dans le plan complexe rapporté à un repère direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et M

d'affixes respectives $\frac{1}{2}$ et $\cos\theta + i$.

a- Détermine l'ensemble des points M lorsque le réel θ varie dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

b- Calcule AM en fonction de θ et déduis-en la valeur de θ pour laquelle la distance AM est minimale.

ACTIVITE 21 : cor. p : 244

z_1 et z_2 sont deux nombres complexes.

1°) Démontre que $|z_1 - z_2| = |1 - \overline{z_1} \cdot z_2| \Leftrightarrow |z_1| = 1$ ou $|z_2| = 1$

2°) On suppose que $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$ et $1 + z_1 z_2 \neq 0$.

On pose $u = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ et $v = \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2}$

Démontre que $u \in \mathbb{R}$ et $v \in i\mathbb{R}$

ACTIVITE 22 : cor. p : 244

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les points A, B, C, D, E et F

d'affixes respectives $a = -1 + i$; $b = \frac{1}{2}i$; $c = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$; d ; e et f .

1°) Mets sous forme trigonométrique les nombres

complexes : $u = \frac{a-b}{b-c}$ et $v = \frac{a-b}{a-c}$.

2°) Déduis-en la nature du triangle ABC.

3°) Détermine le quotient $Z = \frac{e-d}{f-d}$ sachant que DEF

est un triangle isocèle rectangle en F direct. Donne la

forme algébrique de $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Z\right)^{2306}$.

ACTIVITE 23 : cor. p : 245

On donne : $f(z) = z^3 + 2(-\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i$.

1°) a- Prouve que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pur z_0 que tu détermineras.

b- Résous alors l'équation $f(z) = 0$. Tu noteras z_1 et z_2 les deux autres racines ; z_1 est celle qui a une partie imaginaire négative.

2°) On pose $\omega = \frac{z_1}{z_0}$

a- Donne la forme trigonométrique de ω .

b- le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ à tout nombre complexe z non nul on associe les points M ; M_1 ; M_2 d'affixes

respectives z ; ωz ; $\omega^2 z$. Démontre que OMM_1M_2 est un losange.

ACTIVITE 24 : cor. p : 245

1°) Prouve que $ie^{\frac{i\pi}{6}} = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2$

2°) Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes,

l'équation : $z^2 - 2\left(e^{\frac{i\pi}{12}}\right)z + (1-i)e^{\frac{i\pi}{6}} = 0$

3°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$e^{\frac{i\pi}{3}}$, $e^{\frac{i\pi}{12}}$ et $e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{12}}$

a- Justifie que le quadrilatère OACB est un losange.

b- Place les points A, B et C dans le repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

c- Calcule l'aire du losange OACB

ACTIVITE 25 : cor. p : 246

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes

Respectives 1 et $a = \sqrt{3} + i$.

1°) a- Donne la forme exponentielle de a .

b- Construire le point A.

2°) Soit B le point d'affixe $b = \frac{a-1}{1-\overline{a}}$

a- Vérifie que $b\overline{b} = 1$. Déduis-en que le point B appartient au cercle (C).

b- Prouve que $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel. Déduis-en que les points A, B et I sont alignés

c- Construire le point B dans le repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

3°) Soit θ un argument du nombre complexe b .

Démontre que $\cos \theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin \theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

ACTIVITE 26 :

1°) Linéarise : $\cos^5 x$; $\sin^5 x$; $\cos^3 x$; $\sin^3 x$

2°) a- Ecris $\cos(4x)$ en fonction de $\sin x$.

b- Ecris $\sin(4x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

c- Ecris $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

d- Ecris $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.

3°) Déduis-en une linéarisation de :

$A = \cos(4x)\sin x$;

$B = 4\cos^3 x - 3\cos x - 4\sin^3 x + 3\sin x$

γ et $D = \sin(3x) \sin^2 x$

ACTIVITE 27 :

1°) a- Calcule le module et un argument du nombre

complexe $\omega = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4}$

b- Déduis-en ses racines carrées.

2°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 + (\sqrt{3} - 7i)z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$$

3°) Soit z_1 la solution imaginaire pur et l'autre solution

z_2 . Prouve que $\omega = \frac{z_2 - 2i}{z_1 - 2i}$.

4°) Dans le plan complexe, rapporté à un repère

orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne A, B et C les points d'afixes respectives $2i$, z_1 et z_2 . Précise la nature du triangle ABC en utilisant 1°) a-

ACTIVITE 28 : cor. p : 247

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère l'équation (E)

suyvante dans $\mathbb{C}$: $z^3 - (2+i)z^2 + (1-6i)z - 8-i = 0$.

1°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) sachant que le point image d'une des solutions appartient à la droite d'équation : $x = 0$.

2°) A, B et C sont les points images des solutions de l'équation (E), A est un point de la droite d'équation $x = 0$, B est le point d'abscisse négative.

- Détermine que ABC est un triangle isocèle.
- Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Prouve que A est l'orthocentre du triangle HBC.

3°) a- Détermine les triplets $(a; b; c)$ de nombre réels tels que O soit le barycentre du système de points pondérés

$$\{ (A, a), (B, b), (C, c) \}.$$

b- Pour tout réel k, on désigne par (C_k) l'ensemble des points M du plan (P) tels que :

$$4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 2k^2.$$

Démontre que (C_k) est l'ensemble des points M de (P) tels que : $8MO^2 + 4OA^2 + 3OB^2 + OC^2 = 2k^2$

c- En discutant suivant les valeurs du réel k, détermine l'ensemble (C_k) .

ACTIVITE 29 :

Soit l'application :

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto f(z) = z^3 - 3(1+i)z^2 + (3+10i)z + 3(1-3i)$$

1°) Détermine les nombres complexes a , b et c pour que $f(z) = (z-1-i)(az^2 + bz + c)$

2°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$

3°) Prouve que les points images dans le plan complexe, des solutions de cette équation sont alignés.

ACTIVITE 30 :

Soit le polynôme complexe $P(z)$ de la variable complexe

$$z$$
 définie par : $P(z) = z^3 - (7+9i)z^2 + (39i-14)z + 50$

1°) Prouve que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine réelle que tu détermineras.

2°) Déduis-en une résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

3°) Soient A ; B ; C les points images respectives des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

- Place dans le plan muni d'un repère orthonormé ces points
- Déduis-en la nature du triangle ABC.
- Donne une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

ACTIVITE 31 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère le polynôme complexe $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$f(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+3i)z - 4(2+4i).$$

1°) a- Démontre que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pur dont tu préciseras.

b- Déduis-en une résolution dans $\mathbb{C}$, de l'équation $f(z) = 0$.

2°) Soient A, B et C les points d'afixes respectives $2i$, $3+i$ et $2-2i$.

- Place les points A, B et C.
- On pose : $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. Donne la forme algébrique de Z et déduis le module et un argument de Z.
- Interprète géométriquement le module et un argument de Z.

3°) Soit D le point d'affixe z_D tel que :

$$z_D - z_C = z_A - z_B.$$

Détermine les coordonnées de D puis le placer sur la figure précédente.

4°) Déduis-en la nature du quadrilatère ABCD.

ACTIVITE 32 :

Soit le polynôme complexe : $P(z) = z^3 - iz^2 - 11z + 50$

1°) Calcule $P(3i)$.

2°) Détermine les complexes a et b tels que :

$$P(z)(z-3i)(z^2 + az + b)$$

3°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$

4°) Place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (unité 1 cm), les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3i$, $z_B = -4 - i$ et $z_C = 4 - i$.

- Calcule $|z_B - z_A|$, $|z_C - z_A|$ et $|z_C - z_B|$.
- Déduis-en la nature du triangle ABC.
- Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MB^2 + MC^2 + 64$.

ACTIVITE 33 :

Le plan est rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1°) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $\left(z + \frac{1}{2} + i\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$

2°) On donne les points $A(-1; -5)$ et $B\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$. A tout

point M d'affixe z , ($z \neq -1 - 5i$)

On associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = 3i \times \left(\frac{z - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}i}{z + 1 + 5i} \right)$$

- Détermine l'ensemble (Γ) des nombres complexes tels que : $z' = z$.
- Détermine l'ensemble (E) des points M tels que : $|z'| = 3$.
- Détermine l'ensemble (Δ) des points M tels que M' décrit le cercle de centre, l'origine O du repère et de rayon 1.
- Détermine et construis l'ensemble (F) des points M tels que M' décrit le demi axe $[O; \vec{u})$ privé de $\{0\}$.

ACTIVITE 34 : cor. p : 248

Soit le polynôme P à variable complexe z définie par : $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (a+ib)z - 8 - 16i$, où a et b sont des nombres réels non nuls.

1°) Détermine les valeurs de a et b pour que $2i$ soit une solution de l'équation $P(z) = 0$.

2°) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i = 0.$$

3°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm, on considère les points I, J, K et A d'affixes respectives : $z_I = 2i$, $z_J = 3+i$, $z_K = 2-2i$ et $z_A = \sqrt{3} + i$.

- Place les points I, J et K. A l'aide d'un compas et d'une règle non graduée, construis le point A.

- Démontre que les droites (JI) et (JK) sont perpendiculaires.

4°) Soit B le point du plan tel que $z_B = \bar{z}_A$.

- Calcule les distances OA, OB et AB. Déduis-en la nature du triangle AOB.
- Calcule l'affixe du point C pour que AOBC soit un losange.

5°) Soit S la similitude plane directe qui transforme B en C et laisse invariant le point O.

Détermine l'expression complexe de S et précise ses éléments caractéristiques.

ACTIVITE 35 :

On pose : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$

1°) α désigne un complexe quelconque. Prouve que :

$$P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}.$$

Déduis-en que si $P(\alpha) = 0$, alors $P(\bar{\alpha}) = 0$.

2°) Calcule $P(1-i)$, déduis-en les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3°) Place les points images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

4°) Démontre que tous ces points appartiennent à un même cercle dont tu préciseras le centre et le rayon (points cocycliques).

ACTIVITE 36 :

Résous dans $\mathbb{C}$ les systèmes :

$$S_1 : \begin{cases} 5iz + (2-i)z' = 1 + 12i \\ (2-3i)z + (5-2i)z' = 39 - 10i \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} 2iz + (1-3i)z' = 14 + 6i \\ (1-i)\bar{z} + (5-2i)\bar{z}' = 4 - 18i \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} (1+i)z_1 + 2i\bar{z}_2 = 3 - i \\ 2z_1 + 3\bar{z}_2 = 5 \end{cases}$$

$$S_4 : \begin{cases} 2iz + 2z' = 4 - 4i \\ (1+i)z - 2z' = -5 + 7i \end{cases}$$

$$S_5 : \begin{cases} 2z_1z_2 = 3 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$S_6 : \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 1 \\ z_1z_2z_3 = 1 \end{cases}$$

ACTIVITE 37 :

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par : $f(z) = az^3 + bz^2 + cz$ où a, b, c appartiennent à $\mathbb{C}$.

1°) Détermine a, b, c sachant que : $f(1) = -3 + 4i$;
 $f(i) = -4 - 3i$; $f(-i) = 10 + 5i$

2°) a, b, c ayant les valeurs trouvées à la question précédente, résouds dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

ACTIVITE 38 :

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni du repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère le polynôme $P(z)$ défini par :

$$P(z) = z^3 + (3 + 3i)z^2 + (3 + 14i)z - 23 + 11i \text{ où } z \in \mathbb{C}.$$

1°) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet deux racines dont les points images sont symétriques par rapport au point $I(-1; 0)$. (On notera z_1, z_2 et z_3 les solutions telles que :

$$\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2) < \operatorname{Re}(z_3).$$

2°) On désigne par A, B et C les images respectives de z_1, z_2 et z_3 .

- Détermine l'abscisse du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
- Détermine l'abscisse de l'isobarycentre G des points A, B, C
- Faire une figure soignée comportant le parallélogramme, G et I.

ACTIVITE 39 : (Extrait BAC 2014 Burkina-Faso)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité 2 cm. On considère l'application f

définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = -\frac{1}{z}$. f est l'application du plan

$\mathcal{P}$ privé de O dans lui-même qui à tout point M d'abscisse z , associe le point M' d'abscisse $z' = f(z)$.

1°) On pose $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Exprime le module et un argument de $f(z)$ en fonction de r et θ .

2°) On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ où Z est l'abscisse du milieu de $[MM']$; x, y, X, Y sont des réels.

- Exprime X et Y à l'aide de x et y.
- Détermine et représente l'ensemble (E) des points M tels que I appartienne à l'axe $(O; \vec{u})$.
- Détermine et représente l'ensemble (F) des points M tels que I appartienne à l'axe $(O; \vec{v})$.

3°) On suppose $|z| = 1$. On pose donc $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$

- Calcule Z en fonction de θ .
- Caractériser géométriquement la restriction de F au cercle de centre O et de rayon 1.

ACTIVITE 40 :

1°) détermine les racines quatrièmes de: $16 - 16i$ et écris les racines sous forme trigonométrique

2°) détermine les racines cinquièmes de i et écris les racines sous forme trigonométrique

3°) détermine les racines quatrièmes de $(1-i)^3$ et écris les racines sous forme trigonométrique

4°) détermine les racines cubiques de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et écris les racines sous forme trigonométrique

ACTIVITE 41 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'abscisses respectives

$$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

1°) a- donne l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexe a et b

b- vérifie que $b^2 = a$

2°) soit C le point d'abscisse $c = a + b$

a- Place les points A, B et C

b- vérifie que $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

3°) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + z - c = 0$

a- vérifie que b est une solution de l'équation (E)

b- On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E).

Prouve que $d = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\frac{-11\pi}{12}}$

c- Place alors le point D d'abscisse d .

ACTIVITE 42 :

1°) Détermine l'ensemble (E) des points M d'abscisse z tels que :

$$a- |\bar{z} + 1 + i| = |z + 2\sqrt{3} - 2i|$$

$$b- |z + 1 + i| = |2z + 2\sqrt{3} - 2i|$$

ACTIVITE 43 :

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . On considère le polynôme :

$$P(z) = z^3 + (2i + 1)z^2 + (1 + 2i)z + 2i$$

1°) a- Démontre que $P(z)$ admet une racine imaginaire pure que tu détermineras.

b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2°) On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

a- Calcule IA ; IB et AB.

b- Dédus-en la nature du triangle IAB.

3°) a- Détermine les coordonnées de l'isobarycentre G des points I, A et B.

b- Détermine l'équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle IAB.

c- Détermine l'affixe du point D du plan pour que le quadrilatère IABD soit un losange.

4°) a- Ecris $z_1 = \frac{2z_B}{-1+i}$ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

b- Dédus-en la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

c- z_0 est une racine carrée de z_1 . Ecris sous forme algébrique z_0^{2010} .

ACTIVITE 44 : cor. p : 249

On considère le nombre complexe $X = \frac{a+ib}{2-5i}$ avec

$(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

1°) Détermine a et b pour que X ait pour module $\sqrt{2}$ et pour un argument $\frac{3\pi}{4}$.

2°) k étant un nombre entier naturel, prouve que la

somme : $S = \left(\frac{3+7i}{2-5i}\right)^{4k} + \left(\frac{3+7i}{2-5i}\right)^{4k+4}$ est un réel et la calculer. Précise son signe.

3°) a- Calcule $[(2-5i)(-1+i)]^4$

b- Dédus-en la résolution de l'équation

$$(E): z^4 + 164 + 3360i = 0.$$

ACTIVITE 45 : cor. p : 249

Soit α un élément de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et u le nombre complexe de module 1 et d'argument α .

On pose $z = u^7 + \bar{u}^5$ où $\bar{u}$ désigne le conjugué de u .

1°) Justifie que $z = (2 \cos 6\alpha)e^{i\alpha}$.

2°) a- Résous dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, l'inéquation $\cos 6\alpha > 0$.

b- Détermine suivant les valeurs de α , le module et un argument de z .

3°) Dans cette question, on prend $\alpha = \frac{\pi}{24}$.

Représente dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, le point image de z

ACTIVITE 46 : cor. p : 250

On considère l'équation du second degré en z :

$$(E): z \in \mathbb{C}, \quad z^2 + 2z \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0 \text{ où } \theta \text{ est un}$$

paramètre réel, tel que : $\theta \in [-\pi; \pi]$.

1°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

2°) Précise selon les valeurs de θ le module et un argument de chacune des solutions de l'équation (E) .

ACTIVITE 47 : (extrait bac F6 2015 Sénégal)

1°) Prouve que $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

2°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

3°) Dédus-en des questions précédentes les solutions

dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $(E): z^3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

Tu donneras les solutions sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

ACTIVITE 48 : (d'après concours APE)

Soit l'expression $E(z) = z^3 - 2 - 11i$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1°) Développe et écris $(2+i)^3$ sous forme algébrique.

2°) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $E(z) = 0$, en désignant ses trois solutions par z_0 , z_1 et z_2 .

3°) Calcule les nombres $\alpha = z_0 + z_1 + z_2$ et $\beta = z_0 z_1 z_2$.

4°) Si M_0 , M_1 et M_2 sont les points-images de z_0 , z_1 et z_2 respectivement, détermine l'affixe z_3 du point M_3 tel que M_0 , M_1 , M_2 et M_3 soient les sommets d'un parallélogramme.

2. LIMITES ET CONTINUITÉS

ACTIVITE 1 : cor. p : 251

Trouve l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{|x^2 + x + 1| + 2} ; g(x) = \frac{|3x + 4|}{|2x + 1| + |-x + 1|} ;$$

$$h(x) = \sqrt{|x + 1| - 1} ; i(x) = \sqrt{(-x - 3)^2 + 2} ;$$

$$j(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{|2x^2 + x + 1| - 2} ; k(x) = \frac{|3x + 4|}{|2x + 1| + |-x + 1|} ;$$

$$l(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x - 3}} ; m(x) = \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 3}} ; n(x) = \sqrt{\frac{2x - 3}{x - 5}} ;$$

$$p(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{2x^2 + x + 1} - 3} ;$$

$$q(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ x + 3 + \sqrt{\frac{x + 4}{x + 1}} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases} ;$$

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1 - x}{1 + x^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} ; v(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

ACTIVITE 2 : cor. p : 251

Calcule les limites suivantes :

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} ; l_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (1 + \sqrt{x}) ;$$

$$l_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 3}{5x + 4} ; l_4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + 4} ;$$

$$l_5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-7x^3 + x^2 - 1) ; l_6 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + x + 3}{8x + 2} ;$$

$$l_7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \sqrt{x}) ; l_8 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 - \sqrt{x}) ;$$

$$l_9 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{3 - \sqrt{x}} ; l_{10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 3} ;$$

$$l_{11} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} + 2x ; l_{12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x - 1}{2x}\right) ;$$

$$l_{13} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{3 + 2 \cos x} ; l_{14} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + x}{\sin(3x) - x^2} ;$$

$$l_{15} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} ; l_{16} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} ;$$

$$l_{17} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{(x - 1)(x + 2)} ; l_{18} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} ;$$

$$l_{19} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} ; l_{20} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{x - 1} ;$$

$$l_{21} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x + 6} - 4}{\sqrt{x + 4} - 3} ; l_{22} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x - 12}{x^3 - 8} ;$$

$$l_{23} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x - 2)^2 - 4} ;$$

$$l_{24} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{2x^2 + 7} - 5}{x^2 - 1} ; l_{25} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} ;$$

$$l_{26} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{8}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} ; l_{27} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - 2x ;$$

$$l_{28} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} - 2x}$$

ACTIVITE 3 : cor. p : 251Soit h la fonction numérique définie

$$h : x \mapsto \frac{\sqrt{3x + 10} - x}{\sqrt{2x^2 - 2x - 4} - x - 1}$$

1°) Détermine le domaine de définition D de h .2°) Calcule $\lim_{x \rightarrow 5} h$ 3°) Peut-on prolonger h par continuité en 5 ? si oui définir le prolongement.**ACTIVITE 4** :

$$\text{Soit la fonction } f : x \mapsto \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}.$$

1°) Précise le domaine de définition de f , puis écris le symbole de valeur absolue.2°) Trouve les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels f est continue.3°) Etudie la limite éventuelle de f au point $x_0 = 0$.4°) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en $x_0 = 0$? Si oui donne le prolongement par continuité en $x_0 = 0$.**ACTIVITE 5** : cor. p : 252Soit la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - 1} & , \text{si } x > 1 \\ f(x) = x^3 + 3x - 2 & , \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

1°) Détermine l'ensemble de définition de f et calcule les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.2°) Justifie que f est continue sur $\mathbb{R}$.3°) a- démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $] -1; 1[$.b- vérifie que $0,5 < \alpha < 0,75$.c- détermine le signe de $f(x)$ sur $] -1; 1[$.

ACTIVITE 6 : cor p : 252

I/

Soit une fonction numérique g définie par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$

1°) Détermine l'ensemble de définition D de la fonction g .2°) Calcule les limites de g aux bornes de D .3°) On donne une fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = g(x) ; \text{ si } x \in D \\ h(3) = m \end{cases}$$

Détermine m pour que la fonction h soit le prolongement par continuité de g en 3

II/

On donne f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{|x|}}$ 1°) Justifie que f est continue sur son ensemble de définition.2°) Ecris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue3°) Soit a et b deux réels positifs.

- a- Démontre que $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
- b- Déduis-en le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
- c- Détermine les limites de f à $+\infty$ et à $-\infty$

4°) On pose : $I = [0; +\infty[$

- a- Détermine $f(I)$.
- b- Soit k l'application de I vers $f(I)$ telle que $k(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Démontre que k est une bijection.5°) On pose : $l(x) = f(x) - \frac{1}{2}$

- a- Démontre que l'équation $l(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[0,8; 1,1]$.
- b- Déduis-en que α est solution de l'équation

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

ACTIVITE 7 :1- Soit g la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

1°) a- Justifie que g est continue sur $[-1; +\infty[$.b- Calcule alors $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.2/ Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ a- Détermine le domaine de définition D_f de f .b- Démontre que $\forall x \in D_f$, $f(x) = g(x)$.c- En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et définir la fonction prolongée F de f .II- soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & , \text{ si } x \in [-1; 0[\cup]0; +\infty[\\ \frac{1}{2} & , \text{ si } x = 0 \\ \frac{x^2 - 3x - 4}{x+1} + m & , \text{ si } x < -1 \end{cases}$$

3°) Justifie la continuité de h sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.4°) Prouve que $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = m - 5$.5°) Pour quelle valeur de m ; h est continue en -1 .**ACTIVITE 8** : cor. p : 254On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{x - 1}$ 1°) Soit la fonction u définie par : $u(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

- a- Etudie les variations de u
- b- Démontre que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{2}{3}$.
- c- Déduis le signe de $u(x)$.

2°) a- Détermine l'ensemble de définition D de f et les limites de f aux bornes de D .b- Justifie que $\forall x \in D$, $f'(x) = \frac{u(x)}{(x-1)^2}$.c- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.3°) a- Justifie que $f(\alpha) = \frac{1}{2} \left(3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha - 1} \right)$ b- Encadre $f(\alpha)$, puis déduis le signe de $f(\alpha)$.c- Justifie que (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse x_0 puis déduis le signe de $f(x)$. $g :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ 4°) Soit l'application $x \mapsto g(x) = f(x)$ a- Démontre que g admet une application réciproque g^{-1} .b- Détermine $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$ c- Démontre que la droite $(\Delta) : y = m$ $(m \in \mathbb{R})$ coupe une seule fois la courbe (C) dans l'intervalle $]1; +\infty[$.

3. ACTIVITES SUR LA DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

ACTIVITE 1:

Calcule les limites suivantes en utilisant les nombres dérivés :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{1-x} ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \sin x - \sqrt{2}}$$

ACTIVITE 2:

Après avoir déterminé l'ensemble de définition des fonctions suivantes, étudie leur dérivabilité en x_0 indiqué puis interprète tes résultats.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}, & \text{si } x \in x < 1 \\ f(x) = (x + 1)\sqrt{x^2 - 1}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} ; x_0 = 1$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 - x}, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} ; x_0 = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-mx}{x-1} + \sqrt{1-x}, & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ f(x) = (1-mx)\cos x, & \text{si } x \in [0; \pi] \end{cases} ; x_0 = 0 \text{ et } m \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, & \text{si } x \in]-\infty; 1[\\ f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x+1}, & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases} ; x_0 = 1$$

ACTIVITE 3: cor. p : 256

$$\text{Soit } I = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 + \sin 3x + 2 \cos 2x}{x \tan \left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$$

Calcule I (ne justifie pas l'existence de I a priori)

Tu pourras poser $X = x - \frac{\pi}{3}$ et utilisé le développement

limité d'ordre 3 des fonctions : $x \mapsto \sin 3x$; $x \mapsto \cos 2x$ et $x \mapsto \tan x$

ACTIVITE 4 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

1°) a- Détermine le domaine de définition E de f et calcule les limites de f aux bornes de E .

b- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

c- Etudie les branches infinies de la courbe (C_f) représentative de la f .

$$2^\circ) \text{ Soit } I = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

a- Démontre que $\forall x \in I, f(x) \in I$

b- Démontre qu'il existe un réel $k \in]0; 1[$ tel que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$

c- Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I .

d- Démontre que $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq k|x - \alpha|$

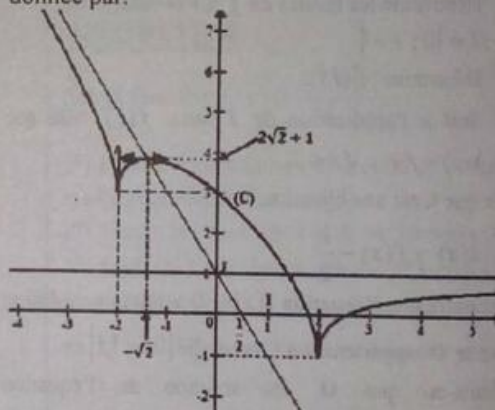
$$3^\circ) \text{ Soit l'application } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto g(x) = f(x)$$

a- Démontre que g est une bijection et sa bijection réciproque g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

b- Calcule $(g^{-1})'(\alpha)$ sans le symbole $\sqrt{}$

ACTIVITE 5: cor. p : 256

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ du plan, la courbe (C) d'une fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est donnée par:



Réponds aux consignes suivantes en observant la courbe représentative (C) de la fonction f .

1°) a- Quel est l'ensemble de définition D de la fonction f .

b- Quel est l'ensemble de dérivabilité E de f ?

2°) Ecris les systèmes définissant les demi-tangentes à la courbe (C) en ses points d'abscisses respectives -2 et 2 .

3°) a- Donne les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b- Précise les branches infinies de la courbe (C) .

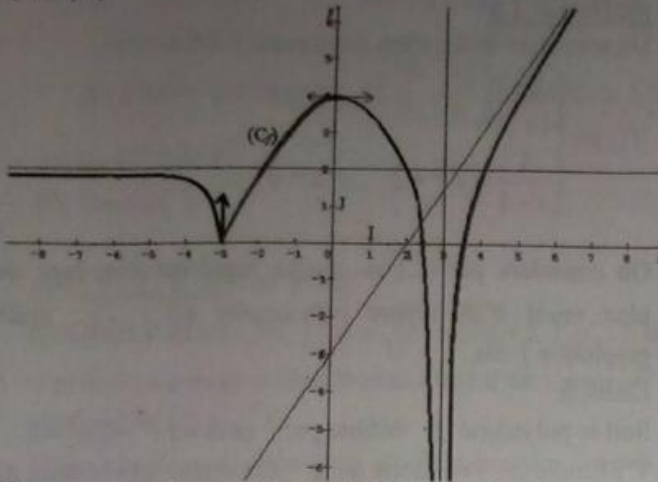
4°) Dresse le tableau de variations de f .

5°) Donne $f([0; 2])$.

6°) Démontre que l'équation $f(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α tel que $0 < \alpha < 2$.

ACTIVITE 6 :

Soit la fonction f définie par sa représentation graphique (C_f) dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$



- 1°) Détermine l'ensemble de définition D_f de f
- 2°) Détermine les limites aux bornes de D_f .
- 3°) a- la fonction f est-elle continue ; dérivable en -3 . Justifie ta réponse
b- Dresse le tableau de variation de f .
- 4°) Donne une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) en $x = 0$.
- 5°) Prouve que la restriction g de la fonction f à $[0; 3[$ est une bijection de $[0; 3[$ sur une partie J de $\mathbb{R}$ que tu présideras.
- 6°) Détermine les équations des asymptotes à la courbe (C_f) de f .
- 7°) Détermine graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

ACTIVITE 7 :

Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n, \quad f(x) = \cos^2\left(5x - \frac{1}{x}\right);$$

$$f(x) = \cos(\cos x); \quad f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2(x\sqrt{x})}$$

ACTIVITE 8 :

Etudie les variations de chacune des fonctions suivantes et tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$

$$f(x) = (x+2)^2(x-1); \quad f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-2};$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \quad f(x) = \frac{1}{x^2}; \quad f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 + x};$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}; \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1}; \quad f(x) = x\sqrt{x};$$

$$f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}; \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 2};$$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}; \quad f(x) = x|x|; \quad f(x) = |x+1| + \frac{1}{x-1};$$

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-1}}; \quad f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}};$$

$$f(x) = \cos 2x - 2 \cos x.$$

ACTIVITE 9 :

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 2x} & , \text{ si } x \geq 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}} & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

- 1°) Justifie que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- 2°) Prouve que f est continue en 0.
- 3°) Etudie la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0. Interprète graphiquement les résultats obtenus.
- 4°) a- Démontre que la droite $(D): y = 2x + 1$ est une asymptote de (C_f) .

b- Etudie la position de (C_f) par rapport à D .

5°) Calcule la limite de f en $-\infty$. Interprète ce résultat.

6°) Trace (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Activité 10 :

1°) Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = -1 + \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 - x}}$$

a- Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interprète

graphiquement les résultats obtenus.

b- Vérifie que pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{2(x^2 - x)\sqrt{x^2 - x}}$$

c- Etudie les variations de f et déduis-en que pour tout x : $f(x) > 0$

2°) Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - x} \quad \text{et } (C_g) \text{ sa courbe représentative}$$

dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a- Etudie la dérivabilité de g à droite en 1. Interprète graphiquement ce résultat.

b- Détermine $g'(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$. (Tu exprimeras $g'(x)$ fonction $f(x)$)

c- Dresse le tableau de variation de g .

d- Justifie que la droite $(D): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est asymptote de (C_g) .

3° a- Vérifie que g réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle J que tu précises.

b- Calcule $(g^{-1})'(1)$. (g^{-1} étant la fonction réciproque de g)

4° Trace (D) , (C_g) et $(C_{g^{-1}})$: la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

ACTIVITE 11 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm)

Soit f la fonction numérique définie par :

$$g(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \text{ et } (\mathcal{C}) \text{ sa courbe représentative}$$

1° Détermine l'ensemble de définition D de g .

2° Calcule les limites de g aux bornes de D .

3° Etudie les branches infinies.

4° Etudie les variations puis dresse le tableau de variation de g .

5° Trace la courbe $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes.

ACTIVITE 12 :

On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 2}, & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, & \text{si } x < 1 \end{cases} \text{ et } (C) \text{ sa courbe}$$

représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1° Détermine le domaine de définition D de la fonction h , puis étudie les limites aux bornes de D .

2° Etudie la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse 1. Interpréter les résultats.

3° Détermine une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ de la courbe $(\mathcal{C})$ puis étudie sa position par rapport à $(\mathcal{C})$.

4° a- Détermine l'ensemble de dérivabilité de h puis calcule $h'(x)$.

b- Dresse le tableau de variation de h .

5) Soit g l'application définie par :

$$g:]1; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[\\ x \mapsto g(x) = f(x)$$

a- Démontre que g est une bijection.

b- Donne le sens de variation de g .

c- Etudie la dérivabilité de g en 2, puis calcule $(g^{-1})'(2)$

d- Explicite $g^{-1}(x)$

e- Trace les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ courbe de g^{-1}

Activité 13:

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x^3}, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x-1} - \sqrt{x} + 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On considère par (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 1 cm.

Partie A

Soit le polynôme g définie par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1° Etudie les variations de g puis dresse son tableau de variation.

2° a- Détermine $g(-\infty; 0])$

b- Déduis-en le signe de $g(x)$ pour tout $x \leq 0$

Partie B

3° a- Justifie que f est définie sur le domaine $D =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

b- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

c- Interprète géométriquement les résultats de l'étude de dérivabilité.

4° a- Calcule les limites de f aux bornes de D .

b- Démontre que pour tout $x \leq 0$; on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$$

c- Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

5° a- Démontre que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives α et β et que $0 < \alpha < 0,5$; $5 < \beta < 5,5$.

b- Déduis-en le tableau de signe de f pour tout $x \in D$

6° a- Etudie les branches infinies de (C) .

b- Trace (C) .

Partie C :

Soit l'application $h:]-1; 1[\rightarrow f(]-1; 1[)$
 $x \mapsto h(x) = f(x)$

7° a- Détermine $J = f(]-1; 1[)$.

b- Démontre que h^{-1} est une bijection de J sur $I =]-1; 1[$.

c- Justifie que h^{-1} est dérivable sur $J - \{1\}$ puis démontre que : $(h^{-1})'(0) = -\frac{(4\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}{4\alpha - 2 + (\alpha - 1)^3}$.

d- Justifie que le point $A\left(\frac{12}{7}; \frac{-1}{2}\right)$ appartient à la courbe (C') de h^{-1} .

8°) Trace (C')

ACTIVITE 14: cor p : 257

La fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x$; (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a- Justifie que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ puis écris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

b- Etudie la dérivabilité de f en 0 et en 2. Interprète les résultats obtenus.

2°) Etudie les branches infinies à la courbe (C_f)

3°) a- Détermine l'ensemble de dérivabilité D' de f puis calcule la fonction dérivée $f'(x)$.

b- Démontre les équivalences suivantes :

$$i) \quad \sqrt{x^2 - 2x} - 1 + x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0]$$

$$ii) \quad \sqrt{-x^2 + 2x} + 1 - x < 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2\right]$$

c- Déduis-en le tableau de signe de $f'(x)$.

d- Etablis le tableau de variation de f .

4°) Soit la fonction φ définie par :

$$\varphi: \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2\right] \rightarrow f\left(\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2\right]\right)$$

$$x \mapsto \varphi(x) = f(x)$$

a- Démontre que φ admet une bijection réciproque φ^{-1} .

b- Démontre que le point $A(2; 1)$ appartient à la courbe (Γ) de φ^{-1} .

c- Déduis-en l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (Γ) au point d'abscisse 2.

d- Détermine l'ensemble de dérivabilité K de la fonction φ^{-1}

5°) Représente la courbe (C_f) et la courbe (Γ) dans le même repère

ACTIVITE 15 :

Partie A :

Soit $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -x^3 + x^2 + x + 1$$

1. Etudie les variations de U

2. Démontre que l'équation $U(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{3}{2} < x_0 < 2$.

3. Donne le signe de $U(x)$.

Partie B :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x-1-\sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

4. Etudie la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse $a = 1$.

5. Achève l'étude des variations de f .

6. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Ecris les équations des demi tangentes éventuelles à (C) au point $a = 1$.

b) Etudie les branches infinies de (C) .

c) Etudie la position de (C) par rapport à la droite d'équation $y = x - 1$ dans le demi-plan d'équation $x \geq 1$.

d) Détermine les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

e) Construis (C) .

7. On pose : $I =]-\infty; -1[$

Soit l'application $g: I \rightarrow f(I)$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

a) Démontre que g admet une application réciproque g^{-1} .

b) Détermine l'ensemble de dérivabilité de g^{-1} .

c) Construis la courbe (C') de g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

d) Démontre que le point $A\left(\frac{3}{5}; 2\right)$ appartient à (C') puis détermine le coefficient directeur à (C') au point A .

ACTIVITE 16 : cor. p : 259

Soit f la fonction numérique la variable réelle x définie

par :
$$\begin{cases} f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
 et on désigne par

(Γ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé ($O ; I, J$).

1°) a- étudie les variation de la fonction numérique g définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$

b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1; +\infty[$ et vérifie que $1,28 < \alpha < 1,3$.

c- Détermine le signe de g sur $]1; +\infty[$.

2°) a- Justifie que l'ensemble de définition D de f est $[-1; +\infty[$.

b- Etudie la continuité de f en 1.

3°) a- Etudie la dérivabilité de f en -1 et en 1 puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.

b- Détermine l'ensemble de dérivabilité de f .

4°) a- Démontre que :

- Pour tout x élément de $]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
- Pour tout x élément de $]1; 1[$,

$$f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b- Etudie le signe de f' sur $]1; 1[$

5°) Justifie que : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha} - \alpha^2$ et $-0,07 < f(\alpha) < 0,16$.

6°) Dresse le tableau de variation de f sur $[-1; +\infty[$

7°) Etudie les branches infinies puis donne l'allure de (Γ) dans le repère orthonormé ($O ; I, J$)

ACTIVITE 17 : cor. p : 261

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + \frac{1}{x^2 + 1}, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1}{5} \left(4x + 13 - \frac{8}{\sqrt{x-1}} \right), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé ($O ; I, J$)

1°) a- Détermine l'ensemble de définition E de f

b- Etudie les limites de f aux bornes de E

c- Ecris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue

d- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0 puis interprète les résultats obtenus.

2°) a- Définis la fonction dérivée f' de f .

b- Etudie le sens de variation de f et donne un tableau.

c- Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles x_1, x_2 et x_3 .

d- Vérifie que $-0,5 < x_1 < 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$ et $1 < x_3 < 1,5$

e- Déduis-en le signe de $f(x)$ pour tout $x \in E$

3°) a- Etudie les branches infinies de (C)

b- Trace (C) avec soin.

4°) Soit $I =]1; +\infty[$ et g l'application définie de I dans $f(I)$ par : $g(x) = f(x)$

a- Démontre que g admet une application

reciproque g^{-1} dont tu détermineras l'ensemble de définition J .

b- Calcule $(g^{-1})'(0)$ en fonction de x_3 sans le symbole $\sqrt{}$.

c- Vérifie que le point $A\left(\frac{13}{5}; 2\right)$ est un point de la

courbe (C') de g^{-1} puis donne une équation cartésienne de la tangente (T) à (C') au point A .

d- Construis (C')

ACTIVITE 18 :

Partie A :

Soit g la fonction de la variable réelle x définie par

$$g(x) = 4x^3 + x^2 + 1$$

1. Etudie les variations de g .

2. a) Déduis-en que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α .

b) Démontre que $-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{1}{2}$.

3. Détermine, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$

Partie B :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{4x^3 + x^2 + 1}, & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\\ f(x) = \frac{2x+1}{4x^2-4} + \frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{si } x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. Soit D l'ensemble de définition de f .

Démontre que $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

5. a) Etudie la continuité de f en $-\frac{1}{2}$.

b) Etudie la dérivabilité de f en $-\frac{1}{2}$, puis donne une interprétation géométrique du résultat.

6. Etudie les variations de f .

7. a) Etudie les branches infinies de la courbes (C) .

b) construis (C) .

8. On pose $K =]-1; -\frac{1}{2}]$ et $h: K \rightarrow f(K)$

$$x \mapsto h(x) = f(x)$$

a) Détermine $f(K)$ et démontre que h est bijective.

b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (Γ) sa courbe représentative.

Justifie que le point $A\left(\frac{2}{7} + \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ appartient à (Γ) .

Ecris l'équation de la tangente à (Γ) en A .

c) Construis (Γ) dans le même repère que (C) .

ACTIVITE 19 :

On donne la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{5} \left(3x + 4\sqrt{x^2 - 4} \right), \text{ et on désigne } (\Gamma) \text{ la courbe}$$

représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1°) a- Détermine l'ensemble de définition D de f et calcule les limites de f aux bornes de D .

b- Etudie la dérivabilité de f en -2 et en 2 puis interprète graphiquement les résultats obtenus.

c- Détermine la dérivée de f sur chaque intervalle où f est dérivable.

d- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

2°) a- Justifie que les droites $(\Delta_1): y = -\frac{1}{5}x$ et

$(\Delta_2): y = \frac{7}{5}x$ sont asymptotes à (Γ) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

b- Détermine les points de concours de (Γ) avec les axes du repère.

c- Détermine les points de concours de (Γ) avec les droites (Δ_1) et (Δ_2) dans $[-2; 2]$

3°) Soit l'application $g:]-\infty; -2[\rightarrow]-\frac{6}{5}; +\infty[$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

a- Justifie que g admet une bijection réciproque

g^{-1} . Soit (Γ') est la courbe de g^{-1}

b- Etudie la dérivabilité de g^{-1} sur son ensemble de définition.

c- Détermine une équation cartésienne de la tangente (T) à (Γ') en son point d'abscisse 0.

4°) Construis avec soin (Γ) et (Γ')

ACTIVITE 20: cor. p: 263

On considère la fonction $t: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto \sin^2 x$$

1°) Démontre que t est une bijection

2°) a- détermine l'ensemble de dérivabilités D de la bijection réciproque t^{-1} de t

b- Calcule $(t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$

c- Démontre que : $\forall x \in D, (t^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

puis retrouve la valeur de $(t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$

ACTIVITE 21 :

On considère la fonction g définie par :

$$g: \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\sin 2x}{\sin(2x) - 2}$$

1°) Etudie les variations de g

2°) Démontre que g détermine une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$

sur un intervalle I à préciser

3°) On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g .

a- Détermine l'ensemble de dérivabilité J de g^{-1}

et calcule $(g^{-1})'\left(\frac{1}{5}\right)$

b- Calcule $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in J$

ACTIVITE 22 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$. Et on désigne

par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1°) Donne le domaine de définition de f .
- 2°) Démontre que 2π est une période de f .
- 3°) Démontre que le point $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ est un centre de symétrie de (C) .
- 4°) Déduis-en qu'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.
- 5°) a- Prouve que $f'(x) = \frac{-1}{1 + \sin x}$ pour tout $x \in I$.
b- Dresse le tableau de variation de f sur l'intervalle I .
- 6°) Trace la partie de (C) relative à l'intervalle I .

ACTIVITE 23 :

Soit la fonction f définie sur $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$, par : $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

- 1°) Etudie les variations de f .
- 2°) a- Démontre que f est une bijection de $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$ sur $[1; +\infty[$
b- On désigne par g la fonction réciproque de f , calcule $g(1)$, $g(\sqrt{2})$ et $g(2)$.
c- Prouve que g est dérivable sur $]1; +\infty[$ et détermine $g'(x)$, $\forall x \in]1; +\infty[$

ACTIVITE 24 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \sin^2 x + \cos x$, et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1°) a- Démontre que 2π est une période de f .
b- Démontre que f est paire. interprète géométriquement ce résultat.
c- Déduis-en qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$.
- 2°) Etudie les variations de f sur $[0; \pi]$ et dresse son tableau de variation.
- 3°) Prouve que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0; \pi]$.
- 4°) Trace la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

ACTIVITE 25 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\cos(2x)}{(1 + \sin x)^2}$, et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 2°) Démontre que f est de période 2π .
- 3°) a- Prouve que la droite $(\Delta): x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (C) .
b- Déduis-en que l'ensemble d'étude de f est $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.
- 4°) a- Démontre que pour tout $x \in D$, on a : $f'(x) = \frac{-2 \cos x (1 + 2 \sin x)}{(1 + \sin x)^3}$.

b- Dresse le tableau de variation de f sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

- 5°) Trace la partie de (C) relative à l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

Activité 26 :

A°) Soit l'application u définie de $I =]0; \pi[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = 2x - \frac{\cos x}{\sin x}$$

- 1°) Etudie les variations de u .
- 2°) Déduis-en que l'équation $u(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une solution unique α appartenant à $\left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right]$.
- 3°) Etudie le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

B°) Soit l'application f définie de $[-\pi; \pi]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x \cos^2 x$$

- 4°) Donne un encadrement de $f(\alpha)$.
- 5°) Etudie la parité de l'application f . Déduis-en que le domaine d'étude de la fonction f est $E = [0; \pi]$.
- 6°) Etudie les variations de f sur E . (On pourra écrire en fonction de $u(x)$)
- 7°) a- Détermine les tangentes (T_0) et (T_1) à la courbe (C) respectivement aux points d'abscisse 0 et π .
b- Détermine la position de la courbe (C) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

c- Construis la courbe (C) et les tangentes (T_0) et (T_1) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

C°) Soit g la fonction définie sur $K = \left[-\frac{\pi}{2}; \pi \right]$ par

$$g(x) = f(x)$$

- 8°) Démontre que g détermine une bijection de K sur l'intervalle J à préciser.
- 9°) Soit h la bijection réciproque de g . La fonction h est-elle dérivable en 0 ?
- 10°) a- Fais un tableau de variation de h .

b- Détermine le point d'intersection A de la courbe (C') de h et de la droite (Δ).

ACTIVITE 27:

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^3 - x}$

et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$)

1°) Précise l'ensemble D de définition de f.

2°) Détermine les réels a, b et c tels que:

$$f(x) = x + \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} \text{ pour tout } x \in D.$$

3°) a- Démonstre que f est dérivable sur D et que :

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)^3}{(x^3 - x)^2}.$$

b- Dresse le tableau de variation de f.

4°) a- Prouve que : (Δ) : $y = x$ est une asymptote à (C) au voisinage de l'infini.

b- Détermine les asymptotes verticales à la courbe (C).

5°) Démonstre que : f est une fonction impaire.

6°) On pose : $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ et $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

a- Vérifier que α et β sont solution de l'équation $f(x) = 0$.

b- Déduis-en toutes les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

7°) a- Résous, dans D, l'équation $f(x) = x$.

b- Détermine les points d'intersections de (C) et (Δ).

c- Etudie la position relative de (C) et (Δ).

8°) Tracer (C) et (Δ).

9°) Soit $k \in \mathbb{R}$. et P_k la fonction polynôme défini par:

$$P_k(x) = x^4 - kx^3 - 6x^2 + kx + 1.$$

Vérifie que l'équation $P_k(x) = 0$ admet, quelque soit le réel k, quatre racines distinctes.

ACTIVITE 28 :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = |x-3| - \frac{2}{|x|-1}$$

1°) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $|x|-1=0$ puis déduis l'ensemble de définition de f.

2°) Prouve que :

$$\bullet \text{ pour } x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0], f(x) = 3 - x + \frac{2}{x+1},$$

$$\bullet \text{ pour } x \in]0; 1[\cup]1; 3[, f(x) = 3 - x - \frac{2}{x-1}$$

$$\bullet \text{ pour } x \in [3; +\infty[, f(x) = x - 3 - \frac{2}{x-1}.$$

3°) a- Etudie la continuité de f en 0 et en 3.

b- Etudie la dérivabilité de f en 0 et en 3 et donne une interprétation graphique des résultats.

4°) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

5°) a- Calcule sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1; 3\}$, la fonction dérivée f' de la fonction f.

b- Vérifie que f' garde un signe constant, que tu préciseras sur l'ensemble $] -\infty; -1[\cup]-1; 0]$ et sur l'intervalle $[3; +\infty[$.

c- Etudie le signe de la fonction $u : x \mapsto 2 - (x-1)^2$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

d- Donne la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(1 + \sqrt{2})$.

e- Dresse le tableau de variation de f.

6°) a- Prouve que les droites (D₁) et (D₂) d'équations respectives : $y = 3 - x$ et $y = x - 3$ sont asymptotes à la représentation graphique de f respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

b- Etudie la position de la courbe représentative (C) de f par rapport à (D₁) sur $] -\infty; -1[$ et sur $[3; +\infty[$.

c- Précise les autres asymptotes éventuelles.

7°) Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, trace toutes les asymptotes, les demi-tangentes à (C) aux deux points d'abscisses 0 et 3, la tangente au point d'abscisse $1 + \sqrt{2}$ et la courbe (C).

8°) Soit m, un nombre réel. Précise graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$.

9°) soit h la restriction de f à l'intervalle $K =]-\infty; -1[$.

a- Prouve que h définit une bijection de K sur un intervalle L à préciser.

b- Déduis-en que l'équation $x \in \mathbb{R}, h(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifie que $\alpha = 1 - \sqrt{6}$.

c- Déduis-en du 9°) a- que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont tu préciseras l'ensemble de définition et le sens de variation.

d- Quel est la valeur $h^{-1}(0)$? justifie que h^{-1} est dérivable en 0 et calcule $(h^{-1})'(0)$

10°) Trace dans le même repère, la courbe (Γ) représentative de h^{-1} .

4. ACTIVITES SUR LES PRIMITIVES

ACTIVITE 1 :

Détermine les primitives de chacune des fonctions suivante sur I .

$$1^{\circ}) f: x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}; I = \mathbb{R}$$

$$2^{\circ}) f: x \mapsto (2x+1)(x^2+x+1); I = \mathbb{R}$$

$$3^{\circ}) f: x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}; I = \mathbb{R}$$

$$4^{\circ}) f: x \mapsto (2x+1)\sin(x^2+x+1); I = \mathbb{R}$$

$$5^{\circ}) f: x \mapsto \sin x + x \cos x; I = \mathbb{R}$$

$$6^{\circ}) f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; I =]-1; 1[$$

$$7^{\circ}) f: x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}; I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

$$8^{\circ}) f: x \mapsto \cos x \cos 2x; I = \mathbb{R}$$

$$9^{\circ}) f: x \mapsto \frac{x+1}{(x^2+2x)^3}; I =]-2; 0[;$$

$$10^{\circ}) f: x \mapsto \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}; I =]0; +\infty[$$

ACTIVITE 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \cos x$.

1°) Détermine la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x \sin x$

2°) Déduis-en une primitive de f sur $\mathbb{R}$

ACTIVITE 3 :

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie

$$\text{Par : } h(x) = \frac{-2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 2}{(x^3 + x)^2}$$

1°) Détermine l'ensemble de définition D de la fonction h

2°) Trouve les nombres réels a et b tels que : $\forall x \in D$,

$$h(x) = \frac{ax}{(x^2+1)^2} + \frac{b}{x^2}$$

3°) Déduis-en la primitive sur $] -\infty; -1[$ de la fonction h qui prend la valeur 1 en -2

ACTIVITE 4 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty; 2[$,

$$\text{par : } f(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

1°) Détermine les réels a et b , tels que pour tout réel x de l'intervalle $I =]-\infty; 2[$, on ait : $f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$

2°) déduis-en la primitive de f sur l'intervalle $I =]-\infty; 2[$, qui s'annule en $x = 1$.

ACTIVITE 5 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x^2 - x + 1)\sqrt{2x-1} \text{ et la fonction } u \text{ définie par :}$$

$$u(x) = 2x - 1 \text{ et le polynôme } P(x) = x^2 - x + 1.$$

1°) a- Exprime x en fonction de $u(x)$.

b- Exprime $P(x)$ suivant les puissances de $u(x)$.

c- Déduis-en $f(x)$ en fonction de $u(x)$

2°) Détermine la primitive F de f sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ telle que $F(1) = -1$

ACTIVITE 6 :

Soit la fonction f définie sur $] -\infty; \frac{3}{2}[$ par :

$$f(x) = (x^2 + x + 1)\sqrt{3-2x}$$

1°) Démontre que : $x^2 = \frac{(3-2x)^2}{4} - \frac{3(3-2x)}{2} + \frac{9}{4}$

2°) Détermine alors la primitive de f sur $] -\infty; \frac{3}{2}[$ qui s'annule en 1.

ACTIVITE 7 :

Soit $f:]-\infty; \frac{1}{3}[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (1-3x)^5 + 2 \cos \pi x + \left| (2x-1)x^2 \right|$$

1°) Justifie que f admet des primitives sur $] -\infty; \frac{1}{3}[$.

2°) Détermine la primitive G de f sur $] -\infty; \frac{1}{3}[$ qui prend la valeur 1 en 0.

ACTIVITE 8:

Soit $f(x) = \sin(3x) \cos^2 x$

Linéarise $f(x)$ puis déduis-en une primitive de f .

ACTIVITE 9 :

1°) On considère la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, par :

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

a- Justifie que f admet des primitives sur

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

b- Développe $\frac{(1 + \sin x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$ pour tout

$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et déduis-en que :

$$f(x) = 2 \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right] - 1$$

c- Détermine la primitive F de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $F(0) = 2$

2°) Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}$$

et D_g son ensemble de définition.

a- Démontre qu'il existe deux réels A et B tels que l'on ait $\forall x \in D_g$,

$$g(x) = A + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \times B$$

b- Déduis-en les primitives de g sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

5. ACTIVITES SUR LES FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN

ACTIVITE 1 : cor. p : 265

Trouve l'ensemble de définition, puis calcule la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \ln(3x-1) ; f_2(x) = \ln|x^2 - 3x + 2| ;$$

$$f_3(x) = \ln(x^2 - x + 1) ; f_4(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$f_5(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1) ; f_6(x) = \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right) ;$$

$$f_7(x) = (2x+3)\ln x ; f_8(x) = \frac{\ln x}{2-3x} ; f_9(x) = (\ln(x))^2$$

$$; f_{10}(x) = \ln\left(\frac{x+3}{2x+1}\right) ; f_{11}(x) = \sqrt{\ln x} ; f_{12}(x) = \ln \sqrt{x}$$

$$; f_{13}(x) = \ln(\ln x) ; f_{14}(x) = 2\ln(1+x^2) - \frac{1}{x} ;$$

$$f_{15}(x) = \frac{1}{x} + \ln(x^2 - x + 1) ; f_{16}(x) = x(x - (\ln x)^2) ;$$

$$f_{17}(x) = \frac{x \ln(-x)}{x+1} ; f_{18}(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} ;$$

ACTIVITE 2 : cor. p : 266

Calcule les limites suivantes :

$$1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) ; 2 - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\ln\left(\frac{3}{x}\right)} ;$$

$$3 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(3x^2 + x - 1) ; 4 - \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) ;$$

$$5 - \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \ln|x|) ; 6 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{3x+2} ; 7 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} ;$$

$$8 - \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x+3-4\ln x) ; 9 - \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1 - \ln x) ;$$

$$10 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1+3\ln x}{x-\ln x}$$

$$11 - \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x ; 12 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} ; 13 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x ;$$

$$14 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1} ; 15 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) ;$$

$$16 - \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) ; 17 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) ;$$

$$18 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} ; 19 - \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x}{x-2} \ln(x-1)\right] ;$$

$$20 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) ; 21 - \lim_{x \rightarrow 0} x(1 - \ln x)^2 ;$$

$$22 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x^2} ; 23 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \ln x - 1}{x-1}$$

$$24 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-2}{1+3x}\right) ; 25 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{4}{1-7x}\right) ;$$

$$26 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\ln\left|\frac{1}{x}\right|\right) ; 27 - \lim_{x \rightarrow -3} \ln(x^2 - 9) ;$$

$$28 - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-3}{\ln|x-5|} ; 29 - \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) ;$$

$$30 - \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \ln\left(\frac{x}{x-2}\right).$$

ACTIVITE 3 :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$(E_1) : \ln\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 2}\right) = 0$$

$$(E_2) : \ln(2x+1) + \ln(x-3) = \ln(x+5)$$

$$(E_3) : \ln(3(x^2 + x + 3)) = 3\ln(x+1)$$

$$(I_1) : 2\ln(-x) \leq 1$$

$$(I_2) : \ln|2x-1| < 0$$

$$(I_2) : \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) \leq 0$$

$$(I_3) : \ln(x^2 - x + 1) \geq \ln(2-x)$$

ACTIVITE 4 :

1°) Ecris le plus simplement possible :

$$A = \ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln 0,25$$

$$B = \ln e^3 - \ln e^2 + \ln(2\sqrt{e})$$

2°) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$a - \ln(x^2 - 4) = 1$$

$$b - \ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln(4+2x)$$

$$c - \ln(1+x) = \ln(x^2 - 4)$$

$$d - \ln|x-1| = \ln|2x-1|$$

$$e - \ln(x+1) + \ln(x-2) < 2\ln(3-x)$$

$$f - \ln(x^2 - x - 2) < 2\ln(3-x)$$

$$g - \ln|x-2| + \ln|x+4| \leq 3\ln 2.$$

3°) Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$S_1 : \begin{cases} x+y=-2 \\ \ln x + \ln y = \ln 15 \end{cases} ; S_2 : \begin{cases} 3\ln(1-x) + 2\ln(x+1) \\ \ln(1-x) + \ln(x+1) = 1 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$$

ACTIVITE 5:

f est une fonction définie sur $] -3; 3[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$$

Etudie la parité de f .

ACTIVITE 6 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction f définie sur

$$]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\text{ par : } f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Démontre que le point $A(0; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe f .

ACTIVITE 7 :

Pour chacune des fonctions f données :

- Détermine le domaine de définition
- Etudie la continuité de f en x_0 .
- Etudie la dérivabilité de f en x_0 puis interprète géométriquement les résultats :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x} & , \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = 1 + x \ln(1+x) & , \text{ si } x > 0 \end{cases} ; x_0 = 0$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = -2x + 1 + x \ln x & , \text{ si } x > 0 \end{cases} ; x_0 = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2x \ln x & , \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; x_0 = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x^2 - 1 - 2 \ln|x|} & , \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; x_0 = 0$$

ACTIVITE 8 :

Pour chacune des fonctions f suivantes, détermine :

- le domaine de dérivabilité
- La fonction dérivée f' .
- l'écriture de f' en fonction de la fonction u .

$$1^\circ) f(x) = \frac{x^2-1}{x+2} + \ln x ; u(x) = -2 + \frac{3}{x+2} + \ln x$$

$$2^\circ) f(x) = x \ln(-x-1) ; u(x) = \ln(-x-1) + \frac{x}{x+1}$$

$$3^\circ) f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x} ; u(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$$

$$4^\circ) f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x} ; u(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$$

ACTIVITE 9:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité 2 cm

On considère la fonction U_m de la variable réelle x

$$\text{définie par : } U_m(x) = \frac{mx}{x+1} + \ln(1+x) \text{ où } m \text{ est un}$$

paramètre réel, (C_m) la courbe représentative de U_m .

1°) Démontre que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont tu détermineras les coordonnées.

2°) Etudie les variations de U_m suivant les valeurs du paramètre réel m .

ACTIVITE 10:

1°) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x \ln x - x + \frac{1}{x}$$

- Etudie le sens de variation de g
- Déduis-en le signe de g

2°) On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$$

- Etudie les limites de f en $+\infty$ et en 1
- Dresse le tableau de variation de f .
- Trace la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

ACTIVITE 11 :

1°) a- Soit v la fonction définie par :

$$v(x) = x^2 - 2x + 3 \ln(x-1)$$

- Etudie le sens de variation de v
- Calcule $v(2)$ et déduis-en le signe de $v(x)$ suivant les valeurs de x .

2°) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = x - 3 - \frac{2}{x-1} - \frac{3 \ln(x-1)}{x-1} \text{ et on désigne par } (\mathcal{C}) \text{ sa}$$

courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- Etudie les variations de g
- Détermine que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$
- Justifie que $\beta \in]4; 5[$

3°) a- Justifions que les droites (Δ_1) et (Δ_2) d'équations respectives $x=1$ et $y=x-3$ sont des asymptotes à la courbe de g .

- Etudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ_2)
- Trace la courbe $(\mathcal{C})$

ACTIVITE 12 : cor. p. 266

On considère la fonction numérique f définie sur

$]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$ et (C) sa courbe

représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé

$(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A :

On donne la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - x + 1 - 2 \ln x.$$

1°) a- Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{P(x)}{x}$ où P est un polynôme de degré 3 à déterminer.

b- Vérifie que $P(1) = 0$ puis factorise P et détermine le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .

c- Etudie le sens de variation de g .

2°) Déduis-en de la question précédente le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

3°) a- Détermine la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

b- Démontre que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0$ puis déduis-en la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c- Justifie que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $x = 0$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe (C) .

4°) On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x + \ln x$.

a- Déterminons l'image de $]0; +\infty[$ par h .

b- Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution α dans $]0; +\infty[$ puis démontre que $0,56 < \alpha < 0,57$.

c- Détermine la position de (C) par rapport à (Δ) .

5°) Etudie le sens de variation de f .

6°) Déduis-en de la question 5°) l'existence d'une valeur unique β telle que : $f(\beta) = 0$.

7°) Construis (C) et (Δ) dans un repère orthonormé

$(O; \vec{i}, \vec{j})$. Prends $\beta \approx 0,5$

8°) Démontre que f admet une bijection réciproque f^{-1} puis construis la courbe (C') de f^{-1} dans le repère que (C) .

ACTIVITE 13 :

A) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 1 - x^2 - \ln x$$

1°) Calcule $g(1)$.

2°) Etudie les variations de g .

3°) Déduis-en de cette étude le signe de $g(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition de D_g de la fonction g .

B) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$$

1°) Précise l'ensemble de définition D_f de f 2°) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variations.

3°) a- Justifie que la courbe représentative (C_f) de f admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = -x + 2$.

b- Etudie la position de (C_f) par rapport à (Δ) suivant les valeurs de x .

4°) Détermine les coordonnées du point A de (C_f) où la tangente est parallèle à (D) .

5°) Représente dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm) la courbe (C_f) et les droites asymptotes.

ACTIVITE 14 :

1°) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = -1 + x + 2 \ln x$$

a- Etudie le sens de variation de g .

b- Calcule $g(1)$ puis détermine le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$

c- Déduis-en que : si $0 < x < 1$, alors $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ et

si $x > 1$, alors, $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$.

2°) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & ; \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ [unité graphique : 2 cm].

a- Démontre que f est dérivable à droite en zéro.

b- Calcule $f'(x)$ et vérifie que pour tout x

strictement positif on a : $f'(x) = x g\left(\frac{1}{x}\right)$

- c- Dresser le tableau de variation de f .
 d- Prouve que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]0; +\infty[$ exactement une solution

α telle que : $\frac{7}{4} < \alpha < 2$

3°) a- Vérifie que la tangente (Δ) à la courbe (C) au point O a pour équation $y=x$.

b- Etudie la position de (C) par rapport à (Δ)

c- Trace (Δ) et (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

ACTIVITE 15: cor. p : 267

Partie A :

Soit h la fonction définie de $] -1; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x - \ln(1+x)$$

1°) Etudie les variations de h

2°) Démontre que $\forall x \in] -1; +\infty[$, $h(x) \geq 0$

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1] & , g(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x} \\ \forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[& , g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) \end{cases}$$

3°) Démontre que g admet en 0 un prolongement p par continuité que tu préciseras

4°) a- Etudie la continuité de g en -1 .

b- Etudie la dérivabilité de g en -1 . Interprète graphiquement ce résultat

Partie C :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \text{et on désigne par } (\mathcal{C}) \text{ la courbe}$$

représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) avec $OI = 1\text{cm}$ et $OJ = 2\text{cm}$

5°) a- Démontre que $\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x^2} \text{ puis déduis-en le sens de variation de } f$$

sur $] -1; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

b- Calcule $f'(x)$ pour x élément de $] -\infty; -1[$ et déduis-en le signe de f' sur $] -\infty; -1[$.

c- Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

d- Dresse le tableau de variation de f .

6°) a- Démontre que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique en $+\infty$.

b- Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 5$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

7°) a- Précise les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe (OI) .

b- Construis soigneusement $(\mathcal{C})$.

ACTIVITE 16: cor. p : 270

On donne la fonction numérique définie par :

$$f(x) = -2x + \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

1°) Détermine l'ensemble de définition D de f .

2°) Prouve que f est impaire.

3°) Etudie les variations de f (limites aux bornes de D , dérivée, sens de variation et tableau de variation de f)

4°) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = -2x$ est asymptote à la courbe (C) de f

5°) Trace (Δ) et (C) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

ACTIVITE 17:

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = (1-x^2) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

1°) Détermine le domaine de définition de f et étudie la parité de f .

2°) Justifie que f est prolongeable par continuité en -1 et en 1 puis définie le prolongement par continuité h de f en -1 et en 1

ACTIVITE 18:

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$$

On note (C_g) la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1°) Détermine les limites de g en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour (C_g) ?

2°) Détermine, à l'aide de la dérivée g' , le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

3°) Résous dans (C_g) l'équation : $g(x) = e$

4°) a- Calcule $g(1)$

b- Déduis-en, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, le signe de $g(x)$:

5°) Trace (C_g) en indiquant les asymptotes et tangentes horizontales éventuelles. Faire apparaître sur le graphique le résultat de la question 3.

6/ Prouve que pour tout x de $J = [1; 2]$, $|g'(x)| \leq 1$.

Déduis-en que : $\forall x \in J$, $|g(x) - e| \leq |x - 1|$.

PARTIE B : Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + e(x-1)$$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; I, J)$.

(Unités graphiques : 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

7°) Soit x appartenant à $]0; +\infty[$: Vérifie que :

$$f'(x) = g(x) :$$

8°) Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$:

9°) Dresse le tableau de variations de f :

10°) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f)

en son point I d'abscisse 1.

Précise la position de (C_f) par rapport à (T) .

11°) Trace (T) et (C_f)

ACTIVITE 19 :

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie

par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x^2 - x + 1)$. (C) est la courbe

représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique est le centimètre).

On admet que f est dérivable en tout point de son ensemble de définition.

1°) Détermine l'ensemble de définition de f

2°) Détermine :

a- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ puis interprète graphiquement les résultats.

b- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$

3°) a- Démontre que pour tout réel non nul,

$$f'(x) = \frac{(x-1)(2x^2+1)}{x^2(x^2-x+1)}$$

b- Étudie le signe de $f'(x)$.

c- Dresse le tableau de variation de f .

4°) a- Démontre que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α .

b- Démontre que $-0,96 < \alpha < -0,95$.

5°) a- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x}$.

b- Interprète graphiquement ces résultats.

6°) Soit g la restriction de f à $] -\infty; 0[$.

a- Démontre que g est une bijection de $] -\infty; 0[$ sur un intervalle K que tu préciseras.

b- Trace la courbe (C) .

c- g^{-1} étant la bijection réciproque de g , Trace la courbe représentative (C') dans le même repère que (C) .

ACTIVITE 20 : cor p : 271

On donne la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = (x+1)\ln|x-3|$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité 1 cm.

1°) Détermine le domaine de définition de D de f

2°) Vérifie que si x appartient à D alors :

$$f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$$

3°) a- Pour x appartenant à D , calcule $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f

b- Déduis-en le sens de variation de f'

c- Calcule les limites de f' en $-\infty$ et en 3 à gauche.

4°) a- Prouve que f' s'annule sur $] -\infty; 3[$ pour une seule valeur α

b- Donne un encadrement de α d'amplitude 0,1

5°) Étudie le signe de f' sur $] -\infty; 3[$ et $] 3; +\infty[$

6°) Dresse le tableau de variation de f

7°) Étudie les branches infinies à (C)

8°) Calcule les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.

9°) Construis la courbe (C) avec soin.

ACTIVITE 21 :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1°) a- Démontre que l'ensemble de définition de f est $D =]1; +\infty[$.

b- Démontre que pour tout x élément de D :
 $f(x) = \ln(x-1) - 2 \ln x$

2°) Calcule les limites de f aux bornes de D .

3°) On désigne par f' la fonction dérivée de f sur D .
 Démontre que, pour tout x élément de D :

$$f'(x) = \frac{2-x}{x(x-1)}$$

4°) a- Dresse le tableau des variations de f .

b- Prouve que f admet un maximum que tu précises.

c- Déduis-en le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

5°) a- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b- Donne une interprétation géométrique du résultat obtenu.

6°) Démontre que l'équation : $f(x) = -4$ admet dans D deux solutions.

7°) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) en son point d'abscisse 3.

8°) Trace (C_f) .

ACTIVITE 22 :

I. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x + \ln x.$$

1°) Dresse le tableau de variation de g .

2°) Prouve qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$. Vérifie que α appartient à $]0,2; 0,3[$

3°) Déduis-en le signe de g sur $]0; +\infty[$.

4°) Etablis la relation $\ln(\alpha) = -1 - \alpha$.

II. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1+x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

5°) Justifie que f est continue en 0 puis sur $]0; +\infty[$

6°) Étudie la dérivabilité de f en 0. Interprète graphiquement ce résultat.

7°) Détermine la limite de f en $+\infty$.

8°) Démontre que, quel que soit x élément de $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$$

Déduis-en le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$

9°) Prouve que $f(\alpha) = -\alpha$.

10°) Dresse le tableau des variations de la fonction f .

11°) Représente la courbe (C_f) de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 2cm. Prendre $\alpha = 0,3$.

ACTIVITE 23 : cor. p : 272

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x \ln|x-1| \text{ et } g(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (unité 2 cm).

1°) a- Étudie les variations de g .

b- Calcule $g(0)$ et déduis-en le signe de $g(x)$.

2°) a- Étudie les variations de f .

b- Étudie les branches infinies de $(\mathcal{C})$

c- Démontre que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion A dont tu précises les coordonnées

d- Donne une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en A.

e- Trace (T) et $(\mathcal{C})$

3°) Soit h l'application définie par : $h :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto h(x) = f(x)$$

a- Justifie que h est bijective

b- Calcule $h(1+e)$ puis déduis-en $(h^{-1})'(1+e)$.

c- Trace dans le même repère que $(\mathcal{C})$, la courbe $(\mathcal{C}')$ de h' .

ACTIVITE 24 :

Soit f_m la fonction de variable réelle telle que :

$$\begin{cases} f_m(x) = x(-1 + \ln|x|)^2 + mx, & \text{si } x \neq 0 \\ f_m(0) = 0 \end{cases}$$

m étant un paramètre réel.

1°) a- Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2$.

b- Étudie la continuité et la dérivabilité de f_m sur $\mathbb{R}$

2°) Prouve que f_m est une fonction impaire et étudie les variations de f_m sur $\mathbb{R}_+$.

3°) On suppose pour la suite $m = 1$ et on pose $f = f_1$.

(C) est la courbe représentative de f .

a- Discute le nombre de points d'intersection de (C) avec la droite $y = tx$ ($t \in \mathbb{R}$) suivant les valeurs de t .

b- Forme les équations des tangentes à (C) passant par 0 et précise les coordonnées des points de contacts.

4°) Construis (C) .

5°) Justifions que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble I que tu précises.

Etudie la dérivabilité de f^{-1} .

6°) Construis $(C_{f^{-1}})$.

ACTIVITE 25 : cor. p : 273

On considère la fonction numérique f définie sur

$$[0; +\infty[\text{ par : } \begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

I-

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$

$$\text{par : } g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

1°) a- Etudie le sens de variation de g .

b- Détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

c- Déduis-en le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

2°) Démontre que pour tout $x \in [2; 3]$ on a : $g(x) < \frac{1}{2}$.

3°) a- Détermine $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ tu pourras poser $x = \frac{1}{t}$.

b- Démontre que f est continue en 0.

4°) Etudie la dérivabilité de f en 0. Donne une interprétation graphique du résultat obtenu.

5°) Etudie le sens de variation de f . (Tu vérifieras que $f'(x) = g(x)$)

6°) a- Démontre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$

(Tu pourras utiliser le résultat : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$)

b- Déduis-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c- Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$.

7°) Trace dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la droite (Δ) , la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$.

8°) a- Démontre que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle K à préciser.

b- Trace dans le même repère précédent la courbe (C') de f^{-1} .

c- Démontre que le point $A'(1 + \ln 4; 2)$ appartient à (C') .

d- Calcule $(f^{-1})'(1 + \ln 4)$.

II-

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2; 3]$

9°) Soit h la fonction définie sur I par : $h(x) = f(x) - x$

a- Démontre que pour tout x élément de I , $h'(x) < 0$

b- Déduis-en le sens de variation de h .

c- Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans I que l'on note α .

10°) a- Démontre que pour tout x de I , $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$

b- En déduis que pour tout x de I ,

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|.$$

11°) Démontre que $(f^{-1})'(\alpha) = \frac{2\alpha(\alpha+2)}{2\alpha^2 - \alpha - 2}$

ACTIVITE 26 : cor. p : 276

On donne la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 + \ln\left(\frac{|x|}{x+2}\right) \text{ et on désigne par } (C) \text{ sa courbe}$$

représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1 cm)

1°) a- Justifie que le domaine de définition de f est :

$$D =]-2; 0[\cup]0; +\infty[$$

b- Etudie les limites de f aux bornes de D .

2°) a- Justifie que f est dérivable en tout nombre réel

de D et que l'on a : $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x(x+2)}$

b- Déduis-en le sens de variation de f .

c- Dresse le tableau de variation de f .

d- Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est -1 et l'autre notée α . Vérifie ensuite que $0,5 < \alpha < 0,6$.

e- Détermine une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse -1 .

3°) On considère la fonction g définie sur $] -2; 0[$

$$g(x) = 2x + \ln\left(\frac{-x}{x+2}\right) + 2$$

a- Etudie le sens de variation de g .

- b- Calcule $g(-1)$. Déduis-en le signe de $g(x)$ pour tout x élément de $] -2; 0[$.
- c- Précise la position relative de la courbe (C) et de la tangente (T) sur l'intervalle $] -2; 0[$.
- 4°) a- Etudie les branches infinies de (C)
 b- Etudie sur $]0; +\infty[$, la position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$.
 c- Trace (C), (Δ) et (T) sur la même figure.
- 5°) On pose $J = f([-2; 0])$ et on considère la fonction h définie par :
- $$h:]-2; 0[\rightarrow J$$
- $$x \mapsto f(x)$$
- a- Détermine J
- b- Démontre que h est une bijection. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (C') sa courbe représentative.
- c- Démontre que h^{-1} est dérivable sur J .
- d- Dresse le tableau de variation de h^{-1} . Déduis-en que la courbe (C') admet deux asymptotes dont tu préciseras les équations. Trace (C') dans la figure précédente.

ACTIVITE 27 : cor. p : 278

On donne la fonction numérique f suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x} & , \text{si } x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\\ 0 & , \text{si } x = 0 \\ 1 & , \text{si } x = 1 \end{cases}$$

et on désigne par

(C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A :

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = -x + 1 + x \ln x \text{ pour tout } x \text{ appartenant à }]0; +\infty[.$$

1°) Etudie les variations de g

2°) Déduis-en le signe de $g(x)$ pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$.

Partie B :

3°) Détermine l'ensemble de définition de f .

4°) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

5°) a- En posant $X = x - 1$, démontre que :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{X - \ln(X + 1)}{X \ln(X + 1)}$$

b- Détermine le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de la fonction $X \mapsto \ln(X + 1)$

c- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 1.

6°) a- Démontre que $f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$,

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

b- Etudie les variations de f .

7°) a- Etudie les branches infinies de (C_f).

b- Trace la courbe représentative de f puis déduis-en celle de $-f$

ACTIVITE 28 : cor. p : 280

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) & , \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité 1 cm

1°) a- Détermine l'ensemble de définition D de f .

b- Calcule les limites de f aux bornes de D

c- Justifie que f est continue sur chaque intervalles de D.

d- Etudie la dérivabilité de f à droite en 2, puis interprète graphiquement le résultat obtenu.

2°) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \frac{1}{x-1}$$

a- Etudie les variations de g .

b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0,6 < \alpha < 0,61$.

c- Déduis-en le signe de $g(x)$.

3°) a- Justifie que f est dérivable sur chaque intervalle de D et que $\forall x \in D - \{2\}, f'(x) = (x-2)g(x)$

b- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

c- Démontre que $f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{2(\alpha-1)}$ puis déduis-en un

encadrement de $f(\alpha)$ avec deux nombres décimaux d'ordre deux.

4°) a- Donne le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $h \mapsto \ln(1+h)$.

b- Démontre que la droite (D): $y = x - \frac{5}{2}$ est asymptote à (C) (tu pourras poser $h = \frac{1}{x-2}$)

c- Construis (C). (Prends $\alpha = 0,6$)

5°) Soit l'application $k: [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto k(x) = f(x)$$

a- Justifie que k est bijective

b- Etudie la dérivabilité de k^{-1} , réciproque de k .

On note (C') la courbe représentative de k^{-1} .

c- Justifie que le point $A(\ln 2; 3)$ appartient à (C') puis donne une équation de la tangente à (C') puis donne une équation cartésienne de la tangente à (C') au point A.

d- Construis (C') dans le même que (C)

ACTIVITE 29 :

I- Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x + (x-2)\ln x.$$

1°) Etudie les variations de g .

2°) Dédus-en que $\forall x \in]0; +\infty[$, on a : $g(x) \geq 1$

II- Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2.$$

3°) a- Vérifie que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ et étudie les variations de f .

b- Dédus-en que f admet une fonction réciproque

f^{-1} définie sur un intervalle J

que tu préciseras.

4°) Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (unité : 2 cm).

a- Ecris une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

b- Etudie le sens de variation de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x - 1 - \ln x$

Dédus-en le signe de $h(x)$.

c- Prouve que $\forall x \in]0; +\infty[$,

$f(x) - x = (-1 + \ln x)h(x)$ Dédus-en la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente (T).

5°) a- Trace la courbe (C).

b- Trace, dans le même repère, la courbe (C') représentative de la fonction f^{-1}

ACTIVITE 30 :

Soit la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} h(x) = \frac{x}{\ln|x|}, & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

1°) a- Justifie que h est bien définie sur $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

b- Pourquoi suffira-t-il d'étudier h sur $D_E = [0; 1[\cup]1; +\infty[$

2°) Etudie la continuité et la dérivabilité de h en 0.

3°) a- Détermine la fonction dérivée de h .

b- Justifie que le tableau de signe de $h'(x)$ sur D_E présente comme suit :

x	0	1	e	$+\infty$
$h'(x)$	$\circ$	-	-	+

4°) a- Calcule les limites aux bornes du domaine d'étude D_E .

5°) Présente le tableau de variation de h .

6°) Soit (C) la courbe de h dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm)

a- Etudie les branches infinies à (C)

b- Détermine l'équation de la tangente (Δ) à (C) au point d'abscisse 0.

c- Etudie la position relative de (C) et (Δ)

(Tu pourras utiliser le tableau de variation)

d- Construis (C) sur le domaine de définition de h soigneusement.

ACTIVITE 31 : cor. p : 283

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie sur

$$[0; +\infty[\text{ par : } \begin{cases} g(x) = 1 - x(\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1°) a- Justifie que g est continue à droite en 0.

b- Calcule les limites en $+\infty$ de g et de $\frac{g(x)}{x}$

Interprète graphiquement ces résultats.

2°) Etudie la dérivabilité de g à droite en 0 et donne l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

3°) a- Justifie que $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = (-\ln x)(2 + \ln x).$$

b- Etudie avec soin le signe de $g'(x)$ et dresse le tableau de variation g .

4°) a- Démontre que sur $[0; +\infty[$, l'équation $g(x) = \alpha$ admet une solution unique α et que $2 < \alpha < 2,1$.

b- Dédus-en le signe de $g(x)$.

c- Prouve que $\ln(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie et dérivable sur

$]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x \ln x}$ et (C_f) est sa courbe

représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 4cm.

5°) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis précise les

éventuelles asymptotes à (C_f) .

6°) a- Justifie que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x \ln x)^2}$

b- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation

c- Vérifie que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$ et donne un

encadrement de $f(\alpha)$.

7°) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I du repère.

8°) Construis (T) et (C_f) en prenant $f(\alpha) = 0,29$

Partie C :

Soit h la restriction de f à $]0; \alpha]$

9°) Justifie que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont tu donneras l'ensemble de définition

10°) a- Prouve que h^{-1} n'est pas dérivable en $\frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$

b- Démontre que la tangente (D) à la courbe (Γ) de h^{-1} au point J est parallèle à la droite (T) .

11°) a- Précise l'asymptote à la courbe (Γ) de h^{-1}

b- Trace dans le plan, la droite (D) , la demi-tangente à (Γ) au point d'abscisse $\frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$ et la courbe (Γ) .

ACTIVITE 32 : cor p : 285 (extrait bac série D Sénégal)

I/ Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3(x-1)^2}{3x^2+1}$.

1°) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Détermine la dérivée de f , étudie son signe et dresse le tableau de variation de f .

3°) Prouve que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule $\alpha \in \mathbb{R}$ puis déduis que $3 < \alpha < 4$.

II/ Soit la fonction g est définie par : $g(x) = \frac{3(\ln|x| - 1)^2}{3 \ln^2|x| + 1}$.

4°) a- Prouve que g est définie sur $\mathbb{R}^*$.

b- Démontre que g est la composée de la fonction f et d'une fonction h à préciser.

c- Etudie la parité de g .

d- On note $D_E =]0; +\infty[$.

Soit k la restriction de g à D_E .

Calcule les limites de k aux bornes de D_E . Etudie les branches infinies.

5°) a- En utilisant les questions I/ et II/ 4°) b-

Calcule $k'(x)$ et étudie le sens de variations de k sur D_E et dresse son tableau de variation sur D_E .

b- Détermine le point d'intersection de la courbe de k avec l'axe des abscisses et précise le signe de k .

6°) a- Démontre que k réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b- Construis les courbes (C_k) et $(C_{k^{-1}})$; $(C_{k^{-1}})$ es la courbe représentative de la bijection réciproque k^{-1} de k dans un repère orthonormé ; unité graphique : 1 cm. Trace la courbe de g dans le repère précédent.

ACTIVITE 33 :

Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$g(x) = a(\ln x)^2 + b \ln x + c$ où a, b et c sont trois réels.

Détermine a, b et c sachant que sa courbe représentative

dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par les points $A(1; 2)$;

$B(e; 0)$ et $C(e^3; 2)$.

ACTIVITE 34 :

On donne la fonction numérique suivante :

$$f(x) = \begin{cases} (\ln x)^2 - 2 \ln x + 3, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1°) a- Détermine le domaine de définition de f .

b- Etudie la continuité de f en 0.

2°) Etudie les variations de f et trace sa courbe dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction numérique définie et dérivable sur

$]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x \ln x}$ et (C_f) est sa courbe

représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 4cm.

5°) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis précise les

éventuelles asymptotes à (C_f) .

6°) a- Justifie que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x \ln x)^2}$

b- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation

c- Vérifie que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$ et donne un

encadrement de $f(\alpha)$.

7°) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I du repère.

8°) Construis (T) et (C_f) en prenant $f(\alpha) = 0,29$

Partie C :

Soit h la restriction de f à $]0; \alpha]$

9°) Justifie que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont tu donneras l'ensemble de définition

10°) a- Prouve que h^{-1} n'est pas dérivable en $\frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$

b- Démontre que la tangente (D) à la courbe (Γ) de h^{-1} au point J est parallèle à la droite (T) .

11°) a- Précise l'asymptote à la courbe (Γ) de h^{-1}

b- Trace dans le plan, la droite (D) , la demi-tangente à (Γ) au point d'abscisse $\frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$ et la courbe (Γ) .

ACTIVITE 32 : cor p : 285 (extrait bac série D Sénégal)

I/ Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3(x-1)^2}{3x^2+1}$.

1°) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Détermine la dérivée de f , étudie son signe et dresse le tableau de variation de f .

3°) Prouve que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule $\alpha \in \mathbb{R}$ puis déduis que $3 < \alpha < 4$.

II/ Soit la fonction g est définie par : $g(x) = \frac{3(\ln|x|-1)^2}{3\ln^2|x|+1}$.

4°) a- Prouve que g est définie sur $\mathbb{R}^*$.

b- Démontre que g est la composée de la fonction f et d'une fonction h à préciser.

c- Etudie la parité de g .

d- On note $D_E =]0; +\infty[$.

Soit k la restriction de g à D_E .

Calcule les limites de k aux bornes de D_E . Etudie les branches infinies.

5°) a- En utilisant les questions I/ et II/ 4°) b-

Calcule $k'(x)$ et étudie le sens de variations de k sur D_E et dresse son tableau de variation sur D_E .

b- Détermine le point d'intersection de la courbe de k avec l'axe des abscisses et précise le signe de k .

6°) a- Démontre que k réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b- Construis les courbes (C_k) et $(C_{k^{-1}})$; $(C_{k^{-1}})$ est la courbe représentative de la bijection réciproque k^{-1} de k dans un repère orthonormé; unité graphique : 1 cm. Trace la courbe de g dans le repère précédent.

ACTIVITE 33 :

Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$g(x) = a(\ln x)^2 + b \ln x + c$ où a, b et c sont trois réels.

Détermine a, b et c sachant que sa courbe représentative

dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par les points $A(1; 2)$;

$B(e; 0)$ et $C(e^3; 2)$.

ACTIVITE 34 :

On donne la fonction numérique suivante :

$f(x) = \begin{cases} (\ln x)^2 - 2 \ln x + 3, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1°) a- Détermine le domaine de définition de f .

b- Etudie la continuité de f en 0.

2°) Etudie les variations de f et trace sa courbe dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

6. ACTIVITES SUR LES FONCTIONS EXPONENTIELLES NEPERIENNES

ACTIVITE 1 : cor. p : 287

Détermine le domaine de définition et la fonction dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$1 - f_1(x) = \ln(e^x - 1) ; 2 - f_2(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + 3}{e^{2x} - 3e^x + 2} ;$$

$$3 - f_3(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 3)$$

$$4 - f_4(x) = e^{x^2 + 2x - 1}$$

$$5 - f_5(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

$$6 - f_6(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$7 - f_7(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$8 - f_8(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$9 - f_9(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$9 - f_{10}(x) = (1 + \ln x)e^{\frac{-\ln x}{1 + \ln x}}.$$

ACTIVITE 2 :

Détermine l'ensemble de définition de f

$$a-) f(x) = e^{x^2 - 1} ; b-) f(x) = e^{\frac{1}{x}} ; c-) f(x) = \frac{3x}{e^x + 1} ; d-) f(x) = \frac{5}{e^x - 1} ;$$

$$e-) f(x) = \ln(e^x - 2) ; f-) f(x) = \sqrt{e^x - 3} ;$$

$$g-) f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 2} ; h-) \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) ; i-) f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(e^x - 2)}$$

ACTIVITE 3 :

Calcule les limites suivantes :

$$K_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) ; K_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x} ;$$

$$K_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} ; K_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x} ;$$

$$K_5 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} ; K_6 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{(x-1) + \ln x} - 1}{x - 1} ;$$

$$K_7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{e^{2x} + 5}{e^x - 2}\right) - x \right] ; K_8 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x} ;$$

$$K_9 = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{e^{x \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}}{x - 1} \right] ; K_{10} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{\sin x} - \cos x}{x} \right] ;$$

$$K_{11} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - \ln(3x) + x)$$

$$K_{12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + (x+1)e^{-x}]$$

$$K_{13} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - x + \frac{x+1}{e^{2x}} \right)$$

$$K_{14} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{2x} - 2xe^{2x}) ; K_{15} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{e^x}{1 + e^x} - \frac{1}{2}}{x} \right] ;$$

$$K_{16} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{-x}) \ln x ; K_{17} = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x} - 1} ;$$

$$K_{18} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x + x^2} ; K_{19} = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x} - 1}$$

ACTIVITE 4 : Calcule les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = x e^x - e^{-x} ; f(x) = (e^x)^2 ; f(x) = \sqrt{e^x - 1} ;$$

$$f(x) = e^x f(x) = e^x + e^{-x}.$$

ACTIVITE 5 :

A°) Détermine une primitive de la fonction f . Tu préciseras l'ensemble de définition de la fonction f et de la primitive F trouvée.

$$1 - f(x) = \frac{e^x}{x^2} ; 2 - f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} ; 3 - f(x) = \frac{e^{\ln x^2}}{x} ;$$

$$4 - f(x) = \frac{6}{(x+1)^2} e^{\frac{x+3}{x+1}}$$

$$5 - f(x) = \frac{2e^{5x} - 4}{e^{3x}} ; 6 - f(x) = \frac{e^{2x} + 3e^x - 5}{e^x} ;$$

$$7 - f(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$$

B°) Dans chacun des cas suivants détermine les réels a et b de façon que la fonction F soit une primitive de la fonction f .

$$1) F(x) = (ax + b)e^{2x} ; f(x) = \left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{7}\right)e^{2x}$$

$$2) F(x) = (ax^2 + b)e^{x^2} ; f(x) = (2x^2 + 6x + 1)e^{x^2}$$

ACTIVITE 6:

Pour chacune des fonctions f données :

- Détermine le domaine de définition
- Etudie la continuité de f en x_0 .
- Etudie la dérivabilité de f en x_0 puis interprète géométriquement les résultats :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2\ln(x+1), & \text{si } x \in]-1; 0[\\ x - 1 + e^{-x}, & \text{si } x \in [0; +\infty[\end{cases}, x_0 = 0;$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0, & x_0 = 0; \\ f(x) = -x \ln|x|, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x \ln(-x), & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0;$$

$$\begin{cases} f(x) = -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2 + 1}, & \text{si } x \in]-\infty; 1] \\ f(x) = (x-1)e^{-x+1}, & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}, x_0 = 1.$$

$$\begin{cases} f(x) = e^x - x - 2, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x - 1 - x^2 \ln x, & \text{si } x > 0 \end{cases}, x_0 = 0;$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}}, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0 \end{cases}, x_0 = 0.$$

$$\begin{cases} f(x) = -x + e^{\frac{x}{2}} + 3, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

$$f(x) = x \ln(-x) + 1, \text{ si } x < 0$$

$$f(x) = x + 1 + xe^x, \text{ si } x \geq 0 ; x_0 = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln(-x)}{x-1}, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = e^{-x} - x - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}; x_0 = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = (x-2)e^{x-1} - x + 2, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{\ln(-x)}{x+1} - 3 + e^{-1}, & \text{si } x < -1 \\ f(x) = 3x + 1 - xe^x, & \text{si } x \geq -1 \end{cases}; x_0 = -1$$

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}, & \text{si } x \neq 0 \text{ et si } x \neq 1 \\ f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}; x_0 = 0 \text{ et } x_0 = 1$$

$$\begin{cases} f(x) = \ln(-x^3 + 3x + 3), & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = xe^x - x + \ln 3, & \text{si } x > 0 \end{cases}; x_0 = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = (1 + \ln x)e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}}, & \text{si } x \in]0; \frac{1}{e}[\cup \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[\\ f\left(\frac{1}{e}\right) = 0 \end{cases}; x_0 = \frac{1}{e}$$

ACTIVITE 7 :

Pour chacune des fonction f suivantes, détermine la dérivée f' de f puis écris $f'(x)$ en fonction de $u(x)$:

$$1^\circ) f(x) = x^2(1 - \ln x) + 1 + h(x); u(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2 \ln x$$

$$2^\circ) f(x) = \frac{2xe^{-x}}{x^2 + 2}; u(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$$

$$3^\circ) f(x) = x^2 + x + 1 + \ln(x+1); u(x) = \frac{2x^3 + 3x + 2}{x+1}$$

$$4^\circ) f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}; u(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$$

$$5^\circ) f(x) = \frac{2 \ln(x-1)}{x^2 - x}; u(x) = \frac{x}{2x-1} - \ln(x-1)$$

$$6^\circ) f(x) = x + (x+1)e^{-x}; u(x) = e^x - x$$

$$7^\circ) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}; u(x) = (-x+2)e^x - 1$$

$$8^\circ) f(x) = e^x + x(-1 + \ln x); u(x) = e^x + \ln x$$

ACTIVITE 8:

Etudie les Variations et trace la courbe des fonctions suivantes:

$$f(x) = x - e^x ; f(x) = e^{x^2-x} ; f(x) = e^x + e^{-x} ;$$

$$f(x) = x + \ln(2 - e^x) ; f(x) = e^{\frac{x+1}{x-2}} - 1 ; f(x) = e^{-x^2} ;$$

$$f(x) = xe^x ; f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} ; f(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2} ;$$

$$f(x) = e^{-x} + x - 1 ; f(x) = \sqrt{x+1}e^{-x} ; f(x) = \frac{\ln x}{e^x} ;$$

$$f(x) = e^{|x|} ; f(x) = (x+1)^2 e^{-x} ; f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

ACTIVITE 9 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2e^{-x} + x - 2$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm)

1°) a- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et vérifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2°) a- Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-2e^{-x} + 1 > 0$
b- Etudie les variations de f .

c- Prouve que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions dont l'une est nulle. On notera α l'autre solution et tu vérifieras que $1,5 < \alpha < 1,6$.

3°) a- Prouve que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique (Δ) d'équation : $y = x - 2$ au voisinage de $+\infty$.

b- Précise la nature de la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$.

4°) a- Donne une équation cartésienne de la tangente T à la courbe $(\mathcal{C})$ à l'origine O .

b- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = 2e^{-x} + 2x - 2$. Etudie le sens de variation de g et déduis-en le signe de $g(x)$.

c- Déduis-en la position de $(\mathcal{C})$ par rapport T .

5°) Trace (Δ) , T et $(\mathcal{C})$

ACTIVITE 10 :

Etudie et représente graphiquement la fonction g dans chacun des cas.

1°) $g(x) = \frac{1}{x}e^x$; 2°) $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$;

3°) $g(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 3)$; 4°) $g(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$;

5°) $g(x) = \frac{e^x}{|x-1|}$

ACTIVITE 11 :

Résous dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

$$(E_1) : \ln(5x - 3) = 2$$

$$(E_2) : 2(\ln x)^2 + 3(\ln x) - 2 = 0$$

$$(I_1) : \ln^2 x + \ln x - 6 > 0$$

$$(E_1) : e^x = -2$$

$$(E_3) : e^{2-7x} = 12$$

$$(E_4) : e^{2x} = 5e^x + 24$$

$$(E_5) : 5e^{4x} - 13e^{2x} - 6 = 0$$

$$(I_2) : e^{2x-3} - 2 \geq 0$$

$$(I_3) : e^{2x} + 2e^{-x} \leq 0$$

$$(I_4) : e^{2x} + e^x - 2 < 0$$

ACTIVITE 12 :

1°) Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$g(x) = \frac{x+1-e^x}{x(e^x-1)}$$

2°) Etablie le développement limité de la fonction $x \mapsto e^x$ à l'ordre 3 en 0.

3°) Démontre que g admet un prolongement par continuité en 0, le définit et le note h . Démontre que h est dérivable en 0.

ACTIVITE 13 :

A. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = -1 + xe^x.$$

1°) Etudie les variations de g .

2°) a- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que α appartient à l'intervalle $]0,5; 0,6[$.

b- Déduis-en le signe de $g(x)$ sur les intervalles $]0; \alpha[$ puis $]\alpha; +\infty[$.

B. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x - \ln x - 2.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité est 4 cm.

3°) Calcule la limite de f en 0.

4°) En remarquant que $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right)$, calcule la limite de f en $+\infty$, précise la branche infinie de $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

5°) a- Calculer $f'(x)$ et vérifie que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ (où f' est la dérivée de f)

b- En utilisant A 2°) b- dresse le tableau de variation de f .

6°) a- Démontre que : $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

7°) Trace ($\mathcal{C}$), tu prendras $\alpha = 0,55$.

8°) a- Démontre que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par : $F(x) = e^x - x \ln x - x$ est une primitive de f .

ACTIVITE 14 : cor. p : 287

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = -1 + \frac{x-1}{x+1} e^x$. On désigne par (C) la courbe

représentative de f dans un repère orthonormé

$(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a- Détermine le domaine de définition D de f .

b- Calcule les limites de f aux bornes de D.

2°) a- Prouve que pour tout $x \in D$, $f'(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x$.

b- Donne le tableau de variation de f .

3°) a- Prouve que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]1; +\infty[$ une unique solution α et que $1,5 < \alpha < 1,6$.

b- Vérifie que : $e^\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ et que $f(-\alpha) = 0$.

4°) a- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement le résultat.

b- Trace la courbe (C).

ACTIVITE 15 :

On considère la fonction numérique f définie sur

$]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ l'unité graphique étant 2 cm.

1°) a- Soit $X = \frac{2}{x-1}$. Prouve l'égalité :

$$\frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{e}{2} X^2 e^X.$$

Déduis-en la limite de f quand x tend vers 1.

b- Détermine la limite de f en $-\infty$.

c- déduis-en une asymptote à la courbe (Γ).

2°) a- Soit v la fonction numérique définie sur $]1; +\infty[$

par : $v(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

Calcule $v'(x)$.

b- Démontre que $f'(x) = \frac{-4x}{(x-2)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$

3°) Étudie les variations de f .

4°) Trace la courbe (Γ).

ACTIVITE 16 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé

$(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie pour x réel par :

$f(x) = x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Partie A :

1°) Précise le domaine de définition E de f et Calcule les limites de f aux bornes de E.

2°) Prouve que pour tout x de E, $f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ et

déduis-en les variations de f .

3°) Étudie la parité de f et donne une interprétation géométrique.

4°) Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet en plus de la solution nulle, deux autres solutions a et b telles que $a < 0 < b$.

5°) a- Prouve que $1 < b < 2$ et donne une valeur approchée de b à 10^{-1} près.

b- Déduis-en une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

Partie B :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$g(x) = \left| \frac{x-1}{x+1} \right| e^x$ et soit sa ($\mathcal{C}$) courbe

6°) Étudie la dérivabilité de g en $x=1$.

7°) a- Démontre que pour tout x de E : $g(x) = e^{f(x)}$.

b- Résous l'équation $g(x) = 1$.

8°) Étudie les variations de g .

9°) Étudie les branches infinies de ($\mathcal{C}$).

10°) Démontre que g réalise une bijection h de $]1; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser et dresse le

tableau de variation de h^{-1} réciproque de h .

11°) Construis dans le même repère, la courbe ($\mathcal{C}$) de g et la courbe ($\mathcal{C}'$) de h^{-1}

ACTIVITE 17 : cor. p : 288

On considère la fonction g à variable réelle définie par :

$$\begin{cases} g(x) = -x + x \ln x, & \text{si } x > 0 \\ g(x) = xe^{-x^2}, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et on désigne par } (C_g) \text{ sa}$$

courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1°) a- Justifie que g est définie sur $\mathbb{R}$.

b- Etudie la continuité et la dérivabilité de g en 0. Puis précise les équations des tangentes ou demi-tangentes éventuelles au point O (origine du repère)

2°) a- Calcule $g'(x)$ pour tout nombre x de son ensemble de dérivabilité E .

b- Etudie suivant les valeurs de x le signe de $g'(x)$. Déduis-en le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

c- Calcule les limites de g au borne de $\mathbb{R}$.

3°) a- Etudie les branches infinies à (C_g)

b- Construis la courbe (C_g) , de même que ses demi-tangentes à l'origine.

ACTIVITE 18 : cor. p : 289**Partie A :**

On considère l'application g de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1)$$

1°) a- Détermine la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b- Calcule la dérivée de g et donne son tableau de variations.

2°) Prouve que sur l'intervalle $[1; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β et que $1,9 < \beta < 2$

3°) Précise le signe de g sur $[0; +\infty[$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & , \text{si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & , \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$;

4°) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

5°) Justifie que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (Γ) en $-\infty$.

6°) Calcule la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat.

7°) Calcule $f'(x)$ dans chacun des intervalles où f est dérivable et donne une relation liant $f'(x)$ et $g(x)$ pour $x > 0$.

8°) Etablis que $f(\beta) = \frac{2\beta}{\beta^2 + 1}$ et déduis-en un encadrement de $f(\beta)$.

9°) Donne le tableau de variations de f et trace la courbe (Γ) . (On prendra $\beta \approx 1,95$ et $f(\beta) \approx 0,85$).

Partie C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$.

10°) Justifie que h est une bijection de $]-\infty, 0[$ sur un intervalle J à préciser.

11°) Représente (Γ') , la courbe représentative de h^{-1} , dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

ACTIVITE 19 : cor. p : 291

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A :

On considère les fonctions u et v définies par :

$$u(x) = x + 1 - x \ln(-x) \quad \text{et} \quad v(x) = -x + 1 - \ln x.$$

1°) a- Détermine l'ensemble de définition E de u .

b- Calcule $u'(x)$ pour $x \in E$.

c- Etudie le signe de $u'(x)$.

2°) a- Achève l'étude des variations de u .

b- Déduis-en le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

3°) a- Calcule $v'(x)$ pour x élément de $]0; +\infty[$.

b- Déduis-en le sens de variation de v .

c- Calcule $v(1)$ et déduis-en le signe de $v(x)$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2}x^2 \ln(-x) + \frac{3}{4}x^2 + x & , \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{\ln x}{x}} & , \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe de f dans le plan

4°) a- Etudie la continuité de f en 0

b- Etudie la dérivabilité de f en 0.

c- Interprète géométriquement les résultats de l'étude de la dérivabilité. (Tu préciseras les demi-tangentes éventuelles à la courbe (C) en $x = 0$).

d- Que représente l'origine O du repère pour la courbe (C) ?

5°) a- Précise le domaine de dérivabilité de f et calcule $f'(x)$.

b- Utilise les résultats des questions 2°)b- et 3°)c- pour étudier le signe de $f'(x)$

c- Achève l'étude des variations de f .

6°) a- Etudie les branches infinies de la courbe (C)

b- Démontre que le point I de (C) d'abscisse -1 est un point d'inflexion de (C) .

c- Construis (C)

ACTIVITE 20 : cor. p : 292

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)e^x & , \text{ si } x < 1 \\ x-1 + \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases} ; \text{ on désigne par } (\mathcal{C}) \text{ sa}$$

courbe représentative dans un plan muni d'un repère

orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1°) Prouve que f est continue en $x_0 = 1$.

2°) a- Vérifie que pour tout $x > 1$;

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 + \frac{\ln x}{x - 1} - \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x - 1}$$

b- Démontre que f est dérivable à droite en 1 et que

$$f'_d(1) = \frac{3}{2}.$$

c- Etudie la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ puis interprète géométriquement le résultat.

3°) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4°) a- Etablis le sens de variation de f sur son domaine de définition.

b- Dresse le tableau de variations de f .

5°) On pose $\varphi(x) = f(x) - x + 1 - \ln 2$

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Que signifie ce résultat pour la courbe $(\mathcal{C})$?

6°) Trace les demi-tangentes au point d'abscisse $x_0 = 1$, l'asymptote et la courbe $(\mathcal{C})$.

ACTIVITE 21 :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & , \text{ si } x > 0 \\ (x+2)e^{\frac{1}{x}} & , \text{ si } x < 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases} ; \text{ et on désigne}$$

par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$

I -

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$

$$\text{par : } g(x) = \frac{-2}{1+x^2} + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

1°) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variations.

2°) Prouve que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0,5 < \alpha < 0,6$

3°) Déduis-en le signe de g sur $]0; +\infty[$.

II -

4°) Détermine l'ensemble de définition de f et calcule les limites aux bornes de celui-ci.

5°) a- Etudie la continuité de f en 0,

b- Etudie la dérivabilité de f en 0, puis Interprète graphiquement les résultats.

6°) Etudie les branches infinies de la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

7°) a- Démontre que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = g(x).$$

b- Etudie le sens de variation de f et dresse le tableau de variations de f .

$$\text{c- Etablis que } f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

8°) Soit $I =]-\infty; -1[$.

Justifie que f est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

9°) Construis dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, la courbe $(\mathcal{C})$. (Tu prendras $\alpha = 0,5$; unité = 2cm)

ACTIVITE 22 : cor. p : 293

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-3}{\ln(-x+2)} + 1 & , \text{ si } x < 2 \\ f(x) = x-1 + (x-2)e^{-x+2} & , \text{ si } x \geq 2 \end{cases} \text{ et la fonction}$$

numérique v définie $] -\infty; 2[$ par :

$$v(x) = \ln(-x+2) - \frac{x-3}{x-2}, (C) = \text{courbe de } f \text{ dans un}$$

plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1°) a- Etudie les variations de v sur $] -\infty; 2[$.

b- Démontre que l'équation $v(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $-1,6 < \alpha < -1,5$

c- Déduis-en le signe de v sur $] -\infty; 2[$.

2°) a- Justifie que l'ensemble de définition D de f est : $D = \mathbb{R} - \{1\}$.

b- Etudie la continuité et dérivabilité de f en 2 puis interprète géométriquement les résultats de la dérivabilité.

3°) a- Calcule les limites de f aux bornes de D

b- Achève l'étude de la variation de f .

4°) a- Démontre que : $f(\alpha) = \alpha - 1$ puis calcule la valeur approchée de $f(\alpha)$.

b- Démontre que la droite (Δ) d'équation : $y = x - 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

c- Construis avec soin la courbe (C) .

5°) Soit la fonction $g : [2; +\infty[\rightarrow f([2; +\infty[)$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

a- Démontre que la fonction g admet une bijection réciproque g^{-1} .

b- Construis dans le même repère la courbe (C') de g^{-1} .

ACTIVITE 23 : cor. p : 295

On donne la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{-x-1} & ; \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = -1 + \sin(\pi x) & ; \text{si } -1 < x < 1 \\ f(x) = \ln x - \exp(1-x) & ; \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$(\mathcal{G})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité 2 cm.

1°) Détermine le domaine de définition de la fonction f

2°) Etudie la continuité de f en -1 et en 1 .

3°) a- Etudie la dérivabilité de f en -1 puis interprète les résultats obtenus.

b- Etudie la dérivabilité de f en 1 puis interprète les résultats obtenus

4°) Calcule les limites aux bornes de son ensemble de définition.

5°) Dresse le tableau de variation de f .

6°) Soit l'intervalle $J = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ et l'application :

$$h : J \rightarrow f(J)$$

$$x \mapsto h(x) = f(x)$$

a- Démontre que h admet une bijection réciproque h^{-1} .

b- Détermine le domaine V de dérivabilité de la bijection réciproque h^{-1} .

c- Calcule $(h^{-1})'(x)$, pour tout x élément de V .

7°) On considère la fonction k définie sur $[1; +\infty[$ par $k(x) = x \ln x$.

a- Calcule $k'(x)$

b- Déduis-en la primitive K , sur $[1; +\infty[$, de la fonction f qui s'annule en 1.

8°) Etudie les branches infinies de la courbe $(\mathcal{G})$.

9°) Construis la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

ACTIVITE 24 : cor. p : 298

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - \ln x} & , \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et on désigne par } (\Gamma) \text{ la}$$

courbe représentative de f dans le plan muni à un repère orthogonal $(O; I, J)$ unité : $OI = 2\text{cm}$ et $OJ = 4\text{cm}$.

1°) Soient u et v deux fonctions définies par :

$$u(x) = e^x - x - 1 \quad \text{et} \quad v(x) = -x + 1 + \ln x$$

a- Etudie les variations des fonctions u et v

b- Déduis-en que : $\forall x \in]0; +\infty[, e^x \geq x + 1$ et $\ln x \leq x - 1$, puis $e^x - \ln x \geq 2$.

2°) a- Démontre que le domaine de définition D de f est $D =]0; +\infty[$

b- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

3°) Détermine la limite de f en $+\infty$ puis interprète graphiquement le résultat.

4°) On désigne par g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^x - \ln x - x e^x + 1$$

a- Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.

b- Démontre que l'équation : $g(x) = 0$ admet une unique solution α et justifie que $1,23 \leq \alpha \leq 1,24$

c- Etudie le signe de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4°) a- Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

5°) a- Démontre que $f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha e^\alpha - 1}$

b- Détermine un encadrement de $f(\alpha)$ puis déduis que 0,38 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 0,01 près.

c- Construis dans le carré de côté 10, la courbe (Γ) .

ACTIVITE 25 :

On donne la fonction numérique g de variable réelle x

définie par :
$$\begin{cases} g(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right), & \text{si } x < 0 \\ g(x) = xe^{1-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
 et $(\mathcal{C})$ sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a- Prouve que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

b- Etudie la continuité et la dérivabilité de g en 0.

c- Etudie le sens de variations de la fonction.

2°) a- Achève l'étude des variations de la fonction g .

b- Etudie les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$

c- Construis $(\mathcal{C})$

ACTIVITE 26 :

Partie A : soit la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{1}{e} - e^{-x} + \ln x$$

1°) a- Donne l'ensemble de définition D de h .

b- Calcule $h(1)$.

2°) Etudie les variations de h .

3°) a- Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet dans D une solution unique dont tu préciseras.

b- Déduis-en le signe de $h(x)$.

Partie B : Soit la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 1 - x + \frac{1}{e}x + e^{-x} + x \ln x, & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 2 \end{cases}$$

4°) a- Démontre que g est continue à droite au point

$$x_0 = 0$$

b- Etudie la dérivabilité de g à droite au point

$$x_0 = 0.$$

5°) a- Etudie les variations de g .

b- Etudie les branches infinies de la courbe (C) de g

c- Construis la courbe (C) dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$.

ACTIVITE 27 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x

définie, par : $f(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$.

1°) Détermine le domaine de définition D de f et

prouve que $\forall x \in D \setminus \{0\}, f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

2°) Déduis-en une relation entre $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et

démontre que si α est un zéro de $f'(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi

un zéro de $f'(x)$.

3°) a- Démontre que l'on a : $\forall x \in D$,

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}} g(x); \quad g \text{ étant une fonction}$$

polynôme que tu détermineras.

b- Démontre que :

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = x^2 \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 \right] \text{ et}$$

résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$. Déduis-en le signe de $f'(x)$.

4°) Soit h la fonction numérique de la variable réelle x

définie par :
$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \in D \\ h(-1) = h(1) = 0 \end{cases}$$

a- Démontre que h est continue à gauche en 1 et en -1.

b- Etablis que : $\forall x \in D$,

$$\frac{h(x)}{x-1} = \left(\frac{x+1}{2}\right) \left(\frac{2x}{x^2+1}\right) e^{\frac{2x}{x^2-1}} \text{ et calcule } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{x-1}$$

Déduis-en que h est dérivable à gauche en 1. h est-elle dérivable à gauche en -1 ?

5°) a- On définit la fonction F sur $D \setminus \{0\}$ par :

$$F(x) = \frac{e^{\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)} - 1}{\frac{2x}{x^2-1}}.$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

b- Exprime $f(x) - x$ en fonction de $F(x)$ et calcule $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$.

6°) Etudie les variations de la fonction h définie à la question 4°. Trace sa courbe représentative (C) relativement à un repère orthonormé. On précisera la tangente à (C) à l'origine. (On ne demande pas de déterminer le point d'inflexion de (C) , et on prendra pour l'un des zéros de $f'(x)$ la valeur approchée 2,9)

7. ACTIVITES SUR LES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

ACTIVITE 1 : cor. p : 301

1°) Démontre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = n + \sqrt{2}.$$

2°) Calcule $A = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$

ACTIVITE 2:

1°) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$(E_1): 2^{3x} = 5; (E_2): 3^x = 3^{1-6x}; (I_1): 5^x \leq 25^{2x};$$

$$(I_2): 7^x < 2; (I_3): \left(\frac{2}{5}\right)^5 \geq 2^{x-1}; (E_3): 3^{2x} + 3^x - 6 = 0$$

$$; (I_4): 3^{2x} + 3^x - 6 < 0$$

$$(E_4): 3^x + 1 - 6 \cdot 3^{-x} = 0$$

2°) Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inconnues $(x; y)$ tel

$$\text{que : } \begin{cases} 4^x (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 8^y \cdot 2^x = 4^{y-1} \end{cases}$$

ACTIVITE 3:

Calcule les limites suivantes :

$$1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^x; 2 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+2};$$

$$3 - \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$4 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$$

ACTIVITE 4 :

Etudie et représente graphiquement les fonctions suivantes :

$$f(x) = 2^{x-3}; g(x) = \frac{5^x}{5^{2x}-1}$$

ACTIVITE 5 :

Soit la fonction f tel que : $f(x) = x^x + 1$

1°) Indique le domaine de définition de f et transforme l'écriture du réel $f(x)$.

2°) Donne le prolongement par continuité de f au point 0.

3°) Etudie la dérivabilité de f au point 0. Puis décris comment la courbe de f se présente au point d'abscisse 0.

4°) Calcule la dérivée de f et étudie son signe. Etablis un tableau de variation de f .

5°) Construis ma courbe de f .

ACTIVITE 6 :

On considère la fonction f de variable réelle définie

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Partie A :

On considère les fonctions g et h définies sur $]0; +\infty[$

$$\text{par : } g(x) = x + 1 - \ln x \text{ et } h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x, (\epsilon) \text{ la}$$

courbe représentative de h .

1°) Etudie les variations de g .

2°) Dédus-en le signe de $g(x)$.

3°) a-Etudie les variations de h .

b-Détermine une équation de la tangente à (ϵ) en son point d'abscisse 1.

c- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$ et donne une interprétation

pour (ϵ) .

Partie B :

4°) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

5°) a- Démontre que : $\forall x \in]0; +\infty[, \text{ on a :}$

$$\frac{f(x) - x}{\ln x} = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}{\frac{1}{x} \ln x}.$$

b- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{\ln x}$ et déduis-en

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$$

6°) Etudie les variations de f .

7°) Démontre que f admet une bijection réciproque f^{-1} dont tu dresseras le tableau de variation.

8°) Etudie les branches infinies de la courbe (C_f) , courbe de f puis construire dans le même repère

orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 2 \text{ cm}$ les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_f)$.

ACTIVITE 7:

On considère la fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = 1 - x + e^{-2x} & , \text{ si } x > 0 \\ h(x) = 2^{x+1} & , \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

1°) Etudie la continuité de h en 0.

2°) Etudie la dérivabilité de h en 0. puis interprète graphiquement les résultats.

3°) a- Etudie les variations de h .

b- Démontre qu'il existe un unique point de la courbe de h où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 2$. Détermine une équation de cette tangente.

c- Démontre que la courbe de h coupe l'axe des abscisses en un unique point dont l'abscisse α appartient

à $\left] 1; \frac{3}{2} \right[$.

4°) Soit $k :]0; +\infty[\rightarrow h(]0; +\infty[)$
 $x \mapsto k(x) = h(x)$

Démontre que k est une bijection.

5°) Construis la courbe (C_h) de h et (C_k) de k dans le même repère.

ACTIVITE 8 :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2^{-\left| \frac{x-1}{x-2} \right|} & , \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (tu prendras pour unité 2 cm).

1°) Exprime $f(x)$ sans le symbole « valeur absolue »

2°) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3°) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 2.

4°) Etudie la dérivabilité de f en 1.

Précise les demi-tangentes éventuelles à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

5°) Précise l'ensemble de dérivabilité de f et détermine la fonction dérivée de f .

6°) a- Etudie le sens de variation de f .

b- Dresse le tableau de variation de f

7°) Trace $(\mathcal{C})$ ainsi que ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

8°) Soit A l'aire en centimètre carrés de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $y=0$; $x=0$ et $x=1$.

Par la méthode des trapèzes, donne une valeur approchée de A .

9°) Soit l'application $g : [2; +\infty[\rightarrow \left[0; \frac{1}{2} \right[$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

a- Démontre que g admet une bijection réciproque g^{-1} .

b- Précise l'ensemble de dérivabilité de g^{-1} .

c- Calcule $g^{-1}(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $\left[0; \frac{1}{2} \right[$.

d- On désigne par (Γ) la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Construis (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{C})$

8. ACTIVITES SUR LES CALCULS INTEGRALES

ACTIVITE 1 :

Calcule les intégrales suivantes : $I_1 = \int_0^1 (2x^3 + 5x) dx$;

$$I_2 = \int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} dt ; I_3 = \int_{-1}^1 \frac{1}{(3x+2)^4} dx ;$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx ; I_5 = \int_{-1}^2 (x - |x-1|) dx ;$$

$$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt ; I_7 = \int_0^{\pi} (\cos t) dt ;$$

$$I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt ; I_9 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx ;$$

$$I_{10} = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} dx$$

ACTIVITE 2 :

Calcule les intégrales suivantes :

$$K_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx ; K_2 = \int_{-\ln 2}^{\ln 3} (1 - 2e^t) dt ; K_3 = \int_0^{2x} e^{2x} dx$$

$$; K_4 = \int_0^1 (-e^{2x+1}) dx$$

$$K_5 = \int_1^2 e^x (e^x + 1)^3 dx ;$$

$$K_6 = \int_0^1 (x^e - e^x) dx ; ;$$

$$K_7 = \int_4^5 \left(\frac{2x^2 + 3x - 1}{x+3} \right) dx ;$$

$$K_8 = \int_0^2 \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) dx ;$$

$$K_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos^5 x dx ;$$

$$K_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx ;$$

$$K_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4 x dx ; K_{13} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{e^{-\cos x}} dx$$

ACTIVITE 3 :

Calcule les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$$A = \int_0^{\pi} (x \sin x) dx ; B = \int_0^e (\ln x) dx ;$$

$$C = \int_0^{\pi} (2u+1)e^{-u} du ; D = \int_{-1}^1 x^3 \sin^2 x dx ;$$

$$E = \int_0^1 (2x+1)e^x dx ; F = \int_0^1 (x^2 + x+1)e^x dx$$

ACTIVITE 4 :

1°) Linéarise l'expression $4 \sin 3x \cos^2 x$

2°) A l'aide d'une intégration par parties, calcule

$$\text{l'intégrale } I \text{ suivante : } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4x \sin 3x \cos^2 x) dx$$

ACTIVITE 5 :

On pose $J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^2 + 4}$. En utilisant le changement

de variable $x+1 = 2 \tan t$ avec $t \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$. Calcule

l'intégrale J

ACTIVITE 6 :

On se propose de calculer les intégrales :

$$I = \int_0^{\pi} x^2 \cos^2 x dx \text{ et } J = \int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x dx$$

1°) Calcule $I + J$

2°) Justifie que $I - J = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx$ et déduis-en à

l'aide de deux intégrations par parties la valeur de $I - J$

3°) Déduis-en les valeurs de I et J

ACTIVITE 7 :

1°) Détermine les nombres réels a et b , tels que pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, on a :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2°) Calcule $I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$.

3°) En utilisant une intégration par parties calcule

$$J = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$$

ACTIVITE 8 :

On se propose de calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^4} dx$.

1°) Calcule les trois intégrales suivantes : $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx ;$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx ; \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^3} dx ;$$

2°) a- Détermine quatre réels a, b, c et d tels que, pour tout réel t positif, on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^3} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} + \frac{dt}{(1+t)^3} \quad (1)$$

b- En posant $t = e^x$ dans l'égalité (1), calcule

$$\text{l'intégrale } I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^3} dx.$$

3°) A l'aide d'une intégration par parties, exprime J en fonction de I . Puis calcule J .

ACTIVITE 9 :

On considère l'intégrale suivante : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$

1°) a- Prouve que pour tout entier n ,

$$I_n - I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x (\cos x) dx$$

b- Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x (\cos x) dx$ en fonction de n .

c- Calcule I_1 puis déduis-en des questions a- et b- les valeurs de I_3 et I_5 .

2°) Soit U l'application qui à x élément de $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

$$\text{associe } U(x) = \ln \left[\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

a- Prouve que pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$,

$$U'(x) = \frac{1}{\cos x} \text{ et déduis-en le calcul de } I_0.$$

b- Déduis des questions 1°) a- et 1°) b-, le calcul de I_2 et I_4

ACTIVITE 10 :

$$\text{On pose } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$$

Calcule $I+J$ et I . Déduis-en la valeur de J

ACTIVITE 11 :

$$\text{On pose : } I = \int_1^{7-4\sqrt{3}} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$$

1°) Justifie l'existence de I

2°) On considère la fonction f définie par :

$$f: \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow J \quad \text{et } J = f\left(\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]\right)$$

$$x \mapsto \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

a- Démontre que f est une bijection

b- Détermine l'ensemble de dérivabilité E de la bijection réciproque f^{-1} et démontre que

$$\forall x \in E, (f^{-1})'(x) = \frac{-1}{(x+1)\sqrt{x}}$$

3°) a- Calcule $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ et $f\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

b- Déduis-en la valeur de I

ACTIVITE 12 : cor. p : 302

On donne l'intégrale suivante : $I = \int_a^b h(x) dx$ où

$a = -\ln(1+\sqrt{3})$, $b = -\ln(\sqrt{3}-1)$ et h la fonction

$$\text{définie par : } h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}$$

1°) Justifie l'existence du nombre réel I .

2°) Soit l'application u définie de $K = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

$$\text{Dans } \left]-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right] \text{ par : } u(x) = \ln(\cos x + \sin x)$$

a- Calcule $u\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $u\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

b- Justifie que : $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

c- Démontre que u est bijective. Soit u^{-1} la réciproque de u .

d- Détermine l'ensemble de dérivabilité E de u^{-1} .

3°) Justifie que $\forall x \in E, (u^{-1})'(x) = -h(x)$ Calcule alors l'intégrale I

ACTIVITE 13 :

Soit la fonction $l(x) = e^{-x} \sin x$.

1°) Exprime $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2°) Etudie les variations de l sur $[0; 2\pi]$.

3°) Détermine la valeur moyenne de la fonction l sur $[0; 2\pi]$.

ACTIVITE 14 :

Soit la fonction v définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$v(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$$

1°) Prouve que, pour tout réel x supérieur ou égal à 1,

$$\frac{\ln x}{x^2} \leq v(x) \leq \frac{\ln x}{x}$$

1) Calcule $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$ et $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$. On

marquera que : $\frac{\ln x}{x^2} = (\ln x) \times \frac{1}{x^2}$.

2) Déduis-en un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} v(x) dx$

ACTIVITE 15 : cor. p : 303

A Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2} \text{ et on note } (\mathcal{C}) \text{ sa courbe}$$

représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité : 1 cm.

1°) Démontre qu'il existe des réels a , b et c tels que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}.$$

2°) a- Calcule les limites de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.

b- Démontre que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation :

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \text{ est asymptote à la courbe } (\mathcal{C}).$$

c- Etudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

3°) Etudie les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4°) a- Détermine les coordonnées des points de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à la droite $(\mathcal{D})$.

b- Détermine une équation de ces tangentes.

c- Démontre que le point $I(0; \frac{5}{2})$ est centre de

symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$.

5°) a- Démontre que -1 est la seule racine de $f(x)$.

b- Trace la courbe $(\mathcal{C})$ et son asymptote $(\mathcal{D})$.

B/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{2}x + 2 \ln(x^2 + 1).$$

6°) Démontre que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en zéro.

7°) a- Déduis-en le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b- Calcule les limites de g lorsque x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$.

8°) Soit un nombre réel α , $\alpha \geq 0$

a- Calcule en fonction de α , l'aire $A(\alpha)$ en cm² de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

b- Pour quelles valeurs de α a-t-on : $A(\alpha) \leq 1$?

ACTIVITE 16 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = (x+1) \ln|x|$. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1°) a- Détermine le domaine de définition D_f de f

b- Calcule les limites aux bornes de D_f .

2°) Soit : $g(x) = \frac{x+1}{x} + \ln|x|$.

a- Etudie les variations de g (on ne demande pas la courbe représentative de g).

b- Calcule $g(-1)$ et précise le signe $g(x)$ suivant les valeurs de x .

3°) a- Calcule $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(x)$.

b- Dresse le tableau de variation de

4°) a- Prouve que le point $I(1; 0)$ est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C})$.

b- Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point I .

c- Etudie les branches infinies de $(\mathcal{C})$.

d- Construis (T) et $(\mathcal{C})$.

5°) Calcule, en cm², l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par $(\mathcal{C})$, l'axe $(x'Ox)$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. (On pourra faire une intégration par parties).

ACTIVITE 17 : cor. p : 305

1/. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x(1 + e^{2-x}).$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 2 cm).

1°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}.$$

a- Etudier les variations de h (on ne déterminera pas de limites aux bornes de D_h).

b- En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2°) a- Etudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b- Précise la nature de la branche infinie de f en $-\infty$.

c- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$, puis interprète le résultat obtenu.

d- Précise la position de (C) par rapport à la droite (Δ): $y = x$.

3°) a- Dresse le tableau de variation de f .

b- Démontre que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

c- f^{-1} est-elle dérivable en 4 ?

d- Etudier la position de (C) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

e- Construis (C) (On tracera la tangente à (C) au point d'abscisse 2).

f- Construis (C') courbe de f^{-1} dans le repère précédent.

II/. Soit λ un réel strictement positif. R_λ est la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$ et les courbes d'équations respectives : $y = f(x)$ et $y = x$.

Soit $a(\lambda)$ l'aire de R_λ en cm^2 .

4°) Calcule $a(\lambda)$ en fonction de λ .

5°) Détermine $a = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda)$. Interprète graphiquement le résultat obtenu.

ACTIVITE 18 : cor. p : 306

A/ On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = (\ln x)^3 + \ln x - 2.$$

1°) Etudie le sens de variation de g . Calcule $g(e)$.

2°) Déduis de l'étude de g le signe de $g(x)$

B/ On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{(\ln x)^3 - \ln x + 1}{(\ln x)^2}$$

3°) a- Quel est l'ensemble de définition D_f de la fonction f ?

b- Etudie les limites de f aux bornes de D_f .

4°) a- Etudie la dérivabilité de f sur D_f puis vérifie que

$$\text{pour tout } x \text{ de } D_f, f'(x) = \frac{g(x) \ln x}{x(\ln x)^2}$$

b- Etudie le sens de variations de f puis dresse son tableau de variation.

5°) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé

$(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère la courbe (C_f) représentative de f et la courbe (C_h) d'équation : $y = \ln x$.

Etudie la position relative de (C_f) et (C_h) . Trace (C_f) (C_h) .

C/ Soient les réels a et b tels que : $1 < a < b$.

6°) a- Etablis une formule d'intégration par parties pour

$$\text{l'intégrale : } \int_a^b \frac{1}{\ln x} dx.$$

$$\text{b- Déduis-en que : } \int_a^b \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} dx = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a}.$$

7°) Calcule l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par les courbes (C_f) et (C_h) et les droites d'équations :

$$x = e \text{ et } x = \lambda \text{ avec } x > e.$$

Trouve le limite de $A(\lambda)$ lors que λ tend vers $+\infty$.

ACTIVITE 19 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur

l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2$.

1°) Vérifie que la fonction h , définie par : $x \mapsto x \ln x - x$, est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0; +\infty[$.

$$2°) \text{ On pose } I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{3}{e^2}} \ln x dx \text{ et } I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{3}{e^2}} (\ln x)^2 dx.$$

a- Calculer I_1 .

b- En utilisant une intégration par parties, Prouve

$$\text{que : } I_2 = \frac{5}{4} e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}$$

$$\text{c- Calcule } \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{3}{e^2}} f(x) dx. \text{ En déduire l'aire de l'ensemble}$$

des points $M(x; y)$ du plan tels que $\begin{cases} \frac{1}{e} \leq x \leq e^{\frac{3}{2}} \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$

ACTIVITE 20 : cor. p : 308

A/ On considère la fonction :

$$u :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

1°) a- Détermine l'ensemble de définition de u .

b- Calcule $u(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$

2°) Etudie le sens de variation de u et dresse son tableau de variations..

(Il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1)

3°) Déduis des résultats précédents que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0; 1[, u(x) \geq 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, u(x) < 0 \end{cases}$$

B/ Soit g la fonction définie par :

$$g: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1$$

On désigne par (C_g) la courbe de g dans un plan

rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (unité 2 cm)

4°) Détermine D_g (le domaine de définition de g) ; puis étudie la limite de g en 1.

5°) a- Vérifie que : $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$. Prouve que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) = 1$$

b- Dédus-en que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$. Interprète

géométriquement ce résultat.

c- Dresse le tableau de variation de g .

d- Démontre qu'il existe un réel α unique appartenant à $]0; 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$

Donne un encadrement d'ordre 1 de α .

6°) Trace la courbe (C_g) .

C/ Soit f la fonction définie par :

$$f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (x^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$$

7°) Prouve que f est dérivable sur $[0; 1[$ et que

$$f'(x) = g(x), \forall x \in [0; 1[$$

8°) Détermine l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C_g) ; l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$. (Tu donneras le résultat sous forme rationnelle)

ACTIVITE 21 :

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = x + \alpha + \frac{\beta}{x}$$

1°) Détermine α et β pour que cette fonction ainsi que sa dérivée première s'annulent pour $x = 2$.

2°) On considère la fonction g définie pour tout réel non nul x par : $g(x) = x - 4 + \frac{4}{x}$. On note C_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unités sur les axes 0,5)

a- Etudie le sens de variation de la fonction g et dresse son tableau de variation.

b- Détermine les asymptotes à la courbe (C_g)

c- Trace la courbe représentative (C_g) de g .

3°) En utilisant la courbe (C_g) , discute suivant les valeurs du réel m le nombre et le signe des solutions de l'équation : $x^2 - (4+m)x + 4 = 0$

4°) La droite (Δ) d'équation $y = x - 4$ coupe l'axe des abscisses au point A ; B désigne le point de (C_g) d'abscisse 2 ; E le point de (Δ) d'abscisse λ , ($\lambda > 4$) puis $A(\lambda)$ est le domaine plan limité par la courbe (C_g) , le segment $[AB]$, la demi-droite $[AE)$ et la droite d'équation $x = \lambda$

a- Détermine l'aire $A(\lambda)$.

b- Détermine la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$

ACTIVITE 22 : cor. p : 310

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1)e^x, \text{ si } x \leq 1$$

$$f(x) = x \left(\sqrt{\frac{x-1}{x^3+1}} \right), \text{ si } x > 1 \text{ et on désigne par } (C_f) \text{ la}$$

courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2cm)

Partie A :

On considère : $U : x \mapsto x^3 + 3x - 2$

1°) Etudie les variations de la fonction U .

2°) Démontre que l'équation $U(x) = 0$ admet une solution unique β telle que : $\frac{1}{2} < \beta < 1$

3°) Dédus-en le signe de $U(x)$ suivant x .

Partie B :

4°) Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$.

5°) a) Etudie la continuité de f en $x_0 = 1$

b) Etudie la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ et donne une interprétation géométrique.

6°) Soit h la fonction définie pour $x > 1$ par :

$$h(x) = [f'(x)]^2$$

a- Exprime $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et $f(x)$.

b- Calcule $h(x)$ et $h'(x)$ et déduis-en que pour tout

$$x > 1, f'(x) = \frac{xU(x)}{(x^3+1)^2} \times \frac{1}{2f(x)}$$

7°) Etudie les variations de f .

8°) Etudie les branches infinies de (C_f) .

9°) Construis la courbe (C_f)

Partie C :

10°) Soit $F : x \mapsto (ax + b)e^x$

a- Détermine a et b pour que F soit une primitive sur $]-\infty; 1]$ de la fonction f .

b- Calcule l'aire $A(\alpha)$ en cm^2 du domaine plan limité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ ($\alpha < 0$).

c- Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha)$

11°) Soit $H(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right)e^{2x}$ et soit (Γ) la

représentation graphique de f sur $[0; 1]$.

a- Justifie que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$

b- Calcule en cm^2 le volume V du solide engendré par la rotation de (Γ) autour de l'axe des abscisses.

ACTIVITE 23 : cor. p : 312

Partie A :

Soit u la fonction de la variable réelle x définie par :

$$u(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$$

1°) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $u(x) = 0$

2°) Détermine le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

Soit g la fonction de variable réelle x définie par :

$$g(x) = x - 2\sqrt{1+x^2}$$

3°) a- Justifie que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b- Calcule la dérivée g' de la fonction g .

c- Déduis-en le signe de $g'(x)$.

4°) Détermine les limites de g aux bornes de son ensemble de définition D puis dresse le tableau de variation de g .

5°) a- Détermine les équations des asymptotes à la courbe (C) de g .

b- Précise la position de la courbe (C) par rapport à ses asymptotes.

6°) Construis la courbe (C) de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (un graphique 2 cm)

Partie C :

7°) Détermine la fonction numérique h telle que pour tout réel x , $h(-x) + g(x) = 0$

8°) Soit (Γ) la courbe représentative de h . Prouve que $(C) \cup (\Gamma)$ est la courbe d'équation :

$$y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$$

9°) Déduis-en que le point O est un centre de symétrie de la courbe $(C) \cup (\Gamma)$

10°) Construis alors (Γ) dans le repère précédent.

Partie D :

Soit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

11°) a- Démontre que pour tout réel x , $\sqrt{1+x^2} > |x|$

b- Déduis-en l'ensemble de définition de f

12°) Calcule la dérivée f' de f puis déduis-en une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

13°) Calcule en centimètre carré l'aire de l'ensemble des

points $M(x; y)$ du plan qui vérifie : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ g(x) \leq y \leq -x \end{cases}$

ACTIVITE 24:

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + xe^{\frac{x}{2}} & , \text{ si } x \leq 0 \\ x \ln x - x + 1 & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

et Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et (C_f) la courbe représentative de f dans ce repère.

4°) Détermine le domaine de définition de f

5°) a- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b- Ecris les équations des demi-tangentes à (C_f) au point d'abscisse 0

6°) a- Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b- Etudie les branches infinies de la courbe (C_f) .

7°) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variations.

8°) Trace les demi-tangentes à (C_f) au point d'abscisse 0 et trace (C_f)

9°) Détermine l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives $y = 1$, $x = -1$ et $x = 0$ (Tu pourras utiliser une intégration par partie)

10°) Démontre que la restriction g de f à l'intervalle $]-\infty; 0[$ est une bijection de l'intervalle $]-\infty; 0[$ sur un intervalle que tu préciseras.

ACTIVITE 25 :

On considère la fonction numérique de la variable réelle

définie par : $\begin{cases} h(x) = (3-x)\sqrt{x} & , \text{ si } x \geq 0 \\ h(x) = e^x - x - 1 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$ et on désigne

par (γ) sa courbe représentative de h dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

A/

1°) a- Etudie la continuité de h en 0.

b- Etudie la dérivabilité de h en 0. Quelle interprétation géométrique peut-on en tirer ?

c- Etudie les variations de h et dresse son tableau de variation.

2°) a- Prouve que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

Précise la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) pour $x < 0$

b- Ecris une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 3.

c- Construis la courbe $(\mathcal{C})$, la tangente (T) et la droite (Δ) .

B/

3°) Soit g l'application définie par :

$$g:]-\infty; 0[\rightarrow]0; +\infty[$$

$$x \mapsto g(x) = h(x)$$

a- Prouve que g est une bijection

b- Trace la courbe représentative (Γ) de la réciproque g^{-1} de g dans le même repère que $(\mathcal{C})$. Tu justifieras la construction

4°) on donne la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -h(x) \text{ et } (\mathcal{C}') \text{ sa courbe représentative}$$

Construis (C') dans le même repère que (C) en justifiant ta construction

5°) On considère le domaine plan (E) délimité par les courbes $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

a- Calcule l'aire A de (E) en cm^2

b- Détermine en cm^3 le volume du solide engendré par la rotation de (E) autour de l'axe des abscisses.

ACTIVITE 26 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|, & \text{si } x \in]-\infty; -1[\cup]1; 0[\\ f(x) = x^2 e^{-x}, & \text{si } x \in [0; +\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$$

Partie A :

1°) Quel est le domaine de définition de f . Calcule $f(-2)$ et $f(3)$

2°) a- Prouve que la fonction f est continue en zéro.

b- Etudie la dérivabilité de f en 0. Et interprète graphiquement tes résultats

3°) a- Etablis que la dérivée f' de f a pour expression :

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \text{ si } x \in]-\infty; -1[\cup]1; 0[$$

$$f'(x) = x(2-x)e^{-x} \text{ si } x \in [0; +\infty[$$

b- Dresse le tableau de variation de la fonction f .

4°) Démontre que l'équation admet une racine unique comprise entre $-1,6$ et $1,5$.

5°) a- Justifie que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

b- Etudie la position de (C) par rapport à (D) dans $] -\infty; 0[\setminus \{-1\}$

Partie B :

Soit g l'application définie par :

$$g: [0; 2] \rightarrow f([0; 2])$$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

7°) Prouve que g définit une bijection de $[0; 2]$ sur un intervalle J à préciser.

8°) On note g^{-1} la bijection réciproque de g .

a- Résous l'équation $g^{-1}(x) = 1$.

b- Démontre que $(g^{-1})' \left(\frac{1}{e} \right) = e$.

9°) On appelle (C') la courbe représentative de g^{-1} .

Trace (C') en utilisant la courbe (C) et une transformation à préciser (on placera sur la courbe (C') le point

d'ordonnée 1 et la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$).

Partie C :

λ étant un réel strictement positif, on pose

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx$$

10°) a- Interprète graphiquement $I(\lambda)$.

b- En procédant à une intégration par parties, calcule $I(\lambda)$.

11°) Quelle est la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

12°) On pose $\lambda = 2$

a- Calcule $I(\lambda)$

b- Déduis-en la valeur en cm^2 de l'aire de la partie limitée par (C') et les droites d'équation $y = 0$;

$$x = 0 \text{ et } x = \frac{4}{e^2}.$$

ACTIVITE 27 : (extrait bac D 2014 Burkina -Faso)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (1-x)e^x, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique : 2cm.

Partie A :

- 1°) a- Étudie la continuité de f et $x_0 = 1$.
b- f est-elle dérivable en $x_0 = 1$? Interprète géométriquement le résultat obtenu.
- 2°) a- Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b- Soit f' la dérivée de f . Calcule $f'(x)$ et étudie le signe de f' .
c- Dresse le tableau de variations de f .
- 3°) Prouve que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
- 4°) Détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -1 . (on donne : $\frac{1}{e} \approx 0,36$)
- 5°) Trace (Δ) , (T) et $(\mathcal{C})$.
- 6°) a- Démontre que la restriction de f à $]1; +\infty[$ réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle J que tu préciseras.
b- On note $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de cette bijection réciproque dans le repère $\mathcal{R}$.
Construis $(\mathcal{C}'')$

Partie B :

- 7°) Soit α un réel strictement négatif.
a- A l'aide d'une intégration par parties, calcule $I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 x e^x dx$.
b- On désigne par D_{α} le domaine plan délimité par $(\mathcal{C})$, (Ox) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$. Calcule, en cm^2 , la valeur de l'aire $A(\alpha)$ du domaine D_{α} .
c- Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha)$.
- 8°) a- Détermine les réels a , b et c tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$.
b- Calcule, en cm^3 , le volume $V(\alpha)$ du solide $S(\alpha)$ engendré par la rotation complète du domaine D_{α} autour de l'axe (Ox) .

ACTIVITE 28 : cor. p : 314 (extrait BAC D 2004 Sénégal)
Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$$

- 1°) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f et trouve les trois réels a , b et c tels que, pour tout x de D_f , on ait : $f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1}$.
- 2°) Détermine les limites de f aux bornes de D_f .
- 3°) a- Détermine la fonction dérivée de f .
b- Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$.
c- Dédus en le sens de variation de f et dresse le tableau de variations de f .
- 4°) On appelle (C) la représentation graphique de la courbe f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dont l'unité est 2 cm.
Démontre que les droites d'équations respectives : $y = 2x - 1$ et $y = 2x - 2$ sont des asymptotes de (C) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.
Précise l'autre asymptote.
- 5°) Soit x un réel de D_f , on considère les deux points M et M' de (C) d'abscisses respectives x et $-x$, détermine les coordonnées du milieu Ω de segment $[MM']$.
Que peux-tu déduire pour la courbe (C) ?
- 6°) Trace la courbe (C) .
- 7°) a- Trouve les réels α et β tels que, pour tout réel x

de l'ensemble D_f on fait : $f(x) = 2x + \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x - 1}$.

- b- Soit k un réel supérieur ou égal à 2.
Détermine l'aire $A(k)$ en cm^2 de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$\begin{cases} \ln 2 \leq x \leq \ln k \\ 2x - 1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

c- Calcule $\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k)$

ACTIVITE 29 : cor. p : 316
A°) On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = x - \sqrt{x^2 - x}, & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) = x^2 \ln x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et on désigne par (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 2 cm.

- 1°) g est-elle continue en 0 ?
- 2°) g est-elle dérivable en 0 ? Donne une signification graphique de tes résultats
- 3°) Étudie les variations de g .

sur les calculs intégraux

4°) a- Prouve que la droite (D) d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C_g) au voisinage de $-\infty$.

b- Etudie la position relative de (C_g) et (D) .

5°) Trace (C_g) .

B°) Soit φ l'application définie par :

$$\varphi:]-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \varphi(x) = g(x)$$

6°) Justifie que φ est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur un intervalle J que tu préciseras. On notera φ^{-1} la réciproque de φ .

7°) Prouve que $\forall x \in J, \varphi^{-1}(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

8°) On note $(C_{\varphi^{-1}})$ la courbe de φ^{-1}

Précise, son tableau de variation, l'asymptote à $(C_{\varphi^{-1}})$ et les autres propriétés utiles de φ^{-1} . Trace $(C_{\varphi^{-1}})$ dans le même repère que (C_g)

9°) a- Démontre que, $\forall x \in J, \varphi^{-1}(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{2x-1}$ avec α, β et γ trois constantes réelles à déterminer.

b- Donne une primitive de $\varphi^{-1}(x)$

10°) a- Calcule en cm^2 , l'aire A_1 de l'ensemble E_1 des points $M(x; y)$ tels que :
$$\begin{cases} -1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 \\ -1 \leq y \leq \varphi^{-1}(x) \end{cases}$$

b- Calcule, l'aire A_2 de l'ensemble E_2 des points

$M(x; y)$ tels que :
$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x \leq y \leq \varphi^{-1}(x) \end{cases}$$

c- Déduis-en l'aire $E_1 \cup E_2$ et l'aire A

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ g(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

ACTIVITE 30 :

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par :

$f(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(1-x)$ où a, b et c sont des nombres réels.

On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse -1 .

Partie A : Détermination de f

Détermine a, b, c de façon que les conditions suivantes soient remplies :

- $\mathcal{C}$ passe par le point O et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.
- la tangente à $\mathcal{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.

Dans la suite du problème tu prendras

$$f(x) = x^2 + 3x + 2\ln(1-x)$$

Partie B : étude de la fonction f et tracé de $\mathcal{C}$.

1°) Détermine la limite de f en 1. Déduis-en l'existence d'une asymptote $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}$.

2°) Détermine la limite en $-\infty$ de la fonction f .

3°) On désigne par f' la dérivée de f . Démontre que

$$f'(x) = \frac{(1-2x)(x+1)}{1-x} \text{ pour tout réel } x \text{ strictement inférieur à } 1.$$

4°) Etudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

Dresse le tableau de variations de f .

5°) a- En utilisant le tableau de variations, détermine le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$.

b- On note α la solution appartenant à $]-\infty; -1[$. Justifie que $\alpha \in]-2; -1,8[$.

6°) Construis $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C : Calcul d'aire

1°) a- Soit H et h les fonctions définies sur $]-\infty; 1[$ par :

$$H(x) = (x-1)\ln(1-x) - x \text{ et } h(x) = \ln(1-x).$$

Démontre que H est une primitive de h sur $]-\infty; 1[$.

b- Déduis-en une primitive F de f sur $]-\infty; 1[$.

2°) Calcule l'aire A de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha$ et $x = 0$.

Tu donneras la valeur exacte de A en cm^2 en fonction de α .

ACTIVITE 31 :

Partie A :

On donne dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la représentation graphique (Γ) d'une fonction g , définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. La droite T passant par O et A(1; 1) est tangente en A à la courbe (Γ) .

La courbe (Γ) admet pour asymptote verticale l'axe des ordonnées

4°) Soit l'intégrale $I = \int_3^4 \frac{e}{\ln x} dx$.

- Donne une interprétation géométrique de I .
- Donne par la méthode des rectangles, un encadrement de I par deux décimaux d'ordre 3. (Tu partageras l'intervalle $[3; 4]$ en 5 intervalles de même amplitude).
- Déduis-en un encadrement de l'aire A du domaine limité par (C) , la droite $(\Delta): y = x - 2$ et les droites d'équations respectives $x = 3$ et $x = 4$.

ACTIVITE 33 :

On considère la fonction numérique h de la variable

$$\text{réelle } x \text{ définie par : } \begin{cases} h(x) = e^x - x & , \text{ si } x < 0 \\ h(x) = \cos^2 \pi x & , \text{ si } x \in [0; 1] \\ h(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

et on désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 2 cm

- Détermine l'ensemble de définition D de h .
 - Calcule les limites de h aux bornes de D
- Etudie la continuité de h en tout point de D et en particulier en 0 et en 1
 - Etudie la dérivabilité de h en tout point de D et en particulier en 0 et en 1
 - Interprète graphiquement les résultats obtenus lors de l'étude de la dérivabilité de h en 0 et en 1
- Etudie le sens de variation de h et dresse son tableau de variation
- Etudie les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$
 - Justifie que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion dont tu préciseras les coordonnées.
 - Trace la courbe $(\mathcal{C})$ avec ses différentes tangentes et demi-tangentes éventuelles
- On désigne par E le domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = e$. Calcule en cm^2 l'aire du domaine E .
- On pose $I = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right]$. Calcule $h(I)$
- Soit l'application $g: I \rightarrow h(I)$

$$x \mapsto g(x) = h(x)$$
 - Justifie que g admet une application réciproque g^{-1}
 - Détermine le domaine de dérivabilité K de g^{-1} .

8°) Soit (Γ) la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Justifie que le point $B\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$ appartient à (Γ) .
- Calcule $(g^{-1})'\left(\frac{1}{4}\right)$
- Construis la courbe (Γ) dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

ACTIVITE 34 : cor. p : 319

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} & , \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x} + 1 & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie I

- Etudie les variations de la fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par : $u(x) = x - \ln x$
 - Déduis-en que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $x - \ln x \neq 0$.
- Soit D l'ensemble de définition de f .
 - Démontre que $D = [-1; +\infty[$.
 - Démontre que f est continue sur D .
 - Etudie la dérivabilité de f en 0 puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.
 - Etudie la dérivabilité de f en -1
- Etudie les variations de f .
 - Construis la courbe (C)

Partie II :

4°) On pose $I = [-1; 0]$ et $J = f(I)$

Soit la fonction

$$g: I \rightarrow J :$$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

- Démontre que g est bijective.
- Dresse le tableau de variation de g^{-1} puis construis sa courbe (Γ) dans le même repère que (C) .
- Détermine $g^{-1}(x)$ pour tout x élément de J .
- Calcule $\int_{-1}^0 (g^{-1}(x)) dx$.
- Soit A l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ) , la droite d'équations $y = x$ et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 0$.
 - Calcule A .

- b- Déduis-en l'aire du domaine plan compris entre la courbe (C) et (Γ).

ACTIVITE 35 :

On considère la fonction f définie sur $[-e; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + (x+e) \left(\ln \left(\frac{x+e}{e} \right) \right)^2, & \text{si } x \neq -e \\ f(-e) = -e \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

A/ 1° a- Démontre que $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 = 0$

b- Calcule la limite de f en $-e$; f est-elle continue en $-e$?

c- Etudie la dérivabilité de f en $-e$.

2°) Détermine le sens de variation de f , puis dresse son tableau de variation.

3°) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

4°) Trace (C) et (T)

5°) a- Démontre que f est une bijection de $[-e; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1}

b- Trace (C') dans le même repère que (C).

c- Détermine l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable.

B/ Soit α un nombre réel tel que $-e < \alpha < 0$. On pose

$$J(\alpha) = \int_{\alpha}^0 f(x) dx$$

6°) Pour tout entier naturel n , on désigne par :

$$I_n(\alpha) \text{ l'intégrale } \int_{\alpha}^0 (x+e) [\ln(x+e)]^n dx$$

a- A l'aide d'une intégrale par parties, exprime $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_{n-1}(\alpha)$ pour n entier naturel non nul.

b- Calcule $I_0(\alpha)$ puis $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$.

7°) a- Vérifie que pour tout x de $]-e; +\infty[$,

$$f(x) = (x+e)(-1 + \ln(x+e))^2 + x$$

b- Exprime $J(\alpha)$ en fonction de $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$, puis en fonction de α seul.

8°) Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow -e} (-J(\alpha))$

ACTIVITE 36 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité 2 cm.

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x + (1-x)e^{2x} \text{ et } g(x) = 1 + (1-2x)e^{2x}$$

1°) a- Etudie les variations de g .

b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $0,63 < \alpha < 0,64$

c- Déduis-en le signe de $g(x)$

2°) a- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

b- Calcule $f(1)$ et déduis-en que le signe de $f(\alpha)$ (Utilise le sens de variation de f)

c- Justifie que $f(\alpha) = \alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\alpha-1)}$

3°) a- Démontre que la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de f admet un point d'inflexion I qu tu préciseras.

b- Donne une équation cartésienne de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) en I.

c- Etudie les branches infinies de la courbe ($\mathcal{C}$).

d- Construis (T) et ($\mathcal{C}$) (tu prendras $\alpha = 0,64$)

4°) Soit γ un réel strictement négatif.

a- Calcule l'aire $S(\gamma)$ du domaine limité par la courbe ($\mathcal{C}$), la droite (Δ) : $y = x$ et les droites d'équations $x = \gamma$ et $x = 1$

b- Calcule $\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} S(\gamma)$

5°) On pose $I =]-\infty; \alpha]$ et $J = f(I)$. Soit l'application $h: I \rightarrow J$

$$x \mapsto h(x) = f(x)$$

a- Justifie que h admet une application réciproque h^{-1} dont tu préciseras l'ensemble de définition.

b- Etudie la dérivabilité de h^{-1} et calcule $(h^{-1})'(1)$

c- Trace dans le même repère que ($\mathcal{C}$) la courbe ($\mathcal{C}'$) de h^{-1} .

6°) Soit $v: x \mapsto (1-x)e^{2x}$ et (D) le domaine limité par la courbe de v , les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

a- Détermine les réels a , b et c pour que la fonction $H: x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{4x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto [v(x)]^2$

Calcule le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine (D)

b- Déduis-en l'aire du domaine plan compris entre la courbe (C) et (Γ).

ACTIVITE 35 :

On considère la fonction f définie sur $[-e; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + (x+e) \left(\ln \left(\frac{x+e}{e} \right) \right)^2, & \text{si } x \neq -e \\ f(-e) = -e \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

A/ 1° a- Démontre que $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 = 0$

b- Calcule la limite de f en $-e$; f est-elle continue en $-e$?

c- Etudie la dérivabilité de f en $-e$.

2°) Détermine le sens de variation de f , puis dresse son tableau de variation.

3°) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

4°) Trace (C) et (T)

5°) a- Démontre que f est une bijection de $[-e; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1}

b- Trace (C') dans le même repère que (C).

c- Détermine l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable.

B/ Soit α un nombre réel tel que $-e < \alpha < 0$. On pose

$$J(\alpha) = \int_{\alpha}^0 f(x) dx$$

6°) Pour tout entier naturel n , on désigne par :

$$I_n(\alpha) \text{ l'intégrale } \int_{\alpha}^0 (x+e) [\ln(x+e)]^n dx$$

a- A l'aide d'une intégrale par parties, exprime $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_{n-1}(\alpha)$ pour n entier naturel non nul.

b- Calcule $I_0(\alpha)$ puis $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$.

7°) a- Vérifie que pour tout x de $[-e; +\infty[$,

$$f(x) = (x+e)(-1 + \ln(x+e))^2 + x$$

b- Exprime $J(\alpha)$ en fonction de $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha)$ et $I_2(\alpha)$, puis en fonction de α seul.

8°) Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow -e} (-J(\alpha))$

ACTIVITE 36 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité 2 cm.

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x + (1-x)e^{2x} \text{ et } g(x) = 1 + (1-2x)e^{2x}$$

1°) a- Etudie les variations de g .

b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $0,63 < \alpha < 0,64$

c- Déduis-en le signe de $g(x)$

2°) a- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

b- Calcule $f(1)$ et déduis-en que le signe de $f(\alpha)$ (Utilise le sens de variation de f)

c- Justifie que $f(\alpha) = \alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\alpha-1)}$

3°) a- Démontre que la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de f admet un point d'inflexion I que tu préciseras.

b- Donne une équation cartésienne de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) en I .

c- Etudie les branches infinies de la courbe ($\mathcal{C}$).

d- Construis (T) et ($\mathcal{C}$) (tu prendras $\alpha = 0,64$)

4°) Soit γ un réel strictement négatif.

a- Calcule l'aire $S(\gamma)$ du domaine limité par la courbe ($\mathcal{C}$), la droite (Δ) : $y = x$ et les droites d'équations $x = \gamma$ et $x = 1$

b- Calcule $\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} S(\gamma)$

5°) On pose $I =]-\infty; \alpha]$ et $J = f(I)$. Soit l'application $h: I \rightarrow J$

$$x \mapsto h(x) = f(x)$$

a- Justifie que h admet une application réciproque h^{-1} dont tu préciseras l'ensemble de définition.

b- Etudie la dérivabilité de h^{-1} et calcule $(h^{-1})'(1)$

c- Trace dans le même repère que ($\mathcal{C}$) la courbe ($\mathcal{C}'$) de h^{-1} .

6°) Soit $v: x \mapsto (1-x)e^{2x}$ et (D) le domaine limité par la courbe de v , les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

a- Détermine les réels a , b et c pour que la fonction $H: x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{4x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto [v(x)]^2$

Calcule le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine (D)

ACTIVITE 37 : cor. p : 322

Prouve que F , définie par : $F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$, est dérivable sur $I =]1; +\infty[$ et calcule sa dérivée.

ACTIVITE 38 : cor. p : 323

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \text{ et } g(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}.$$

1°) On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$.

a. Calcule $I + J$.

b. Calcule $J - I$.

c. Déduis-en les valeurs de I et J .

2°) On note $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2 dx$ et $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x))^2 dx$.

a- Calcule $f'(x)$. Déduis-en la somme $K + L$.

b- En t'inspirant de la première question, calcule les valeurs de K et L .

c- Déduis-en la valeur de $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$

ACTIVITE 39 : cor. p : 324

On considère la fonction f définie sur l'intervalle

$$I =]-1; 1[\text{ par : } f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

1°) Justifie que la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est définie sur I

2°) Etudie le sens de variation de F sur I .

3°) Démontre que F est impaire.

4°) Soit G la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$G(x) = F(\sin x).$$

a- Prouve que G est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et calcule

$$G'.$$

b- Déduis-en une expression simple de G .

5°) Calcule l'intégrale $K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

ACTIVITE 40 : cor. p : 324

Soit la fonction G la fonction définie par :

$$G(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}} dt$$

1°) a- Justifie que G est définie sur $\mathbb{R}$ et que G est impaire.

b- Etudie le sens de variation de G et déduis-en le signe de $G(x)$.

2°) a- Prouve que pour tout réel strictement positif t , on a :

$$\frac{1}{2t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$$

b- Calcule $\int_0^x \frac{dt}{2t+1}$ et déduis-en la limite de G à

$+\infty$ puis dresse le tableau de variation de G .

3°) a- Démontre que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b- Soit F la réciproque de G . Démontre que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x ,

$$F'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1+4[F(x)]^2}$$

c- Déduis-en que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'' - F' = 0$; Calcule $F(0)$ et $F'(0)$. Déduis-en F .

d- Détermine alors $G(x)$ pour tout réel x .

ACTIVITE 41 : cor. p : 325

La fonction f est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}}, & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1), & \text{si } -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

(C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique : 2 cm.

Partie A :

1°) Démontre que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-1; +\infty[$.

2°) a- Démontre les égalités suivantes : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

b- Déduis-en de la question précédente les droites asymptotes de (C_f) .

3°) a- Prouve que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

b- Etudie la continuité de f en 0

c- En posant $h = \frac{1}{x}$ étudie $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

d- Étudie $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

f est-elle dérivable en 0 ? Interprète graphiquement les résultats.

4°) Démonstre que :

a- Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \left(\frac{1-x}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}}$

b- Pour tout $x \in]-1; 0[$, $f'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$.

5°) Dresse le tableau de variation de f .

6°) Trace ($\mathcal{C}_f$)

Partie B :

Soit α un nombre réel tel que : $-1 < \alpha < 0$.

7°) a- Justifie que Pour tout x tel que $-1 < x < 0$,

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

b- En utilisant une intégration par parties démontre que : $\int_{\alpha}^0 \ln(x+1) dx = -\alpha \ln(\alpha+1) + \alpha - \ln(\alpha+1)$.

8°) a- Déduis-en l'aire $A(\alpha)$ du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe ($\mathcal{C}_f$) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

b- Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow -1^+} A(\alpha)$

ACTIVITE 42 :

Partie A :

On considère les fonctions f_m définies par :

$$f_m(x) = e^x + \ln\left(\frac{m+x}{m-x}\right) \text{ où } m \text{ est un paramètre réel non nul et on désigne par } (\mathcal{C}_m) \text{ la courbe représentative de } f_m$$

dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a- Donne l'ensemble de définition D_m de f_m .

b- Calcule les limites de f_m aux bornes de D_m .

c- Calcule $f_m(0)$. Déduis-en que toutes les courbes ($\mathcal{C}_m$) passent par un point fixe A dont tu donneras les coordonnées.

2°) Étudie les variations de f_m et fais son tableau de variations lors que $m > 0$.

3°) Détermine le réel m sachant que ($\mathcal{C}_m$) admet au point A une tangente parallèle à la droite d'équation :

$$y = -x + 3.$$

Partie B :

Soit f la fonction de variable réelle x définie par :

$$f(x) = e^x + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

4°) Donne l'ensemble de définition D de f et vérifie que f appartient à la famille des fonctions f_m .

5°) Soit g la fonction définie sur D par :

$$g(x) = -2 + (1-x^2)e^x.$$

Étudie les variations de g sur D et déduis-en le signe de $g(x)$ sur D .

6°) Déduis-en de l'étude précédente le tableau de variation de f , puis trace sa courbe ($\mathcal{C}$).

7°) Démonstre que f est bijective de D sur un ensemble J que tu préciseras.

8°) On désigne par h la réciproque de f et par (T) sa courbe.

a- Démonstre que le point $B(1; 0)$ appartient à (T).

b- Ecris l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (T) en B.

c- Trace (Δ) et (T)

9°) a- Calcule à l'aide d'une intégration par partie

$$\text{l'intégrale : } \int_{-\frac{1}{2}}^0 \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx.$$

b- Calcule l'aire du domaine limité par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.

c- déduis-en l'aire du domaine limité par (T), l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y = -\frac{1}{2}$ et $y = 0$.

ACTIVITE 43 :

Soit la fonction définie par : $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$

I/

1°)- Détermine le domaine de définition de la fonction f .

2°) a- Démonstre que f est une fonction impaire et périodique de période 2π .

b- Démonstre que le graphe de f admet la droite d'équation: $x = \frac{\pi}{2}$, comme axe de symétrie.

c- Dresse le tableau de variation de la fonction f sur

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

d- Construis le graphe de f sur $[-\pi; \pi]$

II/

5°) Détermine les réels a , b et c tels que: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$- \{-1; 1\}, \frac{x^2}{x^2-1} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

6°) a- Calcule l'aire du domaine D , limité par le graphe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations:

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ et } x = \frac{\pi}{2}$$

(On effectuera le changement de variable: $u = \cos t$,

dans l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2 t}{\sin t} \right) dt$)

b- Calcule la valeur moyenne de f sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$.

7°) Calcule la mesure du volume du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des

abscisses (Tu prouveras que: $\frac{\cos^4 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t} - 2 + \sin^2 t$

, puis tu effectueras le changement de variable: $u = \tan t$

, dans l'intégrale: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} \right) dt$)

ACTIVITE 44 :

Partie A :

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$

par : $f(x) = (2-x)e^x - k$ où k est un réel fixé qui vérifie : $0 < k < e$

1°) Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

2°) Calcule $f'(x)$. Déduis-en le tableau de variation de f .

3°) a- Etablis que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, une notée $\alpha_k \in]-\infty; 1]$ et l'autre notée $\beta_k \in]1; +\infty[$

b- Prouve que $e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$

On admettra que β_k vérifie la même relation c'est-à-dire

$$e^{\beta_k} - k\beta_k = (e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)$$

4°) Précise le signe de $f(x)$ suivants les valeurs de x .

Partie B :

5°) Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - kx$

a- Etudie le sens de variation de u .

b- On rappelle que $0 < k < e$. Justifie la propriété suivante : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - kx > 0$

6°) Soit g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx}$$

(C_k) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

a- Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_k(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_k(x)$

b- Prouve que $g'_k(x) = \frac{k \cdot f(x)}{(e^x - kx)^2}$

c- Déduis-en le tableau de variation de g_k .

Calcule $g_k(1)$

7°) On nomme M_k et N_k les points de la courbe (C_k) d'abscisses respectives α_k et β_k .

a- En utilisant la question 3°) b- de la partie A,

Démontre que $g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$

b- Trouve une expression analogue pour $g_k(\beta_k)$

c- Déduis-en de la question précédente que, lorsque k varie les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe (H) dont tu donneras une équation.

8°) a- Détermine la position relative des courbes (C_1) et (C_2)

b- Prouve que $\alpha_2 = 0$

c- En prenant comme unité graphique 2cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées, construis les courbes (C_1) , (C_2) et (H) sur le même graphique. (tu prendras $\alpha_1 = -1,1$, $\beta_1 = 1,8$ et $\beta_2 = 1,6$)

9°) Calcule l'aire délimitée par la courbe (C_1) et les droites d'équations $x = -3$; $x = 0$ et $y = 0$

ACTIVITE 45 :

Partie I-

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x + (x-2)\ln x.$$

1°) a- Prouve que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 2\left(\frac{x-1}{x}\right) + \ln x$

b- Etudie le signe de $g'(x)$.

2°) a- Etudie les variations de g .

b- Déduis-en que, pour tout réel x strictement positif, on a : $g(x) \geq 1$.

Partie II :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2.$$

3°) a- Etudie les variations de f (Tu exprimeras $f'(x)$ en fonction de $g(x)$)

b- Déduis-en que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que tu préciseras.

4°) Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

- a- Ecris une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.
- b- Etudie le sens de variation de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x - 1 - \ln x$.
Déduis-en son signe

5°) Prouve que $f(x) - x = (-1 + \ln x)h(x)$ et déduis-en la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à sa tangente (T).

6°) a- Trace la courbe (C)

b- Trace, dans le même repère, la courbe (Γ) représentative de la fonction f^{-1}

4) a- Calcule les intégrales : $I_1 = \int_1^e x \ln x \, dx$ et

$$I = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$$

b- On désigne par A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) . Calcule à 10^{-3} près la valeur de A .

ACTIVITE 46:

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = 1 + \ln[x(2-x)].$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est 4 cm.

I-

1°) a- Démontre que le domaine de définition de la fonction f est $]0; 2[$.

b- Dresse le tableau de variation de la fonction f .

2) a- Prouve que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$.

b- Détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec la droite

$(O; \vec{i})$. On notera x_0 la plus petite des abscisses.

3°) Soit φ la fonction définie sur $]0; 2[$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - x$$

a- Dresse le tableau de variation de la fonction φ .

b- Déduis-en que l'équation $j(x)=0$ admet exactement deux solutions dont l'une est 1 et l'autre sera notée α . Vérifie que $x_0 < \alpha < 0,3$ et que $\ln[\alpha(2-\alpha)] = \alpha - 1$.

c- Précise le signe de $\varphi(x)$ et Déduis-en la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (D) d'équation $y=x$.

4°) Trace la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D). (On prendra 0,2 comme valeur approchée de x_0).

5°) Soit l'application g définie par : $g:]0; 1] \rightarrow f(]0; 1])$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

a- Justifie que g est une bijection dont tu préciseras l'ensemble de définition J .

b- Calcule $g^{-1}(x)$ pour x appartenant à J . g^{-1} étant la fonction réciproque de g .

c- Trace, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(\mathcal{C}')$ représentative de g^{-1} .

II- Soit $E = \int_{\alpha}^1 \ln[x(2-x)] \, dx$ où α est le réel défini dans la question 1, 3°) b-

6°) a- Démontre, en utilisant une intégration par partie,

$$\text{que : } E = -\alpha(\alpha-1) - 2 \int_{\alpha}^1 \frac{1-x}{2-x} \, dx$$

b- Prouve que : $E = -\alpha^2 + 5\alpha - 4 - 2 \ln \alpha$

(On pourra utiliser l'égalité $\frac{1-x}{2-x} = 1 - \frac{1}{2-x}$ pour

$x \in [\alpha; 1]$)

7°) a- Donne une interprétation géométrique de chacune

des intégrales suivantes : $\int_{\alpha}^1 (f(x) - x) \, dx$;

$\int_{\alpha}^1 (x - f^{-1}(x)) \, dx$ et Prouve qu'elles sont égales.

b- Déduis-en, en fonction de α , la valeur de l'intégrale $\int_{\alpha}^1 \sqrt{1-e^{x-1}} \, dx$

ACTIVITE 47 :

I- On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x(x-1) + \ln x$

1°) Etudie le sens de variation de g .

11°) Calcule $g(1)$ et déduis-en le signe de $g(x)$ pour $x > 0$

II- On considère la fonction numérique f définie

$$\text{par : } f(x) = (x-1)^2 + (\ln x)^2$$

2°) Prouve que f définie sur $]0; +\infty[$ puis Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

3°) Justifie que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x} \text{ pour } x > 0.$$

4°) Dresse le tableau de variation de f .

15°) Soit l'application

$$h:]0; 1] \rightarrow [0; +\infty[$$

$$x \mapsto h(x) = f(x)$$

Démontre que h est une bijection. On désigne par (Γ) la

courbe représentative de la bijection réciproque h^{-1} dans $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$

6°) Soit u la fonction définie sur $]0; 1]$ par :

$$u(x) = h(x) - x$$

- a- Dresse le tableau de variation de u sur $]0; 1]$
- b- Dédus-en qu'il existe un seul réel α de $]0; 1]$ tel que $h(\alpha) = \alpha$
- c- Vérifie que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

7°) a- Etudie les branches à (C)

b- Trace (C) et (Γ)

III- On désigne par A l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$. Soit

$$I = \int_{\alpha}^1 x f'(x) dx$$

8°) Démontre à l'aide d'une intégrale par partie que ,

$$I = -\alpha^2 - A$$

9°) a- Prouve que $I = 2 \int_{\alpha}^1 g(x) dx$

b- Dédus-en que

$$I = -\frac{2}{3}\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha - \frac{7}{3} - 2\alpha \ln \alpha$$

c- Donne la valeur de A en fonction de α

ACTIVITE 48: cor. p : 327

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -\sqrt{1 - e^{2x}} & , \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par D son ensemble de définition et ($\mathcal{C}$) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique 2 cm)

1°) a- Démontre que : $D = \mathbb{R}$.

b- Détermine : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

c- Démontre que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

2°) a- Démontre que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b- Etudier la dérivabilité de f en 0. Dédus-en que la courbe ($\mathcal{C}$) admet à l'origine du repère une tangente dont tu donneras une équation.

3°) Etudie le sens de variation de f sur $] -\infty; 0[$.

4°) a- Calcule $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

b- Détermine le sens de variation de f' . Dédus-en le signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

5°) a- Dresse le tableau des variations de f .

b- Dédus-en sur $]0; +\infty[$, la position relative de ($\mathcal{C}$) et de la droite (Δ) d'équation : $y = 2$.

6°) Construis ($\mathcal{C}$).

7°) Soit α un nombre réel tel que : $0 < \alpha < 1$. On désigne par $A(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe ($\mathcal{C}$) et les droites d'équations $y = 2$, $x = \alpha$ et $x = \frac{2}{e-1}$

a- Calcule $A(\alpha)$.

b- Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A(\alpha)$. Quelle interprétation géométrique peux-tu donner du résultat obtenu ?

9. ACTIVITES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

ACTIVITE 1 :

Résous les équations différentielles suivantes :

1) $y' - \tan x - \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ avec

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln 2.$$

2) $y'' - 4e^{2x} + 2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 5$ et $y'(0) = -3$

3) $y' - y \ln 2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(2) = -8$

4) $y'' - 4y' + 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = -3$

5) $4y'' - 12y' + 9y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = -2$

6) $y'' - 6y' + 10y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(\pi) = 3$ et $y'(\pi) = -2$

7) $y'' + y' = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = -3$ et $y'(0) = 2$

8) Donne la solution générale de l'équation : $y'' - 5y' + 4y = 0$

ACTIVITE 2 :

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y' - 2y = 4x$

1°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2x - 1$

a- Vérifie que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) sur $\mathbb{R}$.

b- Démontre qu'une fonction $f = g + h$ est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si g est solution de $(E_2) : y' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$

2°) a- Détermine les solutions g de l'équation différentielle (E_2) sur $\mathbb{R}$

b- Dédus-en les solutions f de (E_1) sur $\mathbb{R}$

c- Détermine la solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f(0) = 0$$

ACTIVITE 3:

1°) Résous l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' - 2y = 0$$

2°) a- Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ (1 + \sqrt{3})x + (1 - \sqrt{3})y = 3 \end{cases}$$

b- Trouve la solution u de l'équation précédente vérifiant $u'(0) = 0$ et $u(0) = 3$

ACTIVITE 4 :

On donne les équations différentielles

$$(E) : y'' + y = \frac{3}{2} \sin \frac{x}{2} \text{ et } (F) : y'' + 4y' + ay = 0$$

avec a un nombre réel donné.

On considère les fonctions : $u : x \mapsto 2 \sin \frac{x}{2}$ et

$$v : x \mapsto (x+1)e^{-2x}$$

1°) Démontre que la fonction u est une solution de (E)

2°) Démontre qu'une fonction ϕ est une solution de l'équation (E) si et seulement si $\phi - u$ est une solution de l'équation différentielle $(E_1) : y'' + y = 0$.

3°) a- Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de (E) .

b- Détermine la solution ϕ de (E) vérifiant $\phi(0) = 1$ et $\phi'(0) = 1$.

4°) a- Détermine le réel a pour que la fonction v soit une solution de (F)

b- Calcule la valeur moyenne de la fonction v sur $I = [-1; 0]$

ACTIVITE 5 :

1°) Résous l'équation différentielle $(E) :$

$$y'' + 2y' + y = 0$$

2°) Soit (E') l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = x + 3$$

Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$, soit solution de (E') .

3°) a- Démontre que g est solution de (E') si et seulement si $g - h$ est solution de (E) .

b- Résous alors (E') .

c- Détermine la solution f de (E) telle que :

$$f(0) = 2 \text{ et } f'(0) = -1$$

ACTIVITE 6:

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 2y = \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^x}$$

1°) Vérifie que la fonction $f : x \mapsto e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E)

2°) Démontre qu'une fonction φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

3°) Résous (E') et déduis-en les solutions de (E)

ACTIVITE 7 : cor. p : 330

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = -4x$

Partie A :

1°) a- Détermine les nombre réels a et b pour que la fonction $v : x \mapsto ax + b$, soit solution de (E).

b- Démontre que f est solution de (E) si et seulement si $f - v$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 4y' + 4y = 0$

c- Résous l'équation (E') puis détermine la solution de (E) dont la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm passe par le point $J(0; 2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation : $y = -2x$.

Partie B :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = (x+1)e^{-2x} + 1 - x$$

2°) a- Etudie les variations de la fonction dérivée f' de f .

b- Démontre que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $-0,64 < \alpha < -0,63$

c- Déduis-en le signe de $f'(x)$.

3°) a- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

b- Démontre que : $f(\alpha) = \frac{-2\alpha^2}{1+2\alpha}$ et que

$$2,83 < f(\alpha) < 3,16.$$

c- Justifie que la droite (D) : $y = 1 - x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$, puis précise la seconde branche infinie.

d- Trace (C) avec soin (prends $\alpha = -0,64$)

4°) Soit λ un nombre réel strictement supérieur à -1

a- Calcule l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \lambda$.

b- Calcule la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

ACTIVITE 8 : cor. p : 332

Soit l'équation différentielle suivante : (E) :

$$y'' + 3y' + 2y = \left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{-x}$$

1°) Démontre que la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = e^{-x} \ln x$ est une solution particulière de l'équation (E)

2°) Démontre qu'une fonction k , définie sur $]0; +\infty[$ est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $k - g$ est une solution de l'équation

$$\text{différentielle (E}_2\text{)} : y'' + 3y' + 2y = 0$$

3°) Détermine les solutions de l'équation différentielle (E)

4°) Déduis-en l'ensemble solution de l'équation (E)

ACTIVITE 9 :

On se propose de résoudre l'équation différentielle (1) :

$$y' - 2y = xe^{\frac{x}{2}}$$

1°) Résous l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2°) Soient a et b deux réels, u la fonction définie par

$$u(x) = (ax + b)e^{\frac{x}{2}}$$

Détermine a et b pour que u soit une solution de (1)

3°) a- Prouve que v est solution de (1) si et seulement si $v - u$ est solution de (2).

b- déduis les solutions de (1).

c- Détermine la solution de (1) qui s'annule en 0.

ACTIVITE 10 :

On donne l'équation différentielle (E) :

$$f'' + 2f' + f = 0.$$

On pose pour tout réel x , $k(x) = e^{-x}h(x)$.

1°) Démontrer que k est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x , $h''(x) = 0$

2°) Résoudre l'équation différentielle $h'' = 0$.

3°) Déduis-en la solution générale f de (E).

4°) Détermine toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

ACTIVITE 11 :

1°) Soit $f : x \mapsto f(x) = 1 - x^2 e^{-x}$

2°) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = ae^{-x} + b$ où a et b sont deux réels à préciser.

3°) Déduis-en le calcul du réel $K = \int_{-1}^0 f(x) dx$

ACTIVITE 12 :

On considère l'équation différentielle

(F) : $y'' + 2y' + 5y = 0$ et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$

par : $h(x) = e^{-x} \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right)$ et H est la primitive de h qui s'annule en 0.

(T) est la droite d'équation $y = -x + 1$.

1°) a- Vérifie que h est solution de (F).

b- Justifie l'existence de H et exprime H en fonction de h et h' .

2°) Calcule alors $\int_0^{\pi} e^{-x} \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx$

3°) a- Résous (F).

b- Détermine la solution k de (F) telle que $k(0) = 0$ et la tangente (T_0) à la courbe représentative de k au point d'abscisse $x_0 = 0$ soit perpendiculaire à la droite (T).

ACTIVITE 13 :

On donne l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$:

1°) Résous (E)

2°) Démontre que la fonction g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de (E) telle que $g(0) = -1$ et $g'(0) = \sqrt{3}$ est la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x$

3°) Etudie les variations de g sur $[-\pi; \pi]$.

4°) Représente la courbe (C) de g sur $[-\pi; \pi]$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité 2cm.

5°) Calcule le volume du solide (S) engendré par la rotation de la courbe (C) autour de l'axe des abscisses et

les droites d'équation $x = -\frac{5\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{6}$

ACTIVITE 14 :

I/ Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = \frac{1}{e^x - 1}$ où

y est une fonction, de la variable réelle x , dérivable sur $]0; +\infty[$.

1°) Résous l'équation différentielle sans second membre associée à (E)

2°) a- l'on s'intéresse aux solutions particulière φ de (E)

de la forme $\varphi(x) = \frac{h(x)}{e^x}$, où h est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$.

Sachant que φ est une solution de (E), détermine h .

b- Déduis-en la solution générale de (E)

c- Parmi les solutions de (E) détermine la solution qui vérifie la condition $f(\ln 2) = 0$

II/ Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(e^x - 1)}{e^x}$$

Soit α un nombre réel tel que $\alpha > 2$. On pose

$$I(\alpha) = \int_{\ln 2}^{\ln \alpha} f(x) dx$$

3°) a- Détermine une primitive sur $]0; +\infty[$ de la

$$\text{fonction } x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$$

b- Déduis-en une primitive sur $]0; +\infty[$ de la

$$\text{fonction } x \mapsto \frac{1}{e^x - 1} \quad (\text{on remarquera que}$$

$$\frac{e^x}{e^x - 1} = 1 + \frac{1}{e^x - 1})$$

4°) En utilisant le fait que f soit une solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E), prouve que :

$$I(\alpha) = -f(\ln \alpha) + \ln(\alpha - 1) - \ln \alpha + \ln 2$$

5°) Déduis-en que $I(\alpha) = -\frac{\ln(\alpha - 1)}{\alpha} + \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \ln 2$

6°) Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha)$

ACTIVITE 15 :

On considère les équations différentielles

$$(E) : y'' + 2y' + 2y = 0 \quad \text{et} \quad (F) : y'' + 2y' + 2y = -x^2$$

1°) Résous l'équation différentielle (E) et déduis-en la solution f de (E) telle que la tangente à la courbe (C) de la fonction f à l'origine O soit la droite d'équation $y = x$

2°) a- En observant que si g est solution de (E) alors

$$g = -\frac{1}{2}(2g' + g''), \text{ donne alors une primitive de } g \text{ en}$$

fonction de g et g' .

b- Déduis-en alors une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x} \sin x$ et puis détermine l'intégrale

$$f(x) = \int_0^x e^{-t} \sin t \, dt \text{ en fonction de } x.$$

3°) a- Détermine trois réels a , b et c tels que la fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ soit une solution de l'équation (F)}$$

a- Justifie que si une fonction h est solution de (E), alors $h + u$ est solution de (F)

b- Résous l'équation (F)

c- construis la courbe (C') dans le même repère que (C)

ACTIVITE 16 :

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) : y' + 2y = x + 1$$

et on pose : $F(x) = \int_{-1}^x e^{2t}(t+1) dt$

1°) A l'aide d'une intégration par parties, calcule $F(x)$

2°) Pour tout nombre réel x , on pose $S(x) = g(x)e^{-2x}$ où g est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

a- Prouve que si la fonction S est une solution de (E), alors pour tout réel x de $\mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^{2x}(x+1)$$

b- Réciproquement prouve que si g vérifie cette relation, alors S est une solution de (E)

c- En utilisant la question 1°), détermine toutes les fonctions g vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^{2x}(x+1)$$

3°) a- Déduis-en alors que les solutions de (E) sont les

fonctions : $x \mapsto \frac{1}{4}(2x+1) + \frac{1}{4}e^{-2-2x} + ke^{-2x}$ où k est une constante réelle

b- Détermine la solution de (E) pour laquelle l'image de 0 est $\frac{1}{4}$

3°) Déduis-en alors les solutions de (E)

ACTIVITE 17 :

On donne l'équation différentielle suivante

$$(E_1): y' + y = 2(x+2)e^{-x}$$

Partie A :

1°) a- Détermine les nombres réels a et b pour que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ soit solution de l'équation (E_1)

b- Démontre que toute fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E_1) si et seulement si $(g - \varphi)$ est solution de l'équation différentielle $(E_2): y' + y = 0$.

c- Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation (E_2) puis déduis-en la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_1)

2°) Détermine la fonction f solution (E_1) dont la courbe représentative (C_f) passe par le point $K(0; 4)$

Partie B :

3°) La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = (x+2)^2 e^{-x} & , \text{ si } x \in [0; +\infty[\\ h(x) = x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 4 & , \text{ si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction h

a- Démontre que l'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$.

b- Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$

c- Démontre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$

4°) a- Etudie la continuité de h en 0.

b- Etudie la dérivabilité de h en 0 puis interprète les résultats obtenus.

5°) Etudie le sens de variation de h sur $[0; +\infty[$.

6°) a- Calcule $h'(x)$ et $h''(x)$ pour tout x élément de $] -\infty; 0[$.

b- Etudie le sens de variation de h' sur $] -\infty; 0[$.

c- Dresse le tableau de variation de h' sur $] -\infty; 0[$.

d- Déduis-en le signe de $h'(x)$ pour tout x élément de $] -\infty; 0[$.

7°) a- Dresse le tableau de variation de h .

b- Construis la courbe (C)

8°) a- Démontre que pour tout x élément de $[0; +\infty[$,

$$h(x) = (2x+4)e^{-x} - h'(x)$$

b- A l'aide d'une intégration par parties, calcule l'intégrale $\int_0^3 (2x+4)e^{-x} dx$.

9°) Déduis-en en unité d'aire, l'aire du plan délimitée par la courbe représentative (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=3$.

ACTIVITE 18 : cor. p : 332

On considère l'équation $(E): y_1'' + 2y_1' + 5y_1 = 10t - 1$

avec $y_1(0) = \sqrt{2} - 1$; $y_1'(0) = 2 + \sqrt{2}$ et on pose

$u = y_1 - 2t + 1$, t étant une variable réelle.

1°) A partir des dérivées première et seconde u' et u'' , démontre que u est solution d'une équation différentielle (E_1) du second ordre sans second membre.

2°) Résous l'équation différentielle (E_1) puis déduis l'expression de y_1 en fonction de t .

3°) y_2 est une fonction numérique de la variable réelle t définie par : $y_2 = e^t y_1 - 2te^t + e^t$.

Démontre y_2 peut s'écrire sous la forme $y_2 = r \cos \theta$ où r est un réel strictement positif et θ une fonction de t à préciser.

4°) On considère l'équation différentielle : $y'' + 4y = 8$ avec $y(0) = 2 - \sqrt{2}$; $y'(0) = 2\sqrt{2}$ et on pose $v = y - 2$

a- Démontre que v est solution d'une équation différentielle (E_2) du second ordre sans second membre.

b- Résous l'équation différentielle (E_2) puis déduis l'expression de y en fonction de t .

c- Démontre que : $y - 2 = r \sin \theta$ où r et θ sont les valeurs trouvées en 3°)

ACTIVITE 19 : cor. p : 333 (extrait concours APE 2015)

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale. En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000). D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0; +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E): y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y).$$

Tâche : Tu vas aider le laboratoire en répondant aux consignes suivantes :

1°) Démontre l'équivalence suivante :

Une fonction f , dérivable, strictement positive sur $[0; +\infty[$, vérifie l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie pour tout t de $[0; +\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$.

2°) a- Détermine une fonction constante h_0 solution de l'équation différentielle $(H): y' = \frac{1}{20}y - \frac{3}{20}$.

b- Vérifie que si deux fonctions h_1 et h_2 sont solutions de l'équation différentielle (H) alors la fonction $h_1 - h_2$ est solution de l'équation différentielle

$(H'): y' = \frac{1}{20}y$. Déduis alors la solution générale de l'équation de l'équation différentielle (H) .

c- Déduis des questions précédentes et des hypothèses, l'expression de la fonction f .

3°) a- Etudie la limite de la fonction h définie par :

$$h(x) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right] \text{ en } +\infty.$$

b- Détermine le sens de variation de la fonction h sur $[0; +\infty[$.

c- Au bout de combien d'années la taille de cet échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?.

ACTIVITE 20 : (extrait Bac F6 2015 Sénégal)

Soit l'équation différentielle

$$(E): y'' + 2y' + 2y = 2\cos 2x + 2\sin 2x.$$

1°) Soit $f(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$

Détermine les réels a et b pour que f soit solution de (E) .

2°) Prouve qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 2y' + 2y = 0$.

3°) Résous (E') : $y'' + 2y' + 2y = 0$.

4°) Déduis-en la solution générale de (E) .

5°) Détermine la solution g de (E) qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = 2$.

ACTIVITE 20 : (extrait Bac D 2015 Burkina-Faso)

Soit l'équation différentielle $(E): y'' + 49y = 0$.

1°) Résous (E) .

2°) Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 7$.

3°) Prouve que pour tout réel x ,

$$f(x) = 2\sqrt{3} \cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right).$$

4°) Résous dans $]0; 2\pi[$, l'équation $f(x) = \sqrt{6}$.

5°) Calcule la valeur moyenne V de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{14}; \frac{3\pi}{7}\right]$.

- « La somme des numéros obtenus est pair »
- « La somme des numéros obtenus est supérieure à 8 »
- « La somme des numéros obtenus est inférieure à 4 »

ACTIVITE 10 :

On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note a le résultat du premier lancer et b le résultat du second lancer. On considère

alors l'équation du second degré $x^2 + ax + b = 0$

Calcule la probabilité pour que cette équation admette :

- Deux solutions distinctes.
- Une solution double.
- Aucune solution

ACTIVITE 11 :

Une urne contient 3 boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.

L'expérience aléatoire consiste à tirer une boule deux fois de suite lors du tirage avec remise.

- a) Quels sont les événements élémentaires de cette expérience ? Combien y a-t-il ?
- b) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

R_1 « Tirer une boule rouge au premier tirage »

ACTIVITE 12:

Dans un lot de 10 pièces, 3 sont défectueuses. On tire au hasard simultanément 2 pièces du lot.

- 1°) Détermine le nombre de tirages possibles.
- 2°) Calcule la probabilité de tirer :
 - a- deux pièces défectueuses ;
 - b- deux pièces dont une seule est défectueuse ;
 - c- au plus une pièce défectueuse.

ACTIVITE 13: cor p: 337 (extrait bac D 1987 Niger)

- 1°) Soient deux personnes prises au hasard, quelle est la probabilité pour qu'elles soient nées un même jour de la semaine ?
- 2°) Dans un groupe de 4 personnes, quelle est la probabilité pour que toutes soient nées des jours différents de la semaine ?
- 3°) Quelle est la probabilité pour que parmi n personnes l'une au moins soit née un lundi ? Combien doit-il y avoir de personnes dans un groupe pour que l'affirmation : « au moins l'un d'entre vous est né un lundi » soit un pari gagnant ?

On donne les approximations suivantes :

$$\ln 2 \approx 0,693 ; \ln 6 \approx 1,791 ; \ln 7 \approx 1,945.$$

NB : « faire un pari gagnant » signifie que l'événement choisi a une probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{2} \cdot \ln$ désigne le logarithme népérien.

ACTIVITE 14 : cor. p : 338 *

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 Contient 3 boules blanches et 5 boules noires

U_2 Contient 2 boules blanches et 3 boules noires

On tire une boule de l'urne U_1 puis une boule de l'urne U_2 .

- 1°) Quelle est probabilité pour que les 2 boules tirées soient noires ?
 - 2°) Soit l'événement A " les deux boules tirées sont de couleur différentes "
- Quelle est la probabilité pour que l'événement A soit réalisé ?

3°) sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes quelle est la probabilité pour que la boule noire provienne de l'urne U_1 .

(NB : tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles)

ACTIVITE 15 : cor. p : 338

On considère deux dés cubiques D_1 et D_2

D_1 a une face rouge et 5 faces blanches

D_2 a 2 faces rouges, 1 face blanche et 3 faces bleues.

On jette simultanément les deux dés et on observe la couleur des faces supérieures.

- 1°) Quelle est la probabilité d'obtenir les mêmes couleurs ?
- 2°) Quelle est la probabilité d'obtenir deux couleurs différentes ?

3°) On est déclaré gagnant si l'on obtient blanc sur la face supérieure d'un des dés et rouge sur l'autre. Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?

ACTIVITE 16:

Dans une associative sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30% des membres de cette associative adhèrent à la section tennis.

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'événement : « le membre choisit est une femme ».

- T l'évènement : « le membre choisi adhère à la section tennis »

1°) Démontre que la probabilité de l'évènement F est égale à $\frac{2}{5}$.

2°) On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.

Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

ACTIVITE 17:

Dans une population, 55% des familles (groupe A) ont une voiture, 80% des familles (groupe B) ont un téléviseur et 15% des familles (groupe C) n'ont ni voiture, ni téléviseur.

1°) On choisit au hasard une famille de cette population. Détermine la probabilité des évènements suivants :

E « Cette famille ait une voiture et un téléviseur ».

F « Cette famille ait un téléviseur sachant qu'elle a une voiture ».

2°) On suppose que 5% des familles du groupe A (groupe B non compris) abandonnent leurs voitures, 5% des familles du groupe B (groupe A non compris) abandonnent leurs téléviseurs et 10% des familles du groupe C achètent chacune un téléviseur et une voiture. Reprends les calculs des probabilités ci-dessus.

ACTIVITE 18 :

On dispose d'une urne U contenant trois jetons blancs B_1 , B_1 et B_2 , deux jetons rouges R_1 et R_2 , deux jaunes J_1 et J_2 indiscernables au toucher.

1°) On tire simultanément trois jetons de cette urne U. Quelle est la probabilité de chacun des évènements ci-dessous :

A « obtenir des jetons de même couleur » ?

B « obtenir exactement 2 jetons blancs et un jeton de numéro 2 »

2°) On suppose maintenant que le tirage des trois jetons de U est successif sans remise.

a- Calcule la probabilité des évènements suivants :

C « obtenir des jetons de couleurs différente »

D « obtenir des jetons de numéro 1 »

b- Définir clairement par une phrase simple l'évènement $C \cap D$ et calcule $P(C \cap D)$

c- Déduis-en $P(C/D)$ et $P(D/C)$. Les évènements C et D sont-ils incompatibles ? Indépendants ?

ACTIVITE 19 : cor. p : 338

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention parmi ses dossiers d'accidents.

85% des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle.

20% des dossiers entraînent des frais de dommages corporels.

12% des dossiers entraînant des frais de réparation matérielle entraînent aussi des frais de dommages corporels.

Soit les évènements suivants :

R « le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle ».

D « le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels ».

1°) Donne $P(R)$ et $P(D)$

2°) Calcule la probabilité pour qu'un dossier :

- entraîne des frais de réparation matérielle ou des frais de dommages corporels.
- entraîne des frais de réparation matérielle sans dommages corporels.
- entraîne des frais de dommages corporels sans réparation matérielle.

ACTIVITE 20 : cor. p : 338 (extrait Bac D 2014 Togo)

Un secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel : les ingénieurs, les opérateurs de production et les agents de maintenance.

Il y a 8% d'ingénieurs et 80% d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 25% des agents de maintenance et 60% des opérateurs de production.

On interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :

- M l'évènement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance »
- O l'évènement : « le personnel interrogé est un opérateur de production »
- I l'évènement : « le personnel interrogé est un ingénieur »
- F l'évènement : « le personnel interrogé est une femme ».

1°) Construis un arbre pondéré correspondant aux données.

2°) Calcule la probabilité d'interroger :

- Un agent de maintenance
- Une femme agent de maintenance.
- Une femme.

3°) Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de

panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

- La probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002.
- La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003.
- La probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :

A l'événement : « l'alarme se déclenche »

B l'événement : « une panne se produise »

- a- Démontre que la probabilité qu'une panne se produise et l'alarme se déclenche est égale à 0,037.
- b- Calcule la probabilité que l'alarme se déclenche.
- c- Calcule la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

ACTIVITE 21 :

Des pièces mécaniques sont fabriquées en grande série sur une chaîne ; on estime que 99% des pièces sont bonnes. Sur chaque pièce on effectue un test de qualité : Lorsque la pièce est bonne, le test le confirme avec une probabilité de 0,995 et déclare donc qu'elle est mauvaise avec une probabilité de 0,005.

Lorsque la pièce est mauvaise, le test le confirme avec une probabilité de 0,990 et déclare donc qu'elle est bonne avec une probabilité de 0,010.

On note :

B : l'événement « la pièce est bonne »,

$\bar{B}$: l'événement « la pièce est mauvaise »

T : l'événement « le test indique que la pièce est bonne »

$\bar{T}$: l'événement « le test indique que la pièce est mauvaise »

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près par défaut.

1°) a- Détermine la probabilité : $p(\bar{B} \cap \bar{T})$.

b- Détermine la probabilité $p(B \cap \bar{T})$.

2°) Déduis-en $p(\bar{T})$, puis $p(T)$.

3°) On décide d'écarter de la vente toute pièce dont le test indique qu'elle est mauvaise.

- a- Détermine la probabilité qu'une pièce écartée de la vente soit bonne.
- b- On tire au hasard et successivement avec remise 20 pièces parmi celles écartées de la vente. Calcule la probabilité de tirer au moins une bonne pièce.

ACTIVITE 22 : cor. p : 339

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4} .

Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus.

Partie A :

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test) ;
- la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

Un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'événement : « la personne est contaminée par le virus », et T l'événement : « le test est positif »

$\bar{V}$ et $\bar{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1°) a- Précise les valeurs des probabilités $p(V)$, $p_V(T)$ et $p_{\bar{V}}(\bar{T})$.

Traduis la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b- Déduis-en la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2°) Démontre que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3°) a- Justifie par un calcul la phrase :

« si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de "chances" que la personne soit contaminée »

b- Détermine la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Partie B :

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1°) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu donneras les paramètres.

2°) Calcule la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

ACTIVITE 23: cor. p : 339

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

1°) Calculer la probabilité de l'événement A : "tirer trois pièces de 500 F".

2°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 F figurant parmi les trois pièces tirées.

- a- Déterminer la loi de probabilité de X.
- b- Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

3°) L'enfant répète cinq fois l'expérience en mettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie. Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

ACTIVITE 24 : cor. p : 340

Au Bénin, une conférence réunit 12 commerçants. Tous parlent le fon, 5 parlent le dendi, 6 parlent goun et 3 le dendi et le goun.

On choisit au hasard et simultanément 3 personnes.

Chaque groupe de 3 personnes a la même probabilité d'être choisi.

1°) a- Quelle est la probabilité pour que ces 3 personnes ne parlent au moins une autre langue que le fon ?

b- Quelle est la probabilité pour que ces 3 personnes ne parlent que le fon.

2°) Soit X la variable aléatoire qui à chaque groupe de 3 personnes associe le nombre de personnes parlant dendi et goun.

a- Détermine la loi de probabilité de X .

b- Calcule la probabilité pour qu'il ait au moins 2 personnes parlant dendi et goun.

NB : Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

ACTIVITE 25 : cor. p : 340

Une urne A contient 6 jetons marqués respectivement 1, 1, 2, 3, 3 et 3

Une urne B contient 4 jetons marqués respectivement 0, 0, 0 et 5.

On tire un jeton de l'urne A, puis un jeton de l'urne B.

On suppose que chaque tirage est équiprobable. Les résultats de ce double tirage déterminent une variable aléatoire X dont la valeur est le nombre ayant pour chiffre des dizaines du chiffre porté par le jeton extrait de l'urne A et pour chiffre des unités, celui porté par le jeton extrait de l'urne B.

1°) Détermine la loi de probabilité de X .

2°) Représente graphiquement la fonction de répartition de X .

3°) Calcule l'espérance mathématique de la variable X .

ACTIVITE 26 : cor. p : 341

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6

On dit que l'on obtient un "double" si les deux faces supérieures des dés portent des chiffres identiques.

A chaque lancer, si le joueur fait un double il gagne 500 F sinon il perd 100 F

1°) On lance les dés une fois. calcule la probabilité de gagner.

2°) On lance les dés trois fois soit X la variable aléatoire associée à la somme gagnée ou perdue après les trois lancers.

a- Quel est l'ensemble des valeurs prises par X .

b- Etablis la loi de probabilité de X

3°) on lance les dés n fois.

a- Calcule en fonction de n , la probabilité notée q_n de ne jamais faire un double.

b- Calcule en fonction de n la probabilité notée p_n de faire au moins un double.

c- Quelle est la valeur minimum de n pour que l'on ait $p_n \geq 0,8$

ACTIVITE 27 :

Un ranch possède 20 chevaux (6 blancs, 5 noirs et 9 gris) et une calèche prévue pour être tirée par 2 chevaux. Le cocher de la calèche choisit au hasard pour une journée de travail les 2 chevaux de l'attelage parmi les 20 chevaux des ranches.

1°) a- Calcule la probabilité des événements suivants :

A : « les 2 chevaux sont blancs »

B : « l'un des chevaux au moins est blanc »

C : « les deux chevaux sont de la même couleur »

b- sachant que les deux chevaux de l'attelage sont de couleurs différentes quelle est la probabilité pour que l'un soit blanc ?

2°) Pour des raisons climatiques, la durée de travail quotidien d'un cheval est 3 heures

s'il est noir, 2 heures s'il est blanc et 4 heures s'il est gris, et le cocher arrête le travail

lorsque l'un au moins des 2 chevaux atteint sa durée de travail quotidien.

On désigne par X la durée du travail d'une journée des 2 chevaux choisis.

a- détermine la loi de probabilité de X

b- calcule l'espérance mathématique de X

ACTIVITE 28 : cor. p : 342

Un jeu de loterie est constitué de trois roues comportant chacune cinq secteurs identiques numérotés de 1 à 5 et d'une table de mise. Les roues sont lancées après que les joueurs aient misés sur l'un des cinq numéros.

1°) un joueur ayant choisi un numéro, quelle est la probabilité pour que ce numéro apparaisse :

a- " aucune fois " ?

b- " une fois " ?

c- " deux fois " ?

d- "trois fois" ?

2°) la mise est fixée à 200F. Si aucune roue en donne son numéro il perdra sa mise.

Si une roue donne son numéro, il récupère sa mise.

Si deux roues donnent son numéro, il recevra cinq fois sa mise.

Si trois roues donnent son numéro, il recevra dix fois sa mise.

Soit X la variable aléatoire indiquant le gain du joueur

a- Quelles sont les valeurs prises par X ?

b- Détermine la loi de probabilité de X ?

c- Calcule l'espérance mathématique de X ?

ACTIVITE 29 : cor. p : 342

Une crique possède douze fauves, dont cinq mâles. Pour chaque représentation le dompteur choisit, au hasard, cinq fauves. On admet que tous les choix de cinq fauves ont la même probabilité. Soit X la variable aléatoire qui décompte le nombre de mâles présentés au cours d'une représentation.

- Définie la loi de probabilité de X .
- Calcule l'espérance mathématique de X .
- Quelle est la probabilité p pour qu'au cours de trois représentations successives, l'événement « il n'y a pas de mâles » se produise une fois seulement ?

ACTIVITE 30 : cor. p : 343

Une cible circulaire est composée de quatre zones concentriques numérotées 1, 2, 3, 4 en partant de l'extérieur (zone 4 = zone centrale).

La zone 1 permet de gagner 1 point.

La zone 2 permet de gagner 3 points.

La zone 3 permet de gagner 5 points.

La zone 4 permet de gagner 10 points.

On admet qu'un tireur atteint toujours la cible. Les probabilités d'atteindre les zones 1,

2, 3 sont respectivement de $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$

1°) Calcule la probabilité d'atteindre la zone 4

2°) un tireur tire deux fois de suite. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus au cours des deux tirs.

a- Etablie la loi de probabilité de X

b- Calcule l'espérance mathématique de $E(X)$ de la variable aléatoire X et sa variance $V(X)$.

3°) Quelle est la probabilité pour un tireur qui effectue trois tirs successifs d'obtenir au moins quatre points ?

ACTIVITE 31 : cor. p : 343

Un jeu est organisé de la façon suivante :

On répond à deux questions A et B

- pour la question A, les réponses possibles sont 1, 2, ou 3

- pour la question B, les réponses possibles sont 1, 2, 3, 4 ou 5

Les seules réponses exactes sont 2 pour la question A et 4 pour la question B.

• Si la réponse à la question A est différente de 2 joueurs ne gagne rien.

• Si la réponse à la question A est 2 le joueur gagne 3000F

et 3000F de plus si la réponse à la question B est 4.

Moussa répond au hasard à chacune des deux questions.

On est dans une situation

d'équiprobabilité sur l'ensemble des couples de réponses possibles.

1°) Indique dans un tableau le gain correspondant à chaque couple de réponse.

X la variable aléatoire qui à chaque couple de réponse associe le gain correspondant.

2°) Donne la loi de probabilité de X ?

3°) Calcule l'espérance mathématique de X ?

4°) Moussa a-t-il intérêt de jouer souvent si la mise est de 1500F ?

ACTIVITE 32 : cor. p : 344

Une urne contient 10 boules.

- cinq sont blanches et portent les numéros 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 4

- trois sont noires et portent les numéros 1 ; 3 ; 5

- deux sont rouges et portent les numéros 6 ; 6

On suppose les tirages équiprobables.

1°) Soit l'expérience E qui consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne.

a- calcule les probabilités des événements suivants :

E_1 " Les deux boules ont la même couleur "

E_2 " Les deux boules sont de couleurs différentes "

E_3 " Les deux boules portent le même numéro "

b- sachant que les deux boules ont la même couleur, calcule la probabilité qu'elles portent le même numéro.

c- les événements E_1 et E_3 sont-ils indépendants ?

2°) On suppose maintenant que chaque boule tirée, portant un numéro impair fait gagner

5F et chaque boule tirée, portant un numéro pair fait gagner 10F
Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage simultané de deux boules la somme des gains.

- Détermine la loi de probabilité de X .
- Calcule l'écart type de X
- Définie et représente la fonction de répartition de X .

ACTIVITE 33: cor. p : 344

Le rechargement d'un camion remorque est composé de 60 sacs identiques dont 10 contiennent des produits non déclarés aux survies de la douane et produit déclare. Le trajet à parcourir comporte trois barrages de douane. A chacun de ces barrages, le contrôle obligatoire consiste à examiner le contenu de 5 sacs choisis au hasard (les contrôles effectués aux différents barrages sont indépendants).

1°) Le camionneur arrive à un barrage donné. (On donnera l'arrondi d'ordre 1 de chacun des résultats obtenus).

- Calcule la probabilité pour qu'exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré.
- Démontre que la probabilité pour que l'un au moins des 5 sacs contrôlés contienne le produit non déclaré est égale à 0,6.

2°) Le camionneur sait que si l'un au moins des sacs du produit non déclaré est découvert à un barrage quelconque, il doit payer une taxe forfaitaire de 10000F, à ce barrage pour être autorisé à continuer son chemin avec tout son chargement. Si le camionneur ne peut pas payer la taxe forfaitaire, tout son chargement est saisi. On suppose que le camionneur paie la taxe chaque fois que le produit non déclaré est découvert. On note X la variable aléatoire égale à la somme totale que le camionneur peut dépenser sur l'ensemble de son trajet.

- Détermine la loi de probabilité de X
- Démontre que l'espérance mathématique de X est égale à 18000F

On suppose que le camionneur n'a pas d'argent pour payer une éventuelle taxe.

Calcule la probabilité pour que son chargement soit saisi.

ACTIVITE 34: cor. p:345 (extrait bac D 1991 Niger)

Au cours d'une kermesse, un stand propose le jeu suivant : le joueur doit tirer successivement sur quatre

boîtes de dimensions de plus en plus réduites B_1, B_2, B_3, B_4 , dans cet ordre.

Pour chaque cible visée, le joueur ne dispose que d'un essai ; en cas de succès (la boîte est atteinte) le joueur tire sur la boîte suivante, ainsi de suite jusqu'à la quatrième boîte ; en cas d'échec, le jeu s'arrête immédiatement.

Un joueur A se présente avec les probabilités $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}$

$\frac{1}{5}$ de toucher respectivement les boîtes $B_1; B_2; B_3; B_4$

1°) Décris toutes les éventualités du jeu de A (par exemple : A atteint B_1 , puis B_2 mais rate B_3). On notera $w_1, w_2, \dots$ ces éventualités et on calculera la probabilité de chacune d'elles.

2°) Lorsque le joueur tire sur une boîte et l'atteint, il gagne 1000 F ; lorsqu'il tire sur une boîte et la rate, il perd 1000 F.

A chacune des éventualités décrites au 1°) on associe le gain en fin de partie. On définit ainsi une variable aléatoire X .

- Quelle est la loi de probabilité de X .
- Quelle est son espérance mathématique.

3°) Le joueur A s'engage en cas de succès à verser la moitié de son gain total à un fonds de solidarité. Calcule la probabilité pour que A verse au moins 500F au dit fonds.

ACTIVITE 35: cor. p : 345

Une urne contient n boules ($n \geq 5$) dont trois blanches. Toutes les autres sont noires. Une personne A tire simultanément deux boules de l'urne. On suppose que tous les tirages de deux boules sont équiprobables.

1°) Prouve que la probabilité d'obtenir deux boules

blanches est $\frac{6}{n(n-1)}$

2°) On considère le jeu suivant :

Si les deux boules tirées sont noires A gagne 300F

Si les deux boules tirées sont blanches A perd 100F

Si les deux tirées sont de couleurs différentes, A ne gagne rien et ne perd rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de A.

- Détermine la loi de probabilité de X en fonction de n .
- Calcule l'espérance mathématique de X
- Détermine le nombre de boules que doit contenir l'urne pour que $E(X) = 0$.

Quelle est dans ce cas la variance de X ?

On prend $n = 6$. La personne A effectue dix fois le même tirage en remettant à chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

Quelle est la probabilité pour qu'elle tire au moins une fois deux boules de même couleur ?

ACTIVITE 36 : cor. p : 346

Une urne contient 100 jetons :

40 jetons portent le numéro : 1

30 jetons portent le numéro : 2

18 jetons portent le numéro : 3

12 jetons portent le numéro : 4

On suppose que chaque jeton a la même probabilité d'être tiré.

On tire simultanément deux jetons ;

1°) calcule la probabilité pour que ces deux jetons :

- a- Portent le numéro 2
- b- Portent le même numéro

2°) On organise un jeu de la manière suivante :

On tire un jeton :

Si le jeton tiré porte le numéro 1, on ne gagne rien.

Si le jeton tiré porte le numéro 2, on ne gagne 200 f.

Si le jeton tiré porte le numéro 3, on ne gagne 500 f.

Si le jeton tiré porte le numéro 4, on ne gagne 1000 f.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe le gain du joueur

- a- Etablie le tableau de distribution de la probabilité de X .
- b- Calcule l'espérance mathématique de X .
- c- Combien l'organisateur doit-il faire payer pour que le jeu soit équitable ?

ACTIVITE 37 : cor. p : 346

Le centre National de la Transfusion sanguine a diffusé le tableau ci-contre donnant la répartition des groupes sanguins de la ville de Parakou.

Groupe	A	B	AB	O
Pourcentage	31 %	18%	5%	46%

I) 1°) Quelle est la probabilité qu'un parakois ait un sang du groupe O ?

2°) Quatre donneurs se présentent dans un centre de transfusion sanguine.

- a- Quelle est la probabilité qu'un seul parmi les quatre ait un sang du groupe O ?
- b- Quelle est la probabilité de trouver les quatre groupes sanguins chez ces donneurs ?

II) Indépendamment du groupe sanguin, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit de Rhésus positif (Rh^+), sinon il est dit de Rhésus négatif (Rh^-).

Un individu ayant un sang de groupe O et de Rhésus négatif est appelé un donneur universel.

A Parakou, 9% des individus du groupe O sont de Rhésus négatif.

1°) démontre que la probabilité qu'un parakois soit un donneur universel est 0,0414.

2°) Dans un centre de transfusion sanguine, n donneurs se présentent.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de donneurs universels parmi les n donneurs.

- a- Détermine la loi de probabilité de X .
- b- Détermine l'espérance de X en fonction de n .
- c- Détermine le nombre moyen des donneurs universels parmi 5000 donneurs.

ACTIVITE 38 : cor. p : 346

on dispose de deux dés en apparence identiques dont l'un est parfait et l'autre truqué.

Les faces de chacun sont numérotées de 1 à 6.

Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir la face portant le chiffre 4 est égale à $\frac{1}{3}$.

1°) a- on lance le dé parfait 3 fois de suite on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la face portant le chiffre 4 apparaît. Quelle est la loi de X .

b- On lance le dé truqué 3 fois de suite ; quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4

2°) On choisit au hasard l'un des deux dés ; les choix étant équiprobables et on le lance trois fois de suites. on considère les événements suivants :

A « obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 »

B « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 »

C « choisir le dé parfait et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 »

- a- Calcule $p(B)$
- b- Calcule $p(C)$
- c- Déduis-en $p(A)$

ACTIVITE 39: cor. p : 346

Une urne contient deux jetons blancs numérotés 1; -1 et trois jetons noirs numérotés 1; 1 et -1 tous les jetons sont indiscernables au toucher.

1°) On tire simultanément deux jetons de l'urne

a- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir deux jetons de même couleur »

B « Obtenir deux jetons de même couleur et de même numéro »

b- On désigne par X la variable aléatoire numérique qui prend pour valeurs la somme des numéros inscrits sur les deux jetons tirés

Détermine la loi de probabilité de X et calcule son espérance mathématique

2°) On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne. On désigne par a le numéro inscrit sur le premier jeton tiré et par b le numéro inscrit sur le deuxième jeton tiré

On considère dans l'espace un repère orthonormé

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les plans $(P): x + ay + b = 0$ et

$(P'): x + by - a = 0$.

Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :

C « $(P) // (P')$ »

D « $(P) \perp (P')$ »

ACTIVITE 40 :

Un dé cubique pipé est tel que : deux face sont marquées 2 ; trois face marquées 4 et une face marquée 6. La probabilité p_i d'apparition de la face marquée i est proportionnelle au nombre i

1°) Calcule p_2 , p_4 et p_6

2°) on suppose dans la suite que $p_2 = \frac{1}{6}$; $p_4 = \frac{1}{3}$ et

$$p_6 = \frac{1}{2}.$$

On lance deux fois de suite le dé précédent, on note i le résultat du premier lancer et j le résultat du 2^{ème} lancer.

On définit la variable aléatoire X qui au couple $(i; j)$ associe le nombre $i - j$.

a- Détermine l'univers image de X .

b- Détermine la loi de probabilité

ACTIVITE 41 :

Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents, mais indiscernables au toucher.

1°) On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages.

a- Calcule la probabilité de l'événement A : « tirer 2 chaussures de la même couleur »,

b- Calcule la probabilité de l'événement B : « tirer un pied gauche et un pied droit »,

c- Prouve que la probabilité de l'événement C : « tirer les deux chaussures d'un même

modèle » est : $\frac{1}{19}$

2°) On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

a- Justifie que X prend les valeurs 2, 3, 4.

b- Prouve que la loi de probabilité de X est :

$$P(X=2) = \frac{1}{6}, P(X=3) = \frac{1}{3} \text{ et } P(X=4) = \frac{1}{2}$$

c- Calcule son espérance mathématique et son écart-type.

ACTIVITE 42:

La production en ciment d'un pays est assurée par deux usines A et B. L'usine A fournit les 70% de la production et l'usine B le reste. Les sacs produits sont soumis à un essai.

Sur 100 sacs fournis par l'usine A, 83 satisfont aux normes et sur 100 sacs fournis par l'usine B, 63 satisfont aux normes.

1°) Quelle est la probabilité pour qu'un sac quelconque satisfasse aux normes.

2°) Soit un sac satisfaisant aux normes. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de l'usine B ?

ACTIVITE 43 :

Une urne contient 5 pièces de 5F, 3 pièces de 10F et 2 pièces de 20F toutes indiscernables au toucher. Une épreuve consiste à tirer au hasard 2 pièces de l'urne et à parier sur les pièces tirées. On gagne le montant marqué

sur toute pièce de 5F ou de 20F mais on perd le montant marqué sur toute pièce de 10F.

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le gain algébrique réalisé.

1°) a- Détermine la loi de probabilité de X .

b- Calcule l'espérance mathématique et l'écart-type de X .

c- Définis et interprète graphiquement la fonction de répartition de X .

2°) Un joueur effectue 5 fois l'épreuve, en remettant les 2 pièces dans l'urne avant chaque tirage. Calcule la probabilité pour qu'il gagne :

a- 10F exactement 2 fois.

b- 10F au moins une fois.

ACTIVITE 44 :

Une urne contient trois jetons marqués 1, deux jetons marqués 2 et un jeton marqué 3. Une expérience consiste à tirer de cette urne simultanément 3 jetons. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de jetons marqués 1 obtenus.

1°) a- Détermine la loi de probabilité de X .

b- Calcule l'espérance mathématique et l'écart-type de X .

2°) On dit qu'on a réussi l'expérience si le nombre de jetons marqué 1 obtenu est supérieur ou égal à deux.

a- Calcule la probabilité de réussir cette expérience.

b- On répète 5 fois cette expérience dans des conditions identiques. Calcule la probabilité de réussir cette expérience :

i) deux fois exactement

ii) au moins une fois

iii) pour la 3^{ème} fois à la 5^{ème} répétition.

ACTIVITE 45 : cor. p : 347 (extrait Bac D 2001 niger)

Pour élire leur conseiller départemental, les habitants du village de ZATA ont à choisir parmi 3 candidats : Ado, Bala, Kadri.

Chaque électeur vote pour un seul candidat.

A la fin du vote, on a constaté que 60% des habitants de ZATA ont effectivement voté.

On suppose que la probabilité pour qu'un électeur

choisisse Ado est égal à $\frac{3}{8}$, celle de Bala est égale à $\frac{1}{2}$ et

celle de Kadri est égale à $\frac{1}{8}$, et ceci indépendamment

des autres électeurs.

1°) On prend au hasard et successivement 5 habitants de ZATA. Quelle est la probabilité pour que ces 5 habitants aient effectivement voté ?

2°) Calcule la probabilité pour qu'un habitant quelconque de ZATA choisisse Bala.

3°) On prend au hasard 5 habitants de ZATA et on note X la variable aléatoire égale au nombre de voix obtenues

par Bala. Détermine la loi de probabilité de X . Calcule son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

4°) Calcule la probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse Kadri.

5°) Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et P_n la probabilité pour que, parmi n habitants qui votent, aucun ne choisisse Kadri. Calcule P_n .

6°) Quel est le nombre minimum d'habitants qui doivent voter pour que Kadri obtienne au moins une voix avec

une probabilité supérieure ou égale à $\frac{15}{16}$

ACTIVITE 46: cor. p : 347

Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Une partie consiste à tirer successivement et sans remise 2 jetons de l'urne et à noter dans l'ordre les deux nombres inscrits. Tous les tirages sont supposés équiprobables.

1°) Quelle est la probabilité des événements :

A : « les nombres inscrits sont strictement inférieurs à 5 ».

B : « le premier nombre inscrit est strictement supérieur au double du second »

2°) Un joueur effectue 7 parties successives, les parties étant supposées indépendantes, quelle est la probabilité pour que à l'issue de la 7^{ème} partie l'événement B soit réalisé 2 fois exactement ? ; au moins une fois ?

ACTIVITE 47:

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne, on note : p_i avec

$i \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ la probabilité de tirer le jeton numéroté

i . On suppose que les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 sont dans cet ordre en progression arithmétique de

raison $\frac{1}{30}$.

1°) a- Prouve que : $p_1 = \frac{1}{12}$.

b- Déduis-en p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 .

2°) On tire trois fois de suite et avec remise un jeton de cette urne, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.

a- Détermine la loi de probabilité de X .

b- Détermine l'espérance mathématique de X puis son écart-type.

3°) Un joueur tire simultanément 2 jetons et on note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les 2 jetons tirés.

a- Détermine la loi de probabilité de S .

b- On gagne à ce jeu lorsque : $S \geq 0$. Détermine la probabilité de gagner.

ACTIVITE 48: cor p : 348 (extrait bac D 1989 Niger)

Un couple souhaite avoir n enfants ($n \in \mathbb{N}^*$). On considère qu'à chaque naissance il ne vient qu'un enfant (garçon noté G, ou fille notée F). La probabilité d'avoir une fille est le double de celle d'avoir un garçon. Les naissances sont indépendantes les unes des autres. Soit X_j la variable aléatoire associée à la j -ième naissance et prenant la valeurs 0 pour G et 1 pour F et $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

- 1°) Dans cette partie $n = 4$.
 - a- Donne la loi de probabilité de X .
 - b- Construis la fonction de répartition de X .
 - c- Calcule l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.
- 2°) Détermine n pour que la probabilité de ne pas avoir de garçon soit strictement inférieure à $\frac{1}{100}$.

ACTIVITE 49: cor p : 348 (extrait bac D 1999 Niger)

A/ Le tiercé est une forme de pari où l'on parie sur trois chevaux engagés dans une même course, en précisant l'ordre d'arrivée.

Le PMU-Niger annonce une course de 18 chevaux numérotés de 1 à 18. Tous les chevaux ont la même chance de gagner la course.

Amadou choisit dans l'ordre les chevaux portant les numéros 15 ; 13 et 8. Tous les chevaux ayant pris part à la course, on demande de calculer la probabilité pour que Amadou gagne le tiercé :

- a- dans l'ordre
- b- dans le désordre.

B/ On considère un club de parieurs comprenant des hommes et des femmes ; le nombre des hommes étant le double de celui des femmes.

On suppose que 6% des femmes gagnent le tiercé dans l'ordre et 12% des hommes le gagnent dans l'ordre. On note respectivement O, H et F les événements suivants :

O : « gagner le tiercé dans l'ordre »

H : « le parieur est un homme »

F : « le parieur est une femme »

- 1°) Quelle est la probabilité pour que :
 - a- un membre du club gagne le tiercé dans l'ordre ?
 - b- un gagnant dans l'ordre de ce club soit un homme ?

2°) On choisit au hasard 6 parieurs parmi les gagnants ; le nombre de gagnants est suffisamment grand pour que le choix puissent être assimilés à des choix successifs indépendants.

Détermine la probabilité pour qu'il y ait exactement deux hommes parmi ces 6 parieurs.

ACTIVITE 50 : cor p : 349 (extrait bac D 1995 Niger)

Les quatre faces d'un dé tétraédrique sont numérotées de 1 à 4. Ce dé est pipé de telle sorte que la probabilité $p(i)$

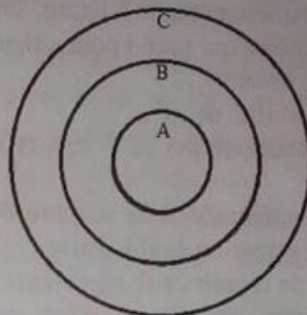
pour que la face i soit cachée est proportionnelle au carré de i .

On pourra écrire $p(i) = ci^2$, où c est une constante réelle

- 1°) Détermine la constante c .
- 2°) On lance le dé une fois et on appelle X la variable aléatoire : « somme des numéros visibles »
Donne la loi de probabilité de X .
- 3°) Calcule l'espérance mathématique et la variance de X .
- 3°) Quelle est la probabilité pour qu'au cours de cinq lancers, X soit paire au moins deux fois ?

ACTIVITE 51 : cor p : 349 (extrait bac D 1986 Niger)

La cible d'un jeu de fléchettes est constituée par trois cercles concentriques de rayons respectifs R , $2R$, $3R$. On note A la partie centrale de la cible et B, C les anneaux entourant A.



- 1°) Calcule, en fonction de R , les aires des parties, B et C.
- 2°) Un joueur lance une fléchette vers la cible précédente. On admettra que la probabilité d'atteindre une des parties de la cible est proportionnelle à l'aire de cette partie. Soit p la probabilité d'atteindre la partie A de la cible.
 - a- Calcule, en fonction de p , les probabilités respectives d'atteindre les parties B et C.
 - b- On suppose que la probabilité d'atteindre une des parties de la cible est 0,75. Déduis-en la valeur de p .
- 3°) On suppose que les parties A, B et C sont affectées respectivement des points : 100 ; 50 ; 25 points, un joueur n'atteignant pas la cible marquant 0 point. Soit X la variable aléatoire qui exprime le nombre de points obtenus par un joueur lançant deux fléchettes.
 - a- Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - b- Calcule l'espérance mathématique de X .

ACTIVITE 52: cor p : 350 (extrait bac D 2005 GABON)

Sur les quatre faces d'un dé pipé tétraédrique sont inscrits les nombres complexes suivants : $z_0 = -2i$; $z_1 = -2 - 2i$;

$$z_2 = 1 - i \text{ et } z_3 = -1 + i\sqrt{3}.$$

On lance une fois ce dé.

La probabilité p_k pour que la face marquée z_k soit cachée est : $p_k = c|z_k|^2$, pour $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ et $k \in \mathbb{R}$

1°) a- Prouve que : $c = \frac{1}{18}$

b- Détermine p_k pour $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

2°) On désigne par X la variable aléatoire qui, au complexe inscrit sur la face cachée associe son unique argument appartenant à l'intervalle $[0; 2\pi[$.

- a- Détermine les valeurs prises par X .
- b- Donne la loi de probabilité de X .
- c- Calcule l'espérance mathématique de X .

3°) On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme :

$$f(z) = z^3 + (1+5i)z^2 + 2(-5+i)z - 8i$$

- a- Vérifie que z_0 est une racine de $f(z)$
- b- Déduis-en deux nombres complexes α et β tels que $f(z) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$
- c- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

ACTIVITE 53: cor. p : 350

Dans un jeu de 32 cartes on a quatre « couleur » : pique, trèfle, carreau et cœur ;

Chaque « couleur » comprend huit cartes dont une carte as.

1°) On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes bien battu. Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :

- A: « Les trois cartes sont des as »
- B: « Il y a au moins 2 couleurs parmi ces 3 cartes ».
- C: « Il y a pas d'as parmi les 3 cartes ».

2°) On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu de 32 cartes. Le nombre de cœurs tirés définit une variable aléatoire X .

Détermine :

- a- l'ensemble des valeurs prises par X ;
- b- la loi de probabilité de X .
- c- son espérance mathématique.

ACTIVITE 54: cor. p : 351 (d'après BAC Sénégal)

I- On considère Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux événements. Dans le cas d'équiprobabilité rappelle les probabilités des événements suivants :

A, A sachant B , et $(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$.

II- Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages. Ainsi à partir d'un certain jour les délestages ont débuté dans une ville à un rythme décrit comme suit :

- Le premier jour la ville est délestée.
- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$

- Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$.

On désigne par D_n l'événement : « la ville est délestée le $n^{\text{ème}}$ jour » et p_n la probabilité de l'événement D_n .

$$p_n = p(D_n).$$

1°) Prouve les égalités suivantes :

$$p(D_1) = 1 ; p(D_{n+1} / D_n) = \frac{2}{9} ; p(D_{n+1} / \bar{D}_n) = \frac{5}{6}$$

2°) Exprime p_{n+1} en fonction de $p(D_{n+1} \cap D_n)$ et $p(D_{n+1} \cap \bar{D}_n)$.

3°) Déduis-en que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{n+1} = -\frac{11}{18} p_n + \frac{5}{6}$$

4°) On pose : $U_n = 6p_n - \frac{90}{29}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

- a- Démontre que la suite (U_n) est géométrique. Tu préciseras sa raison et son premier terme.
- b- Exprime U_n puis p_n en fonction de n .
- c- Un match de football doit se jouer le 20^{ème} jour. Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage.

ACTIVITE 55: cor. p : 351

Soit D_1 un dé cubique truqué numéroté de 1 à 6.

On note p_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i lors d'un lancer du dé D_1 ;

$$i \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

On suppose que p_1, p_3, p_5 forment dans cet ordre, les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de

raison $\frac{1}{2}$; puis p_2, p_4, p_6 forment dans cet ordre les

trois termes consécutifs d'une suite géométrique de

raison $\frac{1}{4}$ et que $p_2 = 4p_1$.

Soit D_2 un dé cubique non truqué numéroté de 1 à 6.

Chaque face de D_2 a donc la même probabilité d'apparition lors d'un lancer de ce dé.

1°) a- Démontre que les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4, p_5

et p_6 vérifient le système :

$$p_2 = 4p_1 ; p_4 = p_1 ; p_3 = \frac{1}{2} p_1 ; p_5 = p_6 = \frac{1}{4} p_1 \text{ et}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1.$$

b- Calcule p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 .

2°) On lance les deux dés D_1 et D_2 simultanément. On note par X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres obtenus de D_1 et D_2 après lancement.

- a- Donne l'univers image de X . (l'ensemble des valeurs prise par X)
 b- Calcule la probabilité des événements suivants :
 $\{(X=2)\}$, $\{(X=3)\}$, $\{(X=4)\}$, $\{(X=5)\}$

On donneras les résultats sous forme de fractions irréductibles.

ACTIVITE 56: cor. p : 352 (d'après Bac C 2014 Togo)

On considère un dé cubique non pipé ayant deux faces numérotées 2 et quatre faces numérotées 3, et un dé tétraédrique régulier ayant deux faces numérotées 2 et deux faces numérotées 4.

On lance simultanément les deux dés, on désigne par « a » le numéro apparu sur la face supérieure du dé cubique et « b » celui sur la face cachée du dé tétraédrique.

On considère l'équation différentielle (E) :

$y'' + ay' + by = 0$ et on désigne par X la variable aléatoire prenant la valeur $a^2 - 4b$.

1°) a- Détermine la loi de probabilité de X .

b- Dédus-en la probabilité pour que (E) admette pour solution générale une fonction non sinusoïdale.

2°) On lance n fois de suite les deux dés. On désigne par Y le nombre de fois que l'équation (E) admet une solution générale, une fonction non sinusoïdale.

Détermine le plus petit entier n pour que la probabilité de l'événement $\{(Y \geq 1)\}$ soit supérieure ou égale à 0,999.

3°) On pose $(a; b) = (3; 2)$ et on considère l'équation

différentielle (E') : $y'' + 3y' + 2y = \left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{-x}$.

a- Vérifie que la fonction f définie pour tout

$x \in \mathbb{R}_+^*$, par : $e^{-x} \ln(x)$ est solution de (E').

b- Résous l'équation : $(E_{(3;2)}) : y'' + 3y' + 2y = 0$.

c- Soit g une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, prouve que g est solution (E') si et seulement si $g - f$ est solution de $(E_{(3;2)})$.

d- Dédus-en toutes les solutions de l'équation (E').

11. ACTIVITES SUR LES SUITES NUMERIQUES

ACTIVITE 1 : cor. p : 354

(Les questions 1°) ; 2°) et 3°) sont indépendants)

1°) Prouve par récurrence que pour tout entier naturel n , $2^{2n} + 2$ est un entier divisible par 3

2°) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geq 6$, $2^n \geq 6n + 7$

3°) Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2 \end{cases}; \forall n \in \mathbb{N}$$

Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$U_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

ACTIVITE 2 : cor. p : 354

On considère la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}} \end{cases}$$

1°) Calcule U_1 et U_2 .

2°) a- Démontre que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq U_n \leq \sqrt{3}.$$

b- Prouve que (U_n) est une suite croissante.

c- Déduis-en que (U_n) est convergente.

3°) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$

a- Démontre que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b- Exprime V_n en fonction de n . Déduis-en U_n en fonction de n .

4°) Soit la suite (W_n) tel que $W_0 = 3$ et

$$2W_{n+1} = W_n + 2V_n; \forall n \in \mathbb{N}. \text{ On pose :}$$

$$T_n = W_n - 2n + 4.$$

a- Démontre que (T_n) est une suite géométrique de

$$\text{raison } q = \frac{1}{2}.$$

b- Déduis-en W_n en fonction de n .

c- Calcule en fonction de n , la somme

$$S_1 = T_0 + T_1 + \dots + T_n \text{ et}$$

$$S_2 = W_0 + W_1 + \dots + W_{n-1}$$

ACTIVITE 3 :

On se propose d'étudier la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n e^{-U_n} \end{cases}$$

Et on pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

1°) a- Démontre que pour tout entier n , $U_n \geq 0$

b- Démontre que (U_n) est décroissante

c- Déduis-en que (U_n) est convergente et calcule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

2°) a- Prouve que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = e^{-S_n}$

b- Déduis-en que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

ACTIVITE 4 :

1°) Une suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 0}$ a pour 1^{er} terme 7 et pour raison un réel r .

a- Détermine le réel r sachant que $u_3 = 22$.

b- Exprime u_n en fonction de n .

2°) On considère la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par : $v_0 = -2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3v_{n+1} + 2v_n = -\frac{5n+7}{(n+1)(n+2)}$$

Calcule v_1 , v_2 et v_3 .

3°) Soit la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = v_n + \frac{1}{n+1}$$

a- Démontre que $(w_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

b- Exprime w_n en fonction de n .

4°) On pose $t_n = u_n + w_n$

Calcule en fonction de n la somme

$$S_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1}$$

ACTIVITE 5 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$$

1°) Calcule U_1 et U_2

2°) Déduis-en que la suite (U_n) est ni arithmétique ni géométrique.

3°) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = U_n - 6$.

a- calcule W_0

b- Justifie que (W_n) est une suite géométrique

$$\text{de raison } q = \frac{1}{2}.$$

c- Exprime W_n en fonction de n .

4°) Exprime U_n en fonction de n puis calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

ACTIVITE 6 :

1°) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ trace la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$

par: $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$

2°) Soit (u_n) la suite définie par:
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

a- Représente sur l'axe des abscisses les termes: u_1 , u_2 et u_3 .

b- Démontre que la suite (u_n) est croissante.

c- Prouve que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n < 2$

d- Dédus-en que la suite (u_n) est convergente.

3°) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n

par $v_n = \frac{1+u_n}{2-2u_n}$

a- Démontre que (v_n) est une suite géométrique dont tu détermineras la raison.

b- Exprime v_n , puis u_n en fonction de n .

c- Dédus-en la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$

4°) On pose: $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

Exprime S_n en fonction de n et détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

ACTIVITE 7 : cor. p : 355

On considère la suite $(U_n)_{n \geq 2}$ des nombres réels strictement positifs, définie par son premier terme

$U_2 = e^3$ et pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2,

par la relation de récurrence: $(U_{n+1})^2 \cdot e = U_n$. On

considère la suite (V_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$,

$$V_n = \frac{1 + \ln U_n}{2}$$

1°) Pour tout entier naturel strictement positif, exprime V_{n+1} en fonction de $\ln U_n$ puis en fonction de V_n .

2°) Dédus-en la nature de la suite (V_n) .

3°) Exprime V_n et U_n en fonction de n .

4°) a- Les suites (U_n) et (V_n) sont-elles convergentes?

b- Calcule en fonction de n la somme

$S = V_2 + V_3 + \dots + V_n$.

5°) On définit la suite des nombres réels (P_n) par

$P_n = U_2 \times U_3 \times \dots \times U_n$ et $P_2 = U_2$.

Calcule P_n en fonction de n .

ACTIVITE 8: cor. p : 356 (d'après bac D Niger)

On considère la suite réelle $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \int_{n-1}^n (\ln 3)^{-x} dx$.

1°) Prouve que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

2°) Démontre que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

3°) On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par:

$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ pour $n \geq 1$.

a- Exprime S_n en fonction de n .

b- La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente?

ACTIVITE 9 :

Pour tout entier naturel non nul n , on pose:

$$U_n = \int_{n-1}^n e^{\frac{-1}{4}x} dx$$

1°) Calcule U_n en fonction de n .

2°) a- Démontre que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique dont tu donneras la raison et le premier terme.

b- Détermine la limite de la suite (U_n) .

3°) On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$:

$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

a- Calcule, par deux méthodes différentes, S_n .

b- Détermine la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4°) On pose $V_n = \ln(U_n)$, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$.

a- Démontre que la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmétique.

b- Soit $T_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ et

$P_n = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$

i) Calcule T_n en fonction de n .

ii) Dédus-en P_n en fonction de n .

ACTIVITE 10 :

Le 1^{er} Janvier 1999, une personne X a placé une somme de 500 000F à intérêts composés au taux de 9% (un capital est placé à un intérêts composés lors que les intérêts produits à la fin de chaque année sont ajoutés au capital). On notera C_n le capital au premier janvier de l'année $(1999 + n)$.

1°) a- Calcule C_1 et C_2

b- Etablie le lien entre C_n et C_{n+1}

c- Dédus-en C_n en fonction de n .

2°) Au 1^{er} janvier 2010, X aura besoin de 200 000F pour acheter une maison.

Le capital qu'il possèdera alors sera-t-il suffisant ? sinon combien devra-t-il emprunter ?

3°) A quel taux aurait-il dû placer son capital le 1^{er} janvier 1999 pour disposer des 200 000F au 1^{er} janvier 2010 ?

ACTIVITE 11 : cor. p : 356

On considère un entier naturel non nul P_0 .

Soit la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \ln(1,032)^n + \ln P_0$$

1°) Démontre que (u_n) est une suite arithmétique que tu caractériseras.

2°) On considère la suite (P_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = e^{u_n}$

Exprime P_n en fonction de n et de P_0 , puis déduis-en que la suite (P_n) est géométrique. Tu précises la raison q et le premier terme.

3°) P_n représente la population béninoise au premier Août de l'année 1960 + n avec : $n \in \mathbb{N}$ et $r = q - 1$ représente le taux d'accroissement naturel de la population du Bénin, c'est-à-dire que la population augmente chaque année de $100r\%$.

- Détermine la période T au bout de laquelle la population double.
- D'après le recensement général de Février 1992, la population béninoise s'élève au 1^{er} Août 1992 à 4.845.359
- Détermine la population du Bénin d'abord au 1^{er} Août de l'an 2014, puis au 1^{er} Août de l'an 1960, c'est-à-dire P_0 .

ACTIVITE 12 : cor. p : 357

On se propose d'étudier la fonction f définie sur

$$]0; +\infty[\text{ par : } f(x) = \frac{2}{\ln 2} x + (1 - 2x) \log_2(x)$$

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{x} - 2 \ln x \right)$$

1°) Etudie les variations de la fonction g .

2°) Démontre que l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique α . Donne-en la valeur décimale arrondie à 10^{-2} de α .

3°) Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x , dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B :

4°) Calcule $f'(x)$, pour $x \in]0; +\infty[$

5°) a- Etudie les variations de f

b- Prouve que $f(\alpha) = \frac{4\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2\alpha \ln 2}$

6°) On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan d'unité graphique 2 cm.

- Détermine l'équation réduite de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
- Etudie les branches infinies de (C) puis construis (C)

Partie C :

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \left(2 \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right) dx, \text{ où } a_n = e^{\frac{n+1}{2}}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

7°) Justifie que la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ est une primitive de $x \mapsto 2 \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et calcule I_0

8°) Démontre que (I_n) est une suite arithmétique dont tu précises la raison et le premier terme.

9°) Calcule la somme $S_n = I_0 + I_1 + \dots + I_n$

ACTIVITE 13 : cor. p : 359

n est un entier naturel non nul.

On considère les équations différentielles

$$(E): u' + \frac{1}{n} u = e^{-\frac{x}{n}} \text{ et } (E'): u' + \frac{1}{n} u = 0$$

1°) Résous l'équation différentielle (E') .

2°) Détermine la constante réelle a pour que la fonction

$$h: x \mapsto a x e^{-\frac{x}{n}} \text{ soit une solution de } (E).$$

3°) Prouve qu'une fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $(u - h)$ est une solution de (E') .

4°) a- Déduis-en toutes les solutions de (E) .

b- Détermine la solution de (E) qui vérifie : $u(0) = 0$

5°) Soit la suite (u_n) défini par : $u_n = \int_0^1 x e^{-\frac{x}{n}} dx$.

- Prouve que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = -(n^2 + n)e^{-\frac{1}{n}} + n^2$
- Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$
- Déduis-en la convergente de la suite (u_n)

ACTIVITE 14 : cor. p : 360 (extrait Bac D 2004 Niger)

I/ On considère la suite (u_n) définie par ses premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = \frac{2}{5} u_{n+1} + \frac{3}{5} u_n (1).$$

1°) Prouve que la suite (v_n) définie par : $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique dont tu détermineras le premier terme et la raison.

2°) Détermine v_n en fonction de n . Déduis-en u_n en fonction de n .

3°) Détermine la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

II/ On définit la suite (w_n) par ses premiers terme w_0 et w_1 ($w_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $w_1 \in \mathbb{R}_+^*$) et par la relation de

réurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \sqrt{(w_{n+1})^2 (w_n)^3}$.

1°) Démontre que la suite (t_n) définie par : $t_n = \ln(w_n)$ (où $\ln$ désigne le logarithme népérien) vérifie la relation (1).

2°) Déduis-en la limite de la suite (t_n) , puis de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$.

ACTIVITE 15: cor. p. 361 (extrait concours APE 2015)
Le plan complexe est muni d'un repère orthogonal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Tu prendras pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $z_n = \frac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point d'affixe z_n .

1°) a- Calcule z_1, z_2, z_3 et z_4 et vérifie que z_4 est un nombre réel.

b- Place les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2°) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

a- Justifie que la suite (u_n) est une suite géométrique.

b- Donne l'expression de son terme général u_n en fonction de n .

3°) A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4°) Détermine la nature exacte du triangle $OA_n A_{n+1}$.

5°) Pour tout entier naturel n , on note l_n la longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$. On a ainsi :

$$l_n = A_0 A_1 + A_0 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$$

a- Exprime l_n en fonction de n .

b- Etudie la convergence de la suite (l_n) .

ACTIVITE 16: cor. p. 362 (extrait bac D 2002 Niger)

I/ Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.

Détermine la solution g de (E) vérifiant les conditions

suivantes : $g(0) = 1$ et $g(1) = \frac{2}{e}$; e désignant la base du logarithme népérien.

II/ 1°) On pose $h(x) = (1+x)e^{-x}$

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{x+1}}, \text{ si } x \in]-1; +\infty[\\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

a- Démontre que f est continue sur $]-1; +\infty[$.

b- Etudie la dérivabilité de f à droite en $x = -1$.

c- Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$.

d- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variations.

2°) Trace la courbe de représentative Γ de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 4 cm).

3°) Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

a- Démontre que f_1 est une bijection de $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$

sur un intervalle J que tu préciseras. On notera

f_1^{-1} la bijection réciproque de f_1 . Calcule

$$f_1^{-1}\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right).$$

b- Etudie la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} au point $x = 0$.

c- Trace la courbe représentative Γ^{-1} de f_1^{-1} dans le même repère que Γ .

4°) a- Prouve que pour tout $x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$,

$$\text{on a : } 0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e.$$

b- Déduis-en que : $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \frac{e\sqrt{2}}{4}$.

c- Soit S l'aire en cm^2 du domaine du plan limité par les droites d'équations : $x = 0$; $x = \sqrt{\frac{e}{2}}$, $y = -\frac{1}{2}$ et la courbe Γ^{-1} .

Donne un encadrement de S à 10^{-2} près.

III/ Soit (u_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

1°) Démontre que pour tout réel x de l'intervalle $[n; n+1]$, on a : $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

Déduis-en que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

2°) Démontre que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

NB : on prendra : $e = 2,72$; $\sqrt{e} = 1,65$

ACTIVITE 17 : cor. p : 364

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$f(x) = |x-1| - 2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique étant égale à 2 cm.

Partie A :

1°) Prouve que f est définie sur

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

2°) Calcule les limites de f aux bornes de D_f .

3°) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 1. Donne une conclusion graphique.

4°) Etudie les variations de f .

5°) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 appartenant à l'intervalle $] -2; -1[$

6°) Démontre que les droites d'équations $y = x - 1$ et $y = 1 - x$ sont asymptotes à la courbe (C_f) .

7°) Construis (C_f) . Tu traceras les demi-tangentes à droite et à gauche du point d'abscisse 1 de la courbe (C_f) .

8°) On donne : $g :]1; +\infty[\rightarrow f(]1; +\infty[)$
 $x \mapsto g(x) = f(x)$

Démontre que g est une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle K à déterminer.

9°) Trace dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la représentation graphique (Γ) de la bijection réciproque g^{-1} de g

10°) Prouve que (C_f) et (Γ) se coupent en un point A de la droite d'équation $y = x$. Calcule les coordonnées de A.

Partie B :

Soit α un réel appartenant à $]0; 1[$

11°) Calcule l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des points M

$$(x; y) \text{ tels que : } \begin{cases} \alpha \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

(Tu pourras utiliser une intégration par partie)

12°) Calcule la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 à droite.

Partie C :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = n - 1 - 2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = f(n)$$

13°) Prouve que (u_n) est une suite monotone.

14°) Quelle est sa limite ?

15°) Soit $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$

a- Démontre que : $S_n = \frac{n(n-1)}{2} + 2 \ln(n+1)$

b- Quelle est la limite de S_n .

ACTIVITE 18 : cor. p : 366 (extrait Bac D 2006 Togo)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - |x-1|$ et on note par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

A/

1°) a- Démontre que pour tout réel x on a : $\sqrt{x^2 + 3} > |x|$

b- Déduis-en le signe de $\sqrt{x^2 + 3} + x$ et celui de $\sqrt{x^2 + 3} - x$ sur $\mathbb{R}$.

B/

2°) a- Prouve que f est continue en 1.

b- Etudie la dérivabilité de f en 1 et interprète les résultats obtenus.

c- Etudie le sens de variation de f sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$ (tu pourras utiliser les résultats de A/)

d- Complète l'étude des variations de f .

e- Etudie les branches infinies de $(\mathcal{C})$ et construis $(\mathcal{C})$

3°) soit g l'application définie par :

$$g :]-\infty; 1[\rightarrow]1; 2[$$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

a- Démontre que g admet une application réciproque notée g^{-1} .

b- Définie explicitement g^{-1} .

c- Construis la courbe (Γ) représentative de g^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

d- Détermine la fonction G primitive de g^{-1} et telle que $G(0) = 0$.

e- Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = -1$ et $x = 1$. Calcule A en utilisant la courbe (Γ) .

C/ On désigne par I l'intervalle $]1; 2[$ et on donne la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

4°) a- Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I .

b- Démontrons que pour tout x de I on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c- Dédus-en que pour tout x de I on a :

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

5°) a- Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$.

b- Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

c- Etablie que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

d- Dédus-en que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et précise sa limite.

ACTIVITE 19 : cor. p : 369

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{2x} & , \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{1+e^x} & , \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm)

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 0[$ par :

$$g(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$$

1°) Etudie les variations de g .

2°) Dédus que pour tout élément x de $]-\infty; 0[$, $g(x)$ est strictement positif.

Partie B :

3°) Justifie que l'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R}$.

4°) Etudie la continuité de f en 0.

5°) a- Donne le développement limité d'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ au voisinage de 0.

b- Etudie la dérivabilité de f en 0.

c- Donne les relations définissant les demi-tangentes éventuelles à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

6°) a- Démontre que pour tout x élément de $]-\infty; 0[$;

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2(1-x)} \text{ puis déduis-en le signe de } f'(x).$$

b- Pour tout élément x de $]0; +\infty[$, Calcule $f'(x)$ puis donne son signe.

c- Donne le sens de variation de f .

7°) a- Calcule les limites de f en $+\infty$ en $-\infty$

b- Etudie les branches infinies de (C).

c- Trace (C).

Partie C :

Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$h(x) = f(x) - x$$

8°) a- Etudie le sens de variation de h .

b- Calcule $h(0)$ et la limite en $+\infty$ de h

c- Dédus-en que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$ et que : $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$

9°) Posons : $I = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

a- Démontre que $\forall x \in I, f(x) \in I$.

b- Calcule $f''(x)$ pour tout x élément de $[0; +\infty[$ puis déduis-en le sens de variation de f' sur I .

c- Dédus-en que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

d- Dédus-en que $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$

10°) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombre réels définie par :

$$U_0 = \frac{1}{4} \text{ et la relation de récurrence : } U_{n+1} = f(U_n),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

a- Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, (U_n) \in I$

b- Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$

c- Dédus-en que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

d- Détermine la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ACTIVITE 20 : cor. p : 372

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

On désigne de (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique : 2 cm

Partie A :

1°) a) Démontre que pour tout nombre réel x , on a : $f(-x) + f(x) = 2$

Dédus-en que (Γ) possède un centre de symétrie A dont tu préciseras les coordonnées.

b) Etudie les variations de f puis précise les asymptotes de (Γ) .

2°) a- Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) en son point d'abscisse 0.

b- On considère la fonction :

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) - (x+1)$$

i) Démontre que, pour tout nombre réel x :

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2,$$

ii) Déduis-en le sens de variation de la fonction φ .

iii) Calcule $\varphi(0)$ puis déduis le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x .

c- Déduis-en, de ce qui précède, la position de la courbe (Γ) par rapport à la droite (T) .

3°) Trace (T) et (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Partie B :

4°) a- Démontre que, pour tout x réel, $f(x) = x$ si et seulement si $\varphi(x) = -1$.

b- Déduis-en que la droite (D) d'équation $y = x$ coupe la courbe (Γ) en un seul point dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $]2; 3[$.

5°) a- Démontre que pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$$

Déduis une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

b- Exprime, en fonction de α , l'aire du domaine plan limité par la courbe (Γ) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

Partie C :

On désigne par I l'intervalle $[2; 3]$

6°) a- Démontre que, pour tout nombre réel x ,

$$f'(x) = 4 \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right)$$

b- Déduis-en que, pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c- Déduis-en que, pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

7°) On définit la suite (U_n) d'éléments de l'intervalle I

$$\text{par : } \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

a- Démontre que pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$ et

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$$

b- Démontre que pour tout entier naturel n ,

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|3 - \alpha|$$

Détermine un entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

ACTIVITE 21 :

A- On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^x(1 - x) - 1$$

1°) Etudie les variations de g .

2°) Déduis-en le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$

B- Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2e^x + x - 2}{e^x - 1}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

3°) a- Démontre que f est dérivable au point O et

$$f'(0) = -\frac{1}{2} \quad (\text{tu pourras utiliser le développement limité}$$

à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x$)

b- Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

4°) a- Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2 - x$ est une asymptote à (C)

b- Etudie la position de (C) par rapport à (D)

5°) a- Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b- Trace avec soin la courbe (C)

6°) Soit la fonction h définie par : $h(x) = x - f(x)$

a- Etudie le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$.

b- Déduis-en que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle

$$\left] 2; \frac{5}{2} \right[$$

C- On pose : $I = \left[2; \frac{5}{2} \right]$

7°) a- Démontre que pour tout réel x de I on a : $g(x) \geq -20$ et $(e^x - 1)^2 \geq 40$

b- Déduis-en que pour tout réel x élément de I , on

$$a : |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

c- Démontre que pour tout x élément de I , on a :

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha| \text{ et } f(x) \in I$$

8°) Soit U la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}; \forall n \in \mathbb{N}$$

a- Démontre que pour tout entier naturel n , on a : $U_n \in I$

Déduis-en que pour tout entier naturel n , on a :

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|, \text{ puis } |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

b- Déduis-en que la suite U converge vers une limite que tu préciseras.

9°) a- Démontre que pour tout entier naturel n , on a : $(U_{n+1} - \alpha)(U_n - \alpha) \leq 0$ et déduis-en que α est compris entre U_n et U_{n+1} .

b- Trouve un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait : $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

c- Déduis-en une valeur approchée de α à 10^{-3} près sous la forme U_p où p est un entier naturel que tu préciseras.

ACTIVITE 22 : cor. p : 375

Soit f la fonction définie, sur $\left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$, par

$$f(x) = \frac{x}{1 + \ln x} \text{ et l'on désigne par } (C_f) \text{ sa courbe}$$

représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$; (unité : 2 cm).

A-

$$1^\circ) \text{ Calcule } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

2°) Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f .

3°) a- Démontre que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse e .

b- Ecris une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I .

4°) Etudie suivant les valeurs de x , la position relative de (C_f) et de la droite (D) d'équation $y = x$.

5°) Trace (T) , (D) et (C_f) .

B- Soit l'intervalle $K = [1; e]$.

6°) a- Démontre que $f(K)$ est inclus dans K .

b- Montrons que, pour tout x de K , $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

c- Démontre que, pour tout x de K , on a :

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{4} |x - 1|$$

7°) Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

a- Démontre par récurrence que U_n appartient à K .

b- Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4} |U_n - 1|$.

c- Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$ et déduis la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

ACTIVITE 23 :

On considère la fonction numérique f de la variable

$$\text{réelle } x \text{ définie par : } \begin{cases} f(x) = \ln(1 - xe^{-x}) ; & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x\sqrt{x} & ; \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ et}$$

(C_f) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2cm)

I/ Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 1 - xe^{-x}$.

1°) Etudie les variations de u .

2°) Justifie que pour tout nombre réel x , $u(x) > 0$.

3°) Déduis-en que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

II/

4°) Justifie que f est continue en 0.

5°) Etudie la dérivabilité de f en 0 (Tu pourras poser

$$t = -xe^{-x})$$

Déduis-en que la courbe (C_f) de f admet au point d'abscisse 0 deux demi tangentes dont tu préciseras les équations.

6°) Etudie les variations de f .

7°) Justifie que $\forall x \in]-\infty; 0[$:

$$a- f(x) = \ln(e^x - x) - x$$

$$b- \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(e^x - x)}{e^x - x} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) - 1$$

c- Trace la courbe (C_f) de f .

8°) La rotation de la portion du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations :

$x = 0$ et $x = 1$ engendre un solide (S) . Calcule le volume de (S) .

9°) Soit la fonction F définie sur $]-\infty; 0]$ par :

$$F(x) = \int_x^0 f(t) dt.$$

a- Justifie que F est dérivable sur $]-\infty; 0]$.

b- Etudie le sens de variation de F .

c- Calcule $F(-1)$ par la méthode des trapèzes en partageant l'intervalle $[-1; 0]$ en 4 intervalles de même amplitude.

III/ Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $]0; +\infty[$. On définit la suite (U_n) par :

$$\begin{cases} U_0 = a, a \in \mathbb{R} \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

10°) Prouve que la suite (U_n) est constante si $a=1$

11°) On donne $a = \frac{1}{2}$.

- a- Démontre que la suite (U_n) est décroissante.
- b- Prouve que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$.
- c- Justifie que la suite (U_n) est convergente et précise sa limite.

ACTIVITE 24:

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, où l'unité de longueur est 4 cm.

1°) Dresse le tableau de variation de f .

2°) Soit I le point de coordonnées $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$

- a- Vérifie que I appartient à $(\mathcal{C})$
- b- Démontre que I est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.
- c- Prouve que la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point I a pour équation : $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

3°) Dans cette question on se propose d'étudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (T) .

- a- Justifie que pour tout réel x , on a : $f'(x) \leq \frac{1}{4}$
- b- Soit x un réel strictement positif. Démontre que l'on a : $f(x) \leq \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$
- c- Déduis-en les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (T) .

4°) Tracer $(\mathcal{C})$ et (T) .

5°) Calcule, en cm^2 , la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la tangente (T) et les droites d'équations respectives : $x=0$ et $x=2$.

6°) Pour tout entier non nul n , on pose

$$U_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(x + \ln n) dx \quad f(x \log n) dx$$

- a- Vérifie que $f(x + \ln n) = \frac{ne^x}{1+ne^x}$
- b- Calcule un en fonction de n .

c - Calcule la limite de un quand n tend vers $+\infty$.

ACTIVITE 25: cor. p. 376

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x), \text{ si } x \in]0; 1[\\ f(x) = \frac{x-1}{e^x - x - 1}, \text{ si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

On note par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 5 cm.

Partie A:

1°) a- Démontre que f est continue en 0 et en 1.

b- Démontre que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{e-2}$$

Interprète graphiquement ces résultats.

c- Démontre que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote horizontale que tu préciseras.

2°) Soit g la fonction définie sur $]0; 1[$ par :

$$g(x) = \ln x - \ln(1-x).$$

- a- Résous l'équation $g(x) = 0$.
- b- Déduis-en, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.
- c- Prouve que pour tout $x \in]0; 1[$, $f'(x) = g(x)$.

3°) Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$

$$\text{par : } h(x) = (2-x)e^x - 2$$

- a- Démontre que h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.
- b- Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ c- Déduis-en, suivant les valeurs de x , le signe de $h(x)$.
- c- Prouve que pour tout $x \in [1; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x - 1)^2}$$

4°) a- Utilise l'égalité $h(\alpha) = 0$ pour démontrer

que : $f(\alpha) = -1 + \frac{2}{\alpha}$ et dresse le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$

b- Trace $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[0; 3]$ en précisant les demi-tangentes en 0 et en 1.

On donne pour la construction :

x	0,5	1	$n=1,6$	2	3
$f(x)$	-0,60	0	0,25	0,23	0,12

Partie B :

Soit $\alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$, le réel déterminé dans la

question 3°)b- de la partie A.

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt.$$

a- Utilise la monotonie de f sur $]1; \alpha[$ pour démontrer que :

$$0 \leq I_1(\alpha) \leq \frac{(2-\alpha)(\alpha-1)}{\alpha}.$$

b- Etudie le sens de variation de la fonction : $t \mapsto e^t - t - 1$ sur $]1; +\infty[$. Dédus-en que pour tout $t \geq 1$,

$$e^t - t - 1 \geq e - 2.$$

c- Prouve alors que :

$$0 \leq I_n(\alpha) \leq \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)}.$$

d- Démontre que la suite $(I_n(\alpha))$ est convergente. Précise sa limite.

6°) Soient a et b deux réels strictement positifs tels que : $a + b = 1$.

a- En remarquant que : $f(x) \geq -\ln 2$, pour tout $x \in]0; 1[$, prouve que :

$$a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} \leq \ln 2$$

b- Pour quelles valeurs de a et b , la dernière inégalité est-elle une égalité ?

ACTIVITE 26: cor. p : 379

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x}. \text{ On désigne par (C) sa courbe}$$

représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interprète graphiquement.

b- Prouve que la courbe (C) de f admet trois tangentes horizontales dont l'une est au point d'abscisse 1.

2°) a- Dresse le tableau de variation de f .

b- Construis la courbe (C).

3°) Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

a- Justifie que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (I_n) .

b- Démontre que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peux-tu en conclure ?

c- Donne un encadrement du nombre I_n qui permet de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. Calcule cette limite.

4°) a- Calcule I_0 .

b- Démontre en utilisant une intégration par parties,

$$\text{que pour tout } n : I_{n+1} = \frac{-1}{e} + (n+1)I_n.$$

c- Calcule l'aire sous la courbe (C) délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = 1$.

ACTIVITE 27:

Partie A :

On considère la fonction numérique h définie sur

$$]1; +\infty[\text{ par : } h(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x \ln x}, & \text{si } x > 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1°) a- Démontre que h est continue à droite en 1.

b- Prouve que $\forall x > 1$, $\ln x < x - 1$ puis déduis-en que h est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

2°) a- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ puis établis le tableau de variation de h .

b- Dédus-en que pour tout $x \geq 1$, $0 \leq h(x) \leq 1$.

Partie B :

On considère la fonction numérique g définie sur

$$]1; +\infty[\text{ par : } g(x) = \begin{cases} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t} \ln t}, & \text{si } x > 1 \\ \ln 2, & \text{si } x = 1 \end{cases} \text{ et } (\mathcal{C}) \text{ sa}$$

courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3°) a- Prouve que pour tout $x > 1$, $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \ln 2$

b- Vérifie que pour tout $x > 1$,

$$g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt$$

c- Prouve que pour tout $x > 1$,

$$g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt$$

4°) a- Démontre que pour tout $x > 1$, $(x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$

b- Dédus-en que la fonction g est dérivable à droite en 1.

c- Démontre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

5°) a- Démontre que g est dérivable sur l'intervalle

$]1; +\infty[$ et pour tout $x > 1$, $g'(x) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x})$

b- Dédus-en que pour tout $x \geq 1$, $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$ et donne le tableau de variation de g .

c- Construis ($\mathcal{G}$)

Partie C :

A/

6°) Démontre que la fonction $f : x \mapsto g(x) - x + 1$ est une équation de l'intervalle $[1; +\infty[$ sur $] -\infty; \ln 2]$

7°) Dédus-en qu'il existe un unique réels α appartenant à $]1; +\infty[$ tel que $1 + g(\alpha) = \alpha$

B/ On considère la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} 1 \leq U_0 \leq \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 1 + g(U_n) \end{cases}$$

8°) a- Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < U_n < \alpha$

b- Prouve que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

c- Dédus-en que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

9°) a- Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_0 - \alpha|$

b- Prouve que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

c- Dédus-en une dernière fois que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

12. ACTIVITES SUR LES STATISTIQUES

ACTIVITE 1 : cor. p : 381 (d'après Bac D Sénégal)

1°) (X, Y) est une série statistique double. Soit (D_1) la droite de régression de Y en X .

Soit (D_2) la droite de régression de X en Y . On suppose que :

$$(D_1) : y = ax + b \text{ et } (D_2) : x = a'y + b'.$$

Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .

$$\text{Etablie que : } r^2 = a \times a'.$$

2°) Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y donne les résultats suivants :

- la droite de régression de Y en X a pour équation : $2,4x - y = 0$

- la droite de régression de X en Y a pour équation : $3,5y - 9x + 24 = 0$.

a- Calcule le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y , sachant que leur covariance est positive.

b- Calcule la moyenne de chacun des caractères X et Y .

ACTIVITE 2:

Un opérateur économique présente le relevé statistique des six (06) premiers mois de son comptoir alimentaire. x désigne le numéro du mois et y le chiffre d'affaires exprimé en millions de francs CFA correspondant.

x	1	2	3	4	5	6
y	12	13	15	19	21	22

1°) Représente le nuage de points (Tu prendras : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnée pour unité).

2°) a- Détermine les coordonnées du point moyen G

b- Calcule $V(x)$, $V(y)$ et $\text{cov}(x, y)$ (tu donneras si possible les résultats sous forme de fractions irréductibles.

c- Calcule le coefficient de corrélation linéaire, puis donne-en une interprétation.

3°) a- Démontre que la droite $(D) : y = \frac{78}{35}x + 9,2$ est la droite de régression de y en x de cette série.

b- Calcule une estimation du chiffre d'affaires de cet opérateur économique à la fin du septième mois.

ACTIVITE 3 :

Le tableau suivant donne les notes obtenues par un groupe d'élève à un devoir.

Note x_i	2	3	4	5	6	7
Nombres d'élèves y_j	27	24	16	15	12	6

1°) Représente graphiquement le nuage de points $M(x_i; y_j)$ dans un repère orthogonal

(O, I, J) 1 cm sur (OI) 0,5 cm sur (OJ)

2°) a- la forme du nuage de points nous permet-elle de supposer qu'il y a une corrélation linéaire entre le caractère X «note» et le caractère Y «nombre d'élèves»? Expliquer

b- A l'aide d'un tableau de calcul donner le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y

3°) Le groupe étudié contient 100 élèves. On choisit simultanément et au hasard deux élèves de ce groupe et on leur demande leurs notes. On suppose que ce choix soit équiprobable.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux élèves ayant une même note impaire ?

ACTIVITE 4 :

On donne la série statistique double de quatre éléments.

X	4	1,3	b	1,6
Y	4	5	5	6

Trouve a et b sachant que la droite de régression de y en fonction de X a pour équation $y = 5x$.

ACTIVITE 5:

Le tableau suivant donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population féminine.

X	36	42	48	54	60	66
Y	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1°) Représente graphiquement le nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) 0,5 cm pour un an et 3 cm pour unité de tension artérielle.

2°) Calcule la moyenne et la variance des séries statistiques aux caractères X et Y .

3°) a- Trouve une équation de la droite de régression de y en fonction de x .

b- Trouve une équation de la droite de régression de x en fonction y .

c- représente les deux droites sur le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.

4°) Calcule le coefficient de corrélation linéaire.

5°) une personne de 70 ans a une tension artérielle de 16,2. Cela vous paraît-il normal ?

ACTIVITE 6: cor. p:381 (extrait Bac D 2003 Niger)

Le tableau suivant donne la répartition de cent ménages selon les deux caractères x et y suivants : x désigne le nombre de pièces habitées et y le nombre d'enfants par ménage :

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	Total $n_{.j}$
1	6	2	1	0	0	9
2	5	12	8	1	1	27
3	2	7	15	11	3	38
4	0	1	8	14	3	26
Total $n_{i.}$	13	22	32	26	7	100

On donne : $\sum_{j=1}^4 n_{.j} x_j = 281$; $\sum_{j=1}^4 n_{.j} x_j^2 = 875$

$\sum_{i=0}^4 n_{i.} y_i = 192$; $\sum_{i=0}^4 n_{i.} y_i^2 = 496$; $\sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^4 n_{ij} x_j y_i = 604$

1°) a- Calcule pour la série x (en tenant compte des effectifs $n_{.j}$ de chaque valeur de x) la moyenne arithmétique $\bar{x}$, et l'écart type σ_x .

b- Calcule pour chaque série y (en tenant compte des effectifs $n_{i.}$ de chaque valeur de y) la moyenne arithmétique $\bar{y}$, et l'écart type σ_y .

2°) Calcule le coefficient de corrélation linéaire. Existe-il une liaison linéaire entre les deux variables x et y ? Justifie la réponse.

ACTIVITE 7:

On fait une enquête sur 100 familles portant sur :
 X : le caractère «nombre d'enfants dans une famille»
 Y : le caractère «nombre de pièces d'habitation d'une famille»

X \ Y	0	1	2	3	4	5
1	6	4	1	0	0	0
2	3	11	10	5	1	0
3	1	3	16	13	4	1
4	0	1	3	5	8	4

- 1°) a- A partir de ce tableau reconstituer les séries statistiques doubles associées respectivement aux caractères X et Y. (séries statistiques marginales).
 b- Calcule les moyennes $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ de chacune des séries aux caractères X et Y.
 c- Calcule les variances $v(x)$ et $v(y)$
- 2°) a- Trouve une équation de la droite de régression de y en fonction de x .
 b- Trouve une équation de la droite de régression de x en fonction de y .
 c- représente chacune de ces deux droites sur le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.
- 3°) Calcule le coefficient de corrélation linéaire.
- 4°) Peut-on prévoir le nombre d'enfants d'une famille vivant dans une villa de six pièces.

ACTIVITE 8 : cor. p :382

A l'Homel on étudie dans une soirée l'âge x des femmes qui ont accouché et le poids y de leurs bébé et on obtient le tableau ci-après :

Age x en année	22	18	20	16	22	26	22	18	22	20	18	26	20	26	18	18	22	26	22	20
Poids y en kg	3,2	2,8	3,2	2,8	2,8	3	2,8	3	3	3,6	3,4	3,6	3,2	3	3	3,4	2,8	2,6	3	3,2

- 1°) a- Comment appelle-t-on le tableau ainsi obtenu ?
 b- Dresse le tableau à double entrée de la série (x, y) .
 c- Dresse le tableau des effectifs des séries marginales de x et de y .
- 2°) a- Construis le nuage de point.
 b- L'aspect des points du nuage permet-il de justifier un ajustement linéaire ?
 c- Calcule le coefficient de corrélation linéaire puis interprète le résultat.
- 3°) a- Détermine une équation de la droite de régression de y en x .
 b- Peut-on faire une bonne estimation du poids d'un bébé accouché par une femme de 27 ans ? si oui donne sa valeur.
- 4°) On choisit au hasard et simultanément parmi ces nouveau nés, deux enfants.
 Calcule la probabilité pour que chacun d'eux pèse au moins 3 kg.

ACTIVITE 9 :

Un laboratoire étudie la croissance d'une souche de bactéries *Acetobacter* ; il obtient les résultats suivants :

Temps x_i (en heures)	4	5	6	7	8	9
Nombres N_i de bactéries par unité de volume (en milliers)	13,6	21,3	70,9	121,5	383	590

Les points de coordonnées $(x_i; N_i)$ ne sont pas alignés, le laboratoire décide alors de poser $y_i = \ln(N_i)$

1°) Recopie et complète le tableau ci-dessous puis donner les valeurs arrondies au centième près

x_i	4	5	6	7	8	9
y_i	2,61			4,80		

2°) Représente le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$.

3°) Détermine puis place les coordonnées du point moyen G.

4°) Calcule le coefficient de corrélation linéaire et l'interprète.

5°) Donne l'équation de la droite d'ajustement de x en y par la méthode des moindres carrés.

ACTIVITE 10 : cor. p: 383 (extrait Bac D 1998 Niger)

On considère la série statistique suivante où α et β sont deux nombres entiers naturels.

x_i	40	50	α	80	90	120	β	150	180
y_i	165	172	182	180	190	194	183	188	193

1°) a- Sachant que la moyenne de x_i est 100 et leur écart type $\frac{20\sqrt{46}}{3}$, calcule α et β .

b- Construis le nuage de points

2°) Détermine par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite de régression de x en y .

3°) Calcule le coefficient de corrélation linéaire entre x et y .

ACTIVITE 11 : cor. p: 383 (d'après Bac D Sénégal)

Une étude sur le nombre d'années d'exercice X , des ouvriers d'une entreprise et leur salaire mensuel Y en milliers de francs, a donné les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous avec des données manquantes désignées par a et b .

$X \backslash Y$	2	6	10	14	18	22
75	a	5	0	0	0	0
125	0	7	1	0	2	0
175	2	0	9	8	15	4
225	0	1	0	3	b	1

1°) Détermine a et b pour que la moyenne de la série marginale de X soit égale à $\frac{596}{59}$ et celle de la série

marginale de Y soit $\frac{8450}{59}$

2°) Dans la suite, on suppose que $a=40$ et $b=20$. A chaque valeur x_i de X on associe la moyenne $\bar{y}_i$ de la série conditionnelle : $Y/X = x_i$. On obtient ainsi la série double (X, M) définie par le tableau ci-dessous. Les calculs se feront à deux chiffres après la virgule.

x_i	2	6	10	14	18	22
m_i	80	113	170	189	199	185

ACT.

- X : le
 Y : le
- Calcule le coefficient de corrélation du couple $(X; M)$ puis interprète le résultat.
 - Détermine l'équation de la droite de régression de M en X .
 - Quelle serait le salaire moyen d'un ouvrier de l'entreprise si son ancienneté était 30 ans, si cette tendance se poursuit.

ACTIVITE 12 :

Madame Kouamé, statisticienne à la retraite, a créé une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels. Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2014, elle a fait l'état des ventes des huit types de colliers fabriqués en 2013.

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Types de colliers	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix x_i de vente en centaines de francs CFA du collier du type i	54	60	66	72	84	90	96	102
Nombre y_j de dizaines de colliers vendus au prix x_i .	18	16	15	13	10	9	8	7

On désigne par :

X le caractère « prix de vente du collier »

Y le caractère « nombre de colliers vendus au prix X »

1°) Représente graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double de caractère $(X; Y)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Tu prendras 2 cm pour 10 centaines de francs sur (OI) et 2 cm pour 2 dizaines de colliers sur (OJ) .

2°) Calcule les coordonnées du point moyens G du nuage.

3°) a- Calcule la variance $V(X)$ de X .

b- Calcule la covariance $\text{cov}(X; Y)$ de la série statistique double à caractère $(X; Y)$.

c- On admet que $V(Y) = 14,50$. Démontre que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à $-0,99$.

4°) Soit (D) la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

a- Justifie que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à $-0,23$.

b- Démontre qu'une équation de la droite (D) est : $y = -0,23x + 29,94$

5°) Pour l'année 2014, madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11 500 francs CFA l'unité. Combien de colliers de ce type pourrait-elle vendre selon l'ajustement linéaire réalisé ?

ACTIVITE 13 :

Un sac contient dix (10) boules dont sept (07) blanches numérotées de 1 à 7 et trois (03) noires numérotées de 1 à 3.

On tire successivement deux boules du sac sans remise.

1°) On considère les événements A : « on obtient deux boules blanches » et B : « on obtient deux numéros impairs ».

a- Prouve que la probabilité de l'événement A est $\frac{7}{15}$.

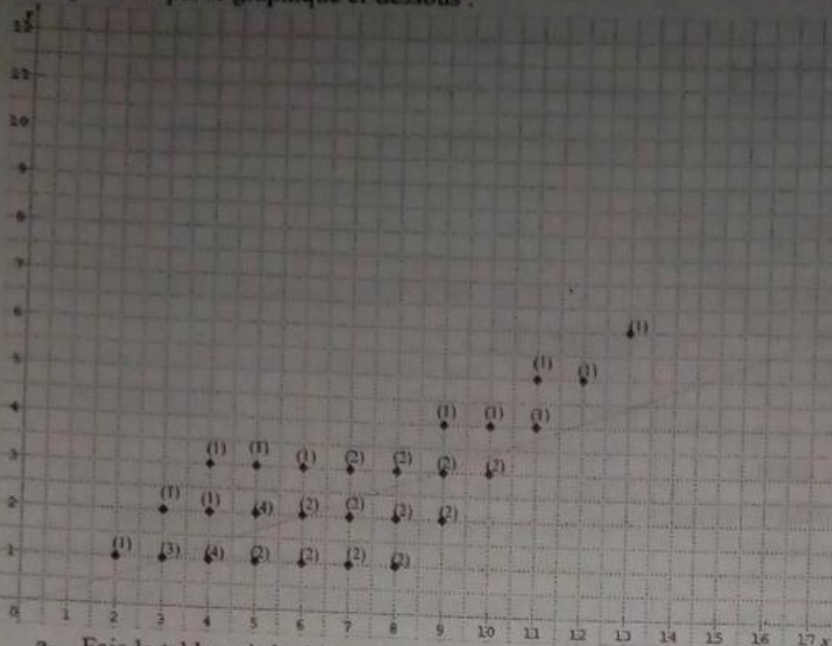
b- Calcule la probabilité de l'événement B .

c- Calcule la probabilité de $(A \cap B)$ et déduis-en que A et B sont indépendants.

2°) Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues.

Détermine la loi de probabilité de X et son espérance mathématique. *

3°) La somme x des numéros marqués sur les deux boules et le plus petit des numéros y obtenus sont des caractéristiques que l'on désire étudier. On obtient une série statistique à deux variables x et y dont le nuage de points est représenté par le graphique ci-dessous :



- Fais le tableau à double entrée de cette série statistique.
- Dresse le tableau des effectifs des séries marginales associées à cette série double.
- Calcule le coefficient de corrélations linéaire et apprécie la corrélation entre les deux variables.

ACTIVITE 14 : cor. p : 384

Le budget d'une entreprise, en fonction du temps exprimé en années, et donnée en millions de francs par le tableau suivant :

Temps (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Recettes (y_i)	4	5	5	7	8	9	9	9
Dépense (z_i)	4	5	α	8	7	8	β	9

- Représente le nuage de points des recettes en fonction du temps.
 - Détermine, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement des recettes par rapport au temps. Trace cette droite.
- On suppose que la moyenne des dépenses, notée $\bar{z}$, est égale à 7 et que la variance $V(z)$ vaut 3. Détermine α et β .

ACTIVITES SUR LA SA N°3 : APPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES AUX TRANSFORMATIONS DU PLAN.

ACTIVITE 1 :

Dans un plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$: on donne les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, $2+i$ et $3+2i$. Soit s la similitude plane directe de centre A qui transforme C en B.

- 1°) Détermine l'angle θ et le rapport k de s .
- 2°) Détermine l'écriture complexe de s .

ACTIVITE 2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .
Donne dans chacun des cas suivants, la nature de f et précise ses éléments caractéristiques.

- a) $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z + 1+2i$.
- b) $z' = -2z + 1+2i$.
- c) $z' = (1+i)z + 1+2i$.

ACTIVITE 3 :

Soit s la similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et de centre M_0 d'affixe $z_0 = 1-i$.

- 1°) Détermine l'écriture complexe de s .
- 2°) Détermine l'équation cartésienne de la droite (D') image de la droite (D) par s d'équation : $x+y=\sqrt{2}$.

ACTIVITE 4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soient s_1 , s_2 et s_3 les trois similitudes définies par :

- ❖ A tout point M d'affixe z , s_1 associe le point

$$M' \text{ d'affixe : } z' = \frac{-1+i}{2}z + \frac{3-i}{2}$$

- ❖ s_2 est la similitude plane directe de centre O , de rapport 2 et d'angle π .

- ❖ A tout point $M(x; y)$, s_3 associe le point M' de coordonnées :
$$\begin{cases} x' = -x + y - 1 \\ y' = -x - y + 2 \end{cases}$$

Détermine la nature et les éléments caractéristiques des transformations : $f = s_1 \circ s_2$ et $g = s_1 \circ s_3$.

ACTIVITE 5 :

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 1+2i, z_B = 2+i \text{ et } z_C = 2+\sqrt{3} + (1+\sqrt{3})i$$

- 1°) Démontre que le triangle ABC est rectangle en B et

détermine une mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$

- 2°) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

- a- Donne l'écriture complexe de r .
- b- Détermine les images A' et C' des points A et C par r respectivement.
- c- Quelle est la nature du triangle $A'BC'$?

ACTIVITE 6 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme : $p(z) = z^3 - (3+4i)z^2 + (-3+7i)z + 4$

- 1°) Calcule $p(i)$ et $p(1+i)$

- 2°) Résous alors l'équation $(E): p(z) = 0 : \forall z \in \mathbb{C}$

- 3°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives i , $1+i$, $2+2i$ et $1+i\sqrt{3}$

- a- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C.
- b- Détermine l'affixe du point D' , image de D par S et écris sous forme exponentielle le nombre $(1+i)z_{D'}$.

- c- Déduis-en les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et

$$\sin \frac{7\pi}{12}$$

- d- Donne une équation cartésienne de l'image de la droite (AB) par S .

- 4°) a- Détermine l'écriture complexe de la rotation r d'angle orienté $\frac{\pi}{12}$ qui transforme A en B.

- b- Détermine $S \circ r(A)$.

- c- Vérifie que B est le centre de $S \circ r^{-1}$ où r^{-1} est la bijection réciproque de r .

ACTIVITE 7 :

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- 1°) Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $(E_0): z^4 - 16 = 0$

- 2°) On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme complexe $P(z) = z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z$

- a- Calcule $P(z) - (z-2)^4$ en fonction de z .

b- Déduis-en les solutions de l'équation $P(z)=0$
 3°) on donne dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives 4, $2-2i$ et $2+2i$.

- Démontre que les points O, A, B et C sont sommets d'un carré.
- Détermine une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit à ce carré.
- Ecris z_B sous forme exponentielle puis $(z_B)^{2014}$ sous forme algébrique.

4°) Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C.

- Donne l'écriture complexe de S .
- Précise sa nature et ses éléments caractéristiques S .

ACTIVITE 8 :

On considère l'équation d'inconnue complexe z ,

$$(E): z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i = 0 :$$

1°) Démontre que (E) possède une solution imaginaire pure notée z_0 que tu détermineras.

2°) a- Démontre qu'il existe deux nombres complexes b et c tels que :

$$z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i = (z-z_0)(z^2 + bz + c)$$

b- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = -2i, z_B = 16-10i \text{ et } z_C = 16+10i$$

f est la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

On désigne respectivement par k et β le rapport et l'angle de f .

g est l'homothétie de centre B et de rapport -2 .

- Quelle est la nature exacte du triangle ABC ? Justifie la réponse.
- Détermine les valeurs exactes de k et de $\cos\beta$.
- Donne l'écriture complexe de g et détermine l'image de la droite (BC) par g .

ACTIVITE 9 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $2-i$ et $5+2i$

1°) Justifie que le point C, image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a pour affixe

$$\frac{7-3\sqrt{3}}{2} + i \frac{1+3\sqrt{3}}{2}$$

2°) On note I le milieu de [AB] et D l'image de A par l'homothétie de centre B et de rapport 2. Détermine les affixes des points I et D.

3°) Calcule $\frac{z_C - z_I}{z_D - z_I}$ et conclus.

4°) On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et

h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$

- Donne les écritures complexes de r et de h .
- Donne la nature de hor .

ACTIVITE 10 : cor. p. 385

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm, on donne le point A d'affixe -2 .

Soit Z le nombre complexe défini par : $Z = \frac{iz+3}{z+2}$ avec

$$z \neq -2 \text{ et } z \in \mathbb{C}.$$

On pose $Z = X+iY$ et $z = x+iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et $(X; Y) \in \mathbb{R}^2$.

1°) Détermine X et Y en fonction de x et de y .

2°) Détermine et construis dans le plan les deux ensembles (C) et (D) définis par :

$$(C) = \{M(x; y) / Z \text{ soit réel}\}$$

$$(D) = \{M(x; y) / Z \text{ soit imaginaire pur}\}$$

3°) Soient B, C et D les points d'affixes respectives i , $2+2i$ et $1-i$.

On note par S la similitude plane directe qui transforme B en C et C en D.

- Donne l'expression complexe de S .
- Précise ces éléments géométriques.
- Construis l'image du cercle d'équation : $x^2 + y^2 + 2x - 3y = 0$ par S dans le repère précédent.

ACTIVITE 11 :

On donne dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$(E): z^3 + (13-6i)z^2 + 2(23-24i)z - 44-108i = 0$$

et A, B et C les points images des solutions de l'équation (E).

1°) a- Calcule $(1-8i)^2$

b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

c- Précise l'affixe de chacune des points A, B et C sachant que A est un point de l'axe des imaginaires et que la partie imaginaire de l'affixe du point B est positive.

2°) Soit S la similitude plane directe qui laisse invariant le point I milieu du segment [AC] et qui transforme A en B.

- Détermine l'écriture complexe de S .
- Donne la nature et les éléments caractéristiques de S .

3°) Détermine l'abscisse du point D image du point C par S.

4°) a- Justifie que $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$ puis précise la nature du triangle ABD.

b- Donne la nature exacte du quadrilatère ABCD.

5°) Calcule, en unité d'aires, l'aire du quadrilatère ABCD

ACTIVITE 12 :

On donne les nombres complexes : $u = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$v = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $w = 4\sqrt{2}(-1 + i)$

1°) Ecris sous forme trigonométrique les nombres complexes u , v , w , uv .

2°) a- Détermine sous forme trigonométrique les racines cubiques de w .

b- Que représente v et uv pour w ?

3°) Ecris sous forme algébrique le nombre complexe uv

et déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

4°) On considère les points V et K d'abscisses respectives v et uv l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M du plan d'abscisse z associe le point M_0 d'abscisse z_0 telle que : $z_0 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

a- Donne la nature de f et précise ses éléments caractéristiques.

b- Que représente le point K pour le point V ?

c- Place les points V et K dans le repère.

ACTIVITE 13 : cor. p : 386 (d'après BAC Sénégal série D)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct.

I- Soit $z \in \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Posons $z = x + iy$, x et y réels.

1°) Sous quelle forme est écrit z ? Quelle est la partie réelle ? Quelle est sa partie imaginaire ?

2°) Quel est le module de z ?

3°) Soit α un argument de z pour $z \in \mathbb{C}^*$.

Détermine le cosinus et le sinus de α en fonction de z

4°) Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$

l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ .

Exprime z' en fonction de z et θ .

II- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z qui suit :

$$(E) : \frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$$

1°) Résous l'équation (E).

2°) On considère les points A et B d'abscisses respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$

Calcule OA, OB et AB.

Déduis-en la nature du triangle OAB.

3°) On désigne par C le point d'abscisse $c = \sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Détermine l'abscisse du point D.

4°) On appelle G le barycentre des points pondérés $(O; 1)$, $(D; -1)$ et $(B; -1)$.

a- Prouve que le point G a pour abscisse $g = -4\sqrt{3} + 6i$

b- Place les points A, B, C et G sur une figure (unité graphique : 1cm)

5°) Détermine une mesure en radians de l'angle

$\widehat{(GA; GC)}$. Déduis-en la nature du triangle GAC.

ACTIVITE 14 :

Soit s la similitude plane directe qui, à tout point M d'abscisse $z = x + iy$, du plan complexe associe le point M' d'abscisse $z' = x' + iy'$, du plan complexe, tel que :

$$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$$

1°) Détermine l'expression de z' en fonction de z .

2°) Donne les éléments caractéristiques de s .

3°) Soit (C) le cercle de centre $A(1; 1)$ et de rayon 5. Détermine (C') l'image de (C) par s .

ACTIVITE 15 : cor. p : 386

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$,

l'équation : (E) : $z^2 - (2\alpha + i)z + \alpha^2 + i\alpha + 2 = 0$ où α est un nombre complexe. Soit J et K deux points dans le plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$ dont les abscisses sont solutions de (E).

1°) a- Vérifie que $\alpha + 2i$ est solution de (E).

b- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

c- Détermine α pour que le triangle OJK soit isocèle et rectangle en O.

2°) Les points J et K sont d'abscisses respectives $\frac{3}{2}(1-i)$ et $\frac{3}{2}(1+i)$.

a- Donne une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle OJK.

b- Détermine l'écriture complexe de la similitude plane directe s qui transforme J en K et K en O.

c- Précise les éléments caractéristiques de s .

d- Donne l'image de (C) par s .

ACTIVITE 16 : cor. p:387

On considère les points A ; B ; C et D dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et dont les affixes respectives $z_A ; z_B ; z_C$ et z_D sont solutions de l'équation

$$(E): z^4 + (8-4i)z^2 + 12 + 16i = 0 \text{ dans } \mathbb{C}. \text{ Les complexes } z_A ; z_B ; z_C \text{ et } z_D \text{ sont tels que :}$$

$\text{Im}(z_D) < \text{Im}(z_A) < \text{Im}(z_B) < \text{Im}(z_C)$.

1°) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

2°) a- Détermine les complexes $z_A ; z_B ; z_C$ et z_D

b- Place les points A, B, C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (prends 1 cm pour unité)

c- Donne le nom du quadrilatère ACBD

3°) a- Détermine l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui laissent invariant un point A et transforme le points C en B.

b- Détermine les éléments caractéristiques de S.

4°) a- Détermine l'image des points C et D par S.

b- Détermine une équation cartésienne de la droite (D) image de la droite passant par les points C et D par S.

ACTIVITE 17 :

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1°) Détermine l'expression complexe et les éléments caractéristiques de la similitude qui transforme A(1+2i) en B(1+3i) B et qui laisse C(2i) invariant.

2°) Quelle est l'image de E(3i-1) par cette similitude ?

3°) a- Donne l'expression analytique de S.

b- Quelle est l'image de la droite (D): $x+2y+1=0$ par S ?

ACTIVITE 18 : cor. p:388 (d'après BAC D Niger)

1°) Détermine deux nombres complexes a et b tels que : $a+b=5-4i$, $ab=3(1-3i)$ et $|a| > |b|$.

Mets a sous forme trigonométrique.

2°) On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les points A, B, C et D d'affixes

respectives a ; $\frac{a^2}{18}$; b et b^2 .

a- Détermine les coordonnées du barycentre G des points A, B, C et D affectés des coefficients respectifs 1 ; -1 ; 1 ; 1.

b- Détermine l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = k \text{ où } k \text{ est un réel donné.}$$

Discuter suivant les valeurs de k.

3°) Soit S la transformation géométrique qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = az + b$.

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S.

ACTIVITE 19 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère le polynôme complexe p défini par :

$$p(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$$

1°) On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : -1+i, 1-i, 3+i et 1+3i

a- Place les points A, B, C et D dans le plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

b- Prouve que les affixes respectives de ces points sont solutions de l'équation $p(z)=0$

c- Prouve que le quadrilatère ABCD est un carré.

2°) Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$$

a- Détermine l'affixe du point Ω tel que $h(\Omega) = \Omega$

b- Déduis en la nature exacte et les éléments caractéristiques de h.

c- r est la rotation de centre Ω et d'angle 15° .
Donne la nature et les éléments caractéristiques de s = hor.

ACTIVITE 20:

1°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 3z + 3 - i = 0$

2°) Soit $P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (3+5i)z - 2 - 6i$ et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $P(z) = 0$.

a- Justifie que l'équation (E') admet une solution imaginaire pure.

b- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E')

3°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , on donne les points A(0;2) ; B(2;1) et C(1;-1)

a- Place les points A, B et C (unité graphique : 2 cm).

b- z_A , z_B et z_C désignent des affixes des points A, B et C.

Calcule le nombre complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ et déduis-en que

la nature du triangle ABC.

4°) Soit S la similitude directe de centre C, d'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

Détermine l'écriture complexe de S.

5°) Soient D et E deux points du plan tels que $S(D) = A$ et $S(B) = E$.

- a- Détermine les affixes des points D et E .
- b- Construis les points D et E puis démontre que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

ACTIVITE 21 : cor. p : 389 (extrait Bac D 2004 Niger)

1°) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation

$(E): z^3 - m(1+i)z^2 + im^2z = 0$ où m est un complexe donné non nul.

- a- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- b- Soient O, A, B les points images des solutions de l'équation (E) tels que B soit l'image de A par

la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Prouve que OAB est un triangle isocèle rectangle en O .

2°) a- Détermine m pour que l'équation (E) admette pour solution le complexe $1+i$.

b- Résous l'équation (E) dans chacun des cas trouvés.

3°) Soit M le point d'affixe m . On suppose que M décrit dans le plan complexe le cercle (C) d'équation :

$$x^2 + y^2 - x = 0.$$

- a- Détermine le centre et le rayon du cercle (C) .
- b- Détermine l'image du cercle (C) par la rotation R .

ACTIVITE 22 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure (E) :

$$z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = 0.$$

2°) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+i$, $2i$ et i . Place A, B et C dans le repère. (unité graphique : 2cm).

3°) Pour tout nombre complexe z différent de $1+i$, on associe le nombre complexe z' définie par :

$$z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$$

- a- Interprète graphiquement $|z'|$ et $\arg z'$.
- b- Détermine puis construis l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
- c- Détermine puis construis l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 2$.

4°) Soit S la similitude directe de centre C transformant A en B .

- a- Détermine la nature du triangle ABC .
- b- Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de S .
- c- Détermine les images par S de (E_1) et (E_2) puis les construire. (Utiliser des couleurs différentes).

ACTIVITE 23 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. associe le point

1°) Soit S une transformation du plan, qui à chaque M d'affixe $z = x + iy$ M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tels que

$$x' = -x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \text{ et } y' = -x\sqrt{3} - y + 2 \text{ où } x, y, x' \text{ et } y' \text{ sont des réels.}$$

- a- Démontre que l'écriture complexe S est donnée par : $z' = (-1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + 2i$
- b- Détermine la nature de S et précise ses éléments caractéristiques.

2°) On considère le polynôme complexes :

$P(z) = z^3 + (-5+i)z^2 + (10-6i)z - 8 + 16i$ où z est un nombre complexe.

- a- Démontre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution z_0 dont le point image appartient à la droite (Δ) d'équation $y = x$.
- b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3°) Soit les points A, B et C d'affixes respectives $3-i$, $-2i$ et $2+2i$.

- a- Détermine l'angle de la rotation r de centre A qui transforme B en C .
- b- Détermine l'affixe du centre F de l'homothétie de rapport -3 qui transforme B en C .
- c- Détermine l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de la similitude plane directe de centre B qui transforme A en C .

ACTIVITE 24 :

1°) Soient $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0; 2\pi[$

On désigne par $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe.

- a- Ecris sous forme exponentielle les nombres complexes $1+i$, z^2 et $(1+i)\bar{z}$.
- b- Déduis-en la valeur de ρ pour laquelle on a : $z^2 = (1+i)\bar{z}$.
- c- Déduis-en les valeurs de θ telle que $z^2 = (1+i)\bar{z}$.

2°) Soient z_0, z_1, z_2 et z_3 les nombres complexes de module r et d'argument θ , déterminé précédemment.

Soient A_1 et A_2 les points d'affixes respectives $z_1 - z_0$; $z_2 - z_0$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

a- Mets sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$

b- Dédus-en la nature du triangle OA_1A_2

3°) On donne les points A, B, C, D et E d'affixes respectives : $-2 + 2i$, $1 + 3i$, $7i$, $-5 - 4i$ et $-1 + 4i$. Soit S la similitude plane directe qui transforme D en C et A en B.

a- Donne une écriture complexe de S

b- Donne les éléments caractéristiques de S

c- Détermine l'affixe du point F tel que $S(F) = 0$

ACTIVITE 25:

θ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; \pi]$.

On considère l'équation

$$(E_\theta): z^2 - (2 + 2i)(1 + e^{i\theta})z + e^{i\theta}(2 + 2i)^2 = 0$$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1°) Démontre que le discriminant de l'équation (E_θ)

est : $(2 + 2i)^2(1 - e^{i\theta})^2$, puis résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) .

2°) On note z_1 la solution de (E_θ) indépendant de θ et z_2 l'autre solution. On désigne par M_1 et M_2 les points images respectifs de z_1 et z_2 .

a- Exprime z_2 en fonction de z_1 .

b- Dédus-en que le triangle OM_1M_2 est isocèle en O.

c- Pour quelle valeur de θ les points M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des imaginaires purs.

3°) Pour cette question, on donne $\theta = \frac{\pi}{2}$.

A et B sont les points d'affixes respectives $2 + 2i$ et $-2 + 2i$.

a- Place les points O, A et B dans le plan complexe.

b- Détermine les affixes respectives des points O' et A' pour que le quadrilatère $OO'A'A$ soit un carré direct.

4°) Soit I le point du plan tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AO}$ et S la similitude directe de centre A qui transforme B en I.

a- Donne l'écriture complexe de S et précise ses éléments caractéristiques.

b- Calcule l'aire du triangle AOB.

c- Dédus-en l'aire du triangle $O_1A_1B_1$ images de OAB par S.

ACTIVITE 26 :

On considère l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$(E): z^4 + (-10 + 7i)z^3 + (26 - 30i)z^2 + (-80 + 22i)z + 40 + 40i = 0 \quad (1^\circ)$$

Résous (E) sachant que (E) admet deux solutions dont les points images appartiennent à la droite d'équation

$$y = -x.$$

2°) On considère les points : A(0; 1), B(4; -4), C(1; 1) et D(5; -5).

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = az + b$ et F l'application du plan complexe P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$.

a- Détermine a et b sachant que F transforme A en B et C en D.

b- Démontre que l'application F possède un point fixe I c'est-à-dire $F(I) = I$ dont tu détermineras l'affixe ω .

3°) Lorsque $z \neq \omega$, démontre que $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = 1 - i$

4°) Dédus-en la valeur du rapport $\frac{IM'}{IM}$ et la mesure

principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'} \right)$. Définie

géométriquement F.

ACTIVITE 27 : cor. p : 390 (extrait Bac D 2014 Togo)

Soit l'équation $(E): z \in \mathbb{C}, z^n = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}, n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Détermine les solutions z_k de (E) .

2°) On pose $n = 5$.

Représente dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points images des solutions z_k de (E) .

3°) On pose : $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

a- Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, exprime α en fonction de j

b- Prouve que α est une solution de l'équation :

$$z^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$$

4°) Soit la transformation T de P dans P, qui au point M de P d'affixe z associe le point M' de P d'affixe z' tels

$$\text{que : } z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) z + \frac{5 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i$$

a- Ecris la forme algébrique du nombre complexe $w = (1 - i)(2 + \sqrt{3} + 3i)$.

b- Donne la nature de T et précise ses éléments caractéristiques.

ACTIVITE 28 :

m est un paramètre réel non nul. On considère l'application g_m du plan complexe dans lui-même

d'écriture complexe $z' = m(1+i)z + \frac{i}{3}$.

1°) a- Démontre que g_m est une similitude plane directe dont tu préciseras l'axe du centre, le rapport et l'angle suivant les valeurs de m .

b- Détermine les valeurs de m pour lesquelles g_m est une rotation.

c- Exprime en fonction des coordonnées $(x; y)$ de M les coordonnées $(x'; y')$ de l'image M' de M par g_m .

2°) On considère le point $A\left(\frac{3-e^m}{6}; \frac{-3-e^m}{6}\right)$

a- Détermine les coordonnées du point A' , image de A par g_m .

b- Démontre que lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$, l'ensemble des points A' est la courbe (Γ) d'équation

$$y = \frac{1}{3}(1 - xe^x)$$

3°) soit $f: x \mapsto \frac{1}{3}(1 - xe^x)$

a- Etudie les variations de f et trace la courbe (Γ) dans un repère orthonormé unité 2 cm.

b- Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Calcule l'aire $A(\alpha)$ du domaine limité par la courbe (Γ) et les droites d'équation

$$y = \frac{1}{3}; x = \alpha \text{ et } x = 0$$

c- Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

ACTIVITE 29 : cor. p: 391

θ est un nombre réel appartenant à $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. On

considère l'équation :

$$(E): z^2 - [1 + i(\sin \theta + \tan \theta)]z + (-\tan \theta + i)\sin \theta = 0$$

1°) Prouve que : $b = i \sin \theta$ est une solution de (E) , puis calcule l'autre racine noté a .

2°) Détermine le module et un argument de a .

3°) Soit F l'application du plan complexe dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = az + b$ (a et b étant les solutions de (E))

a- Reconnais F et détermine ses éléments géométriques.

b- Comment faut-il choisir θ dans $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ pour que F soit une similitude d'angle $\frac{\pi}{4}$? Calcule alors l'affixe de son centre A_0 et le rapport r de cette similitude.

LES SITUATIONS D'EVALUATIONS DES LYCEES

SITUATION D'EVALUATION N° 01
cor. p: 392

Contexte : Foire de l'indépendance

Pour la foire de l'Indépendance, Boni, l'un des artistes veut présenter une caisse des anciens rois du Dahomey, qui force l'administration des visiteurs. Il choisit de mettre des surbrillances sur les lignes et points remarquables d'un solide en forme d'un pavé droit JOIEFCNL entièrement réalisé en verre. Il a également décidé de mettre des anciennes pièces de monnaies dans un tétraèdre ABCJ à l'intérieur de la caisse et qu'un ivoire soit placé à l'intersection de trois plans $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{Q})$ et $(\mathcal{R})$. Il veut en outre présenter certains tableaux. Il se rapproche de son amie Anifa, une élève en terminale scientifique pour l'aider à réaliser tout son projet. Au point K milieu de $[OC]$ est placé un objet d'ornement.

Pour mener ses tâches Anifa muni l'espace d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $A(1; -2; -1)$, $B(4; -4; -2)$ et considère le point G tel que $\vec{GA} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

Des surbrillances sont placés en des points d'un ensemble $(\mathcal{D})$ des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$\begin{cases} 5x - 2y - 2z - 6 = 0 \\ 7x - 6y - 2z - 14 = 0 \end{cases}$$

Tâche : Tu vas aider Anifa en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1 :

1°) a- Démontre que G est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients que tu préciseras.

b- Justifie que $\vec{JC}(0; -1; 2)$

c- Détermine les coordonnées de G.

2°) a- Démontre que les points A, B et C déterminent le plan $(\mathcal{P})$.

b- Prouve qu'une équation de $(\mathcal{P})$ est :

$$x + 2y - z + 2 = 0$$

c- Justifie que ABCJ est bien un tétraèdre puis calcule son volume.

3°) a- Justifie que $(\mathcal{D})$ est une droite de l'espace

b- Démontre que $(\mathcal{D})$ est strictement parallèle à $(\mathcal{P})$

Problème 2 :

Le plan $(\mathcal{Q})$ contient un ensemble (Δ) et est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$; $(\mathcal{R})$ est le plan passant par A et perpendiculaire à $(\mathcal{P})$ et à $(\mathcal{Q})$. (Δ) est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$(2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}) \wedge (\vec{MI} - \vec{JI}) = \vec{0}$$

4°) a- Justifie que (Δ) est une droite que tu préciseras.

b- Donne une représentation paramétrique de (Δ) .

c- Calcule la distance de C à (Δ) .

5°) a- Détermine une équation cartésienne du plan $(\mathcal{R})$.

b- Détermine la position de l'ivoire.

Problème 3 :

L'un des tableaux que Boni désire présenter comporte des points d'ornements M_1 et M_2 avec des courbes. Ce tableau est assimilable au plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ unité 2 cm.

A/ Les points M_1 et M_2 ont pour affixes respectives

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ et } z_2 = 1 + i$$

6°) a- Ecris $z_1 \times z_2$ sous forme algébrique.

b- Ecris sous forme trigonométrique z_1 , z_2 et $z_1 \times z_2$.

c- Déduis-en les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

7°) On pose $z_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_1$

a- Vérifie que $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}} \right)$.

b- Déduis-en le module et un argument de z_3 .

c- Calcule z_3^{2015} sous forme algébrique.

8°) a- Donne une interprétation géométrique du module et d'un argument de z_1 .

b- Place le point M_2 , puis le point M_1 en utilisant la question 8°) a-

B/ Les courbes tracées sont des ensembles (E_1) , (E_2) et (E_3) .

On pose $Z = \frac{z-1-i}{z - \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$ avec $z \neq \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

(E_1) est l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|Z|=1$; (E_2) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z|=2$ et (E_3) l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

9°) a- Détermine les ensembles (E_1) et (E_2) .

b- Détermine l'ensemble (E_3) .

10°) a- Justifie que (E_2) et (E_3) ont un seul point commun M_0 dont tu préciseras l'affixe.

b- Précise la nature du triangle $M_0M_1M_2$.

c- Justifie que (E_1) et (E_3) ont un seul point commun M_3 dont tu préciseras l'affixe.

Précise la nature du triangle $M_1M_2M_3$

SITUATION D'EVALUATION N° 02

cor. p. 395

(Collège la BOUSSOLE de Parakou)

Contexte : Salle de spectacle.

La mairie de GBADJA dispose d'une salle de spectacle qui est constituée de deux compartiments essentiels : un compartiment pour les spectateurs qui a la forme d'un cube ABCDEFGH d'arête 12m et le second compartiment est une chambre pour projection de films. L'un des murs de la chambre de projection est la face ABFE de centre O. Une ouverture circulaire faite dans ce mur permet de projeter les films sur l'écran situé dans le plan de la face DCGH.

La trajectoire suivie par l'image projetée sur l'écran est un ensemble (Δ) de points M de l'espace tels que : $4\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) \wedge \overrightarrow{ML}$, où L est le barycentre des points pondérés (C, 3) et (G, 1). On désigne par I le milieu de [EH].

La façade BCGF est décorée à l'aide de deux courbes (Γ) et (Γ') . L'espace est muni du repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Tâche : Tu vas résoudre les trois problèmes suivants pour t'imprégner des préoccupations de la mairie de GBADJA lors de la réalisation de cette salle.

Problème 1 :

- Détermine les coordonnées des points O, I et L.
- Justifie que (Δ) est une droite dont tu préciseras un repère.
 - Donne une représentation paramétrique de (Δ) .
- Détermine une équation cartésienne du plan (P) de l'écran.
 - Justifie que (Δ) et (P) sont sécants, puis détermine les coordonnées de leur point d'intersection A_0 .
- Justifie que $OICA_0$ est un tétraèdre, puis calcule son volume θ .
 - Calcule l'aire du triangle OIC puis déduis la distance de A_0 au plan (OIC).
 - Justifie que les plans (OIC) et (P) sont sécants et détermine les équations cartésiennes de leur droite d'intersection (D).
 - Justifie que (Δ) et (D) sont non coplanaires.

Problème 2 :

L'ouverture circulaire faite dans la face ABFE pour la projection des films est l'image par une transformation s du cercle passant par le point O et par deux autres points J et K dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$(E): z^2 - (2\alpha + i)z + \alpha^2 + i\alpha + 2 = 0$, où α est un nombre complexe.

O est l'origine d'un repère orthonormé du plan complexe associé à la face ABFE.

- Vérifie que $\alpha + 2i$ est une solution de (E)
 - Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
 - Détermine α pour que OJK soit un triangle isocèle et rectangle en O
- En réalité les points J et K sont d'affixes

respectives $-\frac{3}{2}(1+i)$ et $\frac{3}{2}(-1+i)$ et s est la similitude plane directe qui transforme J en K et K en O.

- Détermine l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de s
- Détermine une équation cartésienne de l'ouverture circulaire pour la projection des films.

Problème 3 :

La courbe (Γ) est celle de la fonction f définie

par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}$ et (Γ') est la courbe de la fonction k^{-1} réciproque d'une application k .

Partie A :

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$$

- Etudie les variations de g .
 - Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $0,78 < \alpha < 0,79$
 - Déduis-en le signe de $g(x)$.
 - Démontre que : $f(\alpha) = \frac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}$ et que $-1,13 < f(\alpha) < -1,10$
- Démontre que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique β telle que : $0,4 < \beta < 0,5$.
 - Etudie le sens de variation de g' . Que représente le point $I_1(0; 1)$ pour la courbe (C_g)
 - Justifie que $\forall x \in [0,4; 0,5] ; |g'(x)| \leq \frac{3}{2}$ puis que : $|g(x) - \beta| \leq \frac{3}{2}|x - \beta|$.

Partie B :

- Etudie le sens de variation de f (on exprimera $f'(x)$ en fonction de $g(x)$)
 - Dresse le tableau de variation de f
 - Etudie les branches infinies de (Γ)
- Soit k l'application de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$ définie par $k(x) = f(x)$.
 - Justifie que k admet une application réciproque k^{-1} et précise son ensemble de définition J .

b) Étudie la dérivabilité de k^{-1} sur J

Justifie que le point $A_1(-\sqrt{3}-2; -\sqrt{3})$ est un point de (Γ') puis détermine une équation cartésienne de la tangente (T) à (Γ') au point A_1

Trace avec soins les courbes qui ont servi à la décoration de la façade BCGF de la salle de spectacle dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

SITUATION D'EVALUATION N° 03

cor. p: 399

Contexte : Prêt-à-porter

AFANI est un élève de la classe de terminale qui a passé plusieurs fois le bac sans succès. Il décide d'ouvrir une grande boutique de prêt à porter dans la ville de Parakou. Le financement trouvé, il s'approche de son ancien prof de maths M. Sylah pour des conseils. Le M. Sylah lui tend une feuille sur laquelle est écrit: «construis un bâtiment dallé sur lequel on posera une grande plaque publicitaire qui mettra en valeur les vêtements à vendre. Un lampadaire sera aussi nécessaire pour éclairer la plaque les nuits.

Dans l'espace $\mathcal{E}$ où sera implanté la boutique, on muni $\mathcal{E}$ à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; unité 4 mètres. La dalle de la boutique est contenu dans le plan

$$(\mathcal{Q}) \text{ défini par : } \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -4\alpha - 2\beta - 7 \end{cases}; (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ et la}$$

plaque publicitaire est contenu dans l'ensemble (S) des points $M(x; y; z)$ de $\mathcal{E}$ tels que :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MA} \cdot \overline{MB} - 2\overline{MA} \cdot \overline{MC} = 6 \text{ où } A, B \text{ et } C \text{ sont des points fixes de } \mathcal{E} \text{ de coordonnées respectives } (-1; -2; 1); (5; 0; 1) \text{ et } (1; 2; -1). \text{ Le lampadaire sera placé un point } I \text{ milieu du segment } [AB].$$

Il est aussi écrit à AFANI de clôturer le bâtiment par un fil barbelé et de s'arranger pour que les prix unitaires des vêtements n'excèdent pas le montant X .

AFANI ayant pris connaissance des informations veut d'abord déterminer la distance $\bar{d}$ qui sépare le lampadaire de la droite $(\Delta) = (\mathcal{Q}) \cap (S)$; ensuite la longueur du fil barbelé; enfin le montant X .

Tâche : Tu es élève de la classe de terminale scientifique; tu es alors invité(e) à trouver les trois préoccupations de AFANI en répondant aux problèmes suivants :

Problème 1 :

1°) Démontre que $M \in (S) \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{IC} = -3$

2°) a- Détermine les coordonnées de I .

b- Détermine une équation cartésienne de (S) et donne sa nature.

3°) a- Justifie que le point A appartient au plan $(\mathcal{Q})$.
Dédus-en un repère de $(\mathcal{Q})$

b- Prouve que le vecteur $\vec{n}(4; 2; 1)$ est un vecteur normal à $(\mathcal{Q})$.

4°) a- Démontre que $(S) \perp (\mathcal{Q})$

b- Calcule $d(I; (S))$ et $d(I; (Q))$

c- Dédus-en la distance $\bar{d}$ en mètre qui sépare le lampadaire à la droite (Δ)

Problème 2 :

Dans le plan du sol assimilable à un plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité 30 mètres le fil barbelé nécessaire est égale au périmètre du cercle (C') image du cercle (C) par une application f . (C) contient les points E, F et G d'affixes respectives $z_E; z_F$ et z_G solutions d'équation

$$(E') : g(z) = 0 \text{ où}$$

$$g(z) = z^3 + (1-3i)z^2 - (3+8i)z - 3-11i; \forall z \in \mathbb{C}$$

5°) a- Calcule $(1+\sqrt{3}+2i)^2$

b- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E) : z^2 + (4+i-i\sqrt{3})z + 3 + \sqrt{3} + i(3-\sqrt{3}) = 0$$

6°) a- Démontre qu'une solution de (E) est un zéro du polynôme $g(z)$.

b- Dédus-en la résolution de l'équation (E')

7°) En réalité $z_E = -1-i; z_F = -2+i$ et $z_G = 2+3i$ et f est l'application du plan complexe dans lui-même qu'à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' \text{ telle que : } 2\left(z - \frac{1}{3}\right) = (1+i)\left(z' - \frac{1}{3}\right)$$

a- Place les points $E; F$ et G dans le plan.

b- Démontre que f est une similitude plane directe dont tu préciseras les éléments caractéristiques.

c- Détermine la nature du triangle EFG .

d- Donne une équation cartésienne du cercle (C')

8°) Dédus-en la longueur du fil barbelé (Tu prendras $\pi = 3,14$)

Problème 3 :

Le prix unitaire maximum des vêtements est

$$X = 5000 \times (\varphi^{-1})'\left(\frac{2}{5}\right) \text{ où } \varphi^{-1} \text{ est la bijection réciproque}$$

de l'application :

$$\varphi: [2; +\infty[\rightarrow f([2; +\infty[)$$

$$x \mapsto \varphi(x) = f(x)$$

avec f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} - x - 1 & ; \text{si } x \in]-\infty; -1[\\ f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 + 1} & ; \text{si } x \in [-1; +\infty[\end{cases}$$

Partie A :

On considère la fonction u définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = x^3 + 3x - 14$$

9°) a- Etudie les variations de u

10°) a- Démontre que l'équation $u(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique dont tu préciseras la valeur.

b- Détermine le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

11°) a- Etudie la continuité de f en -1 et en tout point de son ensemble de définition.

b- Etudie la dérivabilité de f en -1 et en tout point de son ensemble de définition. Donne une interprétation géométrique des résultats.

12°) Etudies les variations de f puis dresse son tableau des variations

13°) Etudie les branches infinies de (C) puis construis (C)

14°) a- Démontre que φ admet effectivement une

bijection réciproque φ^{-1} .

b- Calcule $f(3)$ puis déduis-en la valeur de

$$\left(\varphi^{-1}\right)\left(\frac{2}{5}\right).$$

c- Dresse le tableau de variation de φ^{-1} .

d- Précise l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1}

6°) Soit (C') la courbe de φ^{-1} dans le même repère que (C) .

a- Détermine une équation cartésienne de la

tangente à (C') au point d'abscisse $\frac{2}{5}$. Construis

(C') dans le même repère (C) .

b- Calcule le montant X .

SITUATION D'EVALUATION N° 04

cor. p: 404

Contexte : Une excursion à Nati

Pour la distraction de ses élèves, le collège Catholique « Les Hibiscus » second cycle, organise pour ses élèves de terminales une excursion sur un site touristique à Nati. Le comité d'organisation dont fait parti votre professeur de mathématiques soumet à votre

analyse quelques informations. Outre la description de l'itinéraire à suivre, le comité informe que, ce site identifié par un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dispose d'un bar dancing de forme tétraédrique $ABCD$ entièrement sécurisé par une clôture circulaire $(\mathcal{C})$ circonscrit à un triangle IJK dont les points I, J et K matérialisent trois entrées principales du bar, puis un poste de sécurité positionné en un point L tel que le quadrilatère $IOKL$ soit un parallélogramme direct. Dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les points I, J et K ont pour affixes respectives $z_0 = \beta i$; $z_1 = \alpha + \beta i$ et $z_2 = \alpha - \beta i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$ où z_0, z_1 et z_2 sont les racines du polynôme complexe :

$$P(z) = z^3 - 2(2+i)z^2 + 8(1+i)z - 16i.$$

Le censeur du collège, très intéressé par cette description, désire en savoir plus sur le bar dancing et l'itinéraire de l'excursion et sollicite votre aide.

Tâche : Tu es invité(e) à aider le censeur à découvrir les aspects mathématiques de cette description en résolvant les problèmes suivants :

Problème 1 :

1°) Détermine le nombre réel β .

2°) a- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

b- Déduis-en les affixes des trois entrées du bar dancing.

3°) a- Donne une mesure en radian de l'angle orienté

$$(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JK})$$

b- Précise la nature du triangle IJK .

c- Détermine une équation cartésienne de la clôture $(\mathcal{C})$ du bar dancing.

4°) a- Détermine l'abscisse de la position L du poste de sécurité.

b- Le poste de sécurité est-il à l'intérieur ou à l'extérieur de la clôture ?

Problème 2 :

La terrasse du bar dancing est décorée par deux pots de fleurs placés en deux points P et Q tels que $CADP$ et $DABQ$ soient des parallélogrammes. Elle est éclairée par une lampe veilleuse située en un point G d'une tige (Δ) telle que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BG}$.

5°) Démontre que G est le barycentre des points $(A, -1)$; $(B, 1)$; $(C, 1)$ et $(D, 1)$.

6°) Démontre que les droites (BP) et (CQ) sont sécantes.

$$7^\circ) \text{ En réalité, on a : } A\left(1; 0; \frac{1}{2}\right); B\left(0; \frac{2}{3}; 1\right);$$

$$C\left(1; \frac{1}{3}; 1\right) \text{ et } D(1; 1; 0). (\Delta) = (R) \cap (R') \text{ où } (R) \text{ est le}$$

plan déterminé par les droites (BP) et (CQ) et (R')

l'ensemble des points M de l'espace tel que :

$$(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot (-3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0$$

- Détermine les coordonnées des points G, P et Q.
- Détermine une équation cartésienne de (R).
- Justifie que (R') est un plan dont tu donneras une équation cartésienne.
- Déduis-en une représentation paramétrique de la tige (Δ)
- Calcule la distance de chacun des pots de fleurs à la tige (Δ)

Problème 3 :

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm), le dessin de l'itinéraire représenté sur du papier est la portion de la courbe représentative (Γ) de la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} & ; si \ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3-2\ln x) + 1 & ; si \ x > 0 \end{cases}$$

8°) a- Prouve que l'ensemble de définition de f est $D = [-1; +\infty[$ et calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- Etudie la continuité de f en 0.
 - Etudie la dérivabilité de f en 0 et interprète géométriquement le résultat obtenu.
- 9°) Soit f_1 la restriction de f à $[-1; 0]$

- Démontre que f_1 est dérivable en -1 et réalise une bijection de $[-1; 0]$ sur un intervalle J à préciser.
- Soit u cette bijection et u^{-1} sa réciproque. Détermine u^{-1} et calcule $(u^{-1})'(x)$ tout en précisant son ensemble de dérivabilité.
- Détermine la primitive de u sur $]-1; 0]$ qui prend la valeur 5 pour $x = \frac{1}{2}$.

10°) Soit f_2 la restriction de f à $]0; +\infty[$ et f_2' sa dérivée.

- Démontre que, $\forall x \in]0; +\infty[$,
 $f_2'(x) = 2x(1 - \ln x)$
- Etudie le signe de $f_2'(x)$
- Dresse le tableau de variation de f sur $[-1; +\infty[$.

11°) a- Prouve que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]4; +\infty[$ puis donne une valeur approchée à 0,1 près de α .

b- Fais le dessin de l'itinéraire dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

SITUATION D'EVALUATION N° 05

cor. p. 408

(ACADEMIA et BOUSSOLE de Parakou)

Contexte : Lancement de projectiles.

Des projectiles sont lancés sur un site aménagé à cet effet. Gankou, le chef du site, supervise les opérations. Ceux qui lancent les projectiles occupent respectivement les positions $A_0, A_1, \dots, A_n$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct

$(O; \vec{u}, \vec{v})$, tels que $\text{mes}(\vec{u}; \vec{OA}_n) = \alpha_n$. Le point A_0 est défini par $OA_0 = 2$ et

$$\text{mes}(\vec{u}; \vec{OA}_0) = \frac{5\pi}{6} \text{ et } a_0 \text{ est l'affixe du point } A_0$$

Gankou veut déterminer les lignes trigonométriques de certains des angles α_n . Il est en outre impressionné par les trajectoires de deux projectiles et se préoccupe de leurs représentations.

Tâche : Tu vas aider Gankou dans ses préoccupations en résolvant les problèmes suivants :

Problème 1 :

- Ecris a_0^{2012} sous forme algébrique
- a) Détermine l'affixe a_1 du point A_1 , image du point A_0 par la similitude plane directe s de centre O , de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- b) Précise la nature du triangle OA_0A_1
- c) Détermine une équation cartésienne de l'image (C') par s du cercle circonscrit au triangle OA_0A_1

Problème 2 :

Gankou veut connaître les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$. Il considère pour cela le polynôme

$$P(z) = z^5 + i$$

- a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) : $P(z) = 0$. Tu donneras les solutions sous forme exponentielle.
- b) Justifie que

$$P(z) = (z+i)(z^4 - iz^3 - z^2 + iz + 1)$$

4- Soit l'équation (E) : $z^4 - iz^3 - z^2 + iz + 1 = 0$

a) Justifie que (E) est équivalente à l'équation (E') :

$$z^2 + \frac{1}{z^2} - \left(z - \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

b) On pose $u = z - \frac{1}{z}$. Démontre que z est solution de

(E') si et seulement si u est solution de l'équation

$$(2) : u^2 - iu + 1 = 0$$

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (2), puis déduis les solutions de l'équation (E)

d) Retrouve alors la forme algébrique de chacune des solutions de l'équation (1)

e) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{10}, \sin \frac{\pi}{10},$

$$\cos \frac{3\pi}{10}, \sin \frac{3\pi}{10}, \cos \frac{\pi}{5}, \cos \frac{\pi}{5}, \sin \frac{\pi}{5}, \cos \frac{2\pi}{5} \text{ et } \sin \frac{2\pi}{5}$$

Problème 3 :

L'une des trajectoires est la courbe (Γ) de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2}, & \text{si } x < 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \\ f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A :

5- A l'aide du développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

a) Étudie la continuité de f en 0

b) Étudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète les résultats obtenus

6- Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{-x^2 - 2x}{1+x} + 2\ln(1+x)$$

a) Étudie le sens de variation de h

b) Calcule $h(0)$, puis déduis-en le signe de $h(x)$

7- a) Détermine la dérivée f' de f (tu prouveras que :

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x^3} \text{ pour } x > 0).$$

b) Donne le sens de variation et le tableau de variation de f .

c) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $-1.5 < \alpha < -1$

d) Démontre que la droite (D) : $y = x + \frac{3}{2}$ est asymptote à (Γ) en $-\infty$.

Partie B :

Soit g l'application de $\mathbb{R}_+$ vers $f(\mathbb{R}_+)$ définie par $g(x) = f(x)$

8- a) Démontre que g est bijective.

La seconde trajectoire (Γ') est la courbe de g^{-1} , réciproque de g .

b) Précise l'ensemble de définition J et l'ensemble de dérivabilité E de g^{-1}

c) Démontre que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique a telle que $0,35 < a < 0,4$

d) Calcule $(g^{-1})'(a)$ et l'écrire comme quotient de polynôme en a

9- Utilise toutes les informations utiles pour construire avec soin les trajectoires des deux projectiles particuliers dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

SITUATION D'EVALUATION N° 06

cor. p: 413

Contexte : Centre de loisirs d'enfant

Dans un centre de loisir pour enfant, est érigé un bâtiment dont la toiture à la forme d'un tétraèdre ABCD ayant une ouverture en point E de l'une de ses faces pour aérer le bâtiment. Des projecteurs sont disposés suivant un ensemble (Δ) des points M de l'espace tels que :

$$(2\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC}) \wedge (\overline{MB} + \overline{ME}) = \vec{0}.$$

Dotou a accompagné son fils dans ce centre pour jouer. Il est impressionné par trois choses :

- la distance du sommet A à (Δ) ;
- l'aire de la piste de jeux de forme circulaire dont la bordure est un ensemble (C) de points dans le plan complexe ;
- la trajectoire suivie par l'engin de son fils.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct

(O; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), unité 10 mètres, on donne A(-2;0;1),

B(0;1;1), C(2;0;0), D(a;b;4) et E(-2;3;5) où a et b sont des nombres réels.

Tâche : Tu vas aider Dotou en résolvant les problèmes suivants

Problème 1 :

1°) a- Détermine les coordonnées du point K milieu du segment $[BE]$.

b- Justifie que (Δ) est une droite dont tu présenteras un repère.

c- Donne les équations cartésienne de (Δ)

2°) a- Justifie que les points A, B et C définissent un plan (P) dont tu donneras une équation cartésienne.

b- Détermine les réels a et b, pour que C soit le projeté orthogonal de D sur le plan (P).

c- Calcule alors le volume du tétraèdre ABCD.

3°) a- Justifie que (Δ) est strictement parallèle à (P).

b- Calcule la distance de A à (Δ)

Problème 2 :

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, unité 4 mètres, la bordure circulaire (C) passe par trois points dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$(E): z^3 + (\sqrt{3} - 2i)z^2 + (-5 + i\sqrt{3})z - 8i = 0$$

4°) Calcule $(3\sqrt{3} - i)^2$ et $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})^2$

5°) a- Démontre que l'équation (E) admet dans $\mathbb{C}$ une solution imaginaire pure z_0 que tu préciseras.

b- * Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). Tu noteras z_1 et z_2 les autres solutions telles que : $\text{Re}(z_2) < 0$.

* Donne une forme exponentielle de z_2 .

c- Détermine sous forme exponentielle et sous algébrique les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation :

$$z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$$

d- Déduis-en les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et

$$\sin \frac{5\pi}{12}$$

6°) En réalité (C) passe par les points M_0, M_1 et M_2 d'affixe respectives $\alpha = -i$; $\beta = \sqrt{3} + i$ et

$$\gamma = -2\sqrt{3} + 2i$$

a- Calcule le module et un argument du quotient

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$

b- Déduis-en la nature du triangle $M_0M_1M_2$.

c- Donne une équation cartésienne de (C).

7°) Calcule en mètre carré, l'aire de la piste du jeu.

Problème 3 :

La trajectoire tracée par l'engin du fils de Dotou est assimilable à la portion de la courbe $(\mathcal{C})$ dans le

repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ où $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & , \text{si } x < 0 \\ 1 + \ln(x+1) & , \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

8°) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$

$$\text{par : } g(x) = (x-1)e^x + 1$$

a- Etudie les variations de g et dresse son tableau de variations.

b- Déduis-en le signe de $g(x)$.

9°) Détermine l'ensemble de définition de f

10°) a- Donne le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^x$

b- Etudie la continuité de f en 0.

c- Etudie la dérivabilité de f en 0 puis déduis-en une interprétation graphique.

11°) Etudie les variations de f .

12°) a- Démontre que $\forall x \in [2; 3], 2 \leq f(x) \leq 3$ et que

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$$

b- Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[2; 3]$ et que $e^\alpha = \alpha e + e$

c- Démontre que $\forall x \in [2; 3], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$

13°) Etudie les branches infinies à $(\mathcal{C})$

14°) Trace dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, la trajectoire suivie par l'engin du fils de Dotou. (Tu prendras pour unité graphique 2cm)

SITUATION D'EVALUATION N° 07

cor. p: 417

Contexte : confection d'une tenue royale.

Après son admission à la retraite, Monsieur Koto, précédemment professeur de mathématiques, a été désigné pour être le nouveau chef de sa collectivité.

Comme il est de coutume, le nouveau chef doit se faire confectionner une tenue spéciale pour le jour de l'intronisation. C'est ainsi que Koto a décidé de se faire confectionner une tenue qui reflète sa profession passée.

Afin de garder secrètes les spécialités de la tenue, Koto confie à son fils Koffi, élève en terminale D, des informations codées à décrypter au couturier chargé de la confection de la tenue. C'est ainsi qu'il a été retenu que le couturier devra disposer de deux types T_1 et T_2 de perles. Les perles du type T_1 seront disposés aux sommets d'une figure géométrique de l'espace et celle du

type T_2 sur une ligne courbe (Γ) . Le nombre a de perles du types T_1 et le nombre b de perles du types T_2 vérifient la relation : $b = 6a^4 + 3a^2 + 4a + 1$ avec $a \geq 2$. Par ailleurs Koffi a été informé que a est la plus petite valeurs de l'entier naturel n tel que le nombre complexe

$(1 + e^{i\frac{\pi}{2}})^n$ soit imaginaire pur. Une fois chez le couturier,

Koffi veut lui expliquer le travail à faire.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Koffi dans sa mission en résolvant les trois problème suivants.

Problème 1 :

1°) a- Justifie que $1 + e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(2 \cos \frac{\pi}{10}\right) e^{i\frac{\pi}{10}}$.

b- Dédus-en le module et un argument de $1 + e^{i\frac{\pi}{2}}$.

c- Dédus-en une forme trigonométrique de

$$\left(1 + e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n$$

2°) a- Justifie que le nombre de perles du types T_1 est 5.

b- Calcule le nombre de perles du type T_2 .

Problème 2 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la figure géométrique est assimilable à un solide SABCD où $A(0; 1; -2)$, $B(-1; 0; -1)$, $C(0; -5; -5)$, $D(1; -4; -6)$ et S le point dont le triplet $(x; y; z)$ de coordonnées est une solution du système

$$(\Sigma) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 4x + 9y + \alpha z = 2\beta \end{cases} \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux nombres}$$

réels qu'on peut manipuler pour avoir la nature et la hauteur du solide voulu.

3°) a- Démontre que ABCD est un rectangle.

b- Détermine une équation cartésienne du plan

(ABCD)

4°) a- Détermine suivant les valeurs des réels α et β les triplets $(x; y; z)$ solution du système (Σ) .

b- Dédus-en suivant les valeurs des réels α et β la

nature du solide SABCD.

5°) Le point S finalement retenu est celui correspondant aux valeurs $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

a- Précise les coordonnées de S puis la nature du solide SABCD.

b- Calcule la hauteur de ce solide.

Problème 3 :

La ligne (Γ) est obtenue à l'aide de la courbe (C_f) et (C'') dans le plan muni d'un repère orthonormé direct

$(O; \vec{i}, \vec{j})$; la courbe (C_f) est la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{-x}}{x+1}, & \text{si } x \leq 0 \\ x(\ln x)^2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et (C'') la courbe définie par

6°) Détermine le domaine de définition D_f de f

7°) a- Justifie que f est continue en 0.

b- Etudie la dérivabilité f en 0.

c- Donne une interprétation graphique des résultats

8°) a- Calcule la dérivé f' de f sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ sur $]0; +\infty[$.

b- Etudie le sens de variation de f .

c- Dresse le tableau de variation de f .

d- Donne l'équation de la tangente (T) en $x_0 = e$

9°) a- Etudie les branches infinie de (C_f) .

b- Donne l'allure de (C_f) .

10°) on considère l'application g définie par :

$$g :]-1; 0[\rightarrow]0; +\infty[$$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

a- Justifie que g admet une application réciproque g^{-1} .

b- Trace dans le même repère que (C_f) , la courbe (C'') de g^{-1} .

11°) soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{1}{2} x^2 (\ln x - 1) \ln x$$

a- Calcule $h'(x)$ et déduis une primitive de f .

b- Calcule l'aire $A(\lambda)$ de la portion du plan comprise entre (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ ($0 < \lambda < 1$); $x = 1$

c- Calcule $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda)$.

SITUATION D'EVALUATION N° 08

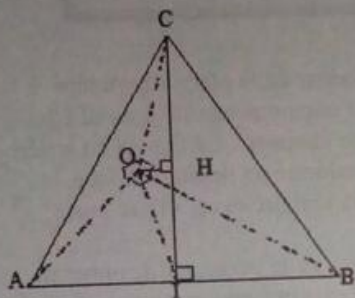
cor. p: 421

(Examen blanc : collectif des privés de Parakou 2012)

Contexte : Occupation de Ifèmi lors des mouvements de grèves des enseignants

Pendant les périodes des mouvements de grèves qui ont secoué l'école béninoise, Ifèmi un élève en classe de terminale D, consacre une partie de son temps pour

aider son père Basmath dans son jardin potager où deux types de légumes sont cultivés pour la vente et leurs besoins personnels. En sa présence, les dernières pluies qui se sont abattues sur les localités de Parakou, ont emporté le toit de leur case ayant la forme d'un tétraèdre OABC tel que OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O et $OA=OB=OC$. Basmath fait appel à un charpentier qui leur propose un toit plus solide dont le plan est celui du dessin ci-dessous :



I est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. H celui de la hauteur issue de O dans le triangle OIC. Par ailleurs, Basmath souhaite que :

- Au point D barycentre des points pondérés (A, 1) (B, 1) (C, 1) et (O, 3) soit suspendue une tige métallique pour la lanterne d'éclairage de la case.
- Au point P d'intersection du plan (ABC) avec l'ensemble (Δ) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{HM}$. Soit fixée une plaque métallique PQRS en forme de parallélogramme, portant l'inscription « Ici en vente des légumes ».
- Pour mettre en valeur les connaissances qu'il a acquises, Ifemi décide d'aider le charpentier à connaître les positions exactes des points P, Q, R et S de la plaque métallique et de trouver les aires des surfaces réservées aux différents légumes cultivés par son papa.

Tâche : Pour aider Ifemi, tu es invité(e) à mettre en valeur quelques unes de tes connaissances en mathématiques en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1 :

1°) a- Justifie que le triangle ABC est équilatéral.

b- Justifie que le quadruplet

$$\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ avec } \vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}, \vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}, \vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \text{ est}$$

un repère orthonormé direct.

2°) a- Détermine dans le repère $\mathcal{R}$, les coordonnées des points A, B, C et I.

b- Ecris une représentation paramétrique de la droite (IC). Dédus en que le point H a pour coordonnées

$$\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

3°) a- Vérifie que D est le milieu du segment [OH].

b- Démontre que (Δ) est une droite dont tu préciseras une représentation paramétrique.

c- Détermine une équation cartésienne du plan (ABC). Dédus en que les coordonnées du point P.

Problème 2 :

Pour mieux apprécier la forme de la plaque métallique et de déterminer la position exacte de son sommet R. Ifemi considère un repère orthonormé direct $(P; \vec{u}, \vec{v})$ du plan (ABC). Dans ce repère les points Q et S ont pour affixes respectives $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $2i$.

4°) a- Démontre que $2i$ est une solution de l'équation (E) d'inconnue z définie par :

$$(E): iz^3 + 2z^2 - 2z + 4i = 0$$

b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

5°) a- Détermine la distance PQ puis donne une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{PQ})$.

b- Place avec soin les points P, Q, R et S dans le plan.

6°) a- Ecris une forme exponentielle du nombre complexe $Z_1 = \frac{2i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$

b- Dédus-en la nature du triangle PQS.

c- Justifie que le quadrilatère PQRS est un losange.

d- Détermine sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique l'afixe du sommet R de la plaque métallique. Dédus-en les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{8}$ et

$$\sin \frac{5\pi}{8}.$$

Problème 3 :

Deux types A et B de légumes sont cultivés sur la surface de plan déterminées par des portions de courbes de fonctions dont l'une est la fonction numérique

$$f \text{ définie par : } \begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & , \text{ si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}} & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \text{ et}$$

l'autre

$$g: [0; +\infty[\rightarrow f([0; +\infty[)$$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A :

7°) a- Justifie que l'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R}$

b- Calcule les limites de f aux bornes de D .

8°) a- Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{2}{x} \left(\frac{e^{-2x} - 1}{-2x} \right)}$$

b- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0. Précise les demi tangentes éventuelles de la courbe (C) au point d'abscisse 0.

9°) a- Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

b- Détermine les branches infinies de (C) puis construis avec soins (C).

Partie B :

En réalité le légume A est cultivé sur la surface délimitée par la courbe (C') de la bijection réciproque g^{-1} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x = \frac{1}{e}$.

Le légume B est cultivé sur une surface S_α définie par :

$$S_\alpha : \begin{cases} \alpha \leq x \leq \ln 2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}, \text{ où } \alpha \text{ est un réel tel que :}$$

$$0 < \alpha < \ln 2.$$

Ifèmi estime que l'arrosage de ces deux surfaces nécessite en mètre cubes une quantité d'eau égale au volume $V(\alpha)$ du solide obtenu par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine S_α .

10°) a- Justifie que g admet une bijection réciproque g^{-1} .

b- Calcule $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in f([0; +\infty[)$

c- Construis la courbe (C') de g^{-1} dans le même repère que (C).

11°) Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f(x) = f'(x) \left[-1 + \frac{1}{2[1-f(x)]} + \frac{1}{2[1+f(x)]} \right]$$

12°) a- Détermine les aires A et $A(\alpha)$ des surfaces respectives réservées aux légumes A et B.

b- Calcule le volume $V(\alpha)$ d'eau nécessaire à l'arrosage de ces deux surfaces.

c- Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A(\alpha)$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} V(\alpha)$. Que représentent ces limites ?

SITUATION D'EVALUATION N° 09

cor. p: 426

Contexte : le brodeur

KAMAL, un brodeur de la place a reçu une commande de broderie d'une personnalité spéciale. La commande reçue, est une chemise. En face et en arrière de la chemise sera confectionné un dessin. En face, le dessin aura une forme triangulaire et en arrière, une portion d'une courbe.

Pour tout le travail, cette personnalité aimerait payé un montant M où M exprimé en centaine de milliers

FCFA est la valeur du nombre réel $G\left(\frac{4}{7}\right)$ avec G une primitive sur un intervalle E de la fonction g définie

$$\text{par : } g(x) = \frac{1}{x\sqrt{-15x^2 + 16x - 4}} \text{ qui s'annule en } \frac{1}{2}.$$

On donne pour cela la fonction φ définie sur l'intervalle

$$I = [0; \pi] \text{ par } \varphi(x) = \frac{2}{4 + \cos x}$$

Avant de commencer le travail, KAMAL aimerait d'abord connaître le montant M , ensuite la nature du triangle à réaliser en face enfin la forme de la portion de courbe à dessiner derrière la chemise.

Tâche : Tu es invité(e) à aider KAMAL en résolvant les trois problèmes.

Problème 1 :

1°) Démontre que φ est une bijection de I sur un intervalle L à préciser.

On désigne par φ^{-1} l'application réciproque de φ .

2°) a- Etudie la dérivabilité de φ^{-1} sur J et précise son ensemble de dérivabilité E .

b- Calcule $(\varphi^{-1})'(x)$ pour tout $x \in E$.

c- Détermine la fonction G

3°) Dédus alors le montant M .

Problème 2 :

Le dessin à réaliser en face de la chemise est un triangle dont les sommets sont les points B' , D et C' avec B' et C' les images respectives des points B et C par une application j .

On donne un polynôme complexe

$P(z) = z^4 + (2i - 9)z^3 + (28 - 18i)z^2 + (56i - 20)z - 40i$
et on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D . On suppose que le plan

$\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et

$f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M(z) \mapsto M'(z) \text{ avec } z' = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2i}$$

4°) a-Développe et réduis $u(x) = (x + 2)(9x^2 - 20)$ et $v(x) = (x - 1)(2x^2 - 16x + 40)$

b- Démontre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 et une solution réelle z_1 .

c- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. (Tu noteras z_2 et z_4 les autres solutions qui ne sont ni imaginaires pures, ni réelles avec $\text{Im}(z_3) < 0$)

5°) a-Détermine l'affixes des points A, B, C et D sachant que : $z_A = z_0$; $z_B = z_3$; $z_C = z_4$ et $z_D = z_1$.

b-Place les points A, B et C et D dans le plan $\mathcal{P}$.

6°) a-Détermine l'affixes des points B' et C'.

b-Interprète géométriquement $|z'|$ et $\arg(z')$

c- Détermine l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

i) $|z'| = 1$

ii) $z' \in i\mathbb{R}^*$

d-Prouve que les points A, B' et C' sont alignés.

7°) Quelle est la nature du triangle à réaliser sur la face de la chemise?

Problème 3 :

Derrière la chemise, la broderie qu'il faut est la portion de la courbe (C_f) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm et f est la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{e^x}{2e^x - 1} & , \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - x + \sqrt{x} \ln x & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A :

8°) Etudie sur $\mathbb{R}$ le signe de : $4e^{2x} - 5e^x + 1$.

9°) Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2$

a- Détermine son domaine de définition D_φ et calcule ses limites aux bornes de D_φ .

b- Etudie ses variations et dresse son tableau de variations.

c- Déduis-en son signe.

Partie B :

10°) a- Détermine D_f le domaine de définition de f .

b- Calcule les limites de f aux bornes de D_f et étudie les branches infinies de (C_f) .

c- Etudie la position de (C_f) par rapport à l'asymptote non parallèle aux axes dans $]-\infty; 0]$

11°) a- Etudie la continuité de f en 0.

b- Etudie la dérivabilité de f en 0 et interprète graphiquement les résultats.

12°) a-Détermine la dérivée de f et dresse le tableau de variations de f .

b-Que peux-tu dire du point A(1; 0) pour la courbe (C_f)

13°) Construis dans le repère les asymptotes, la courbe (C_f) et les demi-tangentes. (Tu remarqueras que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$)

14°) Calcule en cm^2 l'aire du domaine délimité par (C_f) , la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = -\ln 8$ et $x = -\ln 4$.

SITUATION D'EVALUATION N° 10

cor. p: 431

Contexte : Réhabilitation d'une maternité

Les autorités municipales du village de Hozin envisagent de réhabiliter une maternité au profit des femmes.

Consulté pour réaliser le plan d'aménagement, l'urbaniste Gandonou a prévu :

- la réhabilitation de la salle pouvant abriter les femmes et leurs bébés.
- la construction d'un monument ayant la forme d'un tétraèdre.
- la construction des voies qui vont traverser le domaine.

Dans le devis, l'urbaniste Gandonou a évalué le montant des travaux, en million de Fcfa de la limite de la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^n h(x) dx$ où h est une fonction numérique solution de l'équation

différentielle (E): $4y'' + 4y' + y = 0$ et dont sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan admet en son point $M_0(0; 2)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La sage-femme ayant le devis a voulu avoir une idée sur le montant des travaux. Elle s'intéresse à la masse du monument et également sur la façon de tracer les voies qui vont traverser le domaine.

Tâche : Le travail à faire consiste à résoudre les problèmes qui suivent pour trouver de réponses aux préoccupations de la sage-femme.

Problème 1 :

1°) a- Résous l'équation (E).

b- Détermine la fonction h .

2°) En réalité $h(x) = (x+2)e^{\frac{-x}{2}}$

a- Calcule U_n en fonction de l'entier naturel n

b- Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 8$

c- Pour tout entier naturel n , détermine le signe de $U_{n+1} - U_n$.

d- Dédus-en que la suite (U_n) est convergente et calcule sa limite.

3°) A combien l'urbaniste a évalué les travaux dans le devis?

Problème 2 :

Pour faire le plan du monument en forme de tétraèdre OABC, l'urbaniste a muni l'espace d'un repère orthonormé direct (O, I, J, K) et considère les points $A(1, -2, 0)$, $B(-1, 0, 1)$ et $C(3, -2, -1)$, le plan $(\mathcal{P})$ et la droite $(\mathcal{D})$ définis respectivement par les systèmes suivants :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = t + t' - 2 \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2 \text{ et} \\ z = t \end{cases}$$

$(\mathcal{D}) : \frac{-2x+1}{4} = \frac{y+1}{3} = z$. L'unité de longueur est estimée à 2 mètres.

4°) a- Détermine un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $(\mathcal{P})$ et un vecteur directeur $\vec{u}$ à la droite $(\mathcal{D})$.

b- Démontre que la droite $(\mathcal{D})$ est strictement parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

c- Détermine une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$ contenant la droite $(\mathcal{D})$ et perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

5°) Détermine une représentation paramétrique de la droite $(\Delta) = (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{Q})$.

6°) a- Démontre que les points A, B et C déterminent effectivement un plan dont tu donneras une équation cartésienne.

b- Détermine le volume en m^3 du monument OABC.

c- Dédus-en la masse du monument sachant que le béton qui va servir à ériger le monument a une masse volumique de $1,5 \text{ tonne} / m^3$.

Problème 3 :

Les voies traversant le domaine est l'union des portions des courbes (C) et (C') représentant dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ convenablement choisi, les courbes respectivement des fonctions f et $-f$, où f est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln(-x) & , \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}} \right) & , \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

I- Soit g la fonction numérique définie sur

l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}$.

7°) Etudie les variations de g .

8°) Dédus-en que, pour tout réel x strictement positif, on a : $0 < g(x) < 1$.

II-

9°) a- Prouve que f est continue en 0.

b- Etudie la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0. Interprète graphiquement tes résultats

c- Démontre que, pour $x > 0$, on a :

$$f'(x) = 2 - g(x).$$

10°) Etudie les variations de f .

11°) a- Prouve que la courbe (C) admet une asymptote oblique (Δ) dont tu donneras une équation cartésienne.

b- Justifie que la droite (Δ) est tangente à la courbe (C) en un point I d'abscisse négative que tu détermineras.

c- Etudie la position de la courbe (C) par rapport à son asymptote (Δ) pour $x \geq 0$.

12°) Trace les voies qui vont traverser le domaine. (Prends 2 cm pour unité graphique)

III- Soit α un réel de l'intervalle $] -1; 0[$ et $A(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par les courbes (C), (C') et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = -1$.

13°) Calcule $\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx$

14°) Déduis-en, en cm^2 , l'aire $A(\alpha)$.

15°) Détermine la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers 0.

SITUATION D'EVALUATION N° 11
cor. p: 435

(Examen Blanc Banikoara-Gogounou-Kandi-Malanville 2012)

Texte : Projet de construction d'un château d'eau. Pour satisfaire ses populations, la mairie de la commune de ZOPA décide de mettre en place un réseau de distribution d'eau potable. Ainsi il est prévu la construction d'un château d'eau dont le réservoir est une sphère de centre Ω . La mairie indique à l'équipe technique chargée de ce projet, que dans l'espace muni du repère orthonormé direct (O, I, J, K) , les points $A(0; 0; 4)$, $B(2; -2; 0)$, $C(0; 2; 0)$ et $D(-4; 0; 0)$ appartiennent à cette sphère et de situer avec précision la position exacte du centre Ω de la sphère.

Ainsi l'équipe technique démarre les travaux de recherche en tenant compte des indications de la mairie.

Tâche : A l'aide des informations du texte ci-dessus et de tes connaissances en mathématiques, tu vas participer aux

divers travaux de l'équipe technique de la mairie de ZOPA, en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1 :

1) a- Démontre que le quadruplet de points (A, B, C, D) est un repère de l'espace, puis précise son sens.

b- Détermine les coordonnées (a, b, c) du point O dans ce nouveau repère (A, B, C, D) .

2) On désigne par (Γ) l'ensemble des points M de l'espace tels que $IM = JM$ et par L le milieu du segment $[IJ]$. Soit $N(x; y; z)$ un point de l'espace.

a- Démontre que $N \in (\Gamma)$ si et seulement si $x = y$.

b- Déduis-en que (Γ) est un plan dont tu précises une équation cartésienne.

c- Justifie que le point L est un point de (Γ) et que (IJ) est perpendiculaire à (Γ) .

On dit que (Γ) est un plan médiateur du segment $[IJ]$

3) On désigne par (P_1) , (P_2) et (P_3) les plans médiateurs respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$

a- Détermine une équation cartésienne de chacun des plans (P_1) , (P_2) et (P_3) .

b- Vérifie qu'un point M de l'espace est commun aux plans (P_1) , (P_2) et (P_3) lorsque M se trouve à égale distance des sommets du tétraèdre $ABCD$ inscrit dans la sphère du château d'eau.

c- Résous dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$(S) : \begin{cases} x - y - 2z + 2 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

d- Déduis-en que $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \{\Omega\}$, puis précise les coordonnées de centre Ω de la sphère du château d'eau.

Problème 2 :

Pour tester l'exactitude des résultats précédemment obtenus l'équipe technique doit, déterminer la valeur exacte du nombre réel :

$$\alpha = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos x)^3 (1 + \cos x)^4 dx$$

4) Soit x un nombre réel ;

a- Linéarise $\sin^6 x$.

b- Déduis-en une primitive de la fonction

$$u \mapsto \sin^6 x \text{ sur } [-1; 1]$$

c- Précise le signe de α puis calcule le réel α

Problème 3 :

La voie d'accès sur le domaine de construction du château sera réaménagée. Pour cela, on s'intéresse à son allure qui est la même que celle de la courbe représentative (C_f) de la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + x^2 + \frac{\ln(x+1)}{1+x}, & \text{si } x > 0 \\ f(x) = x + e^{m-x}, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Où m est un paramètre réel.

5) On considère la fonction h de $] -1; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et

$$\text{définie par : } h(x) = 2(x+1)^3 + 4x(x+1)^2 - 1$$

a- Etudie les variations de h .

b- Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution x_0 telle que $-\frac{5}{9} < x_0 < 0$

c- Déduis-en le signe de $h(x)$

d- Détermine un encadrement de x_0 par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.

6) On considère la fonction g de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et définie par :

$$g(x) = 2x(x+1)^2 + 1 - \ln(x+1)$$

a- Calcule les limites de g aux bornes de son ensemble de définition D_1 .

b- Démontre que pour tout x élément de D_1 , on a :

$$g'(x) = \frac{h(x)}{x+1}$$

c- Dresse le tableau des variations de g et déduis-en le signe de $g(x)$.

7) a- Détermine le domaine de définition D_2 de f .

b- Calcule les limites de f aux bornes de D_2 .

c- Pour quelle(s) valeur(s) de m , f est-elle continue en 0 ?

Dans la suite du problème 3 on suppose $m = 0$.

8) a- Etudie la dérivabilité de f en 0.

b- Calcule $f'(x)$ suivant les valeurs de x et démontre que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

c- Etudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

d- Dresse le tableau des variations de f .

9) a- Démontre que la représentation graphique (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$.

b- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 - x^2)$. Déduis-en la

position relative, au voisinage de $+\infty$, de la courbe (C_f) et de la parabole (P) d'équation :

$$y = 1 + x^2$$

10) Trace dans un repère orthonormé $(G, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, (P) , (C_f) et ses demi-tangentes en son point d'abscisse 0.

SITUATION D'EVALUATION N° 12

cor. p: 440

Contexte : La société TORESA

La société TORESA est une société industrielle spécialisée dans la fabrication de pointes en acier. Compte tenu de l'évolution inquiétante des ventes et les fluctuations observées au niveau du prix de l'acier, le directeur de la société s'est rapproché d'une équipe d'experts en gestion pour avoir des explications sur la situation actuelle de la société et sa situation à long terme.

Pour cette mission, les experts doivent occuper une salle dans laquelle l'entrepreneur BOSSA doit installer un brasseur d'air.

Dans le but de réussir sa prestation, BOSSA rapporte l'espace à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 3,5 dm dans lequel les points $A(1; 2; 1)$, $B(0; 1; 2)$ et $C(1; 1; 2)$ sont des sommets de cette salle. Il désigne par I , le barycentre des points pondérés $(A, -2)$; $(B, 1)$; $(C, 2)$ et considère dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \text{ et } \vec{v} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$$

BOSSA analyse la position du point autour duquel tournera le brasseur d'air et définit par (D) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace vérifiant :

$$\vec{u} \wedge \vec{AM} = \vec{v}$$

Le directeur de la société demande à son fils aîné BONA, élève en classe de terminale D sa participation active aux travaux de l'entrepreneur et des experts afin de lui fournir un rapport.

Tâche : Tu vas aider BONA dans la résolution des trois problèmes suivants

Problème 1 :

- 1- a) Justifie que le point B appartient à l'ensemble (D)
- b) Déduis-en l'ensemble (D) ainsi défini

- 2- Soit (Δ) la droite dirigée par le vecteur $\vec{u}$ et passant par B et (Δ') la droite de système d'équations

$$\text{cartésiennes : } x - 2 = 2y - 4 = \frac{z - 2}{3}.$$

Détermine une équation cartésienne du plan (P) contenant (Δ) et le point A.

- 3- Le plan de base de la salle est l'ensemble (Q) des points $M(x; y; z)$ de l'espace vérifiant : $(2\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC}) \cdot (\vec{AM} - \vec{BM}) = 0$. En définitif, l'entrepreneur retient que le brasseur d'air tournera autour du point V intersection du plan (P) et de la droite (Δ') .

- a) Justifie que dans la base $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;

$$\vec{OV} = \vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - \vec{k}.$$

- b) Démontre que l'ensemble (Q) est un plan dont on précisera un vecteur normal. Déduis une équation cartésienne du plan (Q).
- c) Détermine la taille minimale en mètre des experts qui courent le danger en accédant à cette salle au moment où le brasseur est en marche. (tu donneras le résultat à 10^{-2} près)

Problème 2 :

Une première étude des experts s'est intéressée aux ventes réalisées au cours de chaque année et a pu établir que ces ventes en tonne sont les termes de la suite

$$(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ de terme général } V_n = \int_0^1 2^x x^{n-1} dx \text{ indiquant}$$

les ventes au cours de la $n^{\text{ème}}$ année où x est un indice de vente.

- 4- a) Démontre que (V_n) est une suite décroissante.

- b) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n \geq 0$ et déduis que (V_n) est une suite convergente.

- 5- a) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*,$ on a : $V_{n+1} = \frac{2 - nV_n}{\ln 2}$

- b) Détermine les ventes en tonnes au cours de la première année c'est-à-dire V_1 et déduis celles de la deuxième année V_2 . (les résultats seront donnés à 10^{-2})

- c) Déduis-en de la question 5-a) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, V_{n-1} = \frac{2 - V_n \ln 2}{n-1}$$

- 6- a) Déduis-en des résultats précédents que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \frac{2}{n + \ln 2} \leq V_n \leq \frac{2}{n-1 + \ln 2}$$

- b) Déduis-en la limite de la suite (V_n)

- c) Les politiques actuelles de la société lui permettent-elles d'exister à long terme ? Justifie ta réponse.

Problème 3 :

Le prix moyen du kilogramme d'acier étant P, on désigne par x les variations des prix pratiqués autour du prix P. Une deuxième étude des experts a établi que le résultat (bénéfice ou perte) de la société est la fonction f de la variable x telle que :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{-x} + e^x - 2}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2(1 - \ln x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 7- a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$ et étudie la continuité de la fonction f en 0

- b) Prouve que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} + e^x - 2}{x^2} = 1$ en posant

$$X = e^x$$

- c) Etudie la dérivabilité de la fonction f en 0 et donne une interprétation graphique des résultats obtenus.

- 8- Les experts ont remarqué que l'étude des variations de la fonction f nécessite une étude préalable de la fonction u définie sur $] -\infty; 0[$ par :

$$u(x) = (x+1)e^{-x} - (x-1)e^x - 2.$$

- a) Etudie les variations de u et déduis le signe de $u(x)$

- b) Etudie les variations de la fonction f .

- c) Etudie les branches infinies à la courbe (C) représentative de la fonction f et construis la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm. On calculera $f(e)$

9- Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = \left[e^{-\frac{1}{2}}; 1 \right]$ et

g la fonction définie sur I par $g(x) = h(x) - x$

- a) Justifie que $\forall x \in I, 1 \leq h'(x) \leq \frac{3}{2}$ et déduis le

sens de variation de g sur I .

- b) Démontre que l'équation $h(x) = x$ admet dans I une solution unique α que tu préciseras.

- c) Démontre que $\forall x \in I$, on a : $|h(x) - 1| \leq \frac{3}{2}|x - 1|$

- d) Démontre que h admet une bijection réciproque h^{-1} et calcule $(h^{-1})'(1)$.

10- Déduis-en graphiquement les valeurs de x pour lesquelles la société réalise de bénéfice (Il s'agira de résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$).

SITUATION D'EVALUATION N° 13

cor. p: 446

(CS La BOUSOLE et CEG₁ de Parakou)

Contexte : La révolution verte

Babatundé a une ferme ayant la forme d'un rectangle qu'il a négligé. A l'heure où le gouvernement de son pays encourage les cultivateurs, il décide d'exploiter sa ferme pour la culture de deux sortes de riz dont le « NERIKA ».

Il réserve une portion de la ferme au « NERIKA » et désire en évaluer l'aire et la quantité du « NERIKA » qu'il peut espérer.

Pour le contrôle de qualité et la sécurité de sa ferme, Babatundé a sollicité les services d'une Agence qui a prescrit que le contrôle de qualité se fera en certains points A, B, C et D. L'agence a prévu aussi la construction d'une tour de contrôle et un piège qui sera placé en un point H. Cette agence n'a pas oublié de définir la distance de sécurité à ne pas franchir par toute personne suspecte.

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'unité 2 cm lié à la ferme les points A, B, C et D ont pour affixes

respectives : $1; e^{\frac{\pi}{3}}; \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-\sqrt{3}}{2}e^{\frac{5\pi}{6}}$

Babatundé veut bien identifier ces différents points et aussi l'emplacement du point où sera placé le piège

Tâche : Tu vas aider Babatundé en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1 :

- a) Donne la forme exponentielle de z_C et z_D

b) Place alors les points A, B, C et D

c) Démontre que le quadrilatère OACB est un losange

d) Démontre que les points A, C et D sont alignés.
- a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la similitude plane directe s de centre O qui transforme A en C

b) Soit F et G les images respectives par s des points D et C. Démontre que F, C et G sont alignés (On ne déterminera pas l'abbex de F et G)

c) Détermine l'abbex de F
- Soit h la similitude d'écriture complexe $z' = kz + i$ où $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

a) Détermine l'écriture complexe de $f = h \circ s$, en fonction de k .

b) Détermine k pour que f soit une similitude plane directe de rapport 2, puis précise les autres éléments caractéristiques de f .

Problème 2 :

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, la tour de contrôle émet des faisceaux lumineux situés dans l'ensemble (Q) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 5$, avec $A(1; 2; -4)$ et $\vec{u}(3; -2; 1)$.

Le point H où sera placé le piège est le point d'intersection de (Q) et (Δ) avec (Δ) l'ensemble des points M $((x; y; z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{OB}$ avec $B(4; 7; 2)$

La distance de sécurité est celle du point A à (Δ) .

- 4- a) Calcule en fonction de x, y et z les coordonnées de $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$

b) Déduis-en $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t + 6 \\ y = -2t - 2 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

- c) Déduis la nature de (Δ) et donne un repère de (Δ)
 d) Calcule la distance de sécurité.
 5- a) Calcule $\overrightarrow{AB.u}$
 b) Démontre que $M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB.u} = 0$
 c) Détermine alors l'ensemble (Q) , puis donne une équation cartésienne de (Q)
 d) Etudie la position relative de (Δ) et (Q)
 e) Localise par ses coordonnées le point où sera placé le piège

Problème 3 :

La ferme est assimilable à un plan muni du repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité graphique 3 dam.

La portion réservée à la production du « NERIKA » est limitée par l'axe (OI) , les droites d'équations $x = -4$; $x = 4$ et une frontière modélisée par la courbe représentative (Cg) d'une fonction g définie

de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$

La quantité de « NERIKA » en centaine de tonnes, qu'on peut espérer est la limite de la suite U

définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$ et

On pose : $I = [0; 1]$ et k l'application définie par:

$k: I \rightarrow k(I)$

$x \mapsto g(x) - x$

- a) Démontre que pour tout nombre réel x ,

$g'(x) = \frac{2^x \ln 2}{(1+2^x)^2}$ puis précise le sens de variation de g .

- b) Dresse le tableau de variation de g .
 c) Trace la courbe (Cg) (prend 1 cm pour un 1 dam)

- 6- a) Hachure, sur le dessin, la portion de la ferme réservée à la production du « NERIKA ».

b) Démontre que, sur le terrain, l'aire de cette portion de la ferme est de 36 dam².

- 7- a) Etudie le sens de variation de k .

b) Démontre que l'équation $k(x) = 0$ admet une solution unique α dans I .

- 8- a) Démontre que : $\forall x \in I, g(x) \in I$ et $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

b) Déduis-en que : $\forall x \in I, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

9. a) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$ et que $\forall n \in \mathbb{N},$

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

- b) Déduis-en par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},$

$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- c) Justifie que la suite U converge vers un réel à préciser.

- d) Donne, en fonction de α , la quantité de « NERIKA » que peut espérer Babatundé.

SITUATION D'EVALUATION N° 14
 cor. p: 449

(Examen Blanc LMB de Parakou)

Contexte : Le port de casque.

Une ONG d'une ville a lancé une opération spéciale dénommée « port du casque ». Cette ONG s'est fait aider par les agents de sécurité qui, dans leur opération obligent tout conducteur d'engin à deux roues à porter le casque afin d'éviter des dommages crâniens en cas d'accident.

Pour bien mener l'opération, les agents de sécurité se sont positionnées à un feu tricolore de cette ville. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le feu a été implanté à un carrefour matérialisé par le point d'intersection des trois plans (P) ; (Q) et (R) . Les plans (P) et (Q) ont pour équations respectives $(P): x + 2y + 2z = 0$ et

$(Q): x + y + z - 1 = 0$

Le plan (R) contient les points $H(2; 0; 1)$, $G(0; 6; 0)$ et $K(1; 3; 0)$.

Certains conducteurs ont pu détecter un itinéraire qui leur permet d'échapper au contrôle. Cet itinéraire est matérialisé par la trajectoire de la représentation graphique de l'une des solutions de l'équation différentielle $(E): y'' - y(\ln 2)^2 = 0$

Codjo, un élève en classe de 1^{re} D est l'un des conducteurs ayant découvert l'itinéraire de fuite au contrôle. Très émerveillé par la forme de l'itinéraire, une fois chez lui, il désire faire une représentation de cette trajectoire. Au cours du trajet, Codjo a découvert un

camp peuhl et désire évaluer l'aire de la zone occupée par ce camp.

Tâche : u es élève en classe de Tle D. Tu vas aider Codjo dans ses préoccupations à travers la résolution des trois problèmes suivants :

Problème 1 :

1- Résous par la méthode du pivot de Gauss le système

$$(S) : \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y = 6 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

2- a) Démontre que les points H, G et K définissent un unique plan.

b) Déduis-en une équation cartésienne du plan (R).

3- On considère la droite (Δ) définie par :

$$(\Delta) : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{-z-1}{3}$$

Détermine un repère de (Δ) et déduis-en que (Δ) est contenue dans le plan (P).

4- Détermine les coordonnées du point d'implantation du feu tricolore.

Problème 2 :

En réalité, les agents de sécurité ont placé un piège sur l'itinéraire de fuite. Si un conducteur emprunte cet itinéraire, la probabilité qu'il soit détecté par les agents de sécurité est $\frac{2}{3}$. Si le conducteur est détecté, la

probabilité qu'il tombe dans le piège est $\frac{3}{5}$ et s'il n'est pas détecté, la probabilité qu'il tombe dans le piège est $\frac{1}{10}$.

On désigne par D l'évènement : « le conducteur est détecté » et par T l'évènement « le conducteur tombe dans le piège ».

5- Calcule la probabilité de l'évènement T.

6- Sachant que le conducteur n'est pas tombé dans le piège, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas détecté ?

7- Pour défier les agents de sécurité, un conducteur λ décide passer 10 fois sur le tronçon de l'itinéraire de fuite de façon indépendante.

Calcule la probabilité pour qu'il :

- tombe dans le piège exactement 5 fois
- tombe dans le piège au plus 3 fois
- tombe dans le piège au moins une fois.

Problème 3 :

En réalité, la trajectoire de l'itinéraire de fuite est matérialisée dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, par la courbe intégrale de la solution ϕ de l'équation différentielle (E) qui passe par l'origine du repère et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x \ln 2$

Partie A :

8- Résous l'équation différentielle (E).

9- Détermine la solution ϕ .

Partie B :

L'itinéraire de fuite peut être matérialisé par la courbe de

la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \frac{1}{2}(2^x - 2^{-x})$.

10- a) Etudie la parité de u .

b) Etudie le sens de variation de u .

c) Dresse le tableau des variations de u .

d) Définie la bijection réciproque u^{-1} de u .

11- a) Etudie les branches infinies de la courbe (C) de u .

b) Trace (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé unité 2 cm. Tu traceras aussi la tangente (T) à (C) en 0.

c) L'aire du domaine occupé par le camp peuhl est celle du domaine plan limité par la courbe (C), la tangente (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Partie C :

Le camp peuhl est traversé par un sentier dont l'allure est celle de la courbe de la fonction, $f = gou$, où g est la

fonction définie par : $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$

12- a) Justifie que g est dérivable sur $\mathbb{R}$

b) Etudie la parité de g .

c) Etudie le sens de variation de g .

d) Etudie le signe de $g(x)$

13- a) Donne une interprétation géométrique de $g(1)$

b) Donne une valeur approchée de $g(1)$ par la méthode des trapèzes. On subdivisera l'intervalle $[0; 1]$ en 4 intervalles de même amplitude.

14- a) Justifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Calcule $f'(x)$ et $f(0)$

c) Déduis-en l'expression de $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

SITUATION D'EVALUATION N° 15

cor. p: 452

Texte : le jardin de Kassim

M. Kassim est un fonctionnaire natif de Parakou, à la retraite. Il acquiert une parcelle à Baka (commune de Parakou) où il cultive des tomates et oignons. Sur le terrain, les oignons et les tomates sont cultivés sur des portions de domaine différentes. Pour l'arrosage des cultures, il fait appel à un maçon pour lui construire sur le site une citerne d'eau d'une capacité de 36 000 litres.

Dans l'espace où se trouve ce terrain, on considère, un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 3 m et les points A, B, C et D sont les sommets de la citerne tels que $A(1;0;0)$, $B(0;1;1)$, $C(0;-1;-1)$ et $\overline{AD} = \overline{AB} \wedge \overline{AC}$. Une ouverture est créée sur la face (ABC) de la citerne qui peut être matérialisée par un point H appartenant à une droite (Δ) passant par D et est perpendiculaire au plan (ABC) .

Vue la forme de la citerne, Mr Kassim se demande comment pourrait-il savoir si le maçon a respecté son exigence ? Par ailleurs Mr Kassim veut déterminer les aires des portions des domaines où sont cultivés les oignons et les tomates mais éprouve d'énorme difficulté.

Tâche : Tu es invité(e) à aider M. Kassim à trouver solutions à ces préoccupations en résolvant les trois problèmes ci-dessous

Problème 1 :

1°) a- Vérifie que D a pour coordonnées : $(1;-2;2)$

b- Détermine un système d'équations paramétriques de la droite (Δ)

2°) a-Détermine une équation cartésienne du plan (ABC)

b- Détermine les coordonnées du point représentant l'ouverture sur la face (ABC)

c- Déduis-en la distance en mètre du point D au plan (ABC)

3°) a-Justifie que $ABCD$ est un tétraèdre

b- Calcule en litre la capacité de la citerne

4°) Le maçon a-t-il respecté l'exigence de M. Kassim ? justifie ta réponse.

Problème 2 :

La culture des oignons est faite sur un domaine triangulaire dont les sommets dans un plan orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'unité

2m, sont : E' , F' et G' images respectives des points E , F et G par s , s est une transformation définie par : $s = \text{gof}$ où f est l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x; y)$ d'affixe z associe le point M'

d'affixe z' telle que : $\begin{cases} x' = -x - y + 3 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$ et les points E

et F sont d'affixes respectives $3+i$ et $2i$

5°) a- Démontre que l'écriture complexe de f est $z' = (-1+i)z + 3-i$

b- Détermine l'affixe du point F_0 tel que $f(F_0) = F$

c- Démontre que f est la composée d'une homothétie h et d'une rotation r dont tu préciseras les éléments caractéristiques.

6°) g est la rotation de centre E d'angle $\frac{\pi}{2}$

a- Détermine une écriture complexe de g .

b- Détermine l'affixe du point G telle que $g(F) = G$

7°) a- Calcule $\frac{z_G - z_E}{z_F - z_E}$, puis déduis-en la nature du

triangle EFG

b- Calcule l'aire $\mathcal{A}$ en mètre carré du triangle EFG .

8°) a- Donne l'écriture complexe de s

b- Déduis-en l'aire $\mathcal{A}'$ en mètre carré de la portion du domaine où sont cultivés les oignons.

Problème 3 :

Les tomates sont cultivés sur un domaine

délimité par les courbes C_1 , Γ et les droites

d'équations $x = \frac{1}{4}$ et $x = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Où C_1 est la

courbe représentative dans un repère orthonormal

$(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 10 m de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ appartenant à

la famille des fonctions f_m définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_m(x) = mx + x \ln x, \text{ pour } x > 0 \\ f_m(0) = 0 \end{cases}$$

Où m est un paramètre réel

Γ est la courbe d'une fonction h

I-

9°) a- Démontre que f_m est continue à droite en 0.

b- f_m est-elle dérivable à droite en 0.

10°) a- Etudie la limite de f_m lorsque x tend vers $+\infty$.

b- Etudie les variations de f_m ; précise en particulier, l'extrémum de f_m .

c- Dédus-en que, lorsque m varie dans $\mathbb{R}$, l'ensemble (D) décrit par les points de C_m en lesquels la tangente à C_m est parallèle à l'axe des abscisses (O, x) .

d- Soit B_m le point où C_m coupe (O, x) , autre que le point O . Montre que la tangente à C_m en B_m a une direction indépendante de m .

II-

Dans toute la suite du problème, on prends $m = \frac{1}{2}$.

et $f_{\frac{1}{2}}$ la fonction correspondante et $C_{\frac{1}{2}}$ sa courbe représentative. On a donc :

$$\begin{cases} f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}x + x \ln x, \text{ pour } x > 0 \\ f_{\frac{1}{2}}(0) = 0 \end{cases}$$

11°) En utilisant la partie I-, trace avec soin $C_{\frac{1}{2}}$ dans le

repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, Echelle : 1cm pour 2 m.

Précise la demi-tangente en O .

12°) h est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{1}{2}x + x \ln(-x), \text{ pour } x < 0 \\ h(0) = 0 \\ h(x) = -f_{\frac{1}{2}}(x), \text{ pour } x > 0 \end{cases}$$

sa courbe représentative Γ sera tracée dans le même repère que $C_{\frac{1}{2}}$.

a- Prouve que la fonction h est paire.

b- Démontre que la partie de (Γ) , correspondant à $x > 0$ est symétrique de $C_{\frac{1}{2}}$ par rapport à (O, x) .

c- Sans nouveau calculs, déduis de $C_{\frac{1}{2}}$ le tracé de Γ .

13°) a- Hachure le domaine de culture des oignons

b- Pour $x > 0$, calcule la fonction dérivée de g définie par : $g(x) = x^2 \ln x$

c- Calcule : $I(a) = \int_a^{\frac{1}{\sqrt{e}}} \left(\frac{1}{2}x + x \ln x \right) dx$

14°) Dédus-en l'aire en m^2 , de la portion du domaine où sont cultivés les tomates. (Tu donneras la valeur exacte et la valeurs approchées à 10^{-2} près pas excès)

SITUATION D'EVALUATION N° 16
cor. p: 455

Texte : l'héritage

Amadou, Nasrine, et Issa ont hérité de leur père une parcelle et d'une somme d'argent épargné dans une banque. La somme épargnée, exprimée en milliers de francs est $\text{Im}(z^6)$ où z est le nombre complexe donné par : $z = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$.

Nasrine une élève de la classe de terminale scientifique réfléchir sur comment déterminer le montant de l'épargne, son estimation au moment de son retrait et aussi l'aire de la portion du domaine de la parcelle réservé au benjamin Issa.

Tâche : Tu es aussi élève en classe de terminale scientifique, aide Nasrine en résolvant les trois problèmes ci-dessous :

e trigonométrique
le et un argument de z

montant de l'argent épargné à
s héritiers

montant épargné est de 512 000
acé dans la banque depuis l'an
t le retirer en 2015. La banque
ns depuis le placement de la
ivant donne l'évolution du
ncs sur la période considérée :

2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5
512	532	554	576	599

2005	2006	2007	2008	2009
6	7	8	9	10
623	648	674	701	729

le points $M(x_i; y_j)$ dans un

nées du point moyen

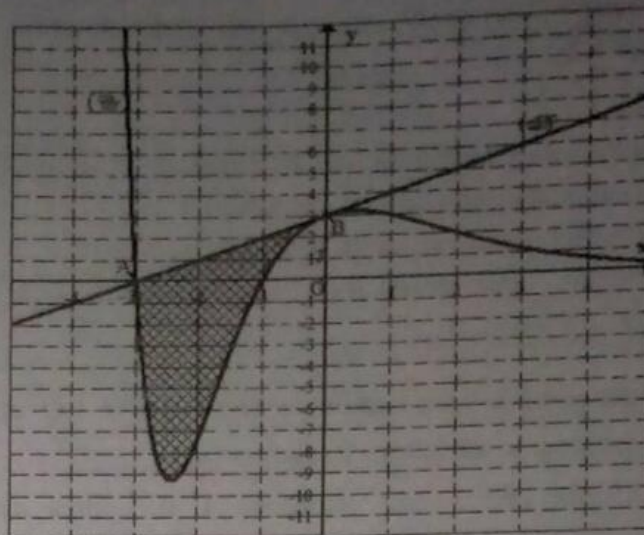
le corrélation linéaire entre les
Interprète le résultat

uation de la droite (D)
en x obtenue par la méthode
e les valeurs des coefficients
Trace (D) dans le repère

ent précédent, détermine en
timation du montant à son

par les enfants à l'échelle

n suivante :



La partie hachurée est le domaine réservé à Issa.
Sur le graphe, (C_f) est la courbe représentative de la
fonction f dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O ;$
 $I, J)$, d'unité graphiques 2 cm sur l'axes des abscisses et
0,5 cm sur l'axes des ordonnées. La fonction f est définie
et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ où a
, b et c désignent trois nombres réels.
La droite (D) passe par A et est tangente à la courbe (C_f)
au point B.

Partie A :

9°) a- A l'aide d'une lecture graphique, détermine les
coordonnées entières des points A et B. Déduis-en
 $f(-3)$ et $f(0)$

b- Justifie qu'une équation de la droite (AB) est :
 $y = x + 3$.

Déduis-en la valeur de $f'(0)$

10°) a- Prouve que , pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c] e^{-x}$$

b- Déduis-en $f'(0)$, en fonction de b et c .

11°) a- En utilisant les questions précédentes, montre que

$$a, b \text{ et } c \text{ sont solutions du système : } \begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

b- Résous le système et déduis-en l'expression de
 $f(x)$ en fonction de x

Partie B :

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$$

12°)a- Vérifie que pour tout x différent de zéro,

$$f(x) = \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)x^2 e^{-x}$$

b- Détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.
Dédus-en une asymptote à la courbe (C_f) .

c- Détermine la limite de la fonction f en $-\infty$.

13°)a- Vérifie que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$$

b- Pour tout x réel, étudie le signe de $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de la fonction f .

c- Calcule une valeur approché à 10^{-1} près de l'ordonnée de chacun des points de la courbe (C_f) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

14°) Démontre que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α pour x appartenant à l'intervalle $[-1; 0]$. Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie C :

15°) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $F(x) = (-x^2 - 6x - 9)e^{-x}$. Justifie que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

16°) Dédus-en une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x + 3 - f(x)$.

17°) On considère la partie du plan comprise entre la droite $(\mathcal{O})$, la courbe (C_f) et les droites d'équations :
 $x = -3$ et $x = 0$

On désigne par A la valeur, exprimée en cm^2 , de l'aire de cette partie. Calcule A .

18°) Dédus-en en en hm^2 l'aire de la portion du domaine réservé au benjamin Issa.

SITUATION D'EVALUATION N° 17

cor. p: 458

(Examen Blanc « Collège Privé la solidarité de Kandi »)

Texte : La société EL-HACO & Fils.

La société EL-HACO & Fils possède une usine de fabrication des stylos à bille. Une étude statistique a montré que 90% de la production ne présente pas de défaut. Avant la vente, chaque stylos est soumis à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 94% des stylos avec défaut et accepte 92% des stylos sans.

Le directeur de la société est un professeur retraité de mathématiques. Mario, un fils du Directeur et

élève en classe de terminales D, en visite dans l'usine, s'intéresse à ces informations sur le contrôle d'un stylo. Il observe aussi une affiche publicitaire décorée de façon impressionnante dans l'usine. Sur l'affiche, se trouvent des lignes ayant l'allure de la courbe représentative d'une fonction numérique à variable réelle. Ainsi, Mario se rapproche de son papa pour connaître la fonction dont l'allure est sur l'affiche afin de l'étudier. Mais il s'intéresse surtout au chiffre d'affaire annuel de l'usine.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des solutions aux préoccupations de Mario en résolvant les problèmes suivants :

Problème 1 :

- On choisit au hasard un stylo avant son passage au contrôle et on désigne par A l'évènement « le stylo est accepté à l'issue du contrôle ».
 - Calcule les probabilités des évènements suivants :
 E_1 « le stylo est accepté et n'a pas de défaut »
 E_2 « le stylo est accepté et a un défaut »
 - Calcule la probabilité de l'évènement A .
 - Le stylo est accepté à l'issue du contrôle. Quelle est la probabilité qu'il présente un défaut ?
- On contrôle successivement et au hasard 5 stylos de façons indépendantes.
 - Quelle est la probabilité que 2 exactement des stylos soient acceptés ?
 - Quelle est la probabilité qu'un au moins des stylos soit accepté ?

Problème 2 :

Le chiffre d'affaire annuel de l'usine exprimé en millions de FCFA est le nombre $A = -e^\pi(10I + 5J - 8)$ avec

$$I = \int_0^\pi e^{-x} \cos^2 x dx \text{ et } J = \int_0^\pi e^{-x} \sin^2 x dx.$$

- Calcule $I + J$
- On désigne par (E) l'équation différentielle
 $y'' + 2y' + 5y = 0$

Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^{-x} \cos(2x)$

- Justifie que f est une solution de (E)
- Dédus-en que la fonction F définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $F(x) = -\frac{1}{2}[f'(x) + 2f(x)]$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f .
- Calcule $I - J$
- Détermine la solution h de (E) qui vérifie
 $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$.

- c- On désigne par z_1 et z_2 les solutions de l'équation caractéristique de (E) avec $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$ et on suppose que le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

On pose : $U = z_1 + z_2 + 2i$.

Détermine les entiers naturels n ($n \in \mathbb{N}^*$) pour que U^n soit imaginaire pur.

- 5) a- Dédus des questions 3) et 4) c- les valeurs exactes de I et J .
b- Calcule le nombre A puis donne en francs CFA le chiffre d'affaire annuel de l'usine.

Problème 3 :

Le papa l'informe que la fonction dont la courbe est sur l'affiche est la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} g(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}, & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) ($OI = 2\text{cm}$)

- 6) On considère la fonction u définie sur

$$]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[\text{ par : } u(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

- a- Etudie les variations de u .
b- Dédus-en le signe de $u(x)$
7) Justifie que le domaine de définition E de g est $E =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$
8) Etudie la continuité de g à droite en 0.
9) a- Vérifie que : $\forall x \in]0; +\infty[$:
$$\frac{g(x)-1}{x} = \frac{e^{x \ln(x+1) - x \ln x} - 1}{x \ln(x+1) - x \ln x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

b- Etudie la dérivabilité de g à droite en 0
(On pourra poser $t = x \ln(x+1) - x \ln x$)
c- Interprète géométriquement les résultats obtenus.
10) a- Détermine l'ensemble de dérivabilité D de g .
b- Justifie que $\forall x \in D$, $g'(x) = u(x)g(x)$
11) Etudie le sens de variation de g
12) a- Calcule les limites de g aux bornes de E .

- b- Dresse le tableau de variation de g

- 13) Etudie les branches infinies de (C).

- 14) Construis la courbe (C)

- 15) On pose $I = [0; +\infty[$ et on considère la fonction :

$$h: I \rightarrow g(I)$$

$$x \mapsto h(x) = g(x)$$

- a- Détermine $g(I)$

- b- Justifie que h est une bijection.

- c- Soit h^{-1} la bijection réciproque de h ; détermine l'ensemble de dérivabilité de h^{-1}

- 16) On considère la fonction f de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$

$$\text{définie par : } f(x) = \int_1^x g(t) dt$$

- a- Justifie que f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calcule $f'(x)$.
b- Etudie le sens de variation de f .
c- Dédus-en le signe de $f(x)$.
d- En utilisant la méthode des rectangles et en divisant l'intervalle : $[1; 2]$ en 4 intervalles de même amplitude, donne un encadrement de $f(2)$ par deux nombres décimaux d'ordre 3.
e- Détermine alors un encadrement de l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$

SITUATION D'EVALUATION N° 18

cor. p: 463

Contexte : Construction de la maison des jeunes de la commune de Codji

Après avoir appris le dégât créé par l'effondrement de la maison des jeunes de Djikpa, le conseil municipal a décidé de mieux comprendre certaines informations données par le maître d'ouvrage de la construction de la maison des jeunes de la commune de Codji.

Les quatre points A, B, C et D où sont centrées les bases des quatre ouvrages sont les solutions de l'équation (E) :

$$\left(\frac{z}{1+i} - 4 - i\right)z^3 - (13 + 19i)z^2 + 2(-32 + 83i)z + 10(45 - 11i) = 0$$

Pour une solidité des bâtiments, les points A, B, C et D doivent être situés sur la ceinture circulaire de sécurité ; les points B et D sont équidistants des points A et C.

Le plus grand bâtiment entièrement en marbre à la forme d'une pyramide EFGHS de base rectangulaire EFGH.

Le conseil communal voudrait bien vérifier les informations données par le maître d'ouvrage.

Tâche : Pour ton évaluation, tu es invité (e) à trouver des solutions aux préoccupations du conseil communal

Problème 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'équation (E') :

$$z^3 - (13 + 19i)z^2 + 2(-32 + 83i)z + 10(45 - 11i) = 0 \text{ et les}$$

polynômes $p(x) = -x^3 + 19x^2 - 115x + 225$ puis

$$q(x) = x^3 - 13x^2 + 51x - 55$$

1°) a- Calcule $p(5)$ et $q(5)$ puis résous les équations $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

b- Démontre que (E') admet une racine z_0 dont le point image M_0 appartient à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

c- Résous l'équation (E')

d- Déduis-en les solutions de (E)

2°) En réalité les points A, B, C et D ont respectivement pour affixes $z_1 = 5 + 5i$; $z_2 = 5 + 7i$; $z_3 = 3 + 7i$ et $z_4 = 3 + 5i$

a- Ecris $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$ et $\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}$ sous forme

exponentielle.

b- Déduis-en la nature de chacun des triangles ABC et ADC

3°) a- Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques et que les points B et D sont équidistants des points A et C.

b- Déduis-en que les conditions de solidité des bâtiments sont alors respectées.

c- Donne alors une équation cartésienne du cercle représentant la ceinture de sécurité

4°) L'allée principale qui permet d'accéder au grand bâtiment est donnée par l'ensemble (E_1) . Des points M du

plan dont l'affixe z vérifie la relation $\left(\frac{z - 5 - 5i}{iz + 5 - 3i}\right) \in i\mathbb{R}^*$.

a- Donne une signification géométrique du module et d'un argument du nombre complexe

$$\left(\frac{z - 5 - 5i}{iz + 5 - 3i}\right).$$

b- Détermine alors l'ensemble (E_1)

Problème 2 :

Pour connaître la qualité de marbres à acheter, le conseil communal doit déterminer l'aire de la surface latérale du grand bâtiment.

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace orienté pour lequel l'unité de longueur est égale à 8 mètres ; on a :

• $E(0; 0; 2)$; $F\left(\frac{5}{2}; 0; 2\right)$; $H(0; 2; 2)$ l'une des faces latérales doit être contenue dans le plan $(P) : 12x - 5z + 10 = 0$

• le sommet S appartient à l'ensemble (δ) des points M de l'espace tels que $(\vec{ME} + \vec{MF}) \wedge \vec{e}_3 = (\vec{GM} + \vec{HM}) \wedge \vec{e}_3$

5°) a- Donne en mètres les dimensions de la base du grand bâtiment.

b- Détermine les coordonnées du centre L du rectangle EFGH.

c- Détermine les coordonnées du point G.

6°) a- Démontre que l'ensemble (Δ) est une droite passant par K milieu du segment $[FH]$ et dirigé par le vecteur $\vec{e}_3$.

b- Donne un système d'équations paramétriques de (Δ) .

7°) a- Démontre que : $\vec{o}_1 s = \frac{5}{4} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5 \vec{e}_3$

b- Calcule en mètres la hauteur du grand bâtiment

c- Calcule alors en mètres carrés l'aire de la surface latérale du bâtiment.

Problème 3 :

Pour la décoration de l'un des murs du grand bâtiment, le conseil municipal se propose d'utiliser l'allure de la courbe (C), représentation graphique de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \exp_2\left(\frac{x+1}{x}\right) - x + 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \ln(x + e) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

dont il se demande d'étudier quelques propriétés.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm)

Partie A :

8°) a- Détermine l'ensemble de définition de f

b- Calcule la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

9°) Etudie la continuité de f en 0

10°) a- Démontre que

$$\bullet \forall x \in]-\infty; 0[, \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{2}{x} e^{\frac{\ln 2}{x} - 1}$$

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[, f(x) = 1 + \ln\left(1 + \frac{x}{e}\right)$$

b- Etudie la dérivabilité de f en 0

c- Déduis-en une interprétation graphique des résultats.

d- Démontre que la droite (Δ) d'équation

$y = -x + 3$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

11   a- Etudie les variations de f et détermine $I = f([0; +\infty[)$.

b- Démontre que l'équation $f(x) = 2$ admet deux solutions de signe contraire. Soit β la solution positive.

Prouve que : $4,67 < \beta < 4,68$.

c- Etudie les branches infinies de (C).

d- Trace (C).

Partie B :
Soit k l'application définie par :

$k :]0; +\infty[\rightarrow I$
 $x \mapsto k(x) = f(x)$

12   Démontre que k admet une bijection réciproque

k^{-1} et précise l'ensemble de définition de k^{-1}

13   a- Détermine le plus grand ensemble E sur lequel

k^{-1} est dérivable.

b- Calcule $k^{-1}(2)$ et déduis-en le nombre dérivé de

k^{-1} en 2.

c- Donne l'équation de la tangente à la courbe de

k^{-1} au point d'abscisse 2.

d- Détermine pour tout $x \in I$, $k^{-1}(x)$

e- Construis sur le même graphique la courbe de

k^{-1} .

Partie C :
Soit F la fonction définie par : $F(x) = \int_{-1}^x \left(2^{\frac{t+1}{t}} - t + 1 \right) dt$

14   a- Démontre que F est définie sur $] -\infty; 0[$

b- Démontre que F est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et

détermine $F'(x)$.

c- Soit G la fonction définie par

$G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$. Démontre que G est dérivable sur

$] -\infty; 0[$ et détermine $G'(x)$

15   a- Donne une interprétation graphique de $F(-2)$

b- Calcule une valeur approchée de $F(-2)$ par la

méthode des trapèzes (On subdivisera l'intervalle

$[-2; -1]$ en 4 intervalles de même amplitude)

c- Déduis-en une valeur approchée de l'aire, du

domaine délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et

les droites d'équations $x = -2$ et $x = -1$

TEST DE MATHÉMATIQUES,   dition 2011

Contexte : Championnat scolaire à Tangu  t  .

Les organisateurs du championnat scolaire de Tangu  t   ont prévu pour cette année un tournoi spécial de football entre les classes de terminales des établissements de l'atacora-Dongua. Selon le programme établi, chaque élève spectateur de la classe de terminale D doit décoder un nombre avant d'assister à un match à prix revue à la baisse. Azizou élève en classe de Terminale D su CEG Copargo, essaie d'aider ses camarades afin que plusieurs d'entre eux assistent à un taux réduit aux différents matchs. Le code d'accès à un prix réduit au terrain est un nombre réel. Ce code vaut

$$\alpha = \frac{1}{(h^{-1})'(2)}, \text{ où } h \text{ est la fonction numérique}$$

définie par :

$$h : \left(\left[0; \frac{\pi}{2} \right] \right) \rightarrow h \left(\left[0; \frac{\pi}{2} \right] \right)$$

$$x \mapsto \frac{1}{\cos x}$$

Aziz veut aussi étudier le mouvement du ballon sur le terrain.

Tâche : En te retrouvant en lieu et place de Azizou, tu vas résoudre les problèmes suivants :

Problème 1 :

1   Etudie les variations de h sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

2   Détermine $h \left(\left[0; \frac{\pi}{2} \right] \right)$.

3   Démontre que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont tu préciseras l'ensemble de définition.

4   Détermine le domaine de dérivabilité E de h^{-1} , puis

calcule $(h^{-1})'(x)$, pour tout x élément de E

5   Détermine le code α .

Problème 2 :

Le trophée mise en compétition est un solide de l'espace. Dans cet espace muni d'un repère orthonormé direct $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 9 cm. Une partie du trophée est incluse dans l'ensemble (Δ) des points M de l'espace tels que :

$\overline{MA} \wedge \overline{MB} = \overline{MC} \wedge \overline{MA}$, où A , B et C sont trois points non alignés du trophée et I le milieu du segment $[BC]$.

6°) Démontre que (Δ) est une droite dont tu préciseras un repère.

7°) On donne $A(1; -1; 0)$, $B(3; 0; 1)$ et $C(1; 2; -1)$

a- Détermine une représentation paramétrique de (Δ)

b- Ecris une équation cartésienne du plan (P) déterminé par les points A, B et C.

c- Détermine une équation cartésienne du plan (Q) perpendiculaire à (P) et contenant la droite (D)

$$\text{définie par : } \frac{2x+1}{2} = -y = z-1$$

d- Détermine un système d'équations paramétriques de la droite $(D_1) = (P) \cap (Q)$

8°) En réalité, le trophée est un tétraèdre de sommet $E(-8; 7; 9)$ et dont une base est le triangle ABC. Calcule le volume de ce trophée.

Problème 3 :

La classe de Azizou a gagné le trophée avec un score étiqué d'un but à zéro. Le but de la victoire est survenu lorsque le ballon a suivi une trajectoire identique à la représentation graphique de la fonction f à variable réelle définie par $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2$ et $\|\vec{j}\| = 5$. L'unité de longueur est le centimètre.

Partie A :

Soit g la fonction numérique sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^x - x - 1$.

9°) Etudie les variations de g .

10°) Démontre que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$

Partie B :

11°) Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

12°) a- Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$.

b- Dresse le tableau de variation de f .

13°) a- Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f en son point d'abscisse 0.

b- Etudie la position de (C) par rapport à (T) . (On pourra utiliser le signe de $g(x)$)

14°) Trace la courbe (C) et la tangente (T) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie C

Sur la trajectoire (C) , le point d'abscisse 2 paraît être le point d'intersection de (C) avec le plan des poteaux de buts où l'unique but est survenu. On pose $I = [1; +\infty[$.

On définit la fonction : $k: I \rightarrow f(I)$

$$x \mapsto k(x) = f(x)$$

15°) Détermine $f(I)$ et démontre que k est une bijection.

16°) On note k^{-1} la bijection réciproque de k . Détermine l'ensemble de dérivabilité de k^{-1} .

17°) Démontre que le point $S\left(\frac{2}{e^2 - 2}; 2\right)$ appartient à la courbe représentative de k^{-1} .

SITUATION D'EVALUATION N° 20

cor. p: 473

TEST DE MATHÉMATIQUES, édition 2012

CONTEXTE : La ferme de Sodji

Sodji est un riche éleveur de lapins, installé dans un village de la commune de GRAND POPO. Il dispose d'un vaste domaine plan, ayant la forme d'un quadrilatère, sur lequel il a implanté un bâtiment pour l'élevage de deux races de lapins : une race locale et une race importée.

Pour amoindrir le coût d'alimentation des lapins, Sodji envisage de cultiver des céréales sur une portion de son domaine afin de produire des provendes. Il fait alors appel à un géomètre topographe pour la réalisation du levé topographique de son domaine et pour la délimitation de la quantité de provende qu'il peut espérer produire par an.

A l'approche de la fête de « Nonvitcha », Sodji a demandé à son employé Fiosi, de lui faire le point des lapins susceptibles d'être vendus. Il ressort de ce point que :

- 80% des lapins susceptibles d'être vendus sont de la race importée et 20% sont de la race locale ;
- Parmi les lapins susceptibles d'être vendus de la race importée, 75% sont des femelles et parmi ceux de la race locale, 15% sont des mâles ;
- Exactement 616 lapins susceptibles d'être vendus sont des femelles.

Au démarrage de la vente des lapins, à l'occasion de la fête de « Nonvitcha » Fiosi est appelé à servir un restaurant qui a commandé dix lapins et qui souhaite avoir au moins un lapins de la race locale.

Tâche : Tu es invité(e) à résoudre les trois problèmes ci-après pour :

- déterminer le nombre de lapins susceptibles d'être vendus par Sodji à l'occasion de la fête de « Nonvitcha » ;
- détermine l'aire du domaine de Sodji ainsi que celle du champ de céréale ;
- trouver une estimation de la quantité annuelle de provende que Sodji peut produire.

Problème 1 :

1. Pour servir le restaurant, Fiosi choisit au hasard un lapin, tous les lapins ayant la même probabilité d'être choisis.

Soit F l'événement : « le lapin est une femelle » et I l'événement : « le lapin est de la race importée ». Les événements contraires respectifs de F et I sont notés $\bar{F}$ et $\bar{I}$.

- a) Calcule la probabilité de chacun des événements : $I \cap F$, $I \cap \bar{F}$, $\bar{I} \cap F$, $\bar{I} \cap \bar{F}$.
 - b) Déduis-en le nombre de lapins susceptibles d'être vendus à l'occasion de la fête de « Nonvitcha ».
2. Pour son restaurant, Fiosi choisit dix fois de suite un lapin parmi les lapins susceptibles d'être vendus. On admet que le nombre de lapins est suffisamment important pour que la probabilité de tirer un lapin soit identique pour chacun des choix supposés indépendants les uns des autres. Calcule la probabilité que le souhait du restaurant soit réalisé.

Problème 2 :

Au terme de son travail, le géomètre a expliqué que les bornes du domaine de Sodji occupent des positions régulières dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. Il a en effet signifié que les affixes respectives u, v, w des positions A, B, C de trois bornes du domaine sont les solutions de l'équation : (E) : $z^3 - 2(2+3i)z^2 - 4(1-4i)z + 16 - 8i = 0$, et l'emplacement D de la quatrième borne est l'image de C par la similitude plane directe S de centre A qui transforme B en C.

Soit $P(z)$ le polynôme complexe défini par :

$$P(z) = z^3 - 2(2+3i)z^2 - 4(1-4i)z + 16 - 8i = 0$$

3. a) Démontre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que tu détermineras.
- b) Détermine le polynôme $Q(z)$ tel que :

$$P(z) = (z - z_0)Q(z).$$

- c) Déduis l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4. On donne $u = 2$, $v = mi$ et $w = 2 + 4i$ où m est nombre entier naturel.

- a) Détermine la valeur m pour que l'écriture complexe de la similitude S soit :

$$z' = (1-i)z + 2i.$$

- b) Donne la nature de S puis précise ses éléments caractéristiques.

- c) Détermine l'abscisse du point D.

5. On suppose que : $m = 2$.

- a) Détermine la nature du triangle ABC.

- b) Sachant que l'unité de longueur est l'hectomètre, calcule en hectares l'aire de la portion ABC.

- c) Déduis-en l'aire du domaine de Sodji.

Problème 3 :

Le plan du domaine de Sodji, réalisé à une échelle de $\frac{1}{10000}$ par le géomètre, est muni d'un repère

orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 1cm. Le champ de céréales est délimité par la courbe représentative $(\mathcal{C})$ d'une fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=0$ et $x=2\sqrt{2}$.

La fonction f est la solution qui prend la valeur 1 en 0 de l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' + y = 2e^{-x}(x+1)$$

6. a) Détermine les nombres réels a et b pour que la fonction φ définie par : $\varphi(x) = e^{-x}(ax^2 + bx)$, soit solution de l'équation (E_1) .

- b) Démontre que toute fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E_1) si et seulement si $g - \varphi$ est solution de l'équation différentielle : $(E_2) : y' + y = 0$.

- c) Résous l'équation (E_2) puis déduis la résolution de l'équation (E_1) .

7. Démontre que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

8. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

9. a) Étudie le sens de variation de f .

- b) Dresse le tableau de variation de f .

10. a) Étudie les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

- b) Construis $(\mathcal{C})$ et hachure la partie représentant le champ de céréales de Sodji.

11. a) Démontre pour tout réel x ,

$$f(x) = e^{-x}(2x+2) - f'(x)$$

- b) À l'aide d'une intégration par parties, calcule le nombre L suivant :

$$L = \int_0^{2\sqrt{2}} e^{-x}(2x+2)dx$$

- c) Déduis-en, en hectares, l'aire du champ de céréales.

12. a) Démontre que l'équation : $f(x) = x$ admet dans l'intervalle $[1; +\infty[$ une solution unique α et que

$$\text{l'on a : } 1 < \alpha < \frac{3}{2}.$$

- b) Démontre que pour tout $x \in [1; \frac{3}{2}]$,

$$f(x) \in [1; \frac{3}{2}] \text{ et } |f'(x)| \leq \frac{5}{4e}$$

- c) Déduis-en que pour tout x élément de $[1; \frac{3}{2}]$,

$$\text{on a : } |f(x) - \alpha| \leq \frac{5}{4e} |x - \alpha|$$

13. Après une étude sérieuse du champ de céréale de Sodji, les agents du CERPA ont estimé que Sodji peut produire en toute année $2012 + n$, ($n \in \mathbb{N}$) une quantité de provende u_n exprimée en dizaine de tonnes et vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

b) Démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{4e} |u_n - \alpha| \text{ et } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4e}\right)^n$$

c) Dédus-en que la production annuelle de provende va se stabiliser à long terme à une valeur que tu précises.

SITUATION D'ÉVALUATION N° 21

cor. p: 476

TEST DE MATHÉMATIQUES, édition 2013

Contexte d'évaluation :

Au cours de la semaine culturelle organisée par ton établissement, divers jeux tiennent les spectateurs en haleine. L'un des jeux consiste à lancer un gros dé cubique et, lorsqu'il est au repos, à observer l'inscription de sa face supérieure. Les différentes faces du dé portent les inscriptions 0 ; 1 ; -1 ; $-\sqrt{3}$; 2 et $-\sqrt{2}$. Le dé est pipé de la manière suivante :

- Les événements élémentaires $\{0\}$, $\{2\}$ et $\{-\sqrt{2}\}$ sont équiprobables ;
 - les événements élémentaires $\{1\}$, $\{-1\}$ et $\{\sqrt{3}\}$ sont équiprobables ;
 - la probabilité de l'événement $\{0; 2; -\sqrt{2}\}$ est le double de celle de son événement contraire.
- L'animateur du jeu vante les surprises agréables et les gains qui attendent ceux qui tentent leur chance. Les spectateurs sont curieux de savoir ce qu'il faut miser pour gagner le gros lot. Un spectateur sollicite ton aide.

Tâche : Tu vas te servir de tes connaissances pour aider ce spectateur à résoudre les problèmes suivants.

Problème 1 :

1°) Détermine la probabilité des événements élémentaires $\{0\}$ et $\{1\}$.

2°) Calcule la probabilité des événements R , S et T définis comme suit :

R : « L'inscription de la face supérieure est un nombre entier naturel »

S : « L'inscription de la face supérieure est un nombre entier relatif » ;

T : « L'inscription de la face supérieure est un nombre réel strictement négatif ».

Problème 2 :

Une phase du jeu consiste à lancer deux fois de suite le dé précédent. On désigne par a et b les inscriptions obtenues respectivement au premier lancer et au second lancer.

On pose : $z = a + ib$ où $i^2 = -1$

3°) a- Calcule la probabilité pour que z soit égal à $-1 + i\sqrt{3}$.

b- Calcule la probabilité pour que z soit égal à $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

4°) a- On pose : $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Ecris z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

b- Détermine la forme algébrique de :

$$\left(\frac{1}{2} z_1\right)^{2013}$$

5°) a- Calcule : $(z_2)^6$ et $(2 - i)^4$

b- Dédus-en les solutions dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation : $z^4 = -7 - 24i$

6°) Soit $A(2 - i)$, $B(-2 + i)$ et $C(1 + 2i)$ des points du plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

a- Calcule : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et donne une équation

cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle ABC .

b- Détermine l'écriture complexe de la similitude plane directe s de centre A qui transforme C en B . Précise les éléments caractéristiques de s .

Problème 3 :

Dans un autre stand, il est question de lancer une fléchette sur un domaine plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J) . Le joueur gagne si la fléchette tombe dans la partie du domaine délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (Φ) de la fonction f et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x).$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x).$$

7°) On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $(E): y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$

- a- Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E_0): y' + y = 0$.
 b- Prouve que la fonction f est solution de l'équation (E) .
 c- Démontre qu'une fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $(h - f)$ est solution de l'équation différentielle (E_0) .
 d- Déduis-en les solutions de l'équation différentielle (E) .

8°) a- Étudie les variations de g et réalise son tableau de variation.

b- Déduis-en le signe de $g(x)$.

9°) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (Γ) de g au voisinage de $+\infty$.

10°) a- Démontre que : $f(x) = (1 + e^{-x}) \frac{\ln(1 + e^x)}{(1 + e^x)}$.

b- Calcule : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c- Déduis-en alors les asymptotes de (Φ) .

11°) Démontre que pour tout nombre réel x , on a : $f'(x) = e^{-x} g(x)$.

12°) a- Dresse le tableau de variation de f .

b- Construis la courbe (Φ) de f .

13°) a- Hachure le domaine (ω) où devra tomber la fléchette pour que le joueur gagne.

b- Démontre que l'aire Ω de (ω) est telle que :

$$\frac{\ln 2}{e} \leq \Omega \leq \ln(1 + e)$$

SITUATION D'EVALUATION N° 22

cor. p: 478

TEST DE MATHÉMATIQUES, édition 2014

Contexte : Une usine de production d'huile.

Kossi est un élève en classe de terminale scientifique qui a participé à une excursion organisée par son établissement scolaire, pendant les congés passés, sur des sites touristiques d'une région du Bénin où il a été séduit par la visite dans une usine de production d'huile à base de coton. Il a bien pris note des trois parties d'explication apportées par le guide Robert sur cette usine.

Selon la première partie d'explication, la parcelle abritant l'usine est un quadrilatère EFGH obtenu après le recasement d'une ancienne parcelle ABCD où les points A, B, C et D ont respectivement pour affixes z_A, z_B, z_C et z_D solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(E): z^4 + 10z^2 + 169 = 0 \text{ dans le plan complexe rapporté}$$

à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Les points E, F, G et H sont les images respectives des points A, B, C et D par l'homothétie h de centre Ω d'affixe -2 et de

rapport $k = -\frac{\sqrt{15}}{5}$ puis $\operatorname{Re}(z_A), \operatorname{Re}(z_D), \operatorname{Im}(z_A)$ et

$\operatorname{Im}(z_B)$ sont des nombres réels strictement négatifs.

La deuxième partie d'explication concerne la maquette d'un bâtiment d'égrenage de l'usine et la dernière aborde la production minimale d'huile par l'usine chaque année.

Kossi voudrait connaître le coefficient de réduction appliqué lors des travaux de recasement.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Kossi en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1 :

1°) Détermine les racines carrées de $-5 - 12i$

2°) Justifie que tout nombre complexe z est solution de (E) si et seulement si son conjugué $\bar{z}$ est solution de (E) .

3°) a- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'): Z^2 + 10Z + 169 = 0$

b- Déduis les solutions de l'équation (E) .

c- Place les points A, B, C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ puis donne la nature précise de la parcelle ABCD.

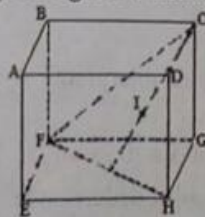
4°) a- Détermine l'écriture complexe de h .

b- Détermine les affixes des points E, F, G et H.

c- Calcule l'aire de la surface réduite de l'ancienne parcelle et déduis le pourcentage de réduction dans la zone de l'usine après le lotissement.

Problème 2 :

La salle d'égrenage a la forme d'un cube ABCDEFGH. (voir figure ci-dessous) :



Une machine à égrener est posée dans le tétraèdre CFGH et soutenue par deux tiges métalliques $[AG]$ et $[DI]$ où I est l'isobarycentre des points C, F et H : c'est donc le centre de gravité du triangle CFH.

Kossi s'est ensuite intéressé à la position de la droite (AG) par rapport au plan (CFH) et au volume du tétraèdre CFGH en considérant le repère orthonormé direct $(F; \vec{FE}, \vec{FG}, \vec{FH})$ de l'espace.

5°) Détermine les coordonnées des points A, C, H et I.

6°) a- Justifie qu'une représentation paramétrique de la droite (AG) est : $\begin{cases} x=1-\beta \\ y=\beta \\ z=1-\beta \end{cases}; (\beta \in \mathbb{R})$ et une équation

cartésienne du plan (CFH) est : $x - y + z = 0$

b- Déduis que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (CFH) en I.

7°) Calcule la distance du point G au plan (CFH) et le volume du tétraèdre CFGH.

Problème 3 :

Le guide Rober a enfin déclaré que la production minimale (en hectolitre) d'huile de l'usine chaque année est l'arrondi d'ordre 3 du maximum de la fonction p définie par : $p(q) = 1000f(q)$ où q est la quantité, en milliers de tonnes, de graines de coton utilisées et f est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) & , \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = -\sqrt{\ln(-x+1)} & , \text{ si } x < 0 \end{cases}, g \text{ étant la solution de}$$

l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 2y = -20x - 4$ telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 4$.

8°) a- Démontre que la fonction $u : x \mapsto 10x - 3$ est une solution de (E).

b- k étant une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, démontre que k est une solution de (E) si et seulement si $k - u$ est une solution de l'équation différentielle (E') : $y'' - y' - 2y = 0$.

c- Résous (E') puis déduis les solutions de (E).

d- Justifie que pour tout x élément de $\mathbb{R}$,

$$g(x) = 4e^{-x} - e^{2x} + 10x - 3$$

9°) a- Démontre que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

b- Justifie que f est continue en 0.

c- Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète géométriquement les résultats obtenus.

10°) a- Calcule $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

b- Etudie le signe de f'' sur $[0; +\infty[$ et déduis-en le sens de variation de f' sur $[0; +\infty[$.

c- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ et $f'(0)$.

d- Déduis-en que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans $[0; +\infty[$ une solution unique α .

11°) On pose $t = e^x$.

a- Justifie que si $f'(x) = 0$ alors $t^3 - 5t + 2 = 0$.

b- Justifie que $t = 2$ est solution de $t^3 - 5t + 2 = 0$ et détermine deux nombres réels a et b tels que $t^3 - 5t + 2 = (t-2)(t^2 + at + b)$.

c- Trouve les solutions de l'équation $t^3 - 5t + 2 = 0$ et déduis-en α .

12°) a- Vérifie que : $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f(x) = x \left(\frac{4}{xe^x} - \frac{e^{2x}}{x} + 10 - \frac{3}{x} \right)$$

b- Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c- Etudie le signe de f' sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

13°) a- Dresse le tableau de variation de f .

b- Construis la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f dans

un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

14°) Quelle est la production minimale d'huile de l'usine chaque année ?

SITUATION D'EVALUATION N° 23

cor. p: 483

TEST DE MATHÉMATIQUES, édition 2015

Contexte : construction d'un hôtel

Pierre, un grand opérateur économique, décide de construire un hôtel cinq étoiles dont la réalisation de la maquette est confiée à l'ingénieur Gérard. Ce dernier munit l'espace d'un repère orthonormé direct

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Sur son dessin, $H(-4; -1; 2)$ est un point du plan du plafond appartenant à l'ensemble (Δ)

des points $M(x; y; z)$ vérifiant : $\begin{cases} x - 2y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - y + z + 5 = 0 \end{cases}$

Gérard repère la hauteur h de l'immeuble par la distance du point H au plan $(\mathcal{P})$ du sol défini par les points A

$(-3; 2; 1)$, B $(2; -1; 4)$ et C $(0; -2; 5)$. De plus

l'accueil (personne physique) sera positionné en C à une distance d de (Δ) . Gérard a également la mission de

soumettre un projet d'aménagement de l'une des voies d'accès à l'hôtel, au sein duquel il est prévu la

construction d'une grande boîte de nuit VIP.

Bob, fils de Gérard, élève en classe de terminale D, prend connaissance de ces projets dont l'exécution est confiée à son père. Il cherche à en savoir davantage.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Bob à trouver de réponses à ses préoccupations en résolvant les problèmes suivant.

Problème 1 :

1°) Détermine une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$.

2°) a- Vérifie que H est un point de (Δ) .

b- Justifie que (Δ) est une droite dont tu préciseras un repère.

3°) a- Détermine les coordonnées du point D, projeté orthogonal de H sur $(\mathcal{P})$.

b- Démontre que le point D appartient à la droite (Δ) .

c- Déduis-en la position de (Δ) par rapport à (P) .

c- Détermine la hauteur h de l'immeuble.

4°) Calcule la distance d .

Problème 2 :

La boîte de nuit VIP sera éclairée par un grand objet lumineux de sommet L_1 , L_2 et L_3 et de forme triangulaire. Dans le plan complexe, les affixes respectives z_2 et z_3 des points L_2 et L_3 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) :

$$z^2 + [2 + (2 - 3\sqrt{2})i]z + 3\sqrt{2} - i(3\sqrt{2} - 2) = 0 \text{ où}$$

$$\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_3).$$

Par ailleurs, le point L_1 est l'antécédent du point L par la transformation S dont l'écriture complexe est :

$$z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)z + 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{9\pi}{8}}.$$

5°) Résous l'équation (E) et précise l'axe de chacun des points L_2 et L_3 .

$$6^\circ) \text{ Démontre que : } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) = e^{i\frac{\pi}{8}} \times \left(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}} \right).$$

7°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S.

8°) a- Linéarise les expressions : $\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{9\pi}{8}$ et

$$\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{9\pi}{8}.$$

b- Déduis-en que : $z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)z - \sqrt{2} - 1 - i.$

c- Détermine l'axe du point L.

d- Déduis-en la forme exacte de l'objet lumineux de sommets L_1 , L_2 et L_3 .

Problème 3 :

Dans le muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, la voie à aménager est assimilable à une portion de la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{\ln|x+1|}, \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\} \\ f(-1) = 0 \text{ et } f(0) = 1 \end{cases}$$

9°) a- Etudie le sens de variation de la fonction g définie

$$\text{par : } g(x) = \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{e^{-x}}{x+1}.$$

b- Précise les extrêmes de g et déduis-en le signe de g suivant les valeurs de la variables réelles x .

10°) a- Détermine l'ensemble de définition de f .

b- Démontre que f est continue en 0 et en -1 .

c-i-) Détermine le développement limité d'ordre 3 des fonctions $x \mapsto \ln(x+1)$ et $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0.

ii-) Etudie la dérivabilité de f en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.

d- i-) Etudie la dérivabilité de f en -1 .

ii-) Donne une interprétation géométrique des résultats.

11°) a- Détermine l'ensemble de dérivabilité E de f .

$$\text{b- Démontre que : } \forall x \in E, f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(\ln|x+1|)^2}.$$

c- Etudie le signe de $v(x) = \ln|x+1|$.

d- Achève les variations de f .

12°) on pose $I = [-1; +\infty[$ et l'application :

$$f_1 : I \rightarrow f(I)$$

$$x \mapsto f_1(x) = f(x)$$

a- Détermine $f(I)$.

b- Démontre que f_1 admet une bijection réciproque f_1^{-1} .

c- Détermine l'ensemble de dérivabilité E' de f_1^{-1} .

d- Etudie la dérivabilité de f_1^{-1} en 0 et précise la demi-tangente éventuelle à (Γ) , courbe représentative de f_1^{-1} , en son point d'abscisse 0.

e- Démontre que le point $F(1; 0)$ appartient à (Γ) et détermine une équation de la tangente à (Γ) en F.

13°) a- Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[$ on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x^2} \left(\frac{x}{\ln x} \right) \left[\frac{1 - e^{-x}}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right].$$

b- Déduis-en les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

14°) Construis les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) dans le même repère.

BAC BURKINA-FASO

Sujet N° 1 : BAC 1^{er} tour 2005
(cor. p: 489)

Exercice 1 :

- 1°) Calcule $(2 + 4i)^2$
- 2°) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :
 $(E) : z^3 + (3 - 8i)z^2 - (13 + 12i)z + 9 + 20i = 0$
 - a- Démontrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
 - b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- 3°) On donne dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -3 + 2i$; $z_B = 1$ et $z_C = -1 + 6i$
 - a- Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC.
 - b- Le point D est l'image du point B par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2 + 4i$. Calculer l'affixe z_D de D.
 - c- Déterminer la nature exacte du quadrilatère ABDC.

Exercice 2 : (hors programme Béninois)

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$(\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm et } \|\vec{j}\| = 3 \text{ cm}).$$

On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = t - 2 \sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

A tout instant t , $M(t)$ est le point de (C) de coordonnées $(x(t); y(t))$.

- 1°) Démontrer que le point $M(t + 2\pi)$ est l'image du point $M(t)$ par une translation dont on donnera le vecteur de translation.
- 2°) Prouve que $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

$$\begin{cases} x'(t) \leq 0 \text{ pour } t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \\ x'(t) > 0 \text{ pour } t \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right] \end{cases}$$

- 4°) Etudier les variations de x et y et donner leurs variations dans un tableau commun, pour $t \in [0; \pi]$.
- 5°) Tracer la partie (C_1) de (C) correspondant à $t \in [-\pi; \pi]$.
- 6°) Dire comment à partir de (C_1) on peut obtenir la partie (C_2) de (C) correspondant à $t \in [-\pi; 3\pi]$.

On donne : $\frac{\pi}{2} - 2 \approx -0,4$ et $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0,7$

Problème :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique : 2 cm.

Partie A : Etude de la fonction f et construction de (C)

- 1°) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2°) Démontrer que la droite (Δ) d'équation : $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$, et préciser la position de (C) par rapport à (Δ) .
- 3°) a- Calculer la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' de f .

b- Etudier les variations de f' et dresser son tableau de variation.

c- Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x .

d- Dresser le tableau de variation de f .

4°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que $1,9 < \alpha < 2$ et $-0,6 < \beta < -0,5$

5°) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ puis tracer (Δ) et (C) .

Partie B : Recherche d'une approximation de α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle

$$]0; +\infty[\text{ par : } g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right).$$

1°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$ sur $]0; +\infty[$

2°) Etudier le sens de variations de la fonction g .

3°) Soit $I = [1,9; 2]$.

a- Démontrer que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$

b- Prouver que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

4°) Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$

b- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_n - \alpha| \text{ puis que}$$

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$$

c- En déduire que la suite (U_n) converge et précise sa limite.

Partie C : Calcul d'aire.

1°) En intégrant par parties, calculer l'intégrale

$$J = \int_1^{\alpha} x e^{x-1} dx.$$

2°) a- Calculer en unité d'aire (u.a), l'aire $\mathcal{A}$ de la portion du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

b- Démontrer que $\mathcal{A} = (\alpha - 1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)$

On donne : $e \approx 2,72$; $e^{0,9} \approx 2,46$; $e^{-1,5} \approx 0,22$;

$$e^{-1,6} \approx 0,20$$
 ; $\ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0,92$; $\ln\left(\frac{48}{19}\right) \approx 0,93$

Sujet N°2 : BAC 1^{er} tour 2006

(cor. p: 492)

Exercice 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal

direct $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$; unité 2 cm.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} iz + \bar{z}' = -2\sqrt{3} \\ \bar{z} - iz' = -2 \end{cases}$$

2°) Soit A et B les points d'affixes respectives

$$z_A = -1 + i\sqrt{3} \text{ et } z_B = -\sqrt{3} - i.$$

a- Ecrire z_A , z_B et $z_A \times z_B$ sous forme trigonométrique.

b- Démontre que z_A^3 est un réel et z_B^3 est imaginaire pur.

3°) Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a- On pose $r(A) = C$. Calculer l'affixe z_C de C.

b- On pose $r(C) = D$. Calculer l'affixe z_D de D.

c- Placer les points A, B, C et D.

4°) a- Démontrer que O est le milieu de $[AD]$ et $[BC]$.

b- Calculer le module et un argument de $\frac{z_A}{z_B}$.

c- En déduire la nature du quadrilatère ABDC.

Exercice 2 :

Le tableau suivant donne les résultats d'une étude réalisée sur un produit P ; x représente le prix de vente unitaire du produit exprimé en FCFA ; y représente la quantité du produit P disponible sur le marché, exprimée en milliers

x_i en FCFA	30	35	45	60	80	100
y_i en milliers	12,5	13	13	15	15,5	16

1°) On considère l'ensemble des points M_i de coordonnées (x_i, y_i) où $1 \leq i \leq 6$.

a- Construire le nuage de points M_i (1,5 cm représenteront 10 FCFA en abscisse et 1 cm représentera 1000 en ordonnées)

b- Un ajustement affine de ce nuage semble-t-il raisonnable ? Justifier la réponse.

2°) a- Construire la droite (Δ) d'ajustement affine obtenue par la méthode de Mayer.

On prendra pour premier sous nuage les trois premiers points et pour le deuxième les trois derniers.

b- Déterminer une équation de (Δ) sous forme :

$y = ax + b$; a et b étant deux réels à préciser.

3°) En utilisant l'équation de (Δ) , estimer :

- La quantité de produit P disponible sur le marché pour un prix de 150FCFA.

- Le prix de vente si la quantité du produit P disponible sur le marché est 20 000.

Problème :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$f(x) = e^{-x} \sin x$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un

repère orthogonal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$; unité : 2 cm en

abscisses et 10 cm en ordonnées.

Partie A : Etude de f

1°) Démontre que, pour tout $x \geq 0$; $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

En déduire l'existence d'une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

2°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses.

3°) On se propose d'étudier f sur $[0; \pi]$

a- Etablir l'égalité $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

pour tout réel x .

b- Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0; \pi]$.

c- Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

4°) On appelle $(\mathcal{C}_1)$ la portion de la courbe $(\mathcal{C})$ déterminée par les points dont les abscisses sont dans l'intervalle $[0; \pi]$.

Tracer $(\mathcal{C}_1)$. On précisera les points d'abscisses respectives : $0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}$ et π .

Partie B : Calcule d'aire et de volume.

1°) a- Vérifier l'égalité : $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$.

b- En déduire une primitive F de f sur $[0; +\infty[$.

2°) On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité par $(\mathcal{C})$, (Ox) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\pi$. Calculer, en cm^2 , la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$.

3°) Soit φ la fonction définie sur $[0; \pi]$ par :

$$\varphi(x) = e^{-2x} \cos 2x.$$

a- Vérifier l'égalité : $\varphi''(x) + 4\varphi'(x) + 8\varphi(x) = 0$.

b- En déduire une primitive Φ de φ sur $[0; \pi]$.

c- Calculer, en unité de volume, le volume V du solide S engendré par la rotation complète du domaine $\mathcal{D}$ autour de l'axe (Ox) .

Partie C : Etude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^\pi e^{-x} \sin(nx) dx.$$

1°) a- A l'aide de deux intégrations par parties

successives, démontrer que : $u_n = \frac{n}{1+n^2} (1 - e^{-\pi} \cos n\pi)$

b- En déduire que, pour tout n , $|u_n| \leq \frac{2n}{1+n^2}$

2°) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On donne : $e^{\frac{-\pi}{4}} \approx 0,46$; $e^{\frac{-\pi}{2}} \approx 0,21$; $e^{\frac{-3\pi}{4}} \approx 0,09$

Sujet N°3 : BAC 1^{er} tour 2007
(cor. p: 495)

Exercice 1 :

Soit P le polynôme de la variable complexe z définie

par : $P(z) = z^3 - 5(1+i)z^2 - 2(1-9i)z + 16 - 8i$

1°) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. On désignera par z_1 et z_2 les deux autres solutions telles que $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$, où $\text{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire de z .

3°) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$; unité : 1 cm.

a- Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1 , z_0 et $\bar{z}_2$ où $\bar{z}_2$ désigne le conjugué de z_2 .

b- Calculer $\frac{\bar{z}_2 - z_1}{z_0 - z_1}$

c- En déduire la nature du triangle ABC.

4°) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. M et M' sont des points d'affixes respectives z et z' tels que M' soit l'image de M par la translations t .

a- Exprime z' en fonction de z .

b- Calculer l'affixe du point D image du point C par t .

c- Donner la nature exacte du quadrilatère ABCD. Justifier.

Exercice 2 :

Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{2} \\ V_{n+1} = \frac{n+1}{2n} V_n \end{cases}$$

1°) Calculer V_2 , V_3 et V_4 .

2°) a- Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a : $V_n > 0$.

b- Démontrer que la suite (V_n) est décroissante.

c- En déduire que la suite (V_n) est convergente.

3°) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \frac{V_n}{n}$, $\forall n > 0$

a- Prouver que la suite (U_n) est géométrique.

Préciser la raison et le premier terme.

b- Exprimer U_n puis V_n en fonction de n .

c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

Problème :

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie sur

$]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

1°) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2°) Etudier le sens de variation de g et dresser le tableau de variation de g .

3°) En déduire que pour tout $x > 0$, on a : $g(x) > 0$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique : 2 cm

1°) Calculer $\lim_{x \rightarrow 4^0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$. En déduire que (C) admet une asymptote verticale dont on précisera.

2°) a- Calculer $f'(x)$ et justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

b- En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

3°) a- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C). Précise la position de (C) par rapport à (D).

b- Déterminer les coordonnées du point B de (C) en lequel la tangente est parallèle à (D).

4°) Soit (T) la tangente à (C) au point A d'abscisse 1. Déterminer une équation cartésienne de (T).

5°) a- Démontrer que f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

b- Prouve que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.

c- Construire (C). (On placera les points A et B et les tangentes à (C) en A et en B)

6°) Construire, dans le même repère, la courbe (C') de la fonction f^{-1} réciproque de f .

7°) Calculer l'aire S en cm^2 du domaine plan délimité par (C) et les droites d'équations $y = x$; $x = 1$ et $x = e$

Sujet N°4 : BAC 2^e tour 2007
(cor. p: 498)

Exercice 1 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 0; 0)$; $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 3)$.

1°) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

Soit I le de coordonnées $(1; 2; 3)$

2°) Calculer la distance de I au plan (ABC). Les points A, B, C et I sont-ils coplanaires ?

3°) a- Calculer A_1 l'aire du triangle ABC en unité d'aire.

b- Déterminer le volume V(en unité de volume) de la pyramide de sommet I et de base le triangle ABC.

4°) Soit D le point de coordonnées $(0; -2; 3)$.

a- Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

b- Calculer l'aire A_2 du quadrilatère ABCD.

Exercice 2 :

La constitution d'un groupe de trois élèves devant représenter leurs camarades à un exposé sur l'environnement est à une expérience aléatoire. On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. Un garçon est désigné à chaque apparition de pile et une fille à chaque apparition de face. Un groupe constitué de fille

et de garçon est appelé "groupe mixte" et un groupe constitué uniquement de filles ou uniquement de garçons un "groupe non mixte".

On désigne par : M l'événement « le groupe est mixte » et par $\bar{M}$ l'événement contraire de M.

1°) Calculer les probabilités des événements M et $\bar{M}$.

2°) A l'intérieur de la salle où se tient l'exposé, le groupe de trois élèves reçoit en cadeau trois tee-shirts par fille présent au sein du groupe.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tee-shirts reçus.

a- Quelles sont les valeurs prises par X ?

b- Déterminer la loi de probabilité de X

c- Déterminer la fonction de répartition F de X.

d- Construire la représentation graphique de F.

e- Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

3°) Les tee-shirts reçus sont répartis de manière équitable à tous les membres du groupe. Quelle est la probabilité que chaque membre du groupe reparte avec au moins deux tee-shirts ?

Problème :

Partie A :

Considérons l'équation différentielle (E): $y' + y = x - 1$.

1°) Trouver deux réels a et b tels que $u(x) = ax + b$ soit une solution de (E).

2°) Démontrer que la fonction v est une solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de l'équation différentielle : $(E'): y' + y = 0$.

3°) Résoudre (E')

4°) Déduire les solutions de (E)

5°) Déterminer la solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$

Partie B :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm). On considère la fonction f

définie par : $f(x) = e^{-x} + x - 2$.

1°) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

3°) Soit (D) la droite d'équation $y = x - 2$.

a- Démontrer que (D) est asymptote à (C_f) en $+\infty$

b- Préciser la position relative de (C_f) par rapport à (D).

4°) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que $-1,2 < \alpha < -1,1$ et $1,8 < \beta < 1,9$.

6°) Construire (C_f) .

7°) Déterminer graphiquement suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation :

$$me^x - xe^x + 2e^x - 1 = 0 \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

Partie C :

Soit Δ la partie du plan limitée par (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = \lambda$ où λ est un réel strictement supérieur à 2.

1°) a- Calculer l'aire $A(\lambda)$ en cm^2 de Δ en fonction λ

b- Calcule $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

2°) Désignons par V le volume en cm^3 du solide obtenu par rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites

d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

a- A l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$I = \int_2^4 (x-2)e^{-x} dx$$

b- Calculer V .

Sujet N°5 : BAC 2^e tour 2009
(cor. p: 501)

Exercice 1 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, unité graphique 2 cm.

Soient les points $A(-2; 1; -4)$; $B(2; 3; 1)$;

$C(2; 2; -1)$ et $D(-3; -1; 3)$.

Soient les points E, F, G et H tel que ABFCDEGH soit un parallélépipède.

1°) Déterminer les coordonnées du point F.

2°) Calculer $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$. En déduire l'aire du parallélogramme ABFC et du triangle ABC en cm^2 .

3°) Calculer la distance d du point D au plan (ABC).

4°) Calculer en cm^3 le volume V de la pyramide de sommet D et de base ABFC.

5°) Calculer le volume V' du parallélépipède ABFCDEGH.

Exercice 2 :

Le tableau suivant donne le montant des prêts octroyés par une banque à des associations féminines entre 2002 et 2007.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x	1	2	3	4	5	6
Montant des prêts en millions de francs CFA y	4,5	5	5,2	5,8	6,3	7,1

1°) Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ associant à cette série statistique dans un repère orthogonal. On prendra 1 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour un million en ordonnée.

2°) Soit (Δ) la droite d'ajustement de Mayer obtenue par un regroupement des trois premiers points et des trois derniers points du nuage. Soit G_1 le point moyen des trois premiers points et G_2 celui des trois derniers points du nuage.

a- Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 .

b- Construire la droite (Δ)

c- Déterminer l'équation réduite de (Δ) .

3°) On suppose que l'évolution du montant des prêts faits aux associations féminines reste la même au cours des années venir. A partir de quelle année le montant des prêts sera-t-il strictement supérieur au double de celui de 2009 ?

Problème :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A :

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\pi; 0[$ par :

$$g(x) = \cos^2 x + \cos x - 1.$$

1°) a- Démontrer que g est dérivable sur $]-\pi; 0[$ et que $g'(x) = -\sin x(2 \cos x + 1)$.

b- En déduire que $g'(x) \leq 0$ pour tout

$x \in \left] -\pi; -\frac{2\pi}{3} \right]$ et que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0 \right[$

c- Dresser le tableau de variations de g .

2°) a- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une

solution unique $\beta \in]-\pi; 0[$ et que $\beta \in \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4} \right]$

b- En déduire le signe de g sur $]-\pi; 0[$

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\pi; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2 \sin(2x)}{1 + \cos x} + \frac{1}{2}, & \text{si } x \in]-\pi; 0] \\ f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x} + 1}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note (C_f) la courbe représentative de f .

1°) Etudier la continuité de f en 0.

2°) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en déduire une interprétation géométrique des résultats obtenus.

3°) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b- Démontrer que pour tout $x \in]-\pi; 0[$, on a :

$$f(x) = \frac{4 \sin x \cos x (1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} + \frac{1}{2} \text{ et en déduire que}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = +\infty$$

c- En déduire les asymptotes de la courbe (C_f) .

4°) a- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

b- Prouver que $f'(x) = \frac{4g(x)}{1 + \cos x}$ pour tout $x \in]-\pi; 0[$ et en déduire le sens de variation de f sur $]-\pi; 0[$.

c- Dresser le tableau de variation de f sur $]-\pi; +\infty[$

5°) Construire (C_f) , ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.

Partie C :

On admet que pour tout $x \in [1,5; 2]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ (e)

1°) Soit h la fonction définie sur $[1,5; 2]$ par :

$$h(x) = f(x) - x.$$

Etudier les variations de h et en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1,5; 2]$.

2°) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,5; 2]$ en utilisant (e).

b- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha| \text{ et que}$$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

c- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d- Déterminer l'entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Sujet N°6 : BAC 2^e tour 2010

(cor. p: 505)

Exercice 1 :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal

$(O; \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique : 2 cm.

On désigne par A, B et C les points dont les affixes respectivement sont : $2i$; -1 et i .

Soit f l'application $(P) \setminus \{A\}$ dans (P) qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq 2i$) associe le point M' d'affixe z' telle

$$\text{que : } z' = \frac{z+1}{z-2i}$$

1°) Place les points A, B et C. On complètera la figure dans la suite.

2°) Déterminer l'affixe du point C', image de C par f .

Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?

3°) Démontrer que le point C admet unique antécédent C'' par f . Quelle est la nature du triangle BCC'' ?

4°) Donner une interprétation géométrique de $|z'|$ et $\arg(z')$.

5°) Déterminer les ensembles suivants :

a- L'ensemble (E) des points M dont l'image par f a pour affixe un réel strictement négatif.

b- L'ensemble (F) des points M dont l'image par f a pour affixe un imaginaire pur non nul.

c- L'ensemble (D) des points M dont l'image par f a pour affixe un nombre complexe de module 1.

6°) Construire ACBC' ; BCC'' ; (E) ; (F) et (D) dans la figure.

Exercice 2 :

Une entreprise fabrique des vêtements. Dans le tableau suivants, on a indiqué pour les sept premiers mois de l'année 2008 la production journalière moyenne de pulls.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
Rang du mois x_i	1	2	3	4	5	6	7
Production journalière y_i	200	210	260	265	270	300	315

La direction devra fermer l'atelier de fabrication de pulls si la production moyenne journalière n'atteint pas 350 pulls à la fin de l'année 2008.

On considère le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ associé au tableau ci-dessus, relativement à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; prendre pour unités : abscisse : 1 cm par rang de mois ; en ordonnée : 1 cm pour 20 pulls produits.

1°) a- Représenter le nuage de points dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

b- Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point.

2°) a- Calculer les coordonnées du point moyen G_1 associé aux quatre premiers points du tableau, puis celle du point G_2 associé aux trois derniers points.

b- Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) et la tracer.

3°) On admet que (G_1G_2) réalise un ajustement du nuage de points.

a- Déterminer par le calcul, la production journalière moyenne de pulls en décembre 2008.

b- Comment peut-on retrouver graphiquement ce résultat ?

4°) L'atelier de fabrication de pulls a-t-il été fermé en fin décembre 2008 ? justifier votre réponse.

Problème :

Partie A :

Soit u la fonction numérique définie par : $u(x) = 1 - xe^{-x}$

1°) Etudier le sens de variation de u (on ne demande ni les limites ni le tableau de variation).

2°) En déduire le signe de $u(x)$ suivants les valeurs de x .

Partie B :

On considère la fonction f de la variable réelle x définie

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = \frac{-4 \ln(-x)}{x}, & \text{si } x \in]-\infty; -1[\\ f(x) = (x+1)(1+e^{-x}), & \text{si } x \in [-1; +\infty[\end{cases}$$

Et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité 2cm)

3°) a- Vérifier que f est continue en -1 .

b- Etudier la dérivabilité de f en -1 . Interpréter graphiquement le résultat.

c- Calculer la limite de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes à (C).

d- Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ est asymptote à (C). Etudier la position relative de (C) et de (D) sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

4°) a- Vérifier que pour $x < -1$, $f'(x) = \frac{4(\ln(-x) - 1)}{x^2}$.

b- Etudier les variations de f sur $] -\infty; -1[$, puis sur $[-1; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de f .

c- Démontrer qu'il existe un unique point d'abscisse supérieur à -1 où la tangente (T) à (C) est parallèle à la droite (D).

5°) a- Démontrer que la courbe (C) est située au-dessus de l'axe des abscisses.

b- Tracer la courbe (C) et ses asymptotes, puis la tangente (T) à (C)

Partie C :

6°) Soit λ un nombre réel supérieur à -1

a- Calculer les intégrales : $I = \int_{-\lambda}^{-1} \frac{\ln(-x)}{x} dx$ et

$$J = \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{-x} dx.$$

b- On note $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 , de la partie du plan au dessus de l'axe des abscisses, délimitée par la courbe (C), l'asymptote (D) et les droites d'équation : $x = -e$ et $x = \lambda$.

Démontrer que : $A(\lambda) = 8 + 4e - 4(\lambda + 2)e^{-\lambda}$

7°) Calculer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

Sujet N°7 : BAC 2^e tour 2011

Exercice 1 :

On considère la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$,

$(n \in \mathbb{N})$.

1°) Calculer I_0 , $I_0 + I_1$ et déduis-en I_1 .

2°) Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n .

3°) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante et positive.

4°) Prouve que : $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5°) En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 :

L'espace étant rapporté au repère orthonormé direct

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ unité de longueur 1 cm, on considère les points $A(3; 2; 4)$; $B(0; 3; 5)$; $C(0; 2; 1)$; $D(3; 1; 0)$ et $F(1; 2; 3)$.

1°) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

2°) Soit E le point défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$.

Calculer les coordonnées de E.

3°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du parallélogramme ABCD.

4°) Calculer le volume V en cm^3 du prisme droit de base ABCD et de hauteur [AE].

5°) Le point F appartient-il à la droite (AB) ? justifier la réponse.

Problème :

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et l'unité est 2 cm. On placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille.

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \left(2 + \frac{2}{x}\right)(\ln x - 1). \quad (C) \text{ désigne sa courbe}$$

représentative relative au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2°) Démontrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.

3°) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 \ln x + 2x - 4$$

- a- Etudier le sens de variation de g sur $]0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
- b- Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$.
- c- En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.
- 4°) a- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $]0; +\infty[$.
- b- Prouver que : $f(\alpha) = \frac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
- c- Calculer $f(1)$ et $f(e)$.
- 5°) a- Etudier le signe de f sur $]0; +\infty[$.
- b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation du résultat obtenu.
- c- Construire (C). on prendra $\alpha = 1,75$ et $f(\alpha) = -0,6$.
- 6°) Soit h la fonction définie par : $h(x) = -f(x)$. (C') désigne sa courbe représentative. Sans étudier h , construire (C') dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Justifier la construction de (C').
- Partie B :**
- Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
- $$F(x) = \int_1^x f(t) dt. \quad (\Gamma) \text{ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé.}$$
- 7°) a- Que représente F pour f .
- b- Sans calculer $F(x)$, donner le sens de variation de F .
- c- Que peut-on dire des tangentes à (Γ) aux points d'abscisses 1 et e ?
- 8°) a- Le nombre réel x est strictement positif, calculer $\int_1^x \ln t dt$ (on pourra utiliser une intégration par parties)
- b- Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a :
- $$f(x) = 2 \ln x - 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2.$$
- c- En déduire l'aire A en cm^2 du domaine plan limité par (C), (C') et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Sujet N°8 : extrait BAC 1^{er} et 2^e tours 2012

Exercice 1 : (extrait session de remplacement)

- 1°) On considère le polynôme P pour tout z de l'ensemble $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.
- a- Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Prouver que si $P(z_0) = 0$, alors $P(\bar{z}_0) = 0$ où $\bar{z}_0$ est le conjugué de z_0 .
- b- Calculer $P(1+i\sqrt{3})$, puis factoriser $P(z)$.

- c- Déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
- 2°) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm). Soit A, B et C trois points d'affixes respectives : $a = 4$; $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \bar{b}$ où $\bar{b}$ est le conjugué de b .
- a- Placer les points A, B et C sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
- b- Quelle est la nature exacte du triangle ABC ?
- 3°) Soit K, le point d'affixe $z_K = -\sqrt{3} + i$, le point F image de K par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
- a- Déterminer les affixes respectives de F et G.
- b- Prouve que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.
- 4°) Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.
- a- Calculer l'affixe z_H de H puis démontrer que le parallélogramme COFH est un carré.
- b- Quelle est la nature du triangle AGH ?

Exercice 2 :

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1 ; 2 ; 3 et 4. On s'intéresse au nombre porté par la face cachée. Pour $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, on notera p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1 ; p_2 ; p_3 et p_4 dans cet ordre forment une progression arithmétique.

- 1°) Sachant que $p_4 = 0,4$, prouve que $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.
- 2°) On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
- a- Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1 ; 2 ; 4 ?
- b- Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
- 3°) On lance dix(10) fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
- a- Pour $0 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'événement $(X=i)$.
- b- Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter le résultat obtenu.
- c- Calculer la probabilité de l'événement $(X \geq 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.

4°) On lance n fois le dé, les lancers étant supposés indépendants. On note u_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au $n^{\text{ème}}$ lancer.

- Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et qu'elle converge.
- Calculer $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ en fonction de n puis étudier la convergence de la suite (s_n) .
- Déterminer le plus petit entier n tel que $s_n \geq 0,999$.

Problème :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x + \ln|1-x|}{1-x}, \text{ et } (C) \text{ sa courbe représentative dans}$$

le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A :

- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les asymptotes à (C) .
- Soit f' la fonction dérivée de f ; calculer $f'(x)$ puis étudier son signe. En déduire le sens de variation de f .
- Dresser le tableau de variations de f .
- Prouve que le point $I(1; -1)$ est un centre de symétrie pour (C) .
- Tracer (C) et les asymptotes.

Partie B :

Soit les fonctions u et v définies sur l'intervalle $]1; +\infty[$

$$\text{par : } u(x) = \frac{-1}{1-x} \text{ et } v(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}.$$

- Déterminer une primitive de chacune des fonctions u et v sur $]1; +\infty[$.
- Vérifier que pour tout réel $x > 1$, $-1 - f(x) = u(x) + v(x)$.
- Calculer, en cm^2 , la valeur exacte de l'aire S du domaine plan compris entre (C) et les droites d'équations respectives $y = -1$; $x = 2$ et $x = 3$.

Partie C :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = 4 - e^{-u_{n-1}} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- Démontrer, par récurrence, que pour tout entier non nul n , $3 < u_n < 4$.
- a- Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de même signe.
b- Etudier le sens de variation de la suite (u_n) .

3°) Etudier la convergence de la suite (u_n) .

BAC SENEGAL

Sujet N°9 : BAC Session normale 2013
(cor p 508)

EXERCICE-I :

Le tableau statistique ci-dessous donne le degré de salinité Y_i du Lac Rose pendant le $i^{\text{ème}}$ mois de pluie, noté X_i .

X_i	0	1	2	3	4
Y_i	4,26	3,4	2,01	1,16	1,01

Dans ce qui suit il faudra rappeler chaque formule le cas échéant, avant de faire les calculs. On donnera les valeurs approchées par excès des résultats à 10^{-3} près.

1°) a- Détermine le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X, Y) et interprète le résultat.

b- Quelle est l'équation de la droite de régression de Y en X .

c- Cette équation permet-elle d'estimer le degré de salinité du lac au 6^{ème} mois de pluie, le cas échéant ? Justifier la réponse.

2°) On pose $Z = \ln(Y-1)$.

a- Donne le tableau correspondant à la série (X, Z) . Les résultats seront arrondis au millièmes près.

b- Donne le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X, Z) .

c- Donne l'équation de la droite de régression de Z en X , puis exprime Y en fonction de X .

d- Utilise cette équation pour répondre à la question 1°)c-)

EXERCICE-II :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. S est la similitude plane directe de centre

O , d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' avec $M' = S(M)$.

1°) Exprime z' en fonction de z .

2°) On définit la suite des points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon

suivante : $\begin{cases} M_0 \text{ d'affixe } z_0 = 1+i \\ M_n = S(M_{n-1}) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$

z_n est l'affixe de M_n , pour tout entier naturel n .

a- Détermine les affixes des points M_1 , M_2 et M_3 .

b- Exprime z_n en fonction de z_{n-1} pour $n \geq 1$.

c- Déduis-en que : $z_n = \left(i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n z_0$

d- Soit $a_n = |z_n|$, prouve que a_n est le terme général d'une suite géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

e- Etudie la convergence de la suite (a_n) , $n \in \mathbb{N}$.

PROBLEME :

Les résultats de la partie A seront utiles dans la partie B.

Partie A :

1°) Prouve que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} = 0$

2°) Soit $k :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x(1 - \ln x)$$

a- k est-elle continue sur $]0; +\infty[$? Justifie ta réponse.

b- Soit $K :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x$$

Vérifie que K est une primitive de k , dans $]0; +\infty[$.

Partie B :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3°) Détermine D_f , le domaine de définition de f . Puis calcule les limites de f aux bornes de D_f .

4°) a- Etudie la continuité de f en 0.

b- Etudie la dérivabilité de f en 0. Interprète géométriquement les résultats.

5°) Donne les domaines de continuité et de dérivabilité de f .

6°) Calcule la dérivée de f sur son domaine d'existence et étudie son signe.

7°) Dresse le tableau de variations de f .

8°) Prouve que la droite (Δ) d'équation : $y = -x - 1$ est une asymptote de la courbe (C_f) de f dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ quand x tend vers $-\infty$.

9°) Précise la nature de la branche infinie de (C_f) quand x tend vers $+\infty$.

10°) Représente graphiquement la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Précise l'allure de la courbe au point d'abscisse 0 et trace (Δ) .

11°) Soit h la restriction de f à $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.

a- Prouve que h réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ sur un intervalle J que tu préciseras.

b- Représenter graphiquement $(C_{h^{-1}})$ la courbe représentative de h^{-1} dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ à l'aide de (C_f) .

12°) Soit A_1 l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations : $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation : $y = x$.

a- Calcule A_1

b- Déduis-en l'aire A_2 du domaine du plan délimité par les droites d'équations respectives : $x = -\frac{1}{e}$,

$y = \frac{1}{e}$, la droite (D) et la courbe $(C_{h^{-1}})$.

Sujet N°10 : BAC Session normal 2014
(cor. p: 510)

Exercice 1 :

A/ Questions de cours

1°) Rappeler les formes trigonométrique, exponentielle et trigonométrique d'un nombre complexe z non nul.

2°) Donne l'écriture complexe de la rotation r de centre $K(z_0)$, d'angle θ .

B/ On donne : $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$

1°) Donne une écriture trigonométrique de z_0 .

2°) Prouver que : $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = 1$.

4°) En déduire les solutions de $(E): z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ sous forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

On peut remarquer que (E) équivaut à : $\left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$

5°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm, placer les points

A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 - i\sqrt{3}$,

$z_B = -1 + i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$.

6°) Donner une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

7°) Vérifier que : $r(A)=C$; $r(C)=B$ et $r(B)=D$.

8°) En déduire que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2 :

Une boîte contient 8 cubes indiscernables au toucher dont un rouge numéroté 1, trois rouges numérotés 2, deux verts numérotés 1, un vert numéroté 2 et un jaune numéroté 2.

A/ Question de cours

Rappeler la définition de deux événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega), p)$

B/ Un enfant choisit au hasard et successivement sans remise deux cubes de la boîte. On admettra que la probabilité de choisir un cube est indépendante de son numéro et de sa couleur.

1°) On note : A, l'événement : « obtenir des cubes de couleurs différentes »;

B, l'événement : « obtenir au plus un cube portant le numéro 2 »

a- Calculer la probabilité de A.

b- Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{9}{14}$.

c- Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cubes rouges tirés par l'enfant.

a- Déterminer la loi de probabilité de X.

b- Calculer l'espérance mathématique de X.

c- Calculer la variance de X.

C/ L'enfant tire cette fois, simultanément trois cubes de la boîte.

1°) Déterminer la probabilité de l'événement

C : « obtenir au plus un cube portant le numéro 2 »

2°) L'enfant répète n fois l'expérience, en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant.

On note p_n , la probabilité de l'événement D_n : « C soit réalisé au moins une fois »

Exprimer p_n en fonction de n.

3°) Etudier le sens de variation de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Problème :

NB : les parties A et B ne sont pas indépendantes

Partie A :

Soit g la fonction définie dans $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|.$$

1°) a- Déterminer l'ensemble de définition D_g de g

b- Calculer les limites de g aux bornes de D_g (pour la limite au voisinage de 1, on pourra poser $h = x-1$)

2°) Déterminer g' , la fonction dérivée de g , et dresser un tableau de variations de g .

3°) Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $4 < \alpha < 5$.

4°) Déduire de l'étude précédente le signe de g sur D_g .

Partie B :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln|x-1|}{x} & , \text{ si } x > 0 \\ \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} & , \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

5°) a- Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b- Préciser les droites asymptotes à (C_f) , la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

6°) a- Etudier la continuité de f en 0.

b- On admet que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

prouver que : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{6}$

Donner l'interprétation graphique de ces résultats.

7°) a- Démontre que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$.

b- Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable puis dresser le tableau de variations de f .

8°) Construire (C_f) . (on pourra prendre $\alpha = 4,5$; on placera les points d'abscisses -1 ; 0 ; 2 et 5)

9°) a- Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$, on ait : $\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}$

b- Dédurre que :

$$\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = \frac{-12e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} + \frac{6e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

c- Calculer l'aire du domaine du plan limité par : (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -\ln 2$ et $x = 0$.

BAC NIGER

Sujet N°11 : BAC Session normal 2007

Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et

$$U_{n+1} = \frac{U_n^2}{2U_n - 1} \text{ pour tout } n \text{ entier naturel.}$$

1°) Prouver par récurrence, que $U_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

2°) On pose : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n}$ et $W_n = \ln V_n, \forall n \in \mathbb{N}$

- Démontrer que la suite (W_n) est géométrique.
- Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n , V_n puis U_n en fonction de n .
- En déduire la limite de la suite (U_n) .

Exercice 2 :

Une urne contient 5 jetons portant respectivement les chiffres 1 ; 1 ; 1 ; 2 et 2. Les jetons portant des chiffres identiques sont indiscernables. On effectue trois tirages successifs d'un jeton en ne remettant pas à chaque fois le jeton tiré dans l'urne. Ces chiffres, dans l'ordre où ils sont tirés, sont appelés $x ; y ; z$.

1°) Donner les éléments de Ω l'univers des éventualités.

2°) On définit la probabilité d'un événement élémentaire $\{(x ; y ; z)\}$ par $P(\{(x ; y ; z)\}) = a(x + y + z) + b$ où a et b sont des réels.

Déterminer a et b sachant que P est une probabilité et que les événements :

$$A = \{(x ; y ; z) \in \Omega, x = 1\} \text{ et } B = \{(x ; y ; z) \in \Omega, y = z\}$$

$$\text{satisfont la probabilité } P(A) - P(B) = \frac{4}{35}.$$

3°) On suppose que : $a = \frac{1}{10}$ et $b = -\frac{2}{7}$. On désigne par

x la variable aléatoire qui prend la valeur 3 si les trois chiffres sont impairs, la valeur 1 si un chiffre est impair et les deux autres pairs, et prend la valeur -2 s'il y a un chiffre pair et deux chiffres impairs.

Déterminer la loi de probabilité de x . Calculer son espérance mathématique et son écart type.

Problème :

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1, & \text{si } x < 1 \\ (x-1)\ln x + 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ (où } \ln \text{ désigne le}$$

logarithme népérien)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f et par (Δ) la première bissectrice.

1°) Prouver que f est continue et dérivable en 1.

2°) a- Démontrer que pour $x < 1$ on a : $f'(x) > 0$

b- Démontrer que pour $x > 1$ on a : $f'(x) > 0$

c- Dresser le tableau de variation de f .

3°) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b- Prouver que pour tout $x < 1$ on a :

$$f(x) - (x+1) = (x-1) \left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right] - 1$$

Démontrer que la courbe (C) admet la droite (D)

d'équation : $y = x + 1$ comme asymptote quand x tend vers $-\infty$.

c- En admettant les inégalités

$$\frac{x-1}{x-2} \leq (x-1) \left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right] \leq 1 \text{ pour tout } x < 1, \text{ en déduire la}$$

position de (C) par rapport à (D) pour tout $x < 1$.

d- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et

une seule solution α appartenant à $\left] -1; -\frac{1}{2} \right]$.

4°) Construire (C) . On précisera les points d'intersection de (C) avec (Δ) .

5°) En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire A de la partie du plan limitée par (Δ) , (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

6°) a- Prouve que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qu'elle admet une réciproque f^{-1} (on ne demande pas de calculer $f^{-1}(x)$).

b- Construire la courbe (Γ) de f^{-1} dans le même repère que (C) .

c- Calculer l'aire de la courbe par (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Sujet N°12 : BAC Session normal 2008

Exercice 1 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme u_1 et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 2 + \frac{4}{u_n + 1} \text{ pour tout } n \text{ appartenant à } \mathbb{N}^*.$$

1°) Démontrer qu'il existe deux valeurs u_1 pour lesquelles la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. On suppose désormais que la suite n'est pas constante et que $u_1 > -1$.

2°) Démontrer par récurrence que $u_n > -1$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

3°) On pose $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 2}$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

a- Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b- Exprimer v_n en fonction de n et calculer la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.

4°) Exprimer u_n en fonction de v_n . Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 :

Soit $P(z) = 3z^3 + (-5\sqrt{3} + 10i)z^2 + (5 - 15\sqrt{3}i)z + 24i$

1°) a- Calculer $P(-3i)$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(0; -3)$,

$$B(\sqrt{3}; -1) \text{ et } C\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Déterminer les éléments géométriques de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C .

Problème :

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul.

A/ Soit la fonction numérique g_n définie sur $]-\infty; 0]$

par : $g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

Dresse le tableau de variation de g_n et en déduire que $g_n(x)$ est négatif ou nul pour x appartenant à $]-\infty; 0]$.

B/ Soit la fonction numérique f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} xe^x - nx & , \text{ si } x \leq 0 \\ x^n(1 - \ln x) & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm)

1°) a- Etudier la continuité de f_n en $x = 0$.

b- Etudier la dérivabilité de f_n en $x = 0$.

2°) a- Etudier le signe de $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$
b- Etudier le signe de $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$

3°) a- Calculer $f_n'(x)$ sur $]-\infty; 0]$.

b- Déduire de la partie A le signe de $f_n'(x)$ sur $]-\infty; 0]$.

4°) Dresser le tableau de variation de f_n .

5°) Cas $n = 1$ ou $n = 2$

a- Etudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression $f_2(x) - f_1(x)$.

b- En déduire la position relative des courbes (C_1) et (C_2) et démontrer que (C_1) et (C_2) se coupent en trois points dont on précisera les coordonnées.

6°) a- Prouver que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_1) en $-\infty$.

b- Prouver que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C_2) en $-\infty$.

c- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$. Interpréter

graphiquement ces résultats.

7°) Construire (C_1) et (C_2) sur un même graphique.

8°) Calculer, en intégrant par parties, l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes (C_1) et (C_2) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Sujet N°13 : BAC Session normal 2009

Exercice 1 :

A/ En notant $P(A/B)$ la probabilité de l'événement « A sachant B » et $\bar{B}$ l'événement contraire de B, démontrer

$$\text{que : } P(A/B) = \frac{P(A/B) - P(A/B) \times P(B)}{1 - P(B)}$$

[indication écrire $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$]

B/ Lors d'une récente campagne d'abattage des chiens errants, on a pu établir les statistiques suivantes :

-30% des chiens errants étaient enrégés.

-Parmi les chiens abattus, 40% étaient enrégés

1°) En désignant par b ($b \neq 1$) la probabilité pour qu'un chien errant soit abattu lors de la campagne d'abattage, calculer en fonction de b la probabilité p pour qu'un chien errant survivant soit enrégé.

2°) Quelle est la plus petite valeur de b pour laquelle p est inférieure ou égale à 0,1 ?

1°) A l'issue de la campagne d'abattage, la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage est égale à $\frac{1}{3}$.

Une campagne d'abattage est divisée en 10 territoires et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de territoires décontaminés après la campagne d'abattage. Quelle est dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'un territoire à l'autre, la probabilité d'avoir décontaminé au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la campagne d'abattage ?

Exercice 2 :

1°) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble (D) des points M , du plan complexe, d'affixe $z = x + iy$, tels que : $|z - 3 - 2i| = |z - 7 + 2i|$

Le plan sera rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

2°) Caractériser géométriquement la transformation ponctuelle ϕ du plan complexe associée à l'application f de $\mathbb{C}$, définie par $f: z \mapsto z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.

3°) Quel est l'ensemble (D') , image par ϕ de l'ensemble (D) déterminé au 1°) ? Représenter graphiquement (D') .

Problème :

A/ On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 1 - x. \quad (1)$$

1°) Déterminer un polynôme g du premier degré solution de l'équation (1).

2°) a- Déterminer qu'une fonction h , deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ (2)

b- Résoudre l'équation différentielle (2).

c- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d- Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$

3°) a- Soit h la fonction numérique de variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - x - 1$. Etudier ses variations et dresser son tableau de variation.

b- En déduire le signe de $h(x)$ pour tout réel x .

B/ On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$

$$\text{par : } f(x) = \begin{cases} xe^{x+1} & , \text{ si } x < 0 \\ \ln(x+1) + e^{-x} - 1 & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \quad (\ln \text{ désigne le logarithme népérien})$$

1°) a- Etudier la continuité de f en 0.

b- Etudier la dérivabilité de f en 0.

2°) a- Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et dresser le tableau de variation de f sur $]-\infty; 0[$.

b- Prouver que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{h(x)}{e^x(1+x)}$.

En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

c- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3°) Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm)

4°) Démontrer que la restriction de f à $]-\infty; -1[$ admet une bijection de $]-\infty; -1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

5°) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

Sujet N14 : BAC Session normal 2010

Exercice 1 :

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(E): z^3 - 3\sqrt{3}iz^2 - (9 - 3\sqrt{3}i)z + 8 = 0$$

1°) Prouver que (E) possède une solution réelle z_1 que l'on déterminera.

2°) Résoudre (E)

3°) Ecrire les trois solutions $z_1; z_2; z_3$ sous forme trigonométrique. (avec $|z_2| < |z_3|$)

4°) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les trois points : M_1 d'affixe z_1 , M_2 d'affixe z_2 et M_3 d'affixe z_3 . Soit S la similitude plane directe transformant M_1 en M_2 et M_2 en M_3 . Préciser les éléments caractéristiques de S .

Exercice 2 :

On considère l'équation différentielle : $y'' + 4y = 3\sin(x)$ (1)

1°) Déterminer le réel α pour que la fonction g définie par $g(x) = \alpha \sin(x)$ soit une solution de (1).

2°) a- Démontrer qu'une fonction f , deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ (2)

b- Résoudre l'équation différentielle (2)

c- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d- Trouver la solution (1) vérifiant les conditions :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et } f'(\pi) = 0.$$

Problème :

A/ On considère la fonction numérique sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x+1| + \frac{1}{x-1}.$$

1°) Donner le domaine de définition de f et écrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue :

2°) Etudier les limites aux bornes du domaine de définition de f .

3°) Etudier la dérivabilité de f en -1 .

4°) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5°) Démontrer que la courbe représentative (C) de

f admet trois asymptotes dont on donnera les équations.

6°) Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

7°) Prouver que la restriction de f à $[0; 1[$ est une bijection de $[0; 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Tracer la courbe représentative de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C) .

8°) a- Calculer les intégrales : $s_1 = \int_{-\sqrt{2}}^1 f(x) dx$ et

$$s_2 = \int_{-1}^0 f(x) dx.$$

b- En déduire l'aire de la portion du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites

d'équations $x = -\sqrt{2}$ et $x = 0$.

B/ a- A toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, de nombres réels strictement supérieur à 1, on associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \ln(u_n - 1)$.

Sachant que (v_n) est une suite arithmétique, de raison r ($r \neq 0$) et de premier terme $v_1 = 0$, donner l'expression du terme général u_n en fonction de n et de r .

b- Comment choisir le réel r pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit convergente ? Dans ce cas donner la limite.

c- Calculer, en fonction de u_n , l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) de f , les droites d'équations $y = x + 1$, $x = 2$ et $x = u_n$.

Sujet N°15 : BAC Session normal 2011

Exercice 1 :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = \frac{6 + u_n}{2 + u_n}.$$

1°) Prouver par récurrence que tous les termes de cette suite sont strictement positifs.

2°) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général

$$v_n = \frac{-2 + u_n}{3 + u_n}.$$

a- Démontrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b- Donner l'expression de v_n , puis de u_n en fonction de n .

c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2 :

Une urne contient trois boules blanches et trois boules noires. On prélève simultanément trois boules de l'urne. Les prélèvements sont supposés équiprobables.

1°) Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore c'est-à-dire composé d'une seule couleur.

2°) Calculer la probabilité d'un prélèvement tricolore c'est-à-dire composé de trois couleurs.

3°) Déduire des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement bicolore c'est-à-dire composé de deux couleurs.

4°) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore ?

Problème :

A/ On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = x - 1. \quad (1)$$

1°) Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de l'équation différentielle (1).

2°) a- Démontrer qu'une fonction h , deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si la fonction

$h - g$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (2)$$

b- Résoudre l'équation différentielle (2)

c- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d- Trouver la solution de (1) vérifiant des conditions :

$$h(0) = 0 \text{ et } h'(0) = 0.$$

B/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité : 1 cm

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - e^{-x}$ et

(C) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2°) Démontrer que la droite $(D): y = x + 1$ est asymptote oblique à (C) .

3°) Tracer (D) et (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

4°) a- Soit α un réel strictement négatif. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C) et (D) et les droites d'équations respectives : $x = \alpha$ et $x = 0$.

b- Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha)$.

5°) a- Prouver que la restriction de f à $[0; +\infty[$ est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b- Tracer la courbe représentative de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C) .

C/ Soit m un réel et la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_m(x) = m(x+1) - e^x$. On note Γ_m la courbe représentative de f_m .

1°) Trouver l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m admet un maximum.

2°) Soit le point M_m d'ordonnée maximale de Γ_m .

Donner une équation de l'ensemble des points M_m .

Sujet N°16: BAC Session normal 2012

Exercice 1 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère la transformation ponctuelle F , qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = m^3 z + m(m+1)$, $m \in \mathbb{C}^*$.

1°) Donner la nature de la transformation F .

2°) On suppose $m = 1 + i$. Donner dans ce cas les éléments géométriques de F .

3°) Déterminer l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une translation.

4°) Déterminer l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une homothétie de rapport 8.

Exercice 2 :

1°) Linéariser l'expression $f(x) = \sin^3 x \cos x$

2°) Chercher une primitive de $f(x) = \frac{1}{4} \sin 2x$

Problème :

A/ On considère l'équation différentielle :

$$y'' + y' - 2y = -3e^x \quad (1)$$

1°) Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^x$ soit solution de l'équation différentielle (1).

2°) a- Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 0$ (2).

b- Résoudre l'équation différentielle (2).

c- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d- Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$.

B/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité : 1 cm)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-x)e^x$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2°) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x = -1$.

3°) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

4°) a- Soit α un réel supérieur à 1. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

b- Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

5°) a- Démontrer que la restriction de f à $] -\infty; 0]$ est une bijection de $] -\infty; 0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C) .

6°) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel m , le nombre de points d'intersection de (C) avec la droite (Δ_m) d'équation $y = m$.

Sujet N°17: BAC Session normal 2014

Exercice 1 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 + (-7+2i)z^2 + (15-5i)z - 25+10i$$

1°) a- Vérifier que : $P(5-2i) = 0$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

2°) Soit S la similitude plane directe de centre I d'affixe $z_I = -3 - 2i$ et qui transforme le point A d'affixe $z_A = 1 + 2i$ en B d'affixe $z_B = 5 - 2i$.

a- Déterminer f , l'application complexe associée à S .

b- Déterminer les éléments caractéristiques de S .

Exercice 2 :

On considère la suite réelle (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n.$$

On considère la suite réelle (v_n) définie par :

$$v_n = \ln(u_n + 1).$$

1°) Prouve que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2°) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

3°) Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n .

Problème :

A/ On considère l'équation différentielle : $y'' - y' = e^x$ (1)

1°) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = xe^x$ est une solution de l'équation différentielle (1).

2°) a- Démontre qu'une fonction h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle :

$$y'' - y' = 0 \quad (2)$$

b- Résoudre l'équation différentielle (2)

c- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d- Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions

$$h(0) = -4 \text{ et } h'(0) = 1$$

B/ On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = xe^x - 4$.

1°) Étudier les variations de u et dresser son tableau de variation.

2°) a- Prouve que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α .

b- Vérifier que : $1,2 < \alpha < 1,3$.

c- En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x .

C/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$f(x) = e^x - 4 \ln x$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a- Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{u(x)}{x}$.

b- Dresser le tableau de variation de f .

2°) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra $\alpha = 1,25$)

3°) Soit λ un réel tel que : $0 < \lambda < 1$.

a- Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \lambda$ et $x = 1$.

b- Calculer la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers 0.

4°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[2; +\infty[$.

a- Prouver que g est une bijection de l'intervalle $[2; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de g dans le même repère que (C) .

5°) Détermine graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$, où m est un paramètre réel.

BAC COTE D'IVOIRE

Sujet N°18 : BAC Session normal 2010

Exercice 1 :

Partie A :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E): 4z^4 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0$$

1°) Déterminer les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0.$$

3°) a- Développer, réduire et ordonner

$$(2z + 1) \left[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 \right]$$

b- En déduire les solutions de (E) .

4°) Soit $z_0 = -\frac{1}{2}$; $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

Exprimer chacun des nombres complexes z_0 ; z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie B :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ où l'unité est 1 cm, on considère les

points M_0 , M_1 et M_2 d'affixes respectives : $-\frac{1}{2}$;

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; 1 + \sqrt{3}i$$

S est la similitude directe de centre O , d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

1°) a- Détermine l'écriture complexe de S.

b- Justifier que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$.

2°) Soit M_n un point du plan d'affixe z_n .

On pose pour tout nombre entier naturel n ,

$$M_{n+1} = S(M_n)$$

Justifier que $z_{n+1} = (1 - \sqrt{3}i)z_n$ où z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1} .

3°) On considère la suite U_n définie pour tout entier naturel n par : $U_n = |z_n|$

- a- Démontrer que U_n est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
- b- Justifier que la distance $OM_{12} = 2048$.

Exercice 2 :

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.

Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8. On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1°) Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.

2°) Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.

3°) On soumet au test un individu pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.

4°) On contrôle 5 individus au hasard.

- a- Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.
- b- Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.

5°) On contrôle n individus pris au hasard. (n est un entier naturel non nul).

Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98.

Problème :

Partie A :

Soit la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $g(x) = 1 + x \ln x$.

1°) a- Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) = 1 + \ln x$

b- Etudier le sens variations de g puis dresser son tableau de variation.

2°) En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x}{1 + x \ln x}, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité : 4 cm)

1°) a- Etudier la continuité de f en 0.

b- Etudier la dérivabilité de f en 0.

c- Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est : $y = x$.

d- Démontrer que :

(C) est au-dessus de (T) sur $]0; 1[$

(C) est en-dessous de (T) sur $]1; +\infty[$.

2°) Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

3°) a- On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{(1+x \ln x)^2}$.

b- En déduire les variation de f .

4°) Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J) .

Partie C :

1°) a- Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) \leq 1$

b- Démontrer que : $\forall x \in]1; e[, 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$

2°) Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Démontrer que : $16(e-1) + 16 \ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$

Sujet N°19 : BAC Session normal 2011

Exercice 1 :

On considère la suite numérique (v_n) définie $\mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$$

1°) a- Démontrer que la suite (v_n) est convergente après avoir déterminé sa limite.

b- Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

c- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{4} \leq v_n < 1$.

2°) On pose pour tout entier naturel non nul n ,

$$a_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n.$$

a- Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

b- En déduire la limite de la suite (a_n) .

3°) On pose pour tout entier naturel n :

$$b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n)$$

a- Démontrer que (b_n) est une suite à termes négatifs.

b- Calculer la limite de la suite (b_n)

Exercice 2 :

La société « Gnamienlait » de Gnamien produit des sachets de lait caillé.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit, sa masse en gramme (g). La loi de probabilité de X est définie par le tableau ci-dessous.

x_i (en kg)	220	230	240	250	260	270	280
P_i	0,08	0,10	a	b	0,16	0,15	0,04

a et b sont deux nombres réels.

x_i représente la masse du sachet de lait caillé ;

P_i la probabilité qu'un sachet de lait ait la masse x_i .

1°) a- Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X en fonction de a et b.

b- Sachant que $E(X) = 250$, justifier que : $a = 0,14$ et $b = 0,33$.

Dans la suite de l'exercice, on conservera les valeurs de a et de b données ci-dessus.

2°) Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de sa société.

Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250g.

3°) Tiéplé, la fille de Gnamien, prend au hasard et de façon indépendante cinq sachet de lait caillé.

Calculer la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220g.

On prendra l'arrondi d'ordre 3 du résultat.

4°) Les sachets de lait caillé sont contrôlés par une machine.

Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse inférieure à 250g.

- Si un sachet de lait caillé a 240g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7
- Si un sachet de lait caillé a 230 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8.

- Si un sachet de lait caillé a 220g, il est systématiquement éliminé.
- Si un sachet de lait caillé a une masse supérieure ou égale à 250 g, il est systématiquement accepté.
 - a- Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240g soit éliminé est de 0,098.
 - b- Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

Problème :

Partie A :

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\text{définie par : } g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$$

1°) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

2°) a- Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2}$$

b- En déduire le sens de variation de g .

c- Dresser le tableau de variation de la fonction g .

3°) a- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$.

b- Justifier que $2,55 < \alpha < 2,56$

c- Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B :

On considère la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie

$$\text{par : } f(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) e^{-x}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) . (unité graphiques : $OI = 2\text{ cm}$ et $OJ = 10\text{ cm}$)

1°) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis donner une interprétation

graphique du résultat.

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

2°) Démontrer que : $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$

3°) a- Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$

b- En utilisant la partie A, déterminer les variations de f .

c- Dresser le tableau de variation de f .

4°) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est : $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$.

5°) Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).
On prendra $\alpha = 2,6$.

Partie C :

1°) Soit la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $h(x) = e^{-x} \cdot \ln x$.

Démontrer que h est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

2°) Soit λ un nombre réel tel que : $\lambda > 3$.

a- Calculer, en cm^2 et en fonction de λ , l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équations : $x = 3$ et $x = \lambda$.

b- Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

Sujet N° 20: BAC Session normal 2012

Exercice 1 :

Madame Kouamé, statisticienne à la retraite, a créé une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels. Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2011, elle a fait l'état des ventes des huit types de colliers fabriqués en 2010. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Type de collier	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix x_i de vente en centaines de francs CFA du collier de type i	54	60	66	72	84	90	96	102
Nombre y_i de dizaines de colliers vendus au prix x_i	18	16	15	13	10	9	8	7

On désigne par :

X le caractère « prix de vente de collier »

Y le caractère « nombre colliers vendus au prix X »

1°) Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double de caractère (X; Y) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On prendra 2 cm pour 10 centaines de francs sur (OI) et 2 cm pour 2 dizaines de colliers sur (OJ).

2°) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3°) a- Calculer la variance $V(X)$ de X.

b- Calculer la covariance $\text{cov}(X; Y)$ de la série statistique double de caractère (X; Y).

c- On admet que $V(Y) = 14,5$. Démontrer que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à -0,99

4°) Soit (D) la droite de regression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

a- Justifier que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à 0,23

b- Démontrer qu'une équation de la droite (D) est $y = -0,23x + 29,94$.

5°) Pour l'année 2011, Madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11 500 francs CFA l'unité. Combien de colliers de ce type pourrait-elle vendre selon l'ajustement linéaire réalisé ?

Exercice 2 :

On considère la suite numérique U définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{4}{U_n} \right) \end{cases}$$

1°) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x} \right).$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) où les unités respectives sur (OI) et (OJ) sont 1 cm et 2 cm.

La courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$ sont tracées sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

a- Représenter sur l'axe des abscisses (OI) les termes U_1 , U_2 et U_3 de la suite U en utilisant la courbe (C) et la droite (D).

b- Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite U ?

2°) On admet que f est continue et strictement croissante sur $[2; 3]$.

a- Démontrer que $f([2; 3]) \subset [2; 3]$

b- En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $2 \leq U_n \leq 3$

3°) a-Démontrer que U est décroissante.

b- En déduire que la suite U est convergente.

4°) On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$$

a- Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$V_{n+1} = (V_n)^2$$

b- Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$.

c- Calculer V_1 puis exprimer V_n en fonction de n .

d- Exprimer U_n en fonction de n .

e- Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$. En déduire la limite de U .

Problème :

Partie A:

On considère la fonction g dérivable et définie sur

$]0; +\infty[$ par : $g(x) = e^x + 2 \ln x$.

1°) a- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

b- Calculer $g'(x)$.

c- Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

2°) a- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$.

b- Vérifier que : $0,4 < \alpha < 0,5$

c- Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x + 2x \ln x - 2x, \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est 4 cm.

3°) a- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b- Interpréter graphiquement les résultats.

4°) a- Démontrer que f est continue en 0.

b- Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$.

c- La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.

d- Interpréter graphiquement le résultat de la question 4°) b-

5°) On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

a- Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

b- Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

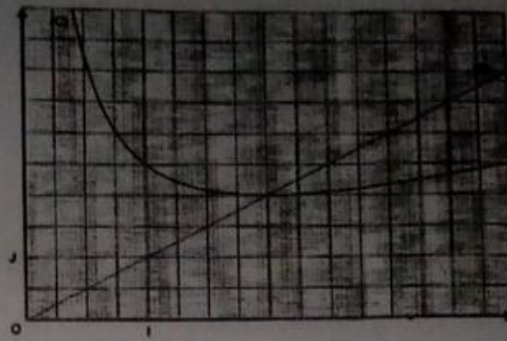
6°) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[0; 2]$. (on prendra $\alpha = 0,45$ et on admettra que la courbe (C) coupe la droite (OI) en deux points d'abscisses respectives 0,3 et 0,6)

7°) a- On pose $K = \int_1^2 x \ln x \, dx$. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $K = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$

b- Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

Calculer A puis donner l'arrondi d'ordre 2 résultat.

Feuille annexes à rendre avec la copie



Sujet N°21 : BAC Session normal 2013

Exercice 1 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), on désigne par K, A et B les points d'affixes respectives $z_1 = 2$, $z_2 = 4 + 2i$ et $z_3 = 2 + 4i$. L'unité est 2 cm.

1°) a- Place les points K, A et B.

b- Détermine la forme algébrique du nombre

complexe $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

2°) On note par S la similitude directe de centre K qui transforme A en B.

a- Démonstre que l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1 + i)z - 2i$$

b- Détermine les affixes respectives des points I' et J', images respectives des points I et J puis place I' et J'.

3°) Détermine le rapport et une mesure de l'angle orienté de la similitude directe S.

4°) Soit (C) le cercle de centre $\Omega(1; 1)$ et de rayon 2.

a- Trace (C)

b- Détermine le centre et le rayon de (C'), image de (C) par S.

c- Construis (C')

5°) a- Détermine puis construis l'image par S de la droite (IJ).

(Tu pourras caractériser l'image par S de la droite (IJ) par deux de ses points)

b- On désigne par E le point d'intersection de (C) et la droite (IJ) d'abscisse négative.

Place E et l'image E' de E par S. Justifie la position du point E'

Exercice 2 :

On considère la suite numérique (u) définie par :

$$u_0 = \sqrt{2} \text{ et pour tout nombre entier naturel } n,$$

$$u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n.$$

le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; I, J)$.

L'unité graphique est 2 cm.

1°) Détermine les valeurs exactes de u_1 et u_2

2°) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ et de représentation graphique (D).

a- Trace (D) et la droite (Δ) d'équation graphique $y = x$

b- Place u_0 sur l'axe (OI) .

c- A l'aide de (D) et (Δ) , place les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u) sur l'axe (OI)

3°) a- Démontre par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n \leq 4$.

b- Démontrons que la suite (u) est croissante

c- Dédus-en que la suite (u) est convergente.

4°) On considère la suite (v) définie par $v_n = u_n - 4$, pour tout entier naturel n .

Démontre que la suite (v) est une suite géométrique dont tu préciseras le premier terme et la raison.

5°) On pose, pour tout nombre entier naturel n :

$T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (v) .

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u) .

a- Détermine une expression de T_n en fonction de n

b- Justifie que : $S_n = 2(\sqrt{2} - 4)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 4(n+1)$

c- Détermine la limite de S_n .

Problème :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm. On considère la fonction f et définie sur $]-\infty; 1[$ par :

$$f(x) = x^2 - 1 + \ln(1-x).$$

1°) a- Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b- Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donne une interprétation graphique du résultat.

c- Calcule la limite de f à gauche en 1 puis donne une interprétation graphique du résultat.

2°) a- Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, Calcule $f'(x)$.

b- Démontre que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.

c- Dresse le tableau de variation de f .

3°) a- Démontre que l'équation $(E) : x \in]-\infty; 1[$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α .

b- Justifie que $-0,7 < \alpha < -0,6$.

4°) a- Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = -x - 1$.

b- On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,75	-0,5
$f(x) \approx$	4,1	2,2	0,7	0,1	-0,3

-0,25	0,25	0,5	0,75
-0,7	-1,2	-1,4	-1,8

Trace (T) et (C)

On pourra faire la figure dans la partie du plan

caractérisée par : $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 6 \end{cases}$

5°) On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par (C) , la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

a- Calcule $\int_{\alpha}^0 \ln(1-x) dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b- Démontre que la valeur de A en unités d'aire est :

$$A = \frac{\alpha^2}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$$

c- Détermine en cm^2 l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de A pour $\alpha = -0,65$.

6°) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni du repère (O, I, J) .

a- Calcule $f(-1)$.

b- Démontre que le nombre dérivé de f^{-1} en $\ln 2$ existe puis le calculer.

c- Construis la courbe (C') et sa tangente (Δ) au point au point d'abscisse $\ln 2$ sur la même figure de la question 4°) b-

BAC CAMEROUN

Sujet N°22 : BAC Session normal 2012

Exercice 1 :

Une maîtresse a regroupé dans un tableau statistique les résultats d'une enquête portant sur le nombre de gâteaux consommés pendant la récréation par 200 élèves d'une maternelle.

Modalités	0	1	2	3	4
Effectifs	10			35	
Effectifs cumulés croissants	10		80	115	
Fréquences en pourcentage		20		17,5	

- 1°) Quelle est la nature du caractère étudié ?
- 2°) Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
- 3°) Quelle est le mode de cette série statistique ?
- 4°) Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de la série étudiée.

Exercice 2 :

1°) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $2z^2 - 2iz - 1 = 0$.

2°) Le plan orienté étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $\frac{-1+i}{2}$ et $\frac{1+i}{2}$.

Démontrer que OAB est un triangle rectangle de sommet principal O.

3°) On pose : $Z = \frac{-1+i}{1+i}$

- a- Ecrire Z sous la forme trigonométrique.
- b- En déduire les racines cubiques de Z sous la forme trigonométrique puis sous la forme algébrique.

Problème :

Partie A :

Soit la fonction numérique définie sur $] -1; 0]$ par :

$f(x) = \ln(1-x^2) - x$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère

orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 10 cm)

1°) Déterminer la limite de f à droite en -1 .

Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

2°) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3°) Donner le coefficient directeur de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

4°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $] -0,72; -0,71[$ une unique solution α .

5°) Tracer $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{C})$.

6°) Tracer dans le même repère la courbe représentative de $|f(x)|$.

Partie B :

7°) Vérifier l'égalité

$$\int_{\alpha}^0 \ln(1-x^2) dx = \int_{\alpha}^0 \ln(1+x) dx + \int_{\alpha}^0 \ln(1-x) dx$$

8°) A l'aide des intégrations par parties, calculer en

fonction de α les intégrales suivantes : $I = \int_{\alpha}^0 \ln(1+x) dx$

$$\text{et } J = \int_{\alpha}^0 \ln(1-x) dx$$

(On pourra remarquer que : $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ et

$$\frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x})$$

9°) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire exprimée en cm^2 de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

Calcule $\mathcal{A}$ en fonction de α .

Partie C :

On considère la suite U à terme positifs définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_{n+1} = 2\sqrt{U_n}$ et $U_1 = 1$

1°) Calculer U_2 et U_3 . Donner les résultats sous la forme de 2^λ où λ est un réel.

2°) soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \ln U_n - 2 \ln 2$

- a- Prouver que (V_n) est une suite géométrique.
- b- Exprimer V_n en fonction de n .
- c- En déduire l'expression de U_n en fonction de n et calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.

Sujet N°23 : BAC Session normal 2013

Exercice 1 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct

$(O; \vec{u}, \vec{v})$

1°) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$.

b- Ecrire les solutions sous forme trigonométrique.
 2°) a- Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2 - 2i$ et $z_C = 4$. Placer les points A, B et C dans le plan.

b- Calculer le rapport $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$, en déduire la nature

du triangle CAB, puis celle du quadrilatère AOBC.

3°) Soit f la similitude plane directe du plan complexe qui laisse le point C invariant et qui transforme le point C invariant et qui transforme le point A en O.

a- Donner l'écriture complexe de f .

b- Donner les éléments caractéristiques de f .

Soit g la transformation de P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixes z' tels que $z' = (1 - i)z + 4i$.

c- Ecrire sous forme algébrique, l'affixe G' , image du barycentre G des points pondérés (A ; 3) ; (B ; 2) et (C ; -3) par g .

Exercice 2 :

Une boîte contient 6 boules vertes et n boules blanches toutes indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer successivement sans remise deux boules de la boîte. Si les deux boules sont de même couleur, le joueur gagne 100F et si les boules sont de couleurs différentes, le joueur perd 100F.

1°) Dans cette question on pose $n = 3$.

a- Calculer la probabilité de d'obtenir :

- deux boules de même couleur.
- deux boules de couleurs différentes.

b- Sachant que la première boule tirée est verte, quelle est la probabilité pour que la deuxième boule tirée soit verte ?

2°) Dans cette question, l'entier naturel n est quelconque et supérieur à 3. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage successif sans remise de deux boules associe le gain algébrique en francs du joueur.

a- Exprimer en fonction de n la probabilité des événements : ($X = -100$) et ($X = 100$).

b- Prouve que l'espérance mathématique de X est

$$E(X) = 100 \times \frac{n^2 - 13n + 30}{(n+6)(n+5)}$$

c- Pour quelle valeurs de n a-t-on $E(X) < 0$?

Problème :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1°) Prouver que pour tout réel $x > 1$, $f(x) > 1$.

2°) On considère les suites (v_n) et (w_n) , tels que, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ et $w_n = \ln v_n$

a- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 1$.

b- Calculer v_1 et w_1 .

c- Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

d- Exprimer pour tout entier naturel n , w_n puis v_n en fonction de n .

e- En déduire que : $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$ puis calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

Partie B :

Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$, par :

$h(x) = x^2 e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec pour unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

1°) a- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

b- Etudier le sens de variation de h .

c- dresser le tableau de variation de h .

d- Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2°) a- Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la fonction définie par $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction h .

b- Soit λ un réel strictement positif. Calculer le réel : $\int_0^\lambda h(x) dx$.

c- $A(\lambda)$ est l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

Déterminer $A(\lambda)$ puis calculer sa limite lorsque λ tend vers plus infinie.

Partie C :

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E): y'' - 2y' + y = x - 2 ; (E'): y'' - 2y' + y = 0$$

On considère la fonction affine φ définie par

$$\varphi(x) = ax + b, \text{ avec } (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

- Déterminer a et b pour que la fonction φ soit solution l'équation (E) .
- Soit g une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - \varphi$ est solution de (E') .
- Résoudre (E') .
- En déduire les solutions de l'équation (E) .

Sujet N°24 : BAC Session normal 2014

Exercice 1 :

A. On considère le polynôme p définie par :

$$p(z) = z^3 - 3z^2 - 3z + 5 + 20i, \text{ } z \text{ étant un nombre complexe.}$$

- Prouve que $1 + 2i$ est une racine de p .
- Trouver deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait $p(z) = (z - 1 - 2i)(z^2 + az + b)$.
- Déduire dans l'ensemble des nombres complexes, les solutions de l'équation $p(z) = 0$.

B. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$; on prendra 1 cm pour unité graphique.

4°) Placer les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1 + 2i$; $b = -2 - i$ et $c = 4 - i$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

5°) a- Soit D le point d'affixe $2 + 3i$, prouve que les points A, B et D sont alignés.

b- Calculer $\frac{b-a}{c-a}$, mettre le résultat sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique.

c- En déduire la nature exacte du triangle ABC.

Exercice 2 :

Une entreprise achète, utilise et revend des machines après un certain nombre x_i d'années. Après 6 années, l'évolution du prix de vente d'une machine en fonction du nombre d'années d'utilisation, se présente comme suit :

Nombre d'année x_i	1	2	3	4	5	6
Prix y_i en milliers de FCFA	150	125	90	75	50	45

- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. (On prendra 1cm pour une année en abscisse, et 1cm pour 2000 FCFA en ordonnée)
- Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série $(x_i; y_i)$ ainsi définie.
- En utilisant la méthode des moindres carrés, déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de y en x de cette série statistique.
- En déduire une estimation du prix de vente d'une machine après 7 ans d'utilisation.

Problème :

On considère la fonction numérique de la variable réelle

$$x \text{ définie pour tout } x \neq -2 \text{ par : } f(x) = \frac{e^x}{x+2}. \text{ On note}$$

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A :

- Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-1; +\infty[$; démontrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
- Tracer dans le même repère, la courbe (C) représentative de f , et la courbe (C') représentative de g^{-1} .

Partie B :

- Déterminer l'image par f de l'intervalle $[0; 1]$.
- Calculer $f''(x)$ et vérifier que pour tout x de $[0; 1]$, $f''(x) > 0$.
- En déduire que pour tout x de $[0; 1]$, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 1]$ (On ne demande pas de calculer α).

Partie C :

On considère la suite (u_n) à termes positifs, définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et pour tout entier naturel non nul } n,$$

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

BAC TOGO

Sujet NC 26 - BAC Session normal 2012

Exercice 1 :

Le tableau suivant donne l'évolution du prix en dollar (\$) de la tonne d'une terre rare entrant dans la fabrication d'un composant électronique ces dix dernières années.

Année	2002	2003	2004	2005	2006
Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5
Prix de la tonne en \$ (y_i)	38	45	40	55	70

Année	2007	2008	2009	2010	2011
Numéro de l'année (x_i)	6	7	8	9	10
Prix de la tonne en \$ (y_i)	60	75	80	95	106

1°) a- Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i ; y_i) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité : 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour dix dollars en ordonnée.

b- Calculer les coordonnées du point G.

2°) a- Calculer à 10^{-2} près par excès, le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i ; y_i).

En déduire qu'un ajustement affine est justifié.

b- Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite de régression linéaire (D) de y en x (on donnera les coefficients à 10^{-2} près par excès)

c- Tracer la droite (D) dans le même repère que celui du nuage des points.

3°) En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon dans les années à venir :

a- Donner une estimation du prix de la tonne de cette terre rare en 2016.

b- En quelle année le prix de la tonne de cette terre rare dépassera 180\$.

Exercice 2 :

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$$

1°) a- Vérifier que i est solution de (E).

b- Déterminer les nombres réels a , b et c tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$$

c- En déduire les solutions de (E).

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes $z_A = i$, $z_B = 2 + 3i$ et $z_C = 2 - 3i$

a- Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer l'affixe $z_{A'}$ du point A' image de A par r .

b- Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}$. En déduire l'existence d'une

homothétie h de centre B qui transforme A' en C et préciser son rapport.

3°) On considère la transforme plane s définie par : $s = h \circ r$.

a- Quelle est l'image de A par s .

b- Précise la nature et les éléments géométriques de s .

Problème :

Soit k un entier naturel non nul. On considère la

fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = x^k \left(e^{-x} - \frac{1}{2} \right)$. On

note C_k la courbe représentative de f_k dans le plan

rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm)

Partie A :

1°) a- Etudier la limite de f_k en $+\infty$.

b- Etudier, suivant la parité de k , la limite de f_k , la limite de f_k en $-\infty$.

2°) Calculer la fonction dérivée de f_k , puis prouver que pour tout x réel, $f_k'(x) = x^{k-1} g_k(x)$ où

$$g_k(x) = (k-x)e^{-x} - \frac{k}{2}.$$

3°) a- Etudier les variations de g_k .

b- En déduire que l'équation $g_k(x) = 0$, admet une unique solution α_k dans $\mathbb{R}$ et que α_k est strictement positif.

c- Déterminer le signe de g_k sur $\mathbb{R}$.

En déduire le signe de f_k' sur $\mathbb{R}$ (distinguer k pair et k impair).

d- Dresser le tableau de variation de f_k .

Partie B :

Dans cette partie, on prend $k=1$. Donc $f_1(x) = xe^{-x} - \frac{x}{2}$

$$\text{et } g_1(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}.$$

4°) a- Démontrer que : $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$.

b- En utilisant g_1 , prouver que : $e^{-\alpha_1} = \frac{1}{2(1-\alpha_1)}$.

En déduire l'expression de $f_1(\alpha_1)$ ne contenant pas $e^{-\alpha_1}$.

c- Déduire de la Partie A/ 3°) d- le tableau de variation de f_1 .

5°) Démontrer que la courbe (C_1) possède une asymptote (D) en $+\infty$ dont on précisera une équation.

6°) Soit la fonction φ définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par

$$\varphi(x) = 1 - \frac{e^x}{2}.$$

a- Démontrer que α_1 est l'unique solution de l'équation : $\varphi(x) = x$.

b- Démontrer que pour tout x élément de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,

$$\varphi(x) \text{ est aussi élément de } \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

c- Démontrer que pour tout x élément de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,

$$\text{on a : } |\varphi'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

7°) On définit la suite numérique (U_n) par : $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \varphi(U_n)$.

a- Démontrer que (U_n) est une d'élément des de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

b- Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $|U_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |U_n - \alpha_1|$.

c- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $|U_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n$.

En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

8°) a- Etudier le signe de f_1 sur $\mathbb{R}$.

b- On donne $\alpha_1 \approx 0,315$. Construire (C_1) et (D) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

9°) a- Détermine les nombres réels a et b tels que, la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction : $x \mapsto xe^{-x}$.

b- Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_1) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Sujet N° 27: BAC Session normal 2013

Exercice 1 :

Soit a un nombre complexe.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(1+i)z^2 - 2i(a+1)z - (i-1)(a^2+1) = 0$$

2°) Soient z_1 et z_2 les solutions de cette équation.

Trouver entre z_1 et z_2 une relation indépendante de a .

3°) Caractériser la transformation f du plan complexe qui à tout point M_1 d'affixe z_1 associe le M_2 d'affixe z_2 .

4°) On pose $z_1 = x + iy$ et $z_2 = x' + iy'$

a- Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

b- Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation : $x + 2y - 1 = 0$?

Exercice 2 :

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E) : y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 2(1-2x)e^x$$

$(E') : y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 0$; dans laquelle m est un paramètre réel.

1°) Résoudre, suivant les valeurs de m , l'équation (E') .

2°) Déterminer la valeur de m pour laquelle, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^2 e^x$ est une solution de (E) .

3°) Dans cette question, on donne $m = 2$

a- Soit φ une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a₁) Démontrer que si φ est une solution de (E) alors $(\varphi - h)$ est une solution de (E') .

a₂) Démontrer que si $(\varphi - h)$ est une solution de (E') alors φ est une solution de (E) .

b- Déduire de 1°), la résolution de (E') ; puis résoudre (E) .

c- Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère orthonormé passe par le point $\Omega(0; -1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

4°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x^2 - 2)e^x + e^{3x} \text{ et } U \text{ une primitive sur } \mathbb{R} \text{ de la fonction : } x \mapsto 2(1-2x)e^{2x}.$$

a- Sachant que g est une solution de (E) , démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)]$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

- b- Déterminer une expression de $U(x)$ de la forme : $U(x) = (ax + b)e^x$ où a et b sont des croissantes réelles.
- c- En déduire $G(x)$.

Problème :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}. \text{ On désigne par (C) sa courbe}$$

représentative dans un repère orthonormé (O ; I, J). L'unité graphique est 2 cm.

A/

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x + 2 - e^x.$$

1°) Etudier le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

2°) a- Démontrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[0; +\infty[$.

On note α cette solution.

b- Prouver que : $1,14 < \alpha < 1,15$.

3°) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B/

4°) a- Démontrer que, pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

b- En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

5°) a- Démontrer que, pour tout réel positif x ,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

b- En déduire la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

6°) a- Etablir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$.

b- En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A/ 2°, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} .

7°) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

8°) a- Etablir que pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$,

$$f(x) - x = \frac{(x+1)\varphi(x)}{xe^x + 1} \text{ avec } \varphi(x) = e^x - xe^x - 1.$$

b- Etudier le sens de variation de φ sur $[0; +\infty[$.

En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $[0; +\infty[$.

c- Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

d- Tracer (C) et (T).

C/

9°) Déterminer une primitive F de f sur $[0; +\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie en B/ 5°) a-.

On note D le domaine du plan limité par la courbe (C), la tangente (T), les droite d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

10°) Calculer en cm^2 , l'aire A du domaine D.

11°) Pour tout entier naturel k , on pose $V_k = \int_k^{k+1} f(x) dx$.

a- Calculer V_0 , V_1 et V_2 .

b- Démontrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$, $f(k+1) \leq V_k \leq f(k)$.

c- Déduire la limite de V_k quand k tend vers $+\infty$.

BAC BENIN

Sujet N°28 : BAC Session normal 2000
(cor. p: 515)

Exercice 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$P(z) = z^3 + \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(1 + i)z^2 + 4i(\sqrt{2} + 1)z - 4\sqrt{2}(1 - i)$$

1°) Calculer $P(-2i)$ et $P(1 + i)$

2°) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

4°) Soit M_0, M_1, M_2 les points du plan complexe d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 avec $z_0 = -2$; $z_1 = -2i$ et $z_2 = -2 - 2i$

On pose : $u = z_0 \times z_1 \times z_2$

- a- Ecrire u sous forme trigonométrique
- b- Ecrire u^{2000} sous forme algébrique.
- c- Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle $M_0M_1M_2$

Exercice 2 :

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives :

$$(P) : x - 2y + \frac{3}{2}z + \frac{5}{2} = 0 ;$$

$$(Q) : x - 2y + 3z - 2 = 0$$

- 1°) Vérifier que les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles
- 2°) Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q). Déterminer une représentation paramétrique de (D)
- 3°) Déterminer une équation du plan (R) de $\mathcal{E}$, passant par $A(1; -1; 0)$ et perpendiculaire aux plans (P) et (Q).

- 4°) a- Le point A appartient-il au plan (Q)
- b- Calculer la distance de A au plan (Q)

Problème 3 :

Partie A :

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y' - y = 2 - 2x$$

1°) a et b étant des nombres réels, déterminer a et b pour que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par : $p(x) = ax + b$ soit solution de (E)

2°) Soit φ une fonction de variable réelle.

- a- Démontrer que φ est une solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - p$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' - y = 0$
- b- Résoudre (E')
- c- Déterminer la solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = 1$.

Partie B :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + e^x \text{ et } g(x) = f(x) - x$$

3°) a- Etudier les variations de f

b- Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

c- On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f

et par $(\mathcal{C}^{-1})$ celle de f^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$
- Construire $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}^{-1})$ (On pourra calculer

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ et } f(0).$$

4°) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique x_0 , vérifiant : $-1 < x_0 < 0$.

Dans tout ce qui suit, on pose $h = f^{-1}$

5°) a- Justifier que : $h(x_0) = x_0$

b- Démontrer que pour tout x appartenant à $] -\infty; x_0]$, $h(x)$ appartient à $] -\infty; x_0]$

6°) a- Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $] -\infty; x_0]$, on a : $0 < h'(x) < \frac{1}{2}$.

b- Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à $] -\infty; x_0]$, on a : $|h(x) - x_0| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$

Partie C :

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$$

7°) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in] -\infty; x_0]$

8°) a- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2} |U_n - x_0|$$

b- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0|.$$

c- En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

Sujet N°29 : BAC Session normal 2001
(cor. p: 518)

Exercice 1 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 2(4-i)z^3 + (26-9i)z^2 - (43-15i)z + 32-4i, \quad i$$

désignant le nombre complexe tel que : $i^2 = -1$

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$u^2 - (-11+i)u + 32-4i = 0$$

2°) a- Démontrer que pour tout nombre complexe z , l'on a :

$$P(z) = [z^2 - (4-i)z]^2 - (-11+i)[z^2 - (4-i)z] + 32-4i.$$

b- En utilisant les résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

3°) On donne les points A, B et C d'affixes respectives $1+i$, $2+i$ et $2-2i$ dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

a- Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})}$

b- Donner une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 2 :

Soient A et B deux points distincts de l'espace orienté $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{E}$.

1°) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de $\mathcal{E}$ tels que l'on ait : $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AB}$ Pour la suite de l'exercice, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne $A(0;2;0)$; $B(3;0;4)$ et $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2°) Donner une représentation paramétrique de (Δ)

3°) a- Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par A et orthogonal à (Δ) .

b- Calculer les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (P).

4°) soit (Δ') la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

a- Démontrer que (Δ') n'est pas orthogonale à (P).

b- Déterminer une équation cartésienne du plan (P') contenant (Δ') et perpendiculaire à (P).

c- Déterminer un repère de la droite d'intersection des plans (P) et (P')

Problème :

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par :

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

Partie A :

1°) a- Déterminer l'ensemble de définition D de f

b- Déterminer les limites de f aux bornes de D.

c- Déterminer la fonction dérivée première f' de f

d- Dresser le tableau de variation de f .

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2°) a- Etudier les branches infinies de (C).

b- Construire (C)

3°) a- Déterminer l'intervalle $K = f(\mathbb{R})$.

b- Soit l'application g de $\mathbb{R}$ dans K définie par :

$$g(x) = f(x) \text{ pour tout réel } x.$$

Démontrer que g est une bijection. On désigne par (Γ)

la courbe représentative de la fonction réciproque g^{-1} de g .

c- Construire (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Partie B :

Soit la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = \ln[f(x)].$$

4°) Démontrer que pour tout élément x de $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ on a :

$$\frac{1}{4} \leq g(x) \leq 1.$$

5°) Démontrer qu'il existe un élément k de l'intervalle

$$]0;1[\text{ tel que l'on ait : } \forall x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right], |g'(x)| \leq k$$

6°) Démontrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution a appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$

*) Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

a- Démontrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{4} \leq u_n \leq 1.$$

b- Démontrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on a :

$$|u_{n+1} - a| \leq k |u_n - a|$$

c- En déduire que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - a| \leq k^n$$

d- Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Sujet N°30 : BAC Session normal 2002
(cor. p. 521)

Exercice 1 :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points I et A définis par : $\vec{OA} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{OI} = -2\vec{i}$

Soient les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{k}$.

On considère l'ensemble (D) des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $\vec{u} \wedge \vec{AM} = \vec{v}$

1°) a- Vérifier que I est un point de (D).

b- Démontrer que M est un point de (D) si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{IM} = \vec{0}$

c- Déduire de la question b-, que (D) est une droite dont on précisera un repère.

2°) Soit (Δ) la droite de E d'équations cartésiennes : $x + 2 = y = z$ et soit (P) le plan d'équation : $x + y + z + 2 - 3\sqrt{3} = 0$. Soit B et C deux points distincts de (Δ)

a- Démontrer que (Δ) est perpendiculaire à (P)

b- On pose : $\{H\} = (\Delta) \cap (P)$

Calculer les coordonnées de H.

3°) a- Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un même plan (Q).

c- Déterminer une équation cartésienne de (Q).

Exercice 2 :

Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel

non nul n par $V_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t) dt$

1°) Justifier que V_n existe.

2°) a- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout $x \in [0;1]$ on a :

$$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln 2 \text{ et } (x-1) \ln(1+x) \leq 0$$

b- Justifier que (V_n) est une suite décroissante.

c- En déduire que (V_n) est une suite convergente.

3°) a- Déduire du a- de la question 2°) que pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq V_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

b- Calculer la limite de la suite (V_n)

Problème :

Soit f la fonction numérique de variable réelle x définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} (x + \ln x) \text{ où } \ln \text{ désigne la fonction}$$

logarithme népérien.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique : 2 cm)

Partie A :

Partie A :

Soit h la fonction définie sur I par :

$$h(x) = -x + 1 - 2 \ln x$$

1°) a- Calculer les limites de h aux bornes de I

b- Dresser le tableau de variation de h

2°) Calculer $h(1)$ et déduire le signe de $h(x)$ pour tout x élément de I .

Partie B :

3°) a- Calculer les limites de f aux bornes de I .

b- Etudier le sens de variation de f .

c- Dresser le tableau de variation de f .

4°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.

5°) On pose $J = f([1; +\infty[)$. Soit g l'application définie de $[1; +\infty[$ vers J par : $g(x) = f(x)$.

a- Déterminer J et démontrer que g est une bijection.

On désigne par g^{-1} , l'application réciproque de g .

b- Résoudre dans J , l'équation $g^{-1}(x) = e$.

c- Calculer $(g^{-1})(e^{-2} + e^{-1})$.

6°) Construire la courbe (C) et la courbe (Γ) de g^{-1} dans le repère $\mathcal{R}$.

Sujet N° 31: BAC Session normale 2003
(cor. p. 524)

Exercice 1 :

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes et (P) le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1°) Calculer $(\sqrt{3} - i)^2$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - (\sqrt{3} + 3i)z - 2 + 2\sqrt{3}i = 0$$

On écrira les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

3°) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $\sqrt{3} + i$, $2i$ et $-2 + 2i$.

a- Déterminer la nature du triangle OAB.

b- f est l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle

$$\text{que } z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z. \text{ Vérifier que } f(B) = A.$$

c- Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme algébrique l'affixe du point C', image du point C par f . En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$

$$\text{et } \sin \frac{5\pi}{12}$$

Exercice 2 :

A l'issue des épreuves d'une session du baccalauréat, l'on s'est intéressé aux notes conjointement attribuées à un groupe de candidats de la série D par un professeur de français et par un professeur d'anglais. Les notes varient de 0 à 5.

Désignant respectivement par X et par Y les notes de français et d'anglais obtenues par chaque candidat du groupe-cible, on a réalisé le tableau à double entrée suivant :

Notes x_j de X	0	1	2	3	4	5
Notes y_i de Y						
0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	2	0	0
2	0	2	1	1	0	0
3	0	2	1	4	0	1
4	0	0	3	1	1	0
5	0	1	1	0	0	0

1°) Dresser les tableaux des effectifs des variables statistiques X et Y.

2°) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_j)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On placera en abscisses les notes de français et en ordonnées les notes d'anglais.

3°) a- Calculer les coordonnées du point nuage.

b- Calculer $\text{cov}(X, Y)$ et $V(X)$

4°) a- Déterminer une équation de la droite de régression (D) de Y en X.

b- Trace la droite (D) dans le même repère orthonormé de la question n°2 ci-dessus.

5°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) . Interpréter le résultat obtenu.

Problème :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2} \ln|2x - 1|$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f .

1°) a- Déterminer l'ensemble de définition D de f .

b- Calculer les limites de f aux bornes de D.

2°) a- Déterminer la fonction dérivée première f' et la fonction dérivée seconde f'' de la fonction f .

b- Etudier le sens de variation de f' .

c- Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout élément de D.

(On remarquera que $f'(0) = 0$)

3°) a- Dresser le tableau de variation de f .

b- Etudier les branches infinies de (C) .

4°) a- Démontrer que la courbe (C) coupe une seule fois l'axe des abscisses en un point d'abscisse α telle que :

$$1 < \alpha < \frac{3}{2}$$

b- Construire la courbe (C)

5°) Exprimer uniquement en fonction de α et de $e^{-\alpha}$ l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\alpha$; (α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) et de l'axe des abscisses).

6°) On considère l'application g définie de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ vers

$$[1; +\infty[\text{ par : } g(x) = f(x).$$

Démontrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} .

On désigne par (C') la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

7°) a- Justifier que (C') admet une demi-tangente verticale en son point d'abscisse 1.

b- Préciser les branches infinies de (C')

c- Construire (C')

Sujet N°32 : BAC Session normal 2004
(cor. p: 427)

Exercice 1 :

1°) Déterminer trois nombres réels α, β, γ tels que l'équation différentielle (E): $\alpha z'' + \beta z' + \gamma z = 0$ ait pour équation caractéristique associée : $(2r+1)^2 = 0$.

2°) On pose $\alpha = \beta = 4\gamma = 4$

- a- Ecrire et résoudre l'équation (E).
- b- Déterminer la solution y de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé du plan admet en son point $M_0(0; 2)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3°) On pose $h(x) = (x+2)e^{-\frac{x}{2}}$ et $U_n = \int_0^n h(x) dx$

- a- Calculer U_n en fonction de l'entier naturel n .
- b- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \leq U_n < 8$
- c- Pour tout entier naturel n , déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$.
- d- En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère

l'application h définie sur $\mathbb{C}^*$ par : $h(z) = \frac{1}{3} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

1°) On désigne par K le point d'affixe $h\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Déterminer les coordonnées de K.

2°) On suppose que α est nombre réel.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $h(z) = \frac{2}{3} \cos \alpha$.

3°) a- En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E') :

$$z^4 - 2z^2 \cos \alpha + 1 = 0$$

(On mettra les solutions sous forme exponentielle).

b- Démontrer que (E') admet deux solutions telles que leurs conjuguées sont aussi solutions de (E')

c- Décomposer $P(x) = x^4 - 2x^2 \cos \alpha + 1$ en produit de deux polynômes de degré deux, à coefficients réels.

4°) On considère l'application f du plan complexe dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point

$$M' \text{ d'affixe } z' \text{ telle que } 2\left(z - \frac{1}{3}\right) = (1+i)\left(z' - \frac{1}{3}\right).$$

- a- Démontrer que f est une similitude plane directe dont on précisera le rapport.

- b- Démontrer que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie dont on donnera les éléments caractéristiques.

Problème :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \exp_2(x^2 - 3x + 2) & , \text{ si } x \in [0; 2] \\ f(x) = x - 1 - \frac{1}{\ln(x-2)} & , \text{ si } x \in]2; +\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra pour unité 2 cm)

1°) Démontrer que l'ensemble de définition de f est $D = [0; 3[\cup]3; +\infty[$

2°) a- Etudier la continuité de f en $x = 2$

b- Etudier la dérivabilité de f en $x = 2$

c- Préciser les demi-tangentes éventuelles à la courbe (C) au point d'abscisse 2.

3°) a- Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et détermine la fonction dérivée f' de f .

b- Etudier le sens de variation de f .

4°) a- Calculer les limites de f aux bornes de D .

b- Dresser le tableau de variation de f .

5°) a- Démontrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C).

b- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et prouver que α appartient à

$$\text{l'intervalle } \left] \frac{17}{5}; \frac{7}{2} \right[$$

c- Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

6°) On considère la fonction F définie par

$$F(x) = \int_4^x \frac{dt}{\ln(t-2)}$$

a- Justifier que F est définie et dérivable sur $[4; +\infty[$

b- Quel est le sens de variation F sur $[4; +\infty[$?

c- Par la méthode des rectangles, donne un encadrement de $F(5)$ par deux nombres décimaux d'ordre 3.

(On subdivisera l'intervalle $[4; 5]$ en cinq intervalles de même longueur).

d- En Déduire un encadrement de l'aire en centimètres carrés de la partie du plan limitée

par la courbe (C) et les droites d'équations $y = x - 1$, $x = 4$ et $x = 4$.

Soit l'application $g: \left[\frac{3}{2}; 2 \right] \rightarrow \left[2^{\frac{3}{4}}; 1 \right]$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

a- Démontrer que g admet une application réciproque g^{-1} .

b- Déterminer l'intervalle K sur lequel g^{-1} est dérivable.

8°) On désigne par (Γ) la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a- Démontrer que le point $A(1; 2)$ appartient à (Γ) et écrire un système qui définit la demi-tangente à la courbe (Γ) au point A .

b- Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $\left[2^{\frac{3}{4}}; 1 \right]$.

c- Construire (Γ) dans le même repère que (C).

Sujet N°33 : BAC Session normal 2005
(cor. p: 531)

Exercice 1 :

Une entreprise fabrique des postes téléviseurs dont on peut faire varier les caractéristiques en vue d'atteindre le prix de vente voulu. On cherche à fixer le prix unitaire d'un téléviseur pour réaliser un bénéfice maximum.

Les résultats des ventes sont indiqués dans le tableau ci-après donnant le nombre y de téléviseurs vendus lorsque le prix de l'unité est x .

x_i (en centaines de milliers de francs)	0,5	0,5	1	1	2	2,5
y_j (en dizaines de téléviseurs)	5,5	5	4	4	2,5	3

1°) a- Définir les séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j)

b- Calculer les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

2°) a- Dresser le tableau à double entrée correspondant à la série double (x_i, y_j, n_{ij}) .

b- Déterminer la covariance du couple de caractères $(x; y)$.

3°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire en x et y . Apprécier la corrélation linéaire entre x et y .

4°) Etablir l'équation de la droite de régression donnant y en fonction de x .

5°) Les frais de fabrication de chaque téléviseur s'élèvent à 0,1 centaine de milliers de francs.

a- Démontrer que le bénéfice total b réalisé est donné par : $b(x) = -1,26x^2 + 5,701x - 0,5575$ lorsque le prix de vente d'un téléviseur est x .

b- A quel prix l'entreprise doit-elle vendre un téléviseur pour réaliser un bénéfice maximal ? Calculer ce bénéfice en francs. Combien de téléviseurs l'entreprise devra-t-elle vendre pour atteindre le bénéfice maximal ?

Exercice 2 :

On considère la fonction numérique f de la

variable réelle x définie sur l'intervalle $I = \left[0; \frac{1}{2} \right]$ par :

$$f(x) = \frac{3x+1}{2x+4}$$

1°) a- Etudier le sens de variation de f sur I .

b- Démontrer que : $\forall x \in I, f(x) \in I$.

2°) (U_n) est la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = \frac{3U_n + 1}{2U_n + 4} \end{cases}$$

a- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$.

b- Etudier le sens de variation de (U_n) .

c- En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite l .

Problème :

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $R(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^x - x, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 2x(-1 + \ln x), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A :

Soit g la fonction sur $]-\infty; 0]$ par : $g(x) = xe^x - x$

1°) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g$.

2°) a- Pour tout nombre réel x élément de l'intervalle $]-\infty; 0]$, calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ (g' et g'' sont respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g).

Initiateur : Sylvain AHOANGBO (+229) 97 47 15 27/ 94 26 28 54

b- Démontrer que la courbe représentative (C_g) de g admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.

c- Dresser le tableau de variation de la fonction g' ; en déduire le signe de $g'(x)$.

Partie B :

3°) Quel est l'ensemble de définition de f ?

4°) Démontrer que f est continue en 0.

5°) a- Étudier la dérivabilité de f en 0

En déduire une interprétation géométrique

b- Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de l'intervalle $]0; +\infty[$ et étudier son signe.

6°) Dresser le tableau de variation de f

7°) Soit φ l'application définie par :

$\varphi: J \rightarrow f(J)$

$x \mapsto \varphi(x) = f(x)$, où $J =]1; +\infty[$.

a- Démontrer que φ est une bijection. Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ .

b- Prouver que la fonction dérivée première $(\varphi^{-1})'$ de φ^{-1} est positive sur $f(J) - \{-2\}$.

Partie C :

(C_f) est la courbe représentative de la fonction f , dans le repère R .

8°) Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $-\infty$.

9°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et conclure.

10°) (C_h) désigne la courbe représentative de la fonction h définie par : $h(x) = -f'(x)$.

Construire les courbes (C_f) et (C_h) et les tangentes en O sur une même figure.

11°) Soit $H(x) = \int_1^x h(t) dt$, $\forall x \in J$.

a- Démontrer que la fonction H est définie et continue sur J .

b- Calculer $H(e)$. En donner une interprétation géométrique.

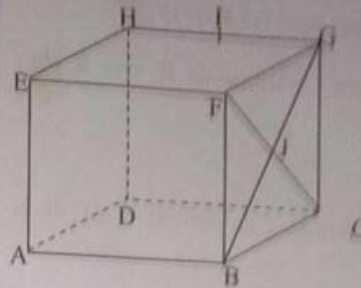
c- Calculer en cm, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par (C_f), (C_h) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Sujet N°34 : BAC Session normal 2006

(cor, p1 533)

Exercice 1 :

Dans l'espace orienté $(\mathcal{E})$, on considère le cube ABCDEFGH. ($A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$) est un repère orthonormé direct de $(\mathcal{E})$. I est le milieu du segment $[GH]$ et J est le centre du carré BCGF.



1°) Déterminer les coordonnées des points E, I, J .

2°) a- Donner une équation cartésienne du plan (EIJ)

b- Justifier que AEIJ est un tétraèdre et calculer son volume.

3°) Soit (Γ) l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}) \wedge (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}) = \vec{0}$$

a- Démontrer que $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MI}$

b- En déduire que (Γ) est une droite dont on donnera un repère.

4°) Soit (Δ) la droite dont un système d'équations

$$\text{cartésiennes est : } x - \frac{1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$$

Calculer la distance du point A à la droite (Δ).

Exercice 2 :

1°) On considère le polynôme P défini de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + (-2-i)z^2 + (2+2i)z - 2i$$

a- Calculer $P(-i)$ et $P(i)$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2°) On considère dans le plan complexe muni du repère

orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives $i, 1+i$ et $1-i$

a- Déterminer la nature du triangle ABC.

b- Donner une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.

3°) On considère sur $\mathbb{R}$, les équations différentielles suivantes :

$$(E_1): y'' - 2y' + 2y = 0$$

$$(E_2): y'' - 2y' + 2y = 10e^{-x}$$

- a- Déterminer le nombre réel m tel que la fonction $g: x \mapsto me^{-x}$ soit solution de (E_2) .
 b- Démontrer qu'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E_2) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_1) .
 c- En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_2) .

Problème :

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{1 + e^{-x}}$$

Première partie :

- 1°) a- Justifier que le domaine de définition D de la fonction f est $\mathbb{R}$.
 b- Etudier les variations de f .

2°) Soit (γ) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

- a- Démontrer que le point $A(0;1)$ est un centre de symétrie de la courbe (γ) .
 b- Vérifier que le point A appartient à (γ) puis déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (γ) en A .
 3°) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $1,6 < \alpha < 1,7$.
 4°) Construire la courbe (γ) et la tangente (T) .
 5°) Soit $J = f(\mathbb{R})$ et on considère la fonction :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow J$$

$$x \mapsto f(x)$$

- a- Démontrer que g est une bijection.

Soit g^{-1} la bijection réciproque de g et (C') la courbe de g^{-1} .

- b- Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J puis déterminer une équation de la tangente (T') à la courbe (C') en point d'abscisse 1.
 c- Construire la courbe (C') et (T') dans le même repère que (γ) .
 d- Calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout x élément de J où g^{-1} est dérivable.

Deuxième partie :

Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$U_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x) dx$$

- 6°) a- Justifier l'existence de U_n .
 b- Donner une interprétation géométrique de U_n .

- c- En remarquant que $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$, démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$U_n = 2 \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$$

d- Etudier le sens de variation de (U_n) puis déterminer la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

7°) On pose : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$.
 a- A l'aide de la courbe (γ) , donner une interprétation géométrique de S_n .

- b- En déduire une expression simple de S_n .
 8°) Calculer l'aire $A(n)$ du domaine délimité par la courbe (γ) la droite d'équation $y=2$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln(n+1)$.
 Déterminer la limite de $A(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Sujet N°35 : BAC Session normal 2007
 (cor. p: 536)

Exercice 1 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , M_1 et M_2 deux à deux distincts d'affixes respectives $-i$, z_1 et z_2 telles que :

$$\frac{z_1 + i}{z_2 + i} = r e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}, \text{ avec } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } r \in \mathbb{R}_+^*$$

- 1°) a- Déterminer, respectivement en fonction de r et θ , le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_1 + i}{z_2 + i}$.

- b- En déduire alors $\frac{z_1 + i}{z_2 + i}$ sous forme

trigonométrique

2°) Déterminer les valeurs de θ pour que les points A , M_1 et M_2 soient alignés

3°) a- Déterminer θ pour que le triangle AM_1M_2 soit rectangle en A .

b- On suppose AM_1M_2 rectangle en A .

i) Vérifier que $z_2 + i = \frac{i}{r}(z_1 + i)$

ii) En déduire que M_2 est l'image de M_1 par une similitude plane directe dont on précisera le rapport, le centre et l'angle.

Exercice 2 :

L'espace orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(-1; 0; 1)$, $B(0; 1; 1)$, $C(0; 0; -1)$ et $I(-1; 0; 2)$

On note (P) le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 1 = 0$ et (Q) le plan dont une représentation

paramétrique est la suivante :
$$\begin{cases} x = -1 + \alpha + \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 1 + \beta \end{cases}, (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}^3$

1°) a- Vérifier que les points A et B appartiennent à (Q)

b- Démontrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires

c- On pose $(\Delta) = (P) \cap (Q)$. Déterminer un repère de (Δ) .

2°) Soit (D) la droite passant par C et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

a- Démontrer que (D) est parallèle aux plans (P) et (Q)

b- Calculer la distance du point A à la droite (D)

c- Calculer le volume du tétraèdre ABIC.

3°) Un sac contient six jetons dont quatre portent le chiffre 1 et les deux autres portent le chiffre 0. Les jetons sont indiscernables au toucher.

On tire successivement au hasard et sans remise 3 jetons du sac et on désigne par a , b et c les chiffres tirés dans l'ordre. On forme ainsi l'équation $ax + by + z - 1 = 0$.

Déterminer la probabilité P_0 pour que l'équation formée soit une équation cartésienne du plan (P)

Problème :

Soit la fonction numérique f_n de variable réelle

x définies par : $f_n(x) = \frac{2x+3}{x+2} e^{\frac{x}{2}}$.

Où n est un entier naturel non nul. (C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm)

Partie A :

1°) Soit D l'ensemble de définition de f_n .

a- Déterminer D .

b- Etudier les limites de f_n au bornes de D .

c- Etudier les branches infinies de (C_n)

2°) Etudier le sens de variations de f_n .

3°) Dresser le tableau de variations de f_n .

4°) a- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C_1) avec les axes de coordonnées.

b- Construire (C_1)

5°) On pose $I =]-2; +\infty[$ et $J = f_n(I)$

a- Déterminer J .

b- Soit l'application : $g_n : I \rightarrow J$

$$x \mapsto f_n(x)$$

Démontrer que g_n est une bijection

c- Construire la courbe représentative (Γ) de la bijection réciproque g_n^{-1} de g_n dans le même repère que (C_1)

Partie B :

Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$U_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

6°) Donner une interprétation géométrique de U_n .

7°) Etudier le sens de variation de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

8°) a- Démontrer que pour tout x élément de $[0; 2]$, on a :

$$a: \frac{2x+3}{x+2} \leq f_n(x) \leq \frac{2x+3}{x+2} e^{\frac{x}{2}}.$$

$$b- \text{On pose } I = \int_0^2 \frac{2x+3}{x+2} dx.$$

9°) Vérifier que pour tout x élément de $[0; 2]$, on a :

$$\frac{2x+3}{x+2} = 2 - \frac{1}{x+2}.$$

En déduire I .

a- Démontrer que $I \leq U_n \leq e^{\frac{1}{2}} \times I$.

b- En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Sujet N°36 : BAC Session normal 2008

(cor. p: 539)

Exercice 1 :

Dans l'espace orienté muni d'un repère

orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point

$A(1; 1; 1)$ et les plans (P) et (Q) d'équations respectives :

$x + y + z - 1 = 0$ et $x + y - 2z - 4 = 0$

1°) a- Démontrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

b- Donner un repère de leur droite d'intersection (Δ) .

2°) a- Le point A appartient-il à (Δ) .

b- Calculer la distance du point A à la droite (Δ) .

3°) Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par A et perpendiculaire au plan (P).

a- Déterminer une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$

b- En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (P).

4°) Soit (R) le plan passant par A et perpendiculaire aux plans (P) et (Q)

- a- Déterminer une équation cartésienne du plan (R).
b- Déterminer $(P) \cap (Q) \cap (R)$.

Exercice 2 :

- 1°) a- Linéariser $\sin x \cos 2x$, pour tout nombre réel x .
b- En déduire que la fonction :

$U : x \mapsto -\frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $u : x \mapsto \sin x \cos 2x$.

- 2°) Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx.$$

- a- Calculer I_n en fonction de n .

- b- En déduire I_1 , I_2 et I_3 .

- 3°) A l'aide d'une intégration par parties, déduire la

valeur de l'intégrale : $J = \int_0^{\pi} x^2 \sin x \cos 2x dx$

Problème :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -\ln|e^x - 1|.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A :

- 1°) Justifier que l'ensemble de définition de f est :

$$E =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[.$$

- 2°) Calculer les limites de f aux bornes de E

- 3°) a- Etudier le sens de variation de f .

- b- Dresser le tableau des variations de f .

- 4°) a- Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = -x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

- b- Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (D) sur $]0; +\infty[$.

- c- Acheter l'étude des branches infinies de $(\mathcal{C})$.

- d- Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie B :

On pose $K =]0; +\infty[$ et on considère la fonction $h : K \rightarrow f(K)$

$$x \mapsto h(x) = f(x)$$

- 5°) a- Déterminer $f(K)$.

- b- Démontrer que h est une bijection.

- 6°) On désigne par g la bijection réciproque de h et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative.

- a- Tracer $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

- b- Déterminer l'ensemble de dérivabilité E' de g .

- c- Etablir que pour tout x appartenant à E'

$$g'(x) = \frac{-1}{1+e^x}.$$

- d- Démontrer que, pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

- e- En déduire que, pour tous éléments a et b de $]0; +\infty[$ on a : $|g(a) - g(b)| \leq \frac{1}{2}|a - b|$

Partie C :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \ln 2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

- 7°) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $U_n > 0$

8°) On pose : $\alpha = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Démontrer que : $g(\alpha) = \alpha$

- 9°) Démontrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$:

a- $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

b- $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

- 10°) En déduire que la suite (U_n) converge vers α

Sujet N° 37: BAC Session normal 2009
(cor. p: 542)

Exercice 1 :

On considère les nombres complexes ci-après :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ et } z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

- 1°) a- Ecrire le produit $z_1 z_2$ sous forme algébrique.

- b- Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_1 , z_2 et $z_1 z_2$.

- c- En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

- 2°) On pose $z_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_1$.

a- Vérifier que $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}} \right)$

- b- En déduire le module et un argument de z_3 .

- c- Démontrer que z_3^{12} est un nombre réel strictement négatif.

3°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 .

- a- Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z_1
- b- Placer le point B, puis le point A en utilisant la question 3°) a-
- c- Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixes z telle que :

$$\left| z - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right| = \left| z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right|.$$

EXERCICE 2 :

Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(0;1;-2), B(-1;0;-1), C(0;-5;-5), D(2;0;-2) et E(1;-4;-6).

1°) a- Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b- Calculer l'aire du triangle ABC.

2°) Démontrer que le quadrilatère ABCE est un rectangle.

3°) a- Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

b- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point D et perpendiculaire au plan (ABC).

4°) On désigne par H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

- a- Déterminer les coordonnées du point H.
- b- Calculer la distance du point D au plan (ABC)
- c- Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Problème :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) , \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm)

Partie A :

Soit la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{2}{x^2 + 1}.$$

1°) a- Démontrer que, pour tout x appartenant à

l'intervalle $]0; +\infty[$, on a : $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$

b- Etudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x .

2°) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

3°) a- Dresser le tableau des variations de g .

b- En déduire que l'équation : $g(x) = 0$, admet une solution unique α et que : $0,5 < \alpha < 0,6$.

4°) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

5°) a- Démontrer que, pour tout x élément de $]0; +\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$.

b- En déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

6°) On pose $k(x) = x f(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$ (on pourra poser $h = \frac{1}{x^2}$)

b- En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

7°) a- Démontrer que f est continue à droite en 0. (On pourra écrire $x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$).

b- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

8°) a- Dresser le tableau des variations de f .

b- Donner l'allure de la courbe ($\mathcal{C}$) (on prendra $f(\alpha) = 0,805$).

9°) Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.

a- En utilisant une intégration par parties, calculer

$$\text{l'intégrale : } J_\lambda = \int_\lambda^1 f(x) dx$$

b- Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \lambda$ et $x = 1$.

c- Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$

Sujet N° 38: BAC Session normal 2010
(cor. p: 545)

Exercice 1 :

1°) Déterminer les nombres complexes u et v vérifiant :

$$\begin{cases} u - v = i \\ u - 2iv = 3 \end{cases}$$

2°) On considère le polynôme $P(z)$ défini par :

$$P(z) = z^3 - (9 + 13i)z^2 + (-30 + 73i)z + 124 - 22i$$

Vérifier que :

$P(z) = (z - 2 - 3i)(z^2 - (7 + 10i)z - 14 + 32i)$ Calculer $(3 + 2i)^2$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3°) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives $1 + 2i, 2 + 3i, 1 + i, 5 + 6i$ et $2 + 4i$.

a- Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe S de centre A qui transforme B en C.

b- Les points A, B, C, D, E constituent le nuage de points d'une série statistique double (X,Y).

Calculer le coefficient de corrélation linéaire de (X,Y). On fera figurer sur la copie les étapes du calcul.

Exercice 2 :

1°) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans (P_1) et (P_2)

d'équations respectives : $(P_1) : x - 2y + z - 1 = 0$ et $(P_2) : -5x - 2y + z = 7$.

a- Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants

b- Soit (Δ) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2) . Donner une représentation paramétrique de (Δ) .

c- Calculer la distance du point $A(1; 1; 1)$ à la droite (Δ) .

2°) Soit a un paramètre réel. On considère le système (S_a) d'inconnue $(x; y; z)$:

$$(S_a) : \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y - 5z - 7 = 0 \\ ax + y + z + a = 0 \end{cases}$$

a- Justifier que (S_a) est équivalent au système ci-

$$\text{après : } \begin{cases} (2a+1)x = 4 - 2a \\ y = \frac{x-2}{2} \\ z = -1 \end{cases}$$

b- En discutant suivant les valeurs de a , résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S_a)

3°) Dans une urne, on dispose de trois boules rouges numérotées 1, 2, $-\frac{1}{2}$ et deux boules noires numérotées $-3, -\frac{1}{2}$ indiscernables au toucher.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de l'urne et à prendre son numéro comme valeur du paramètre a du système (S_a) .

a- Calculer la probabilité de chacun des événements A et B suivants :

A : « le numéro de la boule tirée permet à (S_a) d'admettre une solution unique $(x_0; y_0; z_0)$ »

B : « le numéro de la boule tirée permet à (S_a) d'admettre le triplet $(0, -1, -1)$ comme solution unique »

b- La boule tirée est rouge. Calculer la probabilité pour que (S) n'admette aucune solution.

Problème :

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie sur

$$]1; +\infty[\text{ par : } g(x) = 1 - \frac{1}{x-1} + \ln(x-1)$$

1°) Déterminer le sens de variation de g

2°) Calculer $g(2)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$.

Partie B :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par,

$$f(x) = |x-2| \ln(x-1).$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3°) Soit D l'ensemble de définition de f

a- Justifier que $D =]1; +\infty[$.

b- Etudier les limites de f aux bornes de D.

c- Etudier la dérivabilité de f en 2 et donner une interprétation géométrique du résultat.

4°) a- Calculer $f'(x)$ pour $x \in]1; 2[$, puis pour $x \in]2; +\infty[$.

b- Vérifier que, pour tout $x \in]1; 2[$, $f'(x) = -g(x)$ et que, pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.

c- En déduire que, pour tout $x \in]1; 2[\cup]2; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

d- Dresser le tableau des variations de f .

5°) a- Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$

b- Tracer $(\mathcal{C})$

6°) On considère la fonction $h :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$

a- Démontrer que h est une bijection

Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de h^{-1} .

b- Déterminer l'ensemble de dérivabilité de h^{-1} .

c- Tracer $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$

7°) a- Vérifier que, pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$\frac{x^2 - 4x}{x-1} = x - 3 - \frac{3}{x-1}.$$

b- A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire du domaine délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=c+1$

Sujet N°39 : BAC Session normal 2011

(cor. p: 548)

Exercice 1 :

On joue à un jeu dont voici les règles : on mise x Francs CFA pour avoir le droit de jouer une fois, puis on lance un dé parfaitement équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12 et on observe le numéro apparu sur la face supérieure du dé.

Si on obtient un numéro pair, on gagne 500 F.

Si on obtient 7, 9 ou 11, on gagne 800 F.

Si on obtient 1, 3 ou 5, on gagne 300 F.

Soit X la variable aléatoire représentant le gain diminué de la mise.

1°) Exprimer en fonction de x les différentes valeurs que peut prendre X

2°) Déterminer la loi de probabilité de X .

3°) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X

4°) On dit que le jeu est équitable si $E(X) = 0$. Déterminer la mise x pour que le jeu soit équitable. Déterminer dans ce cas l'écart-type de X .

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1°) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

l'équation : $(E) : z^3 - 6iz^2 - 18z + 40i = 0$.

a) Développer et réduire l'expression :

$$u(x) = (x-4)(-x^2 + 2x - 10).$$

b) Démontrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pur z_0 que l'on précisera.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

2°) A , B et C sont trois points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 4i$, $z_B = 3+i$ et $z_C = -3+i$.

Soit f la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C .

a) Déterminer la nature du triangle ABC .

b) Déterminer l'écriture complexe de f .

c) En déduire la nature de la similitude f ainsi que ses éléments caractéristiques.

3°) On considère les transformations g et φ du plan dont les écritures complexes sont respectivement : $z_1 = -2z + 12i$ et

$$z_2 = -iz - 4 + 4i \text{ et on pose } S = g \circ \varphi.$$

a) Déterminer l'écriture complexe de S .

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S .

Problème :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction :

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x.$$

Première Partie :

1°) Dresser le tableau des variations de u puis construire la courbe (C) avec soin.

2°) Soit α un réel de l'intervalle $]0;1[$. On désigne par D_α le domaine délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.

La rotation de D_α autour de l'axe des abscisses, engendre un solide S_α

a) Démontrer que la fonction U définie sur

$]0;+\infty[$ par : $U(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction

$$x \mapsto (\ln x)^2.$$

b) Calculer le volume $V(\alpha)$ du solide S_α .

c) Déterminer la limite de $V(\alpha)$, lorsque α tend vers 0 par valeurs supérieures.

Deuxième Partie :

3°) On considère la fonction

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + \ln x.$$

a) Etudier les variations de g .

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β et que $0,65 < \beta < 0,66$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

4°) On se propose de déterminer, s'il existe, le point de la courbe (C) de la fonction u , le plus proche du point O .

Soit M le point de (C) d'abscisse $x (x > 0)$ et f la

fonction définie sur $]0;+\infty[$, par : $f(x) = x^2 + (\ln x)^2$

a) Calculer la distance OM .

b) Démontrer que si un point A de (C) d'abscisse a est le plus proche de O , alors $f(a)$ est le minimum de f sur $]0;+\infty[$.

c) Démontrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

d) Démontrer que $f(\beta)$ est le minimum de f sur $]0;+\infty[$. En déduire les coordonnées du point B de (C) qui est le plus proche de O .

- c) Donner l'expression de $f(\beta)$ sous forme d'un polynôme en β .

En déduire un encadrement de la distance OB .

Troisième Partie :

- 5°) a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$\text{on a : } \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}.$$

- b) En déduire que : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$ et

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

- 6°) On pose $V_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Etudier le sens de variation de (V_n) .
b) Calculer la limite de (V_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Sujet N°40 : BAC Session normal 2012
(cor. p: 551)

Exercice 1 :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit T la transformation qui associe au point M de coordonnées $(x; y)$, le point M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -x - y + 4 \\ y' = x - y + 8 \end{cases}$$

- 1°) On désigne par z l'affixe du point M et par z' celle de M' .
Donner l'écriture complexe de la transformation T .
2°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T .
3°) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M d'affixe z tels que $|z'| = 2\sqrt{2}$.

Exercice 2 :

Une urne contient 5 boules blanches, 2 boules noires, 3 boules rouges. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne. On considère le jeu suivant :

- le tirage d'une boule noire rapporte 7 points ;
- le tirage d'une boule rouge rapporte 2 points ;
- le tirage d'une boule blanche fait perdre 2 points.

Soit X la variable aléatoire réelle qui associe à tout tirage de 2 boules, le nombre de points obtenus.

- 1°) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .
2°) Donner la loi de probabilité de X .
3°) Dans cette partie, on suppose que l'urne contient n boules blanches ($n \neq 0$), deux boules noires et trois boules rouges. On extrait simultanément, avec équiprobabilité deux boules de l'urne.

- a) Déterminer la probabilité d'obtenir :
i) 2 boules noires ;
ii) aucune boule blanche.

- b) Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche ?
c) Comment choisir n pour que cette probabilité soit égale à $\frac{2}{11}$?

Problème :

Partie A :

On définit la fonction u sur $\mathbb{R}^*$ par : $u(x) = x^3 + 1 - \ln|x|$.

- 1°) a) Vérifier que : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, a et b étant des nombres réels.

b) Etudier les variations de u (ensemble de définition, limites aux bornes, dérivée, sens de variation, tableau des variations).

- 2°) a) Calculer $u(-1)$.

b) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ dans $\mathbb{R}^*$ n'admet qu'une seule solution que l'on précisera.

- c) En déduire le signe de $u(x)$, suivant les valeurs de x .

Partie B :

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\ln|x|}{x}$ et

on désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan

muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 3°) Etudier les variations de f .

- 4°) a) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$.

b) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ de f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α telle que $\frac{2}{3} < \alpha < 1$.

- c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie C :

Soit M et M' les points du plan de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et telles que

$$x' = -x \text{ et } y' = y$$

- 5°) a) Démontrer qu'une équation de la courbe (Γ) à laquelle appartient le point M' , lorsque M décrit la courbe $(\mathcal{C})$ est :

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\ln|x|}{x}$$

- b) Etudier la position relative des courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) .

c) Calculer l'aire A de la portion du plan délimitée par la courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) , et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = e$.

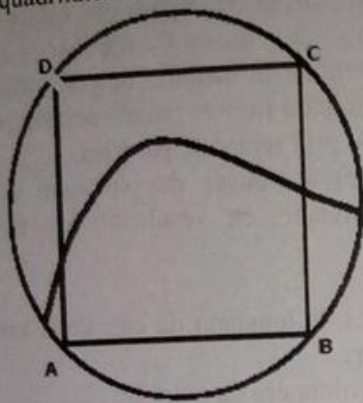
- d) Exprimer cette aire A comme polynôme de variable α .

Sujet 41 : Bac Bénin série D 2009 selon APC (cor. p : 555)

Texte : Construction de logements sociaux.

Les autorités municipales d'une ville envisagent de construire des logements sociaux au profit des agents de la mairie sur l'un des domaines de la commune. Consulté pour réaliser le plan d'aménagement, l'urbaniste Gandonou a prévu :

- la construction des logements sur une partie du terrain représentée par le quadrilatère ABCD ;
- l'aménagement des espaces verts ;
- la construction d'une haie circulaire qui servira de clôture au domaine et représentée par le cercle circonscrit au quadrilatère ABCD avec une ouverture en D.



En vue de fixer le prix de cession des logements, le comptable de la mairie a relevé les salaires x_i et les propositions de loyer y_i d'un échantillon représentatif de huit agents. Les résultats, exprimés en milliers de francs CFA, sont présentés dans le tableau ci-après :

x_i	50	100	60	120	120	100	150	160
y_i	15	20	15	30	25	25	40	35

Avant de soumettre l'ensemble du projet au conseil municipal, le comptable a voulu savoir s'il existe un lien entre le salaire et la proposition correspondante de loyer. Il s'intéresse également sur la façon de tracer la voie qui va traverser le domaine et l'aire de la portion réservée aux espaces verts.

Tâche : Tu vas trouver des solutions aux préoccupations du comptable en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1 :

Les données du tableau ci-dessus définissent une série statistique double de caractère (X, Y) où X est le salaire et Y la proposition de loyer.

- 1°) a- Dans un repère orthogonal du plan, représente le nuage de points associé à cette série statistique.

b- Détermine les coordonnées du point moyen de ce nuage.

2°) a- Calcule le coefficient de corrélation linéaire de la série.

b- Le salaire permet-il d'expliquer la proposition de loyer ?

3°) Détermine une équation de la droite de régression de Y en X .

Problème 2 :

Pour réaliser son dessin, l'urbaniste a muni le plan d'un repère orthonormé direct d'origine A dans lequel le point B a pour coordonnées $(-2; 6)$. Il construit le point C comme étant l'image de B par la translation t de vecteur $\vec{u}(6; 2)$ et le point D comme étant l'image de

B par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

1°) a- Détermine l'écriture complexe de la translation t

b- Justifie que la rotation r a pour écriture complexe : $z' = -iz$

c- Détermine les coordonnées des points C et D .

d- Démontre que $ABCD$ est un carré.

2°) Pour tout nombre complexe z élément de

$\mathbb{C} - \{6 + 2i\}$; on pose : $z' = \frac{z + 2 - 6i}{z - 6 - 2i}$ et on désigne par

($\mathcal{C}$) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire.

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$; x, y, x' et y' étant des nombres réels.

a- Exprime x' et y' en fonction de x et y

b- Détermine l'ensemble ($\mathcal{C}$).

c- Justifie que le tracé de ($\mathcal{C}$) permet d'obtenir une représentation de la haie-circulaire.

Problème 3 :

La voie traversant le domaine a été tracée sur le plan par l'urbaniste en représentant, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ convenablement choisi, la courbe (Γ) de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln(1-x) + 1, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = u(x), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

où u est la fonction numérique vérifiant :

$$u'' + 2u' + u = 0, \quad u(0) = 1 \text{ et } u'(0) = 0$$

Partie A :

1°) a- Résous sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$

b- Déduis-en que pour tout x élément de $[0; +\infty[$,

$$\text{on a : } u(x) = (x+1)e^{-x}$$

2°) Soit la fonction g définie sur $] -\infty; 1[$ par

$$g(x) = \ln(1-x) + \frac{x}{x-1}$$

a- Etudie le sens de variation de g .

b- Dédus-en que : $g(x) > 0$, pour tout $x \in] -\infty; 0[$

3°) Soit E l'ensemble de définition de f .

a- Justifie que $E = \mathbb{R}$.

b- Calcule les limites de f aux bornes de E

4°) a- Etudie la dérivabilité de f en 0.

b- Calcule $f'(x)$ pour tout x élément de $] -\infty; 0[$ et pour tout x élément de $[0; +\infty[$.

c- Dresse le tableau des variations de f .

5°) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $-1,3 < \alpha < -1,2$.

6°) a- Etudie les branches infinies de la courbe (Γ) .

b) Construis (Γ) .

Partie B :

La partie réservée pour l'aménagement des espaces verts correspond sur le dessin au domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations :

$$x = -\frac{6}{5} \text{ et } x = 3.$$

7°) a- Soit la fonction numérique h définie sur $] -\infty; 0[$

$$\text{par : } h(x) = \frac{x^2 - 1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Justifie que h est une primitive de f sur $] -\infty; 0[$

b- A l'aide d'une intégration par parties, calcule

$$\int_0^\alpha (x+1)e^{-x} dx$$

8°) a- Justifie que : $\int_\alpha^3 f(x) dx = \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{2\alpha} - 5e^{-3} + 2$

b- En prenant $\alpha = -1,25$, donne une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire exprimée en unité d'aire, de la partie du domaine réservée pour l'aménagement des espaces verts

Sujet 42 : Bac Bénin série D 2010 selon

APC(cor. p : 558)

Texte : le meilleur dessinateur

Sélectionné pour représenter le BENIN au concours international de dessin (CID), qui a eu lieu à Paris en France, Yori a remporté le premier prix avec le dessin d'une maison TATA composée de quatre cases reliées par un mur de base circulaire.

Les expositions de dessins pour le CID ont eu lieu dans la Pyramide du Louvre, grand hall ayant la forme d'une pyramide régulière SABCD de base ABCD

et dont les faces latérales sont entièrement en verre. Yori a ramené, sur la pyramide du Louvre, des informations qui peuvent se traduire comme suit :

Dans un repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace orienté pour lequel l'unité de longueur est égale à 11 mètres ;

- les sommets A, B, C ont pour coordonnées : A(1 ; 2 ; 3), B(-1 ; 0 ; 4), C(1 ; -1 ; 6) l'une des faces latérales est contenue dans le plan (P) d'équation :

$$11x - 10y + 2z + 3 = 0 \text{ le sommet S appartient à}$$

l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que :

$$(\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge \vec{\mu} = (\vec{CM} + \vec{DM}) \wedge \vec{\mu} \text{ où}$$

$$\vec{\mu} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$$

Alassane, jeune frère de Yori et élève dans une classe de terminale scientifique ; se propose d'utiliser ces informations pour déterminer la quantité de verre ayant servi à couvrir la Pyramide du Louvre ; mais il est surtout intéressé par la valeur du prix remporté par Yori.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des solutions aux préoccupations de Alassane en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1 :

1°) Quelle est, en mètres, la longueur du côté de la base de la Pyramide du Louvre ?

2°) a) Détermine les coordonnées du point D.

b) Détermine les coordonnées de l'isobarycentre G des points A, B, C, D.

3°) a) Démontre que l'ensemble (E) est la droite passant par le point H, milieu du segment [AC], et dirigée par le vecteur $\vec{\mu}$.

b) Ecris une représentation paramétrique de (E).

4°) Démontre qu'on a : $S\left(\frac{1}{3}; \frac{11}{6}; \frac{35}{6}\right)$.

5°) a) Calcule en mètres la hauteur de la Pyramide du Louvre.

b) Calcule, en mètres carrés, l'aire de la surface latérale de la Pyramide du Louvre.

Problème 2 :

Alassane a représenté dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(R; \vec{v}, \vec{w})$, les points de contact K, L, M, N des quatre cases avec la base circulaire (Γ) du mur.

Les affixes des points K, L, M sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$ où

$$P(z) = z^3 + (5 - 2i)z^2 + (4 - 22i)z + 20 - 60i, \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

6°) Démontre que $P(z)$ admet une racine réelle a que tu détermineras.

7°) Détermine un polynôme $Q(z)$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$,
 $P(z) = (z-a)Q(z)$
 8°) a) Calcule $(4+6i)^2$
 b) Résous l'équation $z^2 - 2iz + 4 - 12i = 0$ dans

c) Résous l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

9°) En réalité les points de contact K, L, M, N des quatre cases avec la base circulaire du mur ont respectivement pour affixes :

$$z_1 = 2 + 4i, z_2 = -2 - 2i, z_3 = -5 \text{ et } z_4 = -1 + 6i$$

a) Démontre que KLMN est un rectangle.

b) Détermine une équation cartésienne de (Γ)

c) Représente (Γ)

Problème 3 :

La valeur correspondant au premier prix du CID est, en dizaines de milliers d'euros, de la limite de la suite (μ_n) définie par :

$$\begin{cases} \mu_0 = 2 \\ \mu_{n+1} = f(\mu_n), n \geq 0 \end{cases}$$

où f est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - (x^2 + 1)e^{-x}.$$

10°) Etudie le sens de variation de g .

11°) Calcule $g(0)$ et déduis-en le signe de g .

12°) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

13°) a) Démontre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.

b) Dresse le tableau des variations de f .

14°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f .

a) Etudie les branches infinies de (C) .

b) Construis la courbe (C) et trace la droite (Δ) d'équation $y = x$.

15°) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $h(x) = f(x) - x$.

Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α vérifiant $2 < \alpha < 3$

16°) Démontre que, pour tout $x \in [2; 3]$, $f(x) \in [2; 3]$.

17°) a) Démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \in [2; 3]$.

b) Prouve que la suite (μ_n) est strictement croissante.

c) Déduis-en que la suite (μ_n) est convergente.

18°) Justifie que le prix remporté par Yori au CID dépasse 20 000 euros.

Sujet 43 : Bac Bénin série D 2011 selon APC (cor. p : 562)

Contexte :

La société OLUWA s'occupe de la vente de portables G.S.M.

A l'approche des fêtes de fin d'année, elle décide d'organiser une tombola et d'embellir sa boutique.

Le chargé de marketing fait construire, en plexiglas transparent, un solide en forme de pyramide ABCDE destiné à contenir deux types de portables de dernière génération. Il choisit, en outre, de réaliser des décorations lumineuses en forme de portions de courbes et de placer une ampoule à l'intérieur de la pyramide pour l'illuminer.

La pyramide ABCDE est telle que :

- ABCD est un carré
- la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABC)
- $AB = AD = AE = 1$ m

Le solide est séparé en deux compartiments par le plan $(\mathcal{P})$ passant par le milieu I du segment $[ED]$ et les points A et C.

L'ampoule est placée au point S ; intersection du plan $(\mathcal{P})$ et de la droite (Δ) d'équations cartésiennes

$$x - 1 = -y + \frac{1}{6} = z - \frac{5}{6} \text{ dans l'espace muni du repère}$$

orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

En visite en ville lors des fêtes, Firmin, un élève de terminale D, est émerveillé par les décorations de la boutique. Il y reconnaît certaines configurations étudiées en classe.

Tâche : Tu vas résoudre les trois problèmes ci après pour te rendre compte des concepts mathématiques qui se cachent derrière les différentes décorations.

I

1°) Détermine dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ les coordonnées des points D, C et I.

2°) Justifie que le plan $(\mathcal{P})$ a pour équation $x - y + z = 0$.

3°) Déduis-en les coordonnées du point S.

4°) Calcule l'aire de la surface de séparation.

5°) a) Calcule le volume du compartiment en forme de tétraèdre ACDI.

b) Déduis-en le volume du second compartiment.

II

Cinq motos constituent les lots à gagner. Firmin joue cinq fois à la tombola.

On suppose qu'il y a indépendance entre deux jeux quelconques et que la probabilité pour que Firmin gagne une moto lors d'un jeu est 0,1.

1°) Détermine la probabilité pour que Firmin :

- a) ne gagne aucune moto ;

Bac Bénin selon l'APC

- b) gagne au moins une moto ;
 c) gagne exactement trois motos.
 2°) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de motos gagnées par Firmin.
 a) Détermine la loi de probabilité de X .
 b) Détermine l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de X .

III

Le décorateur décide de donner aux décorations lumineuses l'allure des courbes (Γ_m) représentatives des fonctions f_m de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} f_m(x) = (2x + m) \ln(x^2 + mx - 3) & , m \in [0; 2] \\ f_m(x) \geq 0 \end{cases}$$

On te propose d'étudier ces courbes pour $m=0$ et pour $m=2$. On note (Γ_0) la courbe de f_0 et (Γ_2) la courbe de f_2 dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a) En posant $J_m = \left] -\infty; \frac{-m - \sqrt{m^2 + 12}}{2} \right[$ et

$J'_m = \left] \frac{-m + \sqrt{m^2 + 12}}{2}; +\infty \right[$ prouve que l'ensemble de définition D_m de f_m est $J_m \cup J'_m$.

b) Prouve que f_m est une fonction dérivable et détermine sa fonction dérivée f'_m .

2°) Etudie les limites de f_0 aux bornes de D_0 et celles de f_2 aux bornes de D_2 .

3°) a) Etudie le sens de variation de f'_0 puis celui de f'_2 .

b) Précise le signe de chacun des nombres $f'_0(-3)$; $f'_0(3)$; $f'_2(-1-2\sqrt{3})$; $f'_2(-1+2\sqrt{3})$ et dresse le tableau des variations de chacune des fonctions f_0 et f_2 .

4°) a) Justifie que l'équation $f_0(x) = 4$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left] -4; -\sqrt{3} \right[$.

b) Justifie que l'équation $f_2(x) = 4$ admet une solution unique β dans l'intervalle $\left] -4; -3 \right[$.

c) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations: $f_0(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$ et construis les courbes (Γ_0) et (Γ_2) dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

5°) On projette de calculer l'aire d'une partie de la décoration dans le cas où la hauteur du mur est de 4 unités.

On prend $\alpha = -1,82$ et $\alpha = -3,14$.

a- On pose :

$$F_m(x) = (x^2 + mx - 3) [\ln(x^2 + mx - 3) - 1]$$

Justifie que F_m est une primitive de f_m sur chacun des intervalles J_m et J'_m .

b- i) Calcule l'aire de la partie du plan définie par :

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq f_2(x) \\ -3,24 \leq x \leq \beta \end{cases}$$

ii) Calcule l'aire de la partie du plan définie par :

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq f_0(x) \\ -2 \leq x \leq \alpha \end{cases}$$

Sujet 44 : Bac Bénin série D 2012 selon APC (cor. p:566)

Contexte :

Un motocycliste assimilable à un point mobile G est en mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Sur la grande voie empruntée, sont disposées de grandes plaques planes matérialisant des plans. L'espace E étant muni d'un repère orthonormé direct

$(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, une des plaques (R) contient les points $A(1; 0; 3)$, $B(2; 2; 0)$ et $C(1; 1; 2)$.

En un temps t_1 , le mobile G est au point $H(1; -1; 0)$ et au temps t_2 , il est au point $F(2; 0; 1)$, $t_1 \neq t_2$.

Voyant le motocycliste à vive allure, un passant se pose des questions :

"A cette allure, le motocycliste ne risque-t-il pas de percuter une des plaques ?"

"Pourrai-je alors joindre à temps les sapeurs pompiers ? Et seront-ils à temps sur les lieux ?"

Tâche : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations du passant en résolvant les trois problèmes suivants :

-I-

1°) Détermine une équation cartésienne du plan (P) matérialisé par la plaque (R) .

2°) Justifie que la trajectoire du mobile G est représentée par la droite (Δ) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = \alpha \end{cases}$$

3°) Justifie que la droite (Δ) et le plan (P) sont perpendiculaires.

4°) Détermine les coordonnées du point K où se produira éventuellement le choc entre le mobile G et la plaque matérialisant le plan (P) .

5°) Calcule la distance à parcourir par le mobile G depuis l'instant t_1 jusqu'au moment du choc éventuel.

-II-

Le choc s'est effectivement produit et a provoqué un incendie dont le passant a été témoin.

Le passant dispose de 5 numéros des sapeurs pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros. Les sapeurs pompiers ont parcouru une distance d (en dizaine de kilomètres) avant d'atteindre les lieux de l'accident. Le plan complexe étant muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- L'ensemble (Γ) des points M d'affixe z telle que $\frac{z}{2+iz}$ soit un nombre réel est un cercle $(\mathcal{C})$ privé d'un point ; par ailleurs la distance d est le rayon du cercle $(\mathcal{C})$.

- L'angle de tir des jets d'eau ayant servi à éteindre l'incendie est celui de la similitude plane directe $\mathcal{S}$ laissant invariant O et transformant le point I d'affixe $2i$ en le point J d'affixe $-2+2i$.

6°) Calcule la probabilité pour que l'appel du passant tombe sur un numéro en service :

- au premier essai.
- au second essai sachant qu'il n'a pas repris le premier numéro essayé.

7°) Détermine :

- l'écriture complexe de $\mathcal{S}$
- l'ensemble (Γ) .

8°) Calcule :

- l'angle de tir.
- La distance d .

-III-

Pour se rendre sur les lieux, les sapeurs pompiers doivent suivre un trajet matérialisant la courbe représentative (C_f) de la fonction :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln|x^2 - 3x + 2| \text{ dans le repère } (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

9°) a- Justifie que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{1; 2\}$.

b- Etudie les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c- Etudie le sens de variations de f .

d- Dresse le tableau de variation de f .

10°) a- Etudie les branches infinies de la courbe (C_f) .

b- Construis (C_f)

Sujet 45 : Bac Bénin série D 2013 selon

APC (cor. p : 569)

Contexte : Le jardin botanique de Tatapia

Le village de Tatapia dispose d'un jardin botanique où l'on retrouve plusieurs espèces de plantes médicinales dont une en voie de disparition. A l'intérieur du jardin se trouve un plan d'eau qui sert à arroser les plantes. Le jardin occupe un domaine ayant la forme d'un quadrilatère ABCD.

Lors d'une visite dans le jardin de Tatapia, Prima, élève en classe terminale de la série D, a voulu connaître le nombre d'espèces de plantes médicinales disponibles et celui de plants de l'espèce en voie de disparition. Le gérant du jardin lui a tendu un document dans lequel on peut lire :

« - L'unité de longueur est 50 mètres, et dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les affixes respectives z_A , z_B et z_C des sommets A, B, C sont les solutions de l'équation d'inconnue complexe z ,

$$z^3 - (3+5i)z^2 + 14iz + 22 + 6i = 0, \text{ avec}$$

$$\operatorname{Re}(z_A) < \operatorname{Re}(z_B) < \operatorname{Re}(z_C).$$

- Le sommet D est l'image de C par la similitude plane directe S de centre B qui transforme A en C ;

- L'espace en voie de disparition se trouve sur les $\frac{2}{3}$

de la terre ferme à raison de 100 plants par hectare »

Tâche : Tu es invité à résoudre les problèmes ci-après, afin de trouver des solutions aux préoccupations de Prima.

I-

1°) a- Calcule $(2-6i)^2$.

b- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^2 - 4(1+i)z + 8 + 14i = 0.$$

2°) a- Justifie que $-1+i$ est une racine du polynôme :

$$P(z) = z^3 - (3+5i)z^2 + 14iz + 22 + 6i = 0$$

b- Démontre que $z_A = -1+i$, $z_B = 1+5i$ et

$$z_C = 3-i$$

3°) a- Prouve que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

b- Calcule, en hectares, l'aire $\mathcal{A}$ de la portion ABC du jardin.

4°) a- Détermine l'écriture complexe de la similitude S .

b- Détermine l'affixe du sommet D.

5°) Démontre que l'aire du domaine occupé par le jardin botanique de Tatapia est égale à

$$3 \mathcal{A}.$$

II-

Exprimé en centaines d'unités, le nombre total d'espèces est la limite de la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = h(U_n) \text{ si } n \geq 0 \end{cases} \quad \text{où } h \text{ est la fonction numérique}$$

définie sur : $I = [1; 2]$ par : $h(x) = \frac{3x-1}{x+1}$.

- 6°) a- Etudie le sens de variation de h .
 b- Démontre que pour tout $x \in I$, $h(x) \in I$.
 c- Déduis-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$.
 7°) a- Démontre que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante
 b- Déduis-en que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
 8°) Détermine le nombre total d'espèces de plantes médicinales disponibles dans le jardin botanique de Tatapia.

III-

Pour aider Prima à trouver l'aire de la terre ferme, le gérant du jardin lui a fourni les informations complémentaires suivantes, obtenues après une étude topographique du jardin :

- L'aire de tout le domaine est estimée à 7,5 ha ;
- Sur le dessin du jardin, réalisé à une échelle de $\frac{1}{5000}$, le plan d'eau matérialise la portion du plan délimitée par les axes de coordonnées d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la droite d'équation $x=1$ et la courbe représentative ($\mathcal{C}$), dans ce repère, de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (4x^3 - 2x^2 + 2x + 1)e^{-2x}$.

- 9°) a- Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
 b- Calcule les limites de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
 10°) a- Soit f' la fonction dérivée de f .
 Démontre que pour tout x élément de D_f ,
 $f'(x) = -8x(x-1)^2 e^{-2x}$
 b- Etudie le sens de variation de f .
 c- Dresse le tableau des variations de f .
 11°) a- Etudie les branches infinies de la courbe ($\mathcal{C}$)
 b- Construis la courbe ($\mathcal{C}$), l'unité graphique étant le centimètre.
 12°) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-2x}$ où a, b, c et d sont des nombres réels.
 a- Détermine les nombres a, b, c, d pour que F soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de f .
 b- Détermine, en hectares l'aire du plan d'eau.

13°) Détermine le nombre de plants de l'espace en voie de disparition.

Sujet 46 : Bac Bénin série D 2013 selon APC (session des malade) (cor. p : 571)

Contexte : Hommage à un enseignant méritant.
 Pour témoigner de la reconnaissance à leur professeur de mathématiques suite à leur réussite au Baccalauréat, des élèves d'une classe terminale D ont décidé d'organiser une cérémonie pendant laquelle trois cadeaux seront offerts. Plusieurs groupes d'élèves ont été mis en place en vue de faire des propositions de cadeaux. L'un des groupes a dessiné sur une feuille sa proposition : il s'agit d'un tableau ayant la forme d'un polygone dont les sommets sont les images dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
 $(E): z^5 = 16(-\sqrt{3} + i)$.

Le groupe propose également de tracer sur le tableau, des configurations planes obtenues à partir de courbes représentatives de fonctions numériques.

Dossou, un élève de la classe ne faisant pas partie du groupe, veut connaître la nature du polygone, la forme des configurations à représenter sur le tableau et le coût de réalisation des différents cadeaux.

Tâche : Tu vas résoudre les trois problèmes ci-après pour répondre aux préoccupations de Dossou.

Problème 1 :

1°) a- Ecris le nombre complexe $16(-\sqrt{3} + i)$ sous forme exponentielle.

b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

c- Place dans le plan muni du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2 cm) les images A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 des solutions de (E) .

d- Donne la nature précise du polygone dont les sommets sont les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 .

2°) a- Démontre que la longueur, en unité de longueur, d'un côté du polygone est : $l = 4 \sin \frac{\pi}{5}$.

b- Déduis-en une valeur approchée du périmètre du polygone.

Problème 2 :

Pour l'achat des trois cadeaux, les élèves prévoient de dépenser une somme S . Le coût du premier cadeau ajouté à la moitié du coût des deux autres, le coût du deuxième ajouté au tiers du coût des deux autres, et le coût du troisième cadeau ajouté au quart du coût des deux autres donnent toujours 8500 F.

On désigne par a , b et c les coûts respectifs du premier, du second et du troisième cadeau.

3°) Démontre que a , b et c vérifient le système :

$$(\Sigma) : \begin{cases} 2a + b + c = 17\,000 \\ a + 3b + c = 25\,500 \\ a + b + 4c = 34\,000 \end{cases}$$

4°) Transforme le système (Σ) en un système triangulaire équivalent.

5°) Dédus-en le coût de chaque cadeau et la somme S .

Problème 3 :

Les configurations à représenter sur le tableau sont, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, des portions de la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln x - ex, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ et celle d'une courbe } (\mathcal{C}')$$

déduite de celle de f .

Certains élèves proposent de colorier la partie du tableau située entre les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=e$. (e est la base des logarithmes népériens).

6°) Soit D l'ensemble de définition de f

- Justifie que $D =]0; +\infty[$.
- Démontre que f est continue sur D .
- Etudie la dérivabilité de f à droite en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.
- Détermine $f'(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

7°) On considère la fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$u(x) = 2x \ln x + x - e$$

- Etudie le sens de variation de u .
- Calcule les limites de u à droite en 0 et au voisinage de $+\infty$.
- Démontre que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique α et que $1,5 < \alpha < 1,6$.
- Détermine le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

8°) a- Dressons le tableau de variation de f .

- Calcule $f(e)$.
- Démontre que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$ que tu préciseras.
- Détermine le signe de $f(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

9°) a- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donne une interprétation géométrique du résultat.

b- Trace la courbe $(\mathcal{C})$.

c- La courbe $(\mathcal{C}')$ est celle de la fonction

$$x \mapsto ex - x^2 \ln x.$$

Explique comment $(\mathcal{C}')$ se déduit de $(\mathcal{C})$ puis trace $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

10°) On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$,

$$u_n = -2 \int_1^n f(x) dx.$$

a- Précise le signe de u_n , pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$.

b- Donne une interprétation géométrique de u_n .

11°) a- Démontre que : $u_{n+1} - u_n = -2 \int_{n+1}^n f(x) dx$

b- Dédus-en le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

12°) a- Détermine la fonction dérivée de la fonction G

définie sur $]0; +\infty[$ par : $G(x) = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{9} x^3$

b- Calcule u_n en fonction de n .

c- Calcule la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et donne une interprétation géométrique du résultat.

Sujet 47 : Bac Bénin série D 2014 selon APC (cor. p : 574)

Contexte : A la découverte d'un livre de mathématiques

En visite dans une librairie, Julien, un élève de la classe terminale D, a acheté un livre de mathématiques. Sur la couverture de cet ouvrage on trouve :

- deux cercles (C_1) et (C_2) ,
- un repère orthonormé direct : $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et trois points $A(0; -1)$, $(\sqrt{3}; 1)$ et $(-2\sqrt{3}; 2)$ sur le cercle (C_1) ,
- le polynôme $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - 2i)z^2 + (-5 + i\sqrt{3})z - 8i$ écrit à l'intérieur du cercle (C_1) ,
- $(C_2) = s(C_1)$, $s(A) = B$ et $s(B) = C$ avec s une similitude plane directe,
- une courbe (Γ) représentative d'une fonction numérique f .

Une fois à la maison, Julien se préoccupe des liens qui existent entre certaines des indications de la

couverture ainsi qu'à un exercice sur un dé de forme tétraédrique dessiné également sur la couverture.

Tâche : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Julien en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1 :

1°) a- Justifie que : $P(z) = (z+i)(z^2 + (\sqrt{3}-3i)z - 8)$

b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

c- Existe-il une relation entre $P(z)$ et d'autres éléments de la couverture du livre ?

2°) a- Place les points A , B et C .

b- Démontre que le triangle ABC est rectangle.

c- Précise le centre et le rayon de (C_1)

3°) a- Détermine l'écriture complexe de la similitude s .

b- Détermine les éléments caractéristiques de s .

c- Détermine le centre et le rayon de (C_2) .

4°) Trace (C_1) et (C_2) sur la même figure.

Problème 2 :

Les quatre faces du dé de forme tétraédrique sont numérotées de 1 à 4. Ce dé est supposé pipé de sorte qu'il existe un nombre réel positif k tel que la probabilité $p(i)$ pour que la face portant le numéro i soit cachée est ki .

5°) Prouve que : $k = \frac{1}{10}$.

6°) On lance une fois ce dé et on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des numéros visibles.

a- Détermine la loi de probabilité de X .

b- Détermine puis représente la fonction de répartition F de X .

7°) On lance cinq fois de suite ce dé, de façons indépendantes.

Détermine la probabilité pour que l'événement « X est pair » se réalise au moins une fois.

Problème 3 :

La fonction numérique f est définie pour tout nombre

réel $X > 0$, par : $f(x) = x \left[a(\ln x)^2 + b \ln x + c \right]$ avec a ,

b et c des nombres réels.

8°) a- Pour tout $x > 0$, calcule $f'(x)$.

b- Détermine a , b et c sachant que : $f(e) = 0$,

$f'(e) = 0$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{9}{4\sqrt{e}}$; e étant le nombre réel tel

que : $\ln e = 1$.

9°) Dans la suite du problème on suppose que f est

définie par :
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 1], \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

a- Démontre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$.

b- Démontre que f est continue sur $[0; +\infty[$.

c- Etudie la dérivabilité de f à droite en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.

d- Justifie que pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = (\ln x - 1)(\ln x + 1)$

10°) a- Etudie le sens de variations de f .

b- Calcule la limite de f en $+\infty$

c- Dresse le tableau des variation de f .

11°) a- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donne une interprétation géométrique du résultat.

b- Trace la courbe (Γ) .

12°) a- Calcule, en utilisant une intégration par parties,

l'intégrale $\int_1^e x \ln x \, dx$ puis $\int_1^e x(\ln x)^2 \, dx$.

b- Calcule l'aire du domaine délimité par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.

Sujet 48 : Bac Bénin série D 2015 selon APC (cor. p : 577)

Contexte : Préparatifs pour le festival de Kari.

Gounou est un artisan qui compte réaliser et exposer ses tableaux à l'occasion du festival des arts et de la culture de la commune de Kari. Pour réduire le coût de réalisation d'un tableau, il doit se rendre chez au moins deux fournisseurs pour négocier le prix du matériel. La probabilité pour que la négociation réussisse avec un fournisseur est 0,7.

Gounou décide de fabriquer des tableaux luxueux inédits dont la vente pourrait faire grimper son chiffre d'affaires.

Ce type de tableau contiendra des lignes courbes sur lesquelles seront minutieusement disposés des cristaux de marbre et de petites pièces de bois vernis. Pour l'acquisition du matériel nécessaire à la réalisation de ces tableaux, Gounou a dû négocier le prix, de façon indépendante, avec cinq fournisseurs.

Bio, fils de Gounou et élève en classe terminale scientifique, s'interroge sur les chances de son père de réussir les négociations en vue de se procurer le matériel de travail. Il désire par ailleurs représenter les points et les lignes courbes des tableaux.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Bio à trouver une réponse à ses préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1 :

- 1°) Calcule la probabilité pour que Gounou réussisse exactement trois négociations sur les cinq.
 2°) Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui prend pour valeur le nombre de négociations réussies sur les cinq.
 3°) Détermine la probabilité pour que Gounou réussisse toutes les cinq négociations avec les fournisseurs.

Problème 2 :

Six petites pièces de bois sont représentées par les points A, B, C, D, E et F. Les points A, B et C sont les images des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$(H) : z^3 + (-6 + 5i)z^2 + (9 - 12i)z + 6 + 13i = 0 ;$$

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, les points D, E et F sont les images respectives des points A, B et C par la similitude plane directe s d'écriture complexe $z' = iz + 1 + i$.

4°) a- Démontre que l'équation (H) admet une solution imaginaire pure. Tu prendras le point A comme image de cette solution.

b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (H). Tu désigneras par B et C les images des autres solutions telles que $OB < OC$.

5°) a- Détermine l'abscisse du point E.

b- Précise la nature du triangle DEF.

Problème 3 :

L'une des lignes courbes est une portion de la représentation graphique $(\mathcal{C})$, dans le plan $(\mathcal{G})$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 1 + u(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{où } u \text{ est la solution de}$$

l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 0$, qui vérifie les conditions $u(0) = -1$ et $u'(0) = 2$.

6°) Justifie que : $u(x) = (x-1)e^{-x}$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

7°) a- Détermine l'ensemble de définition D_f de f .

b- Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

c- Étudie la continuité de f en 0.

8°) a- Prouve que f est dérivable à droite en 0 puis précise la demi-tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ à droite en son point d'abscisse 0.

b- Détermine $f'(x)$ pour x appartenant à chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, puis étudie son signe suivant les valeurs de x .

c- Dresse le tableau des variations de f .

9°) a- Étudie les branches infinies de $(\mathcal{C})$.

b- Construis la courbe $(\mathcal{C})$.

10°) Une autre ligne courbe du tableau est la représentation graphique $(\mathcal{C}')$ déduite de celle de la fonction g de I vers J définie par : $g(x) = f(x)$, où $I =]-\infty; -1]$ et $J = f(I)$.

a- Détermine J .

b- Justifie que g est une bijection

c- Étudie la dérivabilité de la bijection réciproque g^{-1} sur J .

d- La courbe $(\mathcal{C}')$ est en réalité celle de g^{-1} .

Représente l'allure de $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

CORRECTION DES ACTIVITES SUR LA CONFIGURATION DE L'ESPACE.

ACTIVITE 1 :

2°)

$$4\vec{KA} - 10\vec{KB} + 3\vec{KC} - \vec{KD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2(2\vec{KA} - 5\vec{KB}) - (-3\vec{KC} + \vec{KD}) = \vec{0}$$

Or $I = \text{bar}\{(A, 2), (B, -5)\}$ et $J = \text{bar}\{(C, -3), (D, 1)\}$
alors

$$4\vec{KA} - 10\vec{KB} + 3\vec{KC} - \vec{KD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2(-3\vec{KI}) - (-2\vec{KJ}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -6\vec{KI} + 2\vec{KJ} = \vec{0} \text{ et } -6 + 2 \neq 0$$

Donc le point K est le barycentre des points pondérés (I, -6) et (J, 2) et par suite les points I, J et K sont alignés.

ACTIVITE 4 :

1°) Démontrons que les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont non coplanaires

Soit $(O; \vec{u})$ un repère de $(\mathcal{D}_1)$ avec $\vec{u}(-1; 1; 1)$

Soit $(A; \vec{v})$ un repère de $(\mathcal{D}_2)$ avec $A(2; 1; 0)$ et $\vec{v}(-2; -1; -1)$

$$\vec{OA}(2; 1; 0) \text{ et } \vec{u} \wedge \vec{v}(0; -3; 3)$$

On a : $\vec{OA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -3$ or $-3 \neq 0$ d'où les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont non coplanaires

2°) Déterminons une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$

$\vec{u} \wedge \vec{v}(0; -3; 3)$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$ donc $(\mathcal{P})$: $-3y + 3z + d = 0$ ($d \in \mathbb{R}$)

$A(2; 1; 0) \in (\mathcal{P}) \Rightarrow d = 3$ d'où on trouve :

$$(\mathcal{P}) : -y + z + 1 = 0$$

3°) Calculons la distance du point K à la droite $(\mathcal{D}_2)$

$$d(K, (\mathcal{D}_2)) = \frac{\|\vec{KA} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} u.l$$

$\vec{KA}(3; 1; 1)$ et $\vec{KA} \wedge \vec{v}(0; 1; -1)$ alors on trouve :

$$d(K, (\mathcal{D}_2)) = \frac{\sqrt{3}}{3} u.l$$

ACTIVITE 5 :

1°) a- Vérifions que $E(0; 2; 3)$

$\vec{AB}(-1; 0; -1)$; $\vec{AC}(-1; -1; 1)$ et $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(-1; 2; 1)$

puis $\vec{AE}(-1; 2; 1)$ on a : $\vec{AE} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$ d'où

$E(0; 2; 3)$

b- Volume du tétraèdre ABCE

$$V_{ABCE} = \frac{1}{6} |\vec{AE} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})| u.v$$

$$V_{ABCE} = \frac{1}{6} |\vec{AE}|^2 \text{ d'où } V_{ABCE} = 1 u.v$$

2°) a- Prouvons que $(P) // (ABC)$

Soit $\vec{n}(1; -2; -1)$ un vecteur normal au plan (P) on a :
 $\vec{n} = -(\vec{AB} \wedge \vec{AC})$ donc les vecteurs normaux des plans (P) et (ABC) sont colinéaires par suite $(P) // (ABC)$.

b- Coordonnées du point K.

On a : $2\vec{KE} + \vec{KC} = \vec{0}$ et $2 + 1 \neq 0$ donc

$K = \text{bar}\{(E, 2), (C, 1)\}$ par suite on trouve $K(0; 1; 3)$.

*Vérifions que $K \in (P)$

$$x_K - 2y_K - z_K + 5 = 0 - 2(1) - (3) + 5 = -5 + 5 = 0 \text{ donc } K \in (P)$$

ACTIVITE 6 :

1°) a- Calculons les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC}(-8; -4; 8)$$

b- Déduisons-en que les points A, B et C ne sont pas alignés

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$ donc A, B et C ne sont pas alignés.

c- Calculons le volume du tétraèdre OABC.

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AO}| u.v$$

$\vec{AO}(-3; -2; -6)$ donc on trouve : $V_{OABC} = \frac{8}{3} u.v$

2°) Prouvons que $OH = \frac{4}{3}$

$$V_{OABC} = \frac{\text{Aire de base} \times \text{hauteur}}{3}$$

$$V_{OABC} = \frac{\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| \times OH}{3} \Leftrightarrow OH = \frac{6V_{OABC}}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$$

$$= \frac{6 \times \left(\frac{8}{3}\right)}{\sqrt{144}} = \frac{16}{12} \text{ d'où } OH = \frac{4}{3}$$

ACTIVITE 7 :

1°) a- Représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$

$$(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = -5 + 2\alpha; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$

b- Coordonnées de C et N

on trouve $C\left(\frac{11}{2}; 0; -\frac{3}{2}\right)$ et $N(11; 11; -7)$

2°) a- Calculons la distance d

$$d = \frac{|2x_A - 3y_A + z_A - 10|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} \text{ on trouve}$$

$$d = \frac{6\sqrt{14}}{7} \text{ u.l}$$

b- Démontrons que la droite (AB) et le plan (P) sont sécants en un point M dont on déterminera les coordonnées.

$\overrightarrow{AB}(-3; 7; 3)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et

$\vec{n}_p(2; 3; 1)$ un vecteur normal au plan (P)

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_p = -24$ or $-24 \neq 0$ d'où la droite (AB) et le plan (P)

sont sécants en M

Soit $M(x; y; z)$

$M \in (AB) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, (t \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -5 + 7t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

$M \in (P) \Leftrightarrow 2x - 3y + z - 10 = 0$

$$\{M\} = (AB) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -5 + 7t \\ z = 1 + 3t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$$

$$(1) \Rightarrow 6 - 6t + 15 - 21t + 1 + 3t - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -24t + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ donc } M: \begin{cases} x = 3 - \frac{3}{2} \\ y = -5 + \frac{7}{2} \\ z = 1 + \frac{3}{2} \end{cases} \text{ d'où } M\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

3°) a- Déterminons une équation cartésienne de (Q)

$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}_p(16; 9; -5)$ un vecteur normal à (Q) donc (Q):

$$16x + 9y - 5z + d = 0$$

$(B \in (Q)) \Rightarrow d = 2$ alors

$$(Q): 16x + 9y - 5z + 2 = 0$$

b- Représentation paramétrique de (Δ)

$$(\Delta) = (P) \cap (Q)$$

$$M(x; y; z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z - 10 = 0 \\ 16x + 9y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z - 10 = 0 \\ 26x - 6y - 48 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z - 10 = 0 \\ y = \frac{13}{3}x - 8 \end{cases}$$

Posons $x = \beta; \beta \in \mathbb{R}$ alors on trouve:

$$(\Delta): \begin{cases} x = \beta \\ y = \frac{13}{3}\beta - 8; (\beta \in \mathbb{R}) \\ z = 11\beta - 14 \end{cases}$$

4°) a- Démontrons que E, F et G déterminent un unique plan dont le vecteur normal est $\vec{u}$

$$\overrightarrow{EF}(-1; 1; 1), \overrightarrow{EG}(-1; 3; 5)$$

$\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EG}(2; 4; -2)$ donc $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EG} \neq \vec{0}$ alors E, F et G ne sont pas alignés par suite E, F et G déterminent un plan. Par

ailleurs $\vec{u} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EG})$ d'où $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (EFG).

b- Justifions que AEFG est un tétraèdre puis calculons son volume V

$$\overrightarrow{EA}(1; -4; 5).$$

$(\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EG}) \cdot \overrightarrow{EA} = -24 \neq 0$ donc AEFG sont non coplanaires par suite AEFG est un tétraèdre

Son volume:

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EG}) \cdot \overrightarrow{EA}| \text{ u.v donc } \underline{V = 4 \text{ u.v}}$$

ACTIVITE 8 :

1°) a- Démontrons que les points A, B et C définissent un plan (P) et un seul

$$\overrightarrow{AB}(-1; -1; 1), \overrightarrow{AC}(0; -6; -3)$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(9; -3; 6)$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ d'où A, B et C définissent un plan (P)

b- Déterminons une équation cartésienne de (P)

le vecteur $\vec{n}_p = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ est un vecteur normal au plan

$$(P): \vec{n}_p(3; -1; 2) \text{ et}$$

$$(P): 3x - y + 2z + d = 0$$

$$A \in (P) \Rightarrow d = 5 \text{ d'où } (P): 3x - y + 2z + 5 = 0$$

c- Calculons l'aire du triangle ABC.

Soit $\mathcal{A}$ cette aire.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ u.a on trouve } \mathcal{A} = \frac{3\sqrt{14}}{2} \text{ u.a}$$

2°) Démontrons que le quadrilatère ABCE est un rectangle.

$$\overrightarrow{AB}(-1; -1; 1) \text{ et } \overrightarrow{EC}(-1; -1; 1)$$

On a: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$ donc ABCE est un parallélogramme (1)

$[\overrightarrow{AB}]$ et $[\overrightarrow{AE}]$ sont deux côtés consécutifs du quadrilatère ABCE.

$$\overrightarrow{AE}(1; -5; -4)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \text{ donc } (AB) \perp (AE) (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ ABCE est un rectangle.

3°) a- Donnons un repère de chacune des droites (Δ_1) et (Δ_2)

$$(\Delta_1): \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1} \quad \text{et} \quad (\Delta_2): \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

donc un repère de (Δ_1) est $(K; \vec{u})$ avec $K(2; 1; 0)$ et $\vec{u}(2; 1; 1)$ et un repère de (Δ_2) est $(O; \vec{v})$ avec $O(0; 0; 0)$ et $\vec{v}(-1; 1; 1)$

b- Démontrons que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires

$$\vec{OK}(2; 1; 0) \quad \text{et} \quad \vec{u} \wedge \vec{v}(0; -3; 3)$$

$$\vec{OK} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -3 \neq 0 \quad \text{d'où} \quad (\Delta_1) \quad \text{et} \quad (\Delta_2) \quad \text{sont non coplanaires.}$$

4°) Donnons une représentation paramétrique de (Δ)

Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{n}_P(3; -1; 2)$ et $D \in (\Delta)$

$$\text{d'où} \quad (\Delta): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

5°) a- Coordonnées du point H.

Soit $H(x_H; y_H; z_H)$

$$\{H\} = (P) \cap (\Delta)$$

$$H \in (\Delta) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2 + 3t \\ y_H = -t \\ z_H = -2 + 2t \\ 3x_H - y_H + 2z_H + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2 + 3t \\ y_H = -t \\ z_H = -2 + 2t \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{1}{2} \\ y_H = \frac{1}{2} \\ z_H = -3 \end{cases}$$

$$\text{D'où} \quad H\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -3\right)$$

b- Calculons deux manières la distance du point D au plan (P)

soit d cette distance

1^{ère} manière

$$d = DH = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + (-3 - 2)^2}$$

$$d = \frac{\sqrt{14}}{2} u.l$$

2^{ème} manière

$$d = \frac{|3x_D - y_D + 2z_D + 5|}{\sqrt{14}}$$

$$d = \frac{7}{\sqrt{14}} u.l \quad \text{donc} \quad d = \frac{\sqrt{14}}{2} u.l$$

c- Calculons le volume du tétraèdre ABCD.

Soit V ce volume

$$V = \frac{\text{Aire de base} \times \text{hauteur}}{3}$$

Aire de base = $\mathcal{A}$ et hauteur = DH

$$V = \frac{\frac{3\sqrt{14}}{2} \times \frac{\sqrt{14}}{2}}{3} \quad \text{d'où} \quad V = \frac{7}{2} u.v$$

ACTIVITE 9 :

1°) a- Calculons l'aire du triangle ABC

$$\vec{AB}(-1; 1; 1) \quad \text{et} \quad \vec{AC}(-1; -1; -1) \quad \text{et} \quad \vec{AB} \wedge \vec{AC}(0; -2; 2)$$

Soit $\mathcal{A}$ cette aire

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| u.a$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{2} u.a$$

b- Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC)

$\vec{n}(0; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) et soit

$M(x; y; z)$ un point de l'espace

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow -y + z = 0 \quad \text{d'où} \quad (ABC): -y + z = 0$$

c- Vérifions que $D \notin (ABC)$

$$-y_D + z_D = -2 \neq 0 \quad \text{d'où} \quad D \notin (ABC)$$

2°) a- Déterminons un système d'équation paramétriques de la droite (Δ)

$\vec{u}(0; -1; 1)$ est un vecteur directeur de (Δ) et $D \in (\Delta)$

$$\text{donc} \quad (\Delta): \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - \alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

b- Déterminons les coordonnées du point H

$$\{H\} = (\Delta) \cap (P)$$

$$H(x_H; y_H; z_H) \in (\Delta) \cap (P) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_H = -1 \\ y_H = 1 - \alpha \\ z_H = -1 + \alpha \\ -y_H + z_H = 0 \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1 \\ y_H = 1 - \alpha \\ z_H = -1 + \alpha \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1 \\ y_H = 0 \\ z_H = 0 \end{cases} \text{ d'où } \underline{H(-1; 0; 0)}$$

c- Dédisons-en la distance du point D au plan (ABC)

$$d(D, (ABC)) = DH$$

$$= \sqrt{(-1+1)^2 + (0-1)^2 + (0-1)^2}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$\underline{d(D, (ABC)) = \sqrt{2} \text{ u.l}}$$

3°) Calculons le volume du tétraèdre ABCD

Soit V ce volume

$$V = \frac{\text{Aire du triangle} \times DH}{3} \text{ u.v}$$

$$V = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{3} \text{ u.v}$$

$$V = \frac{2}{3} \text{ u.v}$$

4°) a- Déterminons une équation cartésienne de (P)

Un vecteur normal au plan (P) est $\overrightarrow{AB}(-1; 1; 1)$ donc (P) est sous la forme $-x + y + z + d = 0$ (avec $d \in \mathbb{R}$)

(P) passe par le milieu du segment [AB] soit I ce milieu

$$I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$I \in (P) \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + d = 0$$

$$\Rightarrow d = -\frac{1}{2} \text{ d'où } (P): -2x + 2y + 2z - 1 = 0$$

b- Déterminons un système d'équation paramétrique de (Δ')

$$(\Delta') = (P) \cap (ABC)$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y + 2z - 1 = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y + 2z - 1 = 0 \\ y = z \end{cases}$$

posons $z = t$; ($t \in \mathbb{R}$) on trouve :

$$(\Delta') : \begin{cases} x = 2t - \frac{1}{2} \\ y = t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$$

ACTIVITE 10 :

1°) Déterminons la nature du triangle BCD et calculons son aire.

$$\text{On trouve : } BC = \sqrt{5} ; BD = \sqrt{75} \text{ et } CD = \sqrt{70}$$

On remarque immédiatement que : $BD^2 = BC^2 + CD^2$, donc le triangle BCD est rectangle en C (réciproque de la propriété de Pythagore)

$$\text{Son aire : } \frac{1}{2} \times BC \times CD = \frac{1}{2} \sqrt{5} \sqrt{70} = \frac{5\sqrt{14}}{2}$$

2°) a- Prouvons que $\vec{n}(-2; 3; 1)$ est un vecteur normal au plan (BCD)

Deux vecteurs directeurs (non colinéaires) du plan (BCD)

sont : $\overrightarrow{BC}(1; 0; 2)$ et $\overrightarrow{BD}(7; 5; -1)$ on calcule et on

trouve : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ du coup $\vec{n}$ est orthogonal à

deux vecteurs directeur du plan donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b- équation cartésienne du plan (BCD)

Comme $\vec{n}$ est normal au plan (BCD), ce dernier admet une

équation cartésienne de la forme : $-2x + 3y + z + d = 0$

comme (BCD) passe par B, les coordonnées de B vérifient l'équation soit :

$$-2 \times (-1) + 3 \times 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -5$$

Donc une équation cartésienne de (BCD) est :

$$-2x + 3y + z - 5 = 0.$$

3°) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D).

La droite (D) est orthogonale au plan (BCD) donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (D)

Du coup on a directement la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

4°) Coordonnées du point H.

On résout le système :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \\ -2x + 3y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \\ -2(5 - 2t) + 3(-5 + 3t) + 2 + t - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \\ 14t - 28 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 4 \\ t = 2 \end{cases} \text{ donc } H(1; 1; 4)$$

5°) Dédudons le volume du tétraèdre ABCD

$V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la

hauteur correspondant

Pour ce tétraèdre on considère la base BCD et la hauteur [AH]

• L'aire de la base est : $\frac{5\sqrt{14}}{2}$ (question 1°)

• $AH = \sqrt{(1-5)^2 + (1+5)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{14}$

Du coup on trouve que le volume du tétraèdre ABCD est :

$$V = \frac{70}{3}$$

6°) On trouve $\text{mes}(\widehat{BAC}) = 14,2^\circ$.

ACTIVITE 11 :

1°) Coordonnées de I

$$I = \text{bar}\{(A, 2), (B, 3)\} \Leftrightarrow$$

$$I\left(\frac{2x_A + 3x_B}{5}; \frac{2y_A + 3y_B}{5}; \frac{2z_A + 3z_B}{5}\right) \text{ et on trouve}$$

$$I(-1; 2; 0)$$

2°) Démontrons que (D) est une droite dont nous préciserons un repère

$$M \in (D) \Leftrightarrow 5\overline{MI} \wedge \overline{CA} = \vec{0} \text{ donc (D) est une droite qui}$$

passse par le point I et dirigé par $\overline{CA}$.

Un vecteur directeur à (D) est $\overline{r}$

3°) a- Démontrons que (Δ) et (D) sont strictement parallèles

$\overline{u}(-2; -2; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

$$\overline{CA}(2; 2; -1) \text{ et}$$

$\overline{u} = -\overline{CA}$ donc les vecteurs $\overline{u}$ et $\overline{CA}$ sont colinéaires alors

(Δ) et (D) sont parallèles (a)

$I(-1; 2; 0) \in (D)$ vérifions si $I \in (\Delta)$

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 2\alpha \\ y_1 = 2 - 2\alpha \\ z_1 = -2 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -1 - 2\alpha \\ 2 = 2 - 2\alpha \\ 0 = -2 + \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$0 \neq 2$ donc $I \notin (\Delta)$ (b)

(a) et (b) $\Rightarrow$ (Δ) et (D) sont strictement parallèles

b- Déterminons une équation cartésienne du plan (P)

$(B; \overline{u})$ est un repère de (Δ) avec $B(-1; 2; -2)$ et $\overline{u}(-2; -2; 1)$

Le triplet $(B; \overline{IB}, \overline{CA})$ est un repère du plan (P)

$$\overline{IB}(0; 0; -2); \overline{CA}(2; 2; -1) \text{ et } \overline{IB} \wedge \overline{CA}(4; -4; 0)$$

$\overline{n}_P(1; -1; 0)$ est un vecteur normal au plan (P)

$$(P): x - y + d = 0$$

$$B \in (P) \Rightarrow -1 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 3 \text{ d'où}$$

$$(P): x - y + 3 = 0$$

4°) Démontrons que (Q) $\perp$ (P)

$\overline{n}_Q(1; 1; 0)$ est un vecteur normal au plan (Q)

$$\overline{n}_P \cdot \overline{n}_Q = 0 \text{ d'où (Q) } \perp (P)$$

b- Calculons $d(K, (P))$ et $d(K, (Q))$

on trouve $d(K, (P)) = \sqrt{2} \text{ u.l}$ et

$$d(K, (Q)) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ u.l}$$

c- Dédudons-en la distance du point K à la droite d'intersection de (P) et (Q) soit d cette distance

$$d = \sqrt{[d(K, (P))]^2 + [d(K, (Q))]^2}$$

$$d = \frac{\sqrt{26}}{2} \text{ u.l}$$

ACTIVITE 15 :

1°) Déterminons une équation cartésienne de (Q)

$\overline{AB}(1; -1; 2)$ est un vecteur normal au plan (Q) donc

l'équation cartésienne de (Q) est sous la forme de $x - y + 2z + d = 0, (d \in \mathbb{R})$

$$A \in (Q) \Rightarrow d = 3 \text{ d'où (Q) : } x - y + 2z + 3 = 0$$

2°) a- Prouvons que la droite (AB) est parallèle au plan (P_m)

$\overline{n}(1; 1; 0)$ est un vecteur normal au plan (P_m) .

$$\overline{AB} \cdot \overline{n} = 1 + (-1) = 0 \text{ donc } \overline{AB} \perp \overline{n} \text{ par suite (AB) et } (P_m).$$

b- Valeur de m tels que $(AB) \subset (P_m)$

Si une droite est parallèle à un plan, elle est contenue dans ce plan si un point de cette droite est dans le plan.

$$(AB) \subset (P_m) \Rightarrow A \in (P_m)$$

$$\Rightarrow 3 + m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{m = 0}$$

c- Prouvons que (Q) $\perp$ (P_m)

Soit $\overline{n}(1; 1; 0)$ un vecteur normal à (P) et $\overline{n}_Q(1; -1; -2)$

un vecteur normal au plan (Q)

$$\overline{n} \cdot \overline{n}_Q = 0 \Leftrightarrow (P_m) \perp (Q)$$

3°) Valeur de m pour que $ABB'A$ soit un carré

Rappel : si une droite est parallèle à un plan, elle est parallèle à sa projection sur ce plan.

* On a (AB) parallèle à (P_m) donc $(AB) \parallel (A'B')$ or $A' =$ projection orthogonale de A , $B' =$ projection de B donc

$(AA') \parallel (BB')$ et $\angle A'AB'$ est un angle droit.

Que peut-on conclure alors pour $ABB'A'$?

$ABB'A'$ est un rectangle. Pour qu'il soit un carré, il suffit d'écrire : $AB = AA'$

Or AA' n'est autre que la distance de A à (P_m)

* Appliquer la formule et trouver que $AA' = \frac{|m|}{\sqrt{2}}$

* Calculer AB et déduire que $m = 2\sqrt{3}$ ou $m = -2\sqrt{3}$.

ACTIVITE 16 :

1°) a- Démontrons que $ABGH$ est un parallélogramme. $ABCDEFGH$ étant un cube les droites (AB) et (HG) sont parallèles et $AB = HG$ donc le quadrilatère $ABGH$ est un parallélogramme.

b- Démontrons que : $G = \text{bar}\{(A, -1); (B, 1); (H, 1)\}$

$ABGH$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GH} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GH} = \vec{0} \text{ et } -1 + 1 + 1 \neq 0$$

d'où $G = \text{bar}\{(A, -1); (B, 1); (H, 1)\}$

2°) a- Démontrons que (Δ) est une droite dont nous précisons un repère.

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \wedge 3\overrightarrow{MK} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MK} = \vec{0} \text{ or } G \neq K \text{ donc } (\Delta) = (GK)$$

par suite (Δ) est une droite de repère $(G; \overrightarrow{GK})$.

b- Démontrons que (σ) est un plan dont nous précisons un vecteur normal

$$M \in (\sigma) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}) = 0 \text{ } ABGH \text{ étant un}$$

parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG}$ donc $M \in (\sigma) \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \text{ d'où } (\sigma) \text{ est un plan passant par } G \text{ et d'un}$$

vecteur normal $\overrightarrow{AG}$.

3°) a- Déterminons les coordonnées des points A, B, H, G et K .

$$A(-3; 1; -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \vec{i}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{i}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \text{ d'où } B(-2; 1; -2)$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \text{ donc}$$

$$H(-3; 2; -1)$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G + 3 \\ y_G - 2 \\ z_G + 1 \end{pmatrix} \text{ et on trouve}$$

$$G(-2; 2; -1)$$

$K = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (H, 1)\}$ on trouve donc :

$$K\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$$

b- Equation cartésienne du plan (σ) et une représentation paramétrique de (Δ)

*Equation cartésienne du plan (σ)

$\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$ est un vecteur normal au plan (σ) et $G \in (\sigma)$

on trouve alors : $(\sigma): x + y + z + 1 = 0$

*Représentation paramétrique de (Δ)

$$\overrightarrow{GK}\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) \text{ donc un vecteur directeur à la droite}$$

(Δ) peut être $\vec{u} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{GK}$. On a $\vec{u}(1; 1; 1)$ et $G \in (\Delta)$

$$\text{donc } (\Delta): \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 2 \text{ (} t \in \mathbb{R} \text{)} \\ z = t - 1 \end{cases}$$

4°) a- Démontrons que (D_1) et (D_2) sont sécantes :

Posons $(D_2) \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = -z = \alpha$; ($\alpha \in \mathbb{R}$) donc (D_2) :

$$\begin{cases} x = 2\alpha - 1 \\ y = 3\alpha + 3 \text{ (} \alpha \in \mathbb{R} \text{)} \\ z = -\alpha \end{cases} \text{ et } (D_2): \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 2 \text{ (} t \in \mathbb{R} \text{)} \\ z = t - 1 \end{cases}$$

$$(D_1) \cap (D_2) \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2 = -1 + 2\alpha \\ t + 2 = 3 + 3\alpha \\ t - 1 = -\alpha \end{cases} \text{ (} t; \alpha \in \mathbb{R}^2 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - 2\alpha = 1 \\ t - 3\alpha = 1 \\ t + \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Soit $\{I\} = (D_1) \cap (D_2)$ on trouve $I(-1; 3; 0)$ d'où (D_1) et (D_2) sont sécantes en point $I(-1; 3; 0)$

b- Donnons une équation cartésienne de (Q_2) contenant (D_1) et (D_2)

Soit $\vec{u}_1(1; 1; 1)$ un vecteur directeur de (D_1) et

$\vec{u}_2(2; 3; -1)$ un vecteur directeur de (D_2)

$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 (-4; 3; 1)$ est un vecteur normal au plan (Q_2) et $I \in (Q_2)$ alors on trouve $(Q_2): -4x + 3y + z - 13 = 0$

c- Démontrons que $(Q_1) \perp (Q_2)$

$\vec{n}_1 (1; 1; 1)$ est un vecteur normal au plan (Q_1) et

$\vec{n}_2 (-4; 3; 1)$ un vecteur normal au plan (Q_2)

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1) \times (-4) + (1) \times (3) + (1) \times (1)$$

$$= 0 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \text{ par suite } (Q_1) \perp (Q_2)$$

5° a- Déterminons une équation cartésienne du plan (Q_3)

$\vec{OA}(-3; 1; -2)$ et $\vec{n}_1 (1; 1; 1)$ sont deux vecteurs de (Q_3) ;

$\vec{OA} \wedge \vec{n}_1 (3; 1; -4)$ donc $\vec{n}_3 (3; 1; -4)$ est vecteur normal au plan (Q_3) et $O \in (Q_3)$ donc $(Q_3): 3x + y - 4z = 0$

b- Déterminons un repère de $(Q_1) \cap (Q_3)$ soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

$$M(x; y; z) \in (Q_1) \cap (Q_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - 5y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x = \frac{5}{2}z + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Posons $z = \beta$; $\beta \in \mathbb{R}$

$$\text{Alors } M \in (Q_1) \cap (Q_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2}\beta + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{7}{2}\beta - \frac{3}{2}, (\beta \in \mathbb{R}) \text{ d'où} \\ z = \beta \end{cases}$$

un repère de $(Q_1) \cap (Q_3)$ est le couple $(\vec{K}; \vec{v})$ avec

$$\vec{K} \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0 \right) \text{ et } \vec{v} \left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; 1 \right)$$

6° a- Déterminons une représentation paramétrique de la droite (OL)

$(O; \vec{n}_1)$ est un repère de la droite (OL) donc on trouve :

$$(OL): \begin{cases} x = t' \\ y = t' (t' \in \mathbb{R}) \\ z = t' \end{cases}$$

b- Déterminons les coordonnées de L

$$\{L\} = (OL) \cap (Q_1) \text{ et on trouve } L \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right)$$

7° a- Démontrons que $OABG$ est un tétraèdre.

$$\vec{OG} \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{OB}) = -3 \neq 0 \text{ d'où } OABG \text{ est un tétraèdre}$$

$$b- V_{OABG} = \frac{1}{6} |\vec{OG} \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{OB})|_{u,v} \text{ d'où}$$

$$V_{OABG} = \frac{1}{2} u \cdot v$$

ACTIVITE 18 :

1° Nature et un repère de (D_1)

$$M \in (D_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z + 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Posons $z = \alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$

$$M \in (D_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 3 \\ y = 2 \\ z = \alpha \end{cases}, (\alpha \in \mathbb{R}) \text{ donc } (D_1) \text{ est une}$$

droite dont un repère est $(M_1; \vec{u}_1)$ où $M_1(3; 2; 0)$ et $\vec{u}_1(-1; 0; 1)$.

2° Déterminons une équation cartésienne de (P) et précisons sa nature

$$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{CD} = 1; \vec{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\vec{CD}(4; -2; -1)$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow 4(x-1) - 2(y+2) - (z-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2y - z - 4 - 4 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2y - z - 8 = 0 \text{ donc une équation}$$

cartésienne de (P) est : $4x - 2y - z - 8 = 0$ sa forme permet de déduire que (P) est un plan de vecteur normal

$$\vec{n}_P(4; -2; -1)$$

3° a- *Démontrons que A, B et C ne sont pas alignés

$$\vec{AB}(-1; 3; 1) \text{ et } \vec{AC}(0; 5; 3) \text{ et } \vec{AB} \wedge \vec{AC}(4; 3; -5);$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0} \text{ donc les points A, B et C ne sont pas alignés}$$

*Equation cartésienne du plan (ABC)

$\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc

$$(ABC): 4x + 3y - 5z + d = 0 (d \in \mathbb{R})$$

$$B \in (ABC) \Rightarrow d = 7 \text{ d'où } (ABC): 4x + 3y - 5z + 7 = 0$$

b-Déduisons-en que les points A, B, C et D sont non coplanaires :

$$4x_D + 3y_D - 5z_D + 7 = 20 + 3 - 15 + 7$$

$$= 15 \neq 0 \text{ donc } D \notin (ABC) \text{ par}$$

suite A, B, C et D sont non coplanaires.

c- Calculons son volume :

Soit V ce volume

$$V = \frac{1}{6} |\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|_{u,v} \text{ on trouve : } V = \frac{5}{2} u \cdot v$$

d- Représentation paramétrique de (Δ)

un repère de (Δ) est $(D; (\overline{AB} \wedge \overline{AC}))$ on trouve

$$(\Delta): \begin{cases} x = 4t + 5 \\ y = 3t + 1 \\ z = -5t + 3 \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$$

4°) Coordonnées du point E

ABCE est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{EC}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_E \\ 3 - y_E \\ 4 - z_E \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 2 \\ y_E = 0 \\ z_E = 3 \end{cases} \text{ d'où } E(2; 0; 3)$$

*L'aire du parallélogramme ABCE

Soit A cette aire :

$$A = \|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\| u.a ; u.a = \text{unité d'aire}$$

On trouve $A = 5\sqrt{2}u.a$

5°) Prouvons que les droites (Δ) et (D_1) sont non coplanaires

Soit $\vec{v}(4; 3; -5)$ un vecteur directeur de (Δ)

$(D; \vec{v})$ est donc un repère de (Δ) et $(M_1; \vec{u}_1)$ est un repère de (D_1)

$$\overline{M_1D}(2; -1; 3) \text{ et } \vec{u}_1 \wedge \vec{v}(-3; -1; -3)$$

$$\overline{M_1D} \cdot \vec{u}_1 \wedge \vec{v} = -6 + 1 - 9 = -14 \text{ or } -14 \neq 0 \text{ d'où les droites } (\Delta) \text{ et } (D_1) \text{ sont non coplanaires.}$$

6°) Equation cartésienne du plan (Q)

$$\text{Posons } (D'): \frac{x-1}{2} = y = -z-1 = \beta ; \beta \in \mathbb{R} \text{ donc}$$

$$(D'): \begin{cases} x = 2\beta + 1 \\ y = \beta \\ z = -\beta - 1 \end{cases}, (\beta \in \mathbb{R})$$

Donc $\vec{u}'(2; 1; -1)$ est un vecteur de (Q) et $\vec{u}''(4; 3; -5)$ est aussi un vecteur de (Q) et

$\vec{u}' \wedge \vec{u}''(-2; 6; 2)$ alors on peut prendre $\vec{n}_Q(-1; 3; 1)$

comme un vecteur normal au plan (Q) et $O \in (Q)$ donc

$$\text{obtient } (Q): -x + 3y + z = 0$$

ACTIVITE 20 :

1°) Vérifions $\overline{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$

$$\overline{AG} = \overline{AC} + \overline{CG}$$

$$= \overline{AC} + \overline{AE}$$

$$= \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} \text{ d'où le résultat.}$$

b- Déterminons les composantes des vecteurs $\overline{EB}$, $\overline{EG}$ et $\overline{EB} \wedge \overline{EG}$.

$$\text{On trouve } \overline{EB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; \overline{EG} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{EB} \wedge \overline{EG} \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

c- Déterminons une équation cartésienne du plan (EBG)

$\overline{EB} \wedge \overline{EG}$ est un vecteur normal du plan (EBG), donc une équation cartésienne du plan (EBG) est de la forme :

$$12x - 6y + 8z + d = 0 \text{ et comme } E \in (EBG) \text{ donc}$$

$$24 + d = 0 \text{ signifie } d = -24$$

Conclusion : une équation cartésienne du plan (EBG) est :

$$6x - 3y + 4z - 12 = 0$$

2°) a- Vérifions que M décrit la droite (AG) privé du point G.

Soit α un réel différent de 1 et $M(2\alpha; 4\alpha; 3\alpha)$.

$$\overline{AM} = 2\alpha\vec{i} + 4\alpha\vec{j} + 3\alpha\vec{k}$$

$$= \alpha(2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$$

$$= \alpha\overline{AG} \text{ et } \alpha \neq 1 \text{ donc } M \in (AG) \text{ et } M \neq G \text{ d'où le}$$

résultat.

b- Prouvons que M n'appartient pas au plan (EBG).

$$\text{On a : } 12\alpha - 12\alpha + 12\alpha - 12 = 12(\alpha - 1)$$

$$\neq 0 \text{ car } \alpha \neq 1 \text{ donc}$$

$$M \notin (EBG).$$

Autrement : $A \notin (EBG)$ donc $(AG) \not\subset (EBG)$ de plus

$$(AG) \cap (EBG) = \{G\} \text{ et comme M décrit la droite (AG)}$$

privé du point G donc $M \notin (EBG)$.

3°) a- Exprimons V en fonction de α

V = le volume du tétraèdre MEBG

$$V = \frac{1}{6} |(\overline{EB} \wedge \overline{EG}) \cdot \overline{EM}| u.v, u.v \text{ unité de volume}$$

$$\text{Or } \overline{EM} \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \\ 3\alpha - 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } V = \frac{1}{6} |24\alpha - 24\alpha + 24(\alpha - 1)| \text{ soit}$$

$$V = 4|\alpha - 1| u.v$$

b- Calculons le volume du tétraèdre AEBG.

Le volume du tétraèdre AEBG est égal au volume du tétraèdre

MEBG pour $M=A$, c'est dire pour $\alpha=0$ donc le V'

$$\text{recherché est : } V' = 4 u.v$$

c- Le volume du parallélépipède ABCDEFGH est égal à

$$2 \times 4 \times 3 = 24$$

V est égal au volume du parallélépipède signifie $4|\alpha - 1| = 24$

$$\Leftrightarrow |\alpha - 1| = 6$$

$$\Leftrightarrow \underline{\alpha = 7} \text{ ou } \underline{\alpha = -5}$$

ACTIVITE 21 :

1°) Prouvons que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires

$\vec{n}(2; -1; 2)$ et $\vec{n'}(2; 2; -1)$ sont les vecteurs normaux respectivement des plans (P) et (P')

$\vec{n} \cdot \vec{n'} = 4 - 2 - 2 = 0$ d'où les plans (P) et (P') sont perpendiculaires

2°)* Calculons $d(A; (P))$ et $d(A; (P'))$

On trouve : $d(A; (P)) = \frac{7}{3}$ et $d(A; (P')) = 1$

*Déduisons-en $d(A; (D))$

On sait que d'après le théorème de Pythagore

$d^2(A; (D)) = d^2(A; (P)) + d^2(A; (P'))$ et on trouve :

$$d(A; (D)) = \frac{\sqrt{58}}{3}$$

3°) a- Système d'équation paramétrique de la (D)

Soit $M(x; y; z)$. $(D) = (P) \cap (P')$ donc

$$M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z - 5 = 0 \\ 2x + 2y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z - 5 = 0 \\ 6x + 3z - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z - 5 = 0 \\ x = -\frac{1}{2}z + \frac{7}{3} \end{cases}$$

posons $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ alors on trouve

$$M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{7}{3} \\ y = \alpha - \frac{1}{3} \\ z = \alpha \end{cases}, (\alpha \in \mathbb{R}) \text{ d'où}$$

$$(D): \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{7}{3} \\ y = \alpha - \frac{1}{3} \\ z = \alpha \end{cases}, (\alpha \in \mathbb{R})$$

b- Déterminons les coordonnées de M pour que AM soit minimale.

$$M\left(-\frac{1}{2}\alpha + \frac{7}{3}; \alpha - \frac{1}{3}; \alpha\right) \text{ on trouve}$$

$$AM^2 = \frac{9}{4}\alpha^2 - 4\alpha + \frac{74}{9}$$

$$AM^2 = \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{58}{9}$$

AM est minimale $\Leftrightarrow AM^2$ est minimale

AM^2 est minimale pour $\frac{3}{2}\alpha - \frac{4}{3} = 0$

$\frac{3}{2}\alpha - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{8}{9}$ alors on trouve : $M\left(\frac{17}{9}; \frac{5}{9}; \frac{8}{9}\right)$

ACTIVITE 22 :

1°) Représentation paramétrique de la droite (AB)

(A; AB) est un repère de la droite (AB)

$A(1; -1; 2)$ et $\vec{AB}(-2; 2; -4)$ d'où

$$(AB): \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = -1 + 2\alpha, (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 4\alpha \end{cases}$$

2°) a-équation cartésienne de (P)

Le vecteur $\vec{AB}(-2; 2; -4)$ est un vecteur normal au plan (P), donc une équation cartésienne de (P) est de la

forme : $-2x + 2y - 4z + d = 0$; $d \in \mathbb{R}$

$A \in (P) \Rightarrow d = 12$ par suite on trouve après simplification

$$(P): -x + y - 2z + 6 = 0.$$

b- Vérifions que $B \in (Q)$ et $(P) \parallel (Q)$

$$x_B - y_B + 2z_B + 6 = (-1) - (1) + 2(-2) + 6 = -6 + 6 = 0$$

D'où $B \in (Q)$

Soit $\vec{n}_Q(1; -1; 2)$ un vecteur normal au plan (Q) et

$\vec{n}_P(-1; 1; -2)$ celui du plan (P)

$\vec{n}_Q = -\vec{n}_P$ donc les vecteurs $\vec{n}_Q$ et $\vec{n}_P$ sont colinéaires

par suite $(P) \parallel (Q)$

3°) a-Prouvons que I appartient à la droite (AB).

I est le centre de la sphère tangente à (Q) en B donc

$(IB) \perp (Q)$. or $(P) \parallel (Q)$ donc $(IB) \perp (P)$ et puisque

$(AB) \perp (P)$ on conclut que $(IB) \parallel (AB)$ et par suite I, A et B sont alignés, ainsi $I \in (AB)$.

b- Déduisons-en que $b = -a$ et $c = 2a$

$$I \in (AB) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 2\alpha \\ b = -1 + 2\alpha; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ c = 2 - 4\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1-a}{2} \\ \alpha = \frac{1+b}{2} \text{ donc } \frac{1-a}{2} = \frac{1+b}{2} = \frac{2-c}{4} \\ \alpha = \frac{2-c}{4} \end{cases}$$

$$2 - 2a = 2 + 2b = 2 - c$$

$$\bullet \quad 2 - 2a = 2 + 2b \Leftrightarrow b = -a$$

$$\bullet \quad 2 - 2a = 2 - c \Leftrightarrow c = 2a \text{ par suite}$$

$b = -a$ et $c = 2a$

c-Démontrons que $IA^2 - IB^2 = 12$

Soit r le rayon du cercle d'intersection de la sphère (S) de rayon R de centre I et du plan (P). On a : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$;
 $d = d(I, (P))$

On sait que $IA = d(I, (P))$ (car $(IA) \perp (P)$ et $A \in (P)$) et
 $IB = R$ (sphère tangente à (Q) en B). donc $r^2 = IA^2 - IB^2$
 d'où $IA^2 - IB^2 = 12$

*Déduisons $a - b + 2c = 3$

Appliquer la formule donnant la distance de 2 points à l'aide de leurs coordonnées pour exprimer IA^2 et IB^2 en fonction de a, b et c . Remplacer alors dans la relation $IA^2 - IB^2 = 12$ qui donne : $a - b + 2c = 3$ (ne pas oublier de simplifier).

d- Calcul des coordonnées de I

Les 2 relations obtenues dans la question 3°)b- permettent de transformer la relation 3°)c- en une équation du 1er degré en a et par la même, de calculer a .

On obtient : $a = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$ et $c = 1$ d'où $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$

* Equation cartésienne de (S).

On calcule le rayon de (S) qui est IB

(Trouver $IB = \sqrt{\frac{27}{2}}$ Appliquer la formule donnant l'équation

d'une sphère connaissant son rayon et les coordonnées de son centre.

D'où (S) : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z - 1)^2 = \frac{27}{2}$

ACTIVITE 23 :

1°)a-

$G = \text{bar}\{(A, 2), (B, 3)\} \Leftrightarrow$

$G\left(\frac{2+3\sqrt{2}}{5\sqrt{6}}; \frac{2+3\sqrt{2}}{5\sqrt{6}}; \frac{4-3\sqrt{2}}{5\sqrt{6}}\right)$

b-

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow (2\overline{MA} + 3\overline{MB}) \wedge \overline{OC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overline{MG} \wedge \overline{OC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overline{MG} \wedge \overline{OC} = \vec{0}$ d'où (Γ) est une droite d'un

repère $(G; \overline{OC})$ avec $\overline{OC}(1; 0; 3)$

Une représentation paramétrique de (Γ) est :

$$\begin{cases} x = \alpha + \frac{2+3\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} \\ y = \frac{2+3\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} \\ z = 3\alpha + \frac{4-3\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R})$$

2°)a-

$\overline{OB}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right); \overline{OA}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

$\overline{OB} \cdot \overline{OA} = \frac{2}{\sqrt{18}} - \frac{2}{\sqrt{18}} = 0 \Leftrightarrow \overline{OB} \perp \overline{OA} (1)$

$\|\overline{OB}\| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1$

$\|\overline{OA}\| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}} = 1$

On a : $\|\overline{OB}\| = \|\overline{OA}\| = 1 (2)$

De (1) et (2) les vecteurs $\overline{OB}$ et $\overline{OA}$ sont orthogonaux et unitaires

b-

$\overline{OB}$ et $\overline{OA}$ sont unitaires et orthogonaux alors le triplet $(\overline{OA}, \vec{u}, \overline{OB})$ est base orthonormée directe $\Leftrightarrow$

$\overline{OB} \wedge \overline{OA} = \vec{u}$; $\overline{OB} \wedge \overline{OA}\left(\frac{3}{\sqrt{18}}; \frac{-3}{\sqrt{3}}; 0\right)$ d'où

$\vec{u}\left(\frac{3}{\sqrt{18}}; \frac{-3}{\sqrt{3}}; 0\right)$

c- On trouve

$(OAB) : x - y = 0$

d-

$d(C, (OAB)) = \frac{\sqrt{2}}{2} u.l$

e-

$d(C, (OAB)) \neq 0 \Leftrightarrow C \notin (OAB)$ d'où $OABC$ est un tétraèdre son volume est :

$V_{OABC} = \frac{1}{6} |\overline{OC} \cdot (\overline{OB} \wedge \overline{OA})|_{u.v}$ on trouve

$V_{OABC} = \frac{\sqrt{18}}{36} u.v.$

ACTIVITE 25 :

$(P_1) : x - y + z - 2 = 0$; $(P_2) : y + z + 1 = 0$.

1°) a-Démontrons que les plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

On a : $\vec{n}_1(1; -1; 1)$ est vecteur normal à (P_1)

$\vec{n}_2(0; 1; 1)$ est un vecteur normal à (P_2)

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1 \times 0) + (-1 \times 1) + (1 \times 1) = 0 - 1 + 1 = 0$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ d'où les plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

b- Déterminons une représentation paramétrique de (D_1)
 on a : $(D_1) = (P_1) \cap (P_2)$

Posons $\vec{w}(a; b; c)$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ un vecteur directeur de (D_1) .

$$(D_1) = (P_1) \cap (P_2) \Rightarrow \begin{cases} (D_1) \subset (P_1) \\ (D_1) \subset (P_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{w} \perp \vec{n}_1 \\ \vec{w} \perp \vec{n}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$$

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \text{ donc } \vec{w}(-2; -1; 1).$$

Posons $K(0; y; z)$ un point de (D_1)

$$K(0; y; z) \in (D_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 2 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 2 \\ 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Par suite $\begin{cases} x = -2\alpha \\ y = -\frac{3}{2} - \alpha \\ z = \frac{1}{2} + \alpha \end{cases}; (\alpha \in \mathbb{R})$ est une représentation

paramétrique de (D_1)

Autre méthode :

$$(D_1) = (P_1) \cap (P_2)$$

$M(x; y; z)$ un point de l'espace

$$M(x; y; z) \in (D_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Posons $z = t; t \in \mathbb{R}$

$$M(x; y; z) \in (D_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases}; (t \in \mathbb{R}) \text{ est une représentation paramétrique de}$$

(D_1) .

2°) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.

On a : $(S; \vec{u})$ avec $S(1; 1; 1)$ et $\vec{u}(1; 2; -3)$ est un repère de (D_2)

$(K; \vec{w})$ avec $K(0; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ et $\vec{w}(-2; -1; 1)$ est un repère de (D_1) .

Dans la base : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{KS}(1; \frac{5}{2}; \frac{1}{2})$

$$\vec{w} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\text{On a : } (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{KS} = (1 \times 1) + (-5 \times \frac{5}{2}) + (-3 \times \frac{1}{2}) = -13$$

$(\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{KS} \neq 0$ donc les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.

3°) a- Déduisons-en une équation cartésienne du plan (Q) contenant la droite (D_2) et parallèle à (D_1) .

$$\text{On a : } \begin{cases} (D_2) \subset (Q) \\ (D_1) // (Q) \end{cases}, \text{ alors de ce qui précède}$$

$\vec{w} \wedge \vec{u}(1; -5; -3)$ est un vecteur normal à (Q)

Donc $(Q) : x - 5y - 3z + d = 0 (d \in \mathbb{R})$

$$S(1; 1; 1) \in (Q) \Rightarrow d = 7 \text{ d'où } (Q) : x - 5y - 3z + 7 = 0.$$

b- Déterminons une représentation paramétrique de (Q) .

$$\text{on a : } (Q) : x - 5y - 3z + 7 = 0$$

Posons $y = \beta; z = \lambda$ avec $(\beta; \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{On a : } \begin{cases} x = 5\beta + 3\lambda - 7 \\ y = \beta \\ z = \lambda \end{cases}; (\beta; \lambda) \in \mathbb{R}^2 \text{ est une représentation}$$

paramétrique de (Q) .

4°) a- Détermine un vecteur $\vec{v}_1$ unitaire colinéaire à $\vec{u}_1$ et un vecteur $\vec{v}_2$ colinéaire à $\vec{u}_2$.

$$\text{On a : } \|\vec{v}_1\| = 1 \text{ et } \vec{v}_1 = k\vec{u}_1, k \in \mathbb{R}^*$$

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = k\vec{u}_1 & (1) \\ \|\vec{v}_1\| = 1 & (2) \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}^*$$

De (2) on a :

$$\|\vec{v}_1\| = 1 \Leftrightarrow |k| \times \|\vec{u}_1\| = 1$$

$$\Leftrightarrow |k| = \frac{1}{\|\vec{u}_1\|}$$

$$\text{alors } \vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\|\vec{u}_1\|} \right) \vec{u}_1 \text{ est un vecteur unitaire colinéaire à } \vec{u}_1$$

$$\text{soit } \vec{v}_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

de même $\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|} \vec{u}_2$ est un vecteur unitaire à $\vec{u}_2$; soit

$$\vec{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

b. Détermine un vecteur unitaire $\vec{v}_3$ orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$.

$$\text{On a : } \begin{cases} \vec{v}_3 \perp \vec{v}_1 \\ \vec{v}_3 \perp \vec{v}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$$

$$\text{Dans la base } \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right), \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{i} - \frac{2}{\sqrt{6}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{k};$$

$$\text{De plus } \|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

D'où $\vec{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$.

5°) Justifions que $(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ est une base orthonormée.

On a :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(0 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \times -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + \left(0 \times -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0$$

Donc $(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ est une base orthogonale (1)

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (0)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

$$\|\vec{v}_3\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

$$\text{Donc } \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = \|\vec{v}_3\| = 1 \quad (2)$$

De (1) et (2) $(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ est une base orthonormée.

6°) a. Déterminons la distance du point S au plan (P_1) puis au

$$\text{On a : } d(S; (P_1)) = \frac{|x_S - y_S + z_S - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} \text{ u.l.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ u.l. donc } d(S; (P_1)) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ u.l.}$$

$$d(S; (P_2)) = \frac{|y_S + z_S + 1|}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (1)^2}} \text{ u.l.}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}} \text{ u.l. donc } d(S; (P_2)) = \sqrt{3} \text{ u.l.}$$

b. Déduisons-en la distance du point S à la droite (D_1) .

On a : $(D_1) = (P_1) \cap (P_2)$ et $(P_1) \perp (P_2)$; donc de ce qui

$$\text{précède } d(S; (D_1)) = \sqrt{[d(S; (P_1))]^2 + [d(S; (P_2))]^2} \text{ u.l.}$$

$$d(S; (D_1)) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + 3}$$

$$\text{D'où } d(S; (D_1)) = \frac{\sqrt{30}}{3} \text{ u.l.}$$

ACTIVITE 26 :

Partie A :

1°) a. Déterminons trois réels α, β et γ tel que

$$J = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (E, \gamma)\}.$$

$$\text{On a : } \vec{EJ} = \frac{3}{2} \vec{EF}$$

$$\vec{EJ} = \frac{3}{2} \vec{EF} \Leftrightarrow 2\vec{EJ} = 3\vec{EF} \text{ or } \vec{EF} = \vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{EJ} = 3\vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow -2\vec{JE} - 3(\vec{AJ} + \vec{JB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -3\vec{JA} + 3\vec{JB} + 2\vec{JE} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{JA} - 3\vec{JB} - 2\vec{JE} = \vec{0}$$

Puisque $3 - 3 - 2 \neq 0$ donc $J = \text{bar}\{(A, 3), (B, -3), (E, -2)\}$ avec $\alpha = 3, \beta = -3$ et $\gamma = -2$.

b. Ecrivons I comme barycentre des points J, B et C.

on a : $\vec{EH} = \vec{JI}$ or $\vec{EH} = \vec{BC}$ donc :

$$\vec{EH} = \vec{JI} \Leftrightarrow \vec{EH} = \vec{BC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{BC} = \vec{JI}$$

$$\Leftrightarrow -\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IJ} = \vec{0}$$

Puisque : $-1 + 1 + 1 \neq 0$ donc :

$$I = \text{bar}\{(J, 1), (B, -1), (C, 1)\}.$$

2°) Démontrons que (Σ) est un plan passant par I et d'un

vecteur normal $\vec{HF}$.

$$M \in (\Sigma) \Leftrightarrow (3\vec{MA} - 3\vec{MB} - 2\vec{ME}) \cdot (\vec{MF} - \vec{MH}) = 0$$

$$M \in (\Sigma) \Leftrightarrow (3 - 3 - 2) \vec{MJ} \cdot \vec{HF} = 0 \text{ car}$$

$$J = \text{bar}\{(A, 3), (B, -3), (E, -2)\}$$

$$\text{Donc } M \in (\Sigma) \Leftrightarrow -2\vec{MJ} \cdot \vec{HF} = 0 \text{ soit}$$

$$M \in (\Sigma) \Leftrightarrow \vec{MJ} \cdot \vec{HF} = 0 \text{ d'où } (\Sigma) \text{ est un plan passant par I}$$

et d'un vecteur normal $\vec{HF}$.

3°) Démontrons que (Γ) est une droite de repère $(I; \vec{HF})$

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \wedge (\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MH}) = \vec{0}$$

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow (1-1+1)\overrightarrow{MI} \wedge (\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MH}) = \vec{0} \text{ car } I = \text{bar}((J,1), (B,-1), (C,1)).$$

Donc $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{HF} = \vec{0}$ d'où (Γ) est une droite d'un repère $(I; \overrightarrow{HF})$.

4°) Justifions que (Γ) et (Σ) sont perpendiculaires

On constate que le plan (Σ) a un vecteur normal $(\overrightarrow{HF})$ égal au vecteur directeur de la droite (Γ) d'où (Γ) et (Σ) sont perpendiculaires.

5°) a- Démontrons les coordonnées des points :

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\text{On a : } \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HD} \text{ alors } \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{HE} - \overrightarrow{HD} = -\vec{i} - \vec{k}$$

$$\text{donc } H(-1; 0; -1).$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HF} \\ &= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} \\ &= -\vec{i} - \vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j} \\ &= -2\vec{j} - \vec{k} \text{ donc } F(0; -2; -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} \\ &= -\vec{i} - \vec{k} - 2\vec{j} \text{ donc } G(-1; -2; -1) \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{HI} = \frac{3}{2} \overrightarrow{HG}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HI} = \frac{3}{2} \overrightarrow{HG} &\Rightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2} \overrightarrow{HG} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AH} + \frac{3}{2} \overrightarrow{HG} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HI} = \frac{3}{2} \overrightarrow{HG} &\Rightarrow \overrightarrow{AI} = -\vec{i} - \vec{k} + \frac{3}{2}(-2\vec{j}) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AI} = -\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k} \text{ donc } I(-1; -3; -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{HG} \\ &= -2\vec{j} \text{ donc } B(0; -2; 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE} \\ &= -\vec{i} - \vec{k} + \vec{i} = -\vec{k} \text{ donc } E(0; 0; -1) \end{aligned}$$

b- Déterminons les coordonnées de J et K.

$$\begin{aligned} \text{on a : } \overrightarrow{EH} &= \overrightarrow{JI} \\ \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{JI} &\Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{AI} \\ &= \vec{i} - \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k} \\ \overrightarrow{AJ} &= -3\vec{j} - \vec{k} \text{ donc } J(0; -3; -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HK} \\ &= \overrightarrow{AH} + \frac{1}{2} \overrightarrow{HG} \\ &= -\vec{i} - \vec{k} + \frac{1}{2}(-2\vec{j}) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AK} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \text{ donc } K(-1; -1; -1)$$

6°) Equation cartésienne de (Σ)

$\overrightarrow{HF}(1; -2; 0)$ est un vecteur normal de (Σ) donc :

$$(\Sigma): x - 2y + d = 0 ; d \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Or } J(0; -3; -1) \in (\Sigma) \text{ alors } d = -6 \text{ donc } (\Sigma): x - 2y - 6 = 0.$$

b- Déterminons une représentation de (Γ)

(Γ) a pour un repère $(I; \overrightarrow{HF})$ avec $I(-1; -3; -1)$ et

$$\overrightarrow{HF}(1; -2; 0) \text{ donc } (\Gamma): \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -3 - 2\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$$

c- Déterminons les coordonnées de Ω .

$$\{\Omega\} = (\Gamma) \cap (\Sigma)$$

$$\begin{aligned} \Omega(x; y; z) \in (\Gamma) \cap (\Sigma) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -3 - 2\alpha \\ z = -1 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -3 - 2\alpha \\ z = -1 \\ \alpha = \frac{1}{5} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = -\frac{17}{5} \\ z = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \Omega\left(-\frac{4}{5}; -\frac{17}{5}; -1\right).$$

Parti B :

7°) Démontrons que pour toute valeur de m , (P_m) est un plan de l'espace $\mathcal{E}$.

$$(P_m): (m+1)x + (m-1)z - 1 - 5m = 0 ; m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Posons } \begin{cases} m+1=0 \\ m-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+1=0 \\ m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=1 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases}, \forall m \in \mathbb{R}$$

Le repère étant orthonormé direct de l'espace, (P_m) a une écriture de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c et d tous réels ; de plus $\forall m \in \mathbb{R}$, $(m+1; 0; m-1) \neq (0; 0; 0)$ d'où (P_m) est un plan de l'espace.

8°) a- Démontrons que l'intersection de tous les plans (P_m) est une droite (Δ) dont tu donneras une représentation paramétrique

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace tel que $M \in (P_m)$.

$$\begin{aligned} M \in (P_m) &\Leftrightarrow (m+1)x + (m-1)z - 1 - 5m = 0 \\ &\Leftrightarrow mx + mz + x - z - 1 - 5m = 0 \\ &\Leftrightarrow x - z - 1 + m(x + z - 5) = 0 \end{aligned}$$

$$M \in (P_m) \Leftrightarrow \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ x + z - 5 = 0; \alpha \in \mathbb{R} \\ y = \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ 2x - 6 = 0; \alpha \in \mathbb{R} \\ y = \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases} \text{ d'où l'intersection de tous les}$$

plans (P_m) est une droite (Δ) dont une représentation

paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 \\ y = \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}$

b- Déterminons m pour que (P_m) soit parallèle à (Γ) .

Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} m+1 \\ 0 \\ m-1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal de (P_m) et $\overrightarrow{HF}(1; -2; 0)$ un

vecteur directeur de (Γ) .

$$\begin{aligned} (P_m) \text{ soit parallèle à } (\Gamma) &\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{HF} = 0 \\ &\Leftrightarrow (m+1) \times 1 + 0 \times (-2) + (m-1) \times 0 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = -1 \end{aligned}$$

D'où pour $m = -1$, $(P_m) \parallel (\Gamma)$.

c- Déterminons les coordonnées du projeté orthogonale de K sur (Γ) .

Soit $R(x; y; z)$ le projeté orthogonale de K sur (Γ)

On a : $\begin{cases} R \in (\Gamma) \\ \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{KR} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} R \in (\Gamma) \\ \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{KR} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -3 - 2\alpha \\ z = -1 \\ 1 \times (x+1) - 2 \times (y+1) + 0 \times (z+1) = 0 \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -3 - 2\alpha \\ z = -1 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -3 - 2\alpha \\ z = -1 \\ -1 + \alpha + 6 + 4\alpha - 1 = 0 \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} R \in (\Gamma) \\ \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{KR} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -3 - 2\alpha \\ z = -1 \\ 5\alpha = -4 \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} R \in (\Gamma) \\ \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{KR} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{4}{5} = -\frac{9}{5} \\ y = -3 + \frac{8}{5} = -\frac{7}{5} \\ z = -1 \\ \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

D'où $R\left(-\frac{9}{5}; -\frac{7}{5}; -1\right)$.

d- Déduisons-en la distance du point K à (Γ) .

Soit d cette distance :

On a : $d = KR$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(-\frac{9}{5} + 1\right)^2 + \left(-\frac{7}{5} + 1\right)^2 + (-1 + 1)^2} \text{ u.l.} \\ &= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25} + 0} \text{ soit } d = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ u.l.} \end{aligned}$$

SA₂/1- Corrigé des activités sur les nombres complexes

ACTIVITE 1 :

Ecrivons sous forme algébrique les nombres complexes :

On trouve :

$$z_1 = 7 - i ; z_2 = 2 - \sqrt{3} + i(2 + \sqrt{3}) ; z_3 = 3 + 4i ;$$

$$z_4 = 16 - 10i ; z_5 = 3 - 4i ; z_6 = i ; z_7 = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i ;$$

$$z_8 = \frac{65}{34} - \frac{39}{34}i ; z_9 = \frac{16}{65} + \frac{37}{65}i ; z_{10} = -8i ;$$

$$z_{11} = -7 + 24i ; z_{12} = -7 + 24i ; z_{13} = 24 + 11i ;$$

$$z_{14} = -12 + 47i ; z_{15} = 7 - i$$

ACTIVITE 2 :

Donnons les conjugués des nombres complexes suivants :

$$\overline{z_A} = 3 + 8i ; \overline{z_B} = -2 + 6i ; \overline{z_C} = \frac{1}{3 + i}$$

$$\overline{z_D} = \frac{3(2 + 4i)}{-i} ; \overline{z_E} = (2 - 4i)(1 + i)(8 - 2i) ;$$

$$\overline{z_F} = \frac{4(4 + i)(3 + i)}{(2 - i)(3 + 4i)} ; \overline{z_I} = 2 + \sqrt{2} ; \overline{z_J} = -i(1 - \sqrt{3})$$

ACTIVITE 3 :

Pour cet exercice il faut connaître ses formules.

Pour tout nombre entier naturel n ,

$$i^{4n} = 1 ; i^{4n+1} = i ; i^{4n+2} = -1 ; i^{4n+3} = -i$$

$$i^{25} = i^{4 \times 6 + 1} = i, i^{26} = i \times i = -1, i^{27} = -i, i^{28} = 1 \text{ donc}$$

$$A = 0$$

$$B = i^{2045} = i^{4 \times 511 + 1} = i$$

On effectue la division par 4 puis la formule

ACTIVITE 4 :

Calculons les modules des nombres complexes :

$$|z_1| = 2 ; |z_2| = 2 ; |z_3| = 1 ; |z_4| = 1 ; |z_5| = 2\sqrt{5} ;$$

$$|z_6| = \sqrt{26} ; |z_7| = 5\sqrt{2} ; |z_8| = \sqrt{10} ; |z_9| = 6 ; |z_{10}| = 8 ;$$

$$|z_{11}| = \frac{\sqrt{533}}{41} ; |z_{12}| = 1.$$

ACTIVITE 5 :

1°) Mettons sous formes algébriques les nombres complexes :

$$z_1 = 2i ; z_2 = 3 + i ; z_3 = 2 - 2i$$

2°) Plaçons les points : A(2i) ; B(3 + i) et

$$C(2 - 2i)$$

ACTIVITE 6 :

I/

1°) Forme trigonométrique et exponentielle des nombres complexes :

Forme trigonométrique :

$$z_1 = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_3 = 4 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Forme exponentielle :

$$z_1 = 2\sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_3 = 4 e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

2°) Déduisons-en une forme exponentielle du nombre complexe

Z

$$Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$$

$$|Z| = \frac{|z_1|^3 \times |z_3|^4}{|z_2|^6} = 12\sqrt{3}$$

$$\arg Z = \arg z_1^3 + \arg z_3^4 - \arg z_2^6 + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\arg Z = 3 \arg z_1 + 4 \arg z_3 - 6 \arg z_2 + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\arg Z = \frac{5\pi}{2} - \frac{4\pi}{4} - \frac{6\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\arg Z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ donc } Z = 12\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

3°) Calculons la forme algébrique de Z

$$= 12\sqrt{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right); \text{ on trouve } \underline{Z = -12\sqrt{3}i}$$

IV) a- Ecrivons u , u et w sous forme exponentielle.

$$u = 2\sqrt{3} - 2i$$

On a : $|u| = 4$. Soit α un argument de u . α est une solution du

$$\text{système : } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}; \text{ on peut prendre : } \alpha = -\frac{\pi}{6}$$

Donc $u = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ est la forme exponentielle de u .

$$v = -1 + i$$

On a : $|v| = \sqrt{2}$ et soit θ un argument de v

$$\text{alors on a : } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \text{ on peut prendre } \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Donc $v = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ est la forme exponentielle de v

$$w = u \cdot v$$

On a : $|w| = |u| \times |v|$

$$= 4\sqrt{2}. \text{ Soit } \beta \text{ un argument de } w$$

$$\text{On a : } \beta = \alpha + \theta = \frac{7\pi}{12}$$

Donc $w = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ est la forme exponentielle de w .

b- Ecrivons w sous forme algébrique.

$$\text{On trouve : } \underline{w = 2(1 - \sqrt{3}) + 2i(1 + \sqrt{3})}$$

Déterminons les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

$$\text{On a : } \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \text{ donc : } w = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$w = 4\sqrt{2} \left(-\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\text{On a : } \begin{cases} w = 4\sqrt{2} \left(-\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right) \\ w = 2(1 - \sqrt{3}) + 2i(1 + \sqrt{3}) \end{cases} \text{ donc :}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi}{12} = -\frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \text{ soit : } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

2°) Ecrivons u^{2015} et v^{2015}

$$\text{On trouve : } u^{2015} = 4^{2014} (2\sqrt{3} + 2i) \text{ et } v^{2015} = 2^{1007} (-1 - i)$$

ACTIVITE 10 :

1°) a- X et Y en fonction de x et y

$$\begin{aligned} Z &= \frac{x + iy - 4 + 3i}{x + iy - 3 + 2i} \\ &= \frac{[(x-4) + i(y+3)][(x-3) - i(y+2)]}{(x-3)^2 + (y+2)^2} \text{ avec } (x; y) \neq (3; -2) \\ &= \frac{(x-4)(x-3) + (y+3)(y+2)}{(x-3)^2 + (y+2)^2} + i \frac{(y+3)(x-3) - (x-4)(y+2)}{(x-3)^2 + (y+2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 - 7x + y^2 + 5y + 18}{(x-3)^2 + (y+2)^2} + i \frac{y + x - 1}{(x-3)^2 + (y+2)^2} \text{ d'où}$$

$$X = \frac{x^2 - 7x + y^2 + 5y + 18}{(x-3)^2 + (y+2)^2} \text{ et } Y = \frac{y + x - 1}{(x-3)^2 + (y+2)^2}$$

b- Ensemble E des points $M(z)$ tel que $Z \in i\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ (x; y) \neq (3; -2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + y^2 + 5y + 18 = 0 \\ (x; y) \neq (3; -2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ (x; y) \neq (3; -2) \end{cases} \end{aligned}$$

D'où E est le cercle de centre de coordonnées $\left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ et de

rayon $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ privé du point de coordonnée $(3; -2)$

c- Justifions que si $Z \in \mathbb{R}$, alors $Z = \frac{x-4}{x-3}$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ (x; y) \neq (3; -2) \end{cases}$$

$$y = -x + 1 \text{ alors } z = x + i(-x + 1) \text{ donc } Z = \frac{x - ix + i - 4 + 3i}{x - ix + i - 3 + 2i}$$

$$Z = \frac{(x-4) - i(x-4)}{(x-3) - i(x-3)}$$

$$Z = \frac{(x-4)(1-i)}{(x-3)(1-i)} = \frac{x-4}{x-3} \text{ d'où } Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \frac{x-4}{x-3}$$

d- Démontrons que si $|Z-1| = 1$ alors l'ensemble des points

$M(z)$ est le cercle de centre $\Omega(3; -2)$ et de rayon $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} |Z-1| = 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{z-4+3i}{z-3+2i} - 1 \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{z-4+3i - z+3-2i}{z-3+2i} \right| = 1 \end{aligned}$$

$$1 \Leftrightarrow \left| \frac{-1+i}{z-3+2i} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |-1+i| = |z-3+2i| \text{ avec } z \neq 3-2i$$

$$\Leftrightarrow |z-(3-2i)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{2} \text{ d'où le résultat.}$$

Déterminons l'ensemble (D)

$$(D) \Leftrightarrow |\bar{z}+i| = |z+2+i|$$

$$\Leftrightarrow |z-i| = |z-(-2-i)|$$

$$\Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow AM = BM \text{ d'où (D) est la}$$

médiatrice du segment [AB].

b. Déterminons l'ensemble (G)

$$(G) : |z-5i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |1+i| \times \left| z - \frac{5i}{1+i} \right| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left| z - \frac{5i(1-i)}{2} \right| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \left| z - \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i \right) \right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow DM = \sqrt{5} \text{ avec}$$

$$D\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i\right) \text{ d'où (G) est le cercle de centre D et de rayon } \sqrt{5}$$

c. Déterminons (D) \cap (G)

Soit I le milieu de [AB], on a : $z_1 = \frac{z_A + z_B}{2} = -1$ donc

$$I(-1; 0)$$

Soit M(x; y; z) un point de la médiatrice. On a : $\overline{MI} \cdot \overline{AB} = 0$

$$\overline{MI} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow (x+1)(-2) + y(-2) = 0$$

$$\overline{MI} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow -2x - 2 - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -x - 1 \text{ donc (D) : } y = -x - 1 \text{ (1)}$$

$$(G) : \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = (\sqrt{5})^2 \text{ (2)}$$

$$(1) \text{ dans (2) donne } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-x - 1 - \frac{5}{2}\right)^2 = 5$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-x - 1 - \frac{5}{2}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-x - \frac{7}{2}\right)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} + x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 5$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + \frac{27}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 27 = 0$$

le discriminant de cette équation est $\Delta = -416 < 0$

L'équation $4x^2 + 4x + 27 = 0$ n'admet pas de solution d'où $(D) \cap (G) = \emptyset$.

ACTIVITE 15 :

1°) Ecrivons α et β sous forme exponentielle

$$\alpha = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ et } \beta = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2°) a- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$

En calculant Δ ou Δ' on trouve $z' = 1 - e^{i\theta}$ et $z'' = 1 + e^{i\theta}$
Choix de z_1 et z_2

On a : $z' = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$ et $z'' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

puisque $\theta \in]0; \pi[$ alors $\sin\theta > 0$ donc $z_1 = z'$ et $z_2 = z''$
d'où $z_1 = 1 - e^{i\theta}$ et $z_2 = 1 + e^{i\theta}$

b. Ecrivons z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

$$z_1 = 1 - e^{i\theta}$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} - \left(e^{i\frac{\theta}{2}} \right)^2$$

$$= -e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)$$

$$= 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)} = 2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)}$$

Or $\theta \in]0; \pi[$ donc $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ par suite

$$z_1 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$z_2 = 1 + e^{i\theta}$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)$$

$$z_2 = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} > 0, \theta \in]0; \pi[\text{ donc}$$

$$z_2 = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

NB : On peut aussi utiliser la méthode qui consiste à déterminer le module et un argument de

$$z_1 = 1 - \cos\theta - i\sin\theta \text{ et de } z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$$

3°) Déterminons θ pour que l'on ait $z_1 = \alpha$ et $z_2 = \beta$

$$\text{On peut poser alors : } \begin{cases} 1 - e^{i\theta} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\ 1 + e^{i\theta} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ et aboutir à :}$$

$$e^{i\theta} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{) et puisque}$$

$$\theta \in]0; \pi[\text{ alors } k = 0 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{3}$$

ACTIVITE 16 :

1°) Forme algébrique des racines carrées de z

$$z = -1 + i$$

Soit $\delta = x + iy$ une racine carrée de z avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$\delta^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} & (a) \\ x^2 - y^2 = -1 & (b) \\ 2xy = 1 > 0 \end{cases}$$

$$(a) + (b) \Rightarrow 2x^2 = \sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

$$(a) - (b) \Rightarrow 2y^2 = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \text{ ou } y = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

$xy > 0$ donc les racines carrées de z sous forme algébriques

$$\text{sont : } \delta' = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \text{ et}$$

$$\delta'' = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

2°) Calculons sous forme trigonométrique les racines carrées de z

Soit $\delta = \rho e^{i\theta}$ une racine carrée de z avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

$$\delta^2 = z \Leftrightarrow \rho^2 e^{i2\theta} = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = \sqrt{2} \\ 2\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \{0; 1\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases} ; k \in \{0; 1\}$$

$$\text{Pour } k=0 \text{ on a : } \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

$$\text{Pour } k=1 \text{ on a : } \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{8} \end{cases} \text{ alors la forme}$$

trigonométrique des racines carrées de z sont :

$$\delta_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right) \text{ et}$$

$$\delta_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8} \right)$$

3°) Déduisons-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right).$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0 \text{ et } \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0 \text{ donc :}$$

$$\delta_0 = \delta' \Leftrightarrow \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{2} \cos \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ \sqrt[4]{2} \sin \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \cos^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ \sqrt{2} \sin^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \sin^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ACTIVITE 17 :

1°) calculons α^2

$$\alpha^2 = (\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}})^2$$

$$= (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 - 2i\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} - (\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 \text{ on}$$

$$\text{trouve : } \alpha^2 = -2\sqrt{3} - 2i.$$

b- Donnons le module et un argument de α^2 .

$$\text{On a : } \alpha^2 = -2\sqrt{3} - 2i$$

$$= 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$= 4 \left[-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right] = 4 \left[\cos \left(\frac{7\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) \right]$$

Donc le module de α^2 est 4 et un argument de α^2 est $\frac{7\pi}{6}$.

c- Déduisons le module et un argument de α .

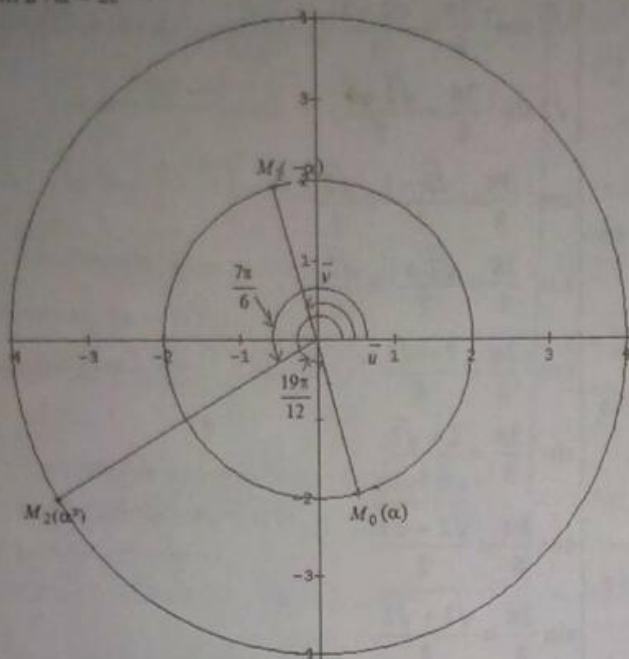
$$\text{De ce qui précède on peut écrire } \alpha^2 = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$\alpha^2 = 4e^{i\frac{7\pi}{6}} \Leftrightarrow \alpha = 2e^{i\frac{7\pi}{12}} \text{ ou } \alpha = -2e^{i\frac{7\pi}{12}} = 2e^{i(\pi + \frac{7\pi}{12})} = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

Comme $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ et $\operatorname{Im}(\alpha) < 0$ alors $\alpha = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$ donc un module de α est 2 et un argument de α est $\frac{19\pi}{12}$.

2°) Représentons $M_0(\alpha)$, $M_1(-\alpha)$ et $M_2(\alpha^2)$.

On a : $\alpha = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$



3°) a- Dédus de tout ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$ puis $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

On a : $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $\alpha = 2\left(\cos \frac{19\pi}{12} + i\sin \frac{19\pi}{12}\right)$

$\alpha = 2\left(-\cos \frac{7\pi}{12} - i\sin \frac{7\pi}{12}\right)$ donc par identification on a :

$$\begin{cases} -2\cos \frac{7\pi}{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ -2\sin \frac{7\pi}{12} = -\sqrt{2+\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\cos \frac{7\pi}{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ -2\sin \frac{7\pi}{12} = -\sqrt{2+\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos \frac{7\pi}{12} = -\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2} \\ 2\sin \frac{7\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

• Calcul de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

On a : $\cos \frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$ alors

$$\cos \frac{7\pi}{12} = -\sin \frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{7\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12}$$

Donc $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b- Calcule α^{2014} sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} \alpha^{2014} &= (\alpha^2)^{1007} = \left(4e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^{1007} \\ &= 4^{1007} e^{i\frac{7049\pi}{6}} \\ &= 4^{1007} e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ &= 4^{1007} \left(-\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

D'où $\alpha^2 = 4^{1007} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

ACTIVITE 18 :

1°) Résolvons l'équation (E)

(E) : $[z^2 - 4(1+i)z + 10i]2z - (1+i)\bar{z} - 2 - 4i = 0$

(E) $\Leftrightarrow z^2 - 4(1+i)z + 10i = 0$ ou $2z - (1+i)\bar{z} - 2 - 4i = 0$

Résolvons $z^2 - 4(1+i)z + 10i = 0$

Son discriminant est : $\Delta = -8i = [2(1-i)]^2$

et ces solutions sont : $z_1 = \frac{4(1+i) - 2(1-i)}{2} = 1+3i$ et

$z_2 = \frac{4(1+i) + 2(1-i)}{2} = 3+i$.

Résolvons $2z - (1+i)\bar{z} - 2 - 4i = 0$ (E')

Posons $z = x+iy$; $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

On a : (E') $\Leftrightarrow 2(x+iy) - (1+i)(x-iy) - 2 - 4i = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 2 + i(3y - x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ -x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$

On a : $\begin{cases} y = 3 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

Donc (E') $\Leftrightarrow z = 5+3i$.

Il en résulte que les solutions de (E) sont : $1+3i$; $3+i$ et $5+3i$.

2°) a- Déterminons les complexes z_A , z_B et z_C

On a : z_A , z_B et z_C solutions de (E) et

$\operatorname{Re}(z_B) < \operatorname{Re}(z_A) < \operatorname{Re}(z_C)$ donc

$$z_A = 3+i, z_B = 1+3i \text{ et } z_C = 5+3i.$$

b- Donnons la nature du triangle ABC.

$$\text{Calculons } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$$

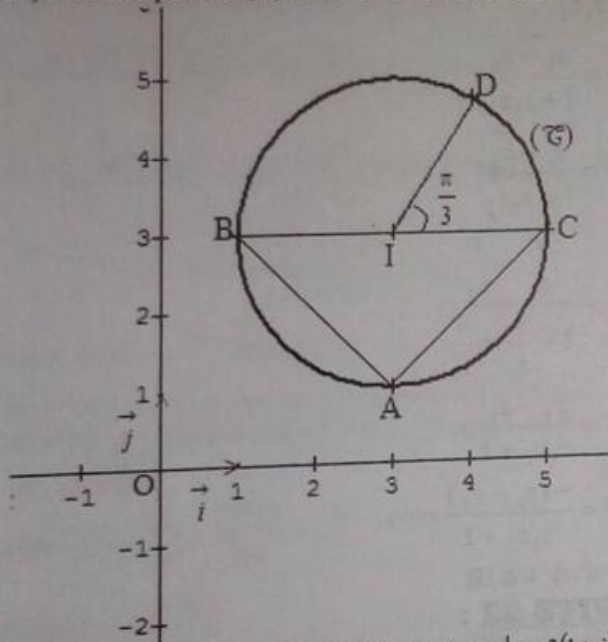
$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1+3i-3-i}{5+3i-3-i}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1+i}{1+i} = i$$

On a : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = +i$ d'où ABC est un triangle isocèle et

rectangle en A.

3°) Place les points A, B, C et D et construisons (C)



4°) Démontrons que le point $M(z) \in (C) \Leftrightarrow |z - 3(1+i)| = 2$

On a : A, B et C appartiennent au cercle (C) et ABC un triangle isocèle et rectangle en A donc (C) est de diamètre [BC] son centre I est le milieu de [BC] ainsi

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} + 3+3i.$$

$$\text{Donc on a : } M(z) \in (C) \Leftrightarrow IM = \frac{BC}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z - z_I| = \frac{|z_C - z_B|}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z - 3-3i| = \frac{|4|}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z - 3(1+i)| = 2$$

D'où $M(z) \in (C) \Leftrightarrow |z - 3(1+i)| = 2$.

ACTIVITE 20 :

1°) Résolution dans C de l'équation :

$$2z^2 - 2(1+i) + \frac{1}{2} + i = 0$$

Le discriminant réduit de cette équation est

$$\Delta' = (1+i)^2 - (2)\left(\frac{1}{2} + i\right)$$

$$\Delta' = -1 = i^2$$

Par suite on trouve les solutions de l'équation qui sont :

$$z' = \frac{1}{2} \text{ et } z'' = \frac{1}{2} + i \text{ d'où}$$

$$S_C = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + i \right\}$$

2°) a- Démontrons que l'équation (E_θ) admet une racine réelle.

$$\text{Posons } P(z) = 2z^2 - (1+2\cos\theta+2i)z + \cos\theta + i = 0$$

$$(E_\theta) \Leftrightarrow P(z) = 0$$

Soit x , avec $x \in \mathbb{R}$ cette solution réelle on a $P(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x^2 - (1+2\cos\theta)x + \cos\theta = 0 & (1) \\ 1-2x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ et vérifie que la valeur } \frac{1}{2} \text{ trouvée vérifie (1)}$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \text{ est la solution réelle de } (E_\theta).$$

b- Calculons l'autre racine en fonction de θ

(E_θ) étant une équation du second degré donc si z_1 et z_2

$$\text{sont solution de } (E_\theta) \text{ alors } z_1 + z_2 = \frac{(1+2\cos\theta+2i)}{2}$$

$$\text{Posons } z_1 = \frac{1}{2} \text{ alors on obtient } z_2 = \cos\theta + i$$

3°) a- Déterminons l'ensemble E des points

$M(\cos\theta + i)$ lorsque θ varie dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Soit $M(x; y)$ un point du plan complexe.

$$M \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 1 \\ 0 \leq \cos\theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \text{ alors } E = [IJ] \text{ avec } I(0; 1) \text{ et}$$

$$J(1; 1)$$

b- Calculons AM en fonction de θ

$$AM = |z_M - z_A| \text{ on trouve } AM = \sqrt{\left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

*Calculons θ pour que AM soit minimale
AM est minimale $\Leftrightarrow AM^2$ est minimale

$$\text{Or } \forall \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow AM^2 \geq 1$$

En posant $\left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 1$ on trouve $\theta = \frac{\pi}{3}$ et on conclut

que AM est minimale pour $\theta = \frac{\pi}{3}$

ACTIVITE 21 :

1°) Démontrons que : $|z_1 - z_2| = |1 - \overline{z_1} \cdot z_2| \Leftrightarrow |z_1| = 1$ ou $|z_2| = 1$

$$\text{On a : } |z_1 - z_2| = \sqrt{(z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})}$$

$$|1 - \overline{z_1} \cdot z_2| = \sqrt{(1 - \overline{z_1} \cdot z_2)(1 - \overline{z_1} \cdot z_2)}$$

$$|z_1 - z_2| = |1 - \overline{z_1} \cdot z_2| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})} = \sqrt{(1 - \overline{z_1} \cdot z_2)(1 - \overline{z_1} \cdot z_2)}$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (1 - \overline{z_1} \cdot z_2)(1 - \overline{z_1} \cdot z_2)$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (1 - \overline{z_1} \cdot z_2)(1 - \overline{z_1} \cdot z_2)$$

$$\Leftrightarrow z_1 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} - \overline{z_1} z_2 + \overline{z_1} \overline{z_2} = 1 - \overline{z_1} z_2 - z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} z_2$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 - 1 - |z_1|^2 \times |z_2|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2(1 - |z_2|^2) + (|z_2|^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - |z_2|^2)(|z_1|^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow |z_2|^2 = 1 \text{ ou } |z_1|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow |z_2| = 1 \text{ ou } |z_1| = 1$$

$$\text{D'où } |z_1 - z_2| = |1 - \overline{z_1} \cdot z_2| \Leftrightarrow |z_2| = 1 \text{ ou } |z_1| = 1$$

2°) Démontrons que $u \in \mathbb{R}$ et $v \in i\mathbb{R}$

$$u = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$$

$$\text{on a : } \overline{u} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{1 + z_1 z_2}}$$

$$= \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}$$

$$\text{Or } |z_1| = 1 \Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$$

$$|z_2| = 1 \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{1}{z_2} \text{ donc } \overline{u} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}}$$

$$\overline{u} = \frac{\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}}{\frac{z_1 z_2 + 1}{z_1 z_2}}$$

$$\overline{u} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2 + 1} = u$$

$$\overline{u} = u \text{ d'où } u \in \mathbb{R}$$

$$v = \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2}$$

$$\text{On a : } \overline{v} = \frac{\overline{z_1 - z_2}}{\overline{1 + z_1 z_2}}$$

$$\overline{v} = \frac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}$$

$$\overline{v} = \frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}}$$

$$\overline{v} = \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2 + 1}$$

$$\overline{v} = \frac{-(z_1 - z_2)}{z_1 z_2 + 1} = -v$$

$$\overline{v} = -v \text{ d'où } v \in i\mathbb{R}$$

ACTIVITE 22 :

1°) Mettons sous forme trigonométrique les nombres complexes u et v .

On trouve : $u = -1 - i$ et sa forme trigonométrique est

$$u = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

On trouve : $v = 1 - i$ et sa forme trigonométrique est

$$v = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

2°) Déduisons la nature du triangle ABC.

$$\text{On a : } \frac{a-b}{b-c} = \sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{4}} \Leftrightarrow \frac{b-a}{b-c} = -\sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{b-c} = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

Alors $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{4}$ (1)

On a : $\frac{a-b}{a-c} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{4}$ soit

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{4}$ (2)

De (1) et (2) on a : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ (a)

et comme ABC est un triangle donc

$\text{mes} \hat{C} = 180^\circ - \text{mes} \hat{B} - \text{mes} \hat{A} = 90^\circ$ (b)

de (a) et (b) on conclure que ABC est un triangle isocèle et rectangle en C.

3°) Déterminons le quotient $Z = \frac{e-d}{f-d}$

DEF est isocèle rectangle en F direct donc

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Or $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}}) = \arg\left(\frac{f-d}{e-d}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
 $= -\arg\left(\frac{e-d}{f-d}\right) + 2k\pi$

Donc $\arg Z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Ainsi DEF est alors isocèle et rectangle en F et on a :
 $DF = EF$ et d'après la propriété de Pythagore : on a :

$DE = DF\sqrt{2}$.

Donc $|Z| = \frac{DE}{DF} = \frac{DF\sqrt{2}}{DF} = \sqrt{2}$

D'où $Z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Donnons la forme algébrique de $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Z\right)^{2306}$.

On trouve $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Z\right)^{2306} = -i$

ACTIVITE 23 :

1°) a- Soit $z_0 = \alpha i$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$f(\alpha i) = 0$ en faisant les calculs on trouve $\alpha = -2 \Rightarrow$

$z_0 = -2i$

b- Résolvons alors l'équation $f(z) = 0$

En écrivant que $f(z) = (z+2i)(z^2+az+b)$ avec $(a; b) \in \mathbb{C}^2$ et en identifiant on obtiendra $a = -2\sqrt{3}$ et $b = 4$. Et alors

les solutions de $f(z) = 0$ seront $z_0 = -2i$; $z_1 = \sqrt{3}-i$ et donc $z_2 = \overline{z_1}$ (vu que l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4$ est à coefficients réels)

2°) a- $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$ (évident)

b- OMM_2M_1 est un losange $\Leftrightarrow OM = OM_1$ et

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_1M_2}$

On a : $OM = |z|$ et $OM_1 = |\omega z| = |z|$ par ailleurs $Z_{\overrightarrow{OM}} = z$ et

$$\begin{aligned} Z_{\overrightarrow{M_1M_2}} &= \omega z - \omega^2 z = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}} \right) z \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) z \\ &= \left(2 \cos \frac{\pi}{3} \right) z = z \text{ donc } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_1M_2} \text{ par suite} \end{aligned}$$

OMM_1M_2 est un losange

ACTIVITE 24 :

1°) Prouvons que $ie^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^2$

$$\begin{aligned} ie^{i\frac{\pi}{6}} &= e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^2 \text{ 'où le résultat} \end{aligned}$$

2°) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$z^2 - 2\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$ le discriminant réduit Δ' de

cette équation est : $\Delta' = e^{i\frac{\pi}{6}} - (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\Delta' = e^{i\frac{\pi}{6}}(1-1+i) = ie^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $\Delta' = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^2$ ainsi

$z^2 - 2\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0 \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou

$z'' = e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où les solutions de cette équation sont :
 $e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$

3°) A $\left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)$; B $\left(e^{i\frac{\pi}{12}} \right)$ et C $\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}} \right)$

a- Justifions que le quadrilatère OACB est un losange

$$OA = |z_A - 0| = \left| e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = 1$$

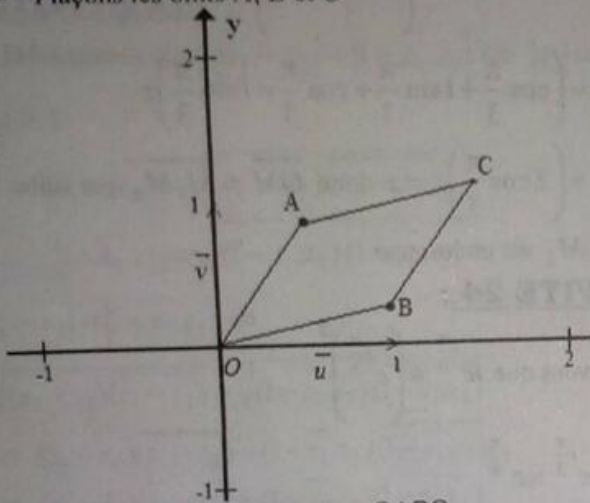
$$AC = |z_C - z_A| = \left| e^{i\frac{\pi}{12}} \right| = 1$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left| e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = 1$$

$$OB = |z_B - 0| = \left| e^{i\frac{\pi}{12}} \right| = 1$$

a- On a : $OA = AB = BC = OB$ d'où le quadrilatère $OACB$ est un losange

b- Plaçons les points A , B et C



c- Calculons l'aire du losange $OACB$
Soit A cette aire :

$$\begin{aligned} A &= \frac{AB \times OC}{2} \text{ u.a} \\ &= \frac{|z_B - z_A| \times |z_C - z_O|}{2} \\ &= \frac{|(z_B - z_A)(z_C - z_O)|}{2} \\ &= \frac{\left| e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{2\pi}{3}} \right|}{2} \\ &= \frac{\left| \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|}{2} \\ &= \frac{\left| \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{4}}}{2} \text{ d'où } A = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ u.a} \end{aligned}$$

ACTIVITE 25 :

1°) a- $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

b- Voir figure ci de la question 2°) c-

2°) a- *Vérifions que $b\bar{b} = 1$

$$b\bar{b} = \left(\frac{a-1}{1-\bar{a}} \right) \times \left(\frac{\bar{a}-1}{1-a} \right)$$

$$b\bar{b} = \frac{(a-1)(\bar{a}-1)}{(1-\bar{a})(1-a)} = \frac{(a-1)(\bar{a}-1)}{(\bar{a}-1)(a-1)} = 1$$

* Déduisons-en que $B \in (C)$

$$b\bar{b} = 1 \Leftrightarrow |b|^2 = 1 \quad OB = 1 \text{ donc } B \text{ appartient au cercle } (C).$$

b- Prouvons que $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel.

$$\overline{\left(\frac{b-1}{a-1} \right)} = \frac{\bar{b}-1}{\bar{a}-1}$$

$$\overline{\left(\frac{b-1}{a-1} \right)} = \frac{1-\bar{b}}{1-\bar{a}}$$

$$\overline{\left(\frac{b-1}{a-1} \right)} = \frac{1-b}{b(\bar{a}-1)}$$

$$\overline{\left(\frac{b-1}{a-1} \right)} = \frac{1-b}{\frac{a-1}{1-\bar{a}}(\bar{a}-1)} = \frac{b-1}{a-1} ; \frac{b-1}{a-1} \text{ est un réel.}$$

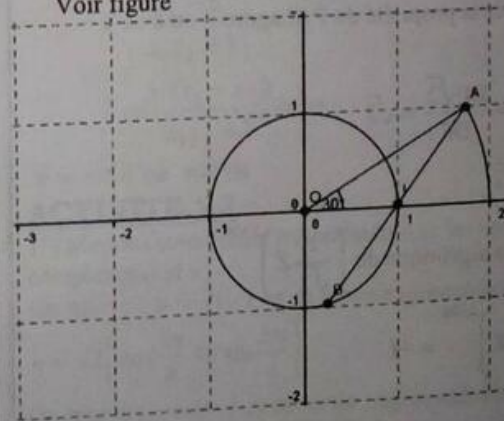
*Déduisons-en que A , B et I sont alignés

$$\frac{b-1}{a-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_{IB}}{z_{IA}} \in \mathbb{R}. \text{ alors il existe un réel } \alpha \text{ tel que}$$

$\vec{IA} = \alpha \vec{IB}$ donc les vecteurs $\vec{IA}$ et $\vec{IB}$ sont colinéaires et par suite les points A , I et B sont alignés.

c- Contusions B

Voir figure



3°) Démontre que $\cos \theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin \theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} b &= e^{i\theta} = \frac{a-1}{1-\bar{a}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1+i}{1-\sqrt{3}+i} \end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}} + i \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}} \text{ alors } \cos \theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}} \text{ et}$$

$$\sin \theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$$

ACTIVITE 28 :

1°) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Soit z_0 l'une des solutions de (E) dont le point image appartient à la droite d'équation $x=0$.

On a : $z_0 = ib$, $b \in \mathbb{R}$

z_0 est une solution de (E) alors :

$$(ib)^3 - (2+i)(ib)^2 + (1-6i)(ib) - 8-i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b^2 + 6b - 8 = 0 & \oplus \\ -b^3 + b^2 + b - 1 = 0 & \otimes \end{cases}$$

Résolvons $\oplus$:

Son discriminant est : $\Delta = 100$ et les solutions de $\oplus$ sont :

$$b_1 = -4 \text{ et } b_2 = 1$$

$$b_2 = 1 \text{ dans } \otimes \Rightarrow -(1)^3 + (1)^2 + (1) - 1 = 0$$

$$b_1 = -4 \text{ dans } \otimes \Rightarrow -(-4)^3 + (-4)^2 + (-4) - 1 \neq 0$$

Donc $z_0 = i$

En faisant une division euclidienne ou méthode d'identification, on trouve :

$$(E) \Leftrightarrow (z-i)(z^2 - 2z + 1 - 8i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z^2 - 2z + 1 - 8i = 0 \text{ (E')}$$

Résolvons (E')

$$\text{Son discriminant est : } \Delta = 4 - 4 + 32i = [4(1+i)]^2$$

$$(E') \Leftrightarrow z = -1 - 2i \text{ ou } z = 3 + 2i$$

D'où l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ est :

$$S = \{i; -1-2i; 3+2i\}$$

2°) on a : A(i) ; B(-1-2i) et C(3+2i)

a- Démontrons que ABC est un triangle isocèle.

$$\text{Calculons } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

$$\text{On trouve } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3+i}{-1-3i}$$

$$\text{On a : } \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{|3+i|}{|-1-3i|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$$

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \text{ donc ABC est un triangle isocèle en A.}$$

b- Prouvons que A est l'orthocentre du triangle HBC.

H est l'orthocentre du triangle ABC alors (AH) $\perp$ (BC) et (BH) $\perp$ (AC).

Puisque HBC est un triangle donc (AH) est la hauteur issue du point H et (AC) est la hauteur issue du point C.

Comme $\{A\} = (AH) \cap (AC)$ d'où A est l'orthocentre du triangle HBC.

3°) a- Déterminons $(a; b; c) / O = \text{bar} \{ (A, a), (B, b), (C, c) \}$

$$O = \text{bar} \{ (A, a), (B, b), (C, c) \} \Leftrightarrow$$

$$a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC} = \vec{0} ;$$

$$\overline{OA} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{OB} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{OC} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -b + 3c = 0 \\ a - 2b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3c \\ a = 4c \\ c \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4c\overline{OA} + 3c\overline{OB} + c\overline{OC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow c(4\overline{OA} + 3\overline{OB} + \overline{OC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overline{OA} + 3\overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$$

$$\text{Or } 4+3+1 \neq 0 \text{ donc } O = \text{bar}\{(A;4), (B;3), (C;1)\}$$

Avec $a=4$; $b=3$ et $c=1$.

b- Démontrons que $8MO^2 + 4OA^2 + 3OB^2 + OC^2 = 2k^2$

$$M \in (C_k) \Leftrightarrow 4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 2k^2$$

$$\Leftrightarrow 4(\overline{MO} + \overline{OA})^2 + 3(\overline{MO} + \overline{OB})^2 + (\overline{MO} + \overline{OC})^2 = 2k^2$$

$$\Leftrightarrow 8MO^2 + 4OA^2 + 3OB^2 + OC^2 + 2\overline{MO}(4\overline{OA} + 3\overline{OB} + \overline{OC}) = 2k^2$$

$$\text{D'où } M \in (C_k) \Leftrightarrow 8MO^2 + 4OA^2 + 3OB^2 + OC^2 = 2k^2$$

c- Détermine (C_k)

$$\text{on a : } OA^2 = |z_A|^2 = 1 ; OB^2 = |z_B|^2 = 5 \text{ et}$$

$$OC^2 = |z_C|^2 = 13$$

$$\text{Donc } M \in (C_k) \Leftrightarrow 8MO^2 + 32 = 2k^2$$

$$\Leftrightarrow MO^2 = \frac{k^2 - 16}{4}$$

k	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
$k^2 - 16$	+	0	0	+

• Si $k \in \{-4; 4\}$, $MO^2 = 0$; $M = O$ donc $(C_k) = \{O\}$ pour $k \in \{-4; 4\}$.

• Si $k \in]-4; 4[$, $MO^2 = \frac{k^2 - 16}{4} < 0$ (absurde) donc $(C_k) = \emptyset$ pour $k \in]-4; 4[$.

• Si $k \in]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$, $MO^2 = \frac{k^2 - 16}{4} > 0$

$$MO^2 = \frac{k^2 - 16}{4} \Leftrightarrow MO = \frac{\sqrt{k^2 - 16}}{2} \text{ donc } (C_k) \text{ est un cercle}$$

de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{k^2 - 16}}{2}$ pour

$$k \in]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[.$$

ACTIVITE 34 :

1°) Déterminons les valeurs de a et b pour que $2i$ soit une solution de l'équation $P(z) = 0$.

$$\text{On a : } P(2i) = 0$$

$$P(2i) = (2i)^3 - (5+i)(2i)^2 + (a+ib)(2i) - 8 - 16i \text{ on trouve :}$$

$$P(2i) = 12 - 2b + i(2a - 20)$$

$$P(2i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 2b = 0 \\ 2a - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 6 \end{cases}$$

2°) Résolvons l'équation :

$$z^3 - (5+i)(2i)^2 + (10+6i)(2i) - 8 - 16i = 0$$

Cette équation équivaut à $P(z) = 0$ pour $a = 10$ et $b = 6$

P est un polynôme complexe de degré 3 et $P(2i) = 0$ donc il

existe un polynôme complexe Q de degré 2 tel que

$$P(z) = (z - 2i)Q(z)$$

En utilisant une méthode appropriée tu trouves :

$$P(z) = (z - 2i)[z^2 + (-5+i)z + 8 - 4i]$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z^2 + (-5+i)z + 8 - 4i = 0 \text{ (E)}$$

Le discriminant de (E) est : $\Delta = -8 + 6i$

Soit $\delta = x + iy$; x et $y \in \mathbb{R}$ une racine carrée de Δ

$$\text{On a : } \delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 18 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = 1 \\ y = -3 \text{ ou } y = 3 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

$xy > 0$ donc $\delta = 1 + 3i$ ou $\delta = -1 - 3i$

Prenons $\delta = 1 + 3i$

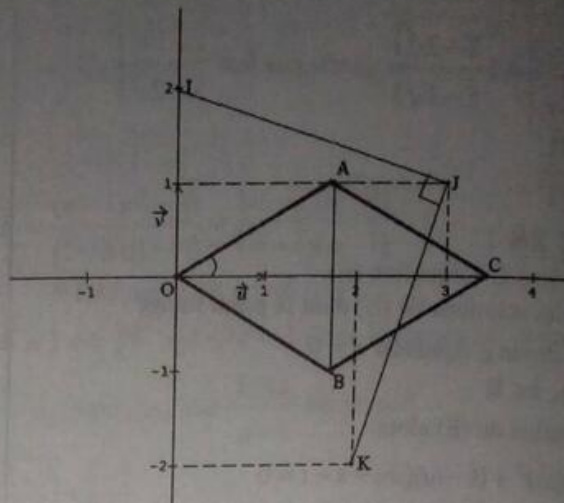
Ainsi (E) $\Leftrightarrow z = 2 - 2i$ ou $z = 3 + i$

D'où les solutions de l'équation

$$z^3 - (5+i)(2i)^2 + (10+6i)(2i) - 8 - 16i = 0 \text{ dans } \mathbb{C} \text{ sont :}$$

$2i$; $2 - 2i$ et $3 + i$.

$$3^\circ) \text{ a- Plaçons } I(2i), J(3+i), K(2-2i) \text{ et } A\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$$



b-Démontrons que $(IJ) \perp (JK)$

$$\text{calculons } \frac{z_I - z_J}{z_K - z_J}$$

$$\text{on trouve : } \frac{z_I - z_J}{z_K - z_J} = -i \text{ or } -i \in i\mathbb{R} \text{ donc } (IJ) \perp (JK).$$

4°) a- Calculons OA, OB et AB.

$$OA = |z_A| = 2$$

$$OB = |z_B| = |\bar{z}_A| = 2$$

$$AB = |z_B - z_A| = |-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{2}$$

Nature du triangle AOB.

OA = OB et OB $\neq$ AB donc AOB est un triangle isocèle en O.

b- Calculons l'abscisse du point C pour que AOBC soit un losange.

AOB étant un triangle isocèle en O, AOBC est un losange $\Leftrightarrow$

AOBC est un parallélogramme $\overline{AO} = \overline{CB}$

AOBC est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overline{AO} = \overline{CB}$

$$\overline{AO} = \overline{CB} \Leftrightarrow 0 - z_A = z_B - z_C$$

$$\Leftrightarrow z_C = z_B + z_A$$

$$\Leftrightarrow z_C = \bar{z}_A + z_A = 2\operatorname{Re}(z_A) \text{ soit } \underline{z_C = 2\sqrt{3}}.$$

5°) Déterminons l'expression complexe de S.

S étant une similitude plane directe donc S est sous la forme :

$$z' = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

$$\text{On a : } S(B) = C \text{ et } S(O) = O$$

$$S(O) = O \Leftrightarrow b = 0$$

$$S(B) = C \Leftrightarrow z_C = az_B$$

$$\Rightarrow a = \frac{z_C}{z_B} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i)$$

$$\text{D'où } S : z' = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i)z$$

Les éléments caractéristiques de S

$$\text{On a : } \left| \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i) \right| = \sqrt{3} \text{ et } \arg \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i) \right] = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

Donc S est de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

ACTIVITE 44 :

1°) Détermine a et b pour que X ait pour module $\sqrt{2}$ et pour un argument $\frac{3\pi}{4}$.

$$\text{On a : } X = \frac{a+ib}{2-5i} \text{ et } X = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -1+i$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{a+ib}{2-5i} \\ &= \frac{(a+ib)(2+5i)}{29} \\ &= \frac{2a-5b}{29} + \frac{i(5a+2b)}{29} \end{aligned}$$

$$X = -1+i \Rightarrow \begin{cases} 2a-5b = -29 \\ 5a+2b = 29 \end{cases} \Rightarrow 29a = 29 \times 3 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{On a : } \begin{cases} a = 3 \\ 5a+2b = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases}$$

$$\text{Donc } X = \frac{3+7i}{2-5i} \text{ où } \underline{a=3} \text{ et } \underline{b=7}.$$

2°) prouvons que la somme S est un réel et la calculée.

$$\text{On a : } S = \left(\frac{3+7i}{2-5i} \right)^{4k} + \left(\frac{3+7i}{2-5i} \right)^{4k+4}; k \in \mathbb{N} \text{ or}$$

$$X = \left(\frac{3+7i}{2-5i} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{Donc on a : } S = X^{4k} + X^{4k+4}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right]^{4k} + \left[\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right]^{4k+4} \\ &= (\sqrt{2})^{4k} e^{i3\pi k} + (\sqrt{2})^{4(k+1)} e^{i3\pi(k+1)} \\ &= 2^{2k} \cos 3\pi k + 2^{2(k+1)} (-\cos 3\pi k) \\ &= (1-4) \cos 3\pi k = -3 \cos 3\pi k \end{aligned}$$

$$S = -3 \cos 3\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ d'où } S \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Et on a : } S = \begin{cases} -3 \text{ si } k \text{ est un entier naturel pair.} \\ -3 \text{ si } k \text{ est un entier naturel impair.} \end{cases}$$

Signe de S

$S < 0$ si k est un entier naturel pair

$S > 0$ si k est un entier naturel impair.

3°) a- Calcule $[(2-5i)(-1+i)]^4$

$$\text{On a : } X = \frac{3+7i}{2-5i} = -1+i \text{ alors } (2-5i)(-1+i) = 3+7i$$

$$\text{Donc } [(2-5i)(-1+i)]^4 = (3+7i)^4 \text{ on trouve :}$$

$$[(2-5i)(-1+i)]^4 = -164 - 3360i.$$

b- Déduisons-en la résolution de l'équation (E)

$$\text{on a : (E) : } z^4 + 164 + 3360i = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow z^4 - (-164 - 3360i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^4 - (3+7i)^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow [z^2 - (3+7i)^2][z^2 + (3+7i)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow [z - (3+7i)][z + (3+7i)][z - i(3+7i)][z + i(3+7i)] = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 3+7i \text{ ou } z = -3-7i \text{ ou } z = -7+3i \text{ ou } z = 7-3i$$

$$\text{D'où } S_C = \{-3-7i; -7+3i; 7-3i; 3+7i\}$$

ACTIVITE 45 :

$$\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]; u = e^{i\alpha}; z = u^7 + \bar{u}^5$$

1°) Justifions que $z = (2 \cos 6\alpha) e^{i\alpha}$.

$$\text{On a : } z = u^7 + \bar{u}^5$$

$$= e^{i7\alpha} + e^{-i5\alpha}$$

$$= e^{i7\alpha} + \frac{1}{e^{i5\alpha}}$$

$$= \frac{e^{i12\alpha} + 1}{e^{i5\alpha}}$$

$$= \frac{e^{i12\alpha} + e^{i6\alpha} \times e^{-i6\alpha}}{e^{i5\alpha}}$$

$$= \frac{e^{i6\alpha}(e^{i6\alpha} + e^{-i6\alpha})}{e^{i5\alpha}} = (e^{i6\alpha} + e^{-i6\alpha}) e^{i\alpha}$$

$$\text{Or } e^{i6\alpha} + e^{-i6\alpha} = 2 \cos 6\alpha \text{ d'où } z = (2 \cos 6\alpha) e^{i\alpha}$$

2°) a- Résolvons dans $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, l'inéquation $\cos 6\alpha > 0$.

$$\cos 6\alpha > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 6\alpha \\ X \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\cos 6\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left] -\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12} \right[$$

$$\text{Or } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \text{ alors :}$$

$$\cos 6\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{12} \right[\text{ donc } S_{\left[0; \frac{\pi}{2} \right]} = \left[0; \frac{\pi}{12} \right[.$$

b-Déterminons suivant les valeurs de α , le module et un argument de z .

$$\text{On a : } z = (2 \cos 6\alpha) e^{i\alpha}$$

$$\text{➤ Pour } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{12} \right[$$

$$\text{on a : } 2 \cos 6\alpha > 0; \text{ alors}$$

$$|z| = 2 \cos 6\alpha \text{ et un argument de } z \text{ est } \alpha.$$

$$\text{➤ Pour } \alpha \in \left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\text{on a : } 2 \cos 6\alpha < 0; \text{ alors } z = (-2 \cos 6\alpha) e^{i(\pi+\alpha)}$$

donc $|z| = -2 \cos 6\alpha$ et un argument de z est $\pi + \alpha$.

➤ Pour $\alpha = \frac{\pi}{12}$

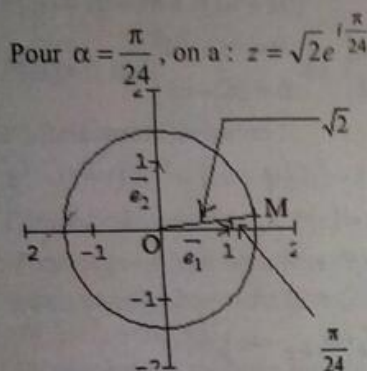
on a : $z = 0$ alors $|z| = 0$ et z n'admet pas d'argument.

➤ Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$

on a : $z = -2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i(\pi + \frac{\pi}{2})}$

d'où $|z| = 2$ et un argument de z est $\frac{3\pi}{2}$.

3°) Représentons le point M image de z pour $\alpha = \frac{\pi}{24}$.



ACTIVITE 46 :

(E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + 2z \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0$ où $\theta \in [-\pi; \pi]$.

1°) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

Soit Δ le discriminant associé à (E)

$$\text{On a : } \Delta = \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right)^2 - 4 \left(1 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right) = \left(2i \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 \text{ donc}$$

$$(E) \Leftrightarrow z = \frac{-2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2} \text{ ou}$$

$$z = \frac{-2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2}$$

$$(E) \Leftrightarrow z = -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin^2 \frac{\theta}{2} \text{ ou}$$

$$z = -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + i \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$(E) \Leftrightarrow z = \sin \frac{\theta}{2} \left(-\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2}\right) \text{ ou } z = \sin \frac{\theta}{2} \left(-\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

$$(E) \Leftrightarrow z = \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos \left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) + i \sin \left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)\right] \text{ ou}$$

$$z = \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos \left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) + i \sin \left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

Donc : l'ensemble solution S dans $\mathbb{C}$ est :

$$S = \left\{ \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) e^{i \left(\pi + \frac{\theta}{2} \right)}, \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) e^{i \left(\pi - \frac{\theta}{2} \right)} \right\} \text{ avec } \theta \in [-\pi; \pi]$$

2°) Précisons selon les valeurs de θ , le module et un argument de chacune des solutions de (E).

$$\bullet \quad z = \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos \left(\pi + \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

On a : $\theta \in [-\pi; \pi]$ alors $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- Pour $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, on a $\sin \frac{\theta}{2} \leq 0$ alors

$|z| = -\sin \frac{\theta}{2}$ et un argument de z est :

$$\pi + \pi + \frac{\theta}{2} = 2\pi + \frac{\theta}{2}$$

- Pour $\frac{\theta}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ alors

$|z| = \sin \frac{\theta}{2}$ et un argument de z est : $\pi + \frac{\theta}{2}$

- Pour $\frac{\theta}{2} \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$, $z = -i$ alors

$|z| = 1$ et un argument de z est : $-\frac{\pi}{2}$

- Pour $\frac{\theta}{2} = 0$; on a : $z = 0$ alors

$|z| = 0$ et pas d'argument.

$$\bullet \quad z = \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos \left(\pi - \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

- Pour $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, on a $\sin \frac{\theta}{2} \leq 0$ alors

$|z| = -\sin \frac{\theta}{2}$ et un argument de z est :

$$\pi + \pi - \frac{\theta}{2} = 2\pi - \frac{\theta}{2}$$

- Pour $\frac{\theta}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ alors

$|z| = \sin \frac{\theta}{2}$ et un argument de z est : $\pi - \frac{\theta}{2}$

- Pour $\frac{\theta}{2} \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$, $z = i$ alors

$|z| = 1$ et un argument de z est : $\frac{\pi}{2}$

- Pour $\frac{\theta}{2} = 0$; on a : $z = 0$ alors

$|z| = 0$ et pas d'argument.

2. Correction des activités sur limites et continuités

ACTIVITE 1 :

Trouvons l'ensemble de définition des fonctions

$$* D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x^2 + x + 1| + 2 \neq 0 \right\}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$* D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} / |2x+1| + |-x+1| \neq 0 \right\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$* D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x+1| - 1 \geq 0 \right\}$$

$$D_h =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$$

$$* D_i = \left\{ x \in \mathbb{R} / (-x-3)^2 + 2 \geq 0 \right\}$$

$$D_i = \mathbb{R}$$

$$* D_j = \left\{ x \in \mathbb{R} / |2x^2 + x + 1| - 2 \neq 0 \right\}$$

$$D_j = \mathbb{R} - \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}$$

$$* D_k = \left\{ x \in \mathbb{R} / |2x+1| - |-x+1| \neq 0 \right\}$$

$$D_k = \mathbb{R} - \{-2; 0\}$$

$$* D_l = \{x \in \mathbb{R} / x-3 > 0\}$$

$$D_l =]3; +\infty[$$

$$* D_m = \{x \in \mathbb{R} / x-2 \geq 0 \text{ et } x-3 > 0\}$$

$$D_m =]3; +\infty[$$

$$* D_n = \left\{ x \in \mathbb{R} / x-5 \neq 0 \text{ et } \frac{2x-3}{x-5} \geq 0 \right\}$$

$$D_n = \left] -\infty; \frac{3}{2} \right] \cup]5; +\infty[$$

$$* D_p = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2x^2 + x + 1 \geq 0 \text{ et } \sqrt{2x^2 + x + 1} - 3 \neq 0 \right\}$$

$$D_p = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1-\sqrt{65}}{4}; \frac{-1+\sqrt{65}}{4} \right\}$$

$$D_q = \left\{ x \in]-\infty; 0[/ x+1 \neq 0 \right\} \cup \left\{ x \in]0; +\infty[/ x+1 \neq 0 \text{ et } \frac{x+2}{x+1} \geq 0 \right\}$$

$$D_q =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

$$* D_r = \left\{ x \in]-\infty; 0[/ 1+x^2 \neq 0 \right\} \cup \left\{ x \in [0; +\infty[/ 1+x^2 > 0 \right\}$$

$$D_r = \mathbb{R}$$

$$* D_v = \left\{ x \in \mathbb{R} / x + \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \text{ et } 1 + x^2 \geq 0 \right\}$$

$$D_v = \mathbb{R}$$

ACTIVITE 2 :

Calcul les limites

$$l_1 = \frac{1}{2}; l_2 = 0; l_3 = -\infty; l_4 = 2; l_5 = +\infty; l_6 = +\infty;$$

$$l_7 = +\infty; l_8 = -\infty; l_9 = -\infty; l_{10} = 1; l_{11} = -\infty; l_{12} = 0$$

$$; l_{13} = +\infty \text{ (passer par un encadrement)}; l_{14} = \frac{2}{3}; l_{15} = 2;$$

$$l_{16} = 0; l_{17} = -\infty \text{ en } 1^-; l_{17} = +\infty \text{ en } 1^+ \text{ à droite}; l_{18} = 3$$

$$; l_{19} = \frac{2}{3}; l_{20} = \frac{1}{6}; l_{21} = \frac{3}{2}; l_{22} = \frac{7}{6}; l_{23} = -\frac{1}{4};$$

$$l_{24} = \frac{7}{12}; l_{26} = 2\sqrt{2}; l_{27} = -\infty; l_{28} = \frac{2}{3}.$$

ACTIVITE 3 :

1°) Déterminons le domaine D de h

$$h(x) = \frac{\sqrt{3x+10} - x}{\sqrt{2x^2 - 2x - 4} - x - 1}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / 3x+10 \geq 0; 2x^2 - 2x - 4 \geq 0 \text{ et } \sqrt{2x^2 - 2x - 4} - x - 1 \neq 0 \right\}$$

$$* 3x+10 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -10 \Leftrightarrow x \geq -\frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{10}{3}; +\infty \right[\text{ (a)}$$

$$* \text{Posons } 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \text{ son discriminant } \Delta = 9 > 0$$

$$\text{donc on a : } x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 2 \text{ par suite } 2x^2 - 2x - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[\text{ (b)}$$

$$* \text{Posons } \sqrt{2x^2 - 2x - 4} - x - 1 = 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 2x - 4} - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 2x - 4} = x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x^2 - 2x - 4 = (x+1)^2 \end{cases}$$

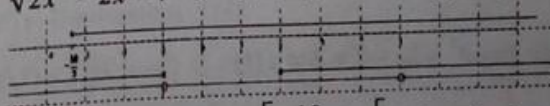
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; +\infty[\\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(-5) = 36 > 0 \text{ donc on trouve } x'_1 = -1 \text{ et } x'_2 = 5$$

Ainsi

$$\sqrt{2x^2 - 2x - 4} - x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1; 5\} \text{ (c)}$$



$$(a) \cap (b) \cap (c) \Rightarrow x \in \left[-\frac{10}{3}; -1 \right] \cup [2; 5[\cup]5; +\infty[$$

d'où

$$D = \left[-\frac{10}{3}; 1\right[\cup [2; 5[\cup]5; +\infty[$$

2°) Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} h$

On trouve : $\lim_{x \rightarrow 1} h = -\frac{7}{5}$

3°) $3 \in D$ et $\lim_{x \rightarrow 3} h = -\frac{7}{5}$; $-\frac{7}{5} \in \mathbb{R}$ donc on peut prolonger par continuité h en 5

Soit g ce prolongement :
$$g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in D \\ -\frac{7}{5} & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

ACTIVITE 5 :

1°)

Soit D_f le domaine de définition de f

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} ; +\infty[/ x^2 - 1 \geq 0 \right\} \cup \left\{ x \in]-\infty; 1[/ x^3 + 3x - 2 \exists \right\}$$

$\forall x \in]1; +\infty[, x^2 - 1 > 0$ alors

$D_f = \mathbb{R}$

Calcul de limites :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 - \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 1}{x + 1 + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{x + 1 + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

2°) Justifions que f est continue sur $\mathbb{R}$

-Les fonctions $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto x^2 - 1$ sont continue sur $]1; +\infty[$ et de plus $\forall x \in]1; +\infty[, x^2 - 1 > 0$ alors la

fonction $x \mapsto x + 1 - \sqrt{x^2 - 1}$ est continue sur $]1; +\infty[$

-La fonction $x \mapsto x^3 + 3x - 2$ est continue sur $] -\infty; 1[$ il en résulte donc que f est continue sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$

Etudions la continuité de f en 1

$1 \in D_f$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 3x - 2 = 2 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 - \sqrt{x^2 - 1} = 2$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1.

1.

De tout ce qui précède f est continue sur $\mathbb{R}$

3°) a- Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $] -1; 1[$

$] -1; 1[\subset]1; +\infty[$ donc $\forall x \in] -1; 1[, f(x) = x^3 + 3x - 2$
 f est dérivable sur $] -1; 1[$ et $\forall x \in] -1; 1[,$

$$f'(x) = 3x^2 + 3.$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in] -1; 1[$$

f est donc continue et strictement croissante sur $] -1; 1[$

alors $f(]-1; 1[) = \left] \lim_{x \rightarrow -1} f; \lim_{x \rightarrow 1} f \right[$
 $=] -5; 2[$ or $0 \in] -5; 2[$ donc l'équation

$f(x) = 0$ admet une solution unique dans $] -1; 1[$

b- Vérifions que $0,5 < \alpha < 0,75$

$]0,5; 0,75[\subset] -5; 2[$ et $\begin{cases} f(0,5) = -0,375 \\ f(0,75) = 0,672 \end{cases}$

$f(0,5) \times f(0,75) < 0$ d'où $0,5 < \alpha < 0,75$

c- Etudions le signe de $f(x)$

f est continue et strictement croissante sur $] -1; 1[$ donc continue et strictement croissante sur $] -1; \alpha[$ et sur $]\alpha; 1[$

$\forall x \in] -1; \alpha[, x \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq 0$ car $f(\alpha) = 0$

$\forall x \in]\alpha; 1[, x \geq \alpha \Rightarrow f(x) \geq 0$

Alors :
$$\begin{cases} \forall x \in] -1; \alpha[, f(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; 1[, f(x) > 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases}$$

ACTIVITE 6 :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$

1°) Déterminons l'ensemble de définition D de g

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x + 1 \geq 0 \text{ et } x - 3 \neq 0\}$$

$$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \Leftrightarrow x \in [-1; +\infty[$$

Posons $x - 3 = 0$

$$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ d'où } D = [-1; 3[\cup]3; +\infty[$$

2°) Calculons les limites de g aux bornes de D

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4} \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)} = 0 \quad \text{car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1}+2 = +\infty \end{cases}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

3°) Déterminons m

$3 \notin D$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{4}$ donc g est prolongeable par

continuité en 3. Si h est le prolongement de g par continuité

$$\text{en 3 on a : } \begin{cases} h(x) = g(x) & \text{si } x \in D \\ h(3) = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad m = \frac{1}{4}$$

Partie B :

$$f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{|x|}}$$

1°) Justifions que f est continue sur $\mathbb{R}$

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$

donc la fonction $x \mapsto 1 + \sqrt{|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues. La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, de plus $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + \sqrt{|x|} \neq 0$. Ainsi la

fonction $x \mapsto \frac{x}{1 + \sqrt{|x|}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de

fonctions continues, par suite f est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Ecrivons $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + \sqrt{-x}} & \text{si } x \in]-\infty; 0] \\ \frac{x}{1 + \sqrt{x}} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

3°) a- Démontrons que $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

Pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $a < b$ on a :

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{a}{1 + \sqrt{a}} - \frac{b}{1 + \sqrt{b}} \\ &= \frac{a + a\sqrt{b} - b - b\sqrt{a}}{(1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt{b})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{a - b + \sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt{b})} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab})}{(1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt{b})} \end{aligned}$$

Pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $a < b$ on a :

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab})}{(1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt{b})} > 0 \quad \text{de plus} \quad a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0 \quad \text{donc}$$

$$f(a) - f(b) < 0 \quad \text{soit} \quad f(a) < f(b)$$

D'où $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

b- Dédudons le sens de variation de f

Etant donné que $\forall (a; b) \in \mathbb{R}_+^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

alors f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

c- Déterminons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + \sqrt{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 - \sqrt{-x})}{1 + x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 - \sqrt{-x})}{x\left(\frac{1}{x} + 1\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \sqrt{-x}}{\frac{1}{x} + 1} = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \sqrt{-x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1 \end{cases}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 - \sqrt{x})}{1 - x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 - \sqrt{x})}{x\left(\frac{1}{x} - 1\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{x}}{\frac{1}{x} - 1} = +\infty \quad \text{car} : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{x}) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 = -1 \end{cases}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$

4°) a- Déterminons $f(I)$

$f(I) = f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$ car f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ donc $f(I) = [0; +\infty[$

b- Prouvons que k est une bijection

k est la restriction de f à l'intervalle I or f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $f([0; +\infty[)$ d'où k est une bijection

$$5^{\circ}) l(x) = f(x) - \frac{1}{2}$$

a- Démontrons que l'équation $l(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0,8; 1,1]$

l est continue et dérivable sur $[0,8; 1,1]$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in [0,8; 1,1], l'(x) = f'(x)$. f étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) > 0$, on

déduit donc que $\forall x \in [0; +\infty[, l'(x) > 0$ alors l est continue et strictement croissante sur $[0,8; 1,1]$ et

$$l([0,8; 1,1]) = [l(0,8); l(1,1)] = [-0,077; 0,036]; 0 \in [-0,077; 0,036]$$

donc l'équation $l(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0,8; 1,1]$

b- Déduisons que α est solution de l'équation

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

$$l(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{1}{2} \text{ d'où } \alpha \text{ est solution de l'équation}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

ACTIVITE 8 :

1°) a- Etudions les variations de u

$$u(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 6x(x-1)$$

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, u'(x) > 0$$

$$\forall x \in]0; 1[, u'(x) < 0$$

u est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[1; +\infty[$ et u est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = +\infty$$

$$u(0) = 2 \text{ et } u(1) = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$u'(x)$	+	-	+	
$u(x)$		2	1	$+\infty$

unique α dans $\mathbb{R}$ et que $-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{2}{3}$

u est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et $0 \in u(]-\infty; 0])$ donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-\infty; 0]$

D'après les variations de u ; $0 \notin u([0; +\infty[)$ d'où α est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $u(x) = 0$.

$$u\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{17}{32} \text{ et } u\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{27} \text{ on a :}$$

$$u\left(-\frac{3}{4}\right) \times u\left(-\frac{2}{3}\right) < 0 \text{ d'où } -\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{2}{3}$$

c- Signe de $u(x)$

d'après les variations de u et b) on a :

$$\forall x \in]-\infty; \alpha[, u(x) < 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, u(x) > 0 \text{ et } u(\alpha) = 0$$

2°) a- Déterminons l'ensemble de définition D de f et limites de f aux bornes de D .

$$f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{x - 1}$$

$$D = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\text{b- Justifions que } \forall x \in D, f'(x) = \frac{u(x)}{(x-1)^2}$$

f est dérivable en tout point de D comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in D, f'(x) = \frac{(3x^2 - 1)(x - 1) - x^3 + x + 1}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 - 3x^2 - x + 1 - x^3 + x + 1}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{(x - 1)^2} \text{ or } u(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

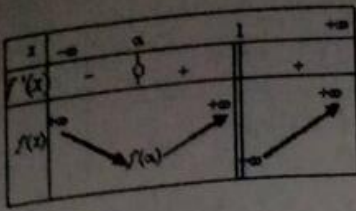
$$= \frac{u(x)}{(x - 1)^2} \text{ d'où le résultat}$$

c- étudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variation.

D'après 1°)c- et 2-b on a : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, f'(x) < 0$

$$\forall x \in]\alpha; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0 \text{ et } f'(\alpha) = 0$$

f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$: f est strictement croissante sur $[\alpha; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.



3°) a- Justifions que $f(\alpha) = \frac{1}{2} \left(3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha - 1} \right)$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

$$u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{1}{2}(3\alpha^2 - 2)$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\frac{1}{2}(3\alpha^2 - 2) - \alpha - 1}{\alpha - 1} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3\alpha^2 - 2\alpha - 4}{\alpha - 1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(\alpha - 1)(3\alpha + 1) - 3}{\alpha - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha - 1} \right) \end{aligned}$$

b- Encadrons $f(\alpha)$, puis étudions le signe de $f(\alpha)$

$$-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{5}{4} < 3\alpha + 1 < -1 \quad (a) \text{ et}$$

$$-\frac{7}{4} < \alpha - 1 < -\frac{5}{3}$$

$$\text{on a : } -\frac{3}{5} < \frac{1}{\alpha - 1} < -\frac{4}{7} \Rightarrow \frac{12}{7} < \frac{-3}{\alpha - 1} < \frac{9}{5} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} (a) \text{ et } (b) &\Rightarrow \frac{13}{28} < 3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha - 1} < \frac{4}{5} \\ &\Rightarrow \frac{13}{56} < f(\alpha) < \frac{2}{5} \quad \text{et par suite } f(\alpha) > 0 \end{aligned}$$

c- Justifions que (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse x_0 puis déduis le signe de $f(x)$.

- D'après les variations de f ,
 $0 \notin f([-\infty; 1]) = [f(\alpha); +\infty[$ car $f(\alpha) > 0$
- f est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et
 $0 \in f(]1; +\infty[) = \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]1; +\infty[$ par suite (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse $x_0 > 1$ et on a :
d'après les variations de f
 $\forall x \in]-\infty; 1[\cup]x_0; +\infty[; f(x) > 0$
 $\forall x \in]1; x_0[; f(x) < 0$ et $f(x_0) = 0$

4°) a- Démontrons que g admet une application réciproque

f est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et
 $f(]1; +\infty[) = \mathbb{R}$ donc g est bijective par suite elle admet une bijection réciproque g^{-1} .

b- Déterminons $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$

$x_0 \in]1; +\infty[$ et $f(x_0) = 0$ donc $g^{-1}(0) = x_0$

$g^{-1}(1) = a$ avec $a \in]1; +\infty[$ donc on a :

$$g(a) = 1 \Leftrightarrow \frac{a^3 - a - 1}{a - 1} = 1$$

$$\Leftrightarrow a^3 - a - 1 = a - 1$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = -\sqrt{2} \text{ ou}$$

$a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \in]1; +\infty[$ donc $g^{-1}(1) = \sqrt{2}$

c- Soit $M(x; y) \in (\Delta) \cap (C)$

$$M(x; y) \in (\Delta) \cap (C) \Leftrightarrow f(x) = m; x \in]1; +\infty[$$

D'après 4°) a- l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans $]1; +\infty[$; donc (C) coupe (C) une seule fois dans $]1; +\infty[$.

3. Correction des activités sur la dérivabilité et étude de fonctions

ACTIVITE 3:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (1 + \sin 3x + 2 \cos 2x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left[x \tan \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right] = 0$$

$$\text{Soit } X = x - \frac{\pi}{3}; \text{ On a : } x = X + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Quand } x \rightarrow \frac{\pi}{3}; X \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 + \sin \left[3 \left(X + \frac{\pi}{3} \right) \right] + 2 \cos \left[2 \left(X + \frac{\pi}{3} \right) \right]}{\left(X + \frac{\pi}{3} \right) \tan X} \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 + \sin(3X + \pi) + 2 \cos \left(2X + \frac{2\pi}{3} \right)}{\left(X + \frac{\pi}{3} \right) \tan X} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \sin(3X + \pi) = -\sin 3X$$

$$\begin{aligned} 2 \cos \left(2X + \frac{2\pi}{3} \right) &= 2 \left[\cos 2X \cos \frac{2\pi}{3} - \sin 2X \sin \frac{2\pi}{3} \right] \\ &= 2 \left[-\frac{1}{2} \cos 2X - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2X \right] \\ &= -\cos 2X - \sqrt{3} \sin 2X \end{aligned}$$

Donc on a :

$$I = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 3X - \cos 2X - \sqrt{3} \sin 2X}{\left(X + \frac{\pi}{3} \right) \tan X}$$

Pour X voisin de 0 ; $2X$ voisin de 0 et $3X$ voisin de 0.
Au voisinage de 0 :

$$\sin 3X = 3X - \frac{9}{2}(3X)^3 + X^3 \epsilon(X)$$

$$\sin 3X = 3X - \frac{9}{2}X^3 + X^3 \epsilon(X) \text{ avec } \lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$$

Au voisinage de 0 :

$$\cos 2X = 1 - \frac{1}{2}(2X)^2 + X^3 \epsilon(X)$$

$$= 1 - 2X^2 + X^3 \epsilon(X) \text{ avec } \lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$$

Au voisinage de 0 :

$$\sin 2X = 2X - \frac{1}{6}(2X)^3 + X^3 \epsilon(X)$$

$$= 2X - \frac{4}{3}X^3 + X^3 \epsilon(X) \text{ avec } \lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$$

Au voisinage de 0 :

$$\tan X = X + \frac{1}{3}X^3 + X^3 \epsilon(X) \text{ avec } \lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned} I &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - 3X + \frac{9}{2}X^3 - 1 + 2X^2 - 2\sqrt{3}X - \frac{4\sqrt{3}}{3}X^3}{\left(X + \frac{\pi}{3} \right) \left(X + \frac{1}{3}X^3 \right)} \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X(-3 - 2\sqrt{3}) + 2X^2 + X^3 \left(\frac{9}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \right)}{X^2 + \frac{1}{3}X^4 + \frac{\pi}{3}X + \frac{\pi}{9}X^3} \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{-3 - 2\sqrt{3} + 2X + X^2 \left(\frac{9}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \right)}{X + \frac{1}{3}X^3 + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9}X^2} \\ &= \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{\frac{\pi}{3}} \text{ d'où } I = \frac{-9 - 6\sqrt{3}}{\pi} \end{aligned}$$

ACTIVITE 5 :

Après une lecture minutieuse du graphe on a :

$$1^\circ) \text{ a- } D = \mathbb{R}$$

$$\text{b- } E = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

2°) Ecrivons les systèmes d'équations définissant les demi-tangentes

$$\text{En } -2 \text{ on a : } \begin{cases} x = -2 \\ y \geq 3 \end{cases} \text{ et en } 2 \text{ on a : } \begin{cases} x = 2 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

3°) a- Donnons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$$

b- les branches infinies de la courbe (C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1 \text{ donc la droite d'équation } y = 1 \text{ est asymptote à (C) en } +\infty$$

(C) en $+\infty$

En $-\infty$ (C) admet une asymptote passant par des points

$$\left(\frac{1}{2}; 0 \right) \text{ et } B(0; 1)$$

$$\text{Posons (AB) : } y = ax + b; a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -2 \text{ et}$$

$$B \in (AB) \Rightarrow b = 1 \text{ donc (AB) : } y = -2x + 1 \text{ par suite la droite d'équation } y = -2x + 1 \text{ est asymptote à (C) au voisinage de } -\infty$$

4°) Dressons le tableau de variations de f

x	$-\infty$	-2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	3	$2\sqrt{2}+1$	1	$+\infty$

5°) Donnons $f([0; 2])$

$f([0;2]) = [f(2); f(0)]$ car f est strictement décroissante sur $[0;2]$

D'où $f([0;2]) = [-1;3]$

6°) Démontrons que l'équation $f(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α / $0 < \alpha < 2$

Sur le graphique la droite d'équation $y = 1$ coupe la courbe de f en seul point. Alors l'équation $f(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution α . De plus $f([0;2]) = [-1;3]$; $1 \in [-1;3]$ d'où $0 < \alpha < 2$

ACTIVITE 14 :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x$$

1°) a- Justifions que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$

Soit D_f ce domaine

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x \geq 0\}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$

Ecrivons f sans le symbole de valeur absolue

Posons $x^2 - 2x = 0$

$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ et le tableau de signe de

$x^2 - 2x$ est :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x^2 - 2x$		+	-	+

$$\text{Alors } \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x, & \text{si } x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x} + x, & \text{si } x \in]0; 2[\\ f(0) = 0 \\ f(2) = 2 \end{cases}$$

b- Etudions la dérivabilité de f en 0 et en 2.

En 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-2)}{x\sqrt{x^2 - 2x}} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 2x}} + 1 = -\infty \text{ alors } f \text{ n'est pas}$$

dérivable à gauche en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{-x^2 + 2x} + x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x + 2}{\sqrt{-x^2 + 2x}} + 1 = +\infty \text{ alors } f \text{ n'est pas}$$

dérivable à droite en 0

Conclusion : f n'est pas dérivable en 0

En 2 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{-x^2 + 2x} + x - 2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x}{\sqrt{-x^2 + 2x}} + 1 = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x - 2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}} + 1 = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 2

Conclusion : f n'est pas dérivable en 2

Interprétation graphique

La courbe (C_f) admet en son point d'abscisse 0 une demi

tangente définie par : $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

La courbe (C_f) admet en son point d'abscisse 2 une demi

tangente définie par : $\begin{cases} x = 2 \\ y \geq 2 \end{cases}$

2°) Etudions les branches infinies de (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x \left(-\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{-\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 1} = 1$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ alors la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à

(C_f) au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} + x = +\infty$; calculons donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1 = 2. \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1} = -1 \text{ alors la droite}$$

d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3°) a- Déterminons l'ensemble de dérivabilité D' de f
 f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$; $]0; 2[$ et $]2; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivable or d'après la question 1°) b- f n'est pas dérivable en 0 et en 2 alors
 $D' =]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$

Calculons la dérivée $f'(x)$

On trouve :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}; \text{ si } x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\\ \frac{\sqrt{-x^2 + 2x - x + 1}}{\sqrt{-x^2 + 2x}}; \text{ si } x \in]0; 2[\end{cases}$$

b- Démontrons que les équivalences suivantes :

i) $\sqrt{x^2 - 2x} - 1 + x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[$

$$\sqrt{x^2 - 2x} - 1 + x < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} < 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ x^2 - 2x < (1 - x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\\ x \in]-\infty; 1[\\ x^2 - 2x < 1 - 2x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\\ x \in]-\infty; 1[\\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\text{ d'où le résultat}$$

ii) $\sqrt{-x^2 + 2x + 1} - x < 0 \Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; 2]$

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 1} - x < 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 2x} < x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ -x^2 + 2x < x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; 2] \\ x \in [1; +\infty[\\ 2x^2 - 4x + 1 > 0 \end{cases}$$

Réolvons $2x^2 - 4x + 1 > 0$

Posons $2x^2 - 4x + 1 = 0$; $\Delta = 8$

Donc $2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

$$x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

Alors $2x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow$

$$x \in \left] -\infty; \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right[\cup \left] \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; +\infty \right[$$

Ainsi :

$$\sqrt{-x^2 + 2x} + 1 - x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; 2] \\ x \in [1; +\infty[\\ x \in \left] -\infty; \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right[\cup \left] \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; +\infty \right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; 2 \right]$$

D'où $\sqrt{-x^2 + 2x} + 1 - x < 0 \Leftrightarrow \left] \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; 2 \right]$

c- Dédudons-en le signe de $f'(x)$

Sur $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$ le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{x^2 - 2x} - 1 + x$

Sur $]0; 2[$ le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{-x^2 + 2x} + 1 - x$

On obtient donc le tableau de signe de $f'(x)$ suivant :

x	$-\infty$	0	$\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	-	+

d- Etablissons le tableau de variation de f

$$\forall x \in \left] 0; \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right[\cup]2; +\infty[; f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup \left] \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; 2 \right[; f'(x) < 0 \text{ et } f\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

alors f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right]$ et sur

$]2; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur

$$\left] \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; 2 \right[$$

$$f\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$ $	$+$	$-$	$ $	$+$
$f(x)$	1	0	$1+\sqrt{2}$	2	$+\infty$	

$$4^{\circ}) \varphi: \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right] \rightarrow f\left(\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right]\right)$$

$$x \mapsto \varphi(x) = f(x)$$

a- Démontrons que φ admet une bijection réciproque φ^{-1}

$$\forall x \in \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right], \varphi(x) = f(x) \text{ or } f \text{ est continue et}$$

strictement décroissante sur $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right]$ et

$$f\left(\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right]\right) = [2; 1+\sqrt{2}] \text{ d'où}$$

$$\varphi: \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right] \rightarrow f\left(\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right]\right)$$

$x \mapsto \varphi(x) = f(x)$ est une bijection par suite φ admet une bijection réciproque φ^{-1} .

b- Démontrons que $A(2; 1) \in (\Gamma)$

On a : $f(1) = 2$ alors le point $A(2; 1) \in (\Gamma)$

c- Déduisons-en l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (Γ) en 2

$$(\Delta): y = (\varphi^{-1})'(2)(x-2) + \varphi^{-1}(2)$$

$$(\varphi^{-1})'(2) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(2))}$$

$$(\varphi^{-1})'(2) = \frac{1}{\varphi'(1)} = 1 \text{ alors } (\Delta): y = x - 1$$

d- Ensemble de dérivabilité de φ^{-1}

$$K = [2; 1+\sqrt{2}] \setminus \left\{ f(x) / f'(x) = 0; \forall x \in \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2 \right] \right\}$$

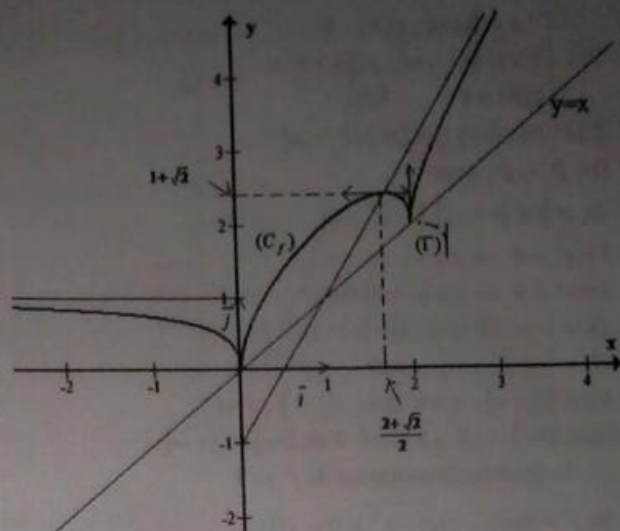
f' n'est pas définie en 2

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \text{ alors}$$

$$K = [2; 1+\sqrt{2}] \setminus \left\{ f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right); f(2) \right\}$$

$$K =]2; 1+\sqrt{2}[$$

5°) Représentation de la courbe (C_f) et la courbe (Γ) .



ACTIVITE 16 :

1°) Etudions les variations de la fonction numérique g définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$.

* g est continue et dérivable sur $]1; +\infty[$ comme fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) = 6x^2 - 4x$$

*Signe de $g'(x)$.

On trouve que $\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$

*Sens de variation de g .

g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

*Limites

On trouve : $\lim_{1^+} g = -1$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$

*Tableau de variation de g

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	-1	$+\infty$

b- Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1; +\infty[$ et vérifions que $1,28 < \alpha < 1,3$

g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $g(1; +\infty) =]-1; +\infty[$ or $0 \in]-1; +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1; +\infty[$

De plus : $1,28 \in]1; +\infty[$ et $1,3 \in]1; +\infty[$

On a : $g(1,28) \approx -0,0825$ et $g(1,3) \approx 0,014$

Donc $g(1,28) \times g(1,3) < 0$ d'où $1,28 < \alpha < 1,3$.

c- Déterminons le signe de g sur $]1; +\infty[$

g est strictement sur $]1; +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$ donc :

$x < \alpha \Rightarrow g(x) < 0$ et $x > \alpha \Rightarrow g(x) > 0$

$$\text{Soit } \begin{cases} \forall x \in]1; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]x; +\infty[, g(x) > 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

2°) a- Justifions que $D = [-1; +\infty[$

$D = D_1 \cup D_2$ avec

$$D_1 = \{x \in]-\infty; 1] / 1 - x^2 \geq 0\}$$

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1] \text{ donc :}$$

$$D_1 =]-\infty; 1] \cap [-1; 1] = [-1; 1].$$

$$D_2 = \{x \in]1; +\infty[/ x \neq 0\}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, x \neq 0 \text{ alors } D_2 =]1; +\infty[$$

$$\text{Donc } D = [-1; 1] \cup]1; +\infty[\text{ d'où } D = [-1; +\infty[.$$

b- Etudions la continuité de f en 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)\sqrt{1-x^2} = 0 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x^2 - 2x + \frac{1}{x}\right) = 1 - 2 + 1 = 0$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f = \lim_{x \rightarrow 1^+} f = f(1)$ donc f est continue en 1.

3°) a- Etudions la dérivabilité de f en -1 et en 1.

En -1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(1-x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en -1.

En 1.

$$\begin{aligned} -\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -\sqrt{1-x^2} = 0; 0 \in \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ est} \end{aligned}$$

dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 0$.

$$\begin{aligned} -\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + \frac{1}{x}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 - x - 1)}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 1}{x} = -1; -1 \in \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ est} \end{aligned}$$

dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = -1$.

On a : $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ donc f n'est pas dérivable en 1.

Interprétation géométrique :

- (Γ) admet en son point d'abscisse -1 une demi-tangente définie par : $(T) : \begin{cases} x = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

- (Γ) admet en son point d'abscisse 1 deux demi-tangentes, l'une à gauche en 1 noté T_g et l'autre à droite en 1 noté T_d définies par :

$$T_g : \begin{cases} x \leq 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ et } T_d : \begin{cases} x \geq 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

b- Déterminons l'ensemble de dérivabilité de f .

Soit E cet ensemble :

$$\text{On a : } E =]-1; 1[\cup]1; +\infty[.$$

4°) a- Démontrons que :

- Pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 2 - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2x^2 - 1}{x^2} \text{ or } g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où pour tout } x \in]1; +\infty[, \text{ on a : } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

- Pour tout $x \in]-1; 1[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{1-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \times (1-x) \\ &= \frac{-(1-x^2) - x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x^2 + x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où pour tout } x \in]-1; 1[, \text{ on a : } f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b- Etudions le signe de $f'(x)$ sur $]1; 1[$.

$\forall x \in]-1; 1[, \sqrt{1-x^2} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2x^2 - x - 1$.

$$\text{Posons } 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\text{On a : } \Delta = 9$$

$$\text{alors } 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 1$$

$$\text{donc } \begin{cases} \forall x \in]-1; -\frac{1}{2}[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]-\frac{1}{2}; 1[, f'(x) < 0 \\ f'(-\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

5°) Justifions que : $f(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} - \alpha$ et $-0,15 < f(\alpha) < -0,1$.

$$\text{On a : } f(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + 1}{\alpha}$$

$$\text{Or } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3 - 2\alpha^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 = \alpha^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + 1 + \frac{1}{2}}{\alpha}$$

$$= \frac{-\alpha^2 + \frac{3}{2}}{\alpha} = -\alpha + \frac{3}{2\alpha} \text{ d'où } f(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} - \alpha$$

$$1,28 < \alpha < 1,3 \Leftrightarrow 2,56 < 2\alpha < 2,6$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2,6} < \frac{3}{2\alpha} < \frac{3}{2,56}$$

$$\Leftrightarrow -1,3 + \frac{3}{2,6} < -\alpha + \frac{3}{2\alpha} < -1,28 + \frac{3}{2,56}$$

$$\Leftrightarrow -0,1461 < f(\alpha) < -0,1081 \text{ d'où}$$

$$-0,15 < f(\alpha) < -0,11$$

6°) Dressons le tableau de variations de f sur $[-1; +\infty[$

Signe de $f'(x)$ sur $]1; +\infty[$.

$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$; $x^2 > 0$ sur $]1; +\infty[$ donc le signe de f' est celui de $g(x)$

D'après 1°) c- on déduit :

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1; \alpha[\\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; +\infty[\\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \end{cases}$$

De l'étude de signe de f' sur $[-1; +\infty[$ on a :

f est strictement croissante sur $[-1; -\frac{1}{2}]$ et sur $[\alpha; +\infty[$

f est strictement décroissante sur $[-\frac{1}{2}; \alpha]$

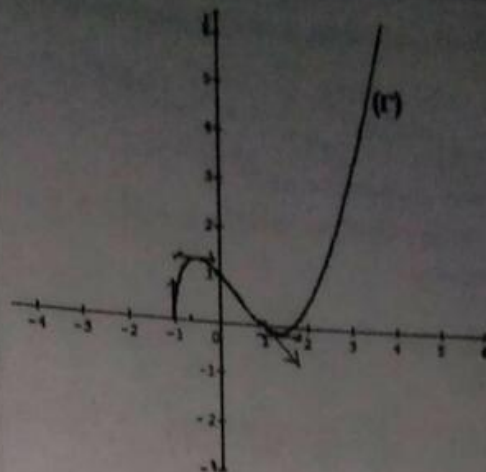
Tableau de variation de f .

x	-1	$-\frac{1}{2}$	1	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

7°) Etudions les branches infinies puis donne l'allure de (Γ) dans le repère orthonormé $(O; I, J)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$ donc (Γ) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.



ACTIVITE 17 :

1°) a- ensemble E

$$E = \{x \in]-\infty; 0] / x^2 + 1 \neq 0\} \cup \{x \in]0; +\infty[/ x - 1 \neq 0\}$$

$$E =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

b-limites aux de E

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 1} f = -\infty$$

c-Ecrivons f sans valeur absolue

$$\begin{cases} f(x) = 2x + \frac{1}{x^2 + 1}, & \text{si } x \in]-\infty; 0] \\ f(x) = \frac{1}{5} \left(4x + 13 - \frac{8}{\sqrt{-x+1}} \right), & \text{si } x \in]0; 1[\\ f(x) = \frac{1}{5} \left(4x + 13 - \frac{8}{\sqrt{x-1}} \right), & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

d- Continuité et dérivabilité de f en 0.

Continuité :

$$0 \in E$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{5} \left(4x + 13 - \frac{8}{\sqrt{|x-1|}} \right) = \frac{1}{5} (5) = 1$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

0.

Dérivabilité :

$$\text{On trouve } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

Conclusion : f est dérivable à gauche en 0 et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en car

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Interprétation graphique :

Au point $M(0;1)$, (C) admet deux demi-tangentes définies par :

$$(T_x): \begin{cases} x \leq 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \text{ et } (T_d): \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

2°) a- Définissons la fonction dérivée f' de f
 f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$, $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$ et on trouve :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = 2 - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\forall x \in]0; 1[, f'(x) = \frac{4}{5} \left(1 - \frac{1}{(-x+1)\sqrt{-x+1}} \right)$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{4}{5} \left(1 + \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} \right)$$

b- Sens de variation de f et tableau de variation de f

Signe de f'

$$\text{On obtient : } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0 \end{cases}$$

On déduit donc que f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; 1[$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$	$+\infty$

c- Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles x_1 , x_2 et x_3 .

* f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et $f(]-\infty; 0[) =]-\infty; 1[$; $0 \in]-\infty; 1[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $]-\infty; 0[$

* f est continue et strictement décroissante sur $]0; 1[$ et $f(]0; 1[) =]-\infty; 1[$; $0 \in]-\infty; 1[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_2 dans $]0; 1[$

* f est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $f(]1; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$; $0 \in]-\infty; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_3 dans $]1; +\infty[$

Il en résulte de tout ce qui précède que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles x_1 , x_2 et x_3 .

d- Vérifions les inégalités

$$\bullet \quad]-0,5; 0[\subset]-\infty; 0[\text{ et } \begin{cases} f(-0,5) = -0,2 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{cases} \text{ donc}$$

$$-0,5 < x_1 < 0$$

$$\bullet \quad \frac{3}{4} \in]0; 1[\text{ et } f\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \text{ donc } x_2 = \frac{3}{4}$$

$$\bullet \quad]1; 1,5[\subset]1; +\infty[\text{ et } f(]1; 1,5[) =]-\infty; 1,53[\text{ donc}$$

$$1 < x_3 < 1,5$$

e- Dédouons le signe de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

On trouve :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; 1[\cup]x_3; +\infty[, f(x) < 0 \\ \forall x \in]x_1; x_2[\cup]x_3; +\infty[, f(x) > 0 \\ \forall x \in \{x_1; x_2; x_3\}, f(x) = 0 \end{cases}$$

3°) a- Etudions les branches infinies de (C)

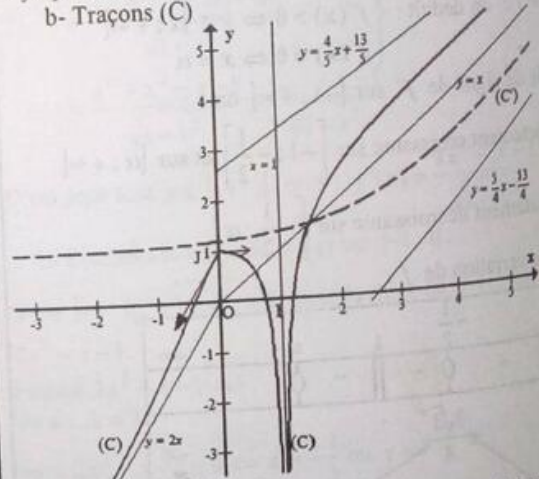
$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 0$ donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{4}{5}x + \frac{13}{5} \right) \right] = 0 \text{ donc la droite d'équation}$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{13}{5} \text{ est asymptote à (C) en } +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C).

b- Traçons (C)



4°) a- Démontrons que g admet une bijection réciproque g^{-1}
 g est la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$ donc g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $f(]1; +\infty[) = \mathbb{R}$ donc g est une bijection de $]1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ par suite g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur $J = \mathbb{R}$

b- Calculons $(g^{-1})'(0)$ en fonction de x_3

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))}$$

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(x_3)} \text{ car } g(x_3) = 0$$

$$g(x_3) = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = \frac{8}{x_3+13} \text{ dans l'expression de}$$

$g' = f'$ on obtient :

$$g'(x_3) = \frac{1}{5} \left(\frac{12x_3+5}{2(x_3-1)} \right) \text{ alors } (g^{-1})'(0) = \frac{10(x_3-1)}{12x_3+5}$$

c- Vérifions que le point A $\left(\frac{13}{5}; 2\right) \in (C')$

$$f(2) = \frac{1}{5} \left(4(2) + 13 - \frac{8}{\sqrt{2-1}} \right)$$

$$f(2) = \frac{1}{5}(13) = \frac{13}{5} \text{ d'où } A\left(\frac{13}{5}; 2\right) \in (C')$$

Equation cartésienne de la tangente (T) à (C') au point A.

$$(T): y = (g^{-1})'\left(\frac{13}{5}\right) \left(x - \frac{13}{5}\right) + (g^{-1})\left(\frac{13}{5}\right)$$

$$(g^{-1})'\left(\frac{13}{5}\right) = \frac{1}{g'(2)} \text{ et } g'(2) = \frac{8}{5} \text{ donc } (g^{-1})'\left(\frac{13}{5}\right) = \frac{5}{8}$$

$$\text{alors (T): } y = \frac{5}{8}x - \frac{3}{8}$$

c- Construisons (C')

Voir courbe en pointillé.

ACTIVITE 20:

1°)

t est définie, continue et dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], t'(x) = 2 \cos x \sin x \text{ ou } t'(x) = \sin 2x$$

$$\text{Posons } t'(x) = 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = 0 \text{ car } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \cos x > 0 \text{ et } \sin x > 0 \text{ donc } t'(x) > 0$$

Alors t est continue et strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$t\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[t(0); t\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$t\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\sin^2 0; \sin^2 \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= [0; 1] \text{ d'où } t \text{ est une bijection}$$

2°) a- Déterminons l'ensemble de dérivabilité D de t^{-1} .

t est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{2}$

alors t^{-1} est dérivable sur $t\left(\left]0; \frac{\pi}{2}\right]\right) =]0; 1[$ soit $D =]0; 1[$

b- Calculons $(t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$

$$(t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{t'\left[t^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]}$$

$$\text{Posons } t^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \text{ avec } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$t^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \Leftrightarrow t(\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ car } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$(t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{t'\left[\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$\text{on trouve: } (t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

c- Démontrons que $\forall x \in D, (t^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

$$(t^{-1})'(x) = \frac{1}{t'\left[t^{-1}(x)\right]}$$

$$t^{-1}(x) = y \text{ avec } \begin{cases} x \in [0; 1] \\ y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$t^{-1}(x) = y \Leftrightarrow t(y) = x \Leftrightarrow \sin^2 y = x \Leftrightarrow \sin y = \sqrt{x}$$

$$\text{Or } \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1-x}$$

$$\text{Donc } (t^{-1})'(x) = \frac{1}{t'[y]}$$

$$(t^{-1})'(x) = \frac{1}{2 \cos y \sin y} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \text{ d'où } \forall x \in D.$$

$$(t^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

*Retrouvons la valeur de $(t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$

$$(t^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

4. CORRECTION DES ACTIVITES SUR LES PRIMITIVES

ACTIVITE 7:

$$f:]-\infty; \frac{1}{3}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (1-3x)^5 + 2 \cos \pi x + |(2x-1)x^2|$$

1°) Justifions que f admet des primitives sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$

Soient :

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (1-3x)^5$$

$$v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2 \cos \pi x$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto |(2x-1)x^2|$$

u est une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ (1)

v est la composée de deux fonctions continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ (2)

h est une fonctions polynôme par intervalle donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ (3)

De (1), (2) et (3) on a f continue sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ et par conséquent f admet des primitives sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$.

2°) Déterminons la primitive F de f sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ qui prend la valeur 1 en 0.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-3x)^5 + 2 \cos \pi x + |(2x-1)x^2| \\ &= (1-3x)^5 + 2 \cos \pi x + x^2|2x-1| \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	-	-	0	-
$ 2x-1 $	$1-2x$		0	$2x-1$

$$\forall x \in]-\infty; \frac{1}{3}[; |2x-1| = 1-2x$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-3x)^5 + 2 \cos \pi x + x^2(1-2x) \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)(-3)(1-3x)^5 + (2) \cos \pi x + x^2 - 2x^3 \end{aligned}$$

$$\text{Soit } F:]-\infty; \frac{1}{3}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -\frac{1}{3} \frac{(1-3x)^6}{6} + \frac{2}{\pi} \sin \pi x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{19}{18}$$

F est une primitive de f

G est une primitive de $f \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} / G(x) = F(x) + c$
 $G(0) = F(0) + c$ or $G(0) = 1$ donc on a :

$$1 = F(0) + c \Leftrightarrow c = 1 + \frac{1}{18} \Leftrightarrow c = \frac{19}{18}$$

Donc on a :

$$G:]-\infty; \frac{1}{3}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -\frac{(1-3x)^6}{18} + \frac{2}{\pi} \sin \pi x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{19}{18}$$

5. CORRECTION DES ACTIVITES SUR LES FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN.

ACTIVITE 1 :

➤ Trouvons l'ensemble de définition des fonctions :

* $D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} / 3x - 1 > 0\}$ et on trouve

$$D_{f_1} = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$$

* $D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$ et on trouve

$$D_{f_2} = \mathbb{R} - \{1; 2\}$$

* $D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x + 1 > 0\}$

$$D_{f_3} = \mathbb{R}$$

* $D_{f_4} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } 1 + x > 0\}$

$$D_{f_4} =]-1; 0[\cup]0; +\infty[$$

* $D_{f_5} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 > 0\}$

$$D_{f_5} = \mathbb{R}$$

* $D_{f_6} = \left\{x \in \mathbb{R} / 2x + 1 \neq 0 \text{ et } \frac{x}{2x+1} > 0\right\}$

$$D_{f_6} =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[$$

* $D_{f_7} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

* $D_{f_8} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } 2 - 3x \neq 0\}$

$$D_{f_8} = \left]0; \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$$

* $D_{f_9} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

$$D_{f_9} =]0; +\infty[$$

* $D_{f_{10}} = \left\{x \in \mathbb{R} / 2x + 1 \neq 0 \text{ et } \frac{x+3}{2x+1} > 0\right\}$

$$D_{f_{10}} =]-\infty; -3[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

* $D_{f_{11}} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \geq 0\}$

$$D_{f_{11}} = [1; +\infty[$$

* $D_{f_{12}} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

$$D_{f_{12}} =]0; +\infty[$$

* $D_{f_{13}} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x > 0\}$

$$D_{f_{13}} =]1; +\infty[$$

* $D_{f_{14}} = \{x \in \mathbb{R} / 1 + x^2 > 0 \text{ et } x \neq 0\}$

$$D_{f_{14}} = \mathbb{R}^*$$

* $D_{f_{15}} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x^2 - x + 1 > 0\}$

$$D_{f_{15}} = \mathbb{R}^*$$

* $D_{f_{16}} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

$$D_{f_{16}} =]0; +\infty[$$

* $D_{f_{17}} = \{x \in \mathbb{R} / -x > 0 \text{ et } x + 1 \neq 0\}$

$$D_{f_{17}} =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$$

* $D_{f_{18}} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

$$D_{f_{18}} =]0; +\infty[$$

➤ Déterminons leurs dérivées

$$\forall x \in D_{f_1}, f'_1(x) = \frac{3}{3x-1}$$

$$\forall x \in D_{f_2}, f'_2(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$$

$$\forall x \in D_{f_3}, f'_3(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

$$\forall x \in D_{f_4}, f'_4(x) = \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

$$\forall x \in D_{f_5}, f'_5(x) = \frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$\forall x \in D_{f_6}, f'_6(x) = \frac{1}{x(2x+1)}$$

$$\forall x \in D_{f_7}, f'_7(x) = \frac{2x \ln x + 2x + 3}{x}$$

$$\forall x \in D_{f_8}, f'_8(x) = \frac{2-3x+3x \ln x}{x(2-3x)^2}$$

$$\forall x \in D_{f_9}, f'_9(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$$

$$\forall x \in D_{f_{10}}, f'_{10}(x) = \frac{-5}{(2x+1)(x+3)}$$

$$\forall x \in D_{f_{11}}, f'_{11}(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

$$\forall x \in D_{f_{12}}, f'_{12}(x) = \frac{1}{2x}$$

$$\forall x \in D_{f_{13}}, f'_{13}(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$\forall x \in D_{f_{14}}, f'_{14}(x) = \frac{4x^3 + x^2 + 1}{x^2(1+x^2)}$$

$$\forall x \in D_{f_{15}}, f'_{15}(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2(x^2 - x + 1)}$$

$$\forall x \in D_{f_{16}}, f'_{16}(x) = -(\ln x)^2 - 2(\ln x) + 2x$$

$$\forall x \in D_{f_{17}}, f'_{17}(x) = \frac{-x-1+\ln(-x)}{(x+1)^2}$$

$$\forall x \in D_{f_{18}}, f'_{18}(x) = \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

ACTIVITE 2

Calculons les limites

$$\begin{aligned} N^{\circ}1 &= \ln 2 ; N^{\circ}2 = -3 ; N^{\circ}3 = +\infty ; N^{\circ}4 = +\infty ; \\ N^{\circ}5 &= -\infty ; N^{\circ}6 = 0 ; N^{\circ}7 = 0 ; N^{\circ}8 = +\infty ; \\ N^{\circ}9 &= +\infty ; N^{\circ}10 = 2 ; N^{\circ}11 = 0 ; N^{\circ}12 = 0 ; \\ N^{\circ}13 &= 0 ; N^{\circ}14 = -1 ; N^{\circ}15 = +\infty ; N^{\circ}16 = 0 ; N^{\circ}17 = 2 ; \\ N^{\circ}18 &= 1 ; N^{\circ}19 = 2 ; N^{\circ}20 = 1 ; \\ N^{\circ}21 &= 0 ; N^{\circ}22 = -\infty ; N^{\circ}23 = 0 ; N^{\circ}24 = -\ln 3 \\ N^{\circ}25 &= -\infty ; N^{\circ}26 = +\infty ; N^{\circ}27 = -\infty ; \\ N^{\circ}28 &= 0 ; N^{\circ}29 = 2 ; N^{\circ}30 = 0 \end{aligned}$$

ACTIVITE 12 :

Partie A :

$$g(x) = x^3 - x + 1 - 2 \ln x$$

1°) a- Démontrons que $\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{P(x)}{x}$ où P est

un polynôme de degré 3 à déterminer.

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x}$$

$$g'(x) = \frac{3x^3 - x - 2}{x}$$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{P(x)}{x}$ avec $P(x) = 3x^3 - x - 2$

b- Vérifions que $P(1) = 0$ puis factorise P et détermine le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .

$$\text{On a : } P(1) = 3(1)^3 - (1) - 2 = 0$$

$$P(1) = 3 - 3 = 0 \text{ donc } \underline{P(1) = 0}$$

Factorisons $P(x)$

$$\text{On trouve : } P(x) = (x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$$

Signe de $P(x)$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 3x^2 + 3x + 2 = 0$$

Le discriminant de $3x^2 + 3x + 2$ est $\Delta = -15$; $-15 < 0$ et $3 > 0$ alors le signe de $P(x)$ sur $]0; +\infty[$ est celui de $x - 1$ car $3x^2 + 3x + 2 > 0$

$$\text{Donc on a : } \begin{cases} \forall x \in]0; 1[, P(x) < 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, P(x) > 0 \\ P(1) = 0 \end{cases}$$

c- Etudions le sens de variation de g

Sur $]0; +\infty[$, le signe de $g'(x)$ est celui de $P(x)$ car $x > 0$

$$\text{donc on a : } \begin{cases} \forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0 \\ g'(1) = 0 \end{cases}$$

D'où g est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

2°) Dédouons-en le signe de $g(x)$.

g est strictement décroissante sur $]0; 1]$ donc

$$x \leq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 1$$

g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

$$x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 1$$

Ainsi donc $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) \geq 1$

d'où $g(x) > 0, \forall x \in]0; +\infty[$.

Partie B :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$$

3°) a- Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln x) \times \frac{1}{x^2} = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

b- Démontrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0$$

Dédouons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

c- Justifie que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives

$x = 0$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe (C).

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ donc (D) : $x = 0$ est asymptote à (C)

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0 \text{ donc}$$

(Δ) : $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

4°) $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) = x + \ln x$

a- Déterminons l'image de $]0; +\infty[$ par h
 h est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante

sur $]0; +\infty[$ donc $h(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ donc

$h(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.

b- Dédudons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$ et démontrons que $0,56 < \alpha < 0,57$.

h est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $h(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$ ou $0 \in \mathbb{R}$ donc $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$.

De plus $0,56 \in]0; +\infty[$ et $0,57 \in]0; +\infty[$;

$h(0,56) \approx -0,0198$ et $h(0,57) \approx 0,0079$

On a : $h(0,56) \times h(0,57) < 0$ donc $0,56 < \alpha < 0,57$.

c- Déterminons la position de (C) par rapport à (Δ).

$$\forall x \in]0; +\infty[, \left[\frac{f(x) - (x+1)}{x^2} \right] = \frac{h(x)}{x^2}$$

Sur $]0; +\infty[$, le signe de $[f(x) - (x+1)]$ est celui de $h(x)$ car $x^2 > 0$.

h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $h(\alpha) = 0$ alors

$\forall x \in]0; \alpha[$, $h(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $h(x) > 0$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, [f(x) - (x+1)] < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, [f(x) - (x+1)] > 0 \\ \forall x \in \{\alpha\}, [f(x) - (x+1)] = 0 \end{cases}$$

D'où :

- sur $]0; \alpha[$, (C) est en dessous de (Δ).
- sur $]\alpha; +\infty[$, (C) est au dessus de (Δ).
- sur $x = \alpha$, (C) et (Δ) sont confondues.

5°) Etudie le sens de variation de f .

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$ on trouve

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ car $x^3 > 0$,

$\forall x \in]0; +\infty[$.

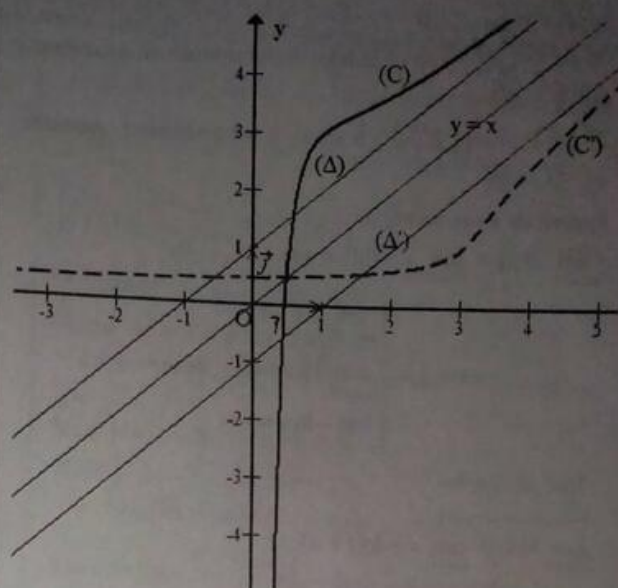
Or $\forall x \in]0; +\infty[$, $g(x) > 0$ (Partie A) donc $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

6°) Dédudons de la question 5°) l'existence d'une valeur unique β telle que : $f(\beta) = 0$.

f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $f(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$; $0 \in]-\infty; +\infty[$ donc il existe une valeur unique β dans $]0; +\infty[$ telle que : $f(\beta) = 0$.

7°) Construisons (C) et (Δ) dans un repère orthonormé

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$



8°) Démontre que f admet une bijection réciproque f^{-1} puis construis la courbe (C') de f^{-1} dans le repère que (C).

f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$ donc f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ par conséquent elle admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.

Sa courbe (C') est symétrique par rapport à la droite d'équation : $y = x$ voir courbe en pointillée.

ACTIVITE 15 :

Partie A :

1°) Etudions les variations de h .

$$h(x) = x - \ln(1+x)$$

Soit D_h l'ensemble de définition de h

$$D_h = \left\{ x \in]-1; +\infty[/ 1+x > 0 \right\}$$

$$1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$\Leftrightarrow x \in]-1; +\infty[$$

$$\forall x \in]-1; +\infty[, 1+x > 0 \text{ donc } D_h =]-1; +\infty[$$

La fonction polynôme $u_1 : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]-1; +\infty[$ et la fonction polynôme

$u_2 : x \mapsto x+1$ est dérivable et strictement positive sur $]-1; +\infty[$ or $h = u_1 - \ln u_2$ sur $]-1; +\infty[$ donc h est dérivable sur $]-1; +\infty[$.

$$\forall x \in]-1; +\infty[, h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \text{ on a donc } h'(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\forall x \in]-1; 0[$, $h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $]-1; 0[$.

$\forall x \in]0; +\infty[$, $h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Limites de h aux bornes de D_h

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - \ln(1+x)$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} 1+x = 0^+ \text{ donc} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} -\ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(1+x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1+x}{x} \times \frac{\ln(1+x)}{1+x} \right) = +\infty$$

$$\text{car : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} h = +\infty$$

Tableau de variation de h

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$h(0)$	$+\infty$

$$h(0) = 0$$

2°) Démontrons que $\forall x \in]-1; +\infty[$, $h(x) \geq 0$ h admet sur $]-1; +\infty[$ un minimum en 0 qui est $h(0)$ or $h(0) = 0$ d'où $\forall x \in]-1; +\infty[- \{0\}$, $h(x) > 0$ et $\forall x \in \{0\}$,

$h(x) = 0$. Par conséquent $\forall x \in]-1; +\infty[$, $h(x) \geq 0$.

Partie B.

$$\forall x \in]-\infty; -1], g(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x}$$

$$\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[, g(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln(1+x)$$

3°) Démontrons que g admet en 0 un prolongement par continuité p .

Soit D_g le domaine de définition de g

$$D_g = \mathbb{R}^*$$

On a : $0 \notin D_g$ (a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln(1+x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{x} \right) \ln(1+x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = (x+1) \times \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \end{cases}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ et $1 \in \mathbb{R}$ (b)

Alors de (a) et (b) g admet un prolongement p par continuité en 0 et on a :

$$\begin{cases} p(x) = g(x), \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ p(0) = 1 \end{cases}$$

4°) a- Etudions la continuité de g en -1 .

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x} = g(-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln(1+x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} \times (1+x) \ln(1+x) = 0 \text{ car :}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1} (1+x) = 0^+ \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = g(-1) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \end{cases}$$

d'où g est continue en -1 .

b- Etudions la dérivabilité de g en -1 .

$$\text{Pour } x < -1 \text{ on trouve : } \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \frac{x+4}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+4}{x} = -3$$

$-3 \in \mathbb{R}$ donc g est dérivable à gauche en -1

$$\text{et } g'_g(-1) = -3$$

$$\text{Pour } x > -1 \text{ on trouve : } \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} \times \ln(1+x) = +\infty \text{ donc } g \text{ n'est pas dérivable à droite en } -1 \text{ par suite } g \text{ n'est pas dérivable en } -1$$

Interprétation géométrique :

$g'_s(-1) = -3$ donc $(\mathcal{C})$ admet à gauche au point

$M_0(-1; 0)$ une demi-tangente définie par : $\begin{cases} y = -3x \\ x \leq -1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = +\infty \text{ donc } (\mathcal{C}) \text{ admet à droite au point}$$

$M_0(-1; 0)$ une demi-tangente définie par : $\begin{cases} x = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Partie C :

$$\begin{cases} f(x) = g(x), x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

5°) a- Démontrons que $\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$$

La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles

$]-1; 0[$ et $]0; +\infty[$

$\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{1+x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \text{ or } h(x) = x - \ln(1+x) \text{ d'où}$$

$$\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[, f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$$

Déduisons-en le sens de variation de f sur $]-1; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

$\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[, h(x) > 0$ donc

$\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[, f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]-1; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

b- Calculons $f'(x)$ pour $x \in]-\infty; -1[$ et déduisons-en le signe de f' sur $]-\infty; -1[$

f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et $\forall x \in]-\infty; -1[$,

$$f'(x) = \frac{x(2x+5) - x^2 - 5x - 4}{x^2} \text{ donc } \forall x \in]-\infty; -1[$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 4$

Posons $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$ or

$-2 \in]-\infty; -1[$ et $2 \notin]-\infty; -1[$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$\forall x \in]-\infty; -2[, f'(x) > 0$

$\forall x \in]-2; -1[, f'(x) < 0$

c- Calculons limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

d- Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-2)$	0	1	$+\infty$

$$f(-2) = \frac{4 - 10 + 4}{-2} = 1$$

6°) a- Démontrons que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} \times \ln(1+x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2} \times \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ alors } (\mathcal{C}) \text{ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses en } +\infty.$$

b- Démontrons que la droite $(D): y = x + 5$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+5)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{x} - (x+5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+5)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ d'où la droite } (D)$$

d'équation $y = x + 5$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

7°) a- Précisons les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe (OI)

Posons $f(x) = 0$ avec $x \in D_f$

$$\text{*Si } x \in]-\infty; -1], f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 4}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = -1$$

Or $-4 \in]-\infty; -1]$ et $-1 \in]-\infty; -1]$

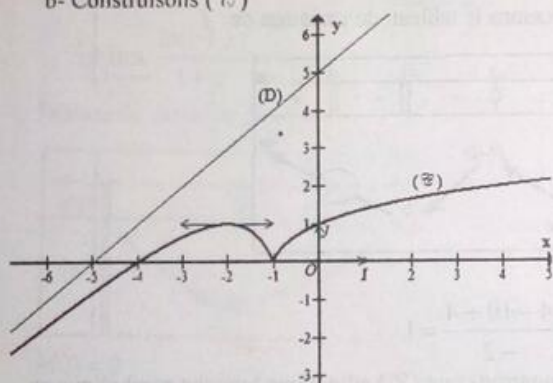
*Si $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = 0 \text{ ou } \ln(1+x) = 0$$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 0$ or $0 \notin]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ et $-1 \notin]-1; 0[\cup]0; +\infty[$. En conclusion $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses aux points $T_1(-4; 0)$ et $T_2(-1; 0)$.

b- Construisons $(\mathcal{C})$



ACTIVITE 16 :

$$f(x) = -2x + \ln \frac{x+1}{x-1}$$

1°) Déterminons l'ensemble de définition D de f .

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0 \text{ et } x+1 \neq 0 \right\} \text{ donc}$$

$$D = \mathbb{R} - \{-1; 1\}.$$

2°) Prouvons que f est impaire.

Soit $x \in D$

$$x \in D \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow -x \neq 1 \text{ et } -x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow -x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$x \in D \Leftrightarrow -x \in D$$

$$f(-x) = -2x + \ln \frac{-x+1}{-x-1}$$

$$= -2x + \ln \frac{-(x-1)}{-(x+1)}$$

$$= -2x + \ln \frac{x-1}{x+1}$$

$$f(-x) = -2x - \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$f(-x) = -\left(-2x + \ln \frac{x+1}{x-1}\right) = -f(x)$$

$\forall x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire.

3°) Etudions les variations de f

Limites aux bornes de D

On obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

Dérivée

f est dérivable en tout point de D et $\forall x \in D$,

$$f'(x) = -2 + \frac{\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x) = -2 + \left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right) \times \frac{x-1}{x+1} \text{ et on trouve } \forall x \in D,$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2}{(x-1)(x+1)}$$

Sens de variation de f

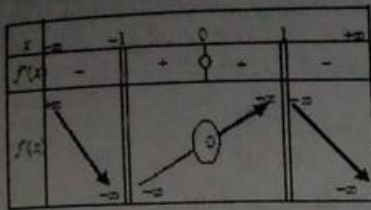
Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$-2x^2$	-	-	0	-	-
$(x-1)(x+1)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	-	+	0	+	-

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$.

$\forall x \in]-1; 0[\cup]0; 1[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-1; 1[$.

Tableau de variation de f



4°) Démontrons que la droite $(\Delta): y = -2x$ est asymptote à la courbe (C)

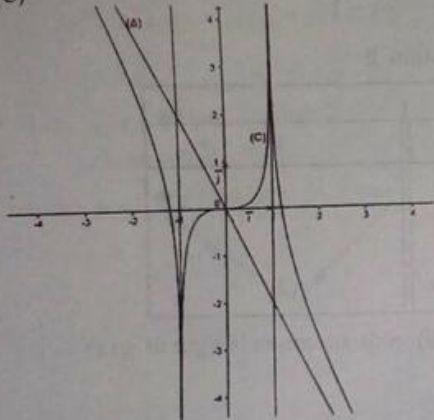
$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 0 \text{ donc la droite } (\Delta)$$

d'équation $y = -2x$ est asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$

5°) Traçons (Δ) et (C)

$\lim_{x \rightarrow -1} f = -\infty$ alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C)

$\lim_{x \rightarrow 1} f = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C)



ACTIVITE 20:

1°) Déterminons le domaine de définition D de f

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x-3 \neq 0 \right\}$$

$$D =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$$

2°) Vérifions que $\forall x \in D, f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$

f est dérivable en tout point de D et $\forall x \in D$, d'où

$$f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|, \forall x \in D$$

3°) a- Calculons $f''(x)$

f' est dérivable en tout point de D et $\forall x \in D$,

$$f''(x) = \frac{x-7}{(x-3)^2}$$

b- Deduisons-en le sens de variation de f'

$\forall x \in D, (x-3)^2 > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $x-7$ ainsi :

$\forall x \in]-\infty; 3[\cup]3; 7[, f''(x) < 0$

$\forall x \in]7; +\infty[, f''(x) > 0$

$f''(x) = 0$ si $x = 7$ alors f' strictement décroissante sur $]-\infty; 3[$ et sur $]3; 7[$ et strictement croissante sur $]7; +\infty[$

c- Calculons les limites de f' en $-\infty$ et à gauche en 3

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-3} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x-3| = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f' = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x-3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \ln|x-3| = -\infty \end{cases}$$

4°) a- Prouvons que f' s'annule sur $]-\infty; 3[$ pour une seule valeur α

f' est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 3[$ et

$$f'(-\infty; 3[) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f'; \lim_{x \rightarrow 3^-} f'[$$

$$=]-\infty; +\infty[\text{ or } 0 \in]-\infty; +\infty[\text{ donc}$$

f' s'annule sur $]-\infty; 3[$ pour une seule valeur α

b- Donnons un encadrement de α d'amplitude 0.1

On trouve :

$$f'(0,7) = 0,0938 \text{ et } f'(0,8) = -0,0297 \text{ d'où}$$

$$0,7 < \alpha < 0,8$$

5°) Etudions le signe de f' sur $]-\infty; 3[$ et $]3; +\infty[$

$f'(\alpha) = 0$ et on a : f' continue et ne s'annule pas sur chacun des intervalles $]-\infty; \alpha[$, $]\alpha; 3[$ et $]3; +\infty[$ donc

f' garde un signe constant sur ces intervalles.

* $0,7 \in]-\infty; \alpha[$ et $f'(0,7) > 0$ donc $\forall x \in]-\infty; \alpha[, f'(x) > 0$

$f'(x) > 0$

* $0,8 \in]\alpha; 3[$ et $f'(0,8) < 0$ donc $\forall x \in]\alpha; 3[, f'(x) < 0$

* $4 \in]3; +\infty[$ et $f'(4) = 5 > 0$ donc $\forall x \in]3; +\infty[, f'(x) > 0$. En résumé :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \alpha[\cup]3; +\infty[\\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; 3[\\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \end{cases}$$

6°) Dressons le tableau de variation de f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty; \lim_{x \rightarrow \alpha} f = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$$

Tableau de variation de f

On a : $v = y - 2$ donc $y = v + 2$; v est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $v' = y'$
 et $v'' = y''$ donc $y'' + 4y = 8 \Leftrightarrow v'' + 4(v + 2) = 8$
 $\Leftrightarrow v'' + 4v = 0$
 $\Leftrightarrow v$ est solution de

$$(E_2) : y'' + 4y = 0.$$

b- Résolvons (E_2)

l'équation caractéristique associée à (E_2) est $r^2 + 4 = 0$

$r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = -2i$ ou $r = 2i$ donc les solutions de

(E_2) sont les fonction définies sur $\mathbb{R}$ par :

$t \mapsto \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t$ avec $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Déduisons l'expression de y en fonction de t .

v est une solution de (E_2) donc $\forall t \in \mathbb{R}$,

$v(t) = \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t$ donc

$y(t) = \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t + 2$ avec $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} y(0) = 2 - \sqrt{2} \\ y'(0) = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2 = 2 - \sqrt{2} \\ 2\beta = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\sqrt{2} \\ \beta = \sqrt{2} \end{cases}$$

D'où $y(t) = \sqrt{2}(\sin 2t - \cos 2t) + 2$ avec $t \in \mathbb{R}$.

c- Démontrons que : $y - 2 = r \sin \theta$

on a : $y - 2 = \sqrt{2}(\sin 2t - \cos 2t)$

$$= 2 \left(\sin 2t \cos \frac{\pi}{4} - \cos 2t \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 2 \sin \left(2t - \frac{\pi}{4} \right) \text{ d'où } y - 2 = 2 \sin \left(2t - \frac{\pi}{4} \right)$$

avec $r = 2$ et $\theta = 2t - \frac{\pi}{4}$ valeurs trouvée en 3°)

ACTIVITE 19 :

1°) Démontrons l'équivalence :

On a : f est dérivable, strictement positive sur $[0; +\infty[$ et

$$g = \ln(f) \text{ alors sur } [0; +\infty[, g' = \frac{f'}{f}$$

$$g' = \frac{f'}{f} \Leftrightarrow f' = g'f.$$

$$f \text{ vérifie } (E) \Leftrightarrow f' = -\frac{1}{20} f(3 - \ln f)$$

$$\Leftrightarrow g'f = -\frac{1}{20} f(3 - g)$$

$$\Leftrightarrow g' = -\frac{1}{20} (3 - g) \text{ car } f \neq 0$$

$$\Leftrightarrow g' = \frac{1}{20} g - \frac{3}{20}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [0; +\infty[, g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}.$$

2°) a- Déterminons une fonction constante h_0 solution de

$$\text{l'équation différentielle } (H) : y' = \frac{1}{20} y - \frac{3}{20}.$$

Soit $h_0(t) = a$; $a \in \mathbb{R}$ cette fonction constante

h_0 est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on a :

$$\forall t \in [0; +\infty[, h_0'(t) = \frac{1}{20} h_0(t) - \frac{3}{20}$$

$$h_0'(t) = \frac{1}{20} h_0(t) - \frac{3}{20} \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{20} a - \frac{3}{20}$$

$$\Leftrightarrow a = 3$$

Donc $\forall t \in [0; +\infty[, h_0(t) = 3$

b- Vérifions que si deux fonctions h_1 et h_2 sont solutions de l'équation différentielle (H) alors la fonction $h_1 - h_2$ est

solution de l'équation différentielle $(H') : y' = \frac{1}{20} y$.

h_1 et h_2 sont solutions de l'équation différentielle (H)

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1' = \frac{1}{20} h_1 - \frac{3}{20} \\ h_2' = \frac{1}{20} h_2 - \frac{3}{20} \end{cases}$$

$$\Rightarrow h_1' - h_2' = \frac{1}{20} h_1 - \frac{1}{20} h_2 - \frac{3}{20} + \frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow (h_1 - h_2)' = \frac{1}{20} (h_1 - h_2)$$

$$\Rightarrow h_1 - h_2 \text{ est solution de } (H') : y' = \frac{1}{20} y.$$

Déduisons la solution générale de l'équation différentielle (H)

Résolvons d'abord (H')

$$(H') \Leftrightarrow y' - \frac{1}{20} y = 0$$

donc la solution générale de (H') est la fonction : $x \mapsto K e^{\frac{x}{20}}$

avec $K \in \mathbb{R}$.

Etant donné que si deux fonctions étant solution de (H) alors la fonction $h_1 - h_2$ est solution de (H') alors on a :

$$\forall t \in [0; +\infty[, (h_1 - h_2)(t) = K \exp\left(\frac{t}{20}\right) \text{ donc}$$

$$h_1(t) = h_2(t) + K \exp\left(\frac{t}{20}\right); h_2 \text{ est une solution de } (H) \text{ alors on}$$

peut prendre $h_2(t) = h_0(t) = 3$ donc

$$h_1(t) = 3 + K \exp\left(\frac{t}{20}\right), K \in \mathbb{R} \text{ d'où la solution générale de}$$

$$(H) \text{ est la fonction } t \mapsto 3 + K \exp\left(\frac{t}{20}\right), K \in \mathbb{R}.$$

c- Déduisons des questions précédentes et des hypothèses, l'expression de la fonction f .

Des hypothèses on a :

- $g = \ln(f)$ avec $f > 0$ alors $f = e^g$ or g est une solution de (H) donc $\forall t \in [0; +\infty[$,

$$f(t) = \exp\left[3 + K \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right], \quad K \in \mathbb{R}.$$

- $f(0) = 1$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \exp[3 + K \exp(0)] = 1$$

$$\Leftrightarrow \exp(3 + K) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 + K = 0$$

$$\Leftrightarrow K = -1 \text{ d'où } \forall t \in [0; +\infty[,$$

$$f(t) = \exp\left[3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

3°) a- Etudions la limite de la fonction h définie par :

$$h(x) = \exp\left[3 - 3 \exp\left(\frac{x}{20}\right)\right] \text{ en } +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[3 - 3 \exp\left(\frac{x}{20}\right)\right] = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{20} = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3 \exp\left(\frac{x}{20}\right) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$$

b- Déterminons le sens de variation de la fonction h sur $[0; +\infty[$.

h est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme composée de fonction dérivable et $\forall x \in [0; +\infty[$,

$$h'(x) = -\frac{3}{20} \exp\left(\frac{x}{20}\right) \exp\left[3 - 3 \exp\left(\frac{x}{20}\right)\right]$$

Sur $[0; +\infty[$, $-\frac{3}{20} < 0$, $\exp\left(\frac{x}{20}\right) > 0$ et

$$\exp\left[3 - 3 \exp\left(\frac{x}{20}\right)\right] > 0 \text{ alors } \forall x \in [0; +\infty[, h'(x) < 0 \text{ donc } h$$

est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

c- l'années à laquelle, la taille de cet échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus.

Il suffit que $f(t) < \frac{20}{1000}$.

$$f(t) < \frac{20}{1000} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in [0; +\infty[\\ \exp\left[3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] < \frac{20}{1000} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in [0; +\infty[\\ -3 \exp\left(\frac{t}{20}\right) < -3 + \ln(0,02) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in [0; +\infty[\\ \exp\left(\frac{t}{20}\right) > \frac{3 - \ln 0,02}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in [0; +\infty[\\ \exp\left(\frac{t}{20}\right) > \frac{3 - \ln(0,02)}{3} \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

est dérivable en tout point de D_f et $\forall x \in D_f$,

$$f'(x) = \ln|x-1| + \frac{x}{x-1}$$

$f'(x) = g(x)$ le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. D'après 1°) b- on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

Alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $]1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; 1[$

Limite aux bornes de D_f

$$\text{On trouve : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ,$$

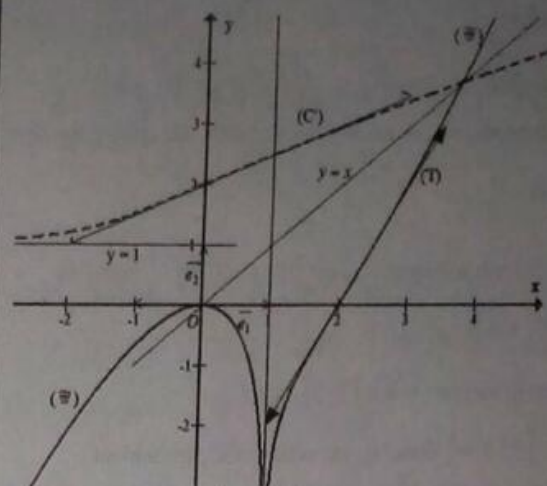
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

Tableau de variation de f

$$f(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	+	○	-	+

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$



3°) a- Justifions que h est bijective.

f est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $f(]1; +\infty[) = \mathbb{R}$ d'où h est bijective.

b- Calculons $h(1+e)$ puis déduisons-en $(h^{-1})'(1+e)$
 $h(1+e) = f(1+e) = 1+e$ donc $h(1+e) = 1+e$

$$h(1+e) = 1+e \Leftrightarrow h^{-1}(1+e) = 1+e \text{ donc}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

- est dérivable en tout point de D_f et $\forall x \in D_f$,

$$f'(x) = \ln|x-1| + \frac{x}{x-1}$$

$f'(x) = g(x)$ le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. D'après 1°) on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

- Alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $]1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; 1[$

- Limite aux bornes de D_f

$$\text{On trouve : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

Tableau de variation de f

$$f(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

b- Etudions les branches infinies de (C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty, \text{ calculons } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x-1| = +\infty \text{ donc la courbe (C) admet}$$

une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de } +\infty.$$

c- Démontrons que (C) admet un point d'inflexion.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f''(x) = g'(x)$$

$$g'(2) = 0 \text{ et } \forall x \in]-\infty; 1[\cup]1; 2[, g'(x) < 0 \text{ et}$$

$\forall x \in]2; +\infty[, g'(x) > 0$ alors la dérivée seconde f'' de f s'annule en 2 en changeant de signe par suite le point A (2; f(2)) soit A (2; 0) est un point d'inflexion de (C).

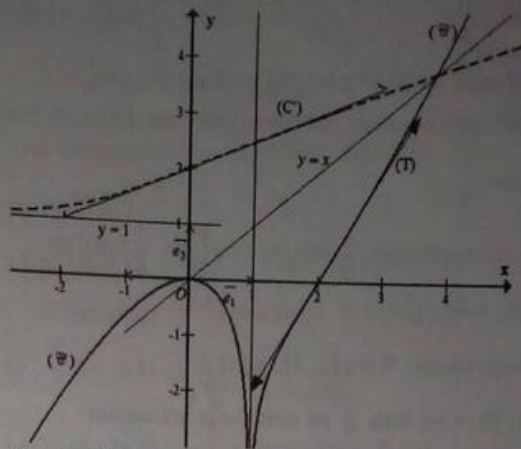
d- Donnons une équation de la tangente (T) à (C) en A.

$$(T) : y = f'(2)(x-2) + f(2) \text{ soit}$$

$$(T) : y = 2(x-2).$$

c- Traçons (T) et (C)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x=1$ est asymptote à (C)



3°) a- Justifions que h est bijective.

f est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $f(]1; +\infty[) = \mathbb{R}$ d'où h est bijective.

b- Calculons $h(1+e)$ puis déduisons-en $(h^{-1})'(1+e)$

$$h(1+e) = f(1+e) = 1+e \text{ donc } h(1+e) = 1+e$$

$$h(1+e) = 1+e \Leftrightarrow h^{-1}(1+e) = 1+e \text{ donc}$$

$$(h^{-1})'(1+e) = \frac{1}{h'(h^{-1}(1+e))} \text{ on trouve } h^{-1}(1+e) = \frac{e}{1+2e}$$

c- Traçons (C')

voir courbe en pointillé.

ACTIVITE 25 :

I-

1°) a- Etudions les sens variations de g

$$g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

* Soit D_g le domaine de définition de g

$$D_g =]0; +\infty[$$

* g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, \text{ on trouve : } g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, -4 < 0 \text{ et } x(x+2)^2 > 0 \text{ donc } g'(x) < 0, \forall x \in]0; +\infty[$$

Alors g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

b- Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} \text{ et on obtient}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{4}$$

c- Dédudons-en le signe de $g(x)$, $\forall x \in]0; +\infty[$
 g étant continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{4}$$

Alors g est minorée par $\frac{1}{4}$ sur $]0; +\infty[$. Or $\frac{1}{4} > 0$ d'où

$$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$$

2°) Démontrons que $\forall x \in [2; 3], g(x) < \frac{1}{2}$

$[2; 3] \subset]0; +\infty[$ donc g est continue et strictement décroissante sur $[2; 3]$.

$$\forall x \in [2; 3], 2 \leq x \leq 3 \Rightarrow g(3) \leq g(x) \leq g(2)$$

$$g(3) = 0,3608$$

$$g(2) = 0,4431 < \frac{1}{2} \text{ d'où } \forall x \in [2; 3], g(x) < \frac{1}{2}$$

3°) a- Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

$$\text{Pour } x = \frac{1}{t}, x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\frac{1}{t}+2}{\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+2t}{1}\right) = \frac{1}{t} \ln(2t+1)$$

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{x}. \text{ Si } x \rightarrow 0^+, t \rightarrow +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(2t+1)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t+1}{t} \times \frac{\ln(2t+1)}{2t+1} = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0$$

b- Démontrons que f est continue en 0.

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, \text{ si } x > 0$$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$D_f = [0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0$$

on a ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

f est continue en 0

(f est définie uniquement à droite en 0)

4°) *Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = +\infty \text{ par suite}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \text{ d'où } f \text{ n'est pas dérivable en 0.}$$

*Interprétation géométrique

La courbe (C) de f admet à droite au point d'abscisse 0 une

$$\text{demi tangente définie par le système : } \begin{cases} x = 0 \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

5°) Etudions le sens de variation de f

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x-x-2}{x} \times x + \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = g(x) \text{ or } \forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0 \text{ donc}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

6°) a- Démontrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \times \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$$

Posons $h = \frac{2}{x}$, $x \rightarrow +\infty$, $h \rightarrow 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \times \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \times \frac{\ln(1+h)}{h} = 2 \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$$

b- Dédisons-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) = +\infty \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

c- Démontrons que la droite $(\Delta): y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à (C) en $+\infty$

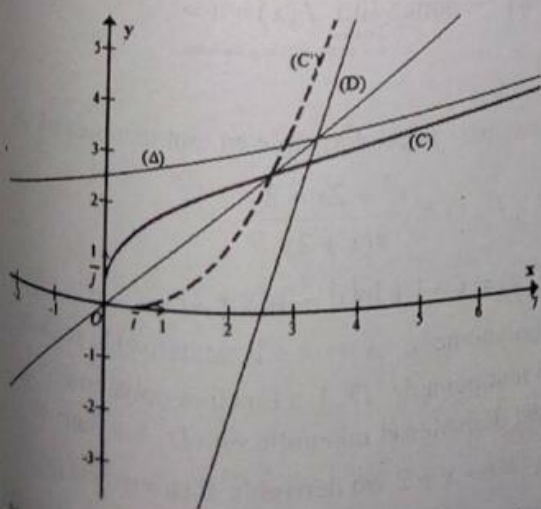
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - 2 = 0 \text{ d'où la}$$

droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$

9° Traçons dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la droite (Δ) , (C) et (D) $y = x$

Dessons le tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$



10° a- Démontrons f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur K

f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur K

$$f([0; +\infty[) = \left[\frac{1}{2}; +\infty[$$

b- Traçons (C') courbe de f^{-1}
(Voir courbe en pointillé)

c- Démontrons que $A(1 + \ln 4; 2) \in (C')$

$$f(2) = 2 \ln 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \ln 4 + 1 \text{ d'où } A(1 + \ln 4; 2) \in (C')$$

d- Calculons $(f^{-1})'(1 + \ln 4)$

$$(f^{-1})'(1 + \ln 4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1 + \ln 4))}$$

$$(f^{-1})'(1 + \ln 4) = \frac{1}{f'(2)} \text{ et on trouve}$$

$$(f^{-1})'(1 + \ln 4) = \frac{4}{-1 + 4 \ln 2}$$

II-

9° a- Démontrons que $\forall x \in [2; 3], h'(x) < 0$

$$\forall x \in [2; 3], h(x) = f(x) - x$$

h est dérivable sur $[2; 3]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[2; 3]$.

$$\forall x \in [2; 3], h'(x) = g(x) - 1$$

$$\text{Or } \forall x \in [2; 3], g(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) - 1 < -\frac{1}{2} \text{ par suite}$$

$$\forall x \in [2; 3], h'(x) < 0$$

b- Dédisons-en le sens de variation de h

D'après 9° a- h est strictement décroissante sur $[2; 3]$.

c- Démontrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans I

h est continue et strictement décroissante sur $[2; 3]$ et

$$h([2; 3]) = [h(3); h(2)]$$

$$h(2) = 0,3863 > 0 \text{ et } h(3) = -0,2175 < 0. \text{ Donc}$$

$0 \in h([2; 3])$ par suite l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[2; 3]$

10° a- Démontrons que $\forall x \in [2; 3], 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$

$$\forall x \in [2; 3], f'(x) = g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2} \text{ donc } f' \text{ est}$$

continue et strictement décroissante sur $[2; 3]$ donc :

$$x \in [2; 3] \Leftrightarrow f'(3) \leq f'(x) \leq f'(2)$$

$$f'(3) = 0,3608 \text{ et } f'(2) = 0,4431$$

dors $x \in [2; 3]$, $\Leftrightarrow 0 < f'(3) \leq f'(x) \leq f'(2) < \frac{1}{2}$ d'où

$$\forall x \in [2; 3], 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$$

b- Dédisons-en que $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

f est dérivable sur $[2; 3]$ et $\forall x \in [2; 3]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

$\alpha \in [2; 3]$ donc d'après la conséquence de l'inégalité des accroissements finis appliqué à f sur $[2; 3]$ on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|; f(\alpha) = \alpha$$

(d'après 9°) c-) d'où $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$$11^\circ) \text{ Démontrons que } (f^{-1})'(\alpha) = \frac{2\alpha(\alpha+2)}{2\alpha^2 - \alpha - 2}$$

$$(f^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\alpha))}$$

$$= \frac{1}{f'(\alpha)}$$

$$f'(\alpha) = \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \frac{2}{\alpha+2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{or } f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) = \frac{3\alpha-2}{4\alpha} \text{ donc}$$

$$f'(\alpha) = \frac{3\alpha-2}{4\alpha} - \frac{2}{\alpha+2} + \frac{1}{4}$$

$$f'(\alpha) = \frac{(3\alpha-2)(\alpha+2) - 8\alpha + \alpha(\alpha+2)}{4\alpha(\alpha+2)}$$

$$f'(\alpha) = \frac{4\alpha^2 - 2\alpha - 4}{4\alpha(\alpha+2)} = \frac{2\alpha^2 - \alpha - 2}{2\alpha(\alpha+2)} \text{ d'où}$$

$$(f^{-1})'(\alpha) = \frac{2\alpha(\alpha+2)}{2\alpha^2 - \alpha - 2}$$

ACTIVITE 26 :

$$f(x) = x + 1 + \ln\left(\frac{|x|}{x+2}\right)$$

1°) A- Justifions que l'ensemble de définition de f est

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0 \text{ et } \frac{|x|}{x+2} > 0 \right\}$$

$$x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\frac{|x|}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x+2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x > -2$$

$$\Leftrightarrow x \in]-2; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{-2\} \cap]-2; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$=]-2; 0[\cup]0; +\infty[\text{ d'où } D =]-2; 0[\cup]0; +\infty[$$

b- Calculons les limites de f aux bornes de D

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f = \lim_{x \rightarrow -2^+} x + 1 + \ln\left(\frac{|x|}{x+2}\right) = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2} x + 1 = -1 \\ > \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x|}{x+2} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \\ > \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 + \ln\left(\frac{|x|}{x+2}\right) = -\infty \text{ car :}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1 \\ > \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x+2} = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \\ > \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \ln\left(\frac{|x|}{x+2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \\ > \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ > \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

2°) a- Justifions que f est dérivable en tout nombre réel x

$$\text{de } D \text{ et on a : } f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x(x+2)}$$

$$\forall x \in D, f(x) = x + 1 + \ln|x| - \ln(x+2)$$

La fonction polynôme $t_1 : x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en tout point de D .

La fonction polynôme $t_2 : x \mapsto x$ est dérivable et non nulle sur D .

La fonction polynôme $t_3 : x \mapsto x + 2$ est dérivable et strictement positive

sur D or $f = t_1 + \ln|t_2| + \ln t_3$ sur D donc f est dérivable en tout nombre réel x de D .

$$\forall x \in D, f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x+2) + x + 2 - x}{x(x+2)} \text{ d'où } \forall x \in D,$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x(x+2)}$$

b- Dédudions-en le sens de variation de f

$\forall x \in D$, posons $x^2 + 2x + 2 = 0$ le discriminant de cette équation est : $\Delta = -4 < 0$ donc $\forall x \in D, x^2 + 2x + 2 > 0$ et le signe de f' est celui de $x(x+2)$

donc $\forall x \in]-2; 0[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement décroissante sur $]-2; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

c- Dressons le tableau de variation de f .

x	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

d- Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est -1 et l'autre α et $0,5 < \alpha < 0,6$

* f est continue et strictement décroissante sur $]-2; 0[$ et $f(]-2; 0[) = \mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-2; 0[$. De plus $-1 \in]-2; 0[$ et $f(-1) = 0$

* f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$

* $]0,5; 0,6[\subset]0; +\infty[$ et $\begin{cases} f(0,5) = -0,1094 < 0 \\ f(0,6) = 0,1337 > 0 \end{cases}$ donc

$$0,5 < \alpha < 0,6$$

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est -1 et l'autre α vérifiant $0,5 < \alpha < 0,6$.

e- Déterminons une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en -1 .

$$(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \text{ et on trouve}$$

$$(T): y = -x - 1$$

3°) a- Etudions le sens de variation de g

Soit D_g le domaine de définition de g

$$D_g =]-2; 0[$$

g est dérivable sur $]-2; 0[$ et $\forall x \in]-2; 0[$, on trouve :

$$g'(x) = \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$\forall x \in]-2; 0[- \{-1\}$, $x(x+2) < 0$ et $2(x+1)^2 > 0$ donc

$\forall x \in]-2; 0[- \{-1\}$, $g'(x) < 0$ alors g est strictement décroissante sur $]-2; 0[$

b- Calculons $g(-1)$ et déduisons-en le sens de variation de g

$$* g(-1) = 0$$

* La fonction g étant continue et strictement décroissante sur $]-2; 0[$ et $g(-1) = 0$,

$$\forall x \in]-2; -1[, x < -1 \Rightarrow g(x) > g(-1) \Rightarrow g(x) > 0$$

$$\forall x \in]-1; 0[, x > -1 \Rightarrow g(x) < g(-1) \Rightarrow g(x) < 0$$

Conclusion :

$$\begin{cases} \forall x \in]-2; -1[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]-1; 0[, g(x) < 0 \\ \forall x \in \{-1\}, g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in]-2; -1[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]-1; 0[, g(x) < 0 \\ \forall x \in \{-1\}, g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in]-2; -1[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]-1; 0[, g(x) < 0 \\ \forall x \in \{-1\}, g(x) = 0 \end{cases}$$

c- Précisons la position relative de la courbe (C) et de la tangente (T) sur $]-2; 0[$.

Il suffit d'étudier le signe de $f(x) - (-x-1)$ sur $]-2; 0[$.

$$\forall x \in]-2; 0[, f(x) - (x-1) = x+1 + \ln\left(\frac{-x}{x+2}\right) + x+1 = 2x+2 + \ln\left(\frac{-x}{x+2}\right) = g(x)$$

$\forall x \in]-2; -1[, f(x) - (-x-1) > 0$ donc (C) est au dessus de (T) sur $]-2; -1[$

$\forall x \in]-1; 0[, f(x) - (-x-1) < 0$ donc (C) est en dessous de (T) sur $]-1; 0[$

Pour $x = -1$, $f(x) - (-x-1) = 0$ donc (C) et (T) se coupent.

4°) a- Etudions les branches in finies de (C)

- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à (C).

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = 1 \text{ donc la droite}$$

équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

b- Etudions la position relative de (C) et la droite $(\Delta): y = x + 1$ sur $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) - (x+1) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

Posons $f(x) - (x+1) = 0$ avec $x \in]0; +\infty[$

$$f(x) - (x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = x + 2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2 \text{ (absurde)}$$

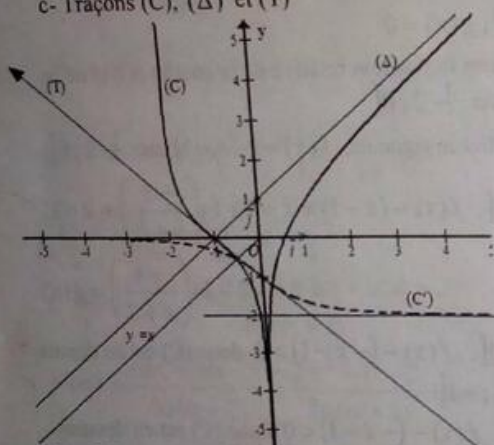
Donc $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) - (x+1) \neq 0$

Posons $t(x) = f(x) - (x+1)$

t est continue et non nulle sur $]0; +\infty[$, donc elle garde un signe constant sur $]0; +\infty[$ or $1 \in]0; +\infty[$ et

$t(1) = -\ln 3 < 0$ donc $\forall x \in]0; +\infty[, t(x) < 0$ alors (C) est en dessous de (Δ) sur $]0; +\infty[$.

c- Traçons (C), (Δ) et (T)



5° a- Déterminons J

La fonction f étant continue et strictement décroissante sur

$$]-2; 0[\text{ alors } f(]-2; 0[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \right[$$

$$= \mathbb{R} \text{ d'où } J = \mathbb{R}$$

b- Démontrons que h est une bijection.

f est continue et strictement décroissante sur $]-2; 0[$ et $f(]-2; 0[) = J$ d'où h est bijection.

c- Démontrons que h^{-1} est dérivable sur J

f est dérivable sur $]-2; 0[$ et $\forall x \in]-2; 0[, f'(x) \neq 0$ donc h^{-1} est dérivable sur $f(]-2; 0[) = J$ d'où h^{-1} est dérivable sur J

d- Dressons le tableau de variation de h^{-1}

h étant continue et strictement décroissante sur $]-2; 0[$,

alors h^{-1} est continue et strictement décroissante sur $f(]-2; 0[) = J$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h^{-1}(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} h^{-1}(x) = 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$h^{-1}(x)$	0	-2

Déduisons-en que (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h^{-1}(x) = -2$ alors la droite d'équation $y = -2$ est asymptote à (C') en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h^{-1}(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C') en $-\infty$

Traçons (C')

Voir figure (Courbe en pointillé)

ACTIVITE 27 :

Partie A :

$$g(x) = -x + 1 + x \ln x$$

1°) Etudions les variations de g

Soit D_g le domaine de définition de g

$$D_g =]0; +\infty[$$

*Dérivée

g est dérivable sur $]0; +\infty[$, comme somme de fonctions de $]0; +\infty[$ dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[,$ on trouve $g'(x) = \ln x$

*Sens de variation

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$\forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0; 1]$

$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

*Limite aux bornes de $]0; +\infty[$

$$\text{On obtient : } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

*Tableau de variation de g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	1	$g(1)$	$+\infty$

$$g(1) = 0$$

2°) Dédudons-en le signe de g

$g'(1) = 0$; $\forall x \in]0; 1[$, $g'(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $g'(x) > 0$ donc g admet sur $]0; +\infty[$ un minimum en qui est $g(1)$. Or $g(1) = 0$ donc $]0; +\infty[- \{1\}$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in \{1\}$, $g(x) = 0$

Partie B :

3°) Déterminons l'ensemble de définition de f

Soit E l'ensemble de définition de f

$$E = \left\{ x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[/ x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0 \right\} \cup \{0; 1\}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$$

$$\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[- \{1\}$$

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0 \text{ donc}$$

$$E =]0; 1[\cup]1; +\infty[\cup \{0; 1\} \text{ donc } \underline{E = [0; +\infty[}$$

4°) Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 0.

Continuité de f en 0

$$0 \in E$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\ln x}$$

$$= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x-1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue à droite en 0}$$

Dérivabilité de f en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x-1}{\ln x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x \ln x} = +\infty \text{ car} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x-1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^- \end{cases} \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable à droite en 0}$$

$$5^\circ) \text{ Démontrons que : } \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{X - \ln(X+1)}{X \ln(X+1)}$$

$$X = x-1$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \frac{\frac{x-1}{\ln x} - 1}{x-1} \\ &= \frac{x-1 - \ln x}{(x-1) \ln x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X = x-1 &\Rightarrow x = X+1 \text{ d'où} \\ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \frac{X - \ln(X+1)}{X \ln(X+1)} \end{aligned}$$

b- Déterminons le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de la fonction $X \mapsto \ln(X+1)$

Soit $W : X \mapsto \ln(X+1)$

W est définie et trois fois dérivable sur $] -1; +\infty[$ et $0 \in] -1; +\infty[$ alors il existe un intervalle I contenant 0 et une fonction ϵ définie sur I tels que :

$$W(X) = W(0) + \frac{W'(0)}{1!} X + \frac{W''(0)}{2!} X^2 + \frac{W'''(0)}{3!} X^3 + X^3 \epsilon(X)$$

$$\text{Avec } \lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$$

$$\forall X \in]0; +\infty[, W'(X) = \frac{1}{X+1}, W''(X) = \frac{-1}{(X+1)^2},$$

$$W'''(X) = \frac{2}{(X+1)^3}; W(0) = 0, W'(0) = 1, W''(0) = -1,$$

$$W'''(0) = 2 \text{ d'où } W(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + X^3 \epsilon(X) \text{ avec}$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$$

c- Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 1.

Continuité de f en 1.

$$1 \in E$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\ln x}{x-1}} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1; f(1) = 1 \text{ on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ d'où } f \text{ est continue en 1.}$$

Dérivabilité de f en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X - \ln(X+1)}{X \ln(X+1)}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X - \left(X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + X^3 \epsilon(X) \right)}{X \left(X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + X^3 \epsilon(X) \right)} \end{aligned}$$

on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} - \frac{X}{3} - X \epsilon(X)}{1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{3} + X^2 \epsilon(X)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{2} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} - \frac{x}{3} - x\epsilon(x) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\epsilon(x) = 1 \end{cases}$$

or $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable en 1

6°) a- Démontrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$,

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

f est dérivable en tout point de l'intervalle $]0; 1[\cup]1; +\infty[$

et $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x \ln x - x + 1}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x \ln x - x + 1}{x(\ln x)^2} \text{ or } g(x) = -x + 1 + x \ln x \text{ d'où}$$

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$$

b- Etudions les variations de f .

- $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, x(\ln x)^2 > 0$ donc le signe de

$f'(x)$ est celui de $g(x)$

$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, g(x) > 0$ donc

$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0$ d'où f est strictement

croissante sur $]0; +\infty[$

- Limites aux bornes de E

$$\lim_{0^+} f = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$$

- Tableau de variation de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	0		$+\infty$

7°) a- Etudions les branches infinies à (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty, \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

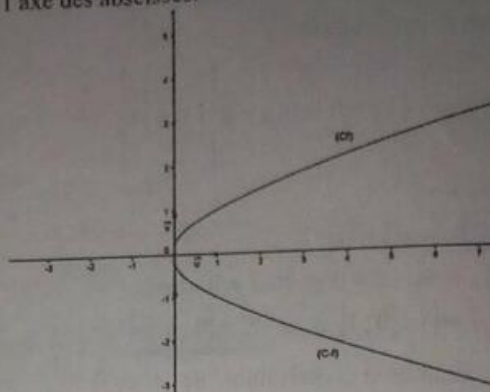
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x \ln x} = 0 \text{ donc la courbe } (C_f)$$

admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

b- traçons la courbe de f et celle de $-f$

La courbe de $-f$ est symétrique à celle de f par rapport à l'axe des abscisses.



ACTIVITE 28 :

1°) a- Déterminons l'ensemble de définition D de f

$$\begin{cases} f(x) = (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right), \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

$$D = \left\{ x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[/ x-2 \neq 0 \text{ et } \frac{x-1}{x-2} > 0 \right\} \cup \{2\}$$

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ et } x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$\frac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$$

Donc $D =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[\cup \{2\}$ d'où

$$D =]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[$$

b- Calculons les limites de f aux bornes de D .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x-2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x-2}\right)}{\frac{1}{x-2}} \end{aligned}$$

En posant $X = \frac{1}{x-2}$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x-2}\right)}{\frac{1}{x-2}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) = -\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Même démarche et on trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = -\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-2} = 0 \text{ avec } \frac{x-1}{x-2} > 0 \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

Posons $X = \frac{1}{x-2}$ et on a : $x-2 = \frac{1}{X}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(1+X) \cdot X^2 \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1+X}{X^2} \ln(1+X) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \end{aligned}$$

c- Justifions que f est continue sur chaque intervalles de

D

- La fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ est continue sur $] -\infty; 1[$ et sur

$] 2; +\infty[$ comme fonction rationnelle. De plus $\forall x \in D$,

$\frac{x-1}{x-2} > 0$ donc la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ est continue sur

chacun des intervalles $] -\infty; 1[$ et $] 2; +\infty[$

- La fonction $x \mapsto (x-2)^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $] -\infty; 1[$ et sur $] 2; +\infty[$ donc la fonction

$x \mapsto (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ est continue sur $] -\infty; 1[$ et sur

$] 2; +\infty[$

- On a : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$

De tout ce qui précède f est continue sur $] -\infty; 1[$ et sur

$] 2; +\infty[$

d- Etudions la dérivabilité de f à droite en 2

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} [(x-2) \ln(x-1) - (x-2) \ln(x-2)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 0 \text{ et } 0 \in \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ est dérivable à droite}$$

en 0 et le nombre dérivé à droite en 0 est $f'_d(0) = 0$

Interprétons graphiquement le résultat :

La courbe de f admet au point de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ une

demi-tangente à droite en 2 définie par : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y = 0 \end{cases}$

2°) a- Etudions les variations de g

$$g(x) = 2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \frac{1}{x-1}$$

$$* D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} / x-2 \neq 0 \text{ et } \frac{x-1}{x-2} > 0 \right\}$$

$$D_g =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$$

* g est dérivable sur $] -\infty; 1[$ et sur $] 2; +\infty[$ et $\forall x \in D_g$

$$g'(x) = \frac{-x}{(x-2)(x-1)^2}$$

* Le signe de $g'(x)$ est celui de $\frac{-x}{x-2}$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$-x$	+	0	-	-	-
$x-2$	-	-	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	-	-

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[; g'(x) < 0$$

$$\forall x \in]0; 1[; g'(x) > 0$$

$$g'(0) = 0$$

Il en résulte que g est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$

et sur $] 2; +\infty[$ et strictement croissante sur $] 0; 1[$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} g = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} g = 0; \lim_{x \rightarrow 1^-} g = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} g = +\infty$$

* Tableau de variation de g

x	-∞	0	1	2	+
$f'(x)$	-	0	-	+	-
$g(x)$	↘	$1 - \ln 4$	↗	↘	↘

b-Démontrons que l'équation $g(x) = 0$

* g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et $g(]-\infty; 0]) = [1 - \ln 4; 0[$ or $0 \notin [1 - \ln 4; 0[$ d'où l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]-\infty; 0]$.

* g est continue et strictement croissante sur $[0; 1[$ et $g([0; 1]) = [1 - \ln 4; +\infty[$ or $0 \in [1 - \ln 4; +\infty[$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1[$

* g est continue et strictement décroissante sur $]2; +\infty[$ et $g(]2; +\infty[) =]0; +\infty[$
Or $0 \notin]0; +\infty[$ d'où l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]2; +\infty[$

De plus $0,6 \in]0; 1[$ et $0,61 \in]0; 1[$ et

$$\begin{cases} g(0,6) = -0,0055 < 0 \\ g(0,61) = 0,022 > 0 \end{cases} \text{ donc } 0,6 < \alpha < 0,61$$

De tout ce qui précède, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0,6 < \alpha < 0,61$

c- Déduisons-en le signe de $g(x)$

Des 2°) a- et b on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; 1[\cup]2; +\infty[, g(x) > 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

3°) a- Justifions que f est dérivable sur chaque intervalle de D et $\forall x \in D - \{2\}$, $f'(x) = (x-2)g(x)$

f est dérivable à droite en 2 et de plus la fonction

$x \mapsto (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et sur

$]2; +\infty[$ d'où f est dérivable sur chaque intervalle de D
 $\forall x \in D - \{2\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-2) \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + (x-2)^2 \left[\frac{-1}{(x-2)(x-1)} \right] \\ &= 2(x-2) \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \frac{x-2}{x-1} \\ &= (x-2) \left[2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \frac{1}{x-2} \right] \text{ d'où } \forall x \in D - \{2\}, \end{aligned}$$

$$f'(x) = (x-2)g(x)$$

b- Etudions le sens de variation de f et dressons son tableau de variation

Signe de $f'(x)$

x	-∞	0	1	2	+
$g(x)$	-	0	-	+	-
$x-2$	-	-	-	+	+
$f'(x)$	+	0	-	+	-

$$\begin{cases} f'(\alpha) = 0 \\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \alpha[\cup]2; +\infty[\\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; 1[\end{cases}$$

On déduit de l'étude de signe de $f'(x)$ que f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha[$ et sur $]2; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]\alpha; 1[$

Tableau de variation de f

x	-∞	0	1	2	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(2)$	↗

c- Démontrons que $f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{2(\alpha-1)}$

$$f(\alpha) = (\alpha-2)^2 \ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)$$

$$\text{or } g(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right) = \frac{1}{2(\alpha-1)} \text{ donc}$$

$$f(\alpha) = (\alpha-2)^2 \times \frac{1}{2(\alpha-1)} = \frac{(\alpha-2)^2}{2(\alpha-1)}$$

Encadrons $f(\alpha)$ par deux nombres décimaux d'ordre 2 :

$$0,6 < \alpha < 0,61 \Rightarrow 1,9321 < (\alpha-2)^2 < 1,96$$

$$0,6 < \alpha < 0,61 \Rightarrow -1,2821 < \frac{1}{2(\alpha-1)} < -1,25 \text{ donc}$$

$$-2,47 < f(\alpha) < -2,45$$

4°) a- Donnons le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $h \mapsto \ln(1+h)$

$$\forall h \in]-1; 1[, \ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + h^3 \epsilon(h) \text{ avec}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

b- Démontrons que la droite $(D): y = x - \frac{5}{2}$ est

asymptote à (C) .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \left(x - \frac{5}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - x + \frac{5}{2}$$

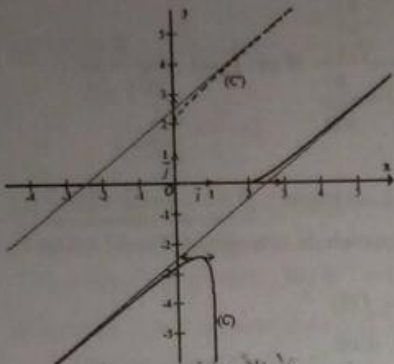
En posant $h = \frac{1}{x-2}$ on a : $x \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[f(x) - \left(x - \frac{5}{2} \right) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + h^3 u(h)}{h^2} - \frac{1}{h} + \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3}h + hu(h) = 0 \text{ alors la droite}$$

(D): $y = x - \frac{5}{2}$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$

c- Construisons (C)



5°) a- Justifions que k est bijective

$$k: [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto k(x) = f(x)$$

k étant la restriction de f à l'intervalle $[2; +\infty[$, donc k est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$ et

$$k([2; +\infty[) = [f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$$

$$= [0; +\infty[= \mathbb{R}_+ \text{ donc } k \text{ est une bijection}$$

b- Etudions la dérivabilité de k^{-1}

f est dérivable sur $[2; +\infty[$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ donc

k^{-1} est dérivable sur

$$E = \mathbb{R}_+ - \{f(2)\} \text{ soit sur }]0; +\infty[$$

c- Justifions que le point $A(\ln 2; 3) \in (C')$

$$f(3) = (3-2)^2 \ln \left(\frac{3-1}{3-2} \right) = \ln 2$$

d'où $A(\ln 2; 3) \in (C')$

d- Construisons (C')

Voir figure (courbe en pointillée)

ACTIVITE 31 :

Partie A :

1°) a-

$$\begin{cases} g(x) = 1 - x(\ln x)^2, \text{ si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

$$D_g = [0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x(\ln x)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \left(x^{\frac{1}{2}} \ln x \right)^2 = 1 \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$$

d'où g est continue à droite en 0.

b-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$$

Interprétation géométrique :

La courbe de g admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses en $+\infty$

2°) Etudions la dérivabilité de g en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\ln x)^2}{x} = -\infty \text{ donc } g \text{ n'est pas}$$

dérivable à droite en 0 et sa courbe admet une demi-tangente à

$$\text{droite au point d'abscisse 0 définie par : } \begin{cases} x = 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

3°) a- g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = -(\ln x)^2 - 2 \frac{\ln x}{x} \times x \text{ ce qui implique que}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = (-\ln x)(2 + \ln x)$$

b- Etudions le signe de $g'(x)$

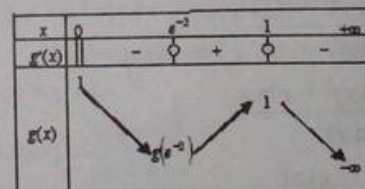
x	0	e^{-2}	1	$+\infty$
$-\ln x$	+	+	+	-
$2 + \ln x$	-	-	+	+
$g'(x)$	-	-	+	-

$$\forall x \in]0; e^{-2}[\cup]1; +\infty[, g'(x) < 0$$

$$\forall x \in]e^{-2}; 1[, g'(x) > 0$$

$$\forall x \in \{e^{-2}; 1\}, g'(x) = 0$$

Tableau de variation de g



$$g(e^{-2}) = 1 - 4e^{-2} \text{ et } g(1) = 1$$

4°) Démontrons que sur $[0; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2 < \alpha < 2,1$

* Sur $[0; 1[$, g admet un minimum en e^{-2} qui est $g(e^{-2})$ or $g(e^{-2}) > 0$ donc $g(x) \neq 0$ sur $[0; 1[$.

* g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et $g([1; +\infty[) =]-\infty; 1]$ or $0 \in]-\infty; 1]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1; +\infty[$

De plus $]2; 2,1[\subset]1; +\infty[$ et $\begin{cases} g(2) = 0,039 > 0 \\ g(2,1) = -0,156 < 0 \end{cases}$ donc

$$2 < \alpha < 2,1$$

De tout ce qui précède, sur $[0; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2 < \alpha < 2,1$

b- Dédoublons-en le signe de $g(x)$

$$\text{on a : } \begin{cases} \forall x \in [0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

c- Prouvons $\ln \alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

$$\text{on a : } 1 - \alpha(\ln \alpha)^2 = 0 \text{ avec } 2 < \alpha < 2,1$$

$$1 - \alpha(\ln \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow (\ln \alpha)^2 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Partie B :

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x \ln x}$$

5°)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Les asymptotes :

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C_f)

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

6°) a-

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+\ln x) - (1+\ln x)\ln x}{(1+x \ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+x \ln x - x(\ln x)^2 - x \ln x}{x(1+x \ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-x(\ln x)^2}{(1+x \ln x)^2} = \frac{g(x)}{(1+x \ln x)^2}$$

b- Sens de variation de f

Sur $]0; +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ donc :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0 \text{ alors } f \text{ est strictement} \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

croissante sur $]0; \alpha[$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0	α	$+\infty$
f'(x)		0	
f(x)	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

c- Vérifions que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1 + \alpha \ln \alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}} \text{ d'où } f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$$

Encadrons $f(\alpha)$

A partir de $2 < \alpha < 2,1$, on trouve : $0,41 < f(\alpha) < 0,42$

7°) Déterminons une équation de la tangente (T) en I à (C_f)

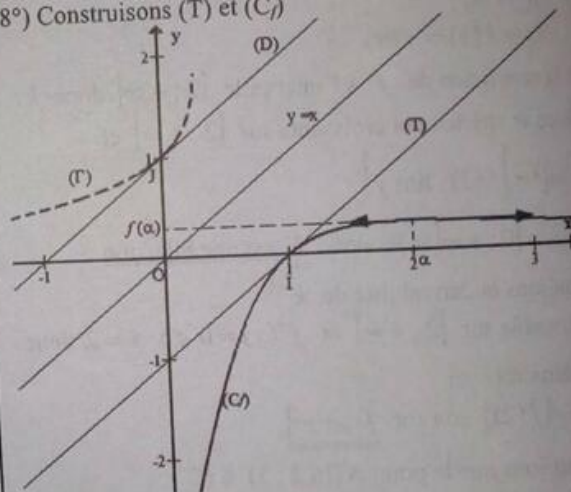
I(1; 0)

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$f'(1) = 1 \text{ et } f(1) = 0 \text{ d'où}$$

$$(T) : y = x - 1$$

8°) Construisons (T) et (C_f)



Partie C :

h est la restriction de f à l'intervalle $]0; \alpha]$ donc h est continue et strictement croissante sur $]0; \alpha]$ alors h est une

bijection de $]0; \alpha]$ sur $f(]0; \alpha]) =]-\infty; \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}]$ par

suite h admet une bijection réciproque h^{-1} de domaine de définition $]-\infty; \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}]$

10°) a- f est dérivable sur $]0; \alpha]$ et $\forall x \in]0; \alpha]$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ par suite } h^{-1} \text{ est dérivable sur}$$

$$f(0; \alpha) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha < 0 \\ \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}} & \text{si } 0 \leq \alpha \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$$h^{-1} \text{ n'est pas dérivable en } \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$$

b-
 $h(0; 1)$

$$(D) : y = (h^{-1})'(0)(x-0) + h^{-1}(0)$$

$$\begin{aligned} (h^{-1})'(0) &= \frac{1}{h'(h^{-1}(0))} \\ &= \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

On a : $(h^{-1})'(0) = f'(1)$ (T) et (D) ont même coefficient directeur d'où (D) // (T).

11° a- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} h^{-1} = 0$ donc la droite

d'équation $y = 0$ est asymptote à (T) en $-\infty$

b- Traçons (D) et (T)

(T) = courbe en pointillée

ACTIVITE 32

$$I/ f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$$

1°) Calculons les limites aux bornes de l'ensemble de définitions de la fonction f

Soit D_f le domaine de définition de la fonction f ,

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2°) Déterminons $f'(x)$ et son signe

La fonction $x \mapsto (x-1)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme puissance d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc le produit $x \mapsto 3(x-1)^3$

est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus la fonction $x \mapsto 3x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $3x^2+1 \neq 0$ pour tout réel ; par quotient $x \mapsto f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Calculons $f'(x)$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) &= 3 \frac{3(x-1)^2(3x^2+1) - (x-1)^3(6x)}{(3x^2+1)^2} \\ &= 3(x-1)^2 \left[\frac{3(3x^2+1) - (x-1)(6x)}{(3x^2+1)^2} \right] \\ &= 3(x-1)^2 \left[\frac{9x^2+3-6x^2+6x}{(3x^2+1)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3(x-1)^2(x+1)^2}{(3x^2+1)^2}$$

Signe de $f'(x)$

Son signe est celui de $3(x-1)^2(x+1)^2$

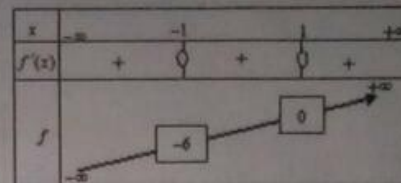
$$\text{Posons } 3(x-1)^2(x+1)^2 = 0$$

$$3(x-1)^2(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $3(x-1)^2(x+1)^2 > 0$ alors on déduit que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f'(x) > 0$ et $\forall x \in \{-1; 1\}$, $f'(x) = 0$

Tableau de variation

$$f(-1) = -6 \text{ et } f(1) = 0$$



3°) Prouvons que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule $\alpha \in \mathbb{R}$ puis déduisons que : $3 < \alpha < 3$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et

$1 \in f(\mathbb{R})$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$

Prouvons que $3 < \alpha < 3$

La restriction de f à $[3; 4]$ est une bijection continue et

$$f(3) < 1 < f(4) \text{ donc } \alpha \in]3; 4[$$

$$II/ g(x) = \frac{3(\ln|x|-1)^3}{3\ln^2|x|+1}$$

4°) a- Prouvons que g est définie sur $\mathbb{R}^*$

$$g(x) \text{ existe si et seulement si : } \begin{cases} x \neq 0 \\ 3\ln^2|x|+1 \neq 0 \end{cases}$$

Or $3\ln^2|x|+1 \neq 0$ pour tout réel $x \neq 0$ d'où $D_g = \mathbb{R}^*$

b- Démontrons que g est la composée de la fonction f et d'une autre h .

$$g(x) = \frac{3(\ln|x|-1)^3}{3\ln^2|x|+1}$$

$$g(x) = f(\ln|x|) \text{ en posant } h(x) = \ln|x| \text{ on a : } g(x) = (f \circ h)(x)$$

; $x \neq 0$

c- Etudions la parité de g

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a : $-x \in \mathbb{R}^*$ et :

$$g(-x) = f(h(-x)) = f(\ln|-x|) = f(\ln|x|) = g(x) \text{ d'où } g \text{ est paire.}$$

d- $D_E =]0; +\infty[$; étudions les limites de k aux bornes de

D_E

Pour $x > 0$, $h(x) = \ln x$ or $k(x) = f(h(x))$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ par composée :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; par composée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$$

Etude de branche infinie :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe (C_k) de k

$$k(x) = \frac{3(\ln x - 1)^3}{3(\ln^2 x + 1)}$$

$$\text{Pour } x > 0 ; \frac{k(x)}{x} = \frac{3(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 3\ln x - 1)}{x(3\ln^2 x + 1)}$$

$$= \frac{3\ln x}{x} \times \frac{\left(1 - \frac{3}{\ln x} + \frac{3}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln^3 x}\right)}{\left(3 - \frac{1}{\ln^2 x}\right)}$$

Et on a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x} = 0$ alors (C_k) admet une branche

parabolique de direction celle de l'axe des abscisses aux voisinages de $+\infty$

5°) a- calculons $k'(x)$ et étudions le sens de variation de k .

k est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composé de fonctions dérivable sur $]0; +\infty[$ et en utilisant la forme de la dérivation d'une forme composée on obtient :

$$k'(x) = h'(x) \times f'(h(x))$$

$$k'(x) = \frac{1}{x} f'(h(x)) ; k'(x) \text{ garde signe positif sur }]0; +\infty[\text{ mais}$$

$k'(x)$ s'annule en x vérifiant $\ln x - 1 = 0$ ou $\ln x + 1 = 0$ alors

$$\text{on a : } x = e \text{ ou } x = \frac{1}{e}.$$

k est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation de k

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$k'(x)$		+	+	+
k		-6	0	$+\infty$

$$k\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{3(-1-1)^3}{3+1} = -6 \text{ et } k(e) = \frac{3(1-1)^3}{3+1} = 0$$

b- Déterminons le point d'intersection de la courbe de k avec l'axe des abscisses et précisons le signe de k posons $k(x) = 0$

$$k(x) = 0 \Leftrightarrow 3(\ln x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \text{ et } e \in]0; +\infty[\text{ donc } (C_k) \text{ coupe l'axe des abscisses en } A(e; 0)$$

Signe de $k(x)$

Si $x \in]0; e[$, $k(x) < 0$

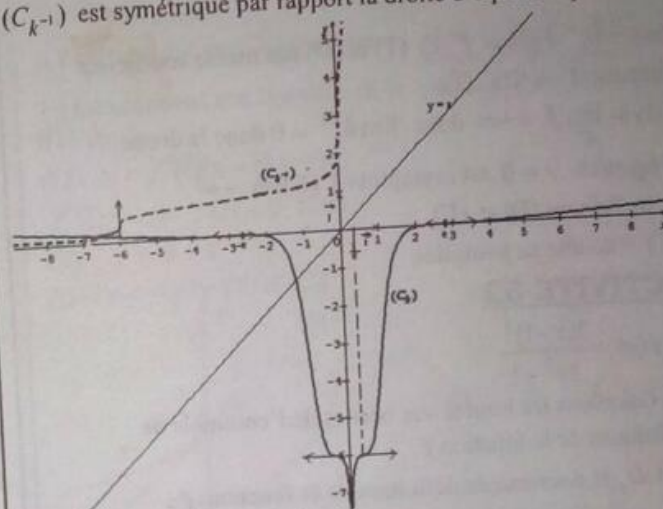
Si $x \in]e; +\infty[$, $k(x) > 0$ et si $x = e$, $k(x) = 0$

6°) a- Démontrons que k réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

k est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ par composée de deux fonctions continue et strictement croissant et $k(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$ d'où k réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ donc $J = \mathbb{R}$.

b- Construisons (C_k) ; $(C_{k^{-1}})$ et (C_g)

$(C_{k^{-1}})$ est symétrique par rapport la droite d'équation $y = x$



$$(C_g) = (C_k) \cup S_{(O_1)}((C_k)).$$

6. CORRECTION DES ACTIVITES SUR LES FONCTIONS EXPONENTIELLE NEPERIENNE

ACTIVITE 1 :

Domaine de définition et dérivée de f

$$1-) D_{f_1} = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^x - 1 > 0 \right\}$$

$$* D_{f_1} =]0; +\infty[$$

$$* \forall x \in D_{f_1}, f'_1(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$2-) D_{f_2} = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^{2x} - 3e^x + 2 \neq 0 \right\}$$

$$* D_{f_2} =]-\infty; 0[\cup]0; \ln 2[\cup]\ln 2; +\infty[$$

$$* \forall x \in D_{f_2}, f'_2(x) = \frac{(2e^x - 3)e^x}{(e^{2x} - 3e^x + 2)^2}$$

$$3-) D_{f_3} = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^{2x} - e^x + 3 > 0 \right\}$$

$$* D_{f_3} = \mathbb{R}$$

$$* \forall x \in D_{f_3}, f'_3(x) = \frac{(2e^x - 1)e^x}{e^{2x} - e^x + 3}$$

$$4-) D_{f_4} = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^{x^2+2x-1} \neq 0 \right\}$$

$$* D_{f_4} = \mathbb{R}$$

$$* \forall x \in D_{f_4}, f'_4(x) = (2x+2)e^{x^2+2x-1}$$

$$5-) D_{f_5} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \right\}$$

$$* D_{f_5} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$* \forall x \in D_{f_5}, f'_5(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$6-) D_{f_6} = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^x + e^{-x} \neq 0 \right\}$$

$$D_{f_6} = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in D_{f_6}, f'_6(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$7-) D_{f_7} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > 0 \right\}$$

$$D_{f_7} =]0; +\infty[$$

$$\forall x \in D_{f_7}, f'_7(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$8-) D_{f_8} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0 \right\}$$

$$\forall x \in D_{f_8}, f'_8(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$9-) D_{f_9} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \right\}$$

$$D_{f_9} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$\forall x \in D_{f_9}, f'_9(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$$

ACTIVITE 14 :

$$f(x) = -1 + \frac{x-1}{x+1} e^x$$

1°) a- Déterminons le domaine de définition D de f .

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0 \right\}$$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ donc } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

b- Calculons les limites de f aux bornes de D.

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^-} e^x = e^{-1} \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} e^x = e^{-1} \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$2°) \text{ a- Prouvons que pour tout } x \in D, f'(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x$$

f est dérivable en tout point de D et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ on a :

$$f'(x) = 0 + \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} e^x + \frac{x-1}{x+1} e^x$$

$$= \left[\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{x-1}{x+1} \right] e^x$$

$$f'(x) = \frac{2+x^2-1}{(x+1)^2} e^x \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x$$

b- Donnons le tableau de variation de f .

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{x^2+1}{(x+1)^2} > 0 \text{ et } e^x > 0 \text{ alors } f'(x) > 0 \text{ pour}$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f	0	$+\infty$	$+\infty$

3°) a- Prouvons que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-1; +\infty[$ une unique solution α et que $1,5 < \alpha < 1,6$.

f est continue et strictement croissante sur $]-1; +\infty[$ et

$f(]-1; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$ (d'après le tableau de variation) or

$0 \in]-\infty; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]1; +\infty[$ une unique solution α .

De plus, on a : $f(1,5) \approx -0,1037$ et $f(1,6) \approx 0,143 \Rightarrow f(1,5) \times f(1,6) < 0$ donc $1,5 < \alpha < 1,6$.

b- Vérifions que : $e^\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ et que $f(-\alpha) = 0$.

On a : $f(\alpha) = 0$

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} e^\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \text{ d'où } e^\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$$

$$f(-\alpha) = -1 + \frac{-\alpha-1}{-\alpha+1} e^{-\alpha}$$

$$= -1 + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \times \frac{1}{e^\alpha}$$

$$= -1 + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \times \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = -1 + 1 \text{ d'où } f(-\alpha) = 0.$$

4°) a- Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprétons graphiquement le résultat.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} + \frac{x-1}{x+1} \times \frac{e^x}{x}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ par conséquent (C) admet une branche

parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

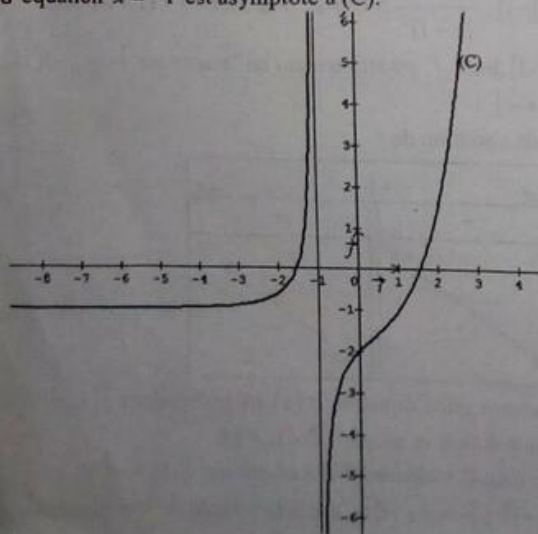
b- Traçons la courbe (C).

on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est

asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ donc la droite

d'équation $x = -1$ est asymptote à (C).



ACTIVITE 17 :

1°) a-Justifions que g est définie sur $\mathbb{R}$

Soit D_g le domaine de définition de g

$$D_g = \{x \in]-\infty; 0] / 1-x^2 \in \mathbb{R}\} \cup \{x \in]0; +\infty[/ x > 0\} \text{ on trouve } D_g = \mathbb{R}$$

b- *Etudions la continuité de g en 0

$$g(0) = 0e^{1-0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{1-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x + x \ln x) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ donc g est continue en 0.

*Dérivabilité de g en 0.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1-x^2} = e$ donc g est dérivable à gauche en 0 et $g'_g(0) = e(1)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 + \ln x) = -\infty$ donc g

n'est pas dérivable à droite en 0 (2)

De (1) et (2) g n'est pas dérivable en 0.

*Equation des demi-tangentes en 0

$$(T_g) : \begin{cases} y = xe \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ et } (T_d) : \begin{cases} x = 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

2°) a- Calculons $g'(x)$, $\forall x \in E$

$E = \mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} g'(x) = (1-2x^2)e^{1-x^2}, & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ g'(x) = \ln x & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

b- Singe de $g'(x)$

on trouve :

$$\forall x \in]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]0; 1[, g'(x) < 0$$

$$\forall x \in]-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0[\cup]1; +\infty[, g'(x) > 0$$

$$\text{Pour } x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right\}, g'(x) = 0$$

*Sens de variation de g sur $\mathbb{R}$

g est strictement décroissante sur $]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ et sur $[0; 1]$

g est strictement croissante sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$ et sur $[1; +\infty[$.

c- Calculons les limites de g aux bornes de D_g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x^2} (1-x^2) e^{1-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(-1 + \ln x) = +\infty$$

3°) a- Etudions les branches infinies à (C_g)

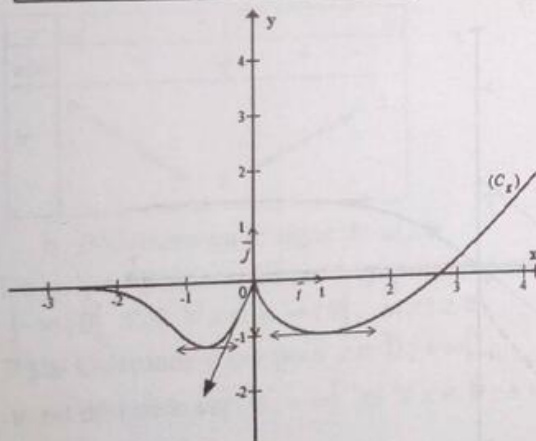
$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C_g) au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et on trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ d'où (C_g) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

b- Construisons (C_g) et les demi tangentes

Tableau de variation de g

x	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	-
g	0	0	1	$+\infty$



ACTIVITE 18 :

Partie A :

1°) a- Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1) = -\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x^2 + 1) = -\infty \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

b- Calculons $g'(x)$

$$D_g = [0; +\infty[$$

g est dérivable sur $[0; +\infty[$

$$\forall x \in [0; +\infty[, g'(x) = \frac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2 + 1)^2}$$

Tableau de variation de g

Le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $1-x$ car

$$\forall x \in [0; +\infty[, 2x \geq 0; 1+x > 0 \text{ et } (x^2 + 1)^2 > 0$$

$$1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	0	1 - ln 2	$-\infty$

2°) Prouvons que sur $[1; +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique et que $1,9 < \beta < 2$

g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et $g([1; +\infty[) =]-\infty; 1 - \ln 2]$ or $0 \in]-\infty; 1 - \ln 2]$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β sur $[1; +\infty[$

De plus $g(1,9) \approx 0,03$ et $g(2) \approx -0,09$

$g(1,9) \times g(2) < 0$ alors on a : $1,9 < \beta < 2$

3°) Signe de g sur $[0; +\infty[$

$$\begin{cases} g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; \beta[\\ g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\beta; +\infty[\\ g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; \beta\} \end{cases}$$

Partie B :

4°) Etudions la continuité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} x \times \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ d'où } f \text{ est continue en 0.}$$

*Dérivabilité de f en 0

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$; $0 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = 1$; $1 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ par suite f n'est pas dérivable en 0.

5°) Justifions que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (Γ) en $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}} - x - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$ d'où la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (Γ) en $-\infty$.

6°) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Interprétation graphique :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (Γ) au voisinage de $+\infty$

7°)

f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1) = g(x)$$

8°) Etablissons que $f(\beta) = \frac{2\beta}{\beta^2 + 1}$

$$f(\beta) = \frac{\ln(\beta^2 + 1)}{\beta}$$

$$g(\beta) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1} - \ln(\beta^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(\beta^2 + 1) = \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1} \text{ d'où}$$

$$f(\beta) = \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1} = \frac{2\beta^2}{\beta(\beta^2 + 1)} = \frac{2\beta}{\beta^2 + 1}$$

Déduisons-en un encadrement de $f(\beta)$

$$1,9 < \beta < 2 \Leftrightarrow 3,8 < 2\beta < 4 \text{ et}$$

$$1,9 < \beta < 2 \Leftrightarrow 4,61 < \beta^2 + 1 < 5$$

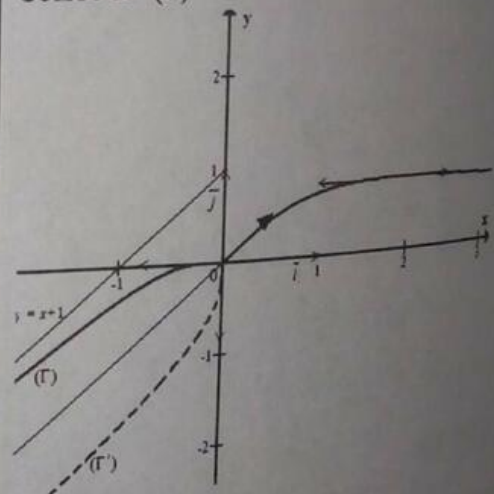
$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{\beta^2 + 1} < \frac{1}{4,61} \text{ donc}$$

$$0,76 < \frac{2\beta}{\beta^2 + 1} < 0,868 \text{ d'où } \underline{0,76 < f(\beta) < 0,87}$$

9°) Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	-
f	$-\infty$		0,85	0

Courbe de (Γ)



Partie C :

10°) Justifions que h est bijection de $]-\infty; 0[$ sur J

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et

$$f(]-\infty; 0[) =]-\infty; 0[\text{ d'où } h \text{ est une bijection de}$$

$$]-\infty; 0[\text{ sur } J =]-\infty; 0[$$

11°) Représentons (Γ')

(Γ') et (Γ) sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$)

Voir courbe en pointillée

ACTIVITE 19 :

Partie A :

1°) a- Déterminons E

$$u(x) = x + 1 - x \ln(-x)$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} / -x > 0\}$$

$$-x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ d'où } E =]-\infty; 0[$$

b- Calculons $u'(x)$

u est dérivable sur E comme composée, produit et somme de fonctions dérivables sur E.

$$\forall x \in E, u'(x) = -\ln(-x)$$

c- Signe de $u'(x)$

$$\text{on trouve : } \begin{cases} u'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\\ u'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 0[\\ u'(-1) = 0 \end{cases}$$

2°) Achéons l'étude des variations de u

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[1 + \frac{1}{x} - \ln(-x) \right] = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 - x \ln(-x) = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} u(x) = 1$$

Tableau de variation de u

x	$-\infty$	-1	0
$u'(x)$	$-$	0	$+$
u	$+\infty$	1	1

b- Dédudions-en le signe de $u(x)$

De ce qui précède u admet 0 pour minimum sur $]-\infty; 0[$ d'où $\forall x \in]-\infty; 0[, u(x) \geq 0$

3°) a- Calculons $v'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$

v est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[,$

$$v'(x) = -\frac{x+1}{x}$$

b- Sens de variation de v

$$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{x+1}{x} > 0 \text{ donc } v'(x) < 0 \text{ d'où } v \text{ est}$$

strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

c- *Calculons $v(1)$

$$v(1) = 0$$

*Signe de $v(x)$

v est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$
et $v(1) = 0$ alors

$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[, v(x) > 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, v(x) < 0 \\ v(1) = 0 \end{cases}$$

Partie B :

4°) a- Etudions la continuité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(-x) + \frac{3}{4} x^2 + x \right] = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} x^2 \ln(-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{X}} \text{ posons } X = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X \ln X}$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} (-X \ln X) e^{-X \ln X} \times \frac{1}{\ln X} = 0$$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ d'où f est continue en 0.

b- Etudions la dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{2} x \ln(-x) + \frac{3}{4} x + 1 \right] = 1 ; 1 \in \mathbb{R}$$

donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} X^2 e^{-X \ln X}$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} (-X \ln X)^2 e^{-X \ln X} \times \frac{1}{\ln^2 X}$$

$$= 0 ; 0 \in \mathbb{R}$$

d'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0

c- Interprétation géométrique des résultats

(C) admet en son point d'abscisse 0 deux demi-

tangentes l'une à gauche (T_g) et l'autre à droite (T_d)

définies par :

$$(T_g) : \begin{cases} y = x \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ et } (T_d) : \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

5°) a- Précisons le domaine de dérivabilité de f

Soit E ce domaine, $E = \mathbb{R}^*$

-Calculons $f'(x)$

$$\begin{cases} f'(x) = u(x) & , \text{ si } x < 0 \\ f'(x) = \frac{e^x}{x^3} v(x) & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

b- Etudions le signe de $f'(x)$

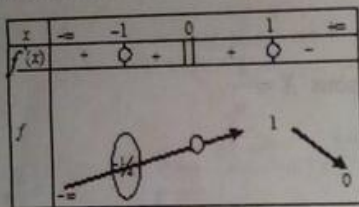
On trouve :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]-1; 1[, f'(x) < 0 \\ \text{Pour } x \in \{-1; 1\}, f'(x) = 0 \end{cases}$$

c- Achevons l'étude des variations de f

on trouve : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Tableau de variation de f



$$f(-1) = -\frac{1}{4}$$

6°) a- Etudions les branches infinies de (C)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et on trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ d'où (C)

admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

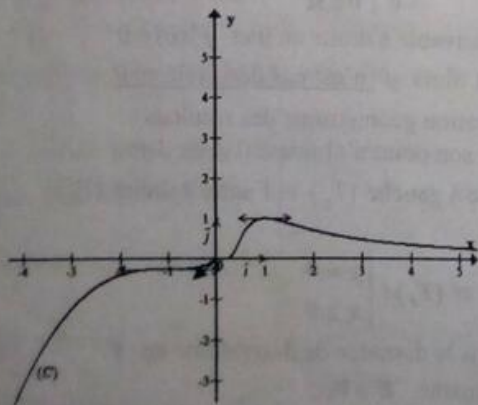
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ d'où la droite d'équation $y = 0$ est

asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$

b- Démontrons que 1 est un point d'inflexion de (C)

$f'(x)$ s'annule en -1 sans changer de signe d'où 1 d'abscisse -1 est un point d'inflexion de (C).

c- Construisons (C)



ACTIVITE 20 :

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)e^x & , \text{ si } x < 1 \\ x-1 + \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

1°) Prouvons que f est continue en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)e^x = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 + \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) \\ &= 0 + \ln 1 = 0 = f(1) \end{aligned}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1.

2°) a- Vérifions que pour tout $x > 1$,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 + \frac{\ln x}{x-1} - \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1}$$

$$\text{Pour } x > 1, \text{ on a : } \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x-1 + \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)}{x-1}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 + \frac{\ln(2x) - \ln(x+1)}{x-1}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 + \frac{\ln 2 + \ln x - \ln(x+1)}{x-1}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 + \frac{\ln x}{x-1} - \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1} \text{ d'où}$$

le résultat.

b- Démontrons que f est dérivable en 1 et que $f'_d(1) = \frac{3}{2}$

$$\text{Pour } x > 1, \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 + \frac{\ln x}{x-1} - \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\text{En posant } \frac{x+1}{2} = X \text{ on a : } x = 2X-1 ; x \rightarrow 1^+, X \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1} &= \lim_{X \rightarrow 1^+} \frac{\ln X}{2X-2} \\ &= \lim_{X \rightarrow 1^+} \frac{1}{2} \times \frac{\ln X}{X-1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} ; \frac{3}{2} \in \mathbb{R} \text{ d'où } f \text{ est}$$

dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = \frac{3}{2}$.

Remarque :

$$\text{Pour } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1} \text{ on peut poser : } v(x) = \ln(x+1) \text{ et}$$

$$\text{constater que : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 1^+} \frac{v(X) - v(1)}{X-1} = v'(1)$$

c- Etudions la dérivabilité de f en 1 puis interprétons.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)e^x}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -e^x = -e; -e \in \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ est dérivable à gauche en } 1 \text{ et } f'_g(1) = -e$$

On a : $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ d'où f' n'est pas dérivable en 1.

Interprétation graphique :

(C) admet en son point d'abscisse 1 deux demi tangentes l'une à gauche en 1 T_g et l'autre à droite en 1 T_d définies par :

$$T_g : \begin{cases} x \leq 1 \\ y = -ex + e \end{cases} \text{ et } T_d : \begin{cases} x \geq 1 \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

3°) Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On trouve : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4°) a- Etudions le sens de variations de f .

La fonction $x \mapsto (1-x)e^x$ est dérivable sur $]-\infty; 1[$ comme produit de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) = -xe^x$$

Sur $]1; +\infty[$, $\frac{2x}{x+1} > 0$ et $x+1 \neq 0$ donc la fonction

$x \mapsto x-1 + \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ comme

composé et somme de fonctions dérivables et

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)}$$

Signe de $f'(x)$

- Sur $]-\infty; 1[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$ car $e^x > 0$.

$$\text{Donc } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

- Sur $]1; +\infty[$ le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 + x + 1$.

On a le discriminant de $x^2 + x + 1$ est $\Delta = -3$; $-3 < 0$ et $1 > 0$ donc $\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) > 0$

En résumé on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $]1; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

b- Dressons le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	↗	↘	↗

$$5^\circ) \varphi(x) = f(x) - x + 1 - \ln 2$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$

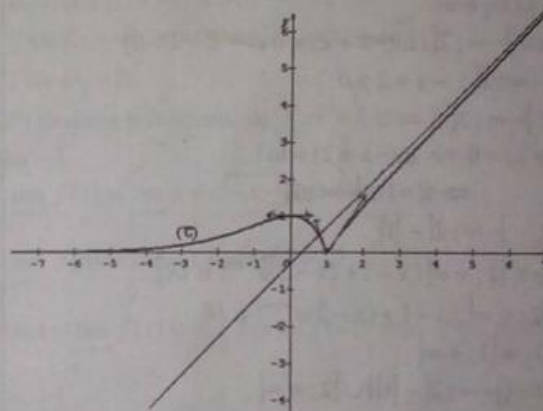
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1 + \ln 2)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) - \ln 2 \right] \\ &= \ln 2 - \ln 2 = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0 \end{aligned}$$

Signification :

La droite d'équation $y = x - 1 + \ln 2$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

7°) Traçons (C)

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).



ACTIVITE 22 :

1°) a- Etudions les variations de v sur $]-\infty; 2[$

$$v(x) = \ln(-x+2) - \frac{x-3}{x-2}$$

v est continue et dérivable sur $]-\infty; 2[$ comme somme de fonctions continue et dérivable sur $]-\infty; 2[$.

$$\forall x \in]-\infty; 2[, v'(x) = \frac{x-3}{(x-2)^2}$$

$\forall x \in]-\infty; 2[, v'(x) < 0$ alors v est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} v = -\infty$$

Tableau de variation de v

x	$v(x)$
$-\infty$	$+\infty$
α	0
2	$-\infty$

b- Démontrons que l'équation $v(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $-1,6 < \alpha < -1,5$

v est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ et $v(]-\infty; 2]) =]-\infty; +\infty[$. Or $0 \in]-\infty; +\infty[$ d'où l'équation $v(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty; 2[$. De

plus $-1,6 \in]-\infty; 2[$ et $-1,5 \in]-\infty; 2[$

$v(-1,6) = 0,03$; $v(-1,5) = -0,033$ et

$v(-1,6) \times v(-1,5) < 0$ d'où $-1,6 < \alpha < -1,5$

c- Dédudons-en le signe de $v(x)$ sur $]-\infty; 2[$

D'après 1°) a- et b- on a :
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, v(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; 2[, v(x) < 0 \\ v(\alpha) = 0 \end{cases}$$

2°) Justifions que $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$D = D_1 \cup D_2$ avec

$D_1 = \{x \in]-\infty; 2[/ \ln(-x+2) \neq 0 \text{ et } -x+2 > 0\}$

$\forall x \in]-\infty; 2[, -x+2 > 0$

Soit $x \in]-\infty; 2[$

$\ln(-x+2) = 0 \Leftrightarrow \ln(-x+2) = \ln 1$

$\Leftrightarrow x = 1 \in]-\infty; 2[$

donc $D_1 =]-\infty; 2[\setminus \{1\}$

$D_2 = \{x \in [2; +\infty[/ x-1 + (x-2)e^{-x+2} \in \mathbb{R}\}$

$\forall x \in [2; +\infty[, x-1 + (x-2)e^{-x+2} \in \mathbb{R}$

donc $D_2 = [2; +\infty[$

d'où $D = (]-\infty; 2[\setminus \{1\}) \cup [2; +\infty[$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b- Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 0

Continuité de f en 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{\ln(-x+2)} + 1 = 1 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(-x+2) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-3) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 2 - 1 + (2-2)e^{-2+2} = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$ d'où f est continue en 1.

Dérivabilité de f en 2

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{(x-2)\ln(-x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-3) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2)\ln(-x+2) = 0^+ \end{cases}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2 (i)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1 + e^{-x+2}) = 2 \text{ donc } f \text{ est}$$

dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = 2$ (ii)

De (i) et (ii) f n'est pas dérivable en 2

Interprétation géométrique des résultats

f n'est pas dérivable à gauche en 2 mais dérivable à droite en 2. Alors (C) admet en son point d'abscisse 2 deux demi-tangentes, l'une à gauche (T_g) et l'autre à droite (T_d)

définies par : $(T_g) : \begin{cases} x = 2 \\ y \geq 2 \end{cases}$ et $(T_d) : \begin{cases} x \geq 2 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

3°) a- Calculons les limites de f aux bornes de D

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-3}{\ln(-x+2)} + 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\frac{x-3}{-x+2}}{\frac{\ln(-x+2)}{-x+2}} + 1 \right] = -\infty \text{ car} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{-x+2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x+2)}{-x+2} = 0^+ \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{x-3}{\ln(-x+2)} + 1 \right] = -\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{x-3}{\ln(-x+2)} + 1 \right] = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x-1 + (x-2)e^{-x+2}] = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)e^{-x+2} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b-Achevons l'étude de la variation de f

$$\forall x \in]-\infty; 2[\setminus \{1\}, f'(x) = \frac{v(x)}{[\ln(-x+2)]^2}$$

$$\forall x \in [2; +\infty[, f'(x) = 1 + (3-x)e^{-x+2}$$

Signe de $f'(x)$

On obtient :
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[\cup [2; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; 2[\setminus \{1\}, f'(x) < 0 \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

D'où f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et sur $[2; +\infty[$ et strictement décroissante sur $[\alpha; 1]$ et sur $]1; 2]$
Tableau de variation de f

x	$-\infty$	α	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$	1	$+\infty$

4°) a- Démontrons que $f(\alpha) = \alpha - 1$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 3}{\ln(-\alpha + 2)} + 1$$

$$v(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(-\alpha + 2) = \frac{\alpha - 3}{\alpha - 2} \text{ donc}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 3}{\frac{\alpha - 3}{\alpha - 2}} + 1 = \frac{(\alpha - 3)(\alpha - 2)}{\alpha - 3} + 1 = \alpha - 1$$

Calculons la valeur approchée de $f(\alpha)$

$$-1,6 < \alpha < -1,5 \Leftrightarrow -2,6 < f(\alpha) < -2,5 \text{ d'où}$$

$$f(\alpha) = \frac{-2,6 - 2,5}{2} \Rightarrow \underline{\underline{f(\alpha) = -2,55}}$$

b- Démontrons que $(\Delta): y = x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)e^{-x+2} = 0 \text{ d'où } (\Delta): y = x - 1$$

est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

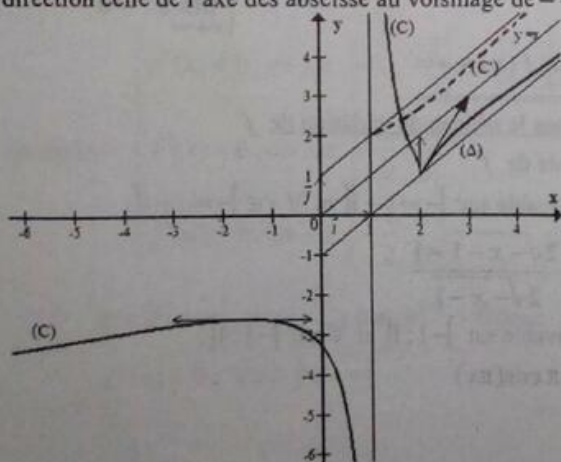
c- Construisons (C)

Les autres branches infinies à (C)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C)

On trouve :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisse au voisinage de $-\infty$.



5°) a- Démontrons que la fonction g admet une bijection réciproque g^{-1}

f est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$ et $f([2; +\infty[) = [1; +\infty[$ d'où g est une bijection de $[2; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$ par suite g admet une bijection réciproque g^{-1} .

b- Construisons (C') courbe de g^{-1}

voir courbe en pointillé de la figure

ACTIVITE 23:

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{-x-1} & , \text{ si } x \leq -1 \\ f(x) = -1 + \sin(\pi x) & , \text{ si } -1 < x < 1 \\ f(x) = \ln x - \exp(1-x) & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

1°) Déterminons le domaine de définition de D_f de f

$$D_f = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \text{ avec}$$

$$D_1 = \{x \in]-\infty; -1] / -x-1 \geq 0\}$$

$$-x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \text{ donc}$$

$$D_1 =]-\infty; -1]$$

$$D_2 = \{x \in]-1; 1[/ -1 + \sin(\pi x) \text{ existe}\}$$

$$D_2 =]-1; 1[$$

$$D_3 = \{x \in [1; +\infty[/ x > 0\}$$

$$\forall x \in [1; +\infty[, x > 0 \text{ donc } D_3 = [1; +\infty[$$

$$\text{D'où } D_f = \mathbb{R}$$

2°) Etudions la continuité de f en -1 et en 1

En -1

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x + \sqrt{-x-1} = -1 = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} -1 + \sin(\pi x) = -1$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ donc f est continue

en -1

En 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -1 + \sin(\pi x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - e^{(1-x)}) = -1 = f(1)$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1

3°) a- Etudions la dérivabilité de f en -1

$$* \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1 + \sqrt{-x-1}}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} 1 - \frac{1}{\sqrt{-x-1}} = -\infty \text{ alors } f \text{ n'est}$$

pas dérivable à gauche en -1 .

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1 + \sin(\pi x) + 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(\pi x)}{x + 1} \end{aligned}$$

Posons $X = x + 1$

$X = x + 1 \Leftrightarrow x = X - 1$ et si $x \rightarrow -1$, $X \rightarrow 0$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin \pi(X - 1)}{X}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-\sin \pi X}{X} = -\pi ; -\pi \in \mathbb{R}$$

alors f est dérivable à droite en -1 et le nombre dérivé à droite de f en -1 est $f'_d(-1) = -\pi$

Au total f n'est pas dérivable en -1

Interprétations des résultats :

(C) admet en point d'abscisse -1 deux demi-tangentes définies par :

$$\text{A gauche en } -1 (T_g) : \begin{cases} x = -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{A droite en } -1 (T_d) : \begin{cases} x \geq -1 \\ y = -\pi(x + 1) - 1 \end{cases} \text{ soit}$$

$$(T_d) : \begin{cases} x \geq -1 \\ y = -\pi x - \pi - 1 \end{cases}$$

b-Etudions la dérivabilité de f en 1 .

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1 + \sin(\pi x) + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} \end{aligned}$$

Soit $v = x - 1$

$v = x - 1 \Leftrightarrow x = v + 1$ et si $x \rightarrow 1$, $v \rightarrow 0$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi(v + 1)}{v}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin \pi v}{v} = -\pi ; -\pi \in \mathbb{R} \text{ alors}$$

f est dérivable à gauche en 1 et le nombre dérivé à gauche de f en 1 est $f'_g(1) = -\pi$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - e^{1-x} + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} - \frac{e^{1-x} - 1}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} + \frac{e^{1-x} - 1}{1 - x} = 2 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 1 - x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Or $2 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à droite en 1 et le nombre dérivé à droite de f en 1 est $f'_d(1) = 2$

Conclusion : on a : $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ d'où f n'est pas dérivable en 1

Interprétation :

(C) admet en son point d'abscisse 1 deux demi-tangentes définies par :

$$\text{A gauche en } 1 \text{ on a } (T) : \begin{cases} x \leq 1 \\ y = -\pi x + \pi - 1 \end{cases}$$

$$\text{A droite en } 1 \text{ on a } (T') : \begin{cases} x \geq 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

4°) Calculons les limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{-x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - x \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) = -\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - e^{1-x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

5°) Dressons le tableau de variation de f

• Dérivée de f

f est dérivable sur $] -\infty ; -1[$ et $\forall x \in] -\infty ; -1[$,

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{-x-1}-1}{2\sqrt{-x-1}}$$

f est dérivable sur $] 1 ; +\infty[$ et $\forall x \in] 1 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \pi \cos(\pi x)$$

f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $\forall x \in]1; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + e^{1-x}$$

• Signe de la dérivée

➤ Sur $]1; +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur qui est $u: x \mapsto 2\sqrt{x-1} - 1$

Posons $u(x) = 0, \forall x \in]1; +\infty[$

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x-1 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

La fonction $u: x \mapsto 2\sqrt{x-1} - 1$ est continue et ne s'annule pas sur $]1; +\infty[$ et sur $]-\frac{5}{4}; -1[$

On a : $-2 \in]1; +\infty[$ et $u(-2) = 2\sqrt{-2-1} - 1 = 1$ or $1 > 0$

alors $\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) > 0$

On a : $-1 \in]1; +\infty[$ et $u(-1) = -1$; $-1 < 0$ alors

$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0$.

➤ Sur $]1; 1[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $\cos \pi x$
 $x \in]1; 1[\Leftrightarrow -\pi < \pi x < \pi$

$$\text{On a : } \begin{cases} \cos \pi x < 0, \text{ si } \pi x \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}; \pi[\\ \cos \pi x > 0, \text{ si } \pi x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ \cos \pi x = 0, \text{ si } \pi x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\} \end{cases}$$

$$\text{On déduit : } \begin{cases} f'(x) < 0, \Leftrightarrow x \in]-1; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; 1[\\ f'(x) > 0, \Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\\ f'(x) = 0, \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\} \end{cases}$$

➤ Sur $]1; +\infty[$ on a : $\frac{1}{x} > 0$ et $e^{1-x} > 0$ donc

$$f'(x) > 0, \forall x \in]1; +\infty[$$

En résumé on a :

$$\begin{cases} f'(x) < 0, \Leftrightarrow x \in]-\frac{5}{4}; -1[\cup]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\\ f'(x) > 0, \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\frac{5}{4}[\cup]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[\\ f'(x) = 0, \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\} \end{cases}$$

• Sens de variation de f

f est strictement décroissante sur $]-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}; 1[$

f est strictement croissante sur $]-\infty; -\frac{5}{4}[$, sur $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$

et sur $]1; +\infty[$

• Tableau de variation f

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	+
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$$6^{\circ}) h: \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \rightarrow f\left(\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right)$$

$$x \mapsto h(x) = f(x)$$

a- Démontrons que h admet une bijection réciproque h^{-1}

h est la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ donc h est

continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ et

$$f\left(\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f\left(-\frac{1}{2}\right); f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = [-2; 0]$$

alors h est bijective par suite elle admet une bijection réciproque h^{-1}

b- Déterminons le domaine V de dérivabilité de h^{-1}

$$h^{-1}: [-2; 0] \rightarrow \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \text{ et } V = [-2; 0] \setminus$$

$$\left\{ f(x) / f'(x) = 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \right\}$$

$$\text{Pour tout } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

donc

$$V = [-2; 0] \setminus \left\{ f\left(-\frac{1}{2}\right); f\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \text{ soit } V =]-2; 0[$$

c- Calculons $(h^{-1})'(x)$, $\forall x \in]-2; 0[$

$$\forall x \in]-2; 0[, (h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))}$$

$$\text{Posons } h^{-1}(x) = y \text{ avec } \begin{cases} x \in [-2; 0] \\ y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow x = h(y) \\ &\Leftrightarrow x = -1 + \sin(\pi y) \\ &\Leftrightarrow \sin(\pi y) = x + 1 \end{aligned}$$

$$h'(y) = \pi \cos(\pi y) \text{ or } \cos(\pi y) = \sqrt{1 - \sin^2(\pi y)} \text{ car } \cos(\pi y) > 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in]-2; 0[, (h^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{-x^2 - 2x}}$$

7°) a- Calculons $k'(x)$

La fonction $k: x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivable et on a : $k'(x) = 1 + \ln x$

b- Déduisons-en une primitive K sur $]1; +\infty[$ de la fonction f

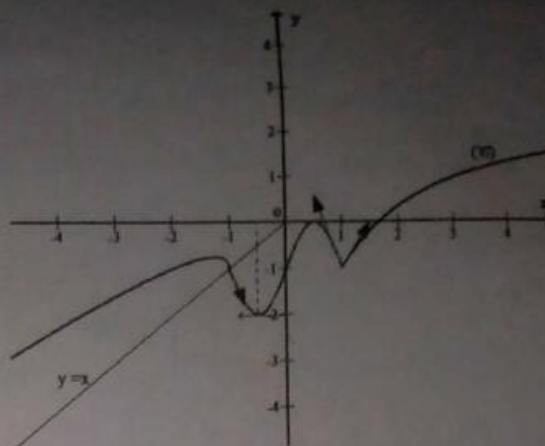
on a de ce qui précède : $\ln x = k'(x) - 1$ or la fonction f est continue sur $]1; +\infty[$ alors $F(x) = k(x) - x + e^{1-x}$ d'où $\forall x \in]1; +\infty[, F(x) = -x + x \ln x + \exp(1-x)$

8°) Etudions les branches infinies de $(\mathcal{C})$

On trouve $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = +\infty$ et on conclure que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

On trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et on conclure que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

9°) construction de la courbe $(\mathcal{C})$



ACTIVITE 24:

1°) a- Etudions les variations des fonctions u et v
Variation de u

$$u(x) = e^x - x - 1$$

$$D_u = \{x \in \mathbb{R} / e^x - x - 1 \in \mathbb{R}\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x - 1 \in \mathbb{R} \text{ donc } D_u = \mathbb{R}$$

u est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = e^x - 1$$

Posons $e^x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0]$ on déduit donc :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, u'(x) < 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, u'(x) > 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Alors u est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = +\infty$$

Tableau de variation de u

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Variation de v

$$v(x) = -x + 1 + \ln x$$

$$D_v = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[\text{ d'où } D_v =]0; +\infty[$$

v est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in]0; +\infty[, v'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}$$

$$\text{Posons } (-x+1)x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0 \text{ donc}$$

$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[, v'(x) > 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, v'(x) < 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

Alors v est strictement croissante sur $]0; 1]$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

$$\lim_{0^+} v = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} v = -\infty$$

Tableau de variation de v

x	0	1	$+\infty$
$v'(x)$		+	-
$v(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

b- Dédisons que $\forall x \in]0; +\infty[, e^x \geq x+1,$

$$\ln x \leq x-1 \text{ et } e^x - \ln x \geq 2$$

Des variations de $u \forall x \in \mathbb{R}, u(x) \geq 0$ donc

$$\forall x \in]0; +\infty[, u(x) \geq 0$$

$$\text{on a : } e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x+1$$

$$\text{d'où } \forall x \in]0; +\infty[, e^x \geq x+1 \text{ (a)}$$

des variation de $v, \forall x \in]0; +\infty[, v(x) \leq 0$ on a donc :

$$-x+1+\ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq x-1$$

$$\text{d'où } \forall x \in]0; +\infty[, \ln x \leq x-1$$

$$\ln x \leq x-1 \Leftrightarrow -\ln x \geq 1-x \text{ (b)}$$

$$\text{De (a) et (b) } \forall x \in]0; +\infty[, e^x - \ln \geq 2$$

$$2^\circ \text{a- Justifions que } D = [0; +\infty[$$

$$D = \{x \in]0; +\infty[/ x > 0 \text{ et } e^x - \ln x \neq 0\} \cup \{0\}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, e^x - \ln x \geq 2 \text{ donc } e^x - \ln x \neq 0 \text{ et}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$$

$$\text{Donc } D =]0; +\infty[\cup \{0\} \text{ d'où } D = [0; +\infty[$$

b- Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 0

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - \ln x} = 0 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue à droite en } 0$$

Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - \ln x} = 0, 0 \in \mathbb{R} \text{ donc } f$$

est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

$$3^\circ \text{ Déterminons } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - \ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x \left(1 - \frac{\ln x}{e^x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{\ln x}{e^x}\right)} = 0$$

Interprétation graphique

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (Γ) au voisinage de $+\infty$

4° a- sens de variation de g sur $]0; +\infty[$ et dressons le tableau de variation de g

$$g(x) = e^x - \ln x - xe^x + 1$$

g est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -\frac{1}{x} - xe^x$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, -\frac{1}{x} < 0 \text{ et } -xe^x < 0 \text{ donc } g'(x) < 0$$

alors g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de g

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
g	$+\infty$	$-\infty$

b- démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1,23 \leq \alpha \leq 1,24$

g est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $g(0; +\infty) = \mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α
 $g(1,23) = 0,0061$ et $g(1,24) = -0,0445$ on a :
 $g(1,23) \times g(1,24) < 0$ donc $1,23 \leq \alpha \leq 1,24$

c- Signe de $g(x)$

des variation de g on a :
$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

5°) Etudions les variations de f

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de quotient de fonctions dérivables

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x - \ln x - \left(e^x - \frac{1}{x}\right)}{(e^x - \ln x)^2} \\ &= \frac{e^x - \ln x - e^x - xe^x + 1}{(e^x - \ln x)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(e^x - \ln x)^2} \end{aligned}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, (e^x - \ln x)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de $g(x)$

On déduit donc :
$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0 \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Donc f est strictement croissante sur $]0; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$

Tableau de variation de f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	0	$f(\alpha)$	0

6°) a- Démontrons que $f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha e^\alpha - 1}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha - \ln \alpha} \text{ or}$$

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha - \ln \alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha = e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 \text{ donc}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha - e^\alpha + \alpha e^\alpha - 1}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha e^\alpha - 1} \text{ d'où } f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha e^\alpha - 1}$$

b- Encadrement de $f(\alpha)$

$$1,23 \leq \alpha \leq 1,24 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 3,421 \leq e^\alpha \leq 3,455 \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2)} \quad 4,2078 \leq \alpha e^\alpha \leq 4,2842$$

$$\Leftrightarrow 3,2078 \leq \alpha e^\alpha - 1 \leq 3,2842$$

$$\Leftrightarrow 0,304 \leq \frac{1}{\alpha e^\alpha - 1} \leq 0,312 \quad (3)$$

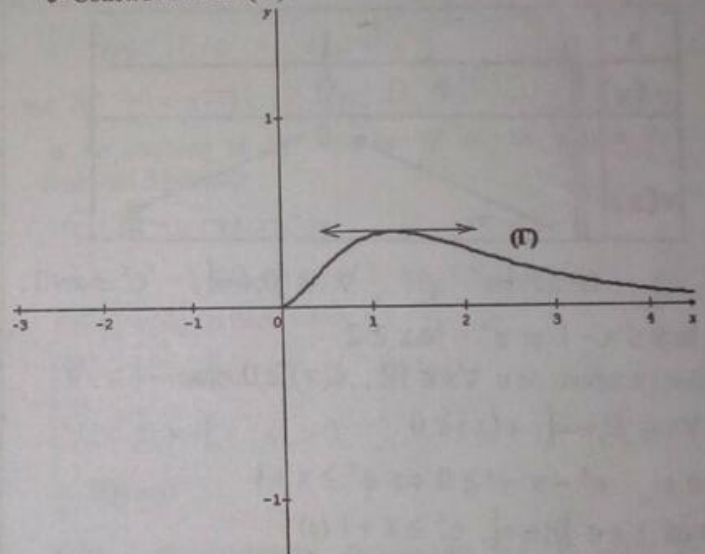
$$(1) \text{ et } (3) \Rightarrow 0,374 \leq f(\alpha) \leq 0,386 \text{ d'où}$$

$$0,37 \leq f(\alpha) \leq 0,39$$

$$\frac{0,37 + 0,39}{2} = 0,38 \text{ d'où } 0,38 \text{ est une valeur approchée de}$$

$f(\alpha)$

c- Construction de (Γ)



7. CORRECTIONS DES ACTIVITES SUR LES FONCTIONS PUISSANCES

ACTIVITE 1 :

1°) Démontre que qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = n + \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = n + \sqrt{2} &\Leftrightarrow (n + \sqrt{2})^3 = 20 + 14\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 20 + 14\sqrt{2} = n^3 + 3\sqrt{2}n^2 + 3n(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 \\ &\Leftrightarrow 20 + 14\sqrt{2} = n^3 + 3\sqrt{2}n^2 + 6n + 2\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow (20 - n^3 - 6n) + \sqrt{2}(14 - 3n^2 - 2) = 0\end{aligned}$$

$(20 - n^3 - 6n) \in \mathbb{Z}$ et $(14 - 3n^2 - 2) \in \mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}$ irrationnel alors

$$\text{On a : } \begin{cases} 20 - n^3 - 6n = 0 \\ 14 - 3n^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 - n^3 - 6n = 0 \\ n^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow n = 2$$

$$\text{Finalement : } \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

$$2^\circ) \text{ Calculons } A = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

D'après 1°) on a : $(2 + \sqrt{2})^3 = 20 + 14\sqrt{2}$ et

$$(2 - \sqrt{2})^3 = 20 - 14\sqrt{2}$$

$$\text{Par conséquent } A = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4.$$

8. CORRECTION DES ACTIVITES SUR LES CALCULS INTEGRALES

ACTIVITE 12 :

1°) Justifions l'existence du nombre réel $I = \int_a^b h(x) dx$ où

$$a = -\ln(1 + \sqrt{3}), b = -\ln(\sqrt{3} - 1) \text{ et } h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2 - e^{2x}}}$$

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2 - e^{2x} > 0 \right\}$$

$$2 - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow x < \frac{\ln 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[\text{ donc } D_g = \left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[$$

La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[$, la

fonction $x \mapsto 2 - e^{2x}$ est continue sur $\left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[$ et

$$\forall x \in \left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[, 2 - e^{2x} > 0 \text{ donc la fonction :}$$

$$x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{2 - e^{2x}}} \text{ est continue sur } \left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[\text{ par conséquent}$$

$$h : x \mapsto \frac{e^x}{1 - e^{2x}} \text{ est continue sur } \left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[$$

$$a = -\ln(1 + \sqrt{3}) = \ln\left(\frac{1}{1 + \sqrt{3}}\right)$$

$$a = \ln\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) \in \left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[$$

$$b = -\ln(\sqrt{3} - 1) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 1}\right)$$

$$b = \ln\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \in \left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[$$

De tout ce qui précède I existe.

2°) a- Calculons $u\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $u\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$u\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left(\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ d'où } u\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)$$

$$u\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \ln\left(\cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ d'où } u\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$$

b- Justifions que $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) \end{aligned}$$

$$= \cos x + \sin x \text{ d'où le résultat}$$

c- Démontrons que u est bijective.

$$u(x) = \ln(\cos x + \sin x)$$

$$D_u = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right[$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \ln\left(\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} u(x) = u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}$$

u est continue et dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right[$ comme composée

fonctions dérivables

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right[, u'(x) = \frac{-\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \text{ donc}$$

$$u'(x) = \frac{-\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Signe de u

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right[, x - \frac{\pi}{4} \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\text{donc } \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right[, \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$\text{D'où } \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right[, u'(x) < 0 \text{ et } u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

u est donc continue et strictement décroissante sur

$$\text{et } u\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right[\right) = \left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} \right[\text{ d'où } u \text{ est bijective}$$

d) Déterminons l'ensemble de dérivabilité E de u^{-1} .
 u est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ et $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ donc

u^{-1} est dérivable sur $E = u\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]\right)$ d'où :

$$E = \left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right]$$

3°) Justifions que $\forall x \in E, (u^{-1})'(x) = -h(x)$

$$\forall x \in E, (u^{-1})'(x) = \frac{1}{u'(u^{-1}(x))}$$

$$\text{Posons : } u^{-1}(x) = y \text{ avec } \begin{cases} x \in \left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right] \\ y \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \end{cases}$$

$$u^{-1}(x) = y \Leftrightarrow u(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{2} \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right)\right) = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = e^x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^x}{\sqrt{2}}$$

$$u'(y) = \frac{-\sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right)} \text{ on sait que :}$$

$$\sin^2\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \cos^2\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{On a donc : } \sin^2\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{e^{2x}}{2}$$

$$= \frac{2 - e^{2x}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2 - e^{2x}}}{\sqrt{2}} \text{ car } \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$\text{Alors } u'(y) = \frac{-\frac{\sqrt{2 - e^{2x}}}{\sqrt{2}}}{\frac{e^x}{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2 - e^{2x}}}{e^x} \text{ d'où}$$

$$\forall x \in E, (u^{-1})'(x) = -\frac{e^x}{\sqrt{2 - e^{2x}}} = -h(x) \text{ soit}$$

$$(u^{-1})'(x) = -h(x)$$

*Calculons I

$$I = \int_a^b h(x) dx$$

$$= \int_a^b -\left(u^{-1}\right)'(x) dx$$

$$= \left[-u^{-1}(x)\right]_a^b = -u^{-1}(b) + u^{-1}(a)$$

$$u\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a \Leftrightarrow u^{-1}(a) = \frac{2\pi}{3}$$

$$u\left(\frac{\pi}{3}\right) = b \Leftrightarrow u^{-1}(b) = \frac{\pi}{3} \text{ donc } I = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \text{ d'où } I = \frac{\pi}{3}$$

ACTIVITE 15:

$$A/ f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2}$$

1°) Démontrons qu'il existe des réels a, b et c tels que : pour

$$\text{tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}$$

Faisons une division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 5x^2 + 9x + 5 & 2x^2 + 2 \\ -x^3 - x & \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ \hline 5x^2 + 8x + 5 & \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ -5x^2 - 5 & \\ \hline 8x & \end{array}$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{8x}{2x^2 + 2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{4x}{x^2 + 1} \text{ d'où } a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2} \text{ et}$$

$$c = 4.$$

2°) a- Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b- Démontrons que la droite $(\mathcal{D}) : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est

asymptote à $(\mathcal{C})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2 + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0$$

donc la droite $(\mathcal{D}) : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

c- Etudions la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

correction des activités sur calculs intégrales

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ donc le signe de $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)$ est

celui de $4x$.

$4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ alors on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in]-\infty; 0[, f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) < 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in]-\infty; 0[, f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) < 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) > 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Pour } x = 0, f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) = 0$$

D'où (C) est en dessous de (D) sur $]-\infty; 0[$ et (C) est au dessus de (D) sur $]0; +\infty[$ et pour $x = 0$ (C) et (D) sont confondus.

3°) Etudions les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

f étant une fonction rationnelle elle est continue et dérivable en tout point de son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 10x + 9)(2x^2 + 2) - 4x(x^3 + 5x^2 + 9x + 5)}{(2x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 12x^2 + 18}{(2x^2 + 2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2 - 3)^2}{(2x^2 + 2)^2}$$

$$2(x^2 - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$, $f'(x) > 0$ et

$$f'(-\sqrt{3}) = f'(\sqrt{3}) = 0$$

Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{5 - 3\sqrt{3}}{2} \text{ et } f(\sqrt{3}) = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{5-3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

4°) a- Déterminons les coordonnées des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite :

Soit x_0 les abscisses des points de la tangente à (C) où la tangente est parallèle à (D).

$$\text{On a : } \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ f'(x_0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ f'(x_0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \frac{2x_0^4 - 12x_0^2 + 18}{(2x_0^2 + 2)^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ 4x_0^4 - 24x_0^2 + 36 = 4x_0^4 + 8x_0^2 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ ou } x_0 = 1$$

$$f(-1) = 0 \text{ et } f(1) = 5$$

D'où les points recherchés sont : A(-1; 0) et B(1; 5)

b- Déterminons une équation de ces tangentes

$$\text{on trouve : } (T_A) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ et } (T_B) : y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

c- Démontrons que le point $I\left(0; \frac{5}{2}\right)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (2 \times 0 - x) \in \mathbb{R}$$

$$f(2 \times 0 - x) = f(-x) = \frac{-x^3 + 5x^2 - 9x + 5}{2x^2 + 2} \text{ et}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{10x^2 + 10}{2x^2 + 2}$$

$$= \frac{10(x^2 + 1)}{2(x^2 + 1)} = 5 = 2 \times \frac{5}{2} \text{ d'où le point } I\left(0; \frac{5}{2}\right)$$

est centre de symétrie de la courbe (C).

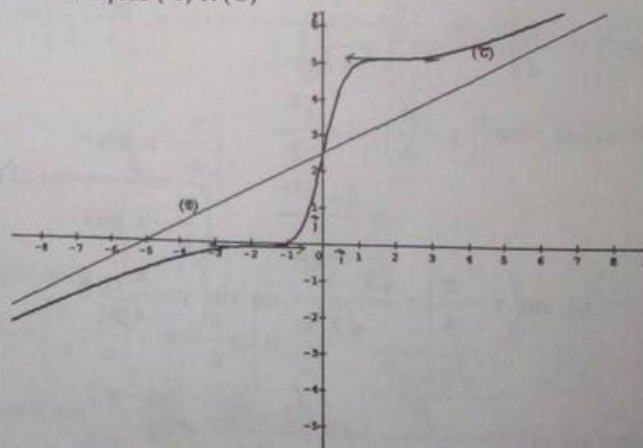
5°) a- Démontrons que -1 est la seule racine de $f(x)$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ d'où il existe un unique réel α tel que :

$f(\alpha) = 0$; $-1 \in \mathbb{R}$ et $f(-1) = 0$ d'où -1 est la seule racine de $f(x)$.

b- Traçons (C) et (D)



$$B/ g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{2}x + 2 \ln(x^2 + 1)$$

6°) Démontrons que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2} + 2\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2} + \frac{4x}{x^2+1} = f(x) \text{ et par ailleurs } g(0)=0$$

d'où g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en zéro.

7°) a- Dédus-en le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f(x)$$

Or f est croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(-1)=0$

$$x \in]-\infty; -1[\Rightarrow x < -1 \Rightarrow f(x) < 0$$

$$x \in]-1; +\infty[\Rightarrow x > -1 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[, g'(x) < 0 \\ \forall x \in]-1; +\infty[, g'(x) > 0 \\ g(-1) = 0 \end{cases}$$

Alors g est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$ et

strictement croissante sur $[-1; +\infty[$

b- Calcul de limite de g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$$

8°) a-

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right) \right) dx \text{ et on trouve :}$$

$$A(\alpha) = 2 \ln(\alpha^2 + 1) \text{ cm}^2$$

b- Valeurs de $\alpha / A(\alpha) \leq 1$

$$A(\alpha) \leq 1 \Leftrightarrow 2 \ln(\alpha^2 + 1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha^2 + 1) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha^2 + 1 \leq \sqrt{e} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in [-\sqrt{\sqrt{e}-1}; \sqrt{\sqrt{e}-1}]$$

ACTIVITE 17 :

$$1/ f(x) = x(1 + e^{2-x})$$

$$1^\circ) h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$$

a-

$$D_h = \mathbb{R}$$

h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$h'(x) = -e^{2-x} + (x-1)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
h			

$$h(2) = 1 - e^0 = 0$$

b-

$$h(x) > 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \text{ et } h(2) = 0$$

2°) a-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

b-

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + e^{2-x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

(C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (Oy)

c-

$$f(x) - x = xe^{2-x} = \frac{x}{e^x} \times e^2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0 \text{ alors la}$$

droite d'équation $y = x$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

d-

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-x$	-	0	+

- $x \in]-\infty; 0[$, (C) en dessous de (Δ) .
- $x \in]0; +\infty[$, (C) est au dessus de (Δ) .
- (C) et (Δ) se coupent en l'origine O.

3°) a-

$$f'(x) = 1 + e^{2-x} + x(-e^{2-x})$$

$$= 1 + (1-x)e^{2-x} = h(x)$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f	$-\infty$		$+\infty$

b-

f continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f bijective de $\mathbb{R}$ sur lui même

c-

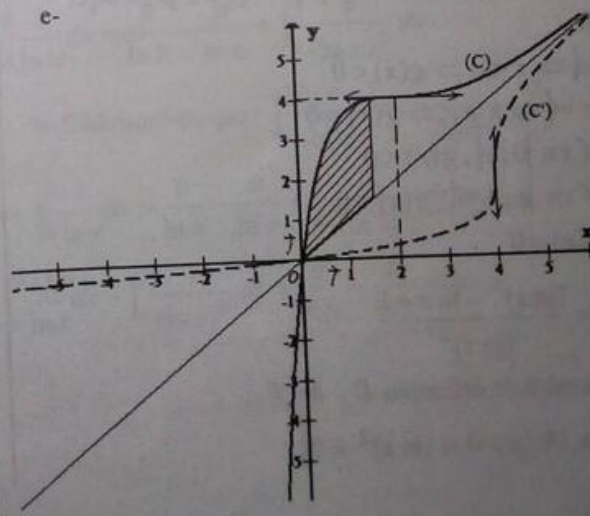
$f(2) = 4$ donc $f^{-1}(4) = 2$ et $f'(2) = 0$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en 4.

$$d- (T): y = 4$$

pour $x \leq 2$, $f(x) \leq 4$

pour $x \geq 2$, $f(x) \geq 4$

e-



f- construisons (C') (voir courbe en pointillé)

II/
4°)

$\forall x \in [0; \lambda], f(x) \geq x$ alors:

$$a(\lambda) = \int_0^\lambda (f(x) - x) dx \text{ u.a.}$$

$$= 4 \int_0^\lambda x e^{2-x} dx \times cm^2$$

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{2-x}$

On a: $u'(x) = 1$ et prenons $v(x) = -e^{2-x}$

$$\text{Donc } a(\lambda) = \left(\left[-x e^{2-x} \right]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{2-x} dx \right) \times 4cm^2$$

$$a(\lambda) = \left[-x e^{2-x} - e^{2-x} \right]_0^\lambda \times 4cm^2 \text{ et on trouve}$$

$$a(\lambda) = (4e^2 - 4\lambda e^{2-\lambda} - 4e^{2-\lambda}) cm^2$$

5°)

$$a = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda) = 4e^2 cm^2$$

ACTIVITE 18:

A/ $g(x) = (\ln x)^3 + \ln x - 2$

1°) Etudions le sens de variation de g .

Soit D_g le domaine de définition de g .

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} =]0; +\infty[$$

g est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{3 \ln^2 x + 1}{x}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, 3 \ln^2 x + 1 > 0$ et $x > 0$ donc $g'(x) > 0$
alors g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Calculons $g(e)$

$$g(e) = (\ln e)^3 + \ln(e) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0 \text{ donc } \underline{g(e) = 0}$$

2°) Déduisons-en le signe de $g(x)$

g est strictement croissante sur $]0; +\infty[, e \in]0; +\infty[$ et

$$g(e) = 0$$

$$x \in]0; e[\Rightarrow x < e \Rightarrow g(x) < 0$$

$$x \in]e; +\infty[\Rightarrow x > e \Rightarrow g(x) > 0$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \forall x \in]0; e[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]e; +\infty[, g(x) > 0 \\ g(e) = 0 \end{cases}$$

$$B/ f(x) = \frac{(\ln x)^3 - \ln x + 1}{(\ln x)^2}$$

3°) a- Ensemble de définition D_f de f .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } (\ln x)^2 \neq 0\}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ (\ln x)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]0; +\infty[\\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{Donc } D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

b- Etudions les limites de f aux bornes de D_f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^3 - \ln x + 1}{(\ln x)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln^2 x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)^3 - \ln x + 1}{(\ln x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} ((\ln x)^3 - \ln x + 1) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^2 = 0^+ \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2} \right) = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

4°) a- Etudions la dérivabilité de f sur D_f

Les fonctions $x \mapsto (\ln x)^3 - \ln x + 1$ et $x \mapsto (\ln x)^2$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$ en particulier sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ et de plus $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, (\ln x)^2 \neq 0$ d'où la fonction

$$f: x \mapsto \frac{(\ln x)^3 - \ln x + 1}{(\ln x)^2} \text{ est dérivable en tout point de } D_f.$$

$$\text{Vérifions que } \forall x \in D_f, f'(x) = \frac{g(x) \ln x}{x(\ln x)^2}$$

$$\forall x \in D_f,$$

$$f'(x) = \frac{\left(3 \frac{\ln^2 x}{x} - \frac{1}{x} \right) \ln^2 x - 2 \frac{\ln x}{x} (\ln^3 x - \ln x + 1)}{(\ln x)^4}$$

$$= \frac{3 \ln^4 x - \ln^2 x - 2 \ln^4 x + 2 \ln^2 x - 2 \ln x}{x(\ln x)^4}$$

$$= \frac{(\ln x)^4 + (\ln x)^2 - 2 \ln x}{x(\ln x)^4}$$

$$f'(x) = \frac{((\ln x)^3 + \ln x - 2) \ln x}{x(\ln x)^4} \text{ or } g(x) = (\ln x)^3 + \ln x - 2$$

$$\text{d'où } \forall x \in D_f, f'(x) = \frac{g(x) \ln x}{x(\ln x)^4}$$

b- Etudions le sens de variation de f

$\forall x \in D_f, x(\ln x)^4 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x) \ln x$ alors on déduit le tableau de signe suivant :

x	0	1	e	$+\infty$
$g(x)$	-	-	0	+
$\ln x$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	-	0	+

$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[\cup]e; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]1; e[, f'(x) < 0 \\ f'(e) = 0 \end{cases}$$

Alors f est strictement croissante sur $]0; 1[$ et sur $]e; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]1; e[$

Dressons le tableau de variation de f

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$

5°) Etudions la position relative de (C_f) et (C_h)

Pour $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$,

$$f(x) - \ln x = \frac{-\ln x + 1}{(\ln x)^2}$$

$$-\ln x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e \end{cases} \Leftrightarrow x \in [e; +\infty[$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \forall x \in [e; +\infty[, f(x) - \ln x < 0 \\ \forall x \in]0; 1[\cup]1; e[, f(x) - \ln x > 0 \\ \text{pour } x = e, f(x) - \ln x = 0 \end{cases}$$

Alors :

- (C_f) est au dessus de (C_h) sur $]0; 1[\cup]1; e[$
- (C_f) est en dessous de (C_h) sur $]e; +\infty[$
- (C_f) et (C_h) sont confondu pour $x = e$

Traçons (C_f) et (C_h)

Branche infinie :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est

asymptote à (C_f)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = 1$ est

asymptote à (C_f)

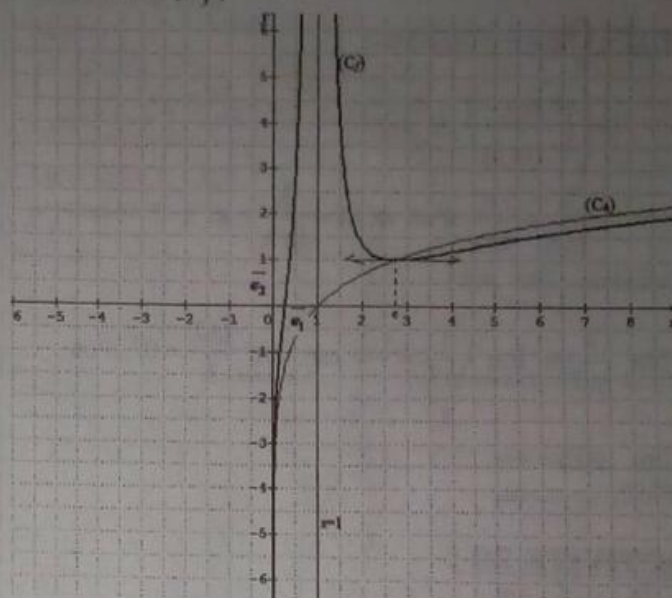
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x + \left(-\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln^2 x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln^2 x} \right) = 0 \text{ alors la}$$

courbe $(C_h): y = \ln x$ est asymptote à (C_f) aux

voisinage de $+\infty$

Courbe de (C_f)



$C/ 1 < a < b$

6°) a- Etablissons une formule d'intégration par partie pour

$$\text{l'intégrale : } \int_a^b \frac{1}{\ln x} dx$$

$$\text{Posons } u(x) = \frac{1}{\ln x} \text{ et } v'(x) = 1$$

$$\text{On a : } u'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2} \text{ et prenons } v(x) = x$$

$$\text{Alors } \int_a^b \frac{1}{\ln x} dx = \left[\frac{x}{\ln x} \right]_a^b + \int_a^b \frac{1}{(\ln x)^2} dx \text{ d'où}$$

$$\int_a^b \frac{1}{\ln x} dx = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a} + \int_a^b \frac{1}{(\ln x)^2} dx$$

$$\text{b- Déduisons-en que : } \int_a^b \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} dx = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a}$$

$$\text{De } \int_a^b \frac{1}{\ln x} dx = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a} + \int_a^b \frac{1}{(\ln x)^2} dx \text{ on a :}$$

$$\int_a^b \frac{1}{\ln x} dx - \int_a^b \frac{1}{(\ln x)^2} dx = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a} \text{ alors :}$$

$$\int_a^b \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2} \right) dx = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a} \text{ soit}$$

$$\int_a^b \left(\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \right) dx = \frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a}$$

7°) Calculons $A(\lambda)$

$\forall x \in [e; +\infty[, \ln x \geq f(x)$ alors

$$A(\lambda) = \int_e^\lambda (\ln x - f(x)) dx \cdot u.a$$

$$= \left(\int_e^\lambda \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} dx \right) u.a$$

$$= \frac{\lambda}{\ln \lambda} - \frac{e}{\ln e} \text{ d'où } A(\lambda) = \frac{\lambda}{\ln \lambda} - e$$

Calculons $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln \lambda}{\lambda}} = +\infty \text{ car } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda}{\lambda} = 0^+ \text{ d'où}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = +\infty$$

ACTIVITE 20 :

$u : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

1°) a- L'ensemble de définition de u

Soit D_u l'ensemble de définition de u ;

$$D_u = \{x \in [0; +\infty[/ x+1 \neq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$$

Posons $x+1=0$ et $x-1=0$

On a : $x=-1$ et $x=1$ alors $D_u = [0; 1[\cup]1; +\infty[$

b- calculons $u(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$

$$u(0) = \ln|1| - \frac{-2(0)}{0^2-1} \text{ donc } u(0) = 0$$

$$\text{Pour } x > 1, u(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{2x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = 0 \text{ puis}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$$

2°) Etudions le sens de variation de u puis dressons son tableau de variations.

u est dérivable en tout point de D_u et on a :

$$u'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x-1} \right)'}{\frac{x+1}{x-1}} - \left(\frac{2x}{x^2-1} \right)'$$

$$= \frac{-2}{x^2-1} - 2 \left[\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} \right] \text{ donc } u'(x) = \frac{4}{(x^2-1)^2}$$

$x \in D_u$

$u'(x) > 0$ sur D_u alors u est strictement croissante sur

$[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$

tableau de variation de u

x	0	1	$+\infty$
$u'(x)$	+		+
u	0		0

3°) Dédudions : $\begin{cases} \forall x \in [0; 1[, u(x) \geq 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, u(x) < 0 \end{cases}$

la fonction u est strictement croissante sur $[0; 1[$ et $u(0) = 0$

si $0 \leq x < 1$ alors $u(0) \leq u(x)$

d'où $u(x) \geq 0$ sur $[0; 1[$

la fonction u est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ donc $u(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$.

B/ $g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1$$

4°) Déterminons D_g puis étudions la limite de g et 1.

$$D_g = \{x \in [0; +\infty[/ x+1 \neq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$$

Donc $D_g = [0; 1[\cup]1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

5°) a- Vérifions que : $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$. Prouve que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) = 1$$

$$1 + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

Posons $t = \frac{2}{x-1}$; si $x \rightarrow +\infty$ alors $t \rightarrow 0$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

b- Dédudions-en que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$. Interprète géométriquement ce résultat.

sur $]1; +\infty[$, $g(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 1$

or $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

$g(x) = x \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) - 1$

$g(x) = 2 \frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) - 1$

Or $\frac{x}{2} = \left(\frac{x-1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$

Donc $g(x) = \left[2\left(\frac{x-1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)\right] + \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) - 1$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = 1$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2 - 1 = 1$

Interprétation graphique :

la courbe (C_g) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale

d'équation $y = 1$

c- Dressons le tableau de variation de g

calculons de $g'(x)$ d'abord

sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ est dérivable et est strictement positive

donc la fonction $x \mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ est dérivable sur $[0; 1[$ et sur

$]1; +\infty[$ par produit, la fonction $x \mapsto x \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ est

dérivable sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$

d'où g est dérivable sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$

$g'(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{-2x}{x^2-1}$ donc $g'(x) = u(x)$

or $u'(x) > 0$ sur $[0; 1[$ et $u'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$ alors g est strictement croissante sur $[0; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

tableau de variation de g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		-
g	-1	$+\infty$	1

on a $g(0) = -1$

d- Démontrons qu'il existe un réel α unique appartenant à $]0; 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$

Donne un encadrement d'ordre 1 de α .

g est continue et strictement croissante sur $]0; 1[$ et

$g(0) = -1$ et $g(1) = +\infty$ or $0 \in]-1; +\infty[$

ainsi l'équation $g(x) = 0$ admet une solution

unique $\alpha \in]0; 1[$

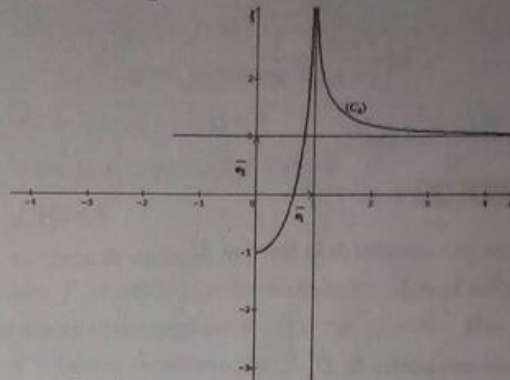
Encadrement de α

on a :

x	0	0.5	0.6	0.7
$g(x)$	-1	-0.45	-0.17	0.21

Donc $0.6 < \alpha < 0.7$

6°) Courbe de g .



C) $f : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = (x^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$

7°) dérivabilité de f sur $[0; 1[$

sur $]1; +\infty[$, $x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$ est dérivable et strictement positive

donc $x \mapsto \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ est dérivable sur cet intervalle

ce qui entraîne que : $x \mapsto (x^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ est

dérivable sur cette intervalle

d'où f est dérivable sur $[0; 1[$.

$f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $\forall x \in [0; 1[$

Et on a : $f'(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{(x^2 - 1)}{2} \times \frac{-2}{1-x^2}$

$= x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1 = g(x)$

D'où $f'(x) = g(x)$ sur $[0; 1[$

8°) Déterminons l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C_g) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

$$A = - \int_0^\alpha g(x) dx \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \int_0^\alpha g(x) dx$$

$$= [f(x)]_0^\alpha \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A = [f(0) - f(\alpha)] \times 4 \text{ cm}^2 = -4f(\alpha) \text{ cm}^2$$

$$A = 4(1 - \alpha^2) \ln\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right) \text{ cm}^2$$

$$\text{or } g(\alpha) = 0 \text{ donc } \alpha \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - 1 = 0$$

$$\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{D'où } A = \frac{4(1-\alpha^2)}{\alpha} \text{ cm}^2.$$

ACTIVITE 22 :

Partie A :

1°) Etudions les variations de la fonction U

$$U(x) = x^3 + 3x - 2$$

$$D_u = \mathbb{R}$$

• Limite aux bornes de D_u

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty$$

• Dérivée et sens de variation de U

U est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme

$$\forall x \in \mathbb{R}, U'(x) = 3x^2 + 3$$

$\forall x \in \mathbb{R}, U'(x) > 0$ alors U est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Tableau de variation de U

x	$-\infty$		$+\infty$
$U'(x)$		+	
$U(x)$			$+\infty$

2°) Démontrons que l'équation $U(x) = 0$ admet une solution unique β telle que : $\frac{1}{2} < \beta < 1$

U est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ d'où l'équation $U(x) = 0$ admet une solution unique

$\beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}; 1 \subset \mathbb{R}; \quad U\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} \quad \text{et} \quad U(1) = 2 \quad \text{on a :}$$

$$U\left(\frac{1}{2}\right) \times U(1) < 0 \text{ d'où } \frac{1}{2} < \beta < 1$$

3°) Dédudions le signe de $U(x)$ suivant x .

Des variations de U on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \beta[, U(x) < 0 \\ \forall x \in]\beta; +\infty[, U(x) > 0 \end{cases}$$

$$U(\beta) = 0$$

Partie B :

4°) Justifions que f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$D_f = \left\{ x \in]-\infty; 1[\mid (x-1)e^{-x} \exists \right\} \cup \left\{ x \in]1; +\infty[\mid x^3 + 1 \neq 0 \text{ et } \frac{x-1}{x^3+1} \geq 0 \right\}$$

$\forall x \in]-\infty; 1[$, $(x-1)e^x$ existe et $\forall x \in]1; +\infty[$, $x-1 > 0$ et

$x^3 + 1 > 0$ donc $\forall x \in]1; +\infty[$, $\frac{x-1}{x^3+1} > 0$ par suite :

$$D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

Soit $D_f = \mathbb{R}$

5°) a- Etudions la continuité de f en 1

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)e^x = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x \sqrt{\frac{x-1}{x^3+1}} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$$

On a ainsi : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, alors f est

continue en 1

b- Etudions la dérivabilité de f en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)e^x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} e^x = e, \text{ alors } f \text{ est}$$

dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = e$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \left(\sqrt{\frac{x-1}{x^3+1}} \right)}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x^3 + 1)\sqrt{\frac{x-1}{x^3+1}}} = +\infty \quad \text{car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x-1}{x^3+1}} = 0^+ \text{ puisque que } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty, \text{ alors}$$

f n'est pas dérivable à droite de 1.

Interprétation : Au point A (1 ; 0) la courbe (C_f) admet deux demi tangentes d'équations :

$$(T_g) : \begin{cases} x \leq 1 \\ y = e(x-1) \end{cases} \text{ et } (T_d) : \begin{cases} x = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

6°) a- Exprime $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et $f(x)$.

h est dérivable sur $]1; +\infty[$

$\forall x \in]1; +\infty[, h'(x) = 2f'(x) \times f(x)$ Calculons $h(x)$ et $h'(x)$ et déduisons que pour tout $x > 1$

$$f'(x) = \frac{xU(x)}{(x^3+1)^2} \times \frac{1}{2f(x)}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, h(x) = \frac{x^2(x-1)}{x^3+1} \text{ soit}$$

$$h(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^3 + 1}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[,$$

$$h'(x) = \frac{(3x^2 - 2)(x^3 + 1) - 3x^2(x^3 - x^2)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{x(x^3 + 3x - 1)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{xU(x)}{(x^3 + 1)^2} \text{ d'où } h'(x) = \frac{xU(x)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$\text{Déduisons que pour tout } x > 1, f'(x) = \frac{xU(x)}{(x^3 + 1)^2} \times \frac{1}{2f(x)}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, h'(x) = 2f'(x) \times f(x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = h'(x) \times \frac{1}{2f(x)}, \text{ D'où } \forall x \in]1; +\infty[,$$

$$f'(x) = \frac{xU(x)}{(x^3 + 1)^2} \times \frac{1}{2f(x)}$$

7°) Etudions les variations de f

• Limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0 \text{ car :}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x-1}{x^3+1}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x^3 + 1}} = 1 \text{ car :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2}{x^3 + 1} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

• Dérivée et signe de la dérivée

f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = xe^x \\ \forall x \in]1; +\infty[; f'(x) = \frac{xU(x)}{(x^3+1)^2} \times \frac{1}{2f(x)} \end{cases}$$

Sur $] -\infty; 1[$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc :

$\forall x \in]-\infty; 0[; f'(x) < 0$ et $\forall x \in]0; 1[; f'(x) > 0$; sur

$]1; +\infty[; f'(x) > 0$ en résumé on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[; f'(x) < 0 \\ \forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[; f'(x) > 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

• Sens de variation

Alors f est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et

strictement croissante sur $[0; 1]$ et sur $]1; +\infty[$

• Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	0	-1	0	1

8°) Etudions les branches infinies

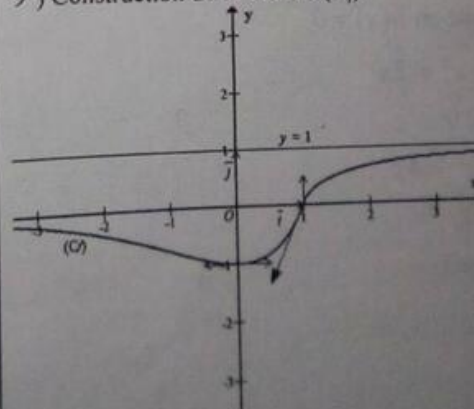
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, alors la droite (D_1) d'équation $y = 0$

est asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, alors la droite (D_2) d'équation $y = 1$ est

asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

9°) Construction de la courbe (C_f)



Partie C :

10°) a- Détermine a et b pour que F soit une primitive sur $]-\infty; 1]$ de la fonction f .

F est une primitive de $f \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty; 1]$,

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in]-\infty; 1], e^x(ax + a + b) = (x-1)e^x \text{ en procédant par}$$

identification on trouve $\underline{a=1}$ et $\underline{b=-2}$

donc $\forall x \in]-\infty; 1]$, $F(x) = (x-2)e^x$

b- Calculons $A(\alpha)$ en cm^2

$$A(\alpha) = -[F(x)]_{\alpha}^0 u.a = (2 + (\alpha-2)e^{\alpha})u.a \text{ d'où}$$

$$\underline{A(\alpha) = 4(2 + (\alpha-2)e^{\alpha})cm^2}$$

c-

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha e^{\alpha} - 2e^{\alpha} + 2) \times 4 = 8 cm^2 \text{ car :}$$

$$\begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \alpha e^{\alpha} = 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{\alpha} = 0 \end{cases} \text{ d'où } \underline{\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha) = 8 cm^2}$$

11°) a- Justifions que H est une primitive de la fonction :

$$x \mapsto (x^2 - 2x + 1)e^{2x}.$$

H est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{2x} + 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{2x}$$

$$= (x^2 - 2x + 1)e^{2x} \text{ alors } H \text{ est une primitive sur } \mathbb{R}$$

de la fonction $x \mapsto (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$

b) Calculons le volume du solide

$$V = \left(\int_0^1 \pi(f(x))^2 dx \right) u.v$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} \right) e^{2x} \right]_0^1 \times 8 cm^3$$

$$\text{d'où } \underline{V = 2(e^2 - 5)\pi cm^3}$$

ACTIVITE 23:

Partie A :

$$u(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$$

1°) Résolvons l'équation $u(x) = 0$

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 1+x^2 = 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ l'ensemble des solutions de l'équation}$$

$$u(x) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \text{ est } S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

2°) Déterminons le signe de $u(x)$

La fonction $x \mapsto u(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ donc } u \text{ garde un signe constant sur}$$

$$\text{chacun des intervalles } \left] -\infty; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[\text{ et sur } \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[$$

$$\text{Or } 0 \in \left] -\infty; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[\text{ et } u(0) = -1 < 0$$

$$1 \in \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[\text{ et } u(1) = 2 - \sqrt{2} > 0 \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \left] -\infty; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[u(x) < 0 \\ \forall x \in \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[u(x) > 0 \end{cases}$$

$$u\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

Partie B :

$$g(x) = x - 2\sqrt{1+x^2}$$

3°) a- Justifions que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1+x^2$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$ donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

b- Calculons la dérivée $g'(x)$ de la fonction g .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) &= 1 - \frac{4x}{2\sqrt{1+x^2}} \\ &= 1 - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} - 2x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{-u(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

c- Déduisons-en le signe de $g'(x)$. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $-u(x)$

$$\text{d'où : } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; \frac{\sqrt{3}}{3}[, g'(x) > 0 \\ \forall x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[, g'(x) < 0 \\ g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

4°) Déterminons les limites de g aux bornes de D

$$D = \{x \in \mathbb{R} / 1+x^2 \geq 0\}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$ d'où $D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2\sqrt{1+x^2} = -\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2\sqrt{1+x^2} = -\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \frac{2x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - 2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \right] = -\infty \text{ car} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \right) = -1 \end{cases}$$

*Dressons le tableau de variation de g

$$\text{On a : } g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{1+\frac{1}{3}} = \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$\sqrt{3}$	$-\infty$

5°) a- Déterminons les équations des asymptotes à la courbe (C)

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2\sqrt{1+x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + 2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - 3x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1+x^2} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+x^2} + x} = 0 \text{ d'où la droite} \end{aligned}$$

d'équation $y = 3x$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2\sqrt{1+x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{2x + 2\sqrt{1+x^2}} = 0 \text{ d'où la droite}$$

d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

b- Etudions la position de (C) par rapport à ses asymptotes.

$$\begin{aligned} \bullet \forall x \in]-\infty; 0[, g(x) - 3x &= -2x - 2\sqrt{1+x^2} \\ \bullet \forall x \in]-\infty; 0[, g(x) - 3x &= -2(x + \sqrt{1+x^2}) \end{aligned}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, 1+x^2 > x^2$$

$$1+x^2 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > |x|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > -x \text{ donc } \forall x \in]-\infty; 0[,$$

$$\sqrt{1+x^2} + x > 0 \text{ alors } -2(\sqrt{1+x^2} + x) < 0 \text{ d'où (C) est en}$$

dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$

$$\begin{aligned} \bullet \forall x \in]0; +\infty[, g(x) + x &= 2x - 2\sqrt{1+x^2} \\ &= 2(x - \sqrt{1+x^2}) \end{aligned}$$

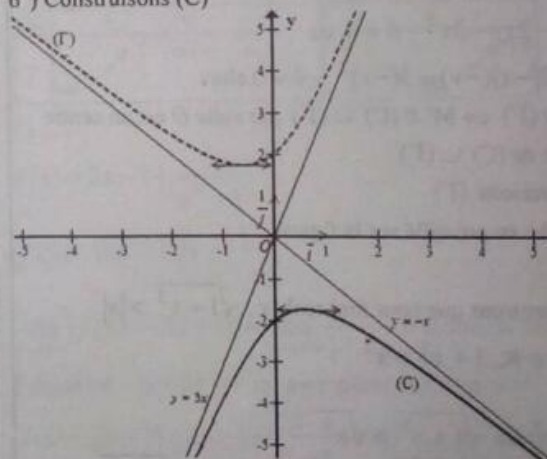
$$\forall x \in]0; +\infty[, \sqrt{1+x^2} > |x|$$

$$\text{et } \forall x \in]0; +\infty[\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > x$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{1+x^2} < 0 \text{ donc}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) + x < 0$ d'où (C) est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$

6°) Construisons (C)



Partie C :

7°) Déterminons la fonction h

Soit $x \in \mathbb{R}$, On a : $h(-x) = -g(x)$ donc

$h(x) = -g(-x) = x + 2\sqrt{1+x^2}$ d'où h est la fonction définie par :

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + 2\sqrt{1+x^2}$$

8°) Prouvons que $(C) \cup (\Gamma)$ est la courbe d'équation :

$$y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$$

Soit $M(x; y)$ un point du plan,

$$M(x; y) \in (C) \cup (\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (C) \\ \text{ou} \\ M \in (\Gamma) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = g(x) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = h(x) \end{cases}$$

$$M(x; y) \in (C) \cup (\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x - 2\sqrt{1+x^2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x + 2\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y - x = -2\sqrt{1+x^2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y - x = 2\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y^2 - 2xy + x^2 = 4 + 4x^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y^2 - 2xy + x^2 = 4 + 4x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0 \end{cases} \text{ donc}$$

$$M(x; y) \in (C) \cup (\Gamma) \Leftrightarrow y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$$

d'où $(C) \cup (\Gamma)$ est la courbe d'équation :

$$y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$$

9°) Dédudons-en que O est un centre de symétrie de la courbe $(C) \cup (\Gamma)$

Soit $M(x; y)$ et $M'(-x; -y)$

M' est symétrique de M par rapport à O

$$M \in (C) \cup (\Gamma) \Leftrightarrow y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\text{Or } (-y)^2 - 2(-x)(-y) - 3(-x)^2 - 4 = y^2 - 2xy - 3x^2 - 4$$

$$\text{donc } y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-y)^2 - 2(-x)(-y) - 3(-x)^2 - 4 = 0 \text{ alors}$$

$M \in (C) \cup (\Gamma) \Leftrightarrow M' \in (C) \cup (\Gamma)$ par suite O est un centre de symétrie de $(C) \cup (\Gamma)$

10°) Construisons (Γ)

(Γ) = courbe en pointillé sur la figure.

Partie D :

11°) a) Démontrons que pour tout réel x , $\sqrt{1+x^2} > |x|$

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > x^2$$

$$1+x^2 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > |x| \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} > |x|$$

b- Dédudons-en l'ensemble de définition de f

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / 1+x^2 \geq 0 \text{ et } x + \sqrt{1+x^2} > 0 \right\}$$

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0 \text{ et } \sqrt{1+x^2} > |x|$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \sqrt{1+x^2} > |x| &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x^2} > x \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \sqrt{1+x^2} > -x \\ x < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{1+x^2} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + \sqrt{1+x^2} > 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 0 \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$ et $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ d'où $D_f = \mathbb{R}$

12°) Calculons $f'(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée produit et somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1+x}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad f'(x) = \frac{2+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\sqrt{1+x^2}$$

Dédudons-en une primitive sur $\mathbb{R}$ de g

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x - 2\sqrt{1+x^2}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2\sqrt{1+x^2}$ est f donc une

primitive sur $\mathbb{R}$ de g est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - f(x)$.

D'où une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est la fonction :

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

13°) Calculons en centimètre carré l'aire de l'ensemble

points $M(x; y)$ du plan qui vérifie : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ g(x) \leq y \leq -1 \end{cases}$

Soit A cette aire

$$A = \left(\int_0^1 (-x - g(x)) dx \right) u.a \text{ or } u.a = 4 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-x - g(x)) dx &= \left[-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 \\ &= -1 + \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$A = 4[\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1] \text{ cm}^2$$

ACTIVITE 28 :

$$f(x) = \frac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$$

1°)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \neq 0\}$$

Posons $e^x - 1 = 0$

$$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0 \text{ donc } D_f = \mathbb{R}.$$

Posons $f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1}$ avec $x \neq 0$

On a : $f(x) = \frac{ax(e^x - 1) + b(e^x - 1) + c}{e^x - 1}$

$$f(x) = \frac{(ax + b)e^x - ax + c - b}{e^x - 1}; x \neq 0 \text{ d'autre part :}$$

$$f(x) = \frac{(2x - 1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}; x \neq 0$$

par identification : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = b + 2 = 1 \end{cases}$ ainsi $a = 2$; $b = -1$ et

$$c = 1.$$

2°) Limites aux bornes de D_f

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1 \text{ ainsi}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = 0^- \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2x - 1 = -1 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

De même $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

3°) a- calculons $f'(x)$.

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

f est dérivable en tout point de D_f et on a :

$$f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2((e^x - 1)^2 - e^x)}{(e^x - 1)^2} \text{ soit}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}; x \neq 0$$

b- Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$

posons $e^x = t$ et $2(e^x)^2 - 5(e^x) + 2 = 0$

donc $2t^2 - 5t + 2 = 0$

$$\Delta = 9; \sqrt{\Delta} = 3 \text{ alors :}$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5-3}{4} \text{ ou } t = \frac{5+3}{4}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = 2$$

$$e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2 \text{ et } e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

D'où l'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de cette équation est :

$$S = \{-\ln 2; \ln 2\}$$

c- Déduisons en le sens de variation de f et dresse le tableau de variations de f .

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2e^{2x} - 5e^x + 2$

$$2e^{2x} - 5e^x + 2 = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)(e^x - 2) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$$

On obtient ainsi le tableau de signe suivant de $f'(x)$.

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$2e^{2x} - 1$	-	0	+	+	+
$e^x - 2$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+

f est alors strictement croissantes sur les intervalles $]-\infty; -\ln 2]$ et $[\ln 2; +\infty[$ et strictement décroissante sur $[-\ln 2; 0]$ et sur $]0; \ln 2]$

$$f(\ln 2) = 2 \ln 2 \text{ et } f(-\ln 2) = -2 \ln 2 - 3$$

tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	-	+
f	$-\infty$	$-2 \ln 2 - 3$	$+\infty$	$2 \ln 2$	$+\infty$

4°)

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$[f(x) - (2x - 1)] = \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \text{ donc la droite}$$

d'équation : $y = 2x - 1$ est asymptote de (C) en $+\infty$

$$f(x) - (2x - 2) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} - 2x + 2$$

$$= \frac{e^x}{e^x - 1} \text{ or } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 2)] = 0 \text{ et par suite}$$

la droite d'équation : $y = 2x - 2$ est asymptote de (C) en $-\infty$

L'autre asymptote :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Alors la droite d'équation $x=0$ est asymptote de (C)
5°)

D_f est symétrique par rapport à 0 et on a :

$$x_\Omega = \frac{x+(-x)}{2} = 0 \text{ et } y_\Omega = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} \text{ et } f(-x) = -2x - 1 + \frac{1}{e^{-x} - 1}$$

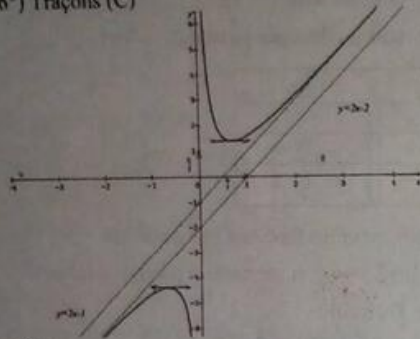
$$f(x) + f(-x) = -2 + \frac{1}{e^{-x} - 1} + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$f(x) + f(-x) = -2 + \frac{e^x}{1 - e^x} + \frac{1}{e^x - 1} = -3 ; x \neq 0$$

$$\text{Donc } y_\Omega = -\frac{3}{2} \text{ et par suite } \Omega\left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\Omega\left(0, -\frac{3}{2}\right) \text{ est centre de symétrie pour (C).}$$

6°) Traçons (C)



7°) a-

$$f(x) = 2x + \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x - 1} \text{ avec } x \neq 0$$

$$\text{On a : } f(x) = \frac{2x(e^x - 1) - \alpha(e^x - 1) + \beta e^x}{e^x - 1}$$

$$f(x) = \frac{(2x + \alpha + \beta)e^x - 2x - \alpha}{e^x - 1} ; x \neq 0 \text{ or}$$

$$f(x) = \frac{(2x - 1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$$

$$\text{par identification : } \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha = -2 \end{cases} \text{ donc } \alpha = -2 \text{ et } \beta = 1$$

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

b- k est un réel supérieur ou égal à 2.

$$f(x) - (2x - 1) = -1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$A(k) = \int_{\ln 2}^{\ln k} \left(-1 + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) dx \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \left[-x + \ln(e^x - 1) \right]_{\ln 2}^{\ln k} \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A(k) = \left[\ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right) \right]_{\ln 2}^{\ln k} \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A(k) = \left(\ln \left(\frac{k-1}{k} \right) - \ln \frac{1}{2} \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A(k) = \left(\ln \left(\frac{k-1}{k} \right) + \ln 2 \right) \times 4 \text{ cm}^2 \text{ d'où}$$

$$A(k) = 4 \ln \left[2 \left(\frac{k-1}{k} \right) \right] \text{ cm}^2$$

$$\text{c- } \lim_{k \rightarrow +\infty} A(k) = 4 \ln 2 \text{ cm}^2$$

ACTIVITE 29 :

A°)

$$\begin{cases} g(x) = x - \sqrt{x^2 - x} & , \text{ si } x \leq 0 \\ g(x) = x^2 \ln x & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1°) Etudions la continuité de g en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - \sqrt{x^2 - x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$$

$$g(0) = 0 - \sqrt{0^2 - 0} = 0$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$ donc g est continue en 0.

2°) Etudions la dérivabilité de g en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \sqrt{x^2 - x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = +\infty \text{ donc } g \text{ n'est pas dérivable à gauche}$$

en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0 \text{ d'où } g \text{ est dérivable à droite en 0 et}$$

$$g'_d(x) = 0$$

Au total g n'est pas dérivable en 0.

Signification graphique des résultats

* $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = +\infty$ d'où la courbe (C_g) admet à gauche

au point $O(0; 0)$ une demi-tangente parallèle à l'axe des

ordonnées, définie par : $\begin{cases} x = 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

* $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0$ donc (C_g) admet à droite au point

$O(0; 0)$ une demi-tangente d'équation $\begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

3°) Etudions les variations de g

$D_g = \mathbb{R}$

La fonction $x - \sqrt{x^2 - x}$ est dérivable sur $] -\infty; 0[$ comme composée et somme de fonction dérivables.

La fonction $x \mapsto x^2 \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

De plus g n'est pas dérivable en 0

Au total g est dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$

et $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in] -\infty; 0[, g'(x) = 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 2x \ln x + x \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} \forall x \in] -\infty; 0[, g'(x) = 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \\ \forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = x(1 + 2 \ln x) \end{cases}$$

Signe de $g'(x)$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = x(1 + 2 \ln x)$$

$x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $1 + 2 \ln x$

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; +\infty[, 1 + 2 \ln x = 0 &\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

$$1 + 2 \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in]0; \frac{1}{\sqrt{e}}[$$

$$\begin{aligned} D' \text{ où } \forall x \in]0; +\infty[: &\begin{cases} g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; \frac{1}{\sqrt{e}}[\\ g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty[\\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-x} - 2x + 1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $u(x) = 2\sqrt{x^2-x} - 2x + 1$

$$\forall x \in]0; +\infty[, u(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x} = 2x - 1 \text{ ce qui est}$$

absurde car $\forall x \in] -\infty; 0[, 2x - 1 < 0$ donc $u(x)$ ne

s'annule pas sur $] -\infty; 0[$ or u est continue sur $] -\infty; 0[$

alors u garde un signe constante sur $] -\infty; 0[$ de plus

$$-1 \in] -\infty; 0[\text{ et } u(-1) = 2\sqrt{2} - 1 > 0 \text{ donc}$$

$$\forall x \in] -\infty; 0[, u(x) > 0$$

Au total, on a :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; \frac{1}{\sqrt{e}}[\\ g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty[\cup] -\infty; 0[\\ g'(\frac{1}{\sqrt{e}}) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sens de variation de g

g est strictement décroissante sur $]0; \frac{1}{\sqrt{e}}[$ et strictement

croissante sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty[$

Limites de g aux bornes de D_g

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt{x^2 - x} = -\infty$$

Tableau de variation de D_g

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$g'(x)$	+		-	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\frac{1}{2e}$	$+\infty$

4°) a- Prouvons que la droite (D) est asymptote à (C_g) au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - x} - x + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} - x \right) - \sqrt{x^2 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{2} - x + x^2 - x^2 + x}{\left(\frac{1}{2} - x \right) + \sqrt{x^2 - x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{2}}{x \left(\frac{1}{2x} - 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) \right] = 0, \text{ d'où la droite } (D) \text{ d'équation :}$$

$y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C_g) au voisinage de $-\infty$.

b- Position relative de (C_g) et (D) .

$$\forall x \in]-\infty; 0[, g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} - x \right) - \sqrt{x^2 - x}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, \frac{1}{2} - x - \sqrt{x^2 - x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 - x} = \frac{1}{2} - x \text{ or } \forall x \in]-\infty; 0[, \frac{1}{2} - x < 0 \text{ donc la}$$

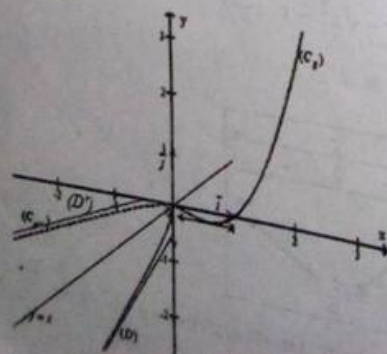
fonction $v: x \mapsto \frac{1}{2} - x - \sqrt{x^2 - x}$ ne s'annule pas sur

$]-\infty; 0[$ et est continue, de plus $v(-1) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$ alors

$\forall x \in]-\infty; 0[, g(x) - \left(2x - \frac{1}{2} \right) > 0$ d'où (C_g) est au dessus de (D) .

5° Courbe de (C_g)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ donc (C_g) admet une branche parabolique de direction l'axe $(O; \vec{j})$



B°)

$$\varphi:]-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \varphi(x) = g(x)$$

6° Justifions que φ est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur J .
 g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ donc g réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ sur $g(]-\infty; 0])$ or $g(]-\infty; 0]) =]-\infty; 0]$ d'où φ est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur $]-\infty; 0] = J$.

$$7°) \text{ Prouvons que } \forall x \in J, \varphi^{-1}(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

Soit $x \in]-\infty; 0]$ et $y \in]-\infty; 0]$ tel que $y = g(x)$

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = x - \sqrt{x^2 - x}$$

$$\Leftrightarrow y - x = -\sqrt{x^2 - x}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow (2y-1)x = y^2$$

$$y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2y-1} \text{ car } y \in]-\infty; 0], 2y-1 \neq 0$$

d'où φ^{-1} est définie par : $\forall x \in]-\infty; 0], \varphi^{-1}(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

8°) Précisons le tableau de variation, l'asymptote à $(C_{\varphi^{-1}})$ de et autres propriétés utiles de φ^{-1} .

*Tableau de variation de φ^{-1}

x	$-\infty$	0
$\varphi^{-1}(x)$		+
φ^{-1}		

*Précisons l'asymptote à $(C_{\varphi^{-1}})$ de la droite La droite

$(D): y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C_{φ}) au voisinage de $-\infty$

donc son symétrique (D') par rapport à la droite d'équation

$y = x$ est asymptote à $(C_{\varphi^{-1}})$ au voisinage de $-\infty$ or

$$x = 2y - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \text{ d'où } (D'): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

*Autres propriétés :

-Les courbes $(C_{\varphi^{-1}})$ et (C_{φ}) sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$.

• (C_φ) admet à gauche au point $O(0; 0)$ une demi-tangente

d'équation $\begin{cases} x=0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ donc $(C_{\varphi^{-1}})$ admet à gauche au point

$O(0; 0)$ une demi-tangente d'équation : $\begin{cases} y=0 \\ x \leq 0 \end{cases}$

• Traçons $(C_{\varphi^{-1}})$

Voir courbe (en pointillé) de la question A°) 5.

9°) a- Démontrons que, $\forall x \in J$, $\varphi^{-1}(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{2x-1}$

Par la division euclidienne de x^2 par $2x-1$, on a :

$$\begin{array}{r} x^2 \\ - (2x-1) \\ \hline -x^2 + \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} \end{array}$$

d'où $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2x-1}$ d'où $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$ et $\gamma = \frac{1}{4}$.

b- Donne une primitive de φ^{-1}

Une primitive sur $]-\infty; 0]$ de φ^{-1} est la fonction Φ définie par :

$$\forall x \in]-\infty; 0], \Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\ln|2x-1| \text{ or}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0], |2x-1| = 1-2x \text{ d'où } \forall x \in]-\infty; 0], \text{ on}$$

$$a: \Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\ln(1-2x)$$

10°) a- Calculons A_1

$$A_1 = \left(\int_{-1-\sqrt{2}}^{-1} (\varphi^{-1}(x) + 1) dx \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \left(\int_{-1-\sqrt{2}}^{-1} (\varphi^{-1}(x) + 1) dx \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A_1 = [x + \Phi(x)]_{-1-\sqrt{2}}^{-1} \times 4 \text{ cm}^2 \text{ on trouve}$$

$$A_1 = \left(-2 + 3\sqrt{2} + \frac{1}{2}(\ln 3 - 2\ln(1+\sqrt{2})) \right) \text{ cm}^2$$

b- Calculons A_2

$$A_2 = \left(\int_{-1}^0 \varphi^{-1}(x) - x \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \left[-\frac{1}{2}x^2 + \Phi(x) \right]_{-1}^0 \times 4 \text{ cm}^2 \text{ et trouve :}$$

$$A_2 = \left(2 - \frac{1}{2}\ln 3 \right) \text{ cm}^2$$

c- Dédudisons-en A_3 et A

Soit A_1 l'aire de $E_1 \cup E_2$

$$A_3 = A_1 + A_2 = [3\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})] \text{ cm}^2$$

ACTIVITE 34 :

Partie I :

1°) a- Etudions les variations de u

$$u(x) = x - \ln x$$

$$D_u =]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = 1 \end{cases}$$

u est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout x

élément de $]0; +\infty[$, on a : $u'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ soit $u'(x) = \frac{x-1}{x}$

Le signe de $u'(x)$ est celui de $x-1$ car $\forall x \in]0; +\infty[$, $x > 0$

Posons $x-1=0$

$x-1 \Leftrightarrow x=1$ on obtient le tableau suivant du signe de $u'(x)$

x	0	1	$+\infty$
$u'(x)$		-	+

Alors u est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement

croissante sur $[1; +\infty[$

Tableau de variation de u

$$u(1) = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$u(x)$		-	+
u	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

b- Dédudisons-en que $\forall x \in]0; +\infty[$, $x - \ln x \neq 0$

u admet sur $]0; +\infty[$ un minimum en 1 qui est $u(1) = 1$;

$1 > 0$ alors $\forall x \in]0; +\infty[$, $u(x) \neq 0$ donc $\forall x \in]0; +\infty[$, $x - \ln x \neq 0$.

2°) a- Démontrons que $D = [-1; +\infty[$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}, \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x} + 1, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On a : $D = D_1 \cup D_2$ avec

$$D_1 = \left\{ x \in]-\infty; 0] / 1-x^2 \geq 0 \text{ et } 1+\sqrt{1-x^2} \neq 0 \right\}$$

$$1-x^2=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=1$$

$$\text{donc } 1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$$

$$1+\sqrt{1-x^2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=-1 \text{ (absurde) alors}$$

$$D_1 = (]-\infty; 0]) \cap [-1; 1] = [-1; 0]$$

$$D_2 = \left\{ x \in]0; +\infty[/ x > 0 \text{ et } x - \ln x \neq 0 \right\}$$

Or d'après 1°) a- $\forall x \in]0; +\infty[, x - \ln x \neq 0$ donc

$$D_2 =]0; +\infty[$$

$$D = D_1 \cup D_2 \Rightarrow D = [-1; +\infty[$$

b- Démontrons que f est continue sur D

f est continue sur chacun des intervalles $[-1; 0[$ et $]0; +\infty[$ (a)

Étudions la continuité de f en 0

$$f(0) = \frac{0}{1+\sqrt{1-0^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x - \ln x} + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right)} + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right)} + 1 = -1 + 1 = 0$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0

(b)

(a) et (b) $\Rightarrow f$ est continue sur D

c- Étudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ donc } f$$

est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln x}{x - \ln x} + 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln x + x - \ln x}{x - \ln x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x - \ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(x - \ln x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x - \ln x)} = 0 \text{ car}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln x = +\infty ; 0 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à droite en 0

et $f'_d(0) = 0$

On a $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0

interprétation géométrique des résultats obtenus.

(C) admet au point d'abscisse 0 deux demi tangentes :

D'une part à gauche en 0 définie par : $\begin{cases} x \leq 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$ et d'autre part

à droite en 0 définie par : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y = 0 \end{cases}$

d- Étudions la dérivabilité de f en -1

$$f(-1) = \frac{-1}{1+\sqrt{1-(-1)^2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{x+1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x + 1 + \sqrt{1 - x^2}}{(x + 1)(1 + \sqrt{1 - x^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{(x + 1)(1 + \sqrt{1 - x^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + \frac{1 - x^2}{(x + 1)(1 + \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + \frac{1 - x}{(1 + \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en -1

et (C) admet au point d'abscisse une demi tangente définie

$$\text{par : } \begin{cases} x = -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

3°) Etudions les variations de f .

$$D = [-1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - \ln x} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{\ln x} - 1\right)} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln x}{x}} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{\ln x} - 1\right)} = 0 \text{ et par suite } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

f est dérivable sur chacun des intervalles $] -1; 0[$ et

$] 0; +\infty[$ et

$\forall x \in] -1; 0[$,

$$f'(x) = \frac{(x)(1 + \sqrt{1 - x^2}) - (1 + \sqrt{1 - x^2})'(x)}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \sqrt{1 - x^2}) - \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}(x)}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \sqrt{1 - x^2}) + \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2} + x^2}{\sqrt{1 - x^2}(1 + \sqrt{1 - x^2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1 - x^2 + x^2}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{(1 + \sqrt{1 - x^2})^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{d'où } \forall x \in] -1; 0[, f'(x) = \frac{1}{(1 + \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\forall x \in] 0; +\infty[, f'(x) = \frac{\ln'(x)(x - \ln x) - (x - \ln x)' \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(x - \ln x) - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{\ln x}{x} - \ln x + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2} \text{ d'où } \forall x \in] 0; +\infty[,$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

Sur $] -1; 0[$, $(1 + \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2} > 0$ et $1 > 0$ donc

$$f'(x) > 0, \forall x \in] -1; 0[$$

Sur $] 0; +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \ln x$ car

$$(x - \ln x)^2 > 0$$

Posons $1 - \ln x < 0$

$$1 - \ln x \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in] 0; +\infty[\\ \ln x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in] 0; +\infty[\\ x \geq e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in [e; +\infty[$$

Alors $f'(x) < 0, \forall x \in [e; +\infty[$; $f'(x) > 0, \forall x \in] 0; e[$

et $f'(e) = 0$ en résumé

$$\begin{cases} \forall x \in]-1; 0[\cup]0; e[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]e; +\infty[, f'(x) < 0 \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e \end{cases}$$

Alors f est strictement croissante sur $[-1; e]$ et f est strictement décroissante sur $[e; +\infty[$

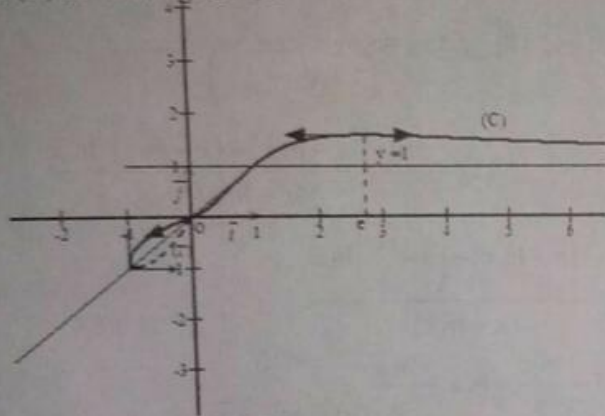
Tableau de variation de f

$$f(e) = \frac{\ln e}{e - \ln e} + 1 = \frac{1}{e-1} + 1 = \frac{e}{e-1}$$

x	-1	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
f	-1		$\frac{e}{e-1}$	

b- Construisons (C)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y=1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$



Partie II :

4°) a- Démontrons que g est bijective

f est continue et strictement croissante sur I et

$f(I) = J = [-1; 0]$ d'où g est une bijection.

b- Tableau de variation de g^{-1}

$g^{-1} : [-1; 0] \rightarrow [-1; 0]$ et g^{-1} a le même sens de variation que g . On a :

x	-1	0
$(g^{-1})'$	-	+
g^{-1}	-1	0

Construction de (Γ) (voir figure)

c- Déterminons $g^{-1}(x)$, $\forall x \in J$

Soit $x \in J$ et $y \in I$ posons $g^{-1}(x) = y$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}} = x$$

$$\Leftrightarrow y = x(1 + \sqrt{1 - y^2})$$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow y = x + x\sqrt{1 - y^2}$$

$$\Leftrightarrow y - x = x\sqrt{1 - y^2}$$

$$\Leftrightarrow (y - x)^2 = x^2(1 - y^2)$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 - x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + x^2y^2 = 2xy$$

$$\Leftrightarrow y^2(1 + x^2) = 2xy$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{2xy}{1 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x}{1 + x^2} \text{ avec } y \neq 0 \text{ d'où}$$

$$g^{-1} : [-1; 0] \rightarrow [-1; 0]$$

$$x \mapsto \frac{2x}{1 + x^2}$$

d- Déterminons $\int_{-1}^0 g^{-1}(x) dx$

$$\int_{-1}^0 g^{-1}(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{2x}{1 + x^2} dx$$

$$= [\ln(1 + x^2)]_{-1}^0$$

$$= 0 - \ln 2 \text{ d'où } \int_{-1}^0 g^{-1}(x) dx = -\ln 2$$

5°) a- Calculons A

$$A = \int_{-1}^0 (x - g^{-1}(x)) dx \text{ u.a}$$

$$A = \int_{-1}^0 x dx - \int_{-1}^0 g^{-1}(x) dx \text{ u.a}$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \ln 2 \text{ d'où } A = \left(-\frac{1}{2} + \ln 2 \right) \text{ u.a}$$

b- Dédudisons l'aire du domaine plan compris entre (C) et (Γ)

Soit $\mathcal{A}$ cette aire :

$$\mathcal{A} = 2A \text{ d'où } \mathcal{A} = (-2 + 2\ln 2) \text{ u.a}$$

ACTIVITE 37:

On pose pour tout réel t de $[1; +\infty[$, $g(t) = \frac{e^{-t}}{t}$

La fonction g est continue sur $[1; +\infty[$ donc la fonction G

définie par : $G(x) = \int_1^x g(t) dt$ est l'unique primitive de g qui

s'annule en 1.

On peut remarquer que, pour tout réel x de $[1; +\infty[$,

$$F(x) = G(x^2).$$

Donc F est la composée de la fonction "carré" et de la fonction G .

La restriction de la fonction "carré" à $[1; +\infty[$ est dérivable sur $[1; +\infty[$ et est à valeurs dans $[1; +\infty[$; la fonction G est dérivable sur $[1; +\infty[$ donc par composée la fonction F est dérivable sur $[1; +\infty[$.

Calcule de la dérivée de F

$$F'(x) = 2xG'(x^2) = 2xg(x^2) = 2x \times \frac{e^{-x^2}}{x^2} \text{ d'où}$$

$$F'(x) = 2 \frac{e^{-x^2}}{x}$$

ACTIVITE 38 :

1°) a- Calculons $I + J$

Notons que : $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Les fonctions

f et g sont définies sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi$$

($k \in \mathbb{Z}$)

D'après la propriété de linéarité de l'intégrale :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc } I + J = \frac{\pi}{2}$$

b- Calculons $J - I$

$$J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$\text{Soit } u(x) = \sin x + \cos x \quad J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u'(x)}{u(x)} dx$$

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $u(x) > 0$, donc une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est $\ln u(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } J - I &= \left[\ln(u(x)) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left(u\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \ln(u(0)) \\ &= \ln 1 - \ln 1 = 0 \text{ d'où } J - I = 0 \end{aligned}$$

c- Déduisons I et J

$$I \text{ et } J \text{ sont solutions du système } \begin{cases} I + J = \frac{\pi}{2} \\ -I + J = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = J \\ 2I = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } I = J = \frac{\pi}{4}$$

2°) a- Calculons $f'(x)$ et déduisons la somme $K + L$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - \sin x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

Déduisons $K + L$

Compte tenu de l'égalité $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, et d'après la propriété de linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} K + L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = [f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = 1 \end{aligned}$$

Donc $K + L = 1$

b- Calculons K et L

D'après la propriété de linéarité de l'intégrale,

$$K - L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$$

$$\text{Or } \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\begin{aligned} (f(x))^2 - (g(x))^2 &= (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \\ &= f(x) - g(x) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } K - L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx \\ &= I - J = 0 \text{ d'où } K - L = 0 \end{aligned}$$

K et L sont alors solutions du système $\begin{cases} K + L = 1 \\ K - L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} K = \frac{1}{2} \\ L = \frac{1}{2} \end{cases}$$

c- Déduisons M

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \text{ donc}$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}((\sin x + \cos x)^2 - \sin^2 x - \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2} dx$$

$$= 2M = \int_0^x 2t dt = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \int_0^x 2t dt = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^x 2t dt = \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = 2x$$

$$M = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

ACTIVITE 39:

1°) Justifions que F est définie sur I .

La fonction $x \mapsto 1-x^2$ est continue sur I et $\forall x \in I$,

$1-x^2 > 0$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur

I par suite f est continue sur l'intervalle I , 0 est un réel

de I alors la fonction $F: x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est définie sur I .

2°) Etudions le sens de variation de F .

F est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en 0 , alors

F est dérivable sur I et $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in I$, $F'(x) > 0$ et F est strictement croissante sur I .

3°) Démontrons que F est impaire.

$\forall x \in I$ on a: $(-x) \in I$ et $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

$\forall x \in I$ on a: $(-x) \in I$ et

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt$$

$$= -\int_x^0 f(t) dt; f \text{ étant paire alors}$$

$$\int_x^0 f(t) dt = \int_0^x f(t) dt \text{ d'où}$$

$$F(-x) = -\int_0^x f(t) dt \text{ et par suite } F \text{ est impaire.}$$

4°) a- Prouvons que G est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

$$G(x) = F(\sin x), x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et F est

dérivable sur I donc d'après le théorème sur la dérivation

d'une fonction composée, G est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, G'(x) = \sin' x \times F'(\sin x)$$

$$= \cos x \times \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$G'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = 1 \text{ puisque } \cos x > 0, \text{ pour}$$

$$x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

b- D'après la question 4°) a-, G est une primitive de

$x \mapsto 1$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, donc de la forme $G(x) = x + c$, où c

est une constante. Or $G(0) = F(\sin 0) = F(0) = 0$ d'où $c = 0$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, G(x) = x.$$

5°) Calculons l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = F\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) = G\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{D'après la question 4.b) } I = \frac{\pi}{6}.$$

ACTIVITE 40:

1°) a- Justifions que G est définie sur $\mathbb{R}$ et que G est impaire.

$$\text{Soit } f: x \mapsto \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc G est définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a: $-x \in \mathbb{R}$

$$\text{Et } G(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt$$

$$= -\int_{-x}^0 f(t) dt$$

$$G(-x) = -\int_0^x f(t) dt \text{ (car } f \text{ est paire)}$$

$$= -G(x) \text{ d'où } G \text{ est impaire}$$

b- Etudions le sens de variation de G et déduisons-en son

signe. G est la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule en 0 donc G est

dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = f(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$G'(x) > 0$ alors G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$G(0) = 0$ donc $\forall x \in]-\infty; 0[$, $G(x) < 0$

$$\forall x \in]0; +\infty[, G(x) > 0$$

2°) a- Prouvons que $\forall t > 0$ on a: $\frac{1}{2t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$

$$\forall t > 0, 1+4t^2 \leq (1+2t)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+4t^2} \leq (1+2t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \text{ d'où le résultat}$$

b- *Calculons $\int_0^x \frac{1}{1+2t} dt$ et déduisons $\lim_{x \rightarrow +\infty} G$

on obtient : $\int_0^x \frac{1}{1+2t} dt = \frac{1}{2} \ln(2x+1)$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+2t} \leq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} \Rightarrow \ln(2x+1) \leq G(x)$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x+1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} G = +\infty$

*Dressons le tableau de variation de G
 G étant impaire donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} G = -\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$G'(x)$		+
$G(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3°) a- Démontrons que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
 G est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
 donc G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b- Démontrons que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1+4[F(x)]^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) \neq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{G'[F(x)]} \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{1+4[F(x)]^2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1+4[F(x)]^2} \end{aligned}$$

c- Dédudons-en que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, F'' - F = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1+4[F(x)]^2 > 0$, donc F' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par suite F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, F''(x) &= \frac{1}{2} \frac{4F'(x) \times F(x)}{\sqrt{1+4[F(x)]^2}} \\ &= 2 \frac{F'(x) \cdot F(x)}{\sqrt{1+4[F(x)]^2}} \\ &= F(x) \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R}, F'' - F = 0 \end{aligned}$$

* Calculons $F(0)$ et $F'(0)$

$F(0) = 0$ et $F'(0) = \frac{1}{2}$

*Dédudons F

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle

$F'' - F = 0$ est : $r^2 - 1 = 0$

$r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = 1$ ou $r = -1$

Donc $F(x) = Ae^x + Be^{-x}, (A; B) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} F(0) = 0 &\Leftrightarrow A + B = 0 \\ F'(0) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow A - B = \frac{1}{2} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

D'où $F(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$

d- Déterminons $G(x)$

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ posons $F(x) = y$

$$F(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{4} e^{-x} (e^{2x} - 1) = y$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 - 4e^x y = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 4ye^x - 1 = 0$$

$\Delta' = 4y^2 + 1 > 0$ donc $e^x = 2y - \sqrt{4y^2 + 1}$ ou

$e^x = 2y + \sqrt{4y^2 + 1}$

$\forall x \in \mathbb{R}, 2y - \sqrt{4y^2 + 1} < 0$ d'où

$e^x = 2y + \sqrt{4y^2 + 1}$

$\Rightarrow x = \ln(2y + \sqrt{4y^2 + 1})$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$G(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$

ACTIVITE 41 :

Partie A :

1°) Démontrons que l'ensemble de définition de f est

$D_f =]-1; +\infty[$

$D_f = \{x \in]-1; 0] / x+1 > 0\} \cup$

$\{x \in]0; +\infty[/ x \neq 0\}$

$\forall x \in]-1; 0]$ on a : $x+1 > 0$ de plus $\forall x \in]0; +\infty[$,

$x \neq 0$ d'où $D_f =]-1; +\infty[$

2°) a- Démontrons les égalités suivantes :

* $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0$ et $x+1 > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$ de

plus $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \times \frac{1}{x+1} = -\infty$ d'où

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}}$

$]-\infty; 0]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \text{ de plus}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

b. Dédouons-en de la question précédente les droites asymptotes de $(\mathcal{C}_f)$.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ d'où la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, d'où la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3° a- Prouvons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

Posons $X = -\frac{1}{x}$ on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} X = -\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 e^X = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

b- Etudions la continuité de f en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x + 1) \times \left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \right) \\ &= 1 \times 0 = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x+1} + \ln(x+1) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

de plus $f(0) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ d'où

f est continue en 0

c- Etudions $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^3} \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

Posons $h = \frac{1}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} h = +\infty$ donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{h \rightarrow +\infty} (h + h^2 + h^3) e^{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} h e^{-h} + h^2 e^{-h} + h^3 e^{-h} \\ &= 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \end{aligned}$$

d- Etudions $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$$

Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2 ; 2 \in \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ est dérivable à gauche en 0 et } f'_g(0) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 ; 0 \in \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ est dérivable à droite en 0 et } f'_d(0) = 0$$

On a : $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0

Interprétation des résultats

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $O(0;0)$ des

demi-tangentes définies respectives par : $(T_d) : \begin{cases} y=0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$$(T_g) : \begin{cases} y=2x \\ x \leq 0 \end{cases}$$

4°) Démontrons que :

a- $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \left(\frac{1-x}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x}}$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables.

$\forall x \in]0; +\infty[,$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)x^2 - 2x(x^2 + x + 1)}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} +$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + x^2 + x + 1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} \text{ d'où } \forall x \in]0; +\infty[,$$

$$f'(x) = \left(\frac{1-x}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

b- $\forall x \in]-1; 0[, f'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$

f est dérivable sur $]-1; 0[$ comme composée et somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]-1; 0[: f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1+x+1}{(x+1)^2} \text{ d'où}$$

$$\forall x \in]-1; 0[, f'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

5°) Dressons le tableau de variation de f

• Signe de $f'(x)$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} \text{ or } \forall x \in]0; +\infty[,$$

$$\frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} > 0 \text{ donc :}$$

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1[\\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in]-1; 0[, f'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

Or $\forall x \in]-1; 0[, (x+1)^2 > 0$ et $x+2 > 0$ donc

$$\forall x \in]-1; 0[, f'(x) > 0$$

Au total :

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 0[\cup]0; 1[\\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

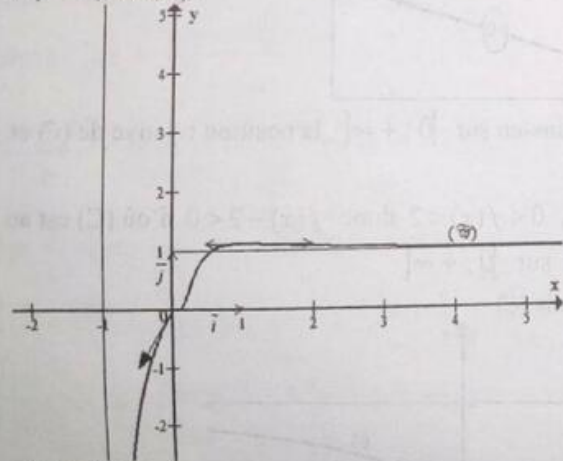
- Sens de variation de f

f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$ et f est strictement croissante sur l'intervalle $] -1; 1[$

- Tableau de variation de f

x	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	-
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{1}{e}$	1

6°) Traçons ($\mathcal{C}_f$)



Partie B :

Soit $\alpha \in]-1; 0[$

7°) a- Justifions que $\forall x \in]-1; 0[, \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

On a : $\forall x \in]-1; 0[, 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$

$$\forall x \in]-1; 0[, \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

b- Démontrons que

$$\int_{\alpha}^0 \ln(x+1) dx = -\alpha \ln(\alpha+1) + \alpha - \ln(\alpha+1)$$

Posons $u(x) = \ln(x+1)$ et $v'(x) = 1$

$$u(x) = \ln(x+1) \Leftrightarrow u'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$v'(x) = 1$ alors on peut prendre : $v(x) = x+1$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \int_{\alpha}^0 \ln(x+1) dx &= [(x+1) \ln(x+1)]_{\alpha}^0 - \int_{\alpha}^0 dx \\ &= [(x+1) \ln(x+1) - x]_{\alpha}^0 \end{aligned}$$

trouve :

$$\int_{\alpha}^0 \ln(x+1) dx = -\alpha \ln(\alpha+1) + \alpha - \ln(\alpha+1)$$

8°) a- Dédudisons-en l'aire $A(\alpha)$

$$A(\alpha) = \left(\int_{\alpha}^0 -f(x) dx \right) u.a$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^0 f(x) dx &= \int_{\alpha}^0 \left(\frac{x}{x+1} + \ln(x+1) \right) dx \\ &= \int_{\alpha}^0 \frac{x}{x+1} dx + \int_{\alpha}^0 \ln(x+1) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_{\alpha}^0 \frac{x}{x+1} dx &= \int_{\alpha}^0 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= [x - \ln(x+1)]_{\alpha}^0 \\ &= -\alpha + \ln(\alpha+1) \end{aligned}$$

précédente, on a :

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= -\alpha + \ln(\alpha+1) - \alpha \ln(\alpha+1) + \alpha - \ln(\alpha+1) \\ &= -\alpha \ln(\alpha+1) u.a \end{aligned}$$

b- Calculons $\lim_{\alpha \rightarrow -1^+} A(\alpha)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1^+} A(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -1^+} -\alpha \ln(\alpha+1) = +\infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1^+} A(\alpha) = +\infty$$

ACTIVITE 48 :

1°) a- Démontrons que $D = \mathbb{R}$

$$D = \left\{ x \in]-\infty; 0] / 1 - e^{2x} \geq 0 \right\} \cup \left\{ x \in]0; +\infty[/ 1 + \frac{2}{x} > 0 \right\}$$

Or $\forall x \in]-\infty; 0[, 1 - e^{2x} \geq 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[,$

$$1 + \frac{2}{x} > 0 \text{ donc } D =]-\infty; 0] \cup]0; +\infty[$$

$$D = \mathbb{R}$$

b- Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

7°) a- Calculons $A(\alpha)$

f est continue sur $\left[\alpha; \frac{2}{e-1}\right]$ et $\forall x \in \left[\alpha; \frac{2}{e-1}\right]$,

$f(x) < 2$ donc

$$A(\alpha) = \left(\int_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} [2 - f(x)] dx \right) u.a$$

$$\int_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} [2 - f(x)] dx = 2 \int_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} dx - \int_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= 2 \left(\frac{2}{e-1} - \alpha \right) - \left[\left(\frac{1}{2} x^2 - 2 \right) \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \right]_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} - \int_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} \left(1 - \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= 2 \left(\frac{2}{e-1} - \alpha \right) - \left[\left(\frac{1}{2} x^2 - 2 \right) \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) + x - 2 \ln x \right]_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} \text{ donc}$$

$$A(\alpha) = \left[\begin{aligned} &\frac{2(e^2 - e + 1)}{(e-1)^2} + 2 \ln 2 - 2 \ln(e-1) \\ & - \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 \ln(\alpha + 2) - \frac{1}{2} \alpha^2 \ln \alpha - 2 \ln(\alpha + 2) \end{aligned} \right] \times 4 \text{ cm}^2$$

b- Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} A(\alpha)$.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^2 \ln \alpha = 0 ; \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2} \alpha^2 \ln(\alpha + 2) = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A(\alpha) = \left[\frac{2(e^2 - e + 1)}{(e-1)^2} - 2 \ln(e-1) \right] \times 4 \text{ cm}^2$$

Interprétation géométrique :

Le résultat obtenu représente l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = 2$,

$$x = 0 \text{ et } x = \frac{2}{e-1}.$$

CORRIGE DES ACTIVITES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

ACTIVITE 7 :

Partie A :

1°) a- Déterminons les nombre réels a et b pour que la fonction $v: x \mapsto ax + b$, soit solution de (E)

v solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$,

$$v''(x) + 4v'(x) + 4v(x) = -4x$$

$\Leftrightarrow 0 + 4a + 4ax + b = -4x$ par identification on a :

$$\begin{cases} 4a + 4b = 0 \\ 4a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ d'où } v(x) = -x + 1$$

b- Démontrons que f est solution de (E) si et seulement si $f - v$ est solution de l'équation

différentielle (E') : $y'' + 4y' + 4y = 0$

$f - v$ est solution de (E') $\Leftrightarrow$

$$(f - v)'' + 4(f - v)' + 4(f - v) = 0$$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) - v''(x) + 4f'(x) - 4v'(x) + 4f(x) - 4v(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = v''(x) + 4v'(x) + 4v(x)$$

$$\Leftrightarrow f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = -4x \Leftrightarrow f \text{ est solution de (E)}$$

D'où f est solution de (E) si et seulement si $f - v$ est solution de l'équation différentielle (E')

c- Résolvons l'équation (E') puis détermine la fonction f .

l'équation caractéristique de (E') est : $r^2 + 4r + 4 = 0$, $\Delta = 0$ et $r_0 = -2$ les solutions donc de (E') sont :

$$l: x \mapsto (Ax + B)e^{-2x} \text{ avec } (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

Trouvons f .

$$f - v = l \Leftrightarrow f = l + v \text{ donc } f: x \mapsto (Ax + B)e^{-2x} - x + 1,$$

$$(A; B) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(0) = 2 \text{ et } f'(0) = -2$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow B + 1 = 2 \Leftrightarrow B = 1$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = Ae^{-2x} - 2(Ax + B)e^{-2x} - 1$$

$$f'(0) = -2 \Rightarrow A - 2B - 1 = -2 \text{ or } B = 1 \text{ donc } A = 1$$

$$\text{d'où } f: x \mapsto (x + 1)e^{-2x} - x + 1$$

Partie B :

2°) a- Etudions les variations de la fonction dérivée f' de f .

- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-2x} - 2(x + 1)e^{-2x} - 1$$

$$f'(x) = e^{-2x}(-2x - 1) - 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -2e^{-2x}(-2x - 1) - 2e^{-2x}$$

$$f''(x) = 4xe^{-2x}$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ on a donc :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f''(x) < 0 \text{ et}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) > 0$$

alors f' est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 1)e^{-2x} - 1 = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2xe^{-2x} - 1 = -1$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -2xe^{-2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

- Tableau de variation de f'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f'	$+\infty$	-2	-1

b- Démontrons que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $-0,64 < \alpha < -0,63$
 f' est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et $f'([-\infty; 0]) = [-2; +\infty[$; $0 \in [-2; +\infty[$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty; 0]$.

D'après les variations de f' , $0 \notin f'([0; +\infty[)$ d'où l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

$$f'(-0,644) = 0,007 > 0 \text{ et } f'(-0,63) = -0,0833 < 0$$

donc $-0,64 < \alpha < -0,63$

c- Dédudisons le signe de $f'(x)$.

D'après a- et b- on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0 \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

3°) a- Etudions le sens de variation de f et dressons un tableau de variation.

D'après 9-c)

f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-2x} + 1 - x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} [(x+1) - xe^{2x} + e^{2x}] \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-2x} + 1 - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

b- Démontrons que $f(\alpha) = \frac{-2\alpha^2}{1+2\alpha}$ et que

$$2,83 < f(\alpha) < 3,16$$

On sait que $f'(\alpha) = 0$

$$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{-2\alpha}(-2\alpha - 1) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-2\alpha} = \frac{-1}{1+2\alpha}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } f(\alpha) &= (\alpha+1) \left(\frac{-1}{1+2\alpha} \right) + 1 - \alpha \\ &= \frac{-\alpha - 1 + (1-\alpha)(1+2\alpha)}{1+2\alpha}\end{aligned}$$

$$= \frac{-\alpha - 1 + 1 + \alpha - 2\alpha^2}{1+2\alpha} \text{ d'où}$$

$$f(\alpha) = \frac{-2\alpha^2}{1+2\alpha}$$

$$-0,64 < \alpha < -0,63 \Leftrightarrow -0,28 < 1+2\alpha < -0,26$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{0,26} < \frac{1}{1+2\alpha} < -\frac{1}{0,28}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{0,28} < \frac{1}{1+2\alpha} < \frac{1}{0,26} \quad (a)$$

$$-0,64 < \alpha < -0,63$$

$$\Leftrightarrow -2(-0,64)^2 < -2\alpha^2 < -2(-0,63)^2 \quad (b)$$

$$(a) \times (b) \Rightarrow \frac{2(0,63)^2}{0,28} < \frac{-2\alpha^2}{1+2\alpha} < \frac{2(0,64)^2}{0,26}$$

$$\Rightarrow 2,83 < f(\alpha) < 3,16 \text{ d'où } 2,83 < f(\alpha) < 3,16$$

c- Justifions que la droite $(D): y = 1 - x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$, puis précise la seconde branche infinie.

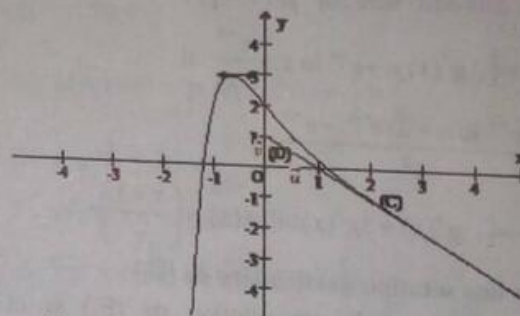
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1-x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} + e^{-2x} = 0\end{aligned}$$

d'où $(D): y = 1 - x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} \left[1 + \frac{1}{x} + \left(\frac{1-x}{x} \right) e^{2x} \right] \\ &= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

D'où la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

d- Traçons (C) avec soin



4°) a- Calculons l'aire $A(\lambda)$

$$\begin{aligned}A(\lambda) &= \int_{-1}^{\lambda} (f(x) - y) dx \\ &= \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{-2x} dx \text{ u.a.}\end{aligned}$$

Posons $u(x) = x+1$, $u'(x) = 1$

$$v'(x) = e^{-2x} \text{ et prenons } v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$A(\lambda) = \left(\left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} \right]_{-1}^{\lambda} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{\lambda} e^{-2x} dx \right) \text{ u.a.}$$

$$\begin{aligned}A(\lambda) &= \left(\left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} \right]_{-1}^{\lambda} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_{-1}^{\lambda} \right) \text{ u.a.} \\ &= \left(-\frac{1}{2}(\lambda+1)e^{-2\lambda} - \frac{1}{4}e^{-2\lambda} + \frac{1}{4}e^2 \right) \text{ u.a.}\end{aligned}$$

$$A(\lambda) = 4 \left(-\frac{\lambda}{2} e^{-2\lambda} - \frac{1}{2} e^{-2\lambda} - \frac{1}{4} e^{-2\lambda} + \frac{1}{4} e^2 \right) \text{cm}^2 \quad \text{d'où}$$

$$A(\lambda) = (e^2 - 2\lambda e^{-2\lambda} - 3e^{-2\lambda}) \text{cm}^2$$

b- Calculons la limite de $A(\lambda)$

lorsque λ tend vers $+\infty$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (e^2 - 2\lambda e^{-2\lambda} - 3e^{-2\lambda}) \text{cm}^2$$

$$= e^2 \text{cm}^2$$

car

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -2\lambda e^{-2\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -3e^{-2\lambda} = 0 \end{cases}$$

Donc : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = e^2 \text{cm}^2$

ACTIVITE 8 :

1°) Démontrons que g est une solution particulière de (E_1)

$$g(x) = e^{-x} \ln x$$

g est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$,

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -e^{-x} \ln x + \frac{e^{-x}}{x} \text{ et}$$

$$g''(x) = \frac{x^2 e^{-x} \ln x - 2x e^{-x} - e^{-x}}{x^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g''(x) + 3g'(x) + 2g(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) e^{-x}$$

alors g est une solution particulière de (E_1)

2°) Démontrons que k est solution de (E_1) si et seulement si $k-g$ est solution de (E_2)

$k-g$ est solution de (E_2)

$$\Leftrightarrow (k-g)'' + 3(k-g)' + 2(k-g) = 0$$

$$\Leftrightarrow k'' - g'' + 3k' - 3g' + 2k - 2g = 0$$

$$\Leftrightarrow k'' + 3k' + 2k = g'' + 3g' + 2g$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[, k''(x) + 3k'(x) + 2k(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) e^{-x}$$

donc k est solution de (E_1) d'où k est solution de (E_1) si et seulement si $k-g$ est solution de (E_2) .

3°) Déterminons les solutions de (E_2)

$$(E_2) : y'' + 3y' + 2y = 0$$

L'équation caractéristique associée à (E_2) est : $r^2 + 3r + 2 = 0$, on discriminant $\Delta = 1 > 0$

donc on a : $r_1 = -2$ et $r_2 = -1$ alors les solutions de (E_2) sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{-x}, (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

4°) Dédons-en l'ensemble solution de l'équation (E_4)

k est solution de $(E_1) \Leftrightarrow k-g$ est solution de (E_2)

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[, \exists (A; B) \in \mathbb{R}^2 /$$

$$k(x) - g(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x} \Leftrightarrow$$

$$k(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x} + e^{-x} \ln x ; \text{ d'où l'ensemble des}$$

$$\text{fonctions est : } x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{-x} + e^{-x} \ln x ;$$

$$(A; B) \in \mathbb{R}^2$$

ACTIVITE 18 :

1°) u est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$u' = y_1' - 2 \text{ et } u'' = y_1''$$

$$u'' + 2u' + 5u = y_1'' + 2(y_1' - 2) + 5(y_1 - 2t + 1)$$

$$= y_1'' + 2y_1' + 5y_1 - 4 - 10t + 5$$

$$= 10t - 1 - (10t - 1) = 0 \text{ d'où } u \text{ est solution}$$

$$\text{de } (E_1) : y'' + 2y' + 5y = 0$$

2°) Résolvons (E_1) puis déduisons y_1

L'équation caractéristique associée à (E_1) est :

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \text{ son discriminant est } \Delta = -16 = (4i)^2 \text{ et}$$

$$\text{ces solutions sont : } r_1 = -1 - 2i \text{ et } r_2 = -1 + 2i$$

Alors les solutions de (E_1) sont les fonctions définies sur

$$\mathbb{R} \text{ par : } x \mapsto (A \cos 2x + B \sin 2x) e^{-x} \text{ avec } (A; B) \in \mathbb{R}^2.$$

Déduction de y_1 .

u est une solution de (E_1) donc

$$u(t) = (A \cos 2t + B \sin 2t) e^{-t} ; t \in \mathbb{R} \text{ et } u = y_1 - 2t + 1$$

$$\text{donc } \forall t \in \mathbb{R}, y_1(t) = (A \cos 2t + B \sin 2t) e^{-t} + 2t - 1 \text{ où}$$

$$(A; B) \in \mathbb{R}^2 \text{ or } \begin{cases} y_1(0) = \sqrt{2} - 1 \\ y_1'(0) = 2 + \sqrt{2} \end{cases} \text{ donc on trouve :}$$

$$\begin{cases} A - 1 = \sqrt{2} - 1 \\ 2B - A + 2 = 2 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \sqrt{2} \\ B = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}, y_1(t) = \sqrt{2} (\cos 2t + \sin 2t) e^{-t} + 2t - 1$$

3°) Démontrons que y_2 peut s'écrire sous la forme

$$y_2 = r \cos \theta.$$

$$y_2 = e^t y_1 - 2te^t + e^t \text{ et on trouve :}$$

$$y_2 = \sqrt{2} (\cos 2t + \sin 2t)$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2t \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 2t + \sin \frac{\pi}{4} \sin 2t \right) \text{ d'où } y_2 = 2 \cos \left(2t - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Avec } r = 2 > 0 \text{ et } \theta = 2t - \frac{\pi}{4}.$$

4°) a- Démontrons que v est solution de $(E_2) : y'' + 4y = 0$

ACTIVITE

1°)

a- $p(A)$

donc $p(B)$

b- $p(A \cap B)$

c- $p(A \cup B)$

d- $p(A \setminus B)$

e- $p(B \setminus A)$

f- $p(A \cap B \cap C)$

g- $p(A \cup B \cup C)$

h- $p(A \cap B \cup C)$

i- $p(A \cup B \cap C)$

j- $p(A \cap B \cap C \cup D)$

k- $p(A \cup B \cap C \cup D)$

l- $p(A \cap B \cap C \cap D)$

m- $p(A \cup B \cap C \cap D)$

n- $p(A \cap B \cap C \cap D \cup E)$

o- $p(A \cup B \cap C \cap D \cup E)$

p- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E)$

q- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E)$

r- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cup F)$

s- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cup F)$

t- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F)$

u- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F)$

v- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cup G)$

w- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cup G)$

x- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G)$

y- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G)$

z- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cup H)$

aa- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cup H)$

ab- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H)$

ac- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H)$

ad- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cup I)$

ae- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cup I)$

af- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I)$

ag- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I)$

ah- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cup J)$

ai- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cup J)$

aj- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J)$

ak- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J)$

al- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cup K)$

am- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cup K)$

an- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cap K)$

ao- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cap K)$

ap- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cap K \cup L)$

aq- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cap K \cup L)$

ar- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cap K \cap L)$

as- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cap K \cap L)$

at- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cap K \cap L \cup M)$

au- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cap K \cap L \cup M)$

av- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cap K \cap L \cap M)$

aw- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cap K \cap L \cap M)$

ax- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cap K \cap L \cap M \cup N)$

ay- $p(A \cup B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cap K \cap L \cap M \cup N)$

az- $p(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H \cap I \cap J \cap K \cap L \cap M \cap N)$

10. CORRECTION DES ACTIVITES SUR LES PROBABILITES

ACTIVITE 1 :

1°)

$$a- p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

$$\text{donc } p(A \cap B) = 0,12$$

$$b- p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ = 0,4 + 0,3 - 0,12 = 0,58$$

$$p(A \cup B) = 0,58$$

$$2^\circ) a- p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \text{ donc}$$

$$p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

$$\text{Alors } p(A) = 0,2$$

$$b- p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ = 0,2 + 0,5 - 0,1 = 0,6$$

$$\text{Donc } p(A \cup B) = 0,6$$

ACTIVITE 2 :

Dans un tel exercice l'effectif de la classe ne se vérifie pas par la somme de 28+16 ou de 28+16+8

L'effectif 40 ne se vérifie pas tout simplement par ce qu'il y a des élèves qui étudient les deux langues à la fois.

Calculons les probabilités

Anglais : 28

Allemand : 16

ang + all : 8

soit Ω l'univers associé à cette épreuve $\text{card}\Omega = 40$;

$\text{card}A = 28$; $\text{card}B = 16$; $\text{card}(A \cap B) = 8$.

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{28}{40} \text{ donc } p(A) = \frac{7}{10}$$

$$p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{16}{40} = \frac{4}{10} \text{ donc } p(B) = \frac{4}{10}$$

$$p(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}\Omega} = \frac{8}{40} = \frac{2}{10} \text{ donc}$$

$$p(A \cap B) = \frac{2}{10}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \text{ on trouve}$$

$$p(A \cup B) = \frac{9}{10}$$

$$p(\bar{A} \cup B) = p(\bar{A}) + p(B) - p(\bar{A} \cap B)$$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

$\bar{A} \cap B$ est l'évènement « l'élève choisit apprendre uniquement l'allemand »

$$\text{card}(\bar{A} \cap B) = 16 - 8 = 8 \text{ donc}$$

$$p(\bar{A} \cap B) = \frac{\text{card}(\bar{A} \cap B)}{\text{card}\Omega} = \frac{8}{40} = \frac{2}{10}$$

$$p(\bar{A} \cup B) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{5}{10} \text{ d'où } p(\bar{A} \cup B) = \frac{1}{2}$$

ACTIVITE 3 :

$$p(A) = \frac{4}{5} \Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \frac{1}{5}$$

$$p(B) = \frac{3}{4} \Rightarrow p(\bar{B}) = 1 - p(B) = \frac{1}{4}$$

$$1^\circ) p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \text{ donc}$$

$$p(A \cap B) = \frac{3}{5}$$

$$2^\circ) p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p(\bar{B}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$\text{Donc } p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{20}$$

$$3^\circ) p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times p(\bar{B}) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$p(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{5}$$

$$4^\circ) p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p(B) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$$

$$\text{Donc } p(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{20}$$

5°) soit p_1 cette probabilité

$$p_1 = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$$

$$p_1 = \frac{7}{20}$$

6°) Soit p_2 cette probabilité $\Rightarrow p_2 = p(A \cup B)$ ou

$$p_2 = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) + p(A \cap B) \text{ avec}$$

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \text{ alors on trouve } p_2 = \frac{19}{20}$$

7°) soit p_3 cette probabilité

$$p_3 = p(\bar{A} \cap \bar{B}) \text{ ou encore } p_3 = 1 - p_2 \text{ on trouve}$$

$$p_3 = \frac{1}{20}$$

8°) soit p_4 cette probabilité

$$p_4 = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) + p(A \cap B)$$

$$\text{On trouve } p_4 = \frac{19}{20}$$

ACTIVITE 5 :

Les choix possibles de trois boules différentes soit par les boules qui les constituent soit par l'ordre de sortie des boules. Le nombre de ces cas possibles est donc le nombre d'arrangement de trois éléments pris parmi neuf.

Soit $A_0^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

1°) Le nombre de cas favorables est 1 car il y a une seule façon d'obtenir le nombre 123 la probabilité est alors

$$\frac{1}{504}$$

2°) Le nombre de cas favorables est 4 car les nombres divisibles par 125 sont : 125 ; 375 ; 625 ; 875 alors la probabilités recherchée est :

$$\frac{4}{504}$$

ACTIVITE 6 :

Tirer deux boules d'une urne contenant 3 boules en remettant et reprendre à nouveau le tirage donne le nombre de cas possibles :

Soit Ω l'univers des possibles. $\text{card}\Omega = 3^2 = 9$

Le nombre de cas favorable est 5, ces cas sont :

$(1,3); (3,1); (2,3); (3,2); (3,3)$

La probabilité recherchée est donc : $\frac{5}{9}$

NB : Tu pourras faire un tableau ou tu regrouperas tous les résultats possibles. A partir du tableau tu pourras aisément décompter les cas favorable

ACTIVITE 7 :

Les trois numéros sont impairs si les 2 numéros du sac A sont impairs et le numéro du sac B est impair.

Dans le sac A il y a 5 numéros impairs à savoir 1, 3, 5, 7, et 9

Il y a C_5^2 façons de choisir 2 numéros parmi les 5.

Il y a C_9^2

façons de choisir 2 numéros dans le sac parmi les neuf.

La probabilité de choisir 2 numéros impairs dans le sac A

$$\text{est : } \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{20}{72}$$

Dans le sac B il y a 9 numéros et C_9^1 façons de choisir un numéro parmi 9.

Il y a 5 numéros impairs et C_5^1

façons de choisir un numéro impair parmi 5.

La probabilité de choisir un numéro impair dans le sac B

$$\text{est : } \frac{C_5^1}{C_9^1}$$

1°) La probabilité de tirer 2 numéros impairs du sac A et un numéro impair du sac B est :

$$p = \frac{C_5^2}{C_9^2} \times \frac{C_5^1}{C_9^1} = \frac{20}{72} \times \frac{5}{9} = \frac{100}{648}$$

Donc la probabilité pour que les 3 numéros tirés soient tous impairs est : $p = \frac{100}{648}$

2°) Pour que 2 numéros soient pairs et un numéro soit impair.

Il faut que soit l'on tire 2 numéros pairs du sac A et un numéro impair du sac B ou soit l'on tire du sac A 1 numéro pair et un numéro impair et du sac B un numéro pair.

Considérons les événements suivants :

E « on tire deux numéros pairs et un numéro impair »

F « on tire deux numéros pairs de A et 1 numéro impair de B »

G « on tire un numéro pair et un numéro impair de A et 1 numméro pair de B »

On a : $p(E) = p(F) + p(G)$

F : il y a C_4^2 façons de tirer 2 numéros pairs de A et C_5^1 façons de tirer 2 numéros de A. La probabilité de tirer 2 numéros pairs de A est $\frac{C_4^2}{C_9^2}$

Il y a C_9^1 façons possibles de tirer 1 numéro de B et C_5^1 de tirer 1 numéro impair de B.

La probabilité de tirer 1 numéro impair de B est $\frac{C_5^1}{C_9^1} = \frac{5}{9}$

$$\text{On a } p(F) = \frac{C_4^2}{C_9^2} \times \frac{5}{9} = \frac{60}{648}$$

G : il y a C_9^2 façons possible de tirer 2 numéros de A et $C_5^1 \times C_4^1$ façons de tirer 1 numéro impair et 1 numéro pair de A. La probabilité de tirer 1 numéro pair et 1

numéro impair de A est : $\frac{C_5^1 \times C_4^1}{C_9^2}$

Il y a C_9^1 façons possibles de tirer un numéro de B et C_4^1 façons de tirer 1 numéro pair de B. La probabilité de tirer

1 numéro pair de B est : $\frac{C_4^1}{C_9^1} = \frac{4}{9}$

$$\text{On a : } p(G) = \frac{C_5^1 \times C_4^1}{C_9^2} \times \frac{4}{9} = \frac{160}{648}$$

$$p(E) = p(F) + p(G) = \frac{60}{648} + \frac{160}{648} = \frac{220}{648}$$

La probabilité pour que 2 numéros soient pairs et un impair est $\frac{220}{648}$

ACTIVITE 8 :

Comme on ne tient pas compte de l'ordre de sortie, il y a C_8^5 cas possibles.

1°) Parmi les lettres tirées il y a la lettre a.

Comme il y a une seule lettre a parmi les 8 lettres, il y a C_1^8 façon de la tirer et les 4 autres lettres sont tirées parmi les 7 lettres restantes soit C_4^7 façons de les obtenir. Le nombre de cas favorable à l'évènement avoir tiré la lettre a est : $C_1^1 \times C_4^7$ et la probabilité recherchée est

$$\text{donc : } p_1 = \frac{C_1^1 \times C_4^7}{C_5^8} = \frac{35}{56} \Rightarrow p_1 = \frac{5}{8}$$

2°) Les 8 lettres différentes comprennent 4 voyelles et 4 consonnes. Il y a C_4^2 façons de tirer 2 voyelles parmi les 4 et les 3 autres lettres sont des consonnes à tirer parmi les 4

consonnes il y a C_4^3 façons de les tirer.

Le nombre de cas favorables à l'évènement « avoir tiré 2 voyelles et 2 seulement est $C_4^2 \times C_4^3$

$$\text{La probabilité est : } p_2 = \frac{C_4^2 \times C_4^3}{C_8^5} \Rightarrow p_2 = \frac{3}{7}$$

3°) 4 consonnes seulement figurent dans le mot caroline. En tirant 5 lettres on est certain de tirer au moins une voyelle.

La probabilité est donc égale à 1

ACTIVITE 9 :

Résumons les deux lancers dans un tableau récapitulatif (tableau à double entrée)

	1	2	3	4	5	6
1	(1.1)	(1.2)	(1.3)	(1.4)	(1.5)	(1.6)
2	(2.1)	(2.2)	(2.3)	(2.4)	(2.5)	(2.6)
3	(3.1)	(3.2)	(3.3)	(3.4)	(3.5)	(3.6)
4	(4.1)	(4.2)	(4.3)	(4.4)	(4.5)	(4.6)
5	(5.1)	(5.2)	(5.3)	(5.4)	(5.5)	(5.6)
6	(6.1)	(6.2)	(6.3)	(6.4)	(6.5)	(6.6)

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve
card Ω = 36

Soit A l'évènement « la somme des numéros obtenu est égal à 6 »

$$A = \{(5.1); (4.2); (3.3); (2.4); (1.5)\}$$

$$\text{card}A = 5 \Rightarrow p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{5}{36}$$

B « la somme des numéros obtenus est impair »
(correspondant aux astérisques du tableau)

$$\text{card}B = 18 \Rightarrow p(B) = \frac{18}{36} \Rightarrow p(B) = \frac{1}{2}$$

C « la somme des numéros obtenus est pair » $C = \bar{B} \Rightarrow$

$$P(C) = 1 - p(B) \Rightarrow p(C) = \frac{1}{2}$$

D « la somme des numéros obtenus est supérieur à 8 »

$$D = \{(6.3); (5.4); (6.4); (4.5); (5.5); (6.5); (3.6); (4.6); (5.6); (6.6)\}$$

$$\text{card}D = 10 \Rightarrow p(D) = \frac{10}{36} \text{ soit } p(D) = \frac{5}{18}$$

E « la somme des numéros obtenus est inférieur à 4 »

$$E = \{(1.1); (1.2); (2.1)\}$$

$$\text{card}E = 3 \Rightarrow p(E) = \frac{3}{36} \Rightarrow p(E) = \frac{1}{12}$$

ACTIVITE 13 :

1°) Soit l'évènement A : « les deux personnes prises au hasard sont nées un même jour de la semaine » ; alors cardA = 7. Or le nombre de cas possibles est

$$\text{card}\Omega_1 = 7^2 = 49.$$

$$\text{Donc } P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega_1} = \frac{1}{7} \approx 0,142$$

2°) Soit l'évènement B : « toutes les 4 personnes du groupe sont nées à des jours différents de la semaine » ;

alors cardB = $A_7^4 = 840$ or le nombre des cas possibles

$$\text{est card}\Omega_2 = 7^4 = 2401$$

$$\text{donc } p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega_2} = \frac{120}{343} \approx 0,349$$

l'évènement contraire de B noté $\bar{B}$ est : « au moins deux d'entre elles sont nées le même jour de la semaine ».

Ainsi donc $p(\bar{B}) = 1 - p(B) \approx 0,650$.

Comme $p(\bar{B}) > \frac{1}{2}$, alors on a fait un pari gagnant en

affirmant que deux d'entre elles sont nées le même jour de la semaine.

3°) Soit l'évènement C : « une des n personnes, au moins est née un lundi »

Alors l'évènement contraire de C est $\bar{C}$: « aucune des n

personnes n'est née un lundi ». Ainsi $p(\bar{C}) = \left(\frac{6}{7}\right)^n$ donc

$$p(C) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

L'affirmation « au moins l'une des personnes du groupe est née un lundi » est un pari gagnant si $p(C) \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{Ainsi on a : } 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{6}{7}\right)^n \leq \frac{1}{2}$$

$$1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \ln \frac{6}{7} \leq \ln \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln 2}{\ln \frac{6}{7}} \text{ car } \ln \frac{6}{7} < 0$$

D'où $n \geq 4,5$. Comme n est un entier naturel, on a : $n \geq 5$.

Donc il faut au moins 5 personnes dans le groupe pour que cette affirmation soit un pari gagnant.

ACTIVITE 14 :

1°) Déterminons la probabilité pour que les 2 boules tirées soient noires

Soit p cette probabilité

$$p = \frac{5}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$$

2°) Calculons la probabilité pour que l'événement A soit réalisé.

$$P(A) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{19}{40}$$

3°) Soit p' cette probabilité

Déterminons d'abord la probabilité que les boules soient de couleur différente et que la boule noire provienne de

$$\text{l'urne } U_1, p(NB) = \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{4}$$

$$p' = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{19}{40}} = \frac{1}{4} \times \frac{40}{19} \text{ soit } p' = \frac{4}{19}$$

ACTIVITE 15 :

1°) soit P_1 la probabilité

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve

card $\Omega = 36$

$$P_1 = \frac{7}{36}$$

2°) Soit P_2 la probabilité

$$P_2 = \overline{P_1} = 1 - P_1$$

$$P_2 = \frac{29}{36}$$

$$P_3 = \frac{11}{36}$$

ACTIVITE 19 :

$$1^\circ) P(R) = \frac{85}{100} = \frac{17}{20} \text{ et } P(D) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$2^\circ) a- P(R \cup D) = P(R) + P(D) + P(R \cap D)$$

$$\text{Or } P(R \cap D) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

$$\text{Donc } P(R \cap D) = \frac{85}{100} + \frac{20}{100} - \frac{12}{100} \text{ soit}$$

$$P(R \cap D) = \frac{93}{100}$$

$$b- P(R - D) = P(R) - P(R \cap D)$$

$$P(R - D) = \frac{85}{100} - \frac{12}{100} = \frac{73}{100}$$

$$c- P(D - R) = \frac{20}{100} - \frac{12}{100} = \frac{8}{100}$$

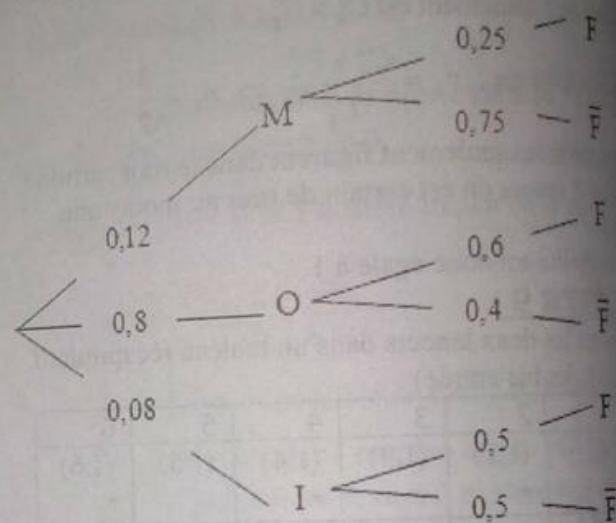
ACTIVITE 20 :

On a : $p(I) = 8\% = 0,08$; $p(O) = 80\% = 0,8$;

$p_1(F) = 50\% = 0,5$; $p_M(F) = 25\% = 0,25$;

$p_O(F) = 60\% = 0,6$

1°) Arbre de pondéré



2°) Calcul de probabilité

a- D'interroger un agent de maintenance.

$$p(M) = 1 - p(\overline{M})$$

$$= 1 - p(I \cup O)$$

$$p(M) = 1 - P(I) - p(O) \Rightarrow \underline{p(M) = 0,12}$$

b- D'interroger une femme agent de maintenance.

$$p(F \cap M) = p_M(F) \times p(\overline{M})$$

$$= 0,25 \times 0,12 \text{ donc } \underline{p(F \cap M) = 0,03}$$

c- D'interroger une femme

$$\text{On a : } p(F) = p(F \cap M) + p(F \cap O) + p(F \cap I) \text{ or}$$

$$p(F \cap O) = p_O(F) \times p(O) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$$

$$p(F \cap I) = p_1(F) \times p(I) = 0,5 \times 0,08 = 0,04$$

$$\text{Donc : } p(F) = 0,03 + 0,48 + 0,04 \text{ soit } \underline{p(F) = 0,55}$$

3°) A : « l'alarme se déclenche »

B : « une panne se produise »

a- Démontrons que $p(B \cap A) = 0,037$

$$\text{On a : } p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) \text{ alors}$$

$$p(B \cap A) = p(B) - p(B \cap \overline{A})$$

On a : $\begin{cases} p(B) = 0,04 \\ p(B \cap \bar{A}) = 0,003 \end{cases}$ donc $p(B \cap A) = 0,04 - 0,003$ d'où $p(B \cap A) = 0,037$.

b- Calcul de $p(A)$

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = 0,037 + 0,002 \Rightarrow p(A) = 0,039$$

c- Calcul de $p_A(B)$

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$$p_A(B) = \frac{0,037}{0,039} \text{ soit } p_A(B) = 0,9487$$

ACTIVITE 22 :

Partie A :

1°)

a- Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus.

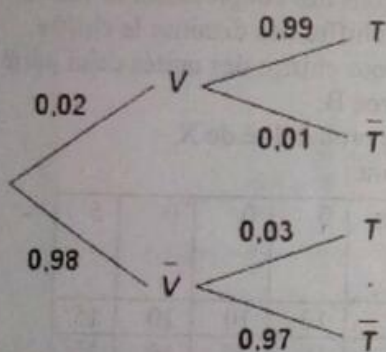
Donc $p(V) = 0,02$.

La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99.

Donc $p_V(T) = 0,99$

La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97.

Donc $p_{\bar{V}}(\bar{T}) = 0,97$ d'où l'arbre pondéré :



b- Déduisons-en la probabilité de l'événement $V \cap T$.

On a : $p(V \cap T) = p(V) \times p_V(T)$ d'où $p(V \cap T) = 0,02 \times 0,99$ soit $p(V \cap T) = 0,0198$.

2°) Démontrons que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

On cherche donc : $p(T)$

La forme des probabilités totales donne :

$$p(T) = p(V \cap T) + p(\bar{V} \cap T)$$

$$\text{Soit } p(T) = 0,0198 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492$$

3°) a- Justifions par un calcul la phrase :

« si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de "chances" que la personne soit contaminée »

On cherche à calculer $p_T(V)$

D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$p_T(V) = \frac{p(V \cap T)}{p(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4 \text{ donc } p_T(V) \approx 0,4$$

Il y a environ 40% de "chances" que la personne soit contaminée si le test est positif.

b- Déterminons la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

On cherche $p_{\bar{T}}(\bar{V})$

$$p_{\bar{T}}(\bar{V}) = \frac{p(\bar{V} \cap \bar{T})}{p(\bar{T})} = \frac{0,98 \times 0,97}{1 - 0,0492} \approx 0,999$$

Soit $p_{\bar{T}}(\bar{V}) \approx 0,999$.

La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est donc d'environ 0,999.

Partie B :

1°) Justifions que X suit une loi binomiale dont nous donnerons les paramètres.

L'expérience consiste à choisir 10 personnes au hasard, les tirages sont indépendants, il n'y a que deux issues possibles pour chaque personne. Donc X suit une loi binomiale de paramètres : $n = 10$ et $p = 0,02$

2°) Calculons la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

On a : $p(X \geq 2) = 1 - p(X = 1) - p(X = 0)$

D'où $p(X \geq 2) = 1 - C_{10}^1 \times (0,02)^1 \times (0,98)^9 - (0,98)^{10}$

Soit $p(X \geq 2) \approx 0,016$.

La probabilité qu'il ait au moins deux personnes contaminées parmi 10 est donc d'environ 0,016.

ACTIVITE 23 :

1°)

Total des pièces = 10

$$p(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

2°)

a- $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

$$p(X = 0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{C_{10}^3}; p(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3};$$

$$p(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3}; p(X = 3) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} \text{ et on trouve}$$

$$p(X = 0) = \frac{20}{120}, p(X = 1) = \frac{60}{120}; p(X = 2) = \frac{36}{120} \text{ et}$$

$$p(X = 3) = \frac{4}{120}$$

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

$$b- E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 0 \times \frac{20}{120} + 1 \times \frac{60}{120} + 2 \times \frac{36}{120} + 3 \times \frac{4}{120}$$

$$E(X) = \frac{6}{8}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2 p_i - [E(X)]^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,56} \approx 0,75$$

3°) On a ici une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre

$$n=5 \text{ et } p=\frac{1}{30}$$

Soit Y cette variable aléatoire

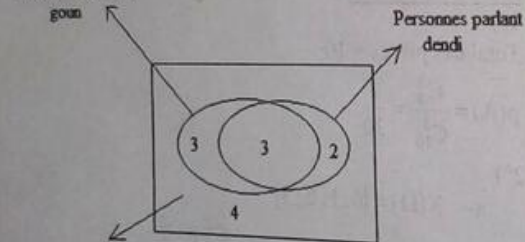
$$p(Y=3) = C_3^5 \left(\frac{1}{30}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{30}\right)^2$$

$$p(Y=3) \approx 3,46 \cdot 10^{-4}$$

ACTIVITE 24:

L'univers Ω est l'ensemble des parties de 3 éléments d'un ensemble de 12, d'où $\text{card}\Omega = C_{12}^3 = 220$. Comme on choisit au hasard 3 personnes, tous les groupes de 3 personnes sont équiprobables.

Personnes parlant goun



Personnes parlant uniquement fon

1°) a- Soit l'événement A : « les trois personnes choisies parlent au moins une autre que le fon ».

$$\text{alors } \text{card}A = C_8^3 = 56, \text{ donc } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{14}{55}$$

b- soit l'événement B : « les trois personnes choisies ne parlent que le fon ».

$$\text{alors } \text{card}B = C_4^3 = 4 \text{ donc } p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{55}$$

Initiateur : Sylvain AHOANGBO (+229) 97471527-94262854

2°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes parlant dendi et goun.
L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est :
 $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.

a- La loi de probabilité de X.

$$p(X=0) = \frac{C_9^3}{\text{card}\Omega} = \frac{21}{55}; p(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_9^2}{\text{card}\Omega} = \frac{27}{55}$$

$$p(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_9^1}{\text{card}\Omega} = \frac{27}{220}; p(X=3) = \frac{C_3^3}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{220}$$

Soit sous forme de tableau :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

b- Soit l'événement D : « il y a au moins deux personnes parlant dendi et goun »

$$p(D) = p(X \geq 2) = \frac{7}{55}$$

ACTIVITE 25 :

Soit Ω_1 L'univers des possibles de l'urne A $\text{card}\Omega_1 = 4$

Ω_2 L'univers des possibilités de l'urne B $\text{card}\Omega_2 = 4$

Soit Ω l'univers des possibilités de l'expérience.

$$\text{card}\Omega = \text{card}\Omega_1 \times \text{card}\Omega_2 = 24$$

Tiré un jeton de l'urne A et un autre de l'urne B les résultats possibles formeront des couples dont la valeur est le nombre ayant pour chiffre des dizaines le chiffre porté par le jeton A ; et pour chiffre des unités celui porté par le jeton extrait de l'urne B.

1°) Déterminons la loi de probabilité de X

Utilisons le tableau suivant :

Chiffre des unités \ Chiffre des dizaines	0	0	0	5
1	10	10	10	15
1	10	10	10	15
2	20	20	20	25
3	30	30	30	35
3	30	30	30	35
3	30	30	30	35

Les valeurs prises par X sont :

$$X(\Omega) = \{10; 15; 20; 30; 35\}$$

En comptant tous les éléments du tableau on retrouve l'univers des possibles.

(10 se présente 6 fois dans le tableau sur 24)

$$p(X=10) = \frac{6}{24}; p(X=15) = \frac{2}{24}; p(X=20) = \frac{3}{24}$$

$$p(X=25) = \frac{1}{24}; p(X=30) = \frac{9}{24}; p(X=35) = \frac{3}{24}$$

La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant

x_i	10	15	20	25	30	35
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{3}{24}$

2°) Représentons la fonction de répartition

Soit F cette fonction de répartition

Si $x < 10$, $F(x) = 0$

$$\text{Si } x \in [10; 15[, F(x) = \frac{6}{24}$$

$$\text{Si } x \in [15; 20[, F(x) = \frac{8}{24}$$

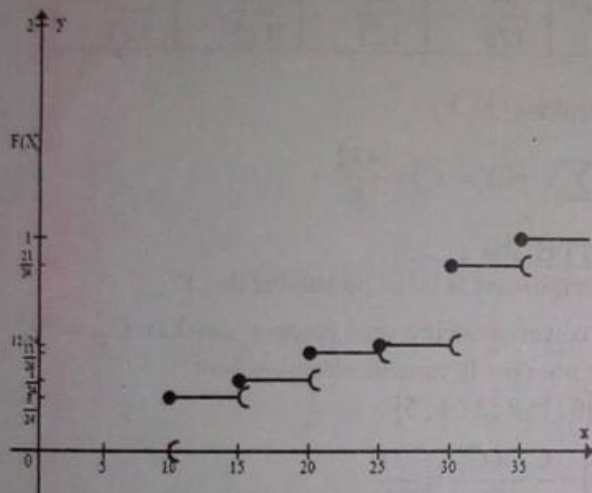
$$\text{Si } x \in [20; 25[, F(x) = \frac{11}{24}$$

$$\text{Si } x \in [25; 30[, F(x) = \frac{12}{24}$$

$$\text{Si } x \in [30; 35[, F(x) = \frac{21}{24}$$

$$\text{Si } x \geq 35, F(x) = 1$$

La représentation graphique de F est la suivante :



3°) Calculons l'espérance mathématique

$$E(X) = \sum p(X = x_i) \times x_i$$

$$= 10 \times \frac{6}{24} + 15 \times \frac{2}{24} + 20 \times \frac{3}{24} + 25 \times \frac{1}{24} + 30 \times \frac{9}{24} + 35 \times \frac{3}{24}$$

$$= \frac{550}{24} \text{ d'où } E(X) = \frac{275}{12}$$

ACTIVITE 26 :

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

1°) calculons la probabilité de gagner.

Soit Ω_1 l'univers associé à cette épreuve

$$\text{card} \Omega_1 = 6 \times 6 = 36$$

On gagne lorsqu'on fait un double c'est dire voir apparaître sur la face supérieure des dés de chiffre identique.

Les face identiques forme la diagonale du carré dans le tableau.

Ce sont : (1;1) (2;2) (3;3) (4;4) (5;5) (6;6)

$$\text{Soit } P \text{ cette probabilité, } P = \frac{6}{36} \text{ soit : } P = \frac{1}{6}$$

2°) a- Déterminons les valeurs prise par X au cours des trois lancers.

(L'issus du jeu est de gagner 500f ou de perdre 100f)

Soit Ω_2 l'univers associé à cette épreuve.

1^{ère} possibilité : $(-100 - 100 - 100 = -300)$

2^{ème} possibilité : $(-100 - 100 + 500 = 300)$

3^{ème} possibilité : $(-100 + 500 + 500 = 900)$

4^{ème} possibilité : $(+500 + 500 + 500 = 1500)$

Alors l'ensemble des valeurs prise par X est :

$$X(\Omega_2) = \{300; 300; 900; 1500\}$$

b- Etablissons la loi de probabilité de X

La probabilité d'avoir 0 succès est :

$$P(X = -300) = C_3^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-0} = \frac{125}{216}$$

La probabilité d'avoir 1 succès est :

$$P(X = 300) = C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

La probabilité d'avoir 2 succès est :

$$P(X = 900) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$$

La probabilité d'avoir 3 succès est :

$$P(X = 1500) = C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{3-3} = \frac{1}{216}$$

La loi de probabilité de X est résumé dans le tableau suivant :

x_i	-300	300	900	1500
$P(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

3°) a- Calculons q_n

$$q_n = C_n^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-0} \Rightarrow q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

b- p_n la probabilité de faire au moins un double au cours des n lancers.

$$p_n = 1 - q_n \Rightarrow p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

c- Valeur minimale de n pour que $p_n \geq 0,8$

$$p_n \geq 0,8 \Rightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,8$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,8 - 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,2$$

$$\Rightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0,2)$$

$$\Rightarrow -0,19n \leq -1,61$$

$$\Rightarrow 0,19n \geq 1,61$$

$$\Rightarrow n \geq 8,47 \text{ d'où } \underline{n=9}$$

ACTIVITE 28 :

1°) Déterminons la probabilité pour que ce numéro apparaisse :

a- Aucune fois
Chaque roue est composée de 5 numéros. Soit Ω l'univers des possibles. $\text{card}\Omega = 5 \times 5 \times 5 = 125$
Soit p la probabilité pour qu'un numéro choisi apparaisse :

$$p = \frac{1}{5}$$

$\bar{p}$ la probabilité pour que le numéro n'apparaisse pas :

$$\bar{p} = 1 - p = \frac{4}{5}$$

Soit p_1 la probabilité pour que le numéro n'apparaisse aucune fois.

$$p_1 = \bar{p} \times \bar{p} \times \bar{p} = \frac{64}{125}$$

b- Une fois

Soit p_2 cette probabilité

$$p_2 = (p \times \bar{p} \times \bar{p}) + (\bar{p} \times p \times \bar{p}) + (\bar{p} \times \bar{p} \times p)$$

$$p_2 = \frac{48}{125}$$

c- Deux fois

Soit p_3 cette probabilité

$$p_3 = (p \times p \times \bar{p}) + (p \times \bar{p} \times p) + (\bar{p} \times p \times p)$$

$$p_3 = \frac{12}{125}$$

d- Trois fois

Soit p_4 cette probabilité

$$p_4 = p \times p \times p$$

$$p_4 = \frac{1}{125}$$

Autre méthode :

Comme les trois roues sont en marche, cette épreuve s'identifie à l'épreuve de Bernoulli on a :

$$p_1 = C_3^0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

$$p_2 = C_3^1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}$$

$$p_3 = C_3^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{12}{125}$$

$$p_4 = C_3^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{125}$$

2°) a- Les valeurs prises par X

$$X(\Omega) = \{-200; 200; 1000; 2000\}$$

b- Déterminons la loi de probabilité de X

$$P(X = -200) = p_1 = \frac{64}{125}$$

$$P(X = 200) = p_2 = \frac{48}{125}$$

$$P(X = 1000) = p_3 = \frac{12}{125}$$

$$P(X = 2000) = p_4 = \frac{1}{125}$$

On résume la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

x_i	-200	200	1000	2000
$P(X = x_i)$	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

c- Calculons $E(X)$

$$E(X) = \sum x_i p(X = x_i) = \frac{432}{5}$$

ACTIVITE 29 :

a- Définissons la loi de probabilité de X

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve $\text{card}\Omega = C_{12}^5 = 792$

Les valeurs prises par la variable aléatoire sont :

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_5^0 \times C_7^5}{792} = \frac{21}{792}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 \times C_7^4}{792} = \frac{175}{792}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_7^3}{792} = \frac{350}{792}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_5^3 \times C_7^2}{792} = \frac{210}{792}$$

$$P(X = 4) = \frac{C_5^4 \times C_7^1}{792} = \frac{35}{792}$$

$$P(X = 5) = \frac{C_5^5 \times C_7^0}{792} = \frac{1}{792}$$

La loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{792}$	$\frac{175}{792}$	$\frac{350}{792}$	$\frac{210}{792}$	$\frac{35}{792}$	$\frac{1}{792}$

Calculons l'espérance mathématique $E(X)$

$$E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = 208$$

Au cours de trois représentation successives il n'y a pas de mâles se produise une fois seulement est ici une épreuve de Bernoulli ou $n = 3$ et $k = 1$

$$p = C_3^1 \times \left(\frac{21}{792}\right)^1 \times \left(1 - \frac{21}{792}\right)^{3-1} \text{ donc}$$

$$p = 3 \times \left(\frac{21}{792}\right) \times \left(\frac{771}{792}\right)^2$$

ACTIVITE 30 :

1°) Calculons la probabilité d'atteindre la zone 4
Comme la somme de toutes les probabilités des événements élémentaires est 1, on a :

$$p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) = 1 \Rightarrow$$

$$p(\{4\}) = 1 - [p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\})]$$

$$p(\{4\}) = \frac{1}{12}$$

2°) Etablissons la loi de probabilité de X
Utilisons un tableau donnant des couples de points possibles
 T_1 : tire 1 et T_2 : tire 2

$T_2 \backslash T_1$	1	2	3	4
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)
2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)
4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)

Soit Ω l'univers des possible

card $\Omega = 16$

Le tableau ci-dessus, nous donne les valeurs prises par la variable aléatoire.

$$X(\Omega) = \{2; 4; 6; 8; 10; 11; 13; 15; 20\}$$

Si l'on note X_1 égal au numéro de la zone au premier tir et

X_2 égal au numéro de la zone au second tir.

$$* P(X = 2) = p(X_1 = 1) \times p(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$* P(X = 4) = p(X_1 = 1) \times p(X_2 = 2) + p(X_1 = 2) \times p(X_2 = 1)$$

$$P(X = 4) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$* P(X = 6) = p(X_1 = 1) \times p(X_2 = 3) + p(X_1 = 3) \times p(X_2 = 1) + p(X_1 = 2) \times p(X_2 = 2)$$

$$P(X = 6) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{48}$$

$$* P(X = 8) = p(X_1 = 1) \times p(X_2 = 3) + p(X_1 = 3) \times p(X_2 = 2)$$

$$P(X = 8) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

$$* P(X = 10) = p(X_1 = 3) \times p(X_2 = 3)$$

$$P(X = 10) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$* P(X = 11) = p(X_1 = 1) \times p(X_2 = 4) + p(X_1 = 4) \times p(X_2 = 1)$$

$$P(X = 11) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$$

$$* P(X = 13) = p(X_1 = 2) \times p(X_2 = 4) + p(X_1 = 4) \times p(X_2 = 2)$$

$$P(X = 13) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}$$

$$* P(X = 15) = p(X_1 = 3) \times p(X_2 = 4) + p(X_1 = 4) \times p(X_2 = 3)$$

$$P(X = 15) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36}$$

$$* P(X = 20) = p(X_1 = 4) \times p(X_2 = 4)$$

$$P(X = 20) = \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{144}$$

La loi de probabilité de X est :

x_i	2	4	6	8	10	11	13	15	16
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{144}$

b- Calculons $E(X)$ et $V(X)$

$$E(X) = \frac{35}{6} \text{ et } V(X) = \frac{971}{72}$$

3°) La probabilité pour un tireur qui effectue trois tirs successifs d'obtenir au moins quatre points.

Soit Y la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus.

$$p = P(Y \geq 4)$$

$$= 1 - P(Y < 4)$$

$$= 1 - [p(X_1 = 1) \times p(X_2 = 1) \times p(X_3 = 1)] \Rightarrow p = \frac{7}{8}$$

ACTIVITE 31 :

1°) Indiquons le tableau des gains

Dressons d'abord un tableau des couples qui on pour première composante une réponse A et pour seconde composante une réponse B

	1	2	3	4	5
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)
2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)

Soit card $\Omega = 3 \times 5 = 15$

Tableau de gain

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	6000	0
2	3000	3000	3000	9000	3000
3	0	0	0	6000	0

2°) Donnons la loi de probabilité de X
 $X(\Omega) = \{0; 3000; 6000; 9000\}$

Correction des activités sur les probabilités

$$P(X=0) = \frac{8}{15}; P(X=3000) = \frac{4}{15}; P(X=6000) = \frac{2}{15}$$

$$; P(X=9000) = \frac{1}{15}$$

Loi de probabilité de X

x_i	0	3000	6000	9000
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

3°) Calculons l'espérance mathématique

On trouve : $E(X) = 2200$

4°) $E(X) > 1500$, donc il peut jouer si sa mise est de 1500.

ACTIVITE 32 :

1°) a- Calculons $p(E_1)$, $p(E_2)$ et $p(E_3)$

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve,

$$\text{card } \Omega = C_{10}^2 = 45$$

$$p(E_1) = \frac{C_5^2 + C_3^2 + C_2^2}{45} \Rightarrow p(E_1) = \frac{14}{45}$$

$$p(E_2) = 1 - p(E_1) = \frac{31}{45}$$

$$p(E_3) = \frac{C_4^2 + C_2^2}{45} \Rightarrow p(E_3) = \frac{7}{45}$$

b- Calculons la probabilité de l'évènement E_3 sachant que l'évènement E_1 est réalisé

$$p_{E_1}(E_3) = \frac{p(E_1 \cap E_3)}{p(E_1)}$$

$E_1 \cap E_3$ est l'évènement "le nombre de tirages de deux boules de même couleur et même numéro et trouve

$$p(E_1 \cap E_3) = \frac{4}{45} \text{ d'où}$$

$$p_{E_1}(E_3) = \frac{2}{7}$$

c- Voyons si E_1 et E_3 sont indépendants

$$p(E_1) \times p(E_3) = \frac{14}{45} \times \frac{7}{45} \text{ et } p(E_1 \cap E_3) = \frac{4}{45}$$

On a : $p(E_1) \times p(E_3) \neq p(E_1 \cap E_3)$ donc E_1 et E_3 ne sont pas indépendants.

2°) a- Déterminons la loi de probabilité de X

$X(\Omega) = \{10; 15; 20\}$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X

$$p(X=10) = \frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45}$$

$$p(X=15) = \frac{C_6^1 \times C_4^1}{45} = \frac{24}{45}$$

$$p(X=20) = \frac{C_4^2}{45} = \frac{6}{45}$$

La distribution de la variable aléatoire de X est définie par le tableau suivant

x_i	10	15	20
$p(X=x_i)$	$\frac{15}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{6}{45}$

b- Calculons l'écart type de X

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{9300}{45} - (14)^2 = \frac{32}{3}$$

$$\sigma(X) = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

c- Définissons et représentons la fonction de répartition X

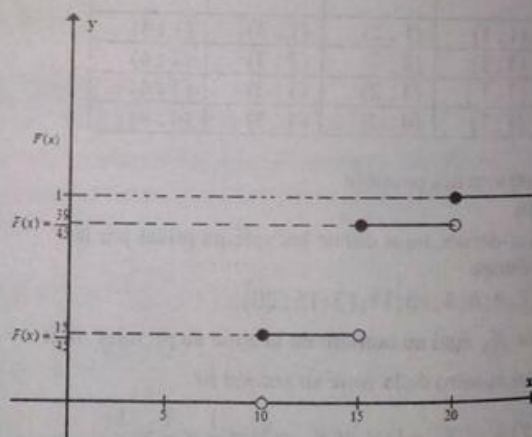
Soit F cette fonction

Si $x < 10$, $F(x) = 0$

$$\text{Si } x \in [10; 15[, F(x) = \frac{15}{45}$$

$$\text{Si } x \in [15; 20[, F(x) = \frac{39}{45}$$

$$\text{Si } x \geq 20, F(x) = 1$$



ACTIVITE 33 :

1°) a- Calculons la probabilité pour qu'exactly 2 des 5 sacs contrôlés contiennent des produits non déclarés. Soit Ω l'univers associé à cette épreuve :

$$\text{card } \Omega = C_{60}^5 = 5461512$$

Soit p la probabilité recherchée

$$p = \frac{C_{10}^2 \times C_{50}^3}{C_{60}^5} = 0,2$$

b- Démonstration

Calculons d'abord la probabilité pour que les sacs contrôlés contiennent des produits déclarés

$p = \frac{C_{50}^5}{C_{60}^5} = 0,4$ alors la probabilité recherchée est

$p' = 1 - p = 0,6$ d'où le résultat ou calculer :

$$p' = \frac{C_{10}^0 \times C_{50}^4 + C_{10}^1 \times C_{50}^3 + C_{10}^2 \times C_{50}^2 + C_{10}^3 \times C_{50}^1 + C_{10}^4 \times C_{50}^0}{C_{60}^5}$$

2°) Déterminons la loi de probabilité de X

$X(\Omega) = \{0; 10000; 20000; 30000\}$

Dans cette épreuve le succès est de saisir les sacs contenant des produits non déclarés.

$X = 0$ équivaut à zéro succès

$X = 10000$ équivaut à un succès

$X = 20000$ équivaut à 2 succès

$X = 30000$ équivaut à 3 succès c'est que le camionneur

a été pris à tous les postes de contrôle.

Le contrôle étant répété 3 fois c'est donc une épreuve de Bernoulli à probabilité de succès 0,6.

$$P(X=0) = C_3^0 (0,6)^0 (1-0,6)^3 = 0,064$$

$$P(X=10000) = C_3^1 (0,6)^1 (0,4)^2 = 0,288$$

$$P(X=20000) = C_3^2 (0,6)^2 (0,4)^1 = 0,432$$

$$P(X=30000) = C_3^3 (0,6)^3 (0,4)^0 = 0,216$$

La loi de probabilité de X

x_i	0	10000	20000	30000
$P(X=x_i)$	0,064	0,288	0,432	0,216

b- Démontrons que $E(X) = 18000$

$$E(X) = (0 \times 0,064) + (10000 \times 0,288) + (20000 \times 0,432) + (30000 \times 0,216)$$

$$E(X) = 18000$$

ACTIVITE 34 :

Le joueur tire successivement sur 4 boîtes, de dimensions de plus en plus réduites : $B_1; B_2; B_3; B_4$, dans cet ordre. On note p_i la probabilité de toucher la boîte numérotée i , pour $i = 1; 2; 3; 4$.

Un joueur A se présente avec $p_1 = \frac{4}{5}, p_2 = \frac{3}{5}, p_3 = \frac{2}{5},$

$$p_4 = \frac{1}{5}$$

1°) Les éventualités du jeu du joueur A sont :

w_1 : « A rate B_1 »

w_2 : « A atteint B_1 , mais rate B_2 »

w_3 : « A atteint B_1 , puis B_2 et mais rate B_3 »

w_4 : « A atteint B_1 , puis B_2 , puis B_3 mais rate B_4 »

w_5 : « A atteint B_1 , puis B_2 , puis B_3 et B_4 »

La probabilité de chacune de ces éventualités est :

$$P(w_1) = 1 - p_1 = \frac{1}{5}; P(w_2) = p_1 \times (1 - p_2) = \frac{8}{25}$$

$$P(w_3) = p_1 \times p_2 \times (1 - p_3) = \frac{36}{125};$$

$$P(w_4) = p_1 \times p_2 \times p_3 \times (1 - p_4) = \frac{96}{625};$$

$$P(w_5) = p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 = \frac{24}{625}$$

2°) X la variable aléatoire " le gain obtenu en fin de partie "

On sait que le joueur gagne 1000F, s'il tire sur une boîte et l'atteint, et perd 1000F s'il tire sur une boîte et la rate. D'où l'ensemble des valeurs prises par X est :

$$X(\Omega) = \{-1000; 0; 1000; 2000; 4000\}$$

a- Loi de probabilité de X .

$$P(X = -1000) = P(w_1) = \frac{1}{5}; P(X = 0) = P(w_2) = \frac{8}{25};$$

$$P(X = 1000) = P(w_3) = \frac{36}{125}; P(X = 2000) = P(w_4) = \frac{96}{625};$$

$$P(X = 4000) = P(w_5) = \frac{24}{625}$$

Le tableau récapitulatif de la loi de X est :

x_i	-1000	0	1000	2000	4000
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{24}{625}$

Espérance mathématique de X .

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i P(X=x_i)$$

$$= \frac{1}{625} (-1000 \times 125 + 0 \times 200 + 1000 \times 180 + 2000 \times 96 + 4000 \times 24)$$

$$E(X) = \frac{343000}{625} = 548,8 \text{ soit } \underline{E(X) = 548,8}$$

3°) calcul de probabilité pour que A verse au moins 500F

Soit B l'événement : « le joueur A verse au moins 500F à un fonds de solidarité »

$$P(B) = P(X \geq 1000)$$

$$P(B) = 1 - P(X < 1000)$$

$$= 1 - P(X = 0) - P(X = -1000)$$

$$= 1 - \frac{8}{25} - \frac{1}{5} = \frac{12}{25} \text{ donc } P(B) = \frac{12}{25}$$

ACTIVITE 35 :

1°) Prouvons que la probabilité d'obtenir deux boules blanches

$$\text{est } \frac{6}{n(n-1)}$$

Soit Ω , l'univers associé à cette épreuve,

$$\text{card } \Omega = C_n^2 = \frac{A_n^2}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

soit P cette probabilité

$$P = \frac{C_3^2}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{6}{n(n-1)}$$

2°) a- Déterminons la loi de probabilité X en fonction de n
 $X(\Omega) = \{-100; 0; 300\}$

$$P(X = -100) = \frac{6}{n(n-1)}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_3^1 \times C_{n-3}^1}{n(n-1)} = \frac{6n-18}{n(n-1)}$$

$$P(X = 300) = \frac{C_{n-1}^2}{n(n-1)} = \frac{n^2 - 7n + 12}{n(n-1)}$$

Loi de probabilité			
x_i	-100	0	300
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{n(n-1)}$	$\frac{6n-18}{n(n-1)}$	$\frac{n^2 - 7n + 12}{n(n-1)}$

b- Calculons $E(X)$

on trouve : $E(X) = \frac{100(3n^2 - 21n + 30)}{n(n-1)}$

c- Déterminons le nombre de boules de l'urne si $E(X) = 0$

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow 3n^2 - 21n + 30 = 0 \text{ avec } n \geq 5$$

$3n^2 - 21n + 30 = 0 \Leftrightarrow n_1 = 6$ ou $n_2 = 5$ comme $n \geq 5$
 donc le nombre de boules que doit contenir l'urne pour que
 $E(X) = 0$ est $6 + 3 = 9$ boules

3°) $n = 6$ donc card $\Omega = C_9^2 = 36$

Soit P' cette probabilité

$$P' = 1 - \left[C_{10}^0 \left(\frac{2}{5} \right)^0 \left(\frac{3}{5} \right)^{10} \right] = 0,99$$

ACTIVITE 36 :

1°) a- $P = \frac{29}{330}$

b- $P' = \frac{239}{825}$

2°) a-

x_i	0	200	500	1000
$P(X = x_i)$	$\frac{40}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{12}{100}$

b- $E(X) = 270$

c- Pour que le jeu soit équitable, l'organisateur doit faire payer 270 f

ACTIVITE 37 :

1°)

La probabilité qu'un parakois ait un sang du groupe O est 0,46

2°) a- Soit P_1 la probabilité qu'un seul parmi les quatre ait un sang du groupe O.

$$P_1 = C_4^1 (0,46)^1 (1-0,46)^3 = 0,29$$

b- Soit P_2 la probabilité de trouver les quatre groupes sanguins chez ces donneurs

$$P_2 = p(A) \times p(B) \times p(AB) \times p(O) \times 4!$$

$$P_2 = 0,31 \times 0,18 \times 0,05 \times 0,46 \times 24 \text{ donc } \underline{P_2 = 0,03}$$

II)

1°) $P = p(O \cap Rh_-)$

$$= p_O(Rh_-) \times p(O)$$

$$= 0,09 \times 0,46 = 0,0414$$

2°) a- X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0414$

$$p(X = k) = C_n^k (0,0414)^k (0,9586)^{n-k} \text{ avec}$$

$$k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$$

b- $E(X) = n \times p = n \times 0,0414$

c- $n = 5000$; $E(X) = 5000 \times 0,0414 = 207$

Donc le nombre moyen des donneurs universels parmi 5000 est 207.

ACTIVITE 38 :

1°)

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve. $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$
 on lance le dé parfait 3 fois de suite donc on ait en présence

d'une loi Binomiale de paramètre $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$

$$p(X = 0) = C_3^0 \left(\frac{1}{6} \right)^0 \left(1 - \frac{1}{6} \right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$p(X = 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{6} \right)^1 \left(\frac{5}{6} \right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$p(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{5}{6} \right)^1 = \frac{15}{216}$$

$$p(X = 3) = C_3^3 \left(\frac{1}{6} \right)^3 = \frac{1}{216} \text{ alors la loi de probabilité de } X$$

est résumé dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

2°) a- $p(B) = \frac{1}{2} C_3^2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right)^1 = \frac{1}{9}$

b- $p(C) = \frac{1}{2} C_3^2 \left(\frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{5}{6} \right)^1 = \frac{5}{144}$

c- $p(A) = p(B) + p(C) = \frac{7}{48}$

ACTIVITE 39 :

1°) tirage simultanément de deux jetons

a- $p(A) = \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_5^2} = \frac{2}{5}$ et $p(B) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

Loi de probabilité de X
Soit Ω l'univers associé à cette épreuve, $\text{card} \Omega = C_5^2 = 10$
et $X(\Omega) = \{-2; 0; 2\}$

x_i	-2	0	2
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E(X) = \frac{2}{5}$$

2°) Tirage successif et sans remise de 2 jetons

Soit $\vec{n}(1; a; 0)$ un vecteur normal à (P) et $\vec{n}'(1; b; 0)$ un vecteur normal à (P')

$$(P) \parallel (P') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \text{tirer deux boules de}$$

$$\text{même numéro alors } p(C) = \frac{A_2^2 + A_3^2}{A_5^2} = \frac{2}{5}$$

$$(P) \perp (P') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow ab = -1 \Leftrightarrow \text{tirer deux jetons de}$$

$$\Rightarrow p(D) = \frac{A_3^1 \times A_2^1 \times 2}{A_5^2} = \frac{3}{5}$$

ACTIVITE 45 :

On note les événements suivants :

A : « un électeur a choisi Adu »

B : « un électeur a choisi Bala »

K : « un électeur a choisi Kadri »

Z : « un habitant de ZATA a voté »

On donne les probabilités suivantes :

$$p(A/Z) = \frac{3}{8} ; p(B/Z) = \frac{1}{2} ; p(K/Z) = \frac{1}{8}$$

$$p(Z) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

1°) La probabilité pour que 5 habitants de ZATA aient voté est égale à $p_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{243}{3125} = 0,077$

2°) La probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse Bala est égale à $p_2 = p(B \cap Z) = p(B/Z) \times p(Z)$

$$\text{donc } p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \text{ d'où } p_2 = \frac{3}{10} = 0,3$$

3°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voix obtenues par Bala parmi les 5 habitants.
La loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètre $n=5$ et $p=0,30$

$$\forall k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}, p(X=k) = C_5^k (0,3)^k (0,7)^{5-k}$$

k	0	1	2	3	4	5
	0,3602	0,3087	0,1323	0,0284	0,0024	

Comme X suit une loi binomiale, alors

$$E(X) = np = 5 \times 0,3 = 1,5 \text{ et}$$

$$V(X) = n(p-p) = 5 \times 0,3 \times 0,7 = 1,05. \text{ Donc } E(X) = 1,5 \text{ et } V(X) = 1,05$$

4°) Calculons la probabilité pour qu'un habitant de ZATA choisisse Kadri.

Soit p_3 cette probabilité on a :

$$p_3 = p(Z \cap K) = p(K/Z) \times p(Z) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{5} \text{ donc}$$

$$p_3 = \frac{3}{40} = 0,075.$$

5°) On note p_n la probabilité pour que parmi n habitants votant, aucun ne choisisse Kadri.

$$P_n = \left(\frac{37}{40}\right)^n$$

6°) La probabilité pour que Kadri obtienne au moins une

$$\text{voix est } P'_n = 1 - P_n \text{ donc } P'_n = 1 - \left(\frac{37}{40}\right)^n$$

Le nombre minimum d'habitants qui doivent voter pour que Kadri obtienne au moins une voix avec une

$$\text{probabilité } \geq \frac{15}{16} \text{ vérifie : } P'_n \geq \frac{15}{16}$$

$$P'_n \geq \frac{15}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{37}{40}\right)^n \leq \frac{1}{16} \text{ donc } n \geq \frac{\ln 16}{\ln 40 - \ln 37} \text{ ou } n \geq 35,56. \text{ Le nombre minimum d'habitants est de 36.}$$

ACTIVITE 46:

1°)

Soit Ω l'univers de cette preuve

$$\text{on a : } \text{card} \Omega = A_{10}^2 = 90 ; \text{card} A = A_4^2 = 12$$

$$\text{donc } p(A) = \frac{2}{15}$$

En appelant $(x; y)$ le couple des entiers naturels tirés :

$$B = \{(x; y) \text{ tels que : } x > 2y, x, y \in \{1; 2; \dots; 10\}\}$$

$$\text{on a par comptage : } \text{card} B = 20$$

$$\text{Donc } p(B) = \frac{2}{9}$$

NB : On peut aussi retrouver $\text{card} B$ en utilisant le quadrillage et la droite d'équation $x = 2y$

2°) Appelons C : événement « B est réalisé 2 fois exactement ».

En appelant D l'événement « B est réalisé au moins une fois »

$$p(C) = C_7^2 \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{7}{9}\right)^5 \text{ donc } p(C) \approx 0,295$$

$\bar{D}$ devient l'événement « B n'est aucune fois aucune fois réalisé »

$$p(\bar{D}) = C_7^0 \left(\frac{2}{9}\right)^0 \left(\frac{7}{9}\right)^7 \text{ donc } p(D) = 1 - p(\bar{D}) \text{ et}$$

on trouve $p(D) \approx 0,827$

ACTIVITE 48 :

La probabilité d'avoir une fille étant le double de celle d'avoir

un garçon, alors on a : $p(F) = \frac{2}{3}$ et $p(G) = \frac{1}{3}$

1°) Cas particulier $n = 4$

D'où $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$

a- Loi de probabilité de X.

L'ensemble des valeurs prises par X, noté

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

Les naissances étant indépendantes des uns des autres, la loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètre $n = 4$

et $p = p(F) = \frac{2}{3} \forall k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$,

$$p(X = k) = C_4^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$$

Donnons cette loi dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$p(X = k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

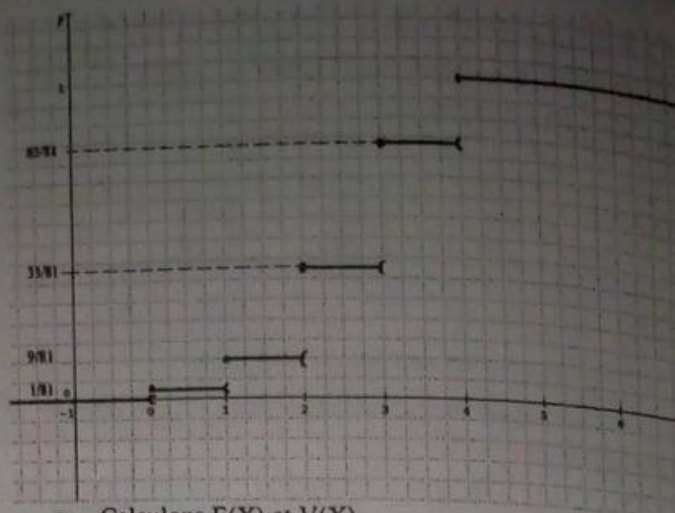
b- Fonction de répartition

La fonction de répartition F de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = p(X \leq x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{81}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{9}{81}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{33}{81}, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{65}{81}, & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Tracé de F.



c- Calculons $E(X)$ et $V(X)$

Comme X suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{2}{3}$,

alors on a : $E(X) = np$ soit $E(X) = \frac{8}{3}$ et $V(X) = np(1-p)$

soit $V(X) = \frac{8}{9}$

2°) Soit p_n la probabilité de ne pas avoir de garçons. Alors

$$p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$p_n < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow n \ln \frac{2}{3} < \ln \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-2 \ln 10}{\ln \frac{2}{3}} \text{ car } \ln \frac{2}{3} < 0$$

D'où $n > 11,5$, comme n est un entier naturel, on a : $n \geq 12$.

ACTIVITE 49 :

A/ L'univers Ω est l'ensemble des arrangements des 18 chevaux trois à trois. D'où $\text{card} \Omega = A_{18}^3 = 4896$. Il s'agit d'une équiprobabilité.

a- Soit A : « Amadou gagne le tiercé dans l'ordre »

$$\text{card} A = 1 \text{ donc } p(A) = \frac{1}{4896}$$

b- Soit l'événement B : « Amadou gagne le tiercé dans le désordre »

$$\text{card} B = 3! - 1 = 5 \text{ donc } p(B) = \frac{5}{4896}$$

B/ Soit les événements suivants :

O : « gagner le tiercé dans l'ordre »

H : « le parieur est un homme »

F : « le parieur est une femme »

Le nombre des hommes étant le double de celui des femmes, on déduit que : $p(F) = \frac{1}{3}$ et $p(H) = \frac{2}{3}$.

On sait que 6% des femmes gagnent le tiercé dans l'ordre et 12% des hommes le gagnent dans le désordre. Ce qui se traduit par :

$$p_F(O) = 0,06 \text{ et } p_H(O) = 0,12.$$

1°) a- Soit l'événement C : « un membre du club gagne le tiercé dans l'ordre »

$$p(C) = p(O \cap F) + p(O \cap H)$$

$$= p_F(O) \times p(F) + p_H(O) \times p(H) \text{ et on trouve :}$$

$$p(C) = \frac{1}{10}$$

b- Soit l'événement D « un gagnant dans l'ordre de ce club soit un homme »

$$p(D) = p_C(H) = \frac{p(H \cap C)}{p(C)} = \frac{p(O \cap H)}{p(C)} = \frac{p_H(O) \times p(H)}{p(C)}$$

$$D'où p(D) = \frac{0,12 \times \frac{2}{3}}{0,1} = 0,8 \text{ c'est-à-dire } p(D) = \frac{4}{5}.$$

2°) Soit l'événement E : « il y a exactement deux hommes parmi ces 6 parieurs »

$$p(E) = C_6^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \text{ donc } p(E) = 0,01536.$$

ACTIVITE 50 :

On considère un dé tétraédrique pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 4 telles que : $p(i) = c i^2$.

1°) Calcul de c.

$$\sum_{i=1}^4 p_i = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 30c \text{ or } \sum_{i=1}^4 p_i = 1$$

$$d'où c = \frac{1}{30}.$$

$$\text{Ainsi donc } p(1) = \frac{1}{30} ; p(2) = \frac{2}{15} ; p(3) = \frac{3}{10} \text{ et}$$

$$p(4) = \frac{8}{15}.$$

2°) Loi de X-espérance et variance de X.

X la variable aléatoire « somme des numéros visibles »

L'ensemble des valeurs prises par X, égal à

$$X(\Omega) = \{6; 7; 8; 9\}.$$

Loi de probabilité de X.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	6	7	8	9
$p(X=x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{30}$

Calcul de $E(X)$

La fonction mathématique de X, est définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p(X=x_i) = \frac{96+63+32+9}{30} = \frac{20}{3} \text{ Donc}$$

$$E(X) = \frac{20}{3}.$$

Calcul de $V(X)$.

La variance de X est définie par : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

$$\text{or } E(X^2) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 p(X=x_i) = \frac{576+441+256+81}{30} = \frac{677}{15}$$

$$D'où V(X) = \frac{677}{15} - \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{31}{45} \text{ donc } V(X) = \frac{31}{45}$$

3°) Soit A l'événement « X est paire au moins deux fois au cours de 5 lancers. Or la probabilité p pour que X soit paire en

$$\text{un seul lancer est } p = p(X=6) + p(X=8) = \frac{2}{3}.$$

D'où :

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left[C_5^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 \right] = 1 - \frac{11}{243} = \frac{232}{243}$$

ACTIVITE 51:

1°) Calcul des aires des parties A, B et C.

Notons S_A, S_B, S_C , les aires respectives des parties A, B, C. On a : $S_A = \pi R^2$; $S_B = 3\pi R^2$ et $S_C = 5\pi R^2$

2°) a- Probabilités d'atteindre les parties B et C en fonction de p.

Soit p_B et p_C les probabilités d'atteindre les parties B et C respectivement. Comme les probabilités p, p_B et p_C

sont proportionnelles à S_A, S_B et S_C respectivement ?

$$\text{alors : } \frac{p}{S_A} = \frac{p_B}{S_B} = \frac{p_C}{S_C} \text{ donc } p_B = 3p \text{ et } p_C = 5p.$$

b- Valeur de p.

la probabilité d'atteindre une partie de la cible étant 0,75,

$$\text{on a alors } p + p_B + p_C = 0,75 \text{ d'où } p = \frac{1}{12}. \text{ Ainsi } p_B = \frac{1}{4}$$

$$\text{et } p_C = \frac{5}{12} \text{ et la probabilité pour qu'un joueur lançant}$$

une fléchette anque la cible est $q = \frac{1}{4}$.

3°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par un joueur lançant deux fléchettes.

L'ensemble des valeurs prises par X, noté

$$X(\Omega) = \{0; 25; 50; 75; 100; 125; 150; 200\}$$

a- La loi de probabilité de X.

$$p(X=0) = q^2 = \frac{1}{16} ; p(X=25) = 2qp_C = \frac{5}{24} ;$$

$$p(X=50) = p_C^2 + 2qp_B = \frac{43}{144} ; p(X=75) = 2p_B p_C = \frac{5}{24}.$$

$$p(X=100) = p_B^2 + 2qp = \frac{5}{48}; \quad p(X=125) = 2p \times p_C = \frac{5}{72}$$

$$p(X=150) = 2p \times p_B = \frac{1}{24}; \quad p(X=200) = p^2 = \frac{1}{144}$$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	25	50	75	100	125	150	200
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{43}{144}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{144}$

b- Espérance mathématique de X .

$$E(X) = \sum_{i=1}^8 x_i p(X=x_i) = \frac{25(30+86+90+60+50+36+8)}{144} \text{ donc } E(X) = 62,5$$

ACTIVITE 52:

1°) a- Prouvons que $c = \frac{1}{18}$

On a : $|z_0|^2 = 4$, $|z_1|^2 = 8$, $|z_2|^2 = 2$ et $|z_3|^2 = 4$. Or les quatre réels p_k définissent sur l'univers des quatre faces

du dé une probabilité si on a : $\sum_{k=0}^3 p_k = 1$

$$\sum_{k=0}^3 p_k = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^3 c|z_k|^2 = 1 \Leftrightarrow 18c = 1 \text{ d'où le résultat.}$$

b- Déterminons p_k pour $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.

$$p_0 = \frac{2}{9}; \quad p_1 = \frac{4}{9}; \quad p_2 = \frac{1}{9} \text{ et } p_3 = \frac{2}{9}.$$

2°) a- Déterminons la valeurs prises par X .

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.

$$\text{Et comme } z_0 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}; \quad z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}; \quad z_{21} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} \text{ et } z_{31} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{On a : } X(\Omega) = \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$$

b- Donnons la loi de probabilité de X .

x_i	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

c- Calculons l'espérance mathématique de X .

$$\text{on a : } E(X) = \frac{2 \times 2\pi + 2 \times \pi + 4 \times 5\pi + 1 \times 7\pi}{9} = \frac{11\pi}{9}$$

3°) a- Vérifions que z_0 est une racine de $f(z)$

$$\text{On trouve : } f(z_0) = f(-2i) = 0$$

b- Déduisons deux nombres complexes α et β tels

$$\text{que : } f(z) = (z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

comme z_0 est une racine de $f(z)$, le polynôme est factorisable par $z - z_0$ et on trouve par exemple par

$$\text{division euclidienne : } f(z) = (z + 2i)[z^2 + (1 + 3i)z - 4]$$

d'où $\alpha = 1 + 3i$ et $\beta = -4$.

c- Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$

$$\text{on trouve } z + 2i = 0 \text{ (1) ou } z^2 + (1 + 3i)z - 4 = 0 \text{ (2)}$$

(1) donne $z = -2i$ et pour résoudre (2) on calcule le discriminant $\Delta = 8 + 6i$ dont il faut déterminer une racine carrée $\delta = a + ib$ en résolvant l'équation : $\delta^2 = \Delta$ qui se ramène au système :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = 6 \end{cases} \quad \text{on trouve } \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \\ ab = 3 \end{cases} \text{ on pourra prendre}$$

$\delta = 3 + i$ et obtenir les deux solutions de (2) comme :

$$\frac{-1 - 3i + 3 + i}{2} = 1 - i \text{ et } \frac{-1 - 3i - 3 - i}{2} = -2 - 2i$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation : $f(z) = 0$

est : $\{-2i; 1 - i; -2 - 2i\}$.

ACTIVITE 53 :

1°) On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes. L'ensemble des éventualités est l'ensemble des cartes à 3 éléments de l'ensemble des cartes.

$$\text{Donc } \text{card}\Omega = C_{32}^3 = 4960$$

A: « Les trois cartes sont des as »

$$\text{card}A = C_4^3 = 4$$

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{1240}$$

B: « Il y a au moins 2 couleurs parmi ces 3 cartes ».

On a : $\bar{B}$ est l'événement «les 3 cartes sont de même couleur»

$$\text{card}\bar{B} = 4 \times C_8^3 = 224$$

$$p(\bar{B}) = \frac{\text{card}\bar{B}}{\text{card}\Omega} = \frac{7}{155}$$

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = \frac{148}{155}$$

C: « Il y a pas d'as parmi les 3 cartes ».

$$\text{card}C = C_{28}^3 = 3276$$

$$p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = 0,66$$

2°) On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu

a- Soit Ω l'ensemble des éventualités.

On a $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

b- La loi de la probabilité de X.

On a: $\text{card}\Omega = 32 \times 32 \times 32$

$$p(X=0) = \frac{\text{card}(X=0)}{\text{card}\Omega} = \frac{24 \times 24 \times 24}{32 \times 32 \times 32} = \frac{27}{64}$$

$$p(X=1) = \frac{\text{card}(X=1)}{\text{card}\Omega} = \frac{3 \times 8 \times 24 \times 24}{32 \times 32 \times 32} = \frac{27}{64}$$

$$p(X=2) = \frac{\text{card}(X=2)}{\text{card}\Omega} = \frac{3 \times 8 \times 8 \times 24}{32 \times 32 \times 32} = \frac{9}{64}$$

$$p(X=3) = \frac{\text{card}(X=3)}{\text{card}\Omega} = \frac{8 \times 8 \times 8}{32 \times 32 \times 32} = \frac{1}{64}$$

c- Espérance mathématique de X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = p(x=1) + 2p(x=2) + 3p(x=3)$$

$$\frac{27}{64} + 2 \times \frac{9}{64} + 3 \times \frac{1}{64} = \frac{3}{4}$$

Donc $E(X) = 0,75$

ACTIVITE 54 :

I- Rappelons la probabilité des événements :

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} ; p(A/B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}B}$$

$p(A) = p(A \cap \bar{B}) + p(A \cap B)$ car $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$ et $(A \cap \bar{B})$ et $(A \cap B)$ sont deux événements incompatibles.

II-

1°) prouvons les égalités :

1^{er} jour la ville est délesté alors $p(D_1) = 1$

Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$ alors on a :

$$p(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}$$

Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle

soit délestée le jour suivant est $p(D_{n+1}/\bar{D}_n) = \frac{5}{6}$.

2°) Exprimons p_{n+1} en fonction de $p(D_{n+1} \cap D_n)$ et

$$p(D_{n+1} \cap \bar{D}_n)$$

$p_{n+1} = p(D_{n+1})$ et on a :

$$p(D_{n+1}) = p(D_{n+1} \cap D_n) + p(D_{n+1} \cap \bar{D}_n) \text{ or } p_{n+1} = p(D_{n+1})$$

$$\text{donc } p_{n+1} = p(D_{n+1} \cap D_n) + p(D_{n+1} \cap \bar{D}_n)$$

3°) Déduisons que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{n+1} = -\frac{11}{18} p_n + \frac{5}{6}$$

$$p_{n+1} = p(D_{n+1} \cap D_n) + p(D_{n+1} \cap \bar{D}_n)$$

$$= p(D_n) \times p(D_{n+1}/D_n) + p(\bar{D}_n) \times p(D_{n+1}/\bar{D}_n)$$

$$= \frac{2}{9} p_n + (1 - p_n) \times \frac{5}{6} \text{ et on obtient :}$$

$$p_{n+1} = -\frac{11}{18} p_n + \frac{5}{6}$$

$$4^\circ) U_n = 6p_n - \frac{90}{29}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

a- Démontrons que (U_n) est une suite géométrique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 6\left(p_n - \frac{15}{29}\right)$ donc

$$U_{n+1} = 6\left(p_{n+1} - \frac{15}{29}\right)$$

En remplaçant p_{n+1} par son expression on a :

$$U_{n+1} = 6\left(-\frac{11}{18} p_n + \frac{5}{6} - \frac{15}{29}\right)$$

$$= 6\left(-\frac{11}{18} p_n + \frac{55}{6 \times 29}\right)$$

$$= 6 \times \frac{-11}{18} \left(p_n - \frac{55}{11} \times \frac{18}{6 \times 29}\right)$$

$$= -\frac{11}{18} \left(6p_n - \frac{90}{29}\right) = -\frac{11}{18} U_n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ alors la}$$

suite (U_n) est géométrique de raison $q = -\frac{11}{18}$ et de

premier terme $U_1 = 6p_1 - \frac{90}{29} = 6 - \frac{90}{29}$ soit $U_1 = \frac{84}{29}$

b- Exprimons U_n puis p_n en fonction de n

$$U_n = U_1 \times q^{n-1} \text{ d'où } U_n = \frac{84}{29} \times \left(-\frac{11}{18}\right)^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$p_n = \frac{1}{6} \left(U_n + \frac{90}{29}\right) \text{ alors } p_n = \frac{1}{6} \left[\frac{84}{29} \times \left(-\frac{11}{18}\right)^{n-1} + \frac{90}{29}\right] \text{ avec}$$

$n \in \mathbb{N}^*$

c- Soit q_{20} la probabilité que la ville soit sans délestage le 20^{ème} jour.

$q_{20} = 1 - p_{20}$ donc $q_{20} \approx 6,483 \times 10^{-3}$ près par défaut.

ACTIVITE 55 :

Correction :

1°) a- Démontrons que les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et

p_6 vérifient le système :

• D'après l'énoncé on a : $p_2 = 4p_1$ (a)

• On a : p_1, p_3, p_5 forment dans cet ordre, les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison

$$\frac{1}{2} \text{ donc :}$$

$$p_3 = \frac{1}{2} p_1 \text{ et } p_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 p_1 = \frac{1}{4} p_1 \text{ (b)}$$

- On a : p_2, p_4, p_6 forment dans cet ordre les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ donc

$$p_4 = \frac{1}{4}p_2 \text{ et } p_6 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 p_2 \text{ puisque } p_2 = 4p_1$$

$$\text{donc } p_4 = p_1 \text{ et } p_6 = \frac{1}{4}p_1 \text{ (c)}$$

- Les faces numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 du dé D_1 forment l'univers donc :

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \text{ (d)}$$

De (a), (b), (c) et (d) les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 vérifient le système :

$$p_2 = 4p_1 ; p_4 = p_1 ; p_3 = \frac{1}{2}p_1 ; p_5 = p_6 = \frac{1}{4}p_1 \text{ et}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1.$$

b- Calculons p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 .

$$\text{On a : } \begin{cases} p_2 = 4p_1 \\ p_4 = p_1 \\ p_3 = \frac{1}{2}p_1 \\ p_5 = p_6 = \frac{1}{4}p_1 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_1 + 4p_1 + \frac{1}{2}p_1 + p_1 + \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{4}p_1 = 1$$

$$\Rightarrow 7p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{7}$$

$$\text{Donc : } p_1 = \frac{1}{7} ; p_2 = \frac{4}{7} ; p_3 = \frac{1}{14} ; p_4 = \frac{1}{7} ; p_5 = \frac{1}{28} \text{ et}$$

$$p_6 = \frac{1}{28}$$

2°) Donnons l'univers image de X.

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.

Tableau des valeurs est :

$D_2 \backslash D_1$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On a donc :

$$X(\Omega) = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$$

b- Calculons les probabilités des événements :

Désignons par $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_5$ et p'_6 les probabilités d'apparitions des faces numérotées respectives 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 du dé D_2 .

$$\text{On a : } p'_1 = p'_2 = p'_3 = p'_4 = p'_5 = p'_6 = \frac{1}{6}$$

$$p\{X=2\} = p_1 \times p'_1 = \frac{1}{42}$$

$$p\{X=3\} = p_1 \times p'_2 + p_2 \times p'_1 = \frac{5}{42}$$

$$p\{X=4\} = p_3 \times p'_1 + p_2 \times p'_2 + p_1 \times p'_3 = \frac{11}{84}$$

$$p\{X=5\} = p_4 \times p'_1 + p_3 \times p'_2 + p_2 \times p'_3 + p_1 \times p'_4 = \frac{13}{84}$$

ACTIVITE 56 :

1°) a- Déterminons la loi de probabilité de X.

Tableau des valeurs

$a \backslash b$	2	2	4	4
2	-4	-4	-12	-12
2	-4	-4	-12	-12
3	1	1	-7	-7
3	1	1	-7	-7
3	1	1	-7	-7
3	1	1	-7	-7

Les valeurs de X sont : -12 ; -7 ; -4 et 1.

Loi de probabilité de X est :

x_i	-12	-7	-4	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

b- Déduisons-en la probabilité pour que (E) admette pour solution générale une fonction non sinusoïdale.

(E) admet une solution générale non sinusoïdale si et

seulement si $a^2 - 4b \geq 0$ soit $X \geq 0$ d'où la probabilité

demandée est : $P(X=1) = \frac{1}{3}$.

2°) Déterminons le plus petit entier n tel que :

$$P(Y \geq 1) \geq 0,999$$

$$\text{On : } P(Y \geq 1) \geq 0,999$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n \text{ d'où}$$

$$P(Y \geq 1) \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0,999$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0,001$$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln(0,001)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$n \geq 17,036 \text{ donc } n = 18.$$

3°) a- Vérifions que $f(x) = e^{-x} \ln x$ est solution de (E).

$f(x) = e^{-x} \ln x$. On a alors :

$$f'(x) = -e^{-x} \ln x + \frac{e^{-x}}{x} \text{ et } f''(x) = e^{-x} \ln x - \frac{1}{x^2} e^{-x} - \frac{e^{-x}}{x}$$

On obtient alors :

$$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x^2} e^{-x}$$

$$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = \left(\frac{x-1}{x^2} \right) e^{-x} \text{ d'où } f \text{ est solution de } (E').$$

b- Résolvons $(E_{(3;2)})$.

L'équation caractéristique associée à $(E_{(3;2)})$ est :

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 1$ et les solutions sont :

$$r_1 = \frac{-3-1}{2} = -2 \text{ et } r_2 = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

Les solutions de $(E_{(3;2)})$ sont les fonctions y_{AB} de la forme

$$y_{AB} = Ae^{-x} + Be^{-2x} \text{ avec } (A; B) \in \mathbb{R}^2.$$

c- Prouvons que g est solution de (E') si et seulement si

$g - f$ est solution de $(E_{(3;2)})$.

g est solution de (E') équivaut à

$$g''(x) + 3g'(x) + 2g(x) = \frac{x-1}{x^2} e^{-x} \text{ ou à}$$

$$g''(x) + 3g'(x) + 2g(x) = f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) \text{ ou à}$$

$$(g-f)''(x) + 3(g-f)'(x) + 2(g-f)(x) = 0 \text{ ou à } g-f \text{ est solution de } (E_{(3;2)}).$$

d- Dédudons-en les solutions de (E')

D'après 3b- et 3c- g est solutions de (E') équivaut à :

$$(g-f)(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} \text{ où } (A; B) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit donc que les solutions de (E') sont les fonctions

g définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} + e^{-x} \ln x$ où $(A; B) \in \mathbb{R}^2$.

TCHIKAMA

$U_{n+1} - U_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ par suite la suite (U_n) est croissante

c- Dédisons que (U_n) est convergente

(U_n) est croissante et est majorée par $\sqrt{3}$ d'où (U_n) est une suite convergente

3°) a- Démontrons que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on trouve : } V_{n+1} = \frac{3}{3 - U_n^2} \text{ et}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{3}{3 - U_n^2} - \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{3 - U_n^2}{3 - U_n^2}$$

$V_{n+1} - V_n = 1$ d'où (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b- Exprimons V_n en fonction de n .

$$V_0 = 0 \text{ et on trouve } \underline{V_n = n}$$

Dédisons U_n en fonction de n

Pour tout entier naturel n , $V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$ et on déduit que

$$U_n^2 = \frac{3n}{1+n} \Leftrightarrow U_n = \sqrt{\frac{3n}{1+n}} \text{ car } U_n > 0 \text{ d'où}$$

$$U_n = \sqrt{\frac{3n}{1+n}}$$

4°) a- Démontrons que la suite (T_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = W_{n+1} - 2(n+1) + 4$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{2} W_n + V_n - 2(n+1) + 4$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{2} W_n - n + 2$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{2} (W_n - 2n + 4)$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{2} T_n \text{ d'où } (T_n) \text{ est une suite géométrique de}$$

raison $q = \frac{1}{2}$.

b- Dédisons W_n en fonction de n .

$$T_0 = W_0 + 4 = 7 \text{ et } T_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On sait que : $T_n = W_n + 2n - 4 \Rightarrow W_n = T_n + 2n - 4$ d'où

$$W_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 4$$

c- Calculons S_1 et S_2

$$S_1 = 14 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$T_n = W_n - 2n + 4 \text{ et on a :}$$

$$T_0 = W_0 - 0(1) + 4$$

$$T_1 = W_1 - 2(1) + 4$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$T_{n-1} = W_{n-1} - 2(n-1) + 4$$

$$14 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = S_2 - 2 \left(\frac{n}{2}\right) (0 + n - 1) \text{ et on obtient :}$$

$$S_2 = 14 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + n^2 - 5n$$

ACTIVITE 7 :

1°) Exprimons V_{n+1} en fonction de $\ln U_n$ puis en fonction de V_n .

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\} \text{ on a : } V_{n+1} = \frac{1 + \ln U_{n+1}}{2}$$

Or $\forall n \geq 2$ on a : $(U_{n+1})^2 e = U_n$; $U_n > 0$ et $U_{n+1} > 0$ donc

$$2 \ln U_{n+1} + \ln e = \ln U_n \text{ soit } \ln U_{n+1} = \frac{-1 + \ln U_n}{2}$$

$$\text{Ainsi } V_{n+1} = \frac{1 + \frac{-1 + \ln U_n}{2}}{2} = \frac{1 + \ln U_n}{4}$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\} ; V_{n+1} = \frac{1 + \ln U_n}{4}$$

2°) Dédisons-en la nature de la suite (V_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}, \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{1 + \ln U_n}{4}}{\frac{1 + \ln U_{n-1}}{4}} = \frac{1}{2} = \text{cste}$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1^{er}

$$\text{terme } V_2 = \frac{1 + \ln U_2}{2} = 2$$

3°) Exprimons V_n et U_n en fonction de n .

(V_n) étant une suite géométrique de premier terme $V_2 = 2$ et de raison $\frac{1}{2}$ donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}, V_n = V_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$V_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}, V_n = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

1. CORRECTION

ACTIVITE

1°) Montrons p

$n+2$ est un

$n=0, 2^{2n}$

différence de

soit $n \geq 0$. Soit

$2^{2n+1} + 2 = 2^{2n+1} + 2$

et 1.

On a :

$$2^{2n+1} + 2 = 2^{2n+1} + 2$$

$$= 4 \cdot 2^n + 2$$

$$= 3 \cdot 2^n + 2^n + 2$$

$$= 2^{2n+1} + 2$$

Par hypothèse de :

$$2^{2n} + 2 = 2^{2n}$$

$$2^{2n+1} + 2 = 2^{2n+1}$$

$$= 3 \cdot 2^n + 2$$

Comme $2^{2n} + k$

est un entier divisi

$$2^{2n} + 2 \text{ est un en}$$

2°) Démontrons p

$$2^n \geq 6n + 7$$

*Si

$$2^n \geq 6n + 7$$

2°) Démontrons par

$$U_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Si $n=0, 4 - \frac{1}{2^{0-1}}$

$$= 4 - \frac{1}{2^{-1}} = 4 - 2 = 2$$

est vraie quand $n=0$

soit $n \geq 0$. Suppo

démontrons que l

Initiateur : Sylvain

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } V_n = \frac{1 + \ln U_n}{2}$$

$$V_n = \frac{1 + \ln U_n}{2} \Leftrightarrow \ln U_n = -1 + 2V_n$$

$$\Leftrightarrow U_n = e^{-1+2V_n}$$

$$\text{Soit } U_n = \frac{1}{e} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \text{ ou } U_n = \frac{1}{e} e^{16 \cdot 2^n}$$

4°) a- Vérifions la convergences des suites (U_n) et (V_n) .

$$\text{On a : } V_n = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

D'où (V_n) est convergente.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \text{ et } U_n = e^{-1+2V_n} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ d'où}$$

(U_n) est convergente.

b- Calculons en fonction de n S .

$$S = V_2 + V_3 + \dots + V_n$$

$$= V_2 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1}{2}} \text{ soit}$$

$$S = 4 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

5°) Calculons P_n en fonction de n .

$$\text{On a : } P_n = U_2 \times U_3 \times \dots \times U_n$$

$$\text{Or } U_n = e^{-1+2V_n}$$

$$\text{Ainsi on a : } P_n = e^{-1+2V_2} \times e^{-1+2V_3} \times \dots \times e^{-1+2V_n}$$

$$= e^{-1(n-1)+2S}$$

$$= e^{-1(n-1)+2 \cdot 4 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}$$

On trouve : $P_n = e \cdot e^{-4 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}$

ACTIVITE 8 :

Soit la suite réelle $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$U_n = \int_{n-1}^n (\ln 3)^{-x} dx$$

1°) Une primitive de la fonction f définie par :

$$f(x) = (\ln 3)^{-x} \text{ est la fonction } F \text{ tel que :}$$

$$F(x) = \frac{-1}{\ln(\ln 3)} (\ln 3)^{-x} \text{ D'où } \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$U_n = F(n) - F(n-1) = \frac{-1}{\ln(\ln 3)} \left[(\ln 3)^{-n} - (\ln 3)^{-(n-1)} \right]$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{(\ln 3)^{-n}}{\ln(\ln 3)} (-1 + \ln 3).$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$U_{n+1} = \frac{(\ln 3)^{-(n+1)}}{\ln(\ln 3)} (-1 + \ln 3) = \frac{(\ln 3)^{-n}}{\ln(\ln 3)} (-1 + \ln 3) \times \frac{1}{\ln 3}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = \frac{1}{\ln 3} U_n$ donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite

géométrique de raison $q = \frac{1}{\ln 3}$ et de premier terme :

$$U_1 = \frac{1 - (\ln 3)^{-1}}{\ln(\ln 3)}$$

2°) Convergente de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison

$$q = \frac{1}{\ln 3} \text{ et } |q| < 1 \text{ car } \ln 3 > 1, \text{ alors la suite } (U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

converge vers 0.

3°) Somme des termes d'une suite géométrique :

a- Calcule de S_n

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n, n \geq 1$$

S_n est la somme de n premiers termes d'une suite

géométrique de raison $q = \frac{1}{\ln 3}$ et de premier terme

$$U_1 = \frac{1 - (\ln 3)^{-1}}{\ln(\ln 3)}$$

$$\text{D'où } S_n = U_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - (\ln 3)^{-1}}{\ln(\ln 3)} \times \frac{1 - (\ln 3)^{-n}}{1 - (\ln 3)^{-1}} \text{ donc}$$

$$S_n = \frac{1 - (\ln 3)^{-1}}{\ln(\ln 3)}$$

b- Convergente de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(\ln 3)} \left[1 - (\ln 3)^{-1} \right] = \frac{1}{\ln(\ln 3)} \text{ car}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 3)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n} = 0$$

Donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{\ln(\ln 3)}$.

ACTIVITE 11 :

1°) Démontrons que (u_n) est une suite arithmétique que nous

caractérisons

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(1,032)^n + \ln P_0$$

$$u_n = n \ln(1,032) + \ln P_0$$

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1,032)^{n+1} + \ln P_0$$

$$= (n+1) \ln 1,032 + \ln P_0$$

et $\forall n \in \mathbb{N},$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1) \ln 1,032 + \ln P_0 - (n \ln 1,032 + \ln P_0)$$

$$= n \ln 1,032 + \ln 1,032 + \ln P_0 - n \ln 1,032 - \ln P_0$$

$= \ln 1,032$ d'où (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ln 1,032$ et de premier terme $u_0 = \ln P_0$

2°) Exprimons P_n en fonction de n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = e^{u_n}$$

$$= e^{\ln P_0 + n \ln 1,032} \text{ donc}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = e^{\ln P_0 + n \ln 1,032}$$

Déduisons-en que (P_n) est une suite géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = e^{u_{n+1}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{P_{n+1}}{P_n} = e^{u_{n+1} - u_n}$$

$$= e^{\ln 1,032} = 1,032$$

$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = 1,032 \times P_n$ d'où (P_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,032$ et de premier terme

$$P_0 = e^{u_0} = P_0$$

3°) a- Détermine la période T au bout de laquelle la population double.

(P_n) étant une suite géométrique de raison $q = 1,032$ et de premier terme $P_0 = e^{u_0} = P_0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = P_0 (1,032)^n$$

La population se double si $P_n = 2P_0$

$$P_n = 2P_0 \Rightarrow P_0 (1,032)^n = 2P_0$$

$$\Leftrightarrow (1,032)^n = 2$$

$$P_n = 2P_0 \Leftrightarrow n \ln(1,032) = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln(1,032)} = 22 \text{ donc}$$

$$T = 1960 + 22 = 1982$$

D'où la population béninoise doublera en 1982

b- La population béninoise en 2014 et en 1960

du 1^{er} Août 1960 au 1^{er} Août 1992 on a : $n = 32$

du 1^{er} Août 1960 au 1^{er} Août 2014 on a : $n = 54$

$$\text{On a en 2014: } P_{54} = P_{32} \times (1,032)^{54-32}$$

$$= P_{32} \times (1,032)^{22}$$

$$= 4.845.359 \times (1,032)^{22} = 9.689.007,689 \text{ on en déduit donc que la population béninoise au 1^{er} Août 2014 serait } 9\,689\,008 \text{ habitants.}$$

$$\text{On a en 1992: } P_{32} = P_0 \times (1,032)^{32} \Leftrightarrow$$

$$P_0 = \frac{P_{32}}{(1,032)^{32}} = \frac{4.845.359}{(1,032)^{32}} = 1.768.380,21$$

D'où la population béninoise au 1^{er} Août 1960 était de 1 768 381 habitants.

ACTIVITE 12 :

Partie A :

1°) Etudions les variations de la fonction g

$$g(x) = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{x} - 2 \ln x \right)$$

$$* D_g =]0; +\infty[$$

*limites aux bornes de D_g

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

*Continuité et dérivabilité

g est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont.

*Dérivée de g

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{1}{\ln 2} \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \right)$$

*Signe de $g'(x)$

$$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{1}{\ln 2} > 0, -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ et } -\frac{2}{x} < 0 \text{ donc}$$

$$g'(x) < 0, \forall x \in]0; +\infty[$$

*Sens de variation de g

g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

*Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
g	$+\infty$	$-\infty$

2°) -Démontrons que l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique α .

g étant continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et

$g(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$ donc $\exists \alpha \in]0; +\infty[$ tel que

$g(\alpha) = 0$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$.

-Valeur approchée de α

$$g(1) = \frac{1}{\ln 2} > 0$$

$$g(2) = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{2} - 2 \ln 2 \right) < 0 \text{ donc } 1 < \alpha < 2$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -0,2081 < 0 \text{ on a donc } 1 < \alpha < 1,5 \text{ on peut prendre}$$

$$\alpha = \frac{1+1,5}{2} = 1,25$$

3°) Déduisons-en le signe de $g(x)$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

11. COI

ACTIVITE

1°) Prouvons :

$2^{2n} + 2$ est un

• Si $n=0$, 2^2

L'affirmation de

• Soit $n \geq 0$. Su

par 3, et démont

par 3.

On a :

$$2^{2(n+1)} + 2 = 2^2$$

$$= 4 \cdot 2$$

$$= 3 \cdot 2$$

$$= 2^{2n}$$

Par hypothèse de :

que : $2^{2n} + 2 = 3$

$$2^{2(n+1)} + 2 = 2^{2n}$$

$$= 3k +$$

Comme $2^{2n} + k$

est un entier divisil

$2^{2n} + 2$ est un en

2°) Démontrons pa

$$2^n \geq 6n + 7$$

• Si $n=6$, $2^6 = 2$

$$= 6 \times 6 + 7 = 43. Co$$

vraie quand $n=6$.

• Soit $n \geq 6$. Supp

$$2^{n+1} \geq 6(n+1) + 7$$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$$

$$\geq 2(6n + 7) = 12n + 14 = 6$$

$$\geq 6(n+1) + 7,$$

$$2^n \geq 6n + 7$$

3°) Démontrons par ré

$$U_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

• Si $n=0$,

est vraie

• Soit n

est dé

$\alpha \in]0; +\infty[$ donc g est continue et strictement décroissante sur chacun des intervalles $]0; \alpha[$ et $]\alpha; +\infty[$

$$\forall x \in]0; \alpha[, x < \alpha \Leftrightarrow g(x) > 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, x > \alpha \Leftrightarrow g(x) < 0$$

En conclusion :

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; \alpha[$$

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; +\infty[$$

$$g(\alpha) = 0$$

Partie B

4°) Calculons $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{2}{\ln 2} x + (1-2x) \frac{\ln x}{\ln 2}$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions

dérivables et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2}{\ln 2} - 2 \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{(1-2x)}{x \ln 2}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2x \ln 2 + 1 - 2x}{x \ln 2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2x \ln 2}{x \ln 2}$$

$$f'(x) = \frac{x \left(\frac{1}{x} - 2 \ln x \right)}{x \ln 2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{x} - 2 \ln x \right) \text{ donc } \forall x \in]0; +\infty[.$$

$$f'(x) = g(x)$$

$$5°) a- \text{Etudions les variations de } f$$

*Sens de variation de f

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ ainsi on a :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; \alpha[\\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; +\infty[\\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Alors f est strictement croissante sur $]0; \alpha[$ et strictement

décroissante sur $]\alpha; +\infty[$

-Limite aux bornes de $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\ln 2} x + (1-2x) \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty \text{ car :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\ln 2} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

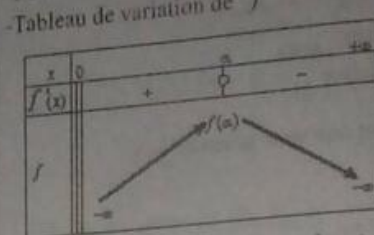
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2}{\ln 2} + \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \frac{\ln x}{\ln 2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

-Tableau de variation de f



$$b- \text{Prouvons que } f(\alpha) = \frac{4\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2\alpha \ln 2}$$

$$\text{On sait que } f'(\alpha) = 0 \text{ donc } \frac{1 - 2\alpha \ln \alpha}{\alpha \ln 2} = 0$$

$$\frac{1 - 2\alpha \ln \alpha}{\alpha \ln 2} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\alpha \ln \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\text{Or } f(\alpha) = \frac{2}{\ln 2} \alpha + (1 - 2\alpha) \frac{\ln \alpha}{\ln 2} \text{ donc on a :}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha + \ln \alpha - 2\alpha \ln \alpha}{\ln 2}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha + \frac{1}{2\alpha} - \frac{2\alpha}{2\alpha}}{\ln 2}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha + \frac{1}{2\alpha} - \frac{2\alpha}{2\alpha}}{\ln 2}$$

$$f(\alpha) = \frac{4\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2\alpha \ln 2}$$

6°) a- Déterminons l'équation réduite de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$f'(1) = \frac{1}{\ln 2}, f(1) = \frac{2}{\ln 2} \text{ d'où}$$

$$(T) : y = \frac{1}{\ln 2} x + \frac{1}{\ln 2}$$

b- Etudions les branches infinies de (C) puis construisons (C)

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote

à la courbe (C)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ alors il y a possibilité d'asymptote oblique

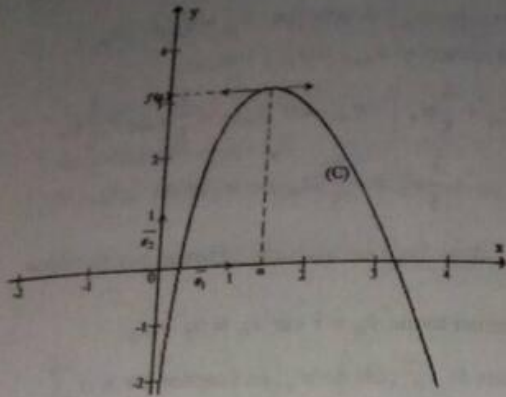
ou de branche parabolique. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{\ln 2} + \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \frac{\ln x}{\ln 2} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ alors la courbe admet une branche}$$

parabolique de direction l'axe des ordonnées

-Construisons (C)



Partie C :

7°) Justifions que la fonction : $x \mapsto (\ln x)^2$ est une primitive de $x \mapsto 2 \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$

La fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto 2 \frac{\ln x}{x}$ donc la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2 \frac{\ln x}{x}$

*Calculons I_0

$$I_0 = \int_{a_0}^{a_1} \left(2 \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$I_0 = \left[(\ln x)^2 - \ln x \right]_{a_0}^{a_1} \text{ or } a_0 = e^{\frac{1}{2}} \text{ et } a_1 = e$$

$$I_0 = \frac{1}{4}$$

8°) Démontrons que (I_n) est une suite arithmétique

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \left[(\ln x)^2 - \ln x \right]_{e^{\frac{n+1}{2}}}^{e^{\frac{n+2}{2}}}$$

$$I_n = \left(\frac{n+2}{2} \right)^2 - \left(\frac{n+2}{2} \right) - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \frac{n+1}{2}$$

$$I_n = \frac{n^2 + 4n + 4 - 2n - 4 - n^2 - 2n - 1 + 2n + 2}{4}$$

$$I_n = \frac{2n+1}{4} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+3}{4}$$

$$\text{On a : } I_{n+1} - I_n = \frac{2n+3-2n-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \frac{1}{2}$ alors (I_n) est une suite

arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et de premier terme I_0

9°) Calculons la somme $S_n = I_0 + I_1 + \dots + I_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = I_0 + I_1 + \dots + I_n$$

$$S_n = (n+1) \left(\frac{I_0 + I_n}{2} \right)$$

$$S_n = \frac{(n+1) \left(\frac{1}{4} + \frac{2n+1}{4} \right)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(n+1)}{4} \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$S_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{4}$$

ACTIVITE 13 :

1°) Résolvons l'équation différentielle (E')

Les solutions de (E') sont les fonctions u définies sur $\mathbb{R}$

par : $u(x) = ke^{-\frac{x}{n}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

2°) Déterminons le réel a pour que la fonction

$h : x \mapsto axe^{-\frac{x}{n}}$ soit solution de (E)

h solution de (E)

$$\Leftrightarrow h' + \frac{1}{n}h = e^{-\frac{x}{n}}$$

$$\Leftrightarrow ae^{-\frac{x}{n}} - \frac{a}{n}xe^{-\frac{x}{n}} + \frac{a}{n}xe^{-\frac{x}{n}} = e^{-\frac{x}{n}}$$

$$\Leftrightarrow ae^{-\frac{x}{n}} = e^{-\frac{x}{n}} \text{ d'où } \underline{a=1}$$

3°) Prouvons qu'une fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $(u-h)$ est une solution de (E') .

u dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de $(E) \Leftrightarrow u' + \frac{1}{n}u = e^{-\frac{x}{n}}$ or

$$h' + \frac{1}{n}h = e^{-\frac{x}{n}} \text{ donc}$$

$$u' + \frac{1}{n}u = h' + \frac{1}{n}h \Leftrightarrow (u-h)' + \frac{1}{n}(u-h) = 0$$

$\Leftrightarrow$ la fonction $u-h$ est solution de

(E') d'où le résultat

4°) a- Dédisons-en toutes les solutions de (E) .

Soit u une solution de (E)

On sait d'après la question 2 que $u-h$ est solution de (E')

don on a :

$(u-h)(x) = ae^{-\frac{x}{n}}$ alors $u(x) = ae^{-\frac{x}{n}} + h(x)$ par suite

$u(x) = (k+x)e^{-\frac{x}{n}}$ il en résulte que les solutions de (E) sont

les fonctions u définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = (k+x)e^{-\frac{x}{n}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

b- Déterminons la solution de (E) qui vérifie $u(0) = 0$
 $u(0) = 0 \Rightarrow k = 0$ d'où la solution cherchée est définie par :

$$u(x) = xe^{-\frac{x}{n}}$$

$$5^{\circ}) u_n = \int_0^1 xe^{-\frac{x}{n}} dx$$

a- Prouvons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = -(n^2 + n)e^{-\frac{1}{n}} + n^2$$

$$u_n = \int_0^1 xe^{-\frac{x}{n}} dx \text{ posons } f(x) = x \text{ et } g'(x) = e^{-\frac{x}{n}} \text{ on a}$$

donc : $f'(x) = 1$ et $g(x) = -ne^{-\frac{x}{n}}$ on en déduit que :

$$u_n = \int_0^1 xe^{-\frac{x}{n}} dx = \left[-nxe^{-\frac{x}{n}} \right]_0^1 - \int_0^1 -ne^{-\frac{x}{n}} dx$$

$$= -ne^{-\frac{1}{n}} + n \left[-ne^{-\frac{x}{n}} \right]_0^1$$

$$= -ne^{-\frac{1}{n}} - n^2 e^{-\frac{1}{n}} + n^2 \text{ d'où}$$

$$u(x) = -(n^2 + n)e^{-\frac{1}{n}} + n^2$$

b- Démontrons que $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq -\frac{x}{n} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{x}{n}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow xe^{-\frac{1}{n}} \leq xe^{-\frac{x}{n}} \leq x$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{n}} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \leq \int_0^1 xe^{-\frac{x}{n}} dx \leq \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{2} \text{ d'où le résultat}$$

c- Dédudons-en la convergence de la suite (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ d'où la suite } (u_n) \text{ est}$$

convergente et convergente vers $\frac{1}{2}$

ACTIVITE 14 :

I/ la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n \end{cases} \quad (1)$$

1°) Nature de la suite (v_n) définie par : $v_n = u_{n+1} - u_n$

Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$

$$v_{n+1} = \left(\frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n \right) - u_{n+1} \text{ car } u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n$$

$$= -\frac{3}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n = -\frac{3}{5}(u_{n+1} - u_n) \text{ d'où}$$

$$v_{n+1} = -\frac{3}{5}v_n \text{ donc } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison}$$

$$-\frac{3}{5} \text{ et de premier terme } v_0 = 1 \text{ car } v_0 = u_1 - u_0.$$

2°) Expressions de v_n , puis de u_n , en fonction de n .

Comme (v_n) est une suite géométrique, de raison $-\frac{3}{5}$ et de

1^{er} terme $v_0 = 1$, alors le terme général est égal à

$$v_n = \left(-\frac{3}{5} \right)^n$$

Calcul de u_n en fonction de n .

Comme $v_n = u_{n+1} - u_n$, alors on a :

$$\sum_{i=0}^{n-1} v_i = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1})$$

$$= -u_0 + u_n \text{ d'où } u_n = u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} v_i \text{ or}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} v_i = v_0 \times \frac{1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^n}{1 - \left(-\frac{3}{5} \right)} = \frac{5}{8} \left[1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^n \right] \text{ car } (v_n) \text{ est une}$$

suite géométrique.

$$\text{Ainsi, } u_n = u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} v_i = 1 + \frac{5}{8} \left[1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^n \right] \text{ donc, pour tout}$$

$$\text{entier naturel } n, u_n = \frac{13}{8} - \frac{5}{8} \left(-\frac{3}{5} \right)^n$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{5} \right)^n = 0$ car $|q| = \frac{3}{5} < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{13}{8}$$

II/ (w_n) définie par : $w_0 > 0$, $w_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+2} = \sqrt[5]{(w_{n+1})^2 (w_n)^3}$$

1°) Démontrons que la suite (t_n) vérifie la relation (1)

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $t_{n+2} = \ln(w_{n+2})$ or $w_{n+2} = (w_{n+1})^{\frac{2}{5}} (w_n)^{\frac{3}{5}}$

$$\text{d'où } t_{n+2} = \ln(w_{n+1})^{\frac{2}{5}} + \ln(w_n)^{\frac{3}{5}} \text{ soit}$$

$$t_{n+2} = \frac{2}{5} \ln(w_{n+1}) + \frac{3}{5} \ln(w_n) \text{ c'est-à-dire :}$$

$$t_{n+2} = \frac{2}{5} t_{n+1} + \frac{3}{5} t_n \text{ Ainsi, } (t_n) \text{ vérifie bien la relation (1)}$$

du paragraphe 1, donc (t_n) est de même nature que (u_n) .

2°) Détermine des limites de (t_n) et (w_n) en $+\infty$

D'après le paragraphe 1, 2°), $t_n = t_0 + \sum_{i=0}^{n-1} v_i$ or

$$\sum_{i=0}^{n-1} v_i = v_0 \times \frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{5}{8} \left(\ln \frac{w_1}{w_0} \right) \left[1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^n \right] \text{ car}$$

(v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$ et de premier terme v_0 :

$$v_0 = t_1 - t_0 = \ln w_1 - \ln w_0 = \ln \frac{w_1}{w_0}. \text{ Donc pour tout}$$

$$n \in \mathbb{N}, t_n = \ln w_0 + \frac{5}{8} \ln \frac{w_1}{w_0} \left[1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^n \right] \text{ or}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0.$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \ln w_0 + \frac{5}{8} \ln \frac{w_1}{w_0} \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{5}{8} \ln w_1 + \frac{3}{8} \ln w_0.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $t_n = \ln w_n$ d'où $w_n = e^{t_n}$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = e^{\frac{5}{8} \ln \frac{w_1}{w_0} + \frac{3}{8} \ln w_0} = e^{\frac{5}{8} \ln w_1 + \frac{3}{8} \ln w_0} \text{ soit}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = w_1^{\frac{5}{8}} \times w_0^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{w_1^5 w_0^3}.$$

ACTIVITE 15:

1°) a- Calculons z_1, z_2, z_3 et z_4 et vérifions que z_4 est un nombre réel.

$$\text{On a : } \begin{cases} z_0 = 2 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc :

$$z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 = \frac{1+i}{2} (2) = 1+i$$

$$z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \frac{1+i}{2} (1+i) = i.$$

$$z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 = \frac{1+i}{2} (i) = \frac{-1+i}{2}$$

$$z_4 = \frac{1+i}{2} z_3 = \frac{1+i}{2} \left(\frac{-1+i}{2} \right) = \frac{1}{4} (1+i)(-1+i)$$

Vérifions que $z_4 \in \mathbb{R}$.

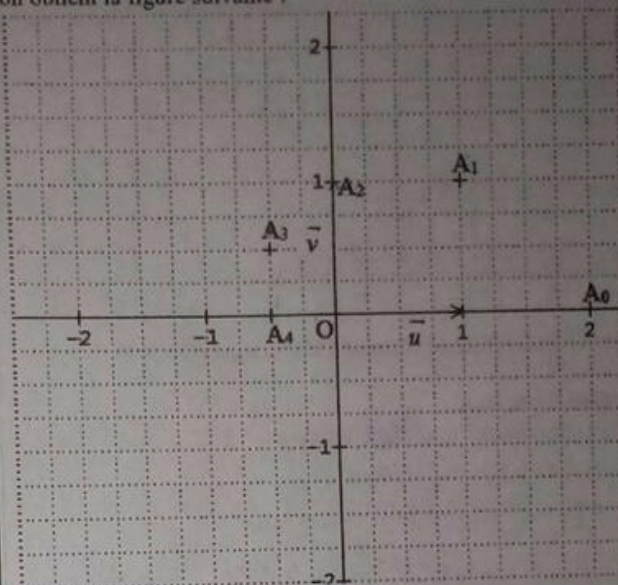
$$\text{On a : } z_4 = \frac{1}{4} (1+i)(-1+i)$$

$$z_4 = \frac{1}{4} (i^2 - 1^2) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ d'où } z_4 \in \mathbb{R}.$$

b- Plaçons les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

On a : $A_0(2), A_1(1+i), A_2(i), A_3\left(\frac{-1+i}{2}\right)$ et $A_4\left(-\frac{1}{2}\right)$ donc

on obtient la figure suivante :



2°) a- Justifions que la suite (u_n) est une suite géométrique.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = |z_n|$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = |z_{n+1}|$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left| \frac{1+i}{2} z_n \right|}{|z_n|}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{constant donc } (u_n) \text{ est une suite}$$

géométrique de premier terme $u_0 = |z_0| = 2$ et de raison

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b- Donnons l'expression de son terme général u_n en fonction de n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n \text{ soit } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n$$

3°) Déterminons le rang n_0 à partir duquel tous les points A_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 0,1.

Il suffit que $\forall n \in \mathbb{N}$, on ait $|z_{n_0}| = 0,1$ soit $u_{n_0} = 0,1$.

$$= 0,1 \Leftrightarrow 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n_0} = 0,1$$

$$\Leftrightarrow n_0 = \frac{\ln\left(\frac{0,1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} ; n_0 \approx 9$$

Donc à partir du 9^e rang, les points A_n appartiennent au disque de centre O et de rayon $0,1$.

4°) Déterminons la nature exacte du triangle OA_nA_{n+1} .

Calculons : $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0}$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0} = \frac{1+i}{2} \frac{z_n - z_n}{z_n}$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0} = \frac{1+i-2}{2} \times \frac{2}{1+i}$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{2} = i$$

$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0} = i$ donc le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle et

rectangle en A_{n+1} .

5°) a- Exprimons I_n en fonction de n .

$$I_n = A_0A_1 + A_0A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$$

$$= (|z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \dots + |z_n - z_{n-1}|) \times 5cm$$

$$= \left(\left| \frac{1+i}{2} z_0 - z_0 \right| + \left| \frac{1+i}{2} z_1 - z_1 \right| + \dots + \left| \frac{1+i}{2} z_{n-1} - z_{n-1} \right| \right) \times 5cm$$

$$= \left(\left| \frac{-1+i}{2} \right| \times |z_0| + \left| \frac{-1+i}{2} \right| \times |z_1| + \dots + \left| \frac{-1+i}{2} \right| \times |z_{n-1}| \right) \times 5cm$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}] \times 5cm$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right] \times 5cm \text{ on trouve}$$

$$I_n = (10 + 20\sqrt{2}) \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \right], \forall n \in \mathbb{N}$$

b- Étudions la convergence de la suite (I_n) .

On a : $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = 0$ par suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = (10 + 20\sqrt{2}) cm$$

ACTIVITE 16:

I/ Détermination de la solution de (E) .

(E) l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique de (E) : $r^2 + 2r + 1 = 0$ soit

$$(r+1)^2 = 0 \text{ donc } r = -1$$

Les solutions générales de (E) sont de la forme :

$$y = (Ax + B)e^{-x} ; \text{ Avec } (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

Si g est solution de (E) telle que : $g(0) = 1$ et $g(1) = \frac{2}{e}$

alors on a : $g(x) = (Ax + B)e^{-x}$ avec $g(0) = B = 1$ et

$$g(1) = \frac{A+B}{e} = \frac{2}{e} \text{ d'où } B=1 \text{ et } A=1 \text{ donc la solution } g \text{ de}$$

(E) vérifiant $g(0) = 1$ et $g(1) = \frac{2}{e}$ est définie par :

$$g(x) = (x+1)e^{-x}$$

II/ 1°) h définie par : $h(x) = (1+x)e^{-x}$ et $\forall x \in]-1; +\infty[$

$$\frac{h(x)}{\sqrt{1+x}} = \frac{(1+x)e^{-x}}{\sqrt{1+x}} = e^{-x} \sqrt{1+x}$$

Donc la fonction f est définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \sqrt{1+x}, & \text{si } x \in]-1; +\infty[\\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

a- Continuité de f

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est continue sur $]-1; +\infty[$, d'où f est continue sur $]-1; +\infty[$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [e^{-x} \sqrt{1+x}] = 0 = f(-1), \text{ donc } f \text{ est}$$

continue à droite en -1 . Conclusion f est continue sur $[-1; +\infty[$.

b- Dérivabilité de f en -1 .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}} \right] = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1+x} = 0^+ \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } -1$$

c- Limite de f en $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(1+x)e^{-x}}{\sqrt{1+x}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \times \frac{\sqrt{x}}{e^x} \right] = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

d- Sens de variation de f .

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable sur $] -1; +\infty[$ d'où f est dérivable sur $] -1; +\infty[$.

$$\forall x \in] -1; +\infty[, f'(x) = \frac{-1-2x}{2\sqrt{1+x}} e^{-x}$$

$f'(x)$ a le même signe que : $-1-2x$.

$$\forall x \in] -1; -\frac{1}{2}[, f'(x) > 0; \forall x \in] -\frac{1}{2}; +\infty[,$$

$$f'(x) < 0 \text{ et } f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Alors f est strictement croissante sur $] -1; -\frac{1}{2}]$ et

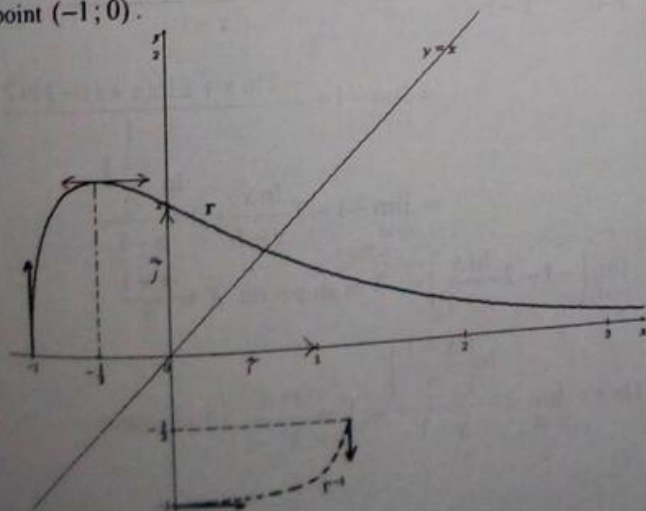
strictement décroissante sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

Tableau de variation de f .

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	0	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	0

2°) Représentation graphique de f

La courbe Γ de f admet une asymptote d'équation $y=0$ en $+\infty$ et une demi-tangente verticale de même sens que $\vec{j}$ au point $(-1; 0)$.



3°) f_1 la restriction de f à l'intervalle $[-1; -\frac{1}{2}]$

a- Démontrez que f_1 est une bijection de $[-1; -\frac{1}{2}]$ sur un intervalle J que tu préciseras.

f_1 étant la restriction de f à l'intervalle $[-1; -\frac{1}{2}]$ donc f_1 est continue et strictement croissante sur $[-1; -\frac{1}{2}]$ alors f_1

est une bijection $[-1; -\frac{1}{2}]$ sur

$$J = f_1\left([-1; -\frac{1}{2}]\right) = \left[0; \sqrt{\frac{e}{2}}\right]$$

$$\text{Calcule } f_1^{-1}\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right).$$

$$\text{Comme } f_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}} \text{ alors } f_1^{-1}\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) = -\frac{1}{2}$$

b- Etudions la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} au point $x=0$.

Etudions d'abord la dérivabilité de f_1^{-1} en 0.

$$f_1(-1) = 0 \text{ donc } f_1^{-1}(0) = -1 \text{ et posons que : } f_1^{-1}(x) = y$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1^{-1}(x) - f_1^{-1}(0)}{x} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y + 1}{f(y)} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{1}{f(y)}$$

$$\text{Or } \lim_{y \rightarrow -1} \frac{f(y)}{y+1} = +\infty \text{ d'après II/1°) b-d'où } \lim_{y \rightarrow -1} \frac{1}{f(y)} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1^{-1}(x) - f_1^{-1}(0)}{x} = 0; f_1^{-1} \text{ est alors dérivable en } 0.$$

Comme toute fonction dérivable en un point est continue en ce point, alors f_1^{-1} est continue au point 0.

c- Représentation graphique de f_1^{-1} .

Voir le repère précédent, pour la courbe de f_1^{-1} .

4°) a- Prouvons que : $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e$

$$\text{Pour tout } x \text{ de } [-1; -\frac{1}{2}], \text{ on a : } \frac{1}{2} \leq -x \leq 1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{e} \leq e^{-x} \leq e \text{ (I).}$$

De plus $x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq 1+x \leq \frac{1}{2}$ d'où

$$0 \leq \sqrt{1+x} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

Or $f(x) = e^{-x} \sqrt{1+x}$. Alors en multipliant, membre à membre, les inégalités (1) et (2) on obtient : $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e$

Remarque : On pourra aussi utiliser les variations de f .

b- Dédus-en que : $0 \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \frac{e\sqrt{2}}{4}$

$\forall x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$, on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e$, d'où

$$0 \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} e dx \text{ soit } 0 \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \frac{e\sqrt{2}}{4}$$

c- Calcul d'aire.

L'aire S en cm^2 du domaine du plan limité par les droites

$x=0$; $x=\sqrt{\frac{e}{2}}$ et la courbe Γ^{-1} est :

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \times 16 \text{ cm}^2 \text{ par symétrie. Or,}$$

$$0 \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \frac{e\sqrt{2}}{4} \text{ d'où}$$

$$0 \leq \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \times 16 \leq \frac{e\sqrt{2}}{4} \times 16 \text{ soit } 0 \leq S \leq 4e\sqrt{2} \text{ donc}$$

$$0 \leq S \leq 15,39 \text{ cm}^2$$

III/ (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

1°) Démontrons que : $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$

Comme f est décroissante sur $[0; +\infty[$; alors pour tout x tel que $n \leq x \leq n+1$ on a : $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$$

$$\text{Donc } f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

2°) Nature de la suite (u_n)

$$\begin{cases} f(n+1) \leq u_n \leq f(n) \\ f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1) \end{cases} \text{ d'où}$$

$f(n+2) - f(n+1) \leq u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$; d'où la suite (u_n) est décroissante.

De plus $\forall x \in [n; n+1]$, $f(x) \geq 0$, d'où $u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0). Donc la suite (u_n) est convergente.

ACTIVITE 17 :

Partie A :

$$f(x) = |x-1| - 2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1°) Prouvons que l'ensemble de définition de f est :

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0 \text{ et } \frac{x}{x+1} > 0 \right\}$$

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ \frac{x}{x+1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x(x+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[\\ x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[\end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

D'où $D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

2°) Calculons les limites de f aux bornes de D_f .

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln = 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x-1| = +\infty \text{ on trouve aussi :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln = +\infty$ or $\lim_{x \rightarrow -1^-} |x-1| = 2$

donc $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln = -\infty$ or $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x-1| = 1$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

3°) Continuité de f en 1

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \ln 2 = f(1)$ donc f est continue en 1.

Dérivabilité de f en 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+1 - 2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - 2 \ln 2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 + \frac{-2 \ln x + 2 \ln(x+1) - 2 \ln 2}{x-1} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 - 2 \frac{\ln x}{x-1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-1 - 2 \frac{\ln x}{x-1} \right) = -3 \text{ et en posant } X = \frac{x+1}{2}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \frac{\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1 \text{ par suite :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2 ; f \text{ est donc dérivable à gauche en } 1 \text{ et } f'_g(1) = -2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{-2 \ln x + 2 \ln(x+1) - 2 \ln 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - 2 \frac{\ln x}{x - 1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x - 1} = 0 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 0$

Puisque : $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ alors f n'est pas dérivable en 1.

Conclusion graphique :

(C) admet en son point d'abscisse 1 deux demi tangente l'une à gauche (T_g) et l'autre à droite (T_d) définies par :

$$(T_g) : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = -2x + 2 + 2 \ln 2 \end{cases} \text{ et } (T_d) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 2 \ln 2 \end{cases}$$

4°) Etudions les variations de f .

Sur $D_f \setminus \{1\}$, la fonction f est dérivable et on a pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]0; 1[$:

$$f'(x) = -1 - \frac{2}{x(x+1)} ;$$

par ailleurs sur $]1; +\infty[$, on a : $f'(x) = 1 - \frac{2}{x(x+1)}$.

Il est aisé de constater que sur $] -\infty; -1[\cup]0; 1[$, on a :

$f'(x) < 0$ et que sur $]1; +\infty[$, on a : $f'(x) > 0$ puisque dans

$$\text{ce dernier cas : } f'(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x(x+1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)}$$

f est alors strictement décroissante sur $] -\infty; -1[$ et sur $]0; 1[$ puis strictement croissante sur $]1; +\infty[$

Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$	$+$	
f	$+\infty$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $2 \ln 2$		$+\infty$

5°) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 et que $x_0 \in]-2; -1[$

- Avec un minimum strictement positif sur $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0; +\infty[$.

- f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty; -1[$ et $f(]-\infty; -1[) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution x_0 et comme $f(-2) = 3 - 2 \ln 2 > 0$ on doit en avoir $-2 < x_0 < -1$.

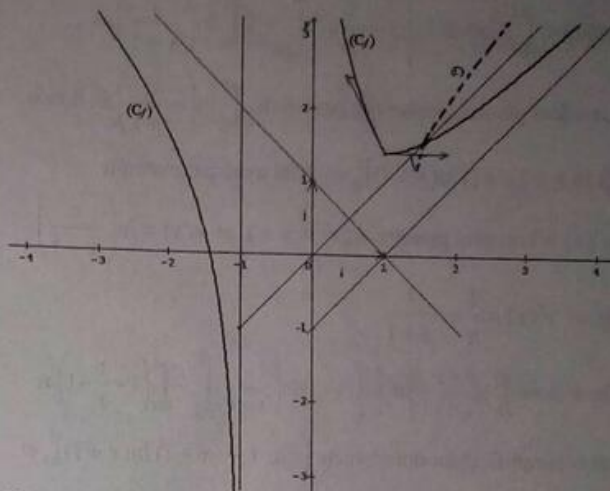
6°) 6°) Démontrons que les droites d'équations $y = x - 1$ et $y = 1 - x$ sont asymptotes à la courbe (C_f).

On a obtenu précédemment que : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$ ce qui veut dire que limite de $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - |x - 1|] = 0$, résultat qui

traduit que les droites d'équation : $y = 1 - x$ et $y = x - 1$ sont respectivement asymptote à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

7°) Représentation graphique

Les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$ sont asymptotes à (C_f) des calculs des limites.



8°)

g est la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$ or f continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et

$f(]1; +\infty[) = [2 \ln 2; +\infty[$ d'où g est une bijection de $]1; +\infty[$ sur $K = [2 \ln 2; +\infty[$

9°) Construisons (Γ)

Voir courbe en pointillé ; elle est symétrique à la droite d'équation $y = x$.

10°) Prouvons que (C_f) et (Γ) se coupent en un point A de la droite d'équation $y = x$. Calcule les coordonnées de A.

Soit A un point s'il existe d'abscisse a de (C_f) et de la droite d'équation $y = x$. On aura : $a = f(a)$

$a = f(a) \Leftrightarrow f^{-1}(a) = a$ ce qui signifie que A appartient aussi à (Γ). Il reste à prouver l'existence de A et à déterminer ses coordonnées.

$$\text{Or } f(x) = x \Leftrightarrow x - 1 - 2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = x \text{ sur l'intervalle}$$

$$]1; +\infty[\text{ soit } \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ d'où}$$

1. COR

$x = \frac{1}{\sqrt{e}-1}$. Le A existe bel et bien et a pour coordonnées

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}-1}; \frac{1}{\sqrt{e}-1} \right)$$

Partie B:

Soit α un réel appartenant à $]0; 1[$

11°) Calculons l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des points $M(x; y)$

$$\text{tels que : } \begin{cases} \alpha \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

En unité d'aire, on a :

$$A(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_{\alpha}^1 - 2 \int_{\alpha}^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$$

Le calcul par intégration par parties de $\int_{\alpha}^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ donne

$$[x \ln x - (x+1) \ln(x+1)]_{\alpha}^1 \text{ en effet avec par exemple}$$

$$u'(x) = 1 \text{ on peut prendre } u(x) = x+1 \text{ et } v(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\text{on a : } v'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{On a donc } \int_{\alpha}^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx = \left[(x+1) \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \right]_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) dx$$

après simplification donne bien $[x \ln x - (x+1) \ln(x+1)]_{\alpha}^1$ et on trouve :

$$A(\alpha) = \left(\frac{1}{2} + 4 \ln 2 - \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 + 2\alpha \ln \alpha - 2(\alpha+1) \ln(\alpha+1) \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

12°) Calculons la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 à droite.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A(\alpha) = (2 + 8 \ln 2) \text{ cm}^2$$

Partie C:

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = n - 1 - 2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = f(n)$$

13°) Prouvons que (u_n) est une suite monotone.

La suite étant la restriction à $\mathbb{N}^*$ d'une fonction strictement croissante sur $]1; +\infty[$ est aussi strictement croissante.

14°) Limite de la suite (u_n)

Comme la fonction f a pour limite en $+\infty$, $+\infty$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$15^{\circ}) \text{ Soit } S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

$$\text{a- Démontrons que : } S_n = \frac{n(n-1)}{2} + 2 \ln(n+1)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left[k - 1 - 2 \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n k - n - 2 \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - n - 2 \ln \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - 2 \ln \frac{1}{n+1} = \frac{n(n-1)}{2} + 2 \ln(n+1) \end{aligned}$$

b- Quelle est la limite de S_n .

c- On trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

ACTIVITE 18:

A/

1°) a- Démontrons que pour tout réel x on a : $\sqrt{x^2+3} > |x|$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } 0 \leq x^2 < x^2 + 3$$

$$x^2 < x^2 + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 3}$$

$$\Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2 + 3} \text{ d'où}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } \sqrt{x^2 + 3} > |x|$$

b- Dédudisons-en le signe de $\sqrt{x^2+3}+x$ et celui de $\sqrt{x^2+3}-x$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+3} - |x| > 0$$

Si $x \leq 0$, $|x| = -x$ et si $x \geq 0$, $|x| = x$

$$\text{Ainsi } \sqrt{x^2+3} - |x| > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+3} + x > 0 \text{ si } x \leq 0$$

$$\text{et } \sqrt{x^2+3} - |x| > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+3} - x > 0 \text{ si } x \geq 0$$

$$\text{d'où } \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+3} + x > 0 \text{ et } \sqrt{x^2+3} - x > 0$$

$$\text{B/ } f(x) = \sqrt{x^2+3} - |x-1|$$

2°) a- Prouvons que f est continue en 1.

Ecrivons d'abord f sans le symbole de valeur absolue.

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ et } f(1) = \sqrt{1^2+3} - |1-1| = 2$$

$$\text{On a : } \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+3} + x - 1, \text{ si } x \in]-\infty; 1[\\ f(x) = \sqrt{x^2+3} - x + 1, \text{ si } x \in]1; +\infty[\\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x^2+3} + x - 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2+3} - x + 1 = 2$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ alors f est continue en 1.

b- Etudions la dérivabilité de f en 1 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + x - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{x^2 + 3} + (x - 3)][\sqrt{x^2 + 3} - (x - 3)]}{(x - 1)[\sqrt{x^2 + 3} - (x - 3)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x - 1)}{(x - 1)[\sqrt{x^2 + 3} - (x - 3)]} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{\sqrt{x^2 + 3} - (x - 3)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3 - x^2 - 2x - 1}{(x - 1)[\sqrt{x^2 + 3} + x + 1]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x - 1)}{(x - 1)[\sqrt{x^2 + 3} + x + 1]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{\sqrt{x^2 + 3} + x + 1} = -\frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ donc} \end{aligned}$$

est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = -\frac{1}{2}$

On a : $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ d'où f n'est pas dérivable en 1.

Interprétation graphique :

($\mathcal{C}$) admet en son point d'abscisse 1 deux demi-tangente l'une à gauche (T_g) et l'autre à droite (T_d) définies par :

$$(T_g) : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ et } (T_d) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}$$

c- Etudions le sens de variation de f

la fonction $x \mapsto x^2 + 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme donc en particulier sur $]-\infty; 1[$ et $\forall x \in]-\infty; 1[$,

$x^2 + 3 > 0$ donc la fonction : $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3} + x - 1$ est dérivable sur $]-\infty; 1[$ comme somme de fonctions dérivables et

$$\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} + 1 = \frac{\sqrt{x^2 + 3} + x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3} - x + 1$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et $\forall x \in]1; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} - 1 = \frac{-(\sqrt{x^2 + 3} - x)}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

Sur $]-\infty; 1[$ le signe de f' celui de $\sqrt{x^2 + 3} + x$ et sur $]1; +\infty[$ le signe de f' est celui de $-(\sqrt{x^2 + 3} - x)$

D'après A/ $\sqrt{x^2 + 3} + x > 0$ et $\sqrt{x^2 + 3} - x > 0$ alors on déduit :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) > 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[; f'(x) < 0 \end{cases}$$

Alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

d- Complétons l'étude des variations de f

limite aux bornes de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3} + x - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 3} - (x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x}} = -1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} - x + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 3} + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \end{aligned}$$

Tableau de variation de f

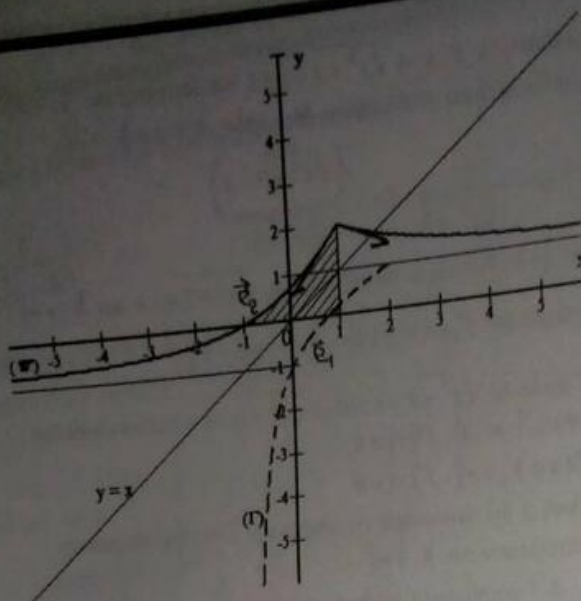
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-1	2	1

e- Etudions les branches infinie à ($\mathcal{C}$)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc les droites d'équations :

$y = -1$ et $y = 1$ sont les asymptote à ($\mathcal{C}$) aux voisinages respectifs de $-\infty$ et $+\infty$.

Construction de ($\mathcal{C}$)



3°) $g:]-\infty; 1] \rightarrow]-1; 2]$

$x \mapsto g(x) = f(x)$

a- Démontrons que g admet une application réciproque g^{-1}

g est la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 1]$ or f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et

$f(]-\infty; 1]) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =]-1; 2]$ donc g est une bijection

par suite g admet une application réciproque g^{-1}

b- Définissons explicitement g^{-1}

$g^{-1}:]-1; 2] \rightarrow]-\infty; 1]$

Posons $g(x) = y$ avec $x \in]-\infty; 1]$ et $y \in]-1; 2]$

$g(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} + x - 1 = y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} = (y+1) - x$

$\Leftrightarrow x^2 + 3 = (y+1)^2 - 2x(y+1) + x^2$

$\Leftrightarrow 2x(y+1) = (y+1)^2 - 3$

$\Leftrightarrow x = \frac{(y+1)^2 - 3}{2(y+1)}$

D'où $g^{-1}:]-1; 2] \rightarrow]-\infty; 1]$

$x \mapsto \frac{(x+1)^2 - 3}{2(x+1)}$

c- Construisons (Γ)

Voir courbe en pointillé (elle est symétrique à $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite d'équation $y = x$)

d- Déterminons la fonction G primitive de g^{-1} et telle que $G(0) = 0$

Par division euclidienne, $\forall x \in]-1; 2]$,

$g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{x+1}$

g^{-1} est continue sur $]-1; 2]$ alors G existe

$G(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \ln|x+1| + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

$G(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

D'où $\forall x \in]-1; 2]; G(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \ln|x+1|$

e- Calculons A

L'aire du domaine plan recherché est égale à l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ) l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y = -1$ et $y = 1$

On a : $A = \int_0^2 (1 - g^{-1}(x)) dx$ u.a

$= [x - G(x)]_0^2$ u.a

$= 2 - G(2) - (0 - G(0))$

$= 2 - \left(1 + 1 - \frac{3}{2} \ln 3\right) = \frac{3}{2} \ln 3$ u.a

D'où $A = \frac{3}{2} \ln 3$ u.a

$C/I = [1; 2]; \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

4°) a- Démontrons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I

$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow k(x) = 0$ avec $k(x) = f(x) - x$

k est dérivable sur $[1; 2]$ comme somme de fonctions dérivables

et $\forall x \in [1; 2], k'(x) = f'(x) - 1$

sur $[1; 2], f'(x) < 0$ et $-1 < 0$ donc $k'(x) < 0, \forall x \in [1; 2]$

donc k est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[1; 2]$ et $k([1; 2]) = [k(2); k(1)]$

$k(2) = -0,3542$ et $k(1) = 1; 0 \in [k(2); k(1)]$ donc l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I .

b- Démontrons que pour tout x de I on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$\forall x \in [1; 2], f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1$

f' est dérivable sur $[1; 2]$ et $f''(x) = \frac{3}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}$

$\forall x \in [1; 2]; f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur $[1; 2]$

$x \in I \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2)$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{2}{\sqrt{7}} - 1$

$\Rightarrow -f'(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c- Dédudions-en que pour tout x de I on a :

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

f est dérivable sur $[1; 2]$ et $\forall x \in I$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$x \in I$ et $\alpha \in I$ alors d'après le théorème des inégalités des accroissements finis, on a : $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$ et comme

$$f(\alpha) = \alpha \text{ d'où pour tout } x \text{ de } I \text{ on a : } |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|.$$

5°) a- Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

$$U_0 = 1 \text{ et } 1 \in [1; 2]$$

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \in [1; 2]$ et démontrons que $U_{n+1} \in [1; 2]$

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ et } U_n \in [1; 2]$$

$u_n \in [1; 2] \Leftrightarrow 1 \leq u_n \leq 2 \Leftrightarrow f(2) \leq f(u_n) \leq f(1)$ car f est décroissante sur $[1; 2]$

$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(1) \Leftrightarrow 1 < f(2) \leq u_{n+1} \leq 2 \Leftrightarrow u_{n+1} \in I$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$.

b- Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$.

En utilisant les résultats des questions 5°) a- et 4°) c- on a :

$$|f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \text{ or } U_{n+1} = f(U_n) \text{ ce qui donne}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|.$$

c- Etablissons que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

L'application du résultat précédent donne :

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_0 - \alpha|;$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_1 - \alpha|; \dots;$$

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$ en multipliant membre à membre ces n inégalités, on obtient après simplifications :

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |U_0 - \alpha|$$

$$\text{On a : } 1 \leq \alpha \leq 2$$

$$1 \leq \alpha \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -\alpha \leq -1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq U_0 - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}.$$

d- Dédudions-en que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et précisons sa limite

d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers α
et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

ACTIVITE 19 :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{2x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Partie A :

$$g(x) = x + (1-x) \ln(1-x), \text{ si } x \in]-\infty; 0[$$

1°) Etudions les variations de g

$$- D_g =]0; +\infty[$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[1 + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln(1-x) \right] = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln(1-x) = +\infty$$

- g est continue et dérivable sur $]-\infty; 0[$ comme composé, produit et somme de fonctions qui le sont.

$$- \forall x \in]-\infty; 0[, g'(x) = 1 - \ln(1-x) - \frac{1-x}{(1-x)} \text{ alors}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, \underline{g'(x) = -\ln(1-x)}$$

- signe de $g'(x)$

$$\text{Soit } x \in]-\infty; 0[$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(1-x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1-x < 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ donc } g'(x) < 0 \text{ si } x \in]0; +\infty[$$

- g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$

- Tableau de variation de g

x	$-\infty$	0
$g'(x)$	-	-
g	$+\infty$	0

2°) Dédudions-en que $g(x) > 0, \forall x < 0$

g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et $g(]-\infty; 0[) =]0; +\infty[$ d'où $g(x) \in]0; +\infty[$ donc

$$g'(x) > 0, \forall x \in]-\infty; 0[$$

Partie B :

3°) Justifions que l'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R}$

$$D = D_1 \cup D_2 \text{ avec}$$

$$D_1 = \{x \in]-\infty; 0[\mid 1-x > 0 \text{ et } x \neq 0\}$$

$$\begin{cases} x \in]-\infty; 0[\\ 1-x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; 0[\\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow D_1 =]-\infty; 0[$$

$$D_2 = \{x \in [0; +\infty[\mid 1+e^x \neq 0\}$$

$$\forall x \in [0; +\infty[, 1+e^x \neq 0 \text{ donc } D_2 = [0; +\infty[\text{ alors } D =]-\infty; 0[\cup [0; +\infty[\text{ d'où } D = \mathbb{R}$$

4°) Etudions la continuité de f en 0.

$$f(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \frac{\ln(1-x)}{-x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Par hypothèse } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue en } 0$$

5°) a- Donnons le développement limité d'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ au voisinage de 0

$$\text{Soit } u(x) = \ln(1-x)$$

$$u \text{ est trois fois dérivable sur }]-\infty; 1[$$

$$u(0) = 0$$

$$u'(x) = \frac{-1}{1-x} \Rightarrow u'(0) = -1$$

$$u''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \Rightarrow u''(0) = -1$$

$$u'''(x) = \frac{-2}{(1-x)^3} \Rightarrow u'''(0) = -2$$

$$u(x) = u(0) + \frac{x}{1!} u'(0) + \frac{x^2}{2!} u''(0) + \frac{x^3}{3!} u'''(0) + x^3 \varepsilon(x)$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\text{Donc : } \ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^3 \varepsilon(x) \text{ avec}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

b- Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x^3 \varepsilon(x) \right)}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{6} - \frac{x \varepsilon(x)}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{4} \text{ donc } f \text{ est dérivable à gauche en } 0$$

$$\text{et } f'_g(0) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{2}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{2x(1+e^x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1+e^x)} \times \frac{e^x - 1}{x} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1+e^x)} = -\frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{4} \text{ donc } f \text{ est dérivable à droite en } 0$$

$$\text{et } f'_d(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'_g(0) \neq f'_d(0) \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en } 0$$

c- Donnons les relations définissant les demi-tangentes

$$\text{On a : } (T_g) : \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ et } (T_d) : \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$6°) \text{ Démontrons que } \forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2(1-x)}$$

puis déduisons-en le signe de $f'(x)$

f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ comme composée et quotient de fonction qui le sont.

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = -\frac{\left[-\frac{2x}{1-x} - 2\ln(1-x) \right]}{4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{2x^2(1-x)} \text{ d'où}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2(1-x)}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0 \text{ car } g(x) > 0, x^2 > 0 \text{ et } 1-x > 0$$

b- Calculons $f'(x)$, $\forall x \in]0; +\infty[$ puis déduisons-en le signe de $f'(x)$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) < 0$$

c- Donnons le sens de variation de f

$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $] -\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

7°) a- Calculons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\ln(1-x)}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\ln(1-x)}{1-x} \right] \times \frac{x-1}{2x} = 0 \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{2x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

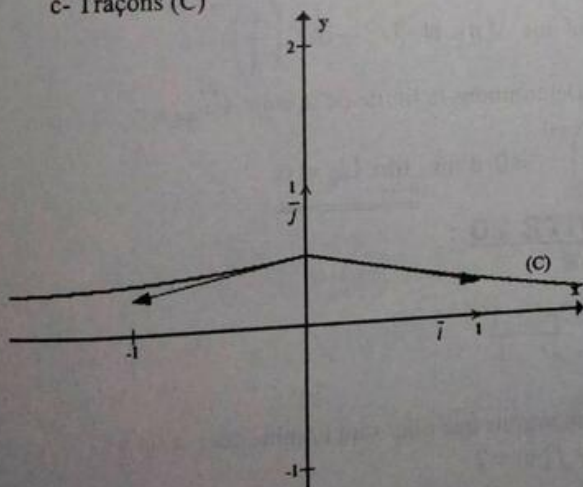
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1+e^x = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

b- Etudions les branches infinies de (C)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$

c- Traçons (C)



Partie C :

8°) Soit $h:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) - x$$

a- Etudions le sens de variations de h

h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = f'(x) - 1$ comme $f'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$ alors $h'(x) < 0, \forall x \in]0; +\infty[$ donc h est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

b- Calculons $h(0)$ et la limite de h en $+\infty$

$$h(0) = f(0) - 0 = 0 \text{ donc } h(0) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

c- Dédouons-en que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$

h est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et

$$h([0; +\infty[) = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right] \text{ or } 0 \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right] \text{ d'où l'équation}$$

$h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$

$$\text{Or } h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x \text{ On conclut que l'équation}$$

$f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$

$$\text{Vérifions que } \frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$$

$$\left] \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right[\subset]0; +\infty[\text{ et } \begin{cases} h\left(\frac{1}{4}\right) = 0,187 \\ h\left(\frac{1}{2}\right) = -0,122 \end{cases}$$

$$\text{Donc on a : } h\left(\frac{1}{4}\right) \cdot h\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \text{ d'où } \frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$$

$$9^\circ) \text{ Posons } I = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$$

a- Démontrons que $\forall x \in I, f(x) \in I$

f est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ en

particulier sur $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \text{ on a : } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,377 \text{ et } f\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0,437 \text{ donc}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$

d'où $\forall x \in I, f(x) \in I$

b- Calculons $f''(x), \forall x \in [0; +\infty[$

On sait que $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$

f' est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\forall x \in [0; +\infty[$

$$f''(x) = \frac{(e^x - 1)e^x}{(1+e^x)^3}$$

Déduisons-en le sens de variation de f' sur I

f'' a le signe de $e^x - 1$

$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ donc $f''(x) > 0$,

$\forall x \in]0; +\infty[$ et $f''(0) = 0$ alors f' est strictement

croissante sur $[0; +\infty[$ en particulier sur I .

c- Déduisons-en que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

f' est continue et strictement croissante sur I

$$\forall x \in I, \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) \leq f'(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow |f'(x)| \leq \left|f'\left(\frac{1}{4}\right)\right| \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{4} \text{ d'où } \forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

d- Déduisons-en que $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$

f est dérivable sur I et $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}, \alpha \in I$ alors

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha| \text{ or } f(\alpha) = \alpha \text{ d'où } \forall x \in I,$$

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$$

$$10^\circ) \begin{cases} U_0 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}; \forall n \in \mathbb{N}$$

a- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

$$U_0 = \frac{1}{4} \in I$$

Pour $n \geq 0$, supposons que $U_n \in I$ et démontrons que $U_{n+1} \in I$

$U_n \in I \Leftrightarrow f(U_n) \in I$ (d'après 9°) a-)
 $\Leftrightarrow U_{n+1} \in I$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

b- Démontrons $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$ donc d'après 9°) d- on a :

$$|f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha| \text{ or } f(U_n) = U_{n+1} \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$$

c- Déduisons-en que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

Procédons par itération

On a :

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_0 - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_1 - \alpha|$$

$$\vdots$$

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_{n-1} - \alpha|$ en multipliant membre à membre les inégalités et en simplifiant on obtient :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$\text{or } \frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq U_0 - \alpha \leq 0$$

$$\Rightarrow |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{4}$$

$$|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

d- Déterminons la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

ACTIVITE 20 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

Partie A :

1°) a- Démontrons que pour tout nombre réel x on a :

$$f(-x) + f(x) = 2$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $(-x) \in \mathbb{R}$

$$f(-x) + f(x) = \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{3 - e^x + 3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = 2 \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f(-x) + f(x) = 2$$

On en déduit que le point A (0 ; 1) est centre de symétrie à la courbe (Γ)

b-Étudions les variations de f

-Soit D_f le domaine de définition de f

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 \neq 0 \text{ donc } D_f = \mathbb{R}$$

- f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

-Signe de $f'(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$$

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

-Limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

-Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	-1	3

Asymptotes à (Γ)

Les droites d'équations $y = -1$ et $y = 3$ sont asymptotes à (Γ) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°) a- Déterminons une équation de la tangente (T) à (Γ) en son point d'abscisse 0

$$(T): y = f'(0)x + f(0) \text{ or } f'(0) = 1 \text{ et } f(0) = 1 \text{ donc}$$

$$(T): y = x + 1$$

$$b- \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) - (x + 1)$$

$$i) \text{ Démontrons que } \forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = f'(x) - 1$$

$$\varphi'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} - 1$$

$$\varphi'(x) = \frac{4e^x - e^{2x} - 2e^x - 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{-(e^{2x} - 2e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = -\frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \text{ d'où}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ii) Déduisons-en le sens de variation de la fonction φ .
 $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) < 0$ et $\varphi'(0) = 0$ donc φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

iii) Calculons $\varphi(0)$ et déduisons-en le signe de $\varphi(x)$
 $\varphi(0) = f(0) - 1$ donc $\varphi(0) = 0$

Signe de $\varphi(x)$

φ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(0) = 0$ on a :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, x < 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$$

$$\text{au total : } \begin{cases} \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\\ \varphi(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[\\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

c- Déduisons-en la position de la courbe (Γ) par rapport à la droite (T)

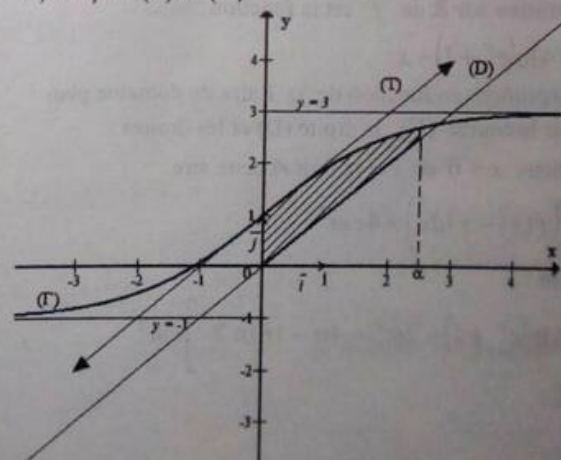
$$\text{on a : } \varphi(x) = f(x) - y$$

- $\varphi(x) > 0$ si $x \in]-\infty; 0[$ d'où (Γ) est au dessus de (T) sur $]-\infty; 0[$

- $\varphi(x) < 0$ si $x \in]0; +\infty[$ d'où (Γ) est en dessous de (T) sur $]0; +\infty[$

- $\varphi(x) = 0$ si $x = 0$ donc (Γ) et (T) se coupe pour $x = 0$

3°) Traçons (T) et (Γ)



Partie B :

Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x \Leftrightarrow \varphi(x) = -1$

$x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) - (x+1) = -1$$

$$\varphi(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = x+1-1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x) = -1$$

b- Dédudons-en que la droite (D): $y = x$ coupe la courbe (Γ) en seul point dont l'abscisse $\alpha \in]2; 3[$

Posons $u(x) = f(x) - x$ et démontrons que l'équation

$u(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]2; 3[$

On constate que $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \varphi'(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R},$

$$u'(x) < 0$$

on a alors u continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et

$$u(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} u; \lim_{x \rightarrow +\infty} u \right[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = +\infty; \text{ donc } u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

or $0 \in \mathbb{R}$ (1)

$$u(2) = 0,523 \text{ et } u(3) = -0,189; u(2) \times u(3) < 0 \text{ (2)}$$

De (1) et (2) l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique

α dans $]2; 3[$, on peut donc conclure que la droite (D):

$y = x$ coupe la courbe (Γ) en seul point dont l'abscisse

$$\alpha \in]2; 3[$$

$$5^{\circ}) \text{ a- Démontrons que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{4e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{4e^x - e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$\frac{4e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = f(x) \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$$

Dédudons une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction

$$G(x) = 4 \ln(e^x + 1) - x$$

b- Exprimons en fonction de α l'aire du domaine plan

limité par la courbe (Γ), la droite (D) et les droites

d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ Soit A cette aire

$$A = \left(\int_0^\alpha (f(x) - x) dx \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

On trouve :

$$A = \left[16 \ln(e^\alpha + 1) - 2\alpha^2 - 4\alpha - 16 \ln 2 \right] \text{ cm}^2$$

Partie C :

$$f'(x) = 4 \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right)$$

$$I = [2; 3]$$

Soit $x \in I$

$$4 \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right) = 4 \frac{e^x + 1 - 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = f'(x) \text{ donc } \forall x \in I,$$

$$f'(x) = 4 \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right)$$

b- Dédudons-en que $\forall x \in I$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$$x \in I \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow e^2 \leq e^x \leq e^3$$

$$\Leftrightarrow e^2 + 1 \leq e^x + 1 \leq e^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^3 + 1} \leq \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(e^3 + 1)^2} \leq \frac{1}{(e^x + 1)^2} \leq \frac{1}{(e^2 + 1)^2} \text{ enfin on a :}$$

$$4 \left(\frac{1}{e^3 + 1} - \frac{1}{(e^2 + 1)^2} \right) \leq f'(x) \leq 4 \left(\frac{1}{e^2 + 1} - \frac{1}{(e^3 + 1)^2} \right) \text{ en}$$

conclusion on obtient : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ car

$$4 \left(\frac{1}{e^2 + 1} - \frac{1}{(e^3 + 1)^2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

c- Dédudons-en que $\forall x \in I$, on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

Pour tout $x \in I$, $\alpha \in I$ et en appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis appliqué à f sur un

intervalle de borne x et α on a : $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

$$\forall x \in I$$

$$7^{\circ}) (U_n) : \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

a- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$ et

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

$$* U_0 = 3 \in I$$

Soit $n \geq 0$. Supposons que $U_n \in I$ et démontrons que

$$U_{n+1} \in I$$

$U_n \in I \Leftrightarrow 2 \leq U_n \leq 3$ comme f est continue et strictement croissante sur I on a :

$2 \leq U_n \leq 3 \Leftrightarrow f(2) \leq f(U_n) \leq f(3)$ or $2 \leq f(2)$ et $f(3) \leq 3$ donc $2 \leq U_{n+1} \leq 3$ par suite $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

* $U_n \in I$ et $\alpha \in I$ et $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a :

$$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \text{ or } f(U_n) = U_{n+1} \text{ et}$$

$$f(\alpha) = \alpha \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

b- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |3 - \alpha|$

Procédons par récurrence.

Pour $n=0$ on a : $|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0} |3 - \alpha|$ or $U_0 = 3$ donc on

$$a : |3 - \alpha| \leq |3 - \alpha|$$

Soit $n \geq 0$. Supposons que on a : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |3 - \alpha|$ et

$$\text{démontrons que } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |3 - \alpha|$$

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |3 - \alpha| \Leftrightarrow \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |3 - \alpha| \text{ or}$$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \text{ d'où } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |3 - \alpha| \text{ donc } \forall n \in$$

$$\mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |3 - \alpha|$$

Déterminons un entier naturel tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3}

Il suffit de prendre $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq 0,001 \text{ en utilisant la calculatrice on}$$

trouve $p=10$ on a : U_{10} est la valeur approchée cherchée.

ACTIVITE 22 :

$$f(x) = \frac{x}{1 + \ln x} ; x \in \left] \frac{1}{e} ; +\infty \right[$$

1°)

Calculons :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

2°) Calculons $f'(x)$ et dressons le tableau de variation de f

f est dérivable sur $\left] \frac{1}{e} ; +\infty \right[$ comme quotient de fonctions

dérivables.

$$\forall x \in \left] \frac{1}{e} ; +\infty \right[, f'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$$

$f'(x)$ a le signe de $\ln x$

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{e} ; 1 \right[\\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in] 1 ; +\infty[\\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

Tableau de variation de f

x	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

3°) a- Démontrons que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse e

$$f' \text{ est dérivable sur } \left] \frac{1}{e} ; +\infty \right[\text{ et } f''(x) = \frac{1 + \ln x}{x(1 + \ln x)^2}$$

$f''(x)$ a le même signe que $1 - \ln x$

x	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$f''(x)$		+	-

f'' s'annule en e et change de signe donc le point I d'abscisse e est un point d'inflexion

b- Ecrivons une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point I

$$(T) : y = f'(e)(x - e) + f(e) \text{ et on trouve :}$$

$$(T) : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}e$$

4°) Etudions la position relative de (C_f) et de la droite (D)

$$: y = x$$

$$f(x) - x = \frac{-x \ln x}{1 + \ln x}$$

$$- f(x) - x > 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{e} ; 1 \right[\text{ donc la courbe } (C_f) \text{ est au}$$

$$\text{dessus de la droite } (D) \text{ sur } \left] \frac{1}{e} ; 1 \right[$$

$$- f(x) - x < 0 \Leftrightarrow x \in] 1 ; +\infty[\text{ donc la courbe } (C_f) \text{ est en}$$

$$\text{dessous de la droite } (D) \text{ sur }] 1 ; +\infty[.$$

$$\text{- Pour } x = 1, \text{ la courbe } (C_f) \text{ et la droite } (D) \text{ se coupent}$$

$$5^\circ) \text{ Traçons } (T), (D) \text{ et } (C_f).$$

4°)

Soi

φ

φ

φ

φ

φ

φ

φ

φ

φ

φ

φ

φ

φ

φ

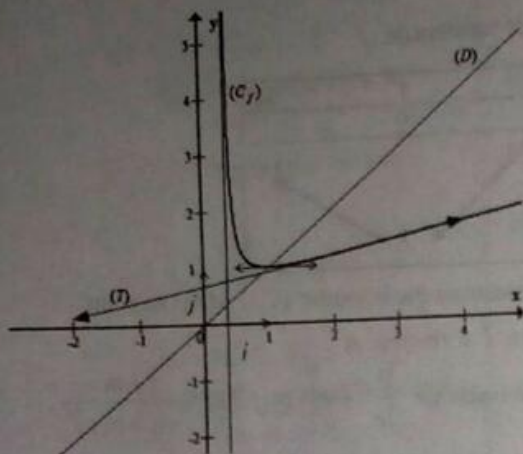
φ

φ

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = \frac{1}{e}$ est

asymptote à (C_f)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe $(O; i)$ au voisinage de $+\infty$.



B°)

6°) a- Démontrons que $f(K) \subset K$

$$K = [1; e]$$

f est continue et strictement croissante sur $[1; e]$

$$f([1; e]) = [f(1); f(e)]$$

$$f([1; e]) = \left[1; \frac{e}{2}\right] \subset K \text{ d'où } f(K) \subset K$$

b- Démontrons que $\forall x \in K, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}, f''(x) > 0$.

$\forall x \in K$ donc f' est continue et strictement croissante sur K

$$\text{On a : } x \in K \Leftrightarrow f'(1) \leq f'(x) \leq f'(e) \text{ d'où } 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$$

c- Démontrons que, $\forall x \in K$, on a : $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{4}|x - 1|$

$$\text{On a : } \forall x \in K, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}, x \in K \text{ et } 1 \in K$$

En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à f sur l'intervalle de borne x et 1 on a :

$$|f(x) - f(1)| \leq \frac{1}{4}|x - 1| \text{ or } f(1) = 1 \text{ d'où } \forall x \in K,$$

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{4}|x - 1|$$

$$7°) (U_n) : \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

$$U_0 = 2 \in K$$

Soit $n \geq 0$ supposons que $U_n \in K$ et démontrons que $U_{n+1} \in K$

On sait que $\forall x \in K, f(x) \in K$ donc

$$U_n \in K \Leftrightarrow f(U_n) \in K$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} \in K \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, U_n \in K$$

b- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|U_n - 1|$

D'après 6°) a- on a : $U_n \in K, 1 \in K$ donc

$$|f(U_n) - f(1)| \leq \frac{1}{4}|U_n - 1| \text{ or } f(U_n) = U_{n+1} \text{ et } f(1) = 1$$

$$\text{d'où } |U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|U_n - 1|, \forall n \in \mathbb{N}$$

c- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$

Procédons par récurrence.

$$|U_1 - 1| = 1 \text{ et } \frac{1}{4^0} = 1 \text{ donc } |U_0 - 1| \leq \frac{1}{4^0}$$

Soit $n \geq 0$. Supposons $|U_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$ et démontrons que

$$|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$$

$$|U_n - 1| \leq \frac{1}{4^n} \Leftrightarrow \frac{1}{4}|U_n - 1| \leq \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow |U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|U_n - 1| \leq \frac{1}{4^{n+1}} \text{ donc}$$

$$|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4^{n+1}} \text{ par suite } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$$

*Dédisons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$$

ACTIVITE 25:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x), \text{ si } x \in]0; 1[\\ f(x) = \frac{x-1}{e^x - x - 1}, \text{ si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

De courbe (C) dans un repère orthonormé $(O; i, j)$.

5 cm.

Partie A:

1°) a- Démontrons que

On a : $f(0) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x + (1-x) \ln(1-x) = 0$$

Démontrons que f est continue en 1.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{e^x - x - 1} = f(1) = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x \ln x + (1-x) \ln(1-x)) = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

b- Démontrons que, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x + (1-x) \ln(1-x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x + \frac{(1-x) \ln(1-x)}{x} = -\infty \end{aligned}$$

Démontrons que, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x + (1-x) \ln(1-x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x}{x-1} - \ln(1-x) = +\infty \end{aligned}$$

Démontrons que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{e-2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(e^x - x - 1)} = \frac{1}{e-2}$$

Interprétation graphique de ces résultats.

- f n'est pas dérivable à droite au point d'abscisse 0 et sa courbe y admet une demi-tangente définie par : $\begin{cases} x=0 \\ y \leq 0 \end{cases}$.

- f n'est pas dérivable à gauche au point d'abscisse 1 mais dérivable à droite au point d'abscisse 1 et sa courbe y admet deux demi-tangentes à gauche (T_g) et à droite (T_d)

au point d'abscisse 1 définies par : (T_g) : $\begin{cases} x=1 \\ y \leq 0 \end{cases}$ et

$$(T_d) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{1}{e-2}x \end{cases}$$

c- Démontrons que ($\mathcal{C}$) admet une asymptote horizontale

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^x - x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}} = 0 \text{ donc la droite} \end{aligned}$$

d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à ($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$.

2°) Soit g la fonction définie sur $]0; 1[$ par :

$$g(x) = \ln x - \ln(1-x)$$

a- Résolution de l'équation $g(x) = 0$.

$$\text{Soit } x \in]0; 1[$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln(1-x)$$

$$\Leftrightarrow x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

b- Dédution, suivant les valeurs de x , du signe de $g(x)$.

$$g(x) > 0 \text{ si } x > \frac{1}{2} \quad \text{et } g(x) < 0 \text{ si } x < \frac{1}{2}$$

c- Prouvons que pour tout $x \in]0; 1[$, $f'(x) = g(x)$.

g est dérivable sur $]0; 1[$ et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln x + 1 + \ln(1-x) - \frac{1-x}{1-x} \\ &= \ln x - \ln(1-x) = g(x) \text{ d'où } \forall x \in]0; 1[. \end{aligned}$$

$$f'(x) = g(x)$$

3°) h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$h(x) = (2-x)e^x - 2.$$

a- Démontrons que h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

h est dérivable sur $[1; +\infty[$ et on a :

$$h'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$$

Or, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $1-x < 0$ donc, $h'(x) < 0$. Par conséquent, h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

b- Solution unique $\alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right]$ de l'équation $h(x) = 0$.
 h est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$; en particulier, elle l'est sur $\left] \frac{3}{2}; 2 \right]$.

$$\text{De plus, } h(2) = -2 < 0 \text{ et } h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{e\sqrt{e}}{2} - 2 > 0. \text{ Il}$$

s'ensuit que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution

$$\text{unique } \alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right].$$

c- Dédution, suivant les valeurs de x , du signe de $h(x)$.

$$h(x) > 0 \text{ si } x \in [1; \alpha[, \text{ et } h(x) < 0 \text{ si } x \in]\alpha; +\infty[.$$

d- Montrons que pour tout $x > 1$, $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x - 1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - x - 1) - (e^x - 1) - (x-1)}{(e^x - x - 1)^2} \\ &= \frac{(2-x)e^x - 2}{(e^x - x - 1)^2} \text{ ainsi } f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x - 1)^2} \end{aligned}$$

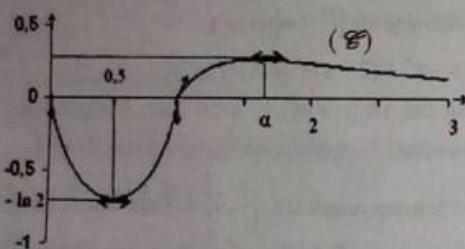
4°) a- Démontrons que $f(\alpha) = -1 + \frac{2}{\alpha}$
On a : $h(\alpha) = 0$, donc $(2-\alpha)e^\alpha - 2 = 0$; c'est-à-dire
$$e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha}$$

Par conséquent,
$$f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\frac{2}{2-\alpha} - \alpha - 1} = \frac{2-\alpha}{\alpha} = -1 + \frac{2}{\alpha}$$

Tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$

x	0	$\frac{1}{2}$	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	0
f	0	$-\ln 2$	0	$-1 + \frac{2}{\alpha}$	0

b. Traçage de $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $[0; 3]$;



Partie B

$\alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$, le réel déterminé dans la question 3°) b- de la partie A

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt$.

a- Démontrons que : $0 \leq I_1(\alpha) \leq \frac{(2-\alpha)(\alpha-1)}{\alpha}$

On a $I_n(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt = \int_1^\alpha f(t) dt$ Or
 $t \in [1; \alpha]$ et f est croissante sur l'intervalle $[1; \alpha]$, par conséquent, $1 \leq t \leq \alpha$.

Il s'ensuit que, $0 \leq \int_1^\alpha f(t) dt \leq \int_1^\alpha \left(-1 + \frac{2}{\alpha} \right) dt$

On en conclut que $0 \leq I_1(\alpha) \leq \frac{(2-\alpha)(\alpha-1)}{\alpha}$

b- Etude du sens de variation de : $t \mapsto e^t - t - 1$ sur $[1; +\infty[$

Sa fonction dérivée est : $t \mapsto e^t - 1$. Or si $t \geq 1$, $e^t - 1 > 0$. Ainsi, cette fonction est strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Déduction de : pour tout $t \geq 1$, $e^t - t - 1 \geq e - 2$.

Soit $u(t) = e^t - t - 1$

Puisque tout $t \geq 1$, la fonction : u est croissante donc pour tout

$t \geq 1$, $u(t) \geq u(1)$ soit $e^t - t - 1 \geq e - 2$

c- Prouvons alors que :

$$0 \leq I_n(\alpha) \leq \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)}$$

Pour tout $t \geq 1$, $(t-1) \geq 0$ donc $(t-1)^n \geq 0$. De plus, $e^t - t - 1 > 0$.

Ainsi, $\frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} \geq 0$. Or $\alpha \geq 1$, donc $I_n(\alpha) \geq 0$ (a).

Et, d'après la question précédente, pour $t \geq 1$,
 $e^t - t - 1 \geq e - 2$ par conséquent, $\frac{1}{e^t - t - 1} \leq \frac{1}{e - 2}$.

$$\text{Ainsi, } \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} \leq \frac{(t-1)^n}{e - 2}$$

Il s'ensuit que :

$$\int_1^\alpha \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt \leq \int_1^\alpha \frac{(t-1)^n}{e - 2} dt = \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)} \quad (b)$$

De (a) et (b) on en conclut que

$$0 \leq I_n(\alpha) \leq \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)}$$

c. démontrons que la suite $(I_n(\alpha))$ est convergente.

La suite $(I_n(\alpha))$ est minorée. Ainsi, pour démontrer qu'elle est convergente, il reste à montrer qu'elle est décroissante.

$$\begin{aligned} \text{Or } I_{n+1}(\alpha) - I_n(\alpha) &= \int_1^\alpha \frac{(t-1)^{n+1}}{e^t - t - 1} dt - \int_1^\alpha \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt \\ &= \int_1^\alpha \frac{(t-1)^{n+1} - (t-1)^n}{e^t - t - 1} dt \end{aligned}$$

$$I_{n+1}(\alpha) - I_n(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{(t-1)^n (t-2)}{e^t - t - 1} dt$$

Or, $t > 1$ donc $(t-1)^n > 0$. Et, $t < \alpha$ avec $\alpha < 2$, donc $(t-2) < 0$ ($t-2 < 0$)

De plus, $e^t - t - 1 \geq 0$.

Il s'ensuit que : $\int_1^\alpha \frac{(t-1)^n (t-2)}{e^t - t - 1} dt < 0$ donc la suite $(I_n(\alpha))$ est décroissante.

$(I_n(\alpha))$ minorée et décroissante alors $(I_n(\alpha))$ est convergente.

Précision de la limite de la suite $(I_n(\alpha))$:

D'après la question c. précédente,

$$0 \leq I_n(\alpha) \leq \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)} \text{ Ainsi}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\alpha) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)} = 0$$

Il s'ensuit que la limite de la suite $(I_n(\alpha))$ est égale à 0.

6°)

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a + b = 1$

a.

a- démontrons que pour tout $x \in]0; 1[$,

$$a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} \leq \ln 2$$

Pour $x \in]0; 1[$, $x \ln x + (1-x) \ln(1-x) \geq -\ln 2$ car

$f(x) \geq \ln 2$. Or, $a + b = 1$, donc $b = 1 - a$.

Ainsi, $a \ln a + b \ln b \geq -\ln 2$. Par conséquent,

$$-a \ln a - b \ln b \leq \ln 2$$

Il s'ensuit que : $a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} \leq \ln 2$.

b- Valeurs de a et b , la dernière inégalité est-elle une égalité ?

$$a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} = \ln 2 \text{ si } a \ln a + (1-a) \ln b = -\ln 2 \text{ c'est à}$$

dire si $f(a) = -\ln 2$ donc si $a = \frac{1}{2}$; par conséquent, les

valeurs de a et de b pour que la dernière inégalité soit une

égalité sont $a = b = \frac{1}{2}$

ACTIVITE 26:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x}$$

1°) a- Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interprète graphiquement.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + 1)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + e^{-x} = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + 1)e^{-x}$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x} \right) e^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x + \frac{1}{x}) e^{-x} = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Interprétation graphique :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (C) admet une branche

parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

b- Prouvons que la courbe (C) de f admet trois tangentes horizontales dont l'une est au point d'abscisse 1.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{(6x^2 - 6x)e^x - e^x(2x^3 - 3x^2 + 1)}{e^{2x}} \text{ après}$$

simplification on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = e^{-x} (-2x^3 + 9x^2 - 6x - 1)$$

Réolvons l'équation $f'(x) = 0$; il est clair que $x = 1$ est une

solution de l'équation ; déterminons les autres solutions.

En utilisant une méthode appropriée on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = e^{-x} (x-1)(-2x^2 + 7x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } -2x^2 + 7x + 1 = 0 \text{ car } e^{-x} \neq 0$$

Réolvons $-2x^2 + 7x + 1 = 0$; son discriminant $\Delta = 57$ et ses solutions sont :

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{57}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{7 + \sqrt{57}}{4}$$

$$\text{Alors on a : } f'(1) = 0 \text{ ou } f'\left(\frac{7 - \sqrt{57}}{4}\right) = 0 \text{ ou}$$

$$f'\left(\frac{7 + \sqrt{57}}{4}\right) = 0 \text{ donc la courbe (C) de } f \text{ admet trois}$$

tangentes horizontales en 1 ; en $\frac{7 - \sqrt{57}}{4}$ et en $\frac{7 + \sqrt{57}}{4}$.

2°) a- Dressons le tableau de variation de f .

Signe de f' .

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc le signe de f' est celui de

$$(x-1)(-2x^2 + 7x + 1)$$

On a :

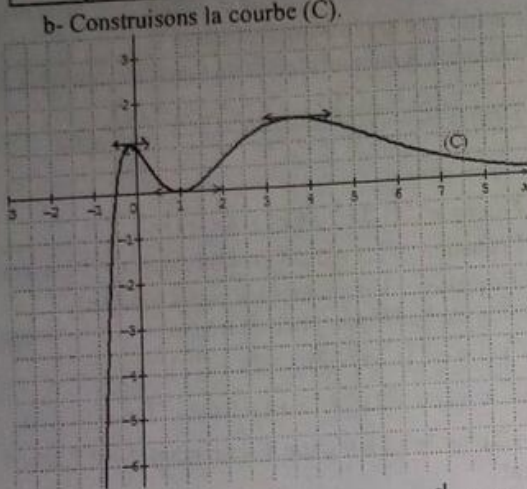
x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+	+
$-2x^2 + 7x + 1$	-	0	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-	0	-

alors

$\forall x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$, $f'(x) > 0$
 $\forall x \in]x_1; 1[\cup]x_2; +\infty[$, $f'(x) < 0$
 $\forall x \in \{x_1; 1; x_2\}$, $f'(x) = 0$
 Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; x_1]$ et sur $[1; x_2]$
 et strictement décroissante sur $[x_1; 1]$ et sur $[x_2; +\infty[$.
 Tableau de variation de f

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_1)$	0	$f(x_2)$	0

b- Construisons la courbe (C).



3°) Pour tout entier naturel n , on a : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

a- Justifions que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (I_n) .

Pour tout entier naturel n , la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0; 1]$ donc I_n existe par conséquent (I_n) est bien une suite numérique.

b- Démontrons que la suite (I_n) est positive et décroissante et concluons ?

$\forall x \in [0; 1]$, $x^n e^{-x} \geq 0$ alors $\int_0^1 x^n e^{-x} dx \geq 0$ donc $I_n \geq 0$ (1)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx$ et $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} (x-1) dx$

$(x-1) \leq 0$, $\forall x \in [0; 1]$ alors $\int_0^1 x^n e^{-x} (x-1) dx \leq 0$ donc

$I_{n+1} - I_n \leq 0$ d'où (I_n) est décroissante (2).

De (1) et (2), (I_n) est positive et décroissante.

Concluons :

(I_n) est minorée par 0 et décroissante donc (I_n) est convergente.

c- Encadrons I_n et calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$$

$$\Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^n}{e} \leq x^n e^{-x} \leq x^n \text{ en intégrant on a :}$$

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

4°) a- Calculons I_0 .

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = -[e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1}.$$

b- Démontrons en utilisant une intégration par parties, que

$$\text{pour tout } n : I_{n+1} = \frac{-1}{e} + (n+1)I_n.$$

Posons $u'(x) = x^n$ et $v(x) = e^{-x}$

$$\text{On a : } u(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \text{ et } v'(x) = -e^{-x}$$

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x} \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{n+1} e^{-1} + \frac{1}{n+1} I_{n+1} \text{ donc } (n+1)I_n = \frac{1}{e} + I_{n+1} \text{ d'où}$$

$$I_{n+1} = \frac{-1}{e} + (n+1)I_n.$$

c- Calculons l'aire sous la courbe (C) délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x=0$ et $x=1$.

Soit A cette aire.

$$\text{On a : } A = \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 2x^3 e^{-x} dx - 3 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx + \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= (2I_3 - 3I_2 + I_0) u.a.$$

12. CORRECTION DES ACTIVITES SUR LA STATISTIQUE

ACTIVITE 1 :

1°) Etablissons que : $r^2 = a \times a'$.

(D₁) droite de régression de Y en X ayant pour équation : $y = ax + b$, on a : $a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$

(D₂) droite de régression de X en Y ayant pour équation : $x = a'y + b'$, on a : $a' = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(Y)}$ et $b' = \bar{x} - a'\bar{y}$

$$\begin{aligned} \text{On en déduit que : } a \times a' &= \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \times \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(Y)} \\ &= \frac{[\text{cov}(X, Y)]^2}{V(X) \times V(Y)} \\ &= \left[\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \right]^2 = r^2 \end{aligned}$$

D'où $r^2 = a \times a'$

2°) a-Calculons le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .

(D₁) droite de régression de Y en X ayant pour équation réduite : $y = 2,4x$, on a : $a = 2,4$ et $b = 0$

(D₂) droite de régression de X en Y ayant pour équation réduite : $x = \frac{3,5}{9}x + \frac{24}{9}$, on a : $a' = \frac{3,5}{9}$ et $b' = \frac{24}{9}$

D'après la question précédente, le coefficient de corrélation vérifie : $r^2 = a \times a' = 2,4 \times \frac{3,5}{9} = \frac{14}{15}$.

Puisque : $r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, que $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont positifs par définition et que $\text{cov}(X, Y)$ est positif par hypothèse, alors r est positif. Donc $r = \sqrt{\frac{14}{15}}$

b- Calcul de $\bar{x}$ et $\bar{y}$

$$\text{On a : } \begin{cases} -a\bar{x} + \bar{y} = b & (1) \\ \bar{x} - a'\bar{y} = b' & (2) \end{cases}$$

Je garde l'équation (1), je multiplie l'équation (2) par a

$$\text{pour éliminer } \bar{x} : \begin{cases} -a\bar{x} + \bar{y} = b \\ a\bar{x} - aa'\bar{y} = ab' \end{cases}$$

j'additionne membre à membre : $(1 - aa')\bar{y} = b + ab'$

$$\text{c'est à dire : } \bar{y} = \frac{b + ab'}{1 - r^2}$$

Pour trouver $\bar{x}$, j'utilise l'équation la plus simple ; ici c'est la (2) : $\bar{x} = b' + a'\bar{y}$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \bar{x} &= b' + a' \frac{b + ab'}{1 - r^2} = \frac{b' - r^2 b' + a'b + a'ab'}{1 - r^2} \Rightarrow \\ \bar{x} &= \frac{b' + a'b}{1 - r^2} \end{aligned}$$

Application numérique : comme $\frac{1}{1 - r^2} = 15$ on a :

$$\bar{y} = 15 \times 2,4 \times \frac{24}{9} \text{ et } \bar{x} = 15 \times \frac{24}{9}$$

Donc $\bar{y} = 96$ et $\bar{x} = 40$.

ACTIVITE 6 :

Notons n_{ij} le nombre de ménages habitant x_j pièces et ayant y_i enfants.

n_j le nombre de ménages habitant x_j pièces.

n_i le nombre de ménages ayant y_i enfants.

N l'effectif total de la population ($N = 100$)

1°) a- Calcul de la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ_x de la série x .

La moyenne $\bar{x}$ est donnée par $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^4 n_j x_j$ d'où

$$\bar{x} = \frac{281}{100} = 2,81$$

La variance σ_x^2 est donnée par $\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^4 n_j x_j^2 - \bar{x}^2$

$$\text{d'où } \sigma_x^2 = \frac{875}{100} - \left(\frac{281}{100} \right)^2 = \frac{8539}{10.000} \text{ donc}$$

$$\sigma_x = \sqrt{0,8539} \approx 0,924.$$

b- Calcule de la moyenne $\bar{y}$ et l'écart type σ_y .

La moyenne $\bar{y}$ est donnée par : $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^4 n_i y_i$ d'où

$$\bar{y} = \frac{192}{100} = 1,92$$

La variance σ_y^2 est donnée par : $\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^4 n_i y_i^2 - \bar{y}^2$

$$\text{d'où } \sigma_y^2 = \frac{496}{100} - \left(\frac{192}{100} \right)^2 = \frac{12736}{10.000} \text{ donc}$$

$$\sigma_y = \sqrt{1,2736} \approx 1,129$$

2°) Calcul du coefficient de corrélation linéaire.
Le coefficient de corrélation linéaire r est donnée par :

$$r = \frac{\text{cov}(x; y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Or $\text{cov}(x; y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^4 n_{ij} x_i y_j - \bar{x} \bar{y}$ d'où

$$\text{cov}(x; y) = \frac{604}{100} - \frac{281}{100} \times \frac{192}{100} = \frac{6448}{10.000}$$

Ainsi $r = \frac{6448}{\sqrt{0,8539} \times \sqrt{1,2736}}$ donc $r \approx 0,62$

L'existence d'une liaison entre les séries x et y .

$|r| = 0,62$ ce coefficient est faible car $|r| < 0,7$

Donc l'ajustement linéaire entre les séries x et y n'est pas valide.

ACTIVITE 8 :

1°) a- Le tableau ainsi obtenu est appelé tableau linéaire.

b-

x_i = âge en année des femmes et y_j = le poids en kg des bébés

$x_i \backslash y_j$	16	18	20	22	26	Total
2,6	0	0	0	0	1	1
2,8	1	1	0	3	0	5
3	0	2	0	2	2	6
3,2	0	0	3	1	0	4
3,4	0	2	0	0	0	2
3,6	0	0	1	0	1	2
Total	1	5	4	6	4	20

c- Dressons le tableau des effectifs des séries marginales de x et de y

Effectifs des séries marginales de x

Âges (x_i) en année	16	18	20	22	26	Total
Effectifs $n_{i.}$	1	5	4	6	4	20

Effectifs des séries marginales de y .

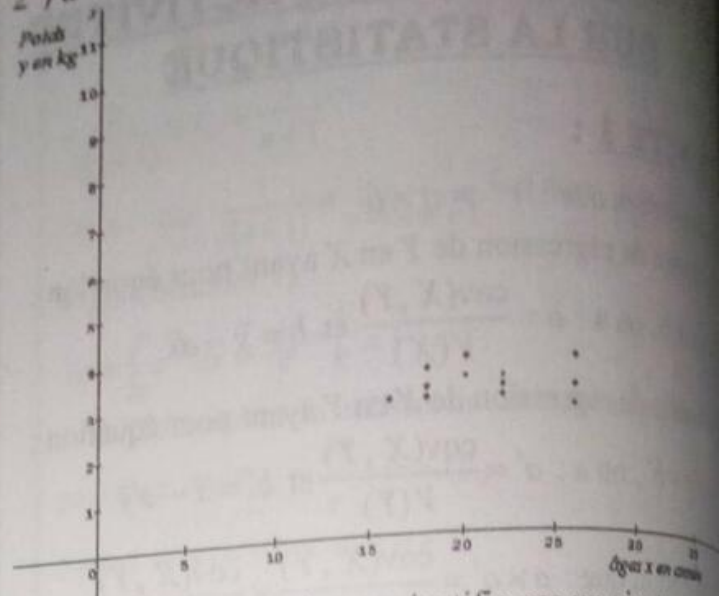
Poids (y_j) en kg	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	Total
Effectifs $n_{.j}$	1	5	6	4	2	2	20

d- Calculons les coordonnées du point moyen G de la série

$$G(\bar{x}; \bar{y}) \text{ avec } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum n_i x_i = 21,1 \text{ et}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum n_j y_j = 3,07 \text{ donc } G(21,1; 3,07)$$

2°) a- Dressons le nuage de points



b- L'aspect des points ne justifie pas un ajustement linéaire car les points sont dispersés : on dit qu'il y a absence de liaison

c- Calculons le coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma(x) \times \sigma(y)} \text{ avec}$$

$$\text{cov}(x; y) = \frac{1}{N} \sum n_{ij} x_i y_j - \bar{x} \bar{y} = -0,077$$

$$\sigma(y) = \sqrt{V(y)} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum n_j y_j^2 - \bar{y}^2} = 0,27 \text{ alors}$$

$$r = -0,094$$

Interprétation graphique :

$|r| = 0,094$ avoisine à 0 : il y a donc indépendance linéaire statistique entre l'âge des femmes et le poids de leurs bébés.

3°) a- Détermine une équation de la droite de régression de y en x .

Soit (D) cette droite. On a : (D) : $y = ax + b$ avec

$$a = \frac{\text{cov}(x, y)}{v(x)} \approx -0,0085 \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x} = 3,25 \text{ d'où}$$

$$(D) : y = -0,0085x + 3,25$$

b- On peut pas fait une bonne estimation du poids d'un bébé accouché par une femme de 27 ans car il y a indépendance linéaire statistique entre l'âge des femmes et le poids de leurs bébés.

4°)

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve,

$$\text{card } \Omega = C_{20}^2 = 190$$

Soit A l'événement « les enfants choisies pèse 3kg) on a :
 $\text{card}A = C_{14}^2 = 91$

Alors $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{91}{190}$.

ACTIVITE 10 :

1°) a- Déterminons des entiers naturels α et β .

On sait que : $\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i$ et $\sigma_x^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i^2 - \bar{x}^2$

Comme $\bar{x} = 100$ et $\sigma_x^2 = \frac{20\sqrt{46}}{3}$, on obtient alors le

système suivant :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 190 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 20500 \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 190 \\ \alpha\beta = 7800 \end{cases} \quad (S)$$

α et β sont solutions de l'équation :

$$X^2 - 190X + 7800 = 0.$$

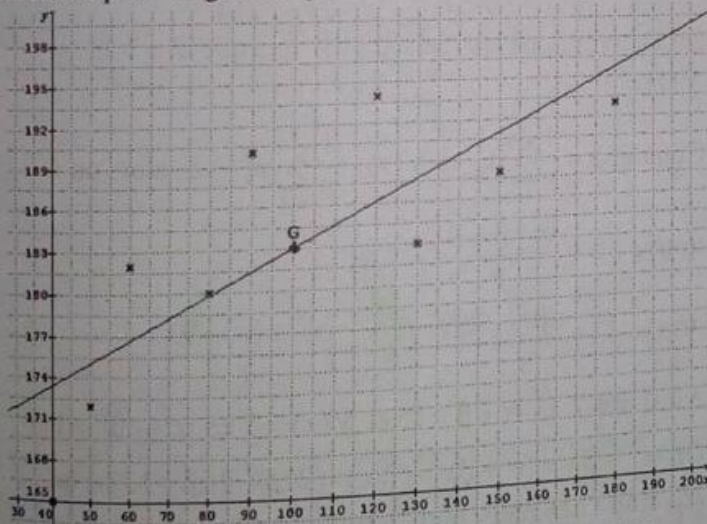
Les solutions de cette équation sont : $X_1 = 60$ et $X_2 = 130$.

Le système (S) admet deux couples solutions :
 (60; 130) ou (130; 60).

Les x_i sont rangés dans l'ordre croissant, on a : $\alpha = 60$ et $\beta = 130$.

b- Construction du nuage de points

Prenons pour origine, le point de coordonnées (40; 165)



2°) Détermination de la droite de régression de x en y .

Cette droite a pour équation : $x = a'y + b'$

Avec $a' = \frac{\text{cov}(x; y)}{V(y)}$ et $b' = \bar{x} - a'\bar{y}$

Or $\bar{x} = 100$; $\bar{y} = 183$; $V(y) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 y_i^2 - \bar{y}^2 = 83,33$ et

$\text{cov}(x; y) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = 325,55$ d'où

$a' = 3,906$ et $b' = -614,90$ donc la droite de régression de x en y a pour équation : $x = 3,906y - 614,9$

3°) Calcul du coefficient de corrélation r

r est défini par : $r = \frac{\text{cov}(x; y)}{\sigma_x \sigma_y}$

Ainsi $r = \frac{325,55}{\sqrt{83,33} \times \frac{20\sqrt{46}}{3}} = 0,789$ donc $r = 0,80$.

ACTIVITE 11 :

On considère le tableau ci-dessous indiquant les résultats d'une étude sur le nombre d'années x en exercice des ouvriers d'une entreprise et de leur salaire y en milliers de francs.

Notons x_i les modalités de x et n_i l'effectif de x_i avec $1 \leq i \leq 6$. Et notons y_j les modalités de y et n_j l'effectif de y_j , avec $1 \leq j \leq 4$. Soit N l'effectif total.

$y \backslash x$	2	6	10	14	18	22	n_j
75	a	5	0	0	0	0	a+5
125	0	7	1	0	2	0	10
175	2	0	9	8	15	4	38
225	0	1	0	3	b	1	b+5
n_i	a+2	13	10	11	b+17	5	$N=a+b+58$

1°) Déterminons a et b pour que $\bar{x} = \frac{596}{59}$ et $\bar{y} = \frac{8450}{59}$

On sait que : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 n_i x_i}{N}$ et $\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^4 n_j y_j}{N}$

Alors

$$\bar{x} = \frac{2(a+2) + (6 \times 13) + (10 \times 10) + (14 \times 11) + 18(b+17) + (22 \times 5)}{a+b+58}$$

$$\text{et } \bar{y} = \frac{75(a+5) + (10 \times 125) + (175 \times 38) + 225(b+5)}{a+b+58}$$

or $\bar{x} = \frac{596}{59}$ et $\bar{y} = \frac{8450}{59}$

d'où

$$\bar{x} = \frac{2(a+2) + (6 \times 13) + (10 \times 10) + (14 \times 11) + 18(b+17) + (22 \times 5)}{a+b+58} = \frac{596}{59}$$

$$\text{et } \bar{y} = \frac{75(a+5) + (10 \times 125) + (175 \times 38) + 225(b+5)}{a+b+58} = \frac{8450}{59}$$

on obtient ainsi la système suivant :

11. 09

2°) On suppose que $a = 40$ et $b = 20$ dans la suite. Et en associant à chaque valeur x , la moyenne m_x de la série conditionnelle $Y/X = x$, on a obtenu le tableau suivant :

x	2	6	10	14	18	22
m	80	113	170	189	199	185

a- Calculons le coefficient de corrélation linéaire. Déterminons d'abord les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{m}$, les variance $V(X)$ et $V(M)$, les écarts-types σ_x et σ_m , la covariance de X et M .

$$\text{On a : } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{N}, \quad \bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^6 m_i}{N}, \quad V(X) = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i^2}{N} - \bar{x}^2,$$

$$V(M) = \frac{\sum_{i=1}^6 m_i^2}{N} - \bar{m}^2, \quad \sigma_x = \sqrt{V(X)}, \quad \sigma_m = \sqrt{V(M)} \text{ et}$$

$$\text{cov}(X, M) = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i m_i}{N} - \bar{x} \bar{m}.$$

D'où $\bar{x} = 12$, $\bar{m} = 156$, $V(X) = 46,66$, $V(M) = 1933,33$, $\sigma_x = 6,83$, $\sigma_m = 43,96$ et $\text{cov}(X, M) = 267,33$.

Calculons maintenant le coefficient de corrélation linéaire r .

$$\text{On sait que } r = \frac{\text{cov}(X, M)}{\sigma_x \sigma_m} \text{ d'où } r = 0,89$$

Puisque r est proche de 1, il y a alors une forte corrélation entre X et M .

b- La droite de régression de m en x , notée D , a pour équation : $m = ax + b$ avec $a = \frac{\text{cov}(X, M)}{V(X)}$ et

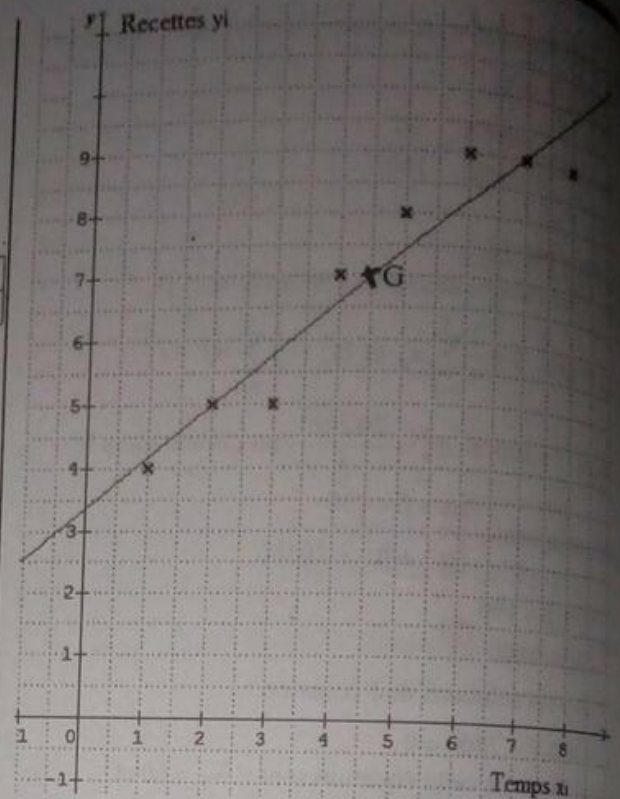
$$b = \bar{m} - a\bar{x} \text{ d'où (D) : } m = 5,73x + 87,25$$

c- Si $x = 30$ alors $m = 259,128$, d'où le salaire moyen d'un ouvrier ayant 30 ans d'ancienneté est sensiblement égal à 259130 F.

ACTIVITE 14 :

1°) a- Nuage de points des recettes en fonction du temps

Le point moyen G du nuage est $G\left(\frac{9}{2}; 7\right)$



b- Equation de la droite d'ajustement des recettes par rapport au temps

On pose (D) : $y = ax + b$

On trouve :

$$V(x) = 5,25 \quad \text{cov}(x, y) = 4,25, \quad a = \frac{17}{21} \approx 0,81 \text{ et}$$

$$b = \frac{47}{14} \approx 3,357 \text{ d'où (D) : } y = \frac{17}{21}x + \frac{47}{14}$$

2°) Déterminons les réels α et β tels que $\bar{z} = 7$ et $V(z) = 3$

$$\text{Comme } \bar{z} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 z_i \text{ et } V(z) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 z_i^2 - \bar{z}^2, \text{ alors on}$$

$$\text{trouve : } \bar{z} = \frac{\alpha + \beta + 41}{8} = 7 \text{ et}$$

$$V(z) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 299}{8} - \bar{z}^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 93}{8}$$

$$\text{Ainsi } \bar{z} = 7 \Rightarrow \alpha + \beta = 15 \text{ et } V(z) = 3 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 117$$

Or $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 225 - 2\alpha\beta = 117$ d'où $\alpha\beta = 54$. Les réels α et β sont solutions de l'équation $T^2 - 15T + 54 = 0$; on trouve $T = 6$ ou $T = 9$. Ainsi $\alpha = 6$ et $\beta = 9$ ou $\alpha = 9$ et $\beta = 6$. Comme $\alpha < \beta$, alors les réels sont : $\alpha = 6$ et $\beta = 9$.

CORRECTIONS DES ACTIVITES SUR LA SA N°3 : APPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES AUX TRANSFORMATIONS DU PLAN.

ACTIVITE 10 :

$$Z = \frac{iz+3}{z+2}$$

1°) Déterminons X et Y en fonction de x et y .

Pour $(x; y) \neq (-2; 0)$ on trouve que :

$$Z = \frac{3x-2y+6}{(x+2)^2+y^2} + i \frac{x^2+y^2+2x-3y}{(x+2)^2+y^2}$$

$$\text{Donc : } X = \frac{3x-2y+6}{(x+2)^2+y^2} \text{ et } Y = \frac{x^2+y^2+2x-3y}{(x+2)^2+y^2}$$

2°) Déterminons et construisons (C) et (D)

$$\bullet M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow Y = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \neq (-2; 0) \\ x^2 + y^2 + 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \neq (-2; 0) \\ (x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \end{cases}$$

D'où (C) est un cercle de centre $\Omega\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ et de rayon

$$R = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ u.l. privé du point A.}$$

$$\bullet M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow Y = 0$$

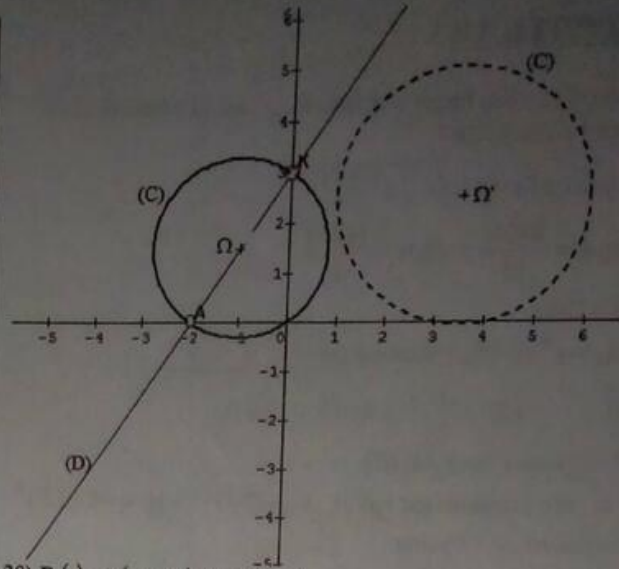
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z \neq 0 \\ \operatorname{Re}(Z) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} iz+3 \neq 0 \\ z \neq -2 \\ X = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \neq (0; 3) \\ (x; y) \neq (-2; 0) \\ 3x-2y+6=0 \end{cases}$$

D'où (D) est la droite d'équation $3x-2y+6=0$ privé des points A $(-2; 0)$ et K $(0; 3)$.

Construction de (C) et (D).



3°) B (i) , C $(2+2i)$ et D $(1-i)$

a- Donne l'expression complexe de S

S est une similitude plane directe $\Leftrightarrow S: z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

On a : $S(B) = C$ et $S(C) = D$

$$\begin{cases} S(B) = C \\ S(C) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_C = az_B + b \\ z_D = az_C + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a(z_C - z_B) = z_D - z_C$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{z_D - z_C}{z_C - z_B}$$

On trouve : $a = -1 - i$

En utilisant: $a = -1 - i$ et $\begin{cases} z_C = az_B + b \\ z_D = az_C + b \end{cases}$ on trouve $b = 1 + 3i$

D'où $S: z' = (-1 - i)z + 1 + 3i$.

b- Précisons les éléments géométriques de S.

$$(-1 - i) \in \mathbb{C} \text{ et } |-1 - i| = \sqrt{2}$$

Soit $\theta = \arg(-1 - i)$ on trouve $\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Soit $\omega = \frac{b}{1-a}$ on trouve $\omega = 1 + i$

Ainsi S a pour centre I $(1; 1)$, de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\frac{5\pi}{4}$.

c- Construisons l'image de (C) par S.

Soit $(C') = S(C)$ avec $C_{(\Omega; R)}$ et $C'_{(\Omega'; R')}$

On a : $R' = kR$ et $\Omega' = S(\Omega)$

$$R' = kR \Rightarrow R' = \frac{\sqrt{26}}{2} \text{ u.l.}$$

$$\Omega' = S(\Omega) \Rightarrow z_{\Omega'} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2}i$$

Voir le cercle en pointillé sur la figure

ACTIVITE 13 :

1°) z est écrit sous forme algébrique, x est sa partie réelle et y sa partie imaginaire

2°) Son module est $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3°) $\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$; $\sin \alpha = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$

4°) Soit $O(0)$,

$z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$ donc on trouve : $z' = ze^{i\theta}$

$$\text{II- } (E) : \frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$$

1°) Résolvons l'équation (E)

Son Δ' son discriminant réduit, $\Delta' = (2\sqrt{3})^2 - 16 = -4 = (2i)^2$

Les solutions de (E) sont :

$$z_1 = \frac{-2\sqrt{3} - 2i}{1} \text{ et } z_2 = \frac{-2\sqrt{3} + 2i}{1} \text{ on obtient :}$$

$$z_1 = -4\sqrt{3} - 4i \text{ et } z_2 = -4\sqrt{3} + 4i$$

$$2^\circ) a = -4\sqrt{3} - 4i, b = -4\sqrt{3} + 4i$$

Calculons OA, OB et AB.

$$OA = |a| = 8, OB = |b| = 8 ; AB = |8i| = 8.$$

Déduisons-en la nature du triangle OAB.

On a : OA = OB = AB donc OAB est un triangle équilatéral.

3°) Déterminons l'affixe du point D.

$$\text{On a : } z_D = z_C e^{i\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} + i)$$

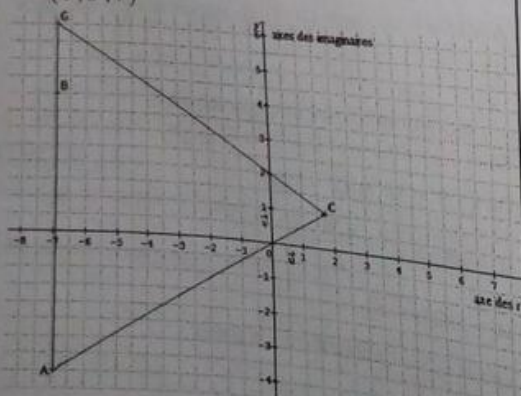
$$= \frac{1}{2}i(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i) \text{ et on a : } z_D = 2i$$

$$G = \overline{\operatorname{bar}}\{(O; 1), (D; -1), (B; -1)\}$$

a- Prouvons que $g = -4\sqrt{3} + 6i$

$$g = \frac{1 \cdot z_O - 1 \cdot z_D - 1 \cdot z_B}{-1} = z_D + z_B \text{ d'où } g = -4\sqrt{3} + 6i$$

b- Plaçons les points A, B, C et G dans le repère (O; $\vec{u}, \vec{v}$)



5°) Déterminons une mesure en radian de $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC})$

$$\text{On vérifie que : } \frac{c-g}{a-g} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } \operatorname{mes}(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC}) = \arg\left(\frac{c-g}{a-g}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Déduisons-en la nature du triangle GAC

$$\text{On a : } \begin{cases} |c-g| = |a-g| \\ \arg\left(\frac{c-g}{a-g}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \text{ alors}$$

$$\begin{cases} GA = GC \\ \operatorname{mes}(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC}) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \text{ d'où GAC est un triangle équilatéral}$$

direct.

ACTIVITE 15 :

1°) a- Vérifie que $\alpha + 2i$ est une solution de (E)

$$z^2 - (2\alpha + i)z + \alpha^2 + i\alpha + 2 = 0$$

Posons $z_0 = \alpha + 2i$

$$(\alpha + 2i)^2 - (2\alpha + i)(\alpha + 2i) + \alpha^2 + i\alpha + 2 =$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha^2 + 4i\alpha - 4i\alpha - 4 + 4 = 0$$

D'où $\alpha + 2i$ est solution de (E).

b- Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

$$\Delta = (2\alpha + i)^2 - 4(\alpha^2 + i\alpha + 2) \Leftrightarrow \Delta = -9 = (3i)^2$$

On trouve $z_1 = \alpha + 2i$ et $z_2 = \alpha - i$

D'où l'ensemble solution S dans $\mathbb{C}$ est :

$$S = \{\alpha - i; \alpha + 2i\}$$

c) Déterminons α pour que OIK soit un triangle isocèle et rectangle en O

$$\frac{z_K - z_O}{z_I - z_O} = i \text{ ou } \frac{z_K - z_O}{z_J - z_O} = -i$$

$$\frac{\alpha + 2i}{\alpha - i} = i \text{ ou } \frac{\alpha + 2i}{\alpha - i} = -i$$

$$\alpha = \frac{3-i}{2} \text{ ou } \alpha = \frac{-3-i}{2}$$

2°) a- Déterminons l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de s

$$s : z' = az + b, \text{ où } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} s(J) = K \\ s(K) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_K = az_J + b \\ z_O = az_K + b \end{cases} \text{ on trouve :}$$

$$a = \frac{-1-i}{2} \text{ et } b = -\frac{3}{2}$$

$$\text{D'où } s : z' = \left(\frac{-1-i}{2}\right)z - \frac{3}{2}$$

$$\left| \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soit z_Ω , l'affixe du centre Ω de s .

$$z_\Omega = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{1 + i} = \frac{-3(3-i)}{10} \Leftrightarrow z_\Omega = -\frac{9}{10} + \frac{3}{10}i$$

Soit θ un argument de $\left(\frac{-1-i}{2} \right)$, on a :

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \theta = \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

d'où s est la similitude plane directe de centre Ω d'affixe

$$z_\Omega = -\frac{9}{10} + \frac{3}{10}i, \text{ d'angle } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ et de rapport } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b- Déterminons une équation cartésienne de l'ouverture circulaire pour la projection des films.

Soit (C) le cercle circonscrit au triangle OJK rectangle en O.

Le milieu O' de $[JK]$ est le centre de (C) et $r = \frac{JK}{2}$ est le rayon de (C).

L'ouverture circulaire est donc (C') de centre $O' = s(O)$ et de rayon $r' = k \times r$

$$z_{O'} = -\frac{3}{2} \text{ et } r = \frac{3}{2}. \text{ On trouve : } z_O = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i \text{ et } r' = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

et

$$(C') : \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{8}$$

ACTIVITE 16 :

1°) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

$$(E) : z^4 + (8-4i)z^2 + 12 + 16i = 0$$

Posons $X = z^2$

$$(E) \text{ devient alors : } X^2 + (8-4i)X + 12 + 16i = 0 \quad (E')$$

Le discriminant de (E') est

$$\Delta = (8-4i)^2 - 4(12+16i)$$

$$\Delta = -128i = 64(-2i) = [8(1-i)]^2$$

Les solutions de l'équation (E') sont donc :

$$X_1 = \frac{-8-4i-8+8i}{2} = -8+6i \text{ et}$$

$$X_2 = \frac{-8+4i+8-8i}{2} = -2i$$

* Résolution de $z^2 = -8+6i$

Posons $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z^2 = -8+6i$

$$z^2 = -8+6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \quad (1) \\ x^2 - y^2 = -8 \quad (2) \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2(1) + (2) \\ 2y^2 = 18(1) - (2) \\ xy > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = 1 \\ y = -3 \text{ ou } y = 3 \\ xy > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ et } y = -3 \\ \text{ou} \\ x = 1 \text{ et } y = 3 \end{cases}$$

Les solutions de $z^2 = -8+6i$ sont donc $z_1 = -1-3i$;

$$z_2 = 1+3i$$

• Résolution de $z^2 = -2i$

$$z^2 = -2i \Leftrightarrow z^2 = (1-i)^2$$

$$\Leftrightarrow z = 1-i \text{ ou } z = -1-i$$

$$\Leftrightarrow z = 1-i \text{ ou } z = -1+i$$

Les solutions de $z^2 = -2i$ sont donc $z_3 = 1-i$ et

$$z_4 = -1+i$$

Alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{-1-3i; 1+3i; 1-i; -1+i\}$$

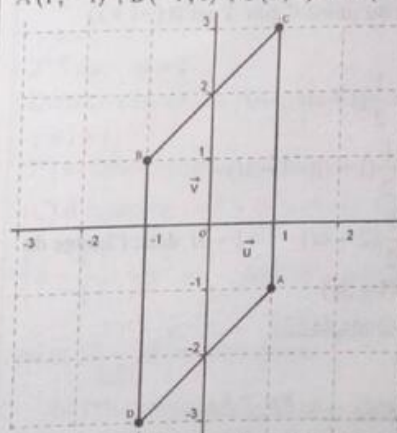
2°) a- Déterminons les complexes z_A ; z_B ; z_C et z_D

$\text{Im}(z_D) < \text{Im}(z_A) < \text{Im}(z_B) < \text{Im}(z_C)$ donc

$$z_D = -1-3i ; z_A = 1-i ; z_B = -1+i \text{ et } z_C = 1+3i$$

b- Plaçons les points A ; B ; C et D

A(1; -1) ; B(-1; 1) ; C(1; 3) et D(-1; -3)



c- Donnons le nom du quadrilatère ACBD

$$z_{AC} = z_C - z_A = 4i$$

$$z_{DB} = z_B - z_D = 4i$$

$\overline{z_{AC}} = \overline{z_{DB}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{DB}$ d'où ACBD est un

parallélogramme.

3°) a- Écriture complexe de S.

S est similitude plane directe donc elle est de la forme :

$$z' = az + b, \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

$$S(A) = A \Leftrightarrow az_A + b = z_A \quad (L_1)$$

$$S(C) = B \Leftrightarrow az_C + b = z_B \quad (L_2)$$

$$(L_1) - (L_2) \Rightarrow a(z_A - z_C) = z_A - z_B$$

$$\Rightarrow a = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2 - 2i}{-4i} \Rightarrow a = \frac{1}{2}(1 + i)$$

$$(L_2) \Rightarrow az_C + b = z_B \Leftrightarrow b = z_B - az_C$$

$$\Leftrightarrow b = (-1 + i) - \frac{1}{2}(1 + i)(1 + 3i)$$

$$\Leftrightarrow b = -i$$

D'où l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}(1 + i)z - i$

b- Éléments caractéristiques de S.

• $S(A) = A \Leftrightarrow A(1 - i)$ est le centre de la similitude S

• Le rapport $k = \frac{1}{2}|1 + i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• L'angle θ est tel que $\theta = \arg\left(\frac{1}{2}(1 + i)\right)$

$$\text{On a : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

4°) a- Déterminons l'image des points C et D par S.

$S(C) = B$ donc l'image du point C par S est B $(-1 + i)$

Soit $D' = S(D)$

$$D' = S(D) \Leftrightarrow z_{D'} = \frac{1}{2}(1 + i)z_D - i$$

$$= \frac{1}{2}(1 + i)(-1 - 3i) - i$$

$$= \frac{1}{2}(2 - 4i) - i = 1 - 3i \text{ donc l'image du}$$

point D par S est $D'(1 - 3i)$

b- Equation cartésienne de (D)

soit (D) : $y = \alpha x + \beta$

$$B \in (D) \text{ et } D' \in (D) \text{ donc } \alpha = \frac{y_{D'} - y_B}{x_{D'} - x_B}$$

$$= \frac{-3 - 1}{1 + 1} = -2$$

$$B \in (D) \Leftrightarrow \beta = 1 + 2(-1) = -1$$

D'où (D) : $y = -2x - 1$ ou (D) : $2x + y + 1 = 0$.

ACTIVITE 18 :

1°) Déterminons les nombres complexes a et b .

$a + b = 5 - 4i$; $ab = 3 - 9i$ et $|a| > |b|$. Les nombres complexes a et b sont solutions de l'équation :

$$z^2 - (5 - 4i)z + 3 - 9i = 0 \quad (1). \quad \Delta = -3 - 4i$$

Soit $\delta = \alpha + i\beta$; $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ une racine carrée de Δ .

alors $\delta^2 = \Delta$.

$$\text{Alors } \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -3 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \\ \alpha\beta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1 \\ \beta = 2 \text{ ou } \beta = -2 \\ \alpha\beta < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ et } \beta = -2 \\ \alpha = -1 \text{ et } \beta = 2 \end{cases}$$

Donc une racine carrée de Δ est $\delta = 1 - 2i$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (1) sont :

$$z_1 = \frac{5 - 4i + (1 - 2i)}{2} = 3 - 3i ;$$

$$z_2 = \frac{5 - 4i - (1 - 2i)}{2} = 2 - i$$

Comme $|z_1| = 3\sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{5}$ et $|z_1| > |z_2|$, alors on a :

$$a = 3 - 3i \text{ et } b = 2 - i.$$

$|a| = |3 - 3i| = 3\sqrt{2}$; on peut donc écrire :

$$a = 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

D'où la forme trigonométrique de

$$a = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$2^\circ) A(a) ; B\left(\frac{a^2}{18}\right), C(b) \text{ et } D(b^2)$$

Donc $A(3 - 3i)$; $B(-i)$; $C(2 - i)$ et $D(3 - 4i)$

a- Cordonnées de

$$G = \text{bar}\{(A; 1), (B; -1), (C; 1), (D; 1)\}$$

$$\text{On a : } z_G = \frac{z_A - z_B + z_C + z_D}{2} = \frac{8 - 7i}{2} \text{ donc}$$

$$G\left(4; -\frac{7}{2}\right).$$

b- Recherche de l'ensemble des points M tels que

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = k$$

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 =$$

$$= (\overline{MG} + \overline{GA})^2 - (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2 + (\overline{MG} + \overline{GD})^2$$

$$= 2MG^2 + 2\overline{MG}(\overline{GA} - \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD}) + GA^2 - GB^2 + GC^2 + GD^2$$

Or $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, car

$$G = \text{bar}\{(A;1), (B;-1), (C;1), (D;1)\}$$

$$GA^2 = \frac{5}{4}; GB^2 = \frac{89}{4}; GC^2 = \frac{41}{4}; GD^2 = \frac{5}{4}$$

$$\text{Donc } MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2MG^2 - \frac{19}{2}$$

$$\text{La relation } MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = k \Leftrightarrow$$

$$2MG^2 - \frac{19}{2} = k \text{ soit } MG^2 = \frac{2k+19}{4}$$

- Si $k < -\frac{19}{2}$, l'ensemble cherché est vide.
- Si $k = -\frac{19}{2}$, $MG = 0$, l'ensemble cherché est le singleton $\{G\}$.
- $k > -\frac{19}{2}$, on a : $MG = \frac{1}{2}\sqrt{2k+19}$, l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{2k+19}$.

3°) Nature et éléments caractéristiques de S.

L'application complexe associée à S est de la forme

$z' = az + b$ avec $a = 3 - 3i$ et $b = 2 - i$ donc S est une similitude plane directe.

D'après 1°) la forme trigonométrique de a est :

$$a = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \text{ donc le rapport de S est}$$

$$3\sqrt{2} \text{ et une mesure de l'angle de S est } -\frac{\pi}{4}.$$

Le centre de S a pour affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ soit

$$z_\Omega = -\frac{7}{13} - \frac{4}{13}i.$$

En conclusion, S est une similitude plane directe de

centre $\Omega\left(-\frac{7}{13}; -\frac{4}{13}\right)$, de rapport $3\sqrt{2}$ et dont une

mesure de l'angle est $-\frac{\pi}{4}$.

ACTIVITE 21 :

Dans C, l'équation (E) : $z^3 - m(1+i)z^2 + im^2z = 0$ où

$m \in \mathbb{C}^*$

1°) a- Résolution dans C de l'équation (E).

L'équation (E) devient $z[z^2 - m(1+i)z + im^2] = 0$ d'où

$$(z = 0 \text{ ou } z^2 - m(1+i)z + im^2 = 0)$$

$$\text{Résolvons } z^2 - m(1+i)z + im^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = -2im^2 = [m(1-i)]^2$$

Les solutions de cette équation du second degré sont :

$$z_1 = \frac{m(1+i) - m(1-i)}{2} = mi \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{m(1+i) + m(1-i)}{2} = m$$

Les solutions de l'équation (E) sont : $z = 0$ ou $z = m$ ou $z = mi$. donc $S_C = \{0; m; mi\}$.

b- Nature du triangle OAB.

B étant l'image de A par R, rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O, alors A a pour affixe m et B a pour affixe mi .

$$R(A)=B \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Comme $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$, alors le triangle OAB est

rectangle en O ; de plus $OA = OB$, donc le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

2°) a- Valeur de m pour que $1+i$ soit solution de (E).

Si $1+i$ est solution de (E) alors on a :

$$\begin{cases} 1+i = m \\ \text{ou soit} \\ 1+i = im \end{cases} \begin{cases} m = 1+i \\ \text{ou} \\ m = 1-i \end{cases}$$

Donc, le complexe $1+i$ est solution de (E) pour les valeurs de m égales à $1+i$ ou $1-i$.

b- Résolution de (E) pour chacune des valeurs trouvées.

1^{er} cas : $m = 1+i$

Dans le cas, (E) a pour solutions $z = 0$ ou $z = 1+i$ ou

$$z = -1+i$$

2^{ème} cas : $m = 1-i$

Dans ce cas, (E) a pour solutions $z = 0$ ou $z = 1-i$ ou

$$z = 1+i.$$

3°) a- Détermination du centre et du rayon du cercle (C).

(C) d'équation : $x^2 + y^2 - x = 0$ équivaut à

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \text{ donc le cercle (C) a pour centre le}$$

$$\text{point } \Omega\left(\frac{1}{2}; 0\right) \text{ et pour rayon } \frac{1}{2}.$$

b- Détermination de l'image de (C) par R.

Soit $M \in (C)$ et $M' = R(M)$ d'affixes respectives z et z' .

$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z = iz$ comme $z_\Omega = \frac{1}{2}$ affixe de

Ω alors $z'_\Omega = \frac{1}{2}i$.

Donc l'image du cercle (C) par la rotation R est le cercle (C') de centre $\Omega' \left(0; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

ACTIVITE 27 :

$$(E): z^n = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}, n \in \mathbb{N}^*$$

1°) Déterminons les solutions z_k de (E).

$$\text{On a : } \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2} = 9\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{Donc (E)} \Leftrightarrow (E'): z^n = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Ainsi les solutions de (E) sont les racines $n^{\text{ième}}$ du complexe

$$e^{i\frac{2\pi}{3}}; z_k \text{ étant ces solutions, on a : } z_k = \sqrt[n]{9\sqrt{3}} e^{i\left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

avec $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

2°) Pour $n=5$.

Représentons dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points images des solutions z_k de (E).

D'après 1°) on a :

$$z_k = \sqrt[5]{9\sqrt{3}} e^{i\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right)} \text{ avec } k \in \{0; 1; \dots; 4\}$$

$$\sqrt[5]{9\sqrt{3}} = \sqrt[5]{\sqrt{3}^5} = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc } z_k = \sqrt{3} e^{i\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right)}; k \in \{0; 1; \dots; 4\}$$

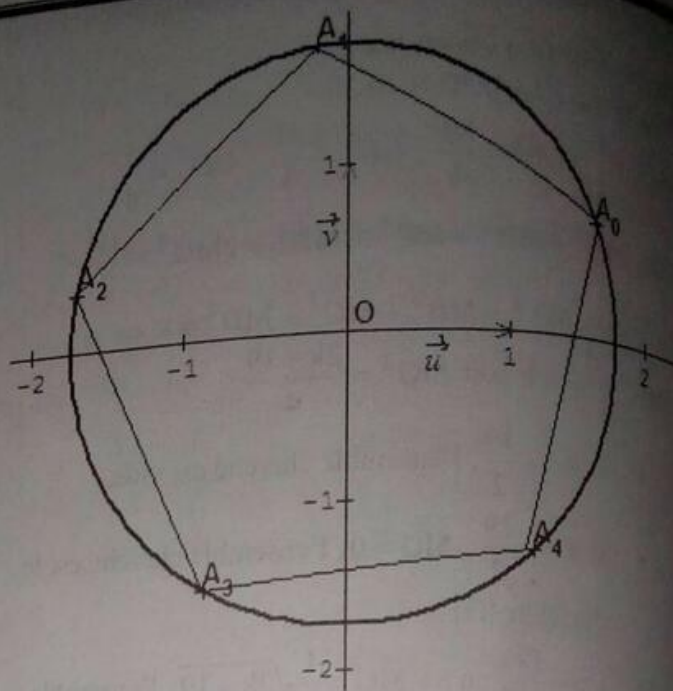
Les points images sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

$$\text{Soit } A_0(z_0) \text{ avec } z_0 = \sqrt{3} e^{i\frac{2\pi}{15}}$$

Construction :

$$OA_0 = \sqrt{3}, \text{ Mes}(\vec{u}, \overrightarrow{OA_0}) = \frac{2\pi}{15} \text{ rad} = 24^\circ$$

Le point $A_1(z_1)$ est tel que $\text{Mes}(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}$ et ainsi de suite pour les points $A_2(z_2), A_3(z_3), A_4(z_4)$.



Autre méthode :

$$z_0 = \sqrt{3} e^{i\frac{2\pi}{15}}, z_1 = \sqrt{3} e^{i\frac{8\pi}{15}}, z_2 = \sqrt{3} e^{i\frac{14\pi}{15}}, z_3 = \sqrt{3} e^{i\frac{4\pi}{15}};$$

$$z_4 = \sqrt{3} e^{i\frac{26\pi}{15}}$$

$$3^\circ) \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

a- Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, exprimons α en fonction de j .

$$\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i = \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow \alpha = \sqrt{3}j$$

Autre :

$$\alpha = -ij - 2i$$

b- Prouvons que α est une solution de

$$z^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$$

$$\begin{aligned} \alpha^5 &= (\sqrt{3}j)^5 = 9\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 \\ &= 9\sqrt{3} \left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right]^5 \end{aligned}$$

$$\alpha^5 = 9\sqrt{3} \left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right]^5 \text{ or } -\frac{10\pi}{3} = -4\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Donc } \alpha^5 = 9\sqrt{3} \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\alpha^5 = 9\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\alpha^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2} \text{ d'où } \alpha \text{ est solution de l'équation}$$

$$z^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$$

4°) $T: P \rightarrow P$

$$M(z) \mapsto M'(z')$$

$$z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) z + \frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

a- Ecrivons la forme algébrique du nombre complexe $w = (1-i)(2+\sqrt{3}+3i)$.

$$w = 5 + \sqrt{3} + (1-\sqrt{3})i$$

b- Nature de T et ses éléments caractéristiques.

• Nature

T est sous la forme : $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ donc T est une similitude plane directe.

• Eléments caractéristiques

$$\text{On a : } \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{3} ; \arg \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) = \arg \alpha$$

$$\text{Soit } \omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\frac{1}{2}[5+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i]}{\frac{2+\sqrt{3}+3i}{2}} = \frac{(1-i)(2+\sqrt{3}+3i)}{2+\sqrt{3}+3i} = 1-i$$

Donc T a pour centre $\Omega(1-i)$, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

ACTIVITE 29 :

$$(E): z^2 - [1+i(\sin \theta + \tan \theta)]z + (-\tan \theta + i)\sin \theta = 0$$

$$\text{Avec } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$$

1°) Prouvons que : $b = i \sin \theta$ est une solution de (E), puis calcule l'autre racine noté a.

On a :

$$(i \sin \theta)^2 - [1+i(\sin \theta + \tan \theta)](i \sin \theta) + (-\tan \theta + i)\sin \theta = A$$

$$A = -\sin^2 \theta - i \sin \theta + \sin^2 \theta + \sin \theta \tan \theta + i \sin \theta - \sin \theta \tan \theta = 0.$$

D'où $b = i \sin \theta$ est une solution de (E)

$$\text{Par suite (E)} \Leftrightarrow (z - i \sin \theta)(z - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - (a + i \sin \theta)z + ai \sin \theta = 0$$

$$\text{Or (E): } z^2 - [1+i(\sin \theta + \tan \theta)]z + (-\tan \theta + i)\sin \theta = 0$$

$$\text{alors on a : } ai \sin \theta = i \sin \theta - \sin \theta \tan \theta$$

$$= i \sin \theta + i^2 \sin \theta \tan \theta$$

$$\text{Donc } a = 1 + i \tan \theta.$$

2°) Déterminons le module et l'argument de a

$$\text{On a : } a = 1 + i \tan \theta$$

$$a = 1 + i \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$a = \frac{1}{\cos \theta} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{Or } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[, \text{ alors } \cos \theta < 0$$

$$\text{D'où } |a| = -\frac{1}{\cos \theta} \text{ et } \arg a = \theta + \pi$$

3°) $F: P \rightarrow P$

$$z \mapsto z' = az + b$$

a- Reconnaissons F et déterminons ses éléments géométriques.

$$\text{On a : } z' = -\frac{1}{\cos \theta} [\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)]z + i \sin \theta$$

Pour $\theta = \pi$

$$z' = -\frac{1}{\cos \pi} [\cos(\pi + \pi) + i \sin(\pi + \pi)]z + i \sin \pi = z$$

Alors F est l'application identique dans P.

$$\text{Pour } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[\cup \left] \pi; \frac{3\pi}{2} \right[:$$

F est une similitude plane directe de rapport $-\frac{1}{\cos \theta}$, d'angle de mesure $\pi + \theta$ et de centre Ω d'affixe $z_0 = -\cos \theta$.

b-

$$\text{Posons } \pi + \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}.$$

$$\theta \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[\Rightarrow k = 1 \text{ et } \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{alors } z_0 = -\cos \frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } -\frac{1}{\cos \frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc } z_{A_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et le rapport } r \text{ de } F \text{ est : } r = \sqrt{2}.$$

CORRIGE TYPE DE LA SE N°01

Problème 1 :

1°) a- Démontrons que G est baricentre des points A, B et C.

On a : $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{GA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{BG} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et $2+1-1 \neq 0$

d'où $G = \text{bar}\{(A, 2), (B, 1), (C, -1)\}$

b- Justifions que $\overrightarrow{JC}(0; -1; 2)$

$\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OC}$

$= -\overrightarrow{OJ} + 2\overrightarrow{OK}$ d'où $\overrightarrow{JC}(0; -1; 2)$

c- Déterminons les coordonnées du point G

$G = \text{bar}\{(A, 2), (B, 1), (C, -1)\} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_G = \frac{2x_A + x_B - x_C}{2} \\ y_G = \frac{2y_A + y_B - y_C}{2} \\ z_G = \frac{2z_A + z_B - z_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 3 \\ y_G = -4 \\ z_G = -3 \end{cases} \text{ d'où}$$

$G(3; -4; -3)$

2°) a- Démontrons que les points A, B et C déterminent un plan (P)

Calculons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(3; -2; -1), \overrightarrow{AC}(-1; 2; 3)$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \overrightarrow{OI} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{OJ} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{OK}$

$= -4\overrightarrow{OI} - 8\overrightarrow{OJ} + 4\overrightarrow{OK}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc

A, B et C déterminent un plan (P)

b- Prouvons que (P) : $x + 2y - z + 2 = 0$

soit $\vec{n} = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ on a : $\vec{n}(1; 2; -1)$ est un vecteur normal à (P) donc l'équation de (P) est sous la forme : $x + 2y - z + d = 0$; $d \in \mathbb{R}$

$C \in (P) \Leftrightarrow d = 2$ d'où (P) : $x + 2y - z + 2 = 0$

c- Justifions que ABCJ est un tétraèdre

$J(0; 1; 0)$; $A(1; -2; -1)$; $\overrightarrow{AJ}(-1; 3; 1)$

$\overrightarrow{AJ} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = (-1)(-4) + 3(-8) + (1)(4)$

$= 4 - 24 + 4 = -16$; $-16 \neq 0$ d'où ABCJ est un tétraèdre

Calculons son volume
Soit V ce volume

Initiateur : Sylvain AHOANGBO (+229) 97471527-94262854

$\vec{v} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AJ} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})| \vec{u.v}$
 $= \frac{1}{6} |-16| \vec{u.v}$ d'où $V = \frac{8}{3} \vec{u.v}$

3°) a- Justifions que (D) est une droite de l'espace

Soit M(x; y; z) un point de l'espace :

$M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y - 2z - 6 = 0 \\ 7x - 6y - 2z + 14 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y - 2z - 6 = 0 \\ 2x - 4y - 8 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y - 2z - 6 = 0 \\ x = 2y + 4 \end{cases}$

Posons $y = t$; $t \in \mathbb{R}$

On a : $M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = t \\ 5(2t + 4) - 2t - 2z - 6 = 0 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = t \\ 10t + 20 - 2t - 2z - 6 = 0 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

$M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = t \\ -2z + 8t + 14 = 0 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = t \\ z = 4t + 7 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

Donc (D) est une droite passant par P(4; 0; 7) et un vecteur directeur $\vec{u}(2; 1; 4)$

b- Démontrons que (D) est strictement parallèle à (P)

$\vec{u}(2; 1; 4)$ est un vecteur directeur de (D) et $\vec{n}(1; 2; -1)$ est un vecteur normal à (P)

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 + 2 - 4 = 0$ donc (P) // (D) (1)

On a : P(4; 0; 7) $\in$ (D) ; voyons si P $\in$ (P)

$P \in (P) \Leftrightarrow x_P - 2y_P - 3z_P + 2 = 4 + 0 - 7 + 2$
 $= -1$; $-1 \neq 0$

donc P $\notin$ (P) (2)

De (1) et (2) ; (D) et (P) sont strictement parallèles

Problème 2 :

4°) a- Justifions que (Δ) est une droite dont nous pressions

Soit M un point de l'espace.

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \wedge (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ}) = \vec{0}$
 $G = \{(A, 2), (B, 1), (C, -1)\}$

Donc $M \in (\Delta) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MJ} = \vec{0}$ or $J \neq G$
 $(\Delta) = (GJ)$

b- Donnons une représentation paramétrique de (Δ)

Un repère de (Δ) est $(J; \overline{GJ})$

On a : $J(0; 1; 0)$ et $\overline{GJ}(-3; 5; 3)$ alors

$$(\Delta): \begin{cases} x = -3\alpha \\ y = 1 + 5\alpha; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = 3\alpha \end{cases}$$

c- Calculons la distance de C à (Δ)

$$d(C, (\Delta)) = \frac{\|\overline{JC} \wedge \overline{GJ}\|}{\|\overline{GJ}\|} \text{ ul ; ul = unité de longueur}$$

$$\overline{JC}(0; -1; 2); \overline{GJ}(-3; 5; 3)$$

$$\overline{JC} \wedge \overline{GJ}(-13; -6; -3)$$

$$\|\overline{JC} \wedge \overline{GJ}\| = \sqrt{214} \text{ et } \|\overline{GJ}\| = \sqrt{43}$$

$$\text{Donc } d(C, (\Delta)) = \frac{\sqrt{9202}}{43} \text{ ul}$$

5°) a- Déterminons une équation cartésienne du plan $(\mathcal{R})$

$(\mathcal{R}) \perp (\mathcal{P})$ et $(\mathcal{R}) \perp (\mathcal{Q})$ donc les vecteurs normaux $\overline{n_P}$ et $\overline{n_Q}$ respectivement des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont des vecteurs directeurs de $(\mathcal{R})$

Soit $\overline{n_R}$ un vecteur normal à $(\mathcal{R})$.

on a : $\overline{n_R} = \overline{n_P} \wedge \overline{n_Q}$. Déterminons $\overline{n_Q}$

$\overline{n_Q} = \overline{GJ} \wedge \overline{n_P}$; $\overline{GJ}(-3; 5; 3)$ et $\overline{n_P}(1; 2; -1)$ alors on

trouve : $\overline{n_Q}(-11; 0; -11)$

$\overline{n_R} = \overline{n_P} \wedge \overline{n_Q}$ donc on trouve : $\overline{n_R}(-22; 22; 22)$ et $(\mathcal{R})$ est

sous la forme de : $-22x + 22y + 22z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

$A \in (\mathcal{R}) \Leftrightarrow d = 88$ donc $(\mathcal{R}) : -22x + 22y + 22z + 88 = 0$

soit $(\mathcal{R}) : -x + y + z + 4 = 0$

b- Déterminons la position de l'ivoire

Soit $S(x; y; z)$ cette position

$\{S\} = (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{R}) \cap (\mathcal{Q})$.

Déterminons d'abord l'équation cartésienne de $(\mathcal{Q})$

On a : $(\mathcal{Q}) : -11x - 11z + d = 0$

$(\Delta) \subset (\mathcal{Q})$ donc $J \in (\mathcal{Q})$

$J \in (\mathcal{Q}) \Leftrightarrow d = 0$ alors on trouve $(\mathcal{Q}) : x + z = 0$

$$S \in (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{R}) \cap (\mathcal{Q}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 & L_1 \\ -x + y + z + 4 = 0 & L_2 \\ x + z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ 3y + 6 = 0 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ x + z = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ x + z = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ x + z = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problème 3 :

6°) a- Ecrivons $z_1 \times z_2$ sous forme algébrique

$$z_1 \times z_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) (1 + i) \text{ on trouve}$$

$$z_1 \times z_2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right)$$

b- Ecrivons z_1 ; z_2 ; $z_1 \times z_2$ sous forme trigonométrique.

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$|z_1| = \sqrt{2} \text{ et soit } \theta_1 = \arg(z_1)$$

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{D'où } z_1 = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$z_2 = 1 + i$$

$$|z_2| = \sqrt{2} \text{ soit } \theta_2 = \arg z_2$$

$$\begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Donc } z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$* z_1 \times z_2$$

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2$$

$$\text{Soit } \theta = \arg(z_1 \times z_2)$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ d'où } z_1 \times z_x = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

c- Déduisons-en les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

7°) a- Vérifions que $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}} \right)$

$$e^{-i\frac{\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}} \right) = e^{-i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{12}} = e^{i0} - e^{-i\frac{\pi}{6}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 \text{ d'où}$$

$$z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}} \right)$$

b- Déduisons-en le module et un argument de z_3

$$\begin{aligned} z_3 &= e^{-i\frac{\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}} \right) \\ &= e^{-i\frac{\pi}{12}} \left(2i \sin \frac{\pi}{12} \right) \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{12} e^{-i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 2 \sin \frac{\pi}{12} e^{i\frac{5\pi}{12}} \\ |z_3| &= 2 \sin \frac{\pi}{12} \text{ car } 2 \sin \frac{\pi}{12} > 0 \text{ et } \arg z_3 = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{Z}$)

c- Calculons z_3^{2015} sous forme algébrique

$$z_3^{2015} = \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right)^{2015} e^{i \left(2015 \times \frac{5\pi}{12} \right)}$$

$$2015 \times \frac{5\pi}{12} = -\frac{5\pi}{12}$$

$$z_3^{2015} = \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right)^{2015} e^{-i\frac{5\pi}{12}}$$

$$= \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right)^{2015} \left(\cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$= \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right)^{2015} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \right]$$

$$= \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right)^{2015} \left[\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12} \right]$$

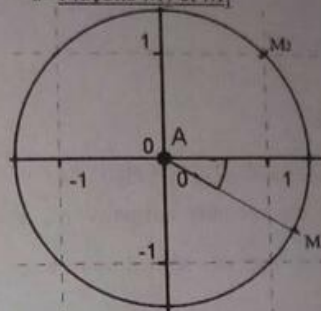
$$z_3^{2015} = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right)^{2015} \left[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - i \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right) \right]$$

8°) a- Interprétation géométrique de $|z_1|$ et $\arg z_1$

$$|z_1| = \sqrt{2} \Rightarrow OM_1 = \sqrt{2}$$

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{mes}(\vec{u}; \overrightarrow{OM_1}) = -\frac{\pi}{6}$$

b- Plaçons M_1 et M_2



B/

$$Z = \frac{z - z_2}{z - z_1}$$

9°) a- Déterminons les ensembles (E_1) et (E_2)

$$M \in (E_1) \Leftrightarrow |Z| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z - z_2}{z - z_1} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{MM_2}{MM_1} = 1$$

$$\Leftrightarrow MM_2 = MM_1 \text{ d'où } (E) \text{ est la médiatrice}$$

$$[M_1 M_2]$$

$$M \in (E_2) \Leftrightarrow |Z| = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{MM_2}{MM_1} = 2$$

$$\Leftrightarrow MM_2 = 2MM_1$$

$$M \in (E_2) \Leftrightarrow \overline{MM_2}^2 - 4\overline{MM_1}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overline{MM_2} - 2\overline{MM_1})(\overline{MM_2} + 2\overline{MM_1}) = 0$$

$$\text{Soit } I = \text{bra}\{(M_1; -2); (M_2; 1)\} \text{ et}$$

$$J = \text{bra}\{(M_1; 2); (M_2; 1)\}$$

$$\text{Donc } M \in (E_2) \Leftrightarrow -\overline{MI} \cdot \overline{MJ} = 0 \text{ d'où } (E_2) \text{ est le cercle de diamètre } [IJ]$$

b- Déterminons (E_3)

$$M \in (E_3) \Leftrightarrow \text{Arg} Z = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{Arg} \left(\frac{z_2 - z}{z_1 - z} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{Mes}(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}) = -\frac{\pi}{2}$$

(E_3) est le demi-cercle de diamètre $[M_1 M_2]$ (extérieur du cercle de centre O et de rayon OM_2)

10°) a- Justifions que (E_1) et (E_2) ont un seul point commun M_0 dont nous préciserons l'abscisse

$$M_0 \Leftrightarrow (E_2) \cap (E_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = 2 \\ \text{Arg}(Z) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Z = -2i \Leftrightarrow \frac{z_0 - 1 - i}{z_0 - \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2i$$

$$\Leftrightarrow z_0 - 1 - i = -2i \left(z_0 - \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$z_0 = \frac{3 + \sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{5} + i \left(\frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 1}{5} \right)$$

b- Nature du triangle $M_0 M_1 M_2$

on a : $\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_1} = -2i$ donc $M_0 M_1 M_2$ est un triangle rectangle

en M_0

c- Déterminons z_3

$$M_3 \Leftrightarrow (E_1) \cap (E_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = 1 \\ \text{Arg}(Z) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow Z = -i \Leftrightarrow z_3 = -i$$

d- on a : $\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = -i$ d'où $M_0 M_1 M_2$ est un triangle isocèle et rectangle en M_3

CORRIGE TYPE DE LA SE N°02

Problème 1 :

1- Déterminons les coordonnées des points O, I et L.

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AF}$$

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AE} \text{ donc } O \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI}$$

$$= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \text{ donc } I \left(0; \frac{1}{2}; 1 \right)$$

$L = \text{bar}\{(C, 3); (G, 1)\}$, dans le repère $C(1; 1; 0)$ et $G(1; 1; 1)$ donc

$$L \left(\frac{3 \times 1 + 1 \times 1}{4}; \frac{3 \times 1 + 1 \times 1}{4}; \frac{3 \times 0 + 1 \times 1}{4} \right), \text{ d'où}$$

$$L \left(1; 1; \frac{1}{4} \right)$$

2- a) Justifions que (Δ) est une droite dont nous préciserons un repère.

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow$$

$$4\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) \wedge \overrightarrow{ML}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{ML}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{ML} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO} \wedge (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{ML}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{LB} = \vec{0} \text{ d'où } (\Delta) \text{ est la droite de}$$

repère $(O; \overrightarrow{LB})$

b) Donne une représentation paramétrique de (Δ)

$$\overrightarrow{LB} \left(0; -1; -\frac{1}{4} \right) \text{ et } O \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2} \right) \text{ d'où}$$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = -\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2} \end{cases}$$

3- a) Déterminons une équation cartésienne du plan (P) de l'écran

$\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal de (P)

$$\overrightarrow{AD}(0; 1; 0) \text{ donc } (P) : y + d = 0 ; D \in (P) \Leftrightarrow (P) : y - 1 = 0$$

b) Justifie que (Δ) et (P) sont sécants, puis détermine les coordonnées de leur point d'intersection A_0 .

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{LB} = (0 \times 0) + (1 \times (-1)) + \left(0 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \right) = -1 \neq 0,$$

donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{LB}$ sont non orthogonaux, d'où (P) et (Δ) sont sécants.

$$\begin{cases} A_0 \in (\Delta) \\ A_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = -\alpha \\ z_0 = -\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2} \\ y_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = 1 \\ z_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{d'où } A_0 \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{4} \right)$$

4- a- Justifions que $OICA_0$ est un tétraèdre, et calculons son volume v .

$$\overrightarrow{OI} \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right); \overrightarrow{OC} \left(\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2} \right) \text{ et } \overrightarrow{OA_0} \left(0; 1; \frac{1}{4} \right)$$

Calculons $(\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA_0}$

$$\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1/2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \overrightarrow{AB} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1/2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \overrightarrow{AD} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{AE} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$$

$$(\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA_0} = -\frac{3}{16} \neq 0 \text{ donc } OICA_0 \text{ est un tétraèdre}$$

$$v = \frac{1}{6} |\overrightarrow{OA_0} \cdot (\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OC})| u.v$$

$$= \frac{1}{6} \left| -\frac{3}{16} \right| \times (12)^3 m^3 \Leftrightarrow v = 54 m^3$$

b- Calculons l'aire du triangle OIC puis déduis la distance de A_0 au plan (OIC)

A = aire de OIC.

$$A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OC}\| u.a$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16}} \times (12)^2 m^2 \Leftrightarrow A = 54\sqrt{2} m^2$$

Déduisons $d(A_0, (OIC))$

$$v = \frac{1}{3} \text{Base} \times \text{hauteur}$$

$$\begin{aligned} \text{donc hauteur} &= \frac{3v}{\text{Base}} \\ &= \frac{3 \times 54}{54\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

or $d(A_0, (OIC)) = \text{hauteur}$

$$\text{d'où } d(A_0, (OIC)) = \frac{3\sqrt{2}}{2} m$$

c- Justifions que les plans (OIC) et (P) sont sécants déterminons les équations cartésiennes de leur droite d'intersection (D)

$C \in (OIC) \cap (P)$ et $O \notin (P)$, d'où (P) et (OIC) sont sécants suivant (D) passant par C.

$\vec{u} = \overrightarrow{AD} \wedge \vec{n}$ est vecteur directeur de (D) avec $\vec{n}$ vecteur normal de (OIC) et $\overrightarrow{AD}(0;1;0)$ un vecteur de (P)

$$\vec{u}(-1;0;1) \text{ et } C(1;1;0) \in (D) \text{ donc } (\Delta): \begin{cases} x-1 \\ -1 \\ y=1 \end{cases}$$

d- Justifions que (Δ) et (D) sont non coplanaires

$$\text{Calculons } \overrightarrow{OC} \cdot (\vec{u} \wedge \overrightarrow{LB}); \overrightarrow{LB} \left(0; -1; -\frac{1}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \overrightarrow{LB} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1/4 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} \overrightarrow{AB} + \begin{vmatrix} 1 & -1/4 & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} \overrightarrow{AD} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \end{aligned}$$

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{LB} \left(1; -\frac{1}{4}; 1 \right); \overrightarrow{OC} \left(\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot (\vec{u} \wedge \overrightarrow{LB}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \neq 0 \text{ d'où } (\Delta) \text{ et } (D) \text{ non coplanaires}$$

Problème 2 :

5- a) Vérifie que $\alpha + 2i$ est une solution de (E)

$$z^2 - (2\alpha + i)z + \alpha^2 + i\alpha + 2 = 0$$

Posons $z_0 = \alpha + 2i$

$$(\alpha + 2i)^2 - (2\alpha + i)(\alpha + 2i) + \alpha^2 + i\alpha + 2 =$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha^2 + 4i\alpha - 4i\alpha - 4 + 4 = 0$$

D'où $\alpha + 2i$ est solution de (E).

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

$$\Delta = (2\alpha + i)^2 - 4(\alpha^2 + i\alpha + 2) \Leftrightarrow \Delta = -9 = (3i)^2$$

On trouve $z_1 = \alpha + 2i$; $z_2 = \alpha - i$

$$S_c = \{\alpha - i; \alpha + 2i\}$$

c) Déterminons α pour que OIK soit un triangle isocèle et rectangle en O

$$\frac{z_K - z_O}{z_J - z_O} = i \text{ ou } \frac{z_K - z_O}{z_J - z_O} = -i$$

$$\frac{\alpha + 2i}{\alpha - i} = i \text{ ou } \frac{\alpha + 2i}{\alpha - i} = -i$$

$$\alpha = \frac{3-i}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{-3-i}{2}$$

6- a) Déterminons l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de s

$s: z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} s(J) = K \\ s(K) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_K = az_J + b \\ z_O = az_K + b \end{cases}, \text{ on trouve } a = \frac{-1-i}{2}$$

$$\text{et } b = -\frac{3}{2}$$

$$\text{D'où } s: z' = \left(\frac{-1-i}{2}\right)z - \frac{3}{2}$$

$$\left|\frac{-1-i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soit z_Ω , l'affixe du centre Ω de s .

$$z_\Omega = \frac{-\frac{3}{2}}{1 + \frac{1+i}{2}} = \frac{-3(3-i)}{10} \Leftrightarrow z_\Omega = -\frac{9}{10} + \frac{3}{10}i$$

Soit θ un argument de $\left(\frac{-1-i}{2}\right)$, on a :

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \theta = \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

d'où s est la similitude plane directe de centre Ω d'affixe

$$z_\Omega = -\frac{9}{10} + \frac{3}{10}i, \text{ d'angle } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ et de rapport } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b- Déterminons une équation cartésienne de l'ouverture circulaire pour la projection des films.

Soit (C) le cercle circonscrit au triangle OJK rectangle en O.

Le milieu O' de $[JK]$ est le centre de (C) et $r = \frac{JK}{2}$ est le rayon de (C).

L'ouverture circulaire est donc (C') de centre $O' = s(O)$ et de

rayon $r' = k \times r$

$$z_{O'} = -\frac{3}{2} \text{ et } r = \frac{3}{2}. \text{ On trouve : } z_{O'} = \frac{-3}{4} + \frac{3}{4}i \text{ et}$$

$$r' = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ et}$$

$$(C') : \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{8}$$

Problème 3 :

Partie A :

7- a) Étudions les variations de g

$$g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0 \text{ donc } D_g =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

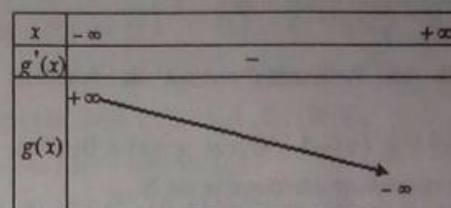
g est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

$$g'(x) = -\left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -\frac{1+x^2+x^2}{\sqrt{1+x^2}}, \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = \frac{-2x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}; \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} > 0 \text{ or}$$

$$-2x^2-1 < 0, \text{ donc}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



b) Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $0,78 < \alpha < 0,79$

g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et

$g(]-\infty; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$, or $0 \in]-\infty; +\infty[$. D'où l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

$g(0,78) = 0,0107 > 0$ et $g(0,79) = -0,0067 < 0$, d'où $0,78 < \alpha < 0,79$

c) Dédons le signe de $g(x)$

D'après a) et b) on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[; g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[; g(x) < 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

d) Démontrons que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4-3}{3\alpha}$

$$f(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha^3 - \sqrt{1+\alpha^2}, \text{ or}$$

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha\sqrt{1+\alpha^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha^4-3}{3\alpha}$$

Montrons $-1,13 < f(\alpha) < -1,10$

$$0,78 < \alpha < 0,79$$

$$\Rightarrow (0,78)^4 - 3 < \alpha^4 - 3 < (0,79)^4 - 3$$

$$\Leftrightarrow 3 - (0,79)^4 < 3 - \alpha^4 < 3 - (0,78)^4 \quad (1)$$

$$\text{Or } 3(0,78) < 3\alpha < 3(0,79) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3(0,79)} < \frac{1}{3\alpha} < \frac{1}{3(0,78)} \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2) on a : } \frac{3 - (0,79)^4}{3(0,79)} < -f(\alpha) < \frac{3 - (0,78)^4}{3(0,78)}$$

$$\Rightarrow \frac{(0,78)^4 - 3}{3(0,78)} < f(\alpha) < \frac{(0,79)^4 - 3}{3(0,79)}$$

$$\Leftrightarrow -1,128 < f(\alpha) < -1,101, \text{ d'où}$$

$$-1,13 < f(\alpha) < -1,10$$

8- a) Démontrons que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique β / $0,4 < \beta < 0,5$

soit $h : x \mapsto g(x) - x$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = g'(x) - 1 < 0$, car $g'(x) < 0$. D'où

h est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$h(0,4) = 0,169 > 0$ et $h(0,5) = -0,059 < 0$ d'où

$g(x) = x$ admet une solution unique β telle que $0,4 < \beta < 0,5$

b) Etudions le sens de variation de g' .

g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotients de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on trouve : } g''(x) = \frac{-x(2x^2 + 3)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$(1+x^2)\sqrt{1+x^2} > 0 \text{ et } 2x^2 + 3 > 0, \text{ d'où } \forall x \in$$

$$]-\infty; 0[; g''(x) > 0; \forall x \in]0; +\infty[; g''(x) < 0 \text{ et}$$

$$g''(0) = 0 \text{ alors :}$$

g' est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

g'' s'annule en 0 en changeant de signe et $g'(0) = 1$ donc

le point $I_1(0;1)$ est un point d'inflexion de (C_g)

c) Justifions que $\forall x \in [0,4;0,5], |g'(x)| \leq \frac{3}{2}$ et

$$|g(x) - \beta| \leq \frac{3}{2}|x - \beta|$$

g' est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in [0,4;0,5]$, on a : $g'(0,5) < g'(x) < g'(0,4)$
 $g'(x) < 0$ donc $|g'(x)| \leq |g'(0,5)|$; $g'(0,5) = -\frac{3}{2}$

$$\text{D'où } \forall x \in [0,4;0,5], |g'(x)| \leq \frac{3}{2}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\beta \in [0,4;0,5]$

$$\forall x \in [0,4;0,5], |g'(x)| \leq \frac{3}{2} \text{ d'après l'inégalité}$$

accroissements finis on a : $|g(x) - g(\beta)| \leq \frac{3}{2}|x - \beta|$

$$g(\beta) = \beta, \text{ d'où } |g(x) - \beta| \leq \frac{3}{2}|x - \beta|$$

Partie B :

9- a) Etudions le sens de variation de f

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

$$f'(x) = x^2 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-x(1 - x\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{-xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$-x$	+	○	-	-
$g(x)$	+	+	○	-
$f'(x)$	+	○	-	+

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[; f'(x) > 0;$$

$$\forall x \in]0; \alpha[; f'(x) < 0 \text{ et } f'(0) = f'(\alpha) = 0$$

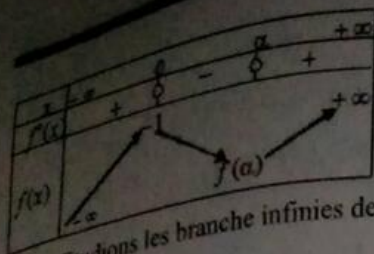
D'où f est strictement décroissante sur $[0; \alpha]$ et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[\alpha; +\infty[$

b) Dressons le tableau de variation de f

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{3}x^2 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x^2 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$$



c) Etudions les branches infinies de (Γ)

Pour $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

Pour $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

D'où la courbe de (Γ) admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy) .

10- a) Justifions que k admet une application réciproque k^{-1} et précisons son ensemble de définition J .

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc k est une bijection. Elle admet une bijection réciproque k^{-1} définie sur $J = f(\mathbb{R}) =]-\infty; -1]$

b) Etudie la dérivabilité de k^{-1} sur J

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$ donc k^{-1} est dérivable sur $J = f(\mathbb{R}) =]-\infty; -1]$

c) Justifions que le point $A_1(-\sqrt{3}-2; -\sqrt{3}) \in (\Gamma')$

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{3}(-\sqrt{3})^3 - \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$= -\sqrt{3} - 2 \Rightarrow k^{-1}(-\sqrt{3} - 2) = -\sqrt{3}$$

donc $A_1(-\sqrt{3}-2; -\sqrt{3}) \in (\Gamma')$

Déterminons une équation cartésienne de la tangente (T) à (Γ') au point A_1

$$(T): y = (k^{-1})'(-\sqrt{3}-2)(x + \sqrt{3} + 2) + (k^{-1})'(-\sqrt{3}-2)$$

$$(k^{-1})'(-\sqrt{3}-2) = \frac{1}{k'[k^{-1}(-\sqrt{3}-2)]} = \frac{1}{k'(-\sqrt{3})} \text{ or }$$

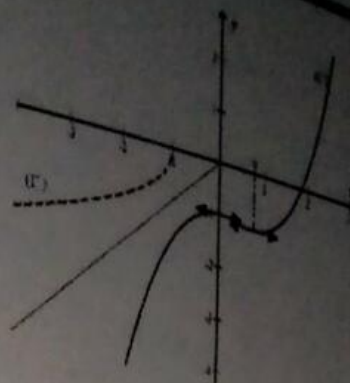
$k'(-\sqrt{3}) = f'(-\sqrt{3})$ les calculs donnent :

$$f'(-\sqrt{3}) = \frac{6 + \sqrt{3}}{2} \text{ donc } (k^{-1})'(-\sqrt{3}-2) = \frac{2}{6 + \sqrt{3}}, \text{ d'où}$$

$$(T): y = \frac{2}{6 + \sqrt{3}}(x + \sqrt{3} + 2) - \sqrt{3}$$

11. Traçons les courbes qui ont servi à la décoration de la façade

Ces courbes sont (Γ) et (Γ')



CORRIGE TYPE DE LA SE N° 03

Problème 1 :

1°) Démontrons que $M \in (S) \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{IC} = -3$

$$M \in (S) \Leftrightarrow \overline{MA}^2 + \overline{MA} \cdot \overline{MB} - 2\overline{MA} \cdot \overline{MC} = 6$$

$$\Leftrightarrow \overline{MA}(\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}) = 6 \text{ or } I \text{ est le milieu}$$

de $[AB]$ donc $I = \text{bar}\{(A; 1); (B; 1)\}$

$$\text{Alors } \overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$$

$$\text{Ainsi } M \in (S) \Leftrightarrow \overline{MA}(2\overline{MI} - 2\overline{MC}) = 6$$

$$\Leftrightarrow -2\overline{MA}(\overline{IM} + \overline{MC}) = 6$$

$$\Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{IC} = \frac{6}{-2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{IC} = \frac{6}{-2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{IC} = -3$$

$$\text{D'où } M \in (S) \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{IC} = -3$$

2°) a- Coordonnées I

$$I \text{ est le milieu de } [AB] \text{ donc on a : } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

$A(-1; -2; 1)$ et $B(5; 0; 1)$

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = 2 \\ y_I = -1 \\ z_I = 1 \end{cases} \text{ alors } I(2; -1; 1)$$

b- Equation cartésienne de (S)

$$\text{on a : } \overline{MA}(-1-x; -2-y; 1-z) \text{ et } \overline{IC}(-1; 3; -2)$$

$$M \in (S) \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{IC} = -3$$

Correction des évaluations

$$\Leftrightarrow 1+x+3(-2-y)-2(1-z)=-3$$

$$\Leftrightarrow x-3y+2z-4=0 \text{ d'où}$$

$$(S): x-3y+2z-4=0$$

(S) est de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c et d des réels et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ d'où (S) est un plan.

3°) Justifions que $A \in (\emptyset)$

Supposons que $A \in (\emptyset)$

$$A \in (\emptyset) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \alpha \\ -2 = \beta \\ 1 = -4\alpha - 2\beta - 7 \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\alpha = -1 \text{ et } \beta = -2 \text{ dans (1) donne } 1 = -4(-1) - 2(-2) - 7$$

ce qui équivaut à $1=1$ (vrai) par suite $A \in (\emptyset)$

Déduisons un repère de (Q)

(Q) a pour une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -4\alpha - 2\beta - 7 \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ alors } \vec{u}(1; 0; -4) \text{ et } \vec{v}(0; 1; -2)$$

sont des vecteurs directeurs de (Q) et A un point de (Q) alors le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de (Q)

b- Prouvons que le vecteur $\vec{n}(4; 2; 1)$ est un vecteur normal à (Q)

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 4 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times (-4) = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \text{ (a)}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 4 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v} \text{ (b)}$$

De (a) et (b) $\vec{n}(4; 2; 1)$ est un vecteur normal à (Q)

4°) a- Démontrons que (S) $\perp$ (Q)

$\vec{n}'(1; -3; 2)$ est vecteur normal à (S)

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 4 \times 1 + 2 \times (-3) + 1 \times 2 = 4 - 6 + 2 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$$

par suite (S) $\perp$ (Q)

b- Déterminons $d(I; (S))$ et $d(I; (Q))$

$$d(I; (S)) = \frac{|x_1 - 3y_1 + 2z_1 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} \times u.l ; u.l = 4 \text{ m}$$

$$d(I; (S)) = \frac{12}{\sqrt{14}} \text{ m}$$

$$d(I; (Q)) = \frac{|\vec{IA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \times u.l \text{ on trouve } d(I; (Q)) = \frac{56}{\sqrt{21}} \text{ m}$$

c- Déduisons $\vec{d}$

$$d^2 = [d(I; (S))]^2 + [d(I; (Q))]^2$$

$$d = \sqrt{\frac{144}{14} + \frac{3136}{21}} \text{ m}$$

$$= \sqrt{\frac{46928}{294}} \text{ m on a } d \approx 12,63 \text{ m}$$

Problème 2

5°) a- Calculons $(1 + \sqrt{3} + 2i)^2$

$$(1 + \sqrt{3} + 2i)^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + 4i(1 + \sqrt{3}) - 4 \text{ on obtient}$$

$$(1 + \sqrt{3} + 2i)^2 = 2\sqrt{3} + 4i(1 + \sqrt{3})$$

b- Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

$$(E): z^2 + (4 + i - i\sqrt{3})z + 3 + \sqrt{3} + i(3 - \sqrt{3}) = 0$$

Le discriminant de (E) est

$$\Delta = [4 + i(1 - \sqrt{3})]^2 - 4[3 + \sqrt{3} + i(3 - \sqrt{3})]$$

$$= -(2\sqrt{3} + 4i(1 + \sqrt{3})) = [i(1 + \sqrt{3} + 2i)]^2$$

Les solutions de (E) sont :

$$z_1 = \frac{-4 - i(1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3} + 2i)}{2} \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{-4 - i(1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3} + 2i)}{2} \text{ on trouve :}$$

$$z_1 = -1 - i \text{ et } z_2 = -3 + i\sqrt{3} \text{ d'où}$$

$$S_c = \{-1 - i; -3 + i\sqrt{3}\}$$

6°) a- Démontrons qu'une solution de (E) est un zéro du polynôme $g(z)$

On trouve $g(-1 - i) = 0$ et

$$g(-3 + i\sqrt{3}) = 12 - 10\sqrt{3} + 5i(3\sqrt{3} - 1) ; \text{ puisque}$$

$g(-3 + i\sqrt{3}) \neq 0$ et $g(-1 - i) = 0$ alors la solution $-1 - i$ de (E) est un zéro du polynôme $g(z)$.

b- Déduisons-en la résolution de (E')

$g(-1 - i) = 0$ alors il existe un polynôme $R(z)$ tel que

$$g(z) = (z + 1 + i)R(z) \text{ avec } R(z) = az^2 + bz + c \text{ où } (a; b; c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

On trouve $R(z) = z^2 - 4iz - 7 - 4i$

$$(E') \Leftrightarrow g(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 1 + i)(z^2 - 4iz - 7 - 4i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -1 - i \text{ ou } z^2 - 4iz - 7 - 4i = 0$$

Résolvant $z^2 - 4iz - 7 - 4i = 0$

Son discriminant $\Delta = 12 + 16i$. Soit $\delta^2 = \Delta$ avec

$$\delta = x + iy ; (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 - y^2 = 12 \\ 2xy = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \delta = 4 + 2i \text{ ou } \delta = -4 - 2i$$

alors $\Delta = (4 + 2i)^2$

$$\text{Alors } z^2 - 4iz - 7 - 4i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{4i - 4 - 2i}{2} \text{ ou}$$

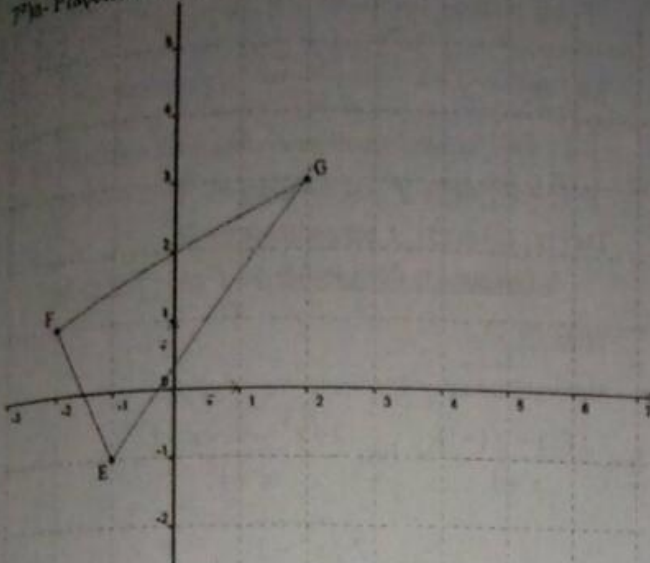
$$z = \frac{4i + 4 + 2i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -2 + i \text{ ou } z = 2 + 3i$$

D'où l'ensemble solution de l'équation (E') dans $\mathbb{C}$ est :

$$S = \{-1-i; -2+i; 2+3i\}$$

7°) a. Plaçons E, F et G



b. Démontrons que f est une similitude plane directe

$$f: M(z) \mapsto M'(z')$$

$$\text{on a : } 2\left(z - \frac{1}{3}\right) = (1+i)\left(z' - \frac{1}{3}\right)$$

$$2\left(z - \frac{1}{3}\right) = (1+i)\left(z' - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$(1+i)z' - \frac{1}{3}(1+i) = 2z - \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{2}{1+i}z - \frac{2}{3(1+i)} + \frac{1}{3}$$

$$2\left(z - \frac{1}{3}\right) = (1+i)\left(z' - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow z' = (1-i)z + \frac{1}{3}i$$

L'écriture complexe de f est : $z' = (1-i)z + \frac{1}{3}i$ et elle sous

la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. On en déduit que f est une similitude plane directe

Les éléments caractéristiques :

- Son rapport $k = |1-i| = \sqrt{2}$

- Son centre Ω est tel que $z_\Omega = \frac{\frac{1}{3}i}{1-(1-i)} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\Omega\left(\frac{1}{3}; 0\right)$$

- Son angle θ est un argument de $1-i$; on prend

$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

c. Nature du triangle EFG.

Calculons $\frac{z_G - z_F}{z_E - z_F}$

$$\frac{z_G - z_F}{z_E - z_F} = \frac{2+3i+2-i}{-1-i+2-i} = \frac{4+2i}{1-2i} \text{ et on a } \frac{z_G - z_F}{z_E - z_F} = 2i$$

d. Donnons une équation cartésienne du cercle (C').
(C') est l'image de (C) par f . (C) est circonscrit au triangle EFG rectangle en F donc (C) a pour

- Centre un point I tel que $z_I = \frac{z_E + z_G}{2} = \frac{1}{2} + i \Rightarrow$
 $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

- Rayon R tel que $R = \frac{EG}{2} = \frac{|z_G - z_E|}{2} = \frac{5}{2} uI$
 $uI = \text{unité de longueur}$

Ainsi (C') a pour rayon $R' = kR = \frac{5}{2}\sqrt{2} uI$ et pour centre

$$I' = f(I)$$

$$I' = f(I) \Leftrightarrow z_{I'} = (1-i)z_I + \frac{1}{3}i \Leftrightarrow z_{I'} = \frac{3}{2} + \frac{5}{6}i$$

$$I'\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{6}\right)$$

D'où une équation cartésienne de (C') est :

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

8°) Déduisons-en la longueur du fil barbelé

Soit L cette longueur. $L = \text{Périmètre du cercle (C')}$

$$L = 2\pi R' uI \text{ on obtient}$$

$$L = 5\pi\sqrt{2} uI = 30\text{m d'où } L = 150\pi\sqrt{2} \text{ m} = 664,11 \text{ m}$$

d'où la longueur du fil barbelé est 664,11 m

Problème 3 :

Partie A :

$$u(x) = x^3 + 3x - 14$$

9°) Etudions les variations de u

- u étant une fonction polynôme, elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 3x^2 + 3$

- $\forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 > 0$ et $3 > 0$ donc $u'(x) > 0$

- u est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$$

- Tableau de variation de u

x	$-\infty$		$+\infty$
$u'(x)$		+	
u	$-\infty$		$+\infty$

Correction des évaluations

10°) a- Démontrons que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ dont nous préciserons la valeur. u est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

On a : $2 \in \mathbb{R}$ et $u(2) = 0$ d'où 2 est la solution unique de l'équation $u(x) = 0$

b- Signe de $u(x)$

$$\text{D'après 9°) et 10°)-a- on a : } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2[, u(x) < 0 \\ \forall x \in]2; +\infty[, u(x) > 0 \\ u(2) = 0 \end{cases}$$

Partie B :

$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} - x - 1; \text{ si } x \in]-\infty; -1[\\ f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 + 1}; \text{ si } x \in [-1; +\infty[\end{cases}$$

11°) a- Etudions la continuité de f en -1 et en tout point de son ensemble de définition

Soit D_f le domaine de définition de f

$$D_f = D_1 \cup D_2 \text{ avec}$$

$$D_1 = \{x \in]-\infty; -1[\mid x^2 - 1 \geq 0\}$$

$$\text{Posons } x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

$x^2 - 1$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
	+	-	-	+

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

$$\text{donc } D_1 =]-\infty; -1] \cap (]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[)$$

$$D_1 =]-\infty; -1] \quad (\text{a})$$

$$D_2 = \{x \in [-1; +\infty[\mid x^2 + 1 \neq 0\}$$

$$\text{Or } x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ donc } D_2 = [-1; +\infty[\quad (\text{b})$$

$$\text{De (a) et (b) on a : } D_f = \mathbb{R}$$

• Continuité de f en -1

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 + 1} = 0 = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} 2\sqrt{x^2 - 1} - x - 1 = 0$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ donc f est continue en -1 (1)

• Continuité sur D_f

La fonction $x \mapsto 2\sqrt{x^2 - 1} - x - 1$ est continue sur $]-\infty; -1[$ comme somme de fonctions continues. f est continue sur $]-\infty; -1[$ (2)

La fonction $x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 + 1}$ est continue sur $]-1; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues.

$]-1; +\infty[$ donc f est continue sur $]-1; +\infty[$

De (1); (2) et (3) f est continue sur $\mathbb{R}$.

b- Etudions la dérivabilité de f en -1 et en tout point de D_f

point de D_f

• Dérivabilité en -1

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2\sqrt{x^2 - 1} - x - 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1} - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1 = -\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable à gauche en } -1$$

pas dérivabilité à gauche en -1

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{(x + 1)(x^2 + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - 4x + 4)}{(x + 1)(x^2 + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 1} = \frac{9}{2}; \frac{9}{2} \in \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ est dérivable à droite en } -1$$

est dérivabilité à droite en -1 et le nombre dérivé à droite en -1 est $f'_d(-1) = \frac{9}{2}$

$$-1 \text{ est } f'_d(-1) = \frac{9}{2}$$

Au total f n'est pas dérivable en -1

• Dérivabilité sur D_f

La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et $\forall x \in]-\infty; -1[; x^2 - 1 > 0$ alors la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x^2 - 1} - x - 1$ est dérivable sur $]-\infty; -1[$ comme somme de fonctions par suite f est dérivable sur $]-\infty; -1[$

La fonction $x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $]-1; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables donc f est dérivable sur $]-1; +\infty[$ or f n'est pas dérivable en -1 .

Conclusion : f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$

Interprétation géométrique :

(C) admet en son point d'abscisse -1 deux demi-tangentes définies par :

A gauche en $-1 : (T_g) : \begin{cases} x = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

A droite en $-1 : (T_d) : \begin{cases} x \geq -1 \\ y = \frac{9}{2}(x+1) \end{cases}$ soit

$(T_d) : \begin{cases} x \geq -1 \\ y = \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} \end{cases}$

12^a) Etudions les variations de f puis dressons le tableau des variations

• Dérivée

On trouve :
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} - 1; \text{ si } x \in]-\infty; -1[\\ f'(x) = \frac{x u(x)}{(x^2+1)^2}; \text{ si } x \in]-1; +\infty[\end{cases}$$

• Signe de $f'(x)$

Sur $]-\infty; -1[$; $2x < 0$, $\sqrt{x^2-1} > 0$ donc $\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} < 0$

or $-1 < 0$ alors $\forall x \in]-\infty; -1[$, $f'(x) < 0$

Sur $]-1; +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x u(x)$

On obtient le tableau de signe suivant

x	-1	0	2	+
x	-	0	+	+
u(x)	-	-	0	+
f'(x)	+	0	-	+

$\forall x \in]-1; 0[\cup]2; +\infty[$, $f'(x) > 0$

$\forall x \in]0; 2[$, $f'(x) < 0$ et $f'(0) = f'(2) = 0$

En résumé on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; 2[, f'(x) < 0 \\ \forall x \in]-1; 0[\cup]2; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in \{0; 2\} ; f'(x) = 0 \end{cases}$$

• Sens de variation de f

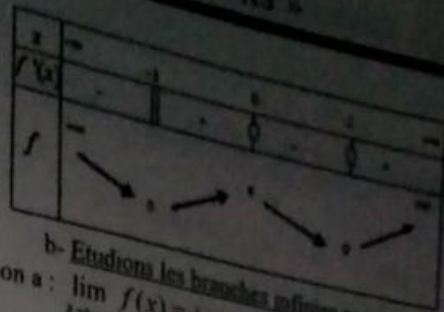
f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $[0; 2]$.

f est strictement croissante sur $[-1; 0]$ et sur $[2; +\infty[$

• Limite aux bornes de D_f

On trouve : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• Tableau de variation de f



b- Etudions les branches infinies puis construisons (C)

on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1} - x - 1}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - x - 1}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x[-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}]}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x} = -3$

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x]$

On trouve $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x] = -1$ et on conclure que la droite d'équation $y = -3x - 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$

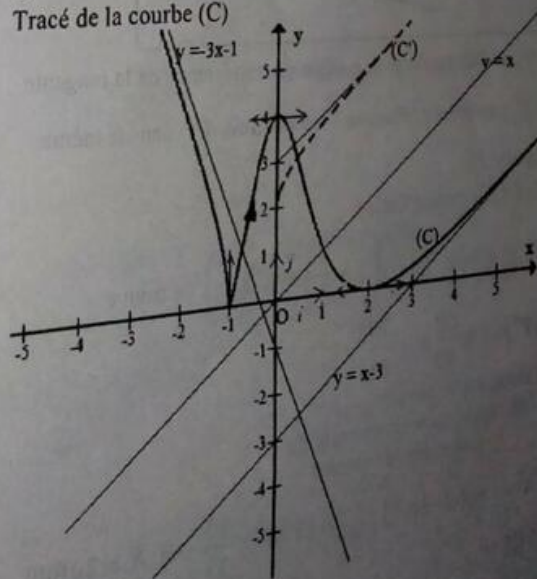
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; on calcule et on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

on calcule ensuite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ et on trouve

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -3$ et on conclure que la droite d'équation

$y = x - 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$

Tracé de la courbe (C)



Correction des évaluations

13°) $\varphi: [2; +\infty[\rightarrow f([2; +\infty[)$
 $x \mapsto \varphi(x) = f(x)$

a- Démontrons que φ admet une bijection réciproque

φ^{-1}

$\forall x \in [2; +\infty[: \varphi(x) = f(x)$ or f est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$ et

$f([2; +\infty[) = [0; +\infty[$ donc φ est une bijection de $[2; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$ par conséquent φ admet une bijection réciproque.

b- Calculons $f(3)$ puis déduisons-en la valeur de

$\left(\varphi^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right)$

$f(3) = \frac{2}{5}$

On a : $\varphi(3) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 3 = \left(\varphi^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right)$ d'où $\left(\varphi^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right) = 3$

c- Précisons l'ensemble de dérivabilité de φ

Soit E cet ensemble

$\varphi^{-1}: [0; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[$

$E = [0; +\infty[\setminus \{f(x) / f'(x) = 0; \forall x \in [2; +\infty[\}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ donc $E = [0; +\infty[\setminus \{f(2)\}$ soit

$E =]0; +\infty[$

d- Dressons le tableau de variation de φ^{-1}

φ^{-1} a le même sens de variation de φ

On trouve :

x	0	$+\infty$
$\left(\varphi^{-1}\right)'(x)$		+
$\left(\varphi^{-1}\right)(x)$	2	$+\infty$

15°) a- Déterminons une équation cartésienne de la tangente

à (C') au point d'abscisse $\frac{2}{5}$. Construis (C') dans le même repère (C) .

Soit (T') cette tangente

$(T') : y = \left(\varphi^{-1}\right)' \left(\frac{2}{5}\right) \left(x - \frac{2}{5}\right) + \varphi^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$ on trouve

$(T') : y = \frac{50}{33}x + \frac{79}{33}$

Construction de (C')

Voir figure : courbe en pointillé

b- Calculons le montant

$X = 13\,200 \times \left(\varphi^{-1}\right)' \left(\frac{2}{5}\right) = 13\,200 \times \frac{50}{33}$ soit $X = 20\,000$

VCFA

CORRIGE TYPE DE LA SE 14

Problème 1 :

1°) Déterminons le nombre réel β .

$z_0 = \beta i$ avec $\beta \in \mathbb{R}_+$

$P(z_0) = 0$

$\Leftrightarrow (\beta i)^3 - 2(2+i)(\beta i)^2 + 8(1+i)(\beta i) - 16i = 0$

$\Leftrightarrow -i\beta^3 + 4\beta^2 + 2i\beta^2 + 8i\beta - 8\beta - 16i = 0$

$\Leftrightarrow 4\beta^2 - 8\beta + i(-\beta^3 + 2\beta^2 + 8\beta - 16) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\beta^2 - 8\beta = 0 & \otimes \\ -\beta^3 + 2\beta^2 + 8\beta - 16 = 0 & \oplus \end{cases}$

$\otimes \Leftrightarrow 4\beta(\beta - 2) = 0 \Leftrightarrow \beta = 2$ car $\beta \neq 0$

$\beta = 2$ dans $\oplus \Rightarrow$

$-(2)^3 + 2(2)^2 + 8(2) - 16 = -8 + 8 + 16 - 16 = 0$ et

$z_0 = 2i$ et $\beta = 2$

2°) a- Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = z^3 - 2(2+i)z^2 + 8(1+i)z - 16i$ et $P(2i) = 0$

donc $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$ avec $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3$

On a : $P(z) = az^3 + (b - 2ia)z^2 + (c - 2ib)z - 2ic$

identification on a : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2ia = -2(2+i) \\ c - 2ib = 8(1+i) \\ -2ic = -16i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 - 2i \\ c = 8 \end{cases}$

$P(z) = (z - 2i)(z^2 - 4z + 8)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 - 4z + 8) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 - 4z + 8 = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 - 4z + 8 = 0$; Le

discriminant de $z^2 - 4z + 8 = 0$ est $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(8)$

$= -16 = (4i)^2$ donc $z^2 - 4z + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$z = \frac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$ ou $z = \frac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i$ alors

$S_C = \{2i; 2 - 2i; 2 + 2i\}$

b- Déduisons les affixes des trois entrées du bar dans

$z_0 = 2i$; $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 2 - 2i$

3°) a- Donnons une mesure en radian de l'angle entre

$(\overline{JI}, \overline{JK})$

$mes(\overline{JI}, \overline{JK}) = Arg \frac{z_K - z_J}{z_I - z_J}$

$$\begin{aligned} \text{mes}(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JK}) &= \text{Arg} \frac{z_2 - z_1}{z_0 - z_1} \\ &= \text{Arg} \frac{2 - 2i - (2 + 2i)}{2i - (2 + 2i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mes}(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JK}) &= \text{Arg} \frac{-4i}{-2} \\ &= \text{Arg}(2i) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

b- Précisons la nature du triangle IJK

$$\frac{z_K - z_J}{z_I - z_J} = 2i \in i\mathbb{R}^* \text{ d'où IJK est un triangle rectangle en J.}$$

c- Déterminons une équation cartésienne de la clôture ($\mathcal{C}$) du bar dancing.
($\mathcal{C}$) est circonscrit au triangle IJK donc ($\mathcal{C}$) a pour un diamètre le segment [IK]

$$\text{Soit } \Omega \text{ le centre de } (\mathcal{C}) \text{ on a : } \Omega\left(\frac{x_I + x_K}{2}, \frac{y_I + y_K}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Omega(1; 0)$$

Soit r le rayon de ($\mathcal{C}$)

$$\begin{aligned} r &= \frac{IK}{2} = \frac{|z_K - z_I|}{2} \\ &= \frac{|2 - 2i - 2i|}{2} = \frac{|2 - 4i|}{2} = \sqrt{5} \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$(\mathcal{C}) : (x-1)^2 + y^2 = 5$$

4°) a- Déterminons l'abscisse de la position L du poste de sécurité.

$$\begin{aligned} \text{IOKL est un parallélogramme} &\Leftrightarrow \overrightarrow{IO} = \overrightarrow{LK} \\ &\Leftrightarrow z_O - z_I = z_K - z_L \\ &\Leftrightarrow z_L = z_K + z_I - z_O \\ &\Leftrightarrow z_L = 2 - 2i + 2i - 0 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } z_L = 2$$

b- Voyons si le poste de sécurité est à l'intérieur ou à l'extérieur de la clôture

$$\begin{aligned} L \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow (x_L - 1)^2 + y_L^2 = (2 - 1)^2 + 0^2 \\ &= 1 < 5 \text{ d'où le poste de sécurité} \\ &\text{est à l'intérieur de la clôture.} \end{aligned}$$

Problème 2 :

5°) Démontrons que $G = \text{bar}\{(A, -1); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\}$

$$\begin{aligned} G \in (\Delta) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BG} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{GB} \\ &\Leftrightarrow -\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \text{ et } -1 + 1 + 1 + 1 = 2 \neq 0 \text{ d'où}$$

$$G = \text{bar}\{(A, -1); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\}$$

6°) Démontrons que les droites (BP) et (CQ) sont sécantes.

$$\text{CADP est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{PD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0} \text{ et } -1 + 1 + 1 = 1 \neq 0 \text{ donc}$$

$$P = \text{bar}\{(A, -1); (C, 1); (D, 1)\} \quad (1)$$

$$\text{DABQ est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{QB} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QD} - \overrightarrow{QB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD} = \vec{0} \text{ et } -1 + 1 + 1 = 1 \neq 0 \text{ donc}$$

$$Q = \text{bar}\{(A, -1); (B, 1); (D, 1)\} \quad (2)$$

$$G = \text{bar}\{(A, -1); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\} \text{ donc de (1) on a :}$$

$$G = \text{bar}\{(B, 1); (P, 1)\} \text{ alors } G \in (BP) \quad (a)$$

$$G = \text{bar}\{(A, -1); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\} \text{ donc de (2) on a :}$$

$$G = \text{bar}\{(C, 1); (Q, 1)\} \text{ alors } G \in (CQ) \quad (b)$$

de (a) et (b), les droites (BP) et (CQ) sont sécantes

7°) a- Déterminons les coordonnées de G, P et Q

$$G\left(\frac{-x_A + x_B + x_C + x_D}{2}, \frac{-y_A + y_B + y_C + y_D}{2}, \frac{-z_A + z_B + z_C + z_D}{2}\right) \text{ On}$$

$$\text{trouve } G\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{4}\right)$$

$$P = \text{bar}\{(A, -1); (C, 1); (D, 1)\} \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{-x_A + x_C + x_D}{1}, \frac{-y_A + y_C + y_D}{1}, \frac{-y_A + y_C + y_D}{1}\right) \text{ On}$$

$$\text{trouve } P\left(1; \frac{4}{3}; \frac{1}{2}\right)$$

$$Q = \text{bar}\{(A, -1); (B, 1); (D, 1)\} \Rightarrow$$

$$Q\left(\frac{-x_A + x_B + x_D}{1}, \frac{-y_A + y_B + y_D}{1}, \frac{-z_A + z_B + z_D}{1}\right)$$

$$\text{On trouve } Q\left(0; \frac{5}{3}; \frac{1}{2}\right)$$

b- Déterminons une équation cartésienne de (R)

$$\overrightarrow{BP}\left(1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right) \text{ et } \overrightarrow{CQ}\left(-1; \frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right) \text{ sont deux vecteurs}$$

directeurs de (R) et

$$\overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{CQ}\left(\frac{1}{3}; 1; 2\right) \text{ donc un vecteur normal à (R) est}$$

$$\overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{CQ} \text{ donc (R) : } \frac{1}{3}x + y + 2z + d = 0, d \in \mathbb{R}. B$$

$$\in (R) \Leftrightarrow 0 + \frac{2}{3} + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{8}{3} \text{ donc } (R) :$$

$$\frac{1}{3}x + y + 2z - \frac{8}{3} = 0 \text{ soit } (R) : x + 3y + 6z - 8 = 0$$

c- Justifions que (R') est un plan dont on donnera une équation cartésienne.

$$M \in (R') \Leftrightarrow$$

$$(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot (-3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0$$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = 0$ d'où (R') est un plan passant par G et d'un vecteur normal

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$

Equation cartésienne de (R')

$$\overrightarrow{AB}\left(-1; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{AC}\left(0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{AD}\left(0; 1; -\frac{1}{2}\right) \text{ et}$$

$$\vec{n}\left(-1; 2; \frac{1}{2}\right) \text{ donc on a :}$$

$$(R') : -x + 2y + \frac{1}{2}z + d = 0 \text{ avec } d \in (R') \quad G \in (R')$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{8} + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{15}{8}$$

$$\text{Donc } (R') : -x + 2y + \frac{1}{2}z - \frac{15}{8} = 0 \text{ soit}$$

$$(R') : -8x + 16y + 4z - 15 = 0$$

d- Dédudons une représentation paramétrique de (Δ)

$$(\Delta) = (R) \cap (R') : G \in (R) \text{ et } G \in (R') \text{ donc } G \in (\Delta)$$

Soit $\vec{n}_R(1; 3; 6)$ un vecteur normal à (R) et $\vec{n}_{R'}(-2; 4; 1)$ un vecteur normal à (R')

$\vec{n}_R \wedge \vec{n}_{R'}(-21; -13; 10)$ donc un vecteur directeur de (Δ)

est $\vec{u}(-21; -13; 10)$ alors

$$(\Delta) : \begin{cases} x = \frac{1}{2} - 21t \\ y = 1 - 13t ; (t \in \mathbb{R}) \\ z = \frac{3}{4} + 10t \end{cases}$$

e- Calculons la distance de chacun des pots de fleurs à la tige (Δ)

ces distances sont : $d(P, (\Delta))$ et $d(Q, (\Delta))$

$$d(P, (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{PG} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$\overrightarrow{PG}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right) \text{ et } \overrightarrow{PG} \wedge \vec{u}\left(-\frac{1}{12}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$$

$$\|\overrightarrow{PG} \wedge \vec{u}\| = \frac{\sqrt{46}}{12} \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{710} \text{ on trouve}$$

$$d(P, (\Delta)) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{23}{355}} \text{ u.l}$$

$$d(Q, (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{QG} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$\overrightarrow{QG}\left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{4}\right) \text{ et } \overrightarrow{QG} \wedge \vec{u}\left(-\frac{41}{12}; -\frac{41}{4}; -\frac{123}{6}\right)$$

$$\|\overrightarrow{QG} \wedge \vec{u}\| = \frac{\sqrt{77326}}{12} \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{710} \text{ on trouve}$$

$$d(Q, (\Delta)) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{38663}{355}} \text{ u.l}$$

Problème 3 :

8°) a- Démontrons que $D = [-1; +\infty[$

$$* \text{ Soit } D_1 = \left\{ x \in]-\infty; 0] / x + 1 \geq 0 \right\}$$

$$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1; +\infty[\text{ donc } D_1 =]-\infty; 0] \cap [-1; +\infty[= [-1; 0]$$

$$D_2 = \left\{ x \in]0; +\infty[/ x > 0 \right\}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0 \text{ donc } D_2 =]0; +\infty[\text{ on a :}$$

$$D = D_1 \cup D_2 \text{ d'où } D = [-1; +\infty[$$

Calculons la limite de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \ln x) + 1$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2 \ln x) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$$

b- Etudions la continuité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \ln x) + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} x^2 - x^2 \ln x + 1$$

$$= 1 \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ alors}$$

f est continue en 0.

c- Etudions la dérivabilité de f en 0.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)\sqrt{x+1} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)^3 - 1}{x[(x+1)\sqrt{x+1} + 1]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x[(x+1)^2 + x + 2]}{x[(x+1)\sqrt{x+1} + 1]} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)^2 + x + 2}{(x+1)\sqrt{x+1} + 1} \\ &= \frac{3}{2} \text{ donc } f \text{ est dérivable à gauche en } 0\end{aligned}$$

$$\text{et } f'_g(0) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}x(3 - 2\ln x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{2}x - x \ln x = 0 \text{ donc } f \text{ est}\end{aligned}$$

dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

On a : $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique :

La courbe (Γ) admet en son point d'abscisse 0 deux demi-tangentes définies par :

$$\text{A gauche en 0 on a : } \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ et à droite en 0 on a : } \begin{cases} y = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

9°) *Démontrons que f_1 est dérivable en -1

$$\forall x \in [-1; 0]; f_1(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$$

$$f_1(-1) = 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f_1(x) - f_1(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} \\ &= 0 \text{ donc } f_1 \text{ est dérivable à droite en}\end{aligned}$$

-1 et $f'_1(-1) = 0$.

*Démontrons que f_1 réalise une bijection de $[-1; 0]$ sur J

f_1 est dérivable sur $[-1; 0]$ et $\forall x \in [-1; 0]$,

$$\begin{aligned}f'_1(x) &= \sqrt{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x+1) \\ &= \frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+1}}\end{aligned}$$

$\forall x \in]-1; 0]$, $f'_1(x) > 0$ et $f'_1(-1) = 0$ (d'après la question précédente) donc f_1 est continue et strictement croissante sur $[-1; 0]$ et $f_1([-1; 0]) = [f_1(-1); f_1(0)] = [0; 1]$

D'où f_1 réalise une bijection de $[-1; 0]$ sur $J = [0; 1]$

b- Déterminons u^{-1}

$$u^{-1}: [0; 1] \rightarrow [-1; 0]$$

Soit $x \in [0; 1]$ et $y \in [-1; 0]$

Posons $u^{-1}(x) = y$

$$u^{-1}(x) = y \Leftrightarrow u(y) = x$$

$$\Leftrightarrow (y+1)\sqrt{y+1} = x$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^3 = x^2$$

$$\Leftrightarrow y+1 = \sqrt[3]{x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = -1 + x^{\frac{2}{3}} \text{ d'où } \forall x \in [0; 1],$$

$$u^{-1}(x) = -1 + x^{\frac{2}{3}}$$

Ensemble de dérivabilité de u^{-1}

u est dérivable sur $[-1; 0]$ et $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ donc

u^{-1} est dérivable sur $u([-1; 0]) - \{u(-1)\}$ d'où u^{-1} est

dérivable sur $]0; 1]$ et $\forall x \in]0; 1]$, $(u^{-1})'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

c- Déterminons la primitive de u sur $]-1; 0]$

La fonction $x \mapsto (x+1)\sqrt{x+1}$ est continue sur $]-1; 0]$ donc elle admet de primitives sur $]-1; 0]$.

$$\forall x \in]-1; 0], u(x) = (x+1)(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$u(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}} \text{ soit } U \text{ cette primitive :}$$

$$\begin{aligned}U(x) &= \frac{1}{\frac{3}{2}+1}(x+1)^{\frac{3}{2}+1} + c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ &= \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + c\end{aligned}$$

$$\text{On a : } U\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \Rightarrow \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + c = 5 \text{ on trouve}$$

$$c = \frac{100 - 9\sqrt{6}}{20} \text{ d'où } U(x) = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{100 - 9\sqrt{6}}{20}$$

10°) a- Démontrons que $\forall x \in]0; +\infty[$;

$$f_2'(x) = 2x(1 - 2 \ln x)$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f_2(x) = \frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \ln x) + 1$$

f_2 est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$;

$$f_2'(x) = x(3 - 2 \ln x) - \frac{2}{x} \left(\frac{1}{2} x^2 \right)$$

$$= 3x - 2x \ln x - x$$

$$= 2x - 2x \ln x$$

d'où $\forall x \in]0; +\infty[, f_2'(x) = 2x(1 - 2 \ln x)$

b- Signe de $f_2'(x)$

Son signe est celui de $(1 - 2 \ln x)$ car $\forall x \in]0; +\infty[, 2x > 0$

Posons $1 - \ln x \leq 0$

$$1 - \ln x \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]0; +\infty[\\ x \in [e; +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in [e; +\infty[$$

On déduit : $1 - \ln x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [e; +\infty[$

$$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; e[$$

Alors $\forall x \in]0; e[, f_2'(x) > 0$

$$\forall x \in [e; +\infty[, f_2'(x) < 0 \text{ et } f_2'(e) = 0$$

c- Dressons le tableau de variations de f

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 0[\cup]0; e[$$

On a : $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [e; +\infty[$ donc f est

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; e\}$$

strictement croissante sur $[-1; e]$ et sur et strictement

décroissante sur $[e; +\infty[$

Tableau de variation de f

x	-1	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	+	-
$f(x)$	0	1	$\frac{e^2}{2} + 1$	$-\infty$

11°) a- Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[4; +\infty[$

f est continue et strictement décroissante sur $]4; +\infty[$

(car $]4; +\infty[\subset [e; +\infty[$) et $f(4; +\infty) =$

$$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(4) \right[$$

$$=]-\infty; 25 - 32 \ln 2[\text{ or }$$

$0 \in]-\infty; 25 - 32 \ln 2[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]4; +\infty[$

Donnons une valeur approchée 0,1 près de α

On trouve : $[4,7; 4,8] \subset]4; +\infty[$ et $\begin{cases} f(4,6) = 0,403 > 0 \\ f(4,7) = -0,013 < 0 \end{cases}$

d'où $\alpha \approx 4,7$

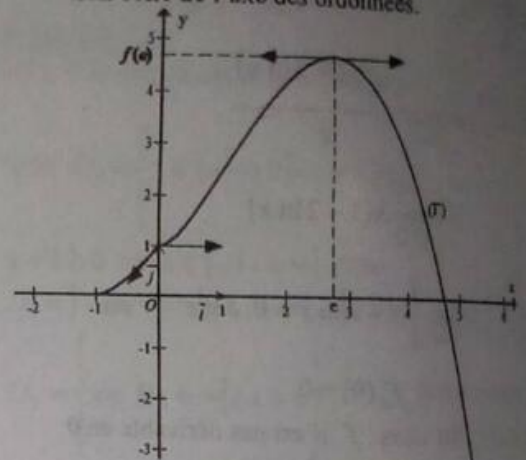
b- Faisons le dessin de l'itinéraire dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

l'itinéraire est la portion de la courbe (Γ)

Branche infinie de (Γ)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x(3 - 2 \ln x) + \frac{1}{x} = -\infty$ donc la courbe (Γ) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.



CORRIGE TYPE DE LA SE N° 05

Problème 1 :

1- Ecrivons a_0^{2012} sous forme algébrique

$$a_0 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$a_0^{2012} = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}} \right)^{2012}$$

$$= 2^{2012} e^{i\frac{5\pi \times 2012}{6}}$$

$$= 2^{2012} e^{i\frac{5\pi \times 1006}{3}}$$

$$= 2^{2012} e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 2^{2012} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= 2^{2012} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ d'où }$$

$$a_0^{2012} = 2^{2011} (-1 + i\sqrt{3})$$

2- a) Déterminons l'affixe a_1 du point A_1

$$s: z' = 3e^{i\frac{\pi}{3}}z \Leftrightarrow z' = 3iz$$

$$a_0 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$s(A_0) = A_1 \Leftrightarrow a_1 = 3ia_0 \\ \Leftrightarrow a_1 = 3i(-\sqrt{3} + i) \text{ d'où}$$

$$a_1 = -3 - 3i\sqrt{3}$$

b) Précise la nature du triangle OA_0A_1

s est la similitude plane directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et

$s(A_0) = A_1$, donc le triangle OA_0A_1 est rectangle en O .

c) Déterminons une équation cartésienne de l'image (C') par s du cercle circonscrit au triangle OA_0A_1

Le cercle circonscrit au triangle OA_0A_1 est le cercle de diamètre $[A_0A_1]$

$$\text{Soit } I \text{ le milieu de } [A_0A_1], \quad z_I = \frac{a_0 + a_1}{2} \Rightarrow$$

$$z_I = -\frac{\sqrt{3}+3}{2} + i\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Le rayon } r \text{ du cercle est : } r = \frac{A_0A_1}{2}$$

$$r = \frac{A_0A_1}{2} = \frac{\sqrt{(-3+\sqrt{3})^2 + (-3\sqrt{3}-1)^2}}{2}$$

$$\text{on trouve } r = \sqrt{10}$$

$I' = s(I)$ est le centre de (C')

$r = 3r$ est le rayon de (C')

$$z_{I'} = 3iz_I$$

$$z_{I'} = 3i\left(\frac{-\sqrt{3}-3 + i(1-3\sqrt{3})}{2}\right) \quad \text{on trouve}$$

$$z_{I'} = \frac{9\sqrt{3}-3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}+9}{2}$$

$$r' = 3\sqrt{10} \text{ d'où}$$

$$(C'): \left(x - \frac{9\sqrt{3}-3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3\sqrt{3}+9}{2}\right)^2 = 90$$

Problème 2 :

3. a) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (1) $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^5 + i = 0 \Leftrightarrow z^5 = -i$$

$$|-i| = 1; \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]. \text{ Soit } z_k, \text{ les racines n}$$

ème; on a : $z_k = \sqrt[5]{1} e^{i\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{2k\pi}{5}\right)}$ avec $k \in \{0;1;2;3;4\}$ alors

$$z_0 = e^{-i\frac{\pi}{10}}; z_1 = e^{i\frac{3\pi}{10}}; z_2 = e^{i\frac{7\pi}{10}}; z_3 = e^{i\frac{11\pi}{10}} \text{ et}$$

$$z_4 = e^{i\frac{15\pi}{10}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

$$\text{D'où } S_C = \left\{ e^{-i\frac{\pi}{10}}, e^{i\frac{3\pi}{10}}, e^{i\frac{7\pi}{10}}, e^{i\frac{11\pi}{10}}, -i \right\}$$

b) Justifions que

$$P(z) = (z+i)(z^4 - iz^3 - z^2 + iz + 1)$$

$$(z+i)(z^4 - iz^3 + z^2 + iz + 1) =$$

$$z^5 - iz^4 - z^3 + iz^2 + z + iz^4 + z^3 - iz^2 - z + i$$

$$= z^5 - iz^4 + iz^4 - z^3 + z^3 + iz^2 - iz^2 + z - z + i$$

$$= z^5 + i, \text{ d'où}$$

$$P(z) = (z+i)(z^4 - iz^3 - z^2 + iz + 1)$$

4. a) Justifions que $(E) \Leftrightarrow (E')$

z est solution de $(E) \Leftrightarrow z^4 - iz^3 - z^2 + iz + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 \left(z^2 - iz - 1 + \frac{i}{z} + \frac{1}{z^2} \right) = 0$$

(car 0 n'est pas solution de (E))

$$\Leftrightarrow \left(z^2 + \frac{1}{z^2} - i \left(z - \frac{1}{z} \right) - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow z \text{ solution de}$$

(E') d'où (E) et (E') sont équivalentes

b) Démontrons que z est solution de $(E') \Leftrightarrow (2)$:

$$u^2 - iu + 1 = 0$$

$$u = z - \frac{1}{z}, \quad u \text{ solution de } (2)$$

$$\Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 - i \left(z - \frac{1}{z} \right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2 + \frac{1}{z^2} - i \left(z - \frac{1}{z} \right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} - i \left(z - \frac{1}{z} \right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z \text{ solution de } (E')$$

c) Résolvons l'équation (2)

$$(2): u^2 - iu + 1 = 0$$

$$\Delta = (-i)^2 - 4 = -5 = (i\sqrt{5})^2 \text{ on a : } u_1 = \frac{i(1-\sqrt{5})}{2};$$

$$u_2 = \frac{i(1+\sqrt{5})}{2}$$

Déduisons les solutions de (E)

$$u = z - \frac{1}{z} = \frac{z^2 - 1}{z} \Leftrightarrow z^2 - 1 = uz$$

$$\Leftrightarrow z^2 - uz - 1 = 0 \quad \Delta = u^2 + 4$$

Pour $u = u_1$; on trouve $\Delta = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}$ et

$$z_1' = \frac{u_1 - \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}}}{2} ; z_2' = \frac{u_1 + \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}}}{2}$$

Les opérations permettent de trouver

$$z_1' = \frac{-\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} + \frac{1 - \sqrt{5}}{4}i ;$$

$$z_2' = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} + \frac{1 - \sqrt{5}}{4}i$$

Pour $u = u_2$; on trouve $\Delta = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}$ et

$$z_3' = \frac{u_2 - \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}}}{2} ; z_4' = \frac{u_2 + \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}}}{2}$$

Les opérations permettent de trouver :

$$z_3' = -\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} + i\frac{1 + \sqrt{5}}{4} ;$$

$$z_4' = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} + i\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$S_c = \{z_1', z_2', z_3', z_4'\}$$

d) Retrouvons la forme algébrique de chacune des solutions de (1)

$$z_0 = e^{-i\frac{\pi}{10}}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) > 0 \text{ et } \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_0) > 0 \text{ et}$$

$$\operatorname{Im}(z_0) < 0 \Leftrightarrow z_0 = z_2'$$

$$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{10}}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) > 0 \text{ et } \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1) > 0 \text{ et}$$

$$\operatorname{Im}(z_1) > 0 \Leftrightarrow z_1 = z_4'$$

$$z_2 = e^{i\frac{7\pi}{10}}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) < 0 \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{10}\right) > 0 \Leftrightarrow z_2 = z_3'$$

On déduit que $z_3 = z_1'$

e) Déduisons les valeurs exactes de :

$$\cos\frac{\pi}{10} = \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{10} = -\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \operatorname{Re}(z_4') \Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \operatorname{Im}(z_4') \Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} \text{ donc } \cos\frac{\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin\frac{\pi}{5} = \cos\frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow$$

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}, \text{ donc } \cos\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{10} \Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \text{ et } \sin\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow$$

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

Problème 3 :

Partie A :

5- a) développement limité d'ordre en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(1+x)$$

Utilise la formule et tu trouve :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \text{ avec}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

b) Etudions la continuité de f en 0

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}, \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \right)}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x - x\varepsilon(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x - x\varepsilon(x) \right) = \frac{1}{2}$$

Preuves « LA PASSION DES MATHS »

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ d'où f est continue en 0.

b) Etudions la dérivabilité en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ donc } f \text{ est dérivable à gauche en 0.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x - x\epsilon(x) - \frac{1}{2}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{3} - \epsilon(x) \right) = -\frac{1}{3} \quad \text{car}$$

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon = 0$, donc f est dérivable à droite en 0.

D'où f n'est pas dérivable en 0 car $f'_g(0) \neq f'_d(0)$

Interprétation

(Γ) admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0 d'équations :

$$(T_g) : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} ; (T_d) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

6- a) Etudions le sens de variation de h

$$h : x \mapsto \frac{-x^2 - 2x}{1+x} + 2 \ln(1+x)$$

$$D_h =]-1; +\infty[$$

h est continue et dérivable sur D_h comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in D_h$,

$$h'(x) = \frac{(-2x-2)(1+x) - (-x^2-2x)}{(1+x)^2} + 2 \times \frac{1}{1+x}, \quad \text{on}$$

$$\text{trouve } h'(x) = \frac{-x^2}{(1+x)^2}$$

$$\forall x \in]-1; +\infty[, (1+x)^2 > 0 \text{ alors}$$

$$\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[, h'(x) < 0 \text{ et}$$

$h'(0) = 0$ donc h est strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$

b) Calculons $h(0)$ et déduisons le signe de $h(x)$

$$h(0) = 0$$

h est continue et strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$.

Donc on a :

$$\forall x \in]-1; 0[, h(x) > 0 \text{ et } \forall x \in]0; +\infty[, h(x) < 0$$

7- a) Déterminons la dérivée $f'(x)$

f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ comme somme de fonctions dérivables et sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables

$$\forall x \in]-\infty; 0[: f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

$$\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{1+x} \right) x^2 - 2x \ln(1+x)}{x^4}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{x+1} - 2x + 2 \ln(1+x)}{x^3}$$

$$= \frac{-x^2 - 2x}{x+1} + 2 \ln(1+x) \quad \text{d'où } f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$$

b) sens de variation et tableau de variation de f

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) < 0. \text{ D'après 6-a)}$$

f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{(1+x)} \times \frac{(1+x)}{x^2} \right] = 0 \quad \text{car} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x^2} = 0 \end{cases}$$

Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	0

c- Démontrons que $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $-1,5 < \alpha < -1$

Correction des évaluations

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et $0 \in f(]-\infty; 0])$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty; 0]$.

De plus $0 \notin f([0; +\infty[)$ donc l'équation $f(x) = 0$, n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (-1,5) &= \frac{-3}{2}e^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \approx -0,27 \\ (-1) &= -e^{-1} + \frac{1}{2} \approx 0,13 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow -1,5 < \alpha < -1$$

d) Démontrons que (D) : $y = x + \frac{3}{2}$ est asymptote à (Γ) en $-\infty$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= xe^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2} - x - \frac{3}{2} \\ &= x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - 1 \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{3}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = 0$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{cases}$$

D'où la droite d'équation (D) : $y = x + \frac{3}{2}$ est asymptote à

(Γ) en $-\infty$

Partie B :

8- a) Démontrons que g est bijective

f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc la fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow f(\mathbb{R}_+)$

$x \mapsto g(x) = f(x)$ est bijective.

b) Précisons l'ensemble de définition J et l'ensemble de dérivabilité E de g^{-1}

$$J = f(\mathbb{R}_+) = \left] 0; \frac{1}{2} \right]$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable sur $f(\mathbb{R}_+)$ et l'ensemble de dérivabilité

c) Démontrons que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique a telle que $0,35 < a < 0,4$

Posons $k(x) = g(x) - x$ et $k(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$

k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables donc : $k'(x) = g'(x) - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*; g'(x) < 0$ donc $k'(x) < 0$ d'où k est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$k([0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x); k(0) \right] = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right];$$

$0 \in k([0; +\infty[)$ donc l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique a

$$\begin{aligned} k(0,35) &= 0,057 \\ k(0,4) &= -0,0029 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow 0,35 < a < 0,4$$

d) Calculons $(g^{-1})'(a)$

$$(g^{-1})'(a) = \frac{1}{g'(g^{-1}(a))} \text{ or } g(a) = a \text{ donc } g^{-1}(a) = a$$

$$g'(a) = \frac{h(a)}{a^3} \text{ et } h(a) = \frac{-a^2 - 2a}{1+a} + 2 \ln(1+a)$$

$$f(a) = a \Leftrightarrow \frac{a - \ln(1+a)}{a^2} = a$$

$$\Leftrightarrow a - \ln(1+a) = a^3$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+a) = -a^3 + a$$

$$\text{Donc } h(a) = \frac{-a^3 - 2a}{1+a} + 2(-a^3 + a)$$

$$= \frac{-a^2 - 2a + 2(-a^3 + a)(1+a)}{1+a}$$

$$= \frac{-a^2 - 2a - 2a^3 - 2a^4 + 2a + 2a^2}{1+a} \text{ on trouve}$$

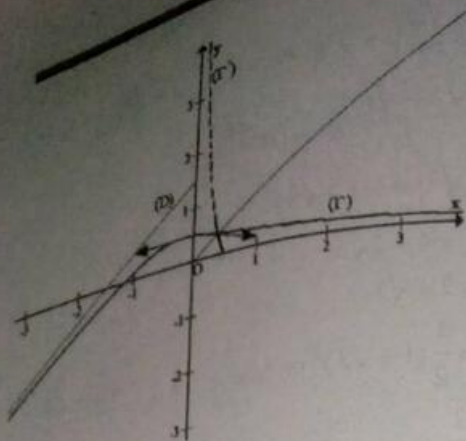
$$h(a) = \frac{a^2(-2a^2 - 2a + 1)}{1+a}$$

$$g'(a) = \frac{a^2(-2a^2 - 2a + 1)}{(1+a)a^3} = \frac{-2a^2 - 2a + 1}{a(1+a)} \text{ donc}$$

$$(g^{-1})'(a) = \frac{a(1+a)}{-2a^2 - 2a + 1}$$

9- Construisons les trajectoires des deux projectiles particuliers

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote en $+\infty$



CORRIGE TYPE DE LA SE N° 06

Problème 1:

1°) a- Déterminons les coordonnées du point K
K étant le milieu du segment [BE] alors on trouve
 $K(-1; 2; 3)$.

b- Justifions que (Δ) est une droite dont nous
présenterons un repère

Soit M un point de l'espace

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \wedge (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \wedge (2\overrightarrow{MK}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \wedge (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \text{ posons } \vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

donc $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ alors (Δ) est une droite
passant par K et dirigé par $\vec{u}$

$\overrightarrow{AB}(2; 1; 0)$; $\overrightarrow{AC}(4; 0; -1)$ donc $\vec{u}(6; 1; -1)$ d'où un
repère de (Δ) est: $(K; \vec{u})$

2°) a- Justifions que A, B et C définissent un plan (P)

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-1; 2; -4)$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc A, B et C ne
sont pas alignés par suite A, B et C définissent un plan (P)

Un vecteur normal au plan (P) est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ donc
l'équation cartésienne de (P) est sous la forme de
 $-x + 2y - 4z + d = 0$ (avec $d \in \mathbb{R}$)

$$C \in (P) \Rightarrow d = 2 \text{ d'où}$$

$$(P): -x + 2y - 4z + 2 = 0$$

c- Déterminons les réels a et b

$$\overrightarrow{CD}(a-2; b; 4)$$

C'est le projeté orthogonale de D sur (P) alors $\begin{cases} \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-2) + b = 0 \\ 4(a-2) - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \text{ donc } D(3; -2; 4)$$

$$\text{avec } a = 3 \text{ et } b = -2$$

d- Calculons le volume du tétraèdre ABCD
le volume:

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|_{u.v} : \overrightarrow{AD}(5; -2; 3);$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-1; 2; -4)$$

$$V = \frac{1}{6} |-5 - 4 - 12|_{u.v}$$

$$V = \frac{21}{6} (10m)^3 \text{ d'où } V = 3500m^3$$

3°) a- Justifions que (Δ) est strictement parallèle au plan (P)
Un vecteur directeur de la droite (Δ) est le vecteur

$$\vec{u}(6; 1; -1) \text{ et un vecteur normal au plan (P) est le vecteur}$$

$$\vec{n}(-1; 2; -4)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 6 \times (-1) + 1 \times 2 + (-1) \times (-4) = -6 + 2 + 4 = 0 \Rightarrow (\Delta) \parallel (P) \text{ (a)}$$

$$K(-1; 2; 3) \in (\Delta), \text{ voyons si } K \in (P)$$

$$-x_K + 2y_K - 4z_K + 2 = 2 + 4 - 12 \neq 0 \text{ donc } K \notin (P) \text{ (b)}$$

(a) et (b) $\Rightarrow (\Delta)$ et (P) sont strictement parallèles

b- Calculons $d(A, (\Delta))$

$$d(A, (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{AK} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ u.l; } \overrightarrow{AK}(1; 2; 2) \text{ et}$$

$$\overrightarrow{AK} \wedge \vec{u}(-4; 13; -11) \text{ et on trouve}$$

$$d(A, (\Delta)) = \frac{30\sqrt{323}}{19} m$$

Problème 2:

$$4^\circ) \text{ calculons } (3\sqrt{3} - i)^2 \text{ et } \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})^2$$

$$(3\sqrt{3} - i)^2 = 26 - 6\sqrt{3}i$$

$$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})^2 = 2 + \sqrt{3}$$

5°) a- Démontrons que (E) admet dans $\mathbb{C}$ une solution
imaginaire pur: z_0

$$\text{Soit } z_0 = iy, y \in \mathbb{R}^*$$

$$z_0 \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow$$

$$(iy)^3 + (\sqrt{3} - 2i)(iy)^2 + (-5 + i\sqrt{3})(iy) - 8i = 0$$

$$\Rightarrow -y^2\sqrt{3} - y\sqrt{3} + i(-y^3 + 2y^2 - 5y - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2\sqrt{3} - y\sqrt{3} = 0 \\ -y^3 + 2y^2 - 5y - 8 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow -y\sqrt{3}(y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = -1 \text{ or } y \neq 0 \text{ vérifions donc } y = -1$$

$$\text{dans (2)}$$

$$-(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 8 = 1 + 2 + 5 - 8 = 0$$

donc $z_0 = -i$ est la solution imaginaire pur de (E)

Correction des évaluations

b. *Résolvons (E)

Soit : $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - 2i)z^2 + (-5 + i\sqrt{3})z - 8i$

$P(-i) = 0$ donc $p(Z) = (z+i)(az^2 + bz + c)$ avec $(a; b; c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$

On a : $P(z) = az^3 + (b+ai)z^2 + (c+bi)z + ci$ et par

identification on obtient :
$$\begin{cases} a=1 \\ b=\sqrt{3}-3i \text{ donc} \\ c=-8 \end{cases}$$

$$P(z) = (z+i)[z^2 + (\sqrt{3}-3i)z - 8]$$

$$(E) \Leftrightarrow z+i=0 \text{ ou } z^2 + (\sqrt{3}-3i)z - 8=0$$

$$\Leftrightarrow z=-i \text{ ou } z^2 + (\sqrt{3}-3i)z - 8=0$$

Réolvons l'équation : $z^2 + (\sqrt{3}-3i)z - 8=0$

$$\text{Son discriminant } \Delta = (\sqrt{3}-3i)^2 - 4(1)(-8)$$

$$= 26 - 6\sqrt{3}i = (3\sqrt{3}-i)^2$$

$$z^2 + (\sqrt{3}-3i)z - 8=0 \Leftrightarrow z = -2\sqrt{3} + 2i \text{ ou } z = \sqrt{3} + i$$

D'où les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont : $-i$;

$$-2\sqrt{3} + 2i \text{ et } \sqrt{3} + i$$

$$\text{Et on a : } z_0 = -i ; z_1 = \sqrt{3} + i ; z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$$

* Forme exponentielle de z_2

$$\text{On trouve : } z_2 = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

c-Déterminons forme exponentielle et algébrique de l'équation $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$

$$z^2 = -2\sqrt{3} + 2i \Leftrightarrow z^2 = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{5\pi}{12}} \text{ ou } z = -2e^{i\frac{5\pi}{12}} = 2e^{i\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right)}$$

alors les solutions sous forme exponentielle de l'équation

$$z^2 = -2\sqrt{3} + 2i \text{ sont : } 2e^{i\frac{5\pi}{12}} \text{ et } 2e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

Posons $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ une racine carrée de

$$-2\sqrt{3} + 2i \text{ alors on a : } z^2 = -2\sqrt{3} + 2i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 & \oplus \\ a^2 - b^2 = -2\sqrt{3} & \otimes \\ 2ab = 2 \end{cases}$$

$$\oplus + \otimes \Rightarrow 2a^2 = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{2}|1 - \sqrt{3}| \text{ ou } a = \frac{\sqrt{2}}{2}|1 - \sqrt{3}|$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \text{ ou } a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

Remarque : $|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3})$

$$\oplus - \otimes \Rightarrow 2b^2 = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})^2 \text{ on trouve : } b = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ou } b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$ab > 0$ alors les solutions sous forme algébrique de

$$\text{l'équation } z^2 = -2\sqrt{3} + 2i \text{ sont : } \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$; \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

d- Dédudons-en les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et

$$\sin \frac{5\pi}{12}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} > 0 \text{ et } \sin \frac{5\pi}{12} > 0 \text{ alors}$$

$$2e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i\sin \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \\ 2\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

6°) a- Calculons le module et un argument du quotient

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = i\sqrt{3} \text{ donc } \left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = \sqrt{3} \text{ et}$$

$$\arg \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b- Dédudons-en la nature du triangle $M_0M_1M_2$.
De ce qui précède le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle en M_1 .

c- Donnons une équations cartésienne de (C)

(C) est le cercle circonscrit au triangle $M_0M_1M_2$ rectangle en M_0 donc (C) a pour centre I d'affixe

$$z_I = \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{2} \text{ et pour rayon}$$

$$R = \frac{M_1M_2}{2} = \frac{|\gamma - \beta|}{2} = \sqrt{7} \text{ d'où}$$

$$(C) : \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 7$$

7°) Calculons l'aire en m^2 , l'aire de la piste du jeu.

Soit A cette aire

$$A = \text{l'aire du cercle (C)} ; \text{ donc } A = \pi R^2 u.a$$

$$\text{Avec } u.a = (4m)^2 \text{ on trouve : } A = 112\pi m^2$$

Problème 3 :

8°) a- Etudions les variations de g et dressons son tableau de variation :

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^x + 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x + 1 = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)e^x + 1] = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions continue et dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de x .

Ainsi, $\forall x \in]-\infty; 0[$, $g'(x) < 0$ et donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) > 0$ et donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

b- Dédudions-en le signe de $g(x)$

g admet 0 pour minimum sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$ et $g(0) = 0$

9°) Déterminons l'ensemble de définition de f

Soit D_f l'ensemble de définition de f

$$D_f = \left\{ x \in]-\infty; 0[/ x \neq 0 \right\} \cup \left\{ x \in [0; +\infty[/ x+1 > 0 \right\}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, x \neq 0 \text{ et } \forall x \in [0; +\infty[, x+1 > 0 \text{ donc}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

10°) a- Donnons le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

b- Etudions la continuité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(x+1)] = 1 \text{ et } f(0) = 1$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0

c- Etudions la dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon(x) \right) = \frac{1}{2} \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$$

donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(x+1) - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$ on a :

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique :

(C) admet deux demi-tangente en son point d'abscisse 0 définie par :

À gauche en 0 on a : $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$ et à droite en 0 on a :

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

11°) Etudions les variations de f

Limite aux de D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0 \text{ car : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + \ln(x+1)] = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

Dérivée

La fonction $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est dérivable sur $] -\infty ; 0[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $] -\infty ; 0[$

La fonction $x \mapsto 1 + \ln(x+1)$ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme composée et somme de fonction dérivables sur $[0 ; +\infty[$

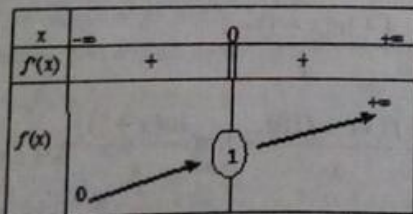
$$\forall x \in] -\infty ; 0[, f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$$

$$\forall x \in] -\infty ; 0[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\forall x \in [0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

Sens de variation de f

$\forall x \in] -\infty ; 0[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $] -\infty ; 0[$ et $\forall x \in [0 ; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$



12°) a- Démontrons que $\forall x \in [2; 3], 2 \leq f(x) \leq 3$ et

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$$

f est continue et strictement croissante sur $[2; 3]$ donc $f([2; 3]) = [f(2); f(3)] = [1 + \ln 3; 1 + \ln 4] \subset [2; 3]$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall x \in [2; 3]; 2 \leq f(x) \leq 3 \\ \forall x \in [2; 3], 2 \leq x \leq 3 \\ \Rightarrow 3 \leq 1 + x \leq 4 \\ \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3} \\ \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b- Démontrons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[2; 3]$ et

$$\begin{aligned} \text{que } e^\alpha = \alpha e + e \\ f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \\ \Leftrightarrow u(x) = 0 \text{ avec } u(x) = f(x) - x \end{aligned}$$

u est dérivable sur $[2; 3]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[2; 3]$.

$$\forall x \in [2; 3], u'(x) = f'(x) - 1 < 0 \text{ car } f'(x) < \frac{1}{3}$$

Donc u est continue et strictement décroissante sur $[2; 3]$,

$$\begin{aligned} u([2; 3]) &= [u(3); u(2)] \\ &= [-2 + \ln 4; -1 + \ln 3] \end{aligned}$$

Or $0 \in [-2 + \ln 4; -1 + \ln 3]$ donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[2; 3]$. D'où l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[2; 3]$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(\alpha) = \alpha &\Rightarrow 1 + \ln(\alpha + 1) = \alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha - 1 = \ln(\alpha + 1) \\ &\Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \alpha + 1 \text{ d'où } e^\alpha = \alpha e + e \end{aligned}$$

c- Démontrons que $\forall x \in [2; 3], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$

f est dérivable sur $[2; 3]$ et $\forall x \in [2; 3], |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$ donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis appliqué à f sur $[2; 3]$ on a :

$$\forall x \in [2; 3], \alpha \in [2; 3];$$

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha| \text{ or } f(\alpha) = \alpha \text{ d'où } \forall x \in [2; 3],$$

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$$

13°) Etudions les branches infinies à $(\mathcal{C})$

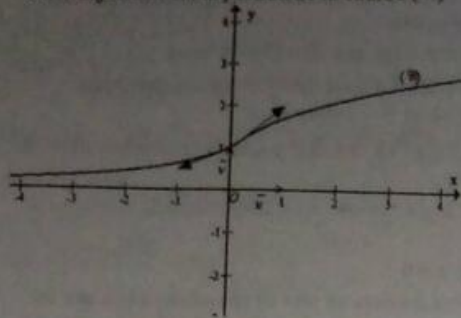
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(x+1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{x+1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} \\ &= 0 \text{ donc la courbe } (\mathcal{C}) \text{ admet une} \end{aligned}$$

branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses

14°) Construisons la trajectoire suivie par l'engin du fils de Dotou.

Cette trajectoire est la portion de la courbe (?)



CORRIGE TYPE DE LA SE N° 07

Problème 1 :

1°) a- Justifions que $1 + e^{i\frac{\pi}{5}} = \left(2 \cos \frac{\pi}{10}\right) e^{i\frac{\pi}{10}}$

$$\text{On a : } \cos \frac{\pi}{10} = \frac{e^{i\frac{\pi}{10}} + e^{-i\frac{\pi}{10}}}{2} \text{ alors } 2 \cos \frac{\pi}{10} = \left(e^{i\frac{\pi}{10}} + e^{-i\frac{\pi}{10}}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \left(2 \cos \frac{\pi}{10}\right) e^{i\frac{\pi}{10}} &= \left(e^{i\frac{\pi}{10}} + e^{-i\frac{\pi}{10}}\right) \times e^{i\frac{\pi}{10}} \\ &= e^{i\frac{2\pi}{10}} + e^{i\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{10}\right)} \\ &= e^{i\frac{\pi}{5}} + e^0 = e^{i\frac{\pi}{5}} + 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} = \left(2 \cos \frac{\pi}{10}\right) e^{i\frac{\pi}{10}}$$

b- Dédoublons en le module et un argument de $1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$

$$1 + e^{i\frac{\pi}{5}} = \left(2 \cos \frac{\pi}{10}\right) e^{i\frac{\pi}{10}} = \left(2 \cos \frac{\pi}{10}\right) \left[\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}\right]$$

or $\frac{\pi}{10} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos \frac{\pi}{10} > 0$ par conséquent l'écriture

$\left(2 \cos \frac{\pi}{10}\right) e^{i\frac{\pi}{10}}$ est une forme exponentielle de $1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$ d'où

$$\left|1 + e^{i\frac{\pi}{5}}\right| = \left(2 \cos \frac{\pi}{10}\right) \text{ et } \text{Arg}\left(1 + e^{i\frac{\pi}{5}}\right) = \frac{\pi}{10}$$

c- déduisons-en une forme trigonométrique de

$$\left(1 + e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^n$$

$$\text{on a : } \left|1 + e^{i\frac{\pi}{5}}\right| = 2 \cos \frac{\pi}{10} \text{ alors } \left|\left(1 + e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^n\right| = \left(2 \cos \frac{\pi}{10}\right)^n$$

$$\text{un } \arg\left(1 + e^{i\frac{\pi}{5}}\right) = \frac{\pi}{10} \text{ donc un } \arg\left(1 + e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^n = n \frac{\pi}{10}$$

d'où une forme trigonométrique de

$$\left(1 + e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^n = \left(2 \cos \frac{\pi}{10}\right)^n \left[\cos \frac{n\pi}{10} + i \sin \frac{n\pi}{10}\right]$$

2°) a- Justifions que le nombre de perles du type T_1 est 5.
Le nombre de perles de types T_1 est a et a est la plus petite valeur de n :

$$n \in \mathbb{N} / \left(1 + e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^n \in i\mathbb{R}^*$$

$$\text{On a : } \arg\left(1 + e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^n = \frac{n\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left(1 + e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^n \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{n\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = 5 + 10k, k \in \mathbb{Z}$$

Or $n \in \mathbb{N}$ donc $n = 5 + 10k, k \in \mathbb{N}$

La plus petite valeur de $k \in \mathbb{N}$ est $k = 0$ donc la plus petite valeur de n est 5.

D'où le nombre de perles de type T_1 est $\underline{a = 5}$.

b- Calculons le nombre de perles du type T_2 .

C'est le nombre $b = 6(5)^4 + 3(5)^2 + 4(5) + 1$

$$= 3750 + 75 + 20 + 1 = 3846$$

D'où le nombre de perles de type T_1 est 3846.

Problème 2 :

3°) a- Démontrons que ABCD est un rectangle.

$A(0; 1; -2), B(-1; 0; -1), C(0; -5; -5), D(1; -4; -6)$

On a : $\overrightarrow{AB}(-1; -1; 1); \overrightarrow{DC}(-1; -1; 1)$ et $\overrightarrow{AD}(1; -5; -4)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme. De plus

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (-1) \times (1) + (-1) \times (-5) + (1) \times (-4) = -1 + 5 - 4 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{ donc } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

D'où ABCD est un rectangle.

b- Déterminons une équation cartésienne du plan (ABCD).

Un vecteur normal de ce plan est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

Or $\overrightarrow{AB}(-1; -1; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(0; -6; -3)$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 9\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ on peut prendre $\vec{n} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Une équation cartésienne de (ABCD) est $3x - y + 2z + d = 0$

avec $d \in \mathbb{R}$.

$$A(0; 1; -2) \in (ABCD) \Rightarrow -1 - 4 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = 5$$

$$\text{D'où } (ABCD) : 3x - y + 2z + 5 = 0.$$

4°) a- Détermine suivant les valeurs des réels α et β les triplets $(x; y; z)$ solution du système (Σ) .

$$(\Sigma): \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+z=4 \\ 4x+9y+\alpha z=2\beta \end{cases}$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -y+z=-2 \\ -5y+(4-\alpha)z=4-2\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -y+z=-2 \\ (-1-\alpha)z=14-2\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 & (L_1) \\ -y+z=-2 & (L_2) \\ (1+\alpha)z=2\beta-14 & (L_3) \end{cases}$$

1^{er} cas : $1+\alpha=0$ et $2\beta-14 \neq 0$

Soit $\alpha=-1$ et $\beta \neq 7$.

$(L_3) \Leftrightarrow 0=2\beta-14$ et $2\beta-14 \neq 0$ donc (L_3) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ d'où (Σ) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^3$.

L'ensemble des solutions de (Σ) est $S_1 = \emptyset$.

2^e cas : $\alpha=-1$ et $\beta=7$

Alors $(L_3) \Leftrightarrow 0z=0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

$$(L_2) \Leftrightarrow y=2+z$$

$$(L_1) \Leftrightarrow x=-2-z-z+1=-1-2z$$

D'où l'ensemble solutions dans $\mathbb{R}^3$ pour 2^e cas est :

$$S_2 = \{(-1-2z; 2+z; z), z \in \mathbb{R}\}$$

3^e cas : $\alpha \neq -1$ alors $\alpha+1 \neq 0$ et on a :

$$(L_3) \Leftrightarrow z = \frac{2\beta-14}{\alpha+1}$$

$$(L_2) \Leftrightarrow y = 2+z = 2 + \frac{2\beta-14}{\alpha+1} = \frac{2\alpha+2\beta-12}{\alpha+1}$$

$$(L_1) \Leftrightarrow x = 1-y-z = 1 - \frac{2\alpha+2\beta-12}{\alpha+1} - \frac{2\beta-14}{\alpha+1} = \frac{-\alpha-4\beta+27}{\alpha+1}$$

D'où l'ensemble solution pour le 3^e cas est :

$$S_3 = \left\{ \left(\frac{-\alpha-4\beta+27}{\alpha+1}; \frac{2\alpha+2\beta-12}{\alpha+1}; \frac{2\beta-14}{\alpha+1} \right) \right\}$$

b- Dédudions-en suivant les valeurs des réels α et β la nature du solide SABCD.

1^{er} cas : $\alpha \neq -1$ alors

$$S \left(\frac{-\alpha-4\beta+27}{\alpha+1}; \frac{2\alpha+2\beta-12}{\alpha+1}; \frac{2\beta-14}{\alpha+1} \right)$$

$$(ABCD) : 3x-y+2z+5=0$$

On a :

$$3 \left(\frac{-\alpha-4\beta+27}{\alpha+1} \right) - \left(\frac{2\alpha+2\beta-12}{\alpha+1} \right) + 2 \left(\frac{2\beta-14}{\alpha+1} \right) + 5 = T$$

$$T = \frac{-5\alpha-10\beta+65}{\alpha+1}$$

$$T=0 \Leftrightarrow -5\alpha-10\beta+65=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha+2\beta-13=0$$

Donc :

• Si $\alpha \neq -1$ et $\alpha+2\beta-13=0$, alors $S \in (ABCD)$, les points S, A, B, C et D sont coplanaires.

• Si $\alpha \neq -1$ et $\alpha+2\beta-13 \neq 0$, alors $S \notin (ABCD)$ donc SABCD est une pyramide.

2^e cas : $\alpha=-1$ et $\beta=7$ alors on a :

$$S(-1-2z; 2+z; z), z \in \mathbb{R} \text{ il y a alors une infinité de } S.$$

$$3x_S - y_S + 2z_S + 5 = -3 - 6z - 2 - z + 2z + 5 = -5z$$

$$-5z=0 \Leftrightarrow z=0 :$$

• Alors il existe un seul de ces points S tel que $S \notin (ABCD)$, c'est le point $S(-1; 2; 0)$ et les points A, B, C et D sont coplanaires.

• Si $z \in \mathbb{R}^*$, $S \in (ABCD)$ et SABCD est une pyramide.

3^e cas : $\alpha=-1$ et $\beta \neq 7$ alors (Σ) n'a pas de solution n'existe pas donc pas de solide SABCD.

5^o) $\alpha=1$ et $\beta=20$

a- Précisons les coordonnées de S puis la nature du solide SABCD.

alors on est dans le cas $\alpha \neq -1$ donc $x_S = \frac{-1-4\beta+27}{\alpha+1}$

$$y_S = \frac{2+40-12}{2} \text{ et } z_S = \frac{40-14}{2} = 13.$$

$$\text{alors } S(-27; 15; 13)$$

$$\text{De } \alpha+2\beta-13=1+40-13=28, \alpha+2\beta-13 \neq 0$$

Donc $S \notin (ABCD)$ d'où SABCD est une pyramide.

b- Calculons la hauteur de ce solide.

Soit h cette hauteur, on a :

$$h = d(S; (ABC)) \text{ u.l}$$

$$\text{Or } S(-27; 15; 13) \text{ et } (ABC) : 3x-y+2z+5=0$$

$$\text{Donc } h = \frac{|3(-27)-15+26+5|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{65}{\sqrt{14}}$$

$$\text{D'où } h = \frac{65\sqrt{14}}{14}$$

Problème 3 :

6^o) Déterminons le domaine de définition D_f de /

On a : $D_f = D_1 \cup D_2$ avec

$$D_1 = \{x \in]-\infty; 0] / -x \geq 0 \text{ et } x+1 \neq 0\} \text{ et}$$

$$D_2 = \{x \in]0; +\infty[/ x > 0\}$$

$$\text{On trouve } D_1 =]-\infty; 0] \setminus \{-1\} \text{ et } D_2 =]0; +\infty[$$

$$\text{Donc } D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

7^o) a- Justifions que f est continue en 0.

$$0 \in D_f \text{ et } f(0) = \frac{2\sqrt{0}}{0+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{-x}}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2$$

Correction des évaluations

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^{\frac{1}{2}} \ln x \right)^2 = 0 \text{ car pour tout } \alpha > 0 \text{ on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ d'où f est continue en 0.

b- Etudions la dérivabilité de f en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{-x}}{x(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x+1} \times \frac{1}{\sqrt{-x}} \\ &= -\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable à gauche} \end{aligned}$$

à gauche en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\ln x)^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = +\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas} \end{aligned}$$

dérivable à droite en 0.

En conclusion f n'est pas dérivable en 0.

c- Interprétation graphique :

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$$

donc (C_f) admet une demi-tangente au point d'abscisse 0

$$\text{définie par : } \begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

8°) a- Dérivée de f sur $]-\infty; 0[\setminus \{-1\}$ et sur $]0; +\infty[$.

On a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[, f'(x) = \frac{2 \left[\frac{-1}{2\sqrt{-x}}(x+1) - \sqrt{-x} \right]}{(x+1)^2} \\ \forall x \in]-\infty; -1[, f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \left(\frac{1}{x} \right) (\ln x)(x) \end{cases}$$

donc on trouve :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[, f'(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2 \sqrt{-x}} \\ \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = (2 + \ln x) \ln x \end{cases}$$

b- Etudions le sens de variation de f .

• Signe de $f'(x)$ sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$
 $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[, (x+1)^2 \sqrt{-x} > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$

Or $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[, x-1 < 0$ donc

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[, f'(x) < 0$

• Signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$; posons $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 + \ln x) = 0 \text{ ou } \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-2} \text{ ou } x = 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x \in]-2; 0[$$

$$\Leftrightarrow x \in]e^{-2}; 1[$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; e^{-2}[\cup]1; +\infty[$$

En résumé on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]e^{-2}; 1[, f'(x) < 0 \\ \forall x \in]0; e^{-2}[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in \{e^{-2}; 1\}, f'(x) = 0 \end{cases}$$

D'où f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$, sur $]-1; 0[$ et sur $[e^{-2}; 1]$

puis f est strictement croissante sur $[0; e^{-2}]$ et sur $[1; +\infty[$.

c- Dressons le tableau de variation de f

Calculons d'abord les limites aux bornes de D_f

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt{-x}}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(-x)}{x+1} \times \frac{1}{\sqrt{-x}} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2\sqrt{-x}}{x+1} = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} 2\sqrt{-x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} x+1 = 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2\sqrt{-x}}{x+1} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} 2\sqrt{-x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 = 0^+ \end{cases}$$

On a : $f(e^{-2}) = 4e^{-2}$ et $f(1) = 0$ d'où le tableau de variation de la fonction f se présente comme suit :

x	$-\infty$	-1	0	e^{-2}	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+	0	+
f	0	$-\infty$	$+\infty$	$4e^{-2}$	0	$+\infty$

d- Equation de la tangente (T) en $x_0 = e$

on a : (T) : $y = f'(e)(x-e) + f(e)$
 $f'(e) = 3$ et $f(e) = e$ d'où (T) : $y = 3x - 2e$.

9°) a- Les branches infinies de (C_f)

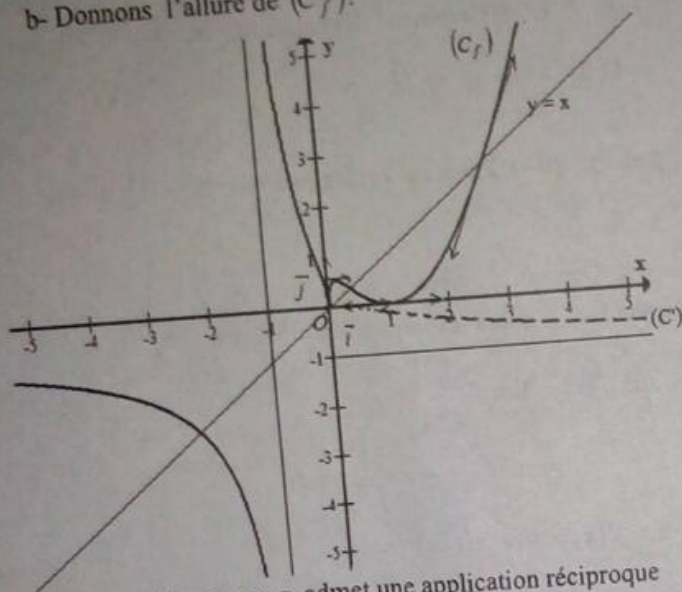
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C_f) .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$ donc (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

b- Donnons l'allure de (C_f) .



10°) a- Justifions que g admet une application réciproque g^{-1} .

g est la restriction de f à l'intervalle $] -1; 0[$ or f est continue et strictement décroissante sur $] -1; 0[$ et $f(]-1; 0[) =]0; +\infty[$ donc g est une bijection par suite g admet une application réciproque g^{-1} .

b- Traçons dans le même repère que (C_f) , la courbe (C') de g^{-1} .
 (C') est symétrique à (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = x$

(Voir figure : courbe en pointillée)

11°) a- Calcule $h'(x)$ et déduisons une primitive de f .
 h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$h'(x) = \left[x(\ln x - 1) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} x^2 \right] \ln x + \frac{1}{x} \left[\frac{1}{2} x^2 (\ln x - 1) \right]$$

$$h'(x) = x(\ln x - 1) \ln x + \frac{1}{2} x \ln x + \frac{1}{2} x (\ln x - 1)$$

$$h'(x) = x(\ln x)^2 - x \ln x + \frac{1}{2} x \ln x + \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{2} x \text{ d'où}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = x(\ln x)^2 - \frac{1}{2} x.$$

On constate que, $\forall x \in]0; +\infty[$ $h'(x) = f(x) - \frac{1}{2} x$

$h'(x) = f(x) - \frac{1}{2} x$ $f(x) = h'(x) + \frac{1}{2} x$ d'où une primitive de f sur $]0; +\infty[$ est la fonction définie par :

$$F(x) = h(x) + \frac{1}{4} x^2.$$

b- Calculons l'aire $A(\lambda)$

on a : $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx$ u.a avec $0 < \lambda < 1$

donc $A(\lambda) = [F(x)]_{\lambda}^1$ u.a d'où on trouve :

$$A(\lambda) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lambda^2 (\ln \lambda - 1) \ln \lambda - \frac{1}{4} \lambda^2 \right) \text{ u.a.}$$

c- Calculons $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda)$

on trouve : $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda) = \frac{1}{4} \text{ u.a.}$

CORRIGE TYPE DE LA SE N°08

Problème 1 :

1°) a- Justifions que le triangle ABC est équilatéral.
Considérons les triangles OAB, OBC et AOC rectangle en O.
D'après la propriété de Pythagore appliquée :
au triangle OAB ; on a :

$$AC^2 = AO^2 + OC^2 \quad \text{or} \quad AO = OC \quad \text{alors on a :}$$

$$AC^2 = 2OA^2$$

De même on a : $AB^2 = 2OA^2$; $BC^2 = 2OA^2$

De ce qui précède $AB = AC = BC$ d'où le triangle ABC est équilatéral

b- Justifions que le quadruplet

$\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé direct.

$$\|\vec{i}\| = \frac{1}{2} \|\vec{OA}\| \Rightarrow \|\vec{i}\| = \frac{1}{2} OA$$

$$\|\vec{j}\| = \frac{1}{2} \|\vec{OB}\| \Rightarrow \|\vec{j}\| = \frac{1}{2} OB$$

$$\|\vec{k}\| = \frac{1}{2} \|\vec{OC}\| \Rightarrow \|\vec{k}\| = \frac{1}{2} OC$$

$$\text{or } OB = OC = OA \Rightarrow \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\|$$

De plus : dans le triangle AOB rectangle en O ; $(OA) \perp (OB)$
 $\Rightarrow \vec{i} \perp \vec{j}$

A partir du triangle AOC rectangle en O ;

$$(OA) \perp (OC) \Rightarrow \vec{i} \perp \vec{k}$$

Et avec le triangle COB rectangle en O ; on a $(OB) \perp (OC)$
 $\Rightarrow \vec{j} \perp \vec{k}$

D'après la figure, la base $(\vec{OA}; \vec{OB}; \vec{OC})$ est directe

Il en résulte de tout ce qui précède que

$\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé direct.

2°) a- Déterminons les coordonnées des points A, B, C et I.

$$\vec{i} = \frac{1}{2} \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{OA} = 2\vec{i} \text{ d'où } A(2; 0; 0) \quad \vec{j} = \frac{1}{2} \vec{OB} \Leftrightarrow$$

$$\vec{OB} = 2\vec{j} \text{ d'où } B(0; 2; 0)$$

$$\vec{k} = \frac{1}{2} \vec{OC} \Leftrightarrow \vec{OC} = 2\vec{k} \text{ d'où } C(0; 0; 2)$$

I est le milieu du segment [AB] donc on a :

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \text{ d'où } I(1; 1; 0) \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 0 \end{cases}$$

b- Ecrivons une représentation paramétrique de la droite (IC)

$\vec{IC}$ est un vecteur directeur de la droite (IC) $I(1; 1; 0)$ et $\vec{IC}(-1; -1; 2)$ alors pour tout point $M(x; y; z)$ de l'espace

$$\text{tel que } M \in (IC) \text{ on a : } (IC): \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = -\alpha + 1; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

Déduisons que $H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

$$H \in (IC) \text{ et } \vec{OH} \cdot \vec{IC} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_H = -\alpha + 1 \\ y_H = -\alpha + 1 \\ z_H = 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$-x_H - y_H + 2z_H = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\alpha + 1 \\ y_H = -\alpha + 1 \\ z_H = 2\alpha \end{cases}$$

$$-(-\alpha + 1) - (-\alpha + 1) + 2(2\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\alpha + 1 \\ y_H = -\alpha + 1 \\ z_H = 2\alpha \end{cases} \quad \text{en remplaçant } \alpha = \frac{1}{3} \text{ dans la}$$

$$6\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

représentation paramétrique de (IC) on obtient :

$$\begin{cases} x_H = -\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{2}{3} \\ y_H = -\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{2}{3} \text{ d'où } H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \\ z_H = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

3°) a- Vérifie que D est le milieu du segment [OH].

• Déterminons les coordonnées de D

$D = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (O, 3)\}$ donc

$$\begin{cases} x_D = \frac{x_A + x_B + x_C + 3x_O}{6} \\ y_D = \frac{y_A + y_B + y_C + 3y_O}{6} \\ z_D = \frac{z_A + z_B + z_C + 3z_O}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{1}{3} \\ y_D = \frac{1}{3} \\ z_D = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Donc } D\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

• Déterminons les coordonnées du milieu du segment [OH]

$$\begin{aligned} \frac{x_O + x_H}{2} &= \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{y_O + y_H}{2} &= \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{z_O + z_H}{2} &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

donc les coordonnées du milieu du

segment $[OH]$ sont exactement les coordonnées de D
d'où D est le milieu du segment $[OH]$.

b- Démontrons que (Δ) est une droite dont nous précisons une représentation paramétrique.

(Δ) est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{HM}$$

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{HM}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{HM} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{HM}) \wedge \overrightarrow{OI} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{OI} = \vec{0} \quad \text{d'où } (\Delta) \text{ est une droite de}$$

repère $(D; \overrightarrow{OI})$

Représentation paramétrique de (Δ)

$$(\Delta): \begin{cases} x = \beta + \frac{1}{3} \\ y = \beta + \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} ; (\beta \in \mathbb{R})$$

c- Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC) , et déduisons les coordonnées du point P

Déterminons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}(-2; 2; 0) ; \overrightarrow{AC}(-2; 0; 2)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) \Leftrightarrow$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(4; 4; 4)$ soit $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (ABC) on a donc :

$$(P): 4x + 4y + 4z + d = 0 \text{ avec } d \in \mathbb{R},$$

$$A \in (ABC) \Leftrightarrow 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$$

$$(ABC): 4x + 4y + 4z - 8 = 0 \text{ soit}$$

$$(ABC): x + y + z - 2 = 0$$

Déduisons les coordonnées de $\{P\} = (ABC) \cap (\Delta)$

$$(\Delta): \begin{cases} y_P = \beta + \frac{1}{3} \\ z_P = \frac{1}{3} \\ x_P + y_P + z_P - 2 = 0 \quad (1) \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(1) \Rightarrow \beta + \frac{1}{3} + \beta + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 2 = 0 \text{ ainsi } 2\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\beta = \frac{1}{2} \text{ d'où } \begin{cases} x_P = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \\ y_P = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ alors } P\left(\frac{5}{6}; \frac{5}{6}; \frac{1}{3}\right)$$

Problème 2 :

4°) a- Démontrons que $2i$ est une solution de l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E): iz^3 + 2z^2 - 2z + 4i = 0$$

Soit $P(z) = iz^3 + 2z^2 - 2z + 4i$;

$$P(2i) = i(2i)^3 + 2(2i)^2 - 2(2i) + 4i \\ = 8 - 8 - 4i + 4i = 0$$

$$P(2i) = 0 \text{ alors } 2i \text{ est solution de (E)}$$

b- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

$$\begin{array}{r|l} iz^3 + 2z^2 - 2z + 4i & z - 2i \\ \hline -iz^3 - 2z^2 & iz^2 - 2 \\ \hline -2z + 4i & \\ \hline 2z - 4i & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{Donc (E): } (z - 2i)(iz^2 - 2) = 0$$

$$(z - 2i)(iz^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } iz^2 - 2 = 0$$

$$iz^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -2i$$

$$\Leftrightarrow z^2 = (1-i)^2$$

$$\Leftrightarrow z = 1-i \text{ ou } z = -1+i$$

$$\text{D'où } S_c = \{2i; -1+i; 1-i\}$$

5°) a- Déterminons la distance PQ puis donne une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{PQ})$.

$$PQ = |z_Q - z_P| = |\sqrt{2} + i\sqrt{2}|$$

$$PQ = \sqrt{4} = 2 \text{ d'où } \angle PQ = 2$$

Mesure en radian de l'angle $(\vec{u}; \vec{PQ})$

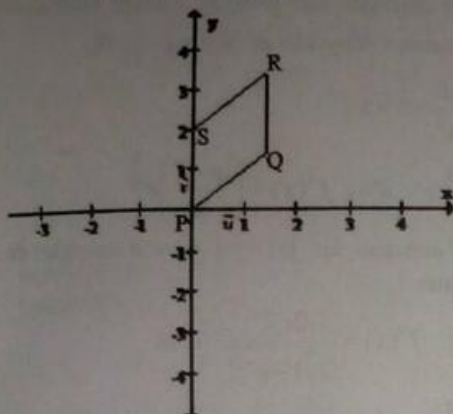
Soit $\alpha = \text{mes}(\vec{u}, \vec{PQ})$

$$= \arg(z_Q - z_P) = \arg(z_Q) \text{ car } z_P = 0$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{donc } \text{mes}(\vec{u}, \vec{PQ}) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

b- Plaçons les points P, Q, R et S



6°) a- Ecrivons une forme exponentielle de $Z_1 = \frac{2i}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

$$|Z_1| = \frac{|2i|}{|\sqrt{2} + i\sqrt{2}|} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\arg Z_1 = \arg(2i) - \arg(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$= \frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Alors } Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

b- Dédons la nature du triangle PQS :

$$Z_1 = \frac{z_S - z_P}{z_Q - z_P} = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \left| \frac{z_S - z_P}{z_Q - z_P} \right| = 1 \text{ donc PQS est un}$$

triangle isocèle de sommet P.

c- Justifions que le quadrilatère PQRS est un losange.

PQRS est un parallélogramme et PQ = PS donc PQRS est un losange.

d- Forme algébrique puis trigonométrique de z_R

PQRS est un parallélogramme donc $\vec{PQ} = \vec{SR} \Leftrightarrow$

$$z_R - z_S = z_Q - z_P$$

$$\Leftrightarrow z_R = z_Q - z_P + z_S$$

$$\Leftrightarrow z_R = \sqrt{2} + i\sqrt{2} - 0 + 2i$$

$$\text{d'où } z_R = \sqrt{2} + (\sqrt{2} + 2)i$$

$$\begin{aligned} |z_P| &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + 2)^2} \\ &= \sqrt{2 + 2 + 4\sqrt{2} + 4} \\ &= \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{4(2 + \sqrt{2})} \Rightarrow |z_P| = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

On sait que $\text{mes}(\vec{u}, \vec{PQ}) = \frac{\pi}{4}$ or la droite (PR) est la

bissectrice de l'angle $(\vec{PQ}, \vec{PR})$

$$\text{mes}(\vec{u}, \vec{PR}) = \text{mes}(\vec{u}, \vec{PQ}) + \text{mes}(\vec{PQ}, \vec{PR})$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2 \times 4} \Rightarrow$$

$$\text{mes}(\vec{u}, \vec{PR}) = \frac{3\pi}{8} \text{ rad}$$

d'où la forme trigonométrique de z_P est :

$$z_P = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \right) \left[\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right]$$

Dédons les valeurs exactes de $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$.

En identifiant la forme algébrique et trigonométrique de z_P on obtient :

$$\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(2 - \sqrt{2})}{4 - 2}} \Rightarrow$$

$$\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Problème 3 :

7°) a- Justifie que l'ensemble de définition de f est

$$D = \mathbb{R}$$

$$D = \{x \in]-\infty; 0[/ x \neq 0\} \cup \{x \in [0; +\infty[/ 1 - e^{-2x} \geq 0\}$$

$$x \neq 0; \forall x \in]-\infty; 0[\quad (1)$$

$$1 - e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-2x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; +\infty[\quad (2)$$

De (1) et (2) $D = \mathbb{R}$

b- Calcule les limites de f aux bornes de D .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \end{cases} \text{ soit } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - e^{-2x}} = 1$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0 \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

8°) a- Démontrons que $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{2(e^{-2x} - 1)}{-2x}}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\sqrt{1 - e^{-2x}}}{x} \\ &= \sqrt{\frac{1 - e^{-2x}}{x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{-2(e^{-2x} - 1)}{2x^2}} = \sqrt{\frac{2(e^{-2x} - 1)}{-2x}} \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{2(e^{-2x} - 1)}{-2x}}$$

b- Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 0. Précisons les demi tangentes éventuelles de la courbe ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 0.

Continuité de f en 0

$$f(0) = \sqrt{1 - e^0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ car : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - e^{-2x}} = 0, \text{ on a ainsi :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0), \text{ d'où } f \text{ est continue en 0}$$

Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases} \text{ donc } f \text{ est dérivable à gauche en 0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2(e^{-2x} - 1)}{-2x}} \\ &= +\infty, \text{ car :} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = +\infty \end{cases}$$

donc f n'est pas dérivable à 0

par suite f n'est pas dérivable en 0

Demi tangente au point d'abscisse 0 (T_R): $\begin{cases} x \leq 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$(T_d): \begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

9°) a- Etudions le sens de variation de f par un tableau de variation.

f est continue et dérivable sur $]-\infty; 0[$ composée de fonctions dérivables et $\forall x \in]-\infty; 0[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \times x \\ &= e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \text{ d'où } f'(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme fonction dérivables

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{2e^{-2x}}{2\sqrt{1 - e^{-2x}}} \text{ d'où}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}$$

Signe de $f'(x)$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} \text{ le signe de } f'(x)$$

dépend de celui de $\left(\frac{x-1}{x} \right)$ car $e^{\frac{1}{x}} > 0$

Or pour $x \in]-\infty; 0[, x-1 < 0$ et $x < 0$ donc

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}$$

$$e^{-2x} > 0 \text{ et } \sqrt{1 - e^{-2x}} > 0 \text{ alors } \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$$

Il en résulte que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) > 0$ par suite f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f	$-\infty$	0	$+\infty$

b- Déterminons les branches infinies de (C) puis construisons avec soins (C).

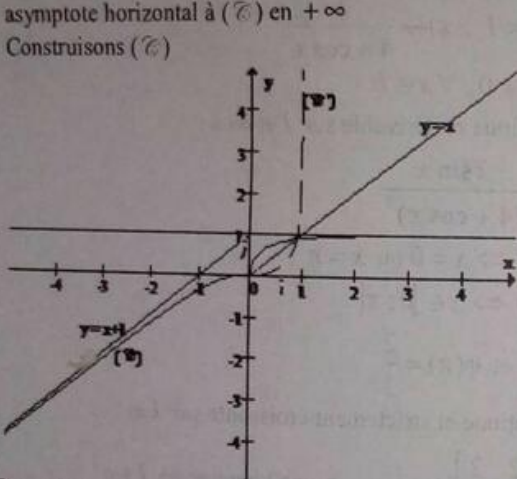
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, donc il y a possibilité d'asymptote ou de branche parabolique

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{x}} = 1 \text{ donc la droite d'équation } y = x + 1 \text{ est asymptote à } (C) \text{ au voisinage de } -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$

Construisons (C)



Partie B :

10°) a- Justifions que g admet une bijection réciproque g^{-1} .

f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc g

admet une bijection réciproque g^{-1}

b- Calculons pour $g^{-1}(x)$ tout

$$x \in f([0; +\infty[)$$

$$g^{-1} : [0; 1[\rightarrow [0; +\infty[$$

$$x \mapsto g^{-1}(x)$$

$$\forall x \in [0; 1[\text{ posons } f^{-1}(x) = y \text{ avec } \begin{cases} x \in [0; 1[\\ y \in [0; +\infty[\end{cases} \text{ donc}$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{1 - e^{-2y}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 - e^{-2y}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-\ln(1 - x^2)}{2}$$

$$\text{d'où } \forall x \in [0; 1[: g^{-1}(x) = \frac{-\ln(1 - x^2)}{2}$$

c- Construisons la courbe (C)

(Voir figure : courbe en pointillé)

11°) Démontrons que $\forall x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f(x) = f'(x) \left[-1 + \frac{1}{2[1 - f(x)]} + \frac{1}{2[1 + f(x)]} \right]$$

$$\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} \text{ et } f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}$$

$$f(x) = f'(x) \left[\frac{-2[1 - f(x)][1 + f(x)] + [1 + f(x)] + [1 - f(x)]}{2[1 - f(x)][1 + f(x)]} \right]$$

$$= f'(x) \times \left[\frac{-2[1^2 - f(x)^2] + 1 + f(x) + 1 - f(x)}{2[1^2 - f(x)^2]} \right]$$

$$= f'(x) \times \left[\frac{-2 + 2(1 - e^{-2x}) + 2}{2 - 2(1 - e^{-2x})} \right]$$

$$= f'(x) \times \left[\frac{1 - e^{-2x}}{e^{-2x}} \right] = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} \left[\frac{1 - e^{-2x}}{e^{-2x}} \right]$$

$$= \frac{1 - e^{-2x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} = \frac{(1 - e^{-2x})\sqrt{1 - e^{-2x}}}{1 - e^{-2x}}$$

$$= \sqrt{1 - e^{-2x}} = f(x)$$

d'où $\forall x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f(x) = f'(x) \left[-1 + \frac{1}{2[1 - f(x)]} + \frac{1}{2[1 + f(x)]} \right]$$

12°) a- Déterminons les aires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ (α) des surfaces respectives réservées aux légumes A et B.

$$\mathcal{A} = \left(\int_0^1 g^{-1}(x) dx \right) u.a$$

$$= \int_0^1 \frac{-\ln(1 - x^2)}{2} dx \text{ u.a}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1 - x^2) dx \text{ u.a}$$

Posons $u'(x) = 1$ et prenons $u(x) = x - 1$

$$v(x) = \ln(1 - x^2) \Rightarrow v'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}$$

donc :

$$\int_0^1 \ln(1 - x^2) dx = \left[(x - 1) \ln(1 - x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2x(x - 1)}{1 - x^2} dx$$

$$= \left[(x - 1) \ln(1 - x^2) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x}{1 + x} dx$$

$$= \left(\left(\frac{1}{e} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) - 0 \right) - 2 \int_0^{\frac{1}{e}} \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) - 2 \left[x - \ln(1+x) \right]_0^{\frac{1}{e}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \ln(1-x^2) dx = \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{e} - \ln \left(1 + \frac{1}{e} \right) - 0 \right)$$

$$= \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) - \frac{2}{e} + 2 \ln \left(1 + \frac{1}{e} \right) \text{ alors :}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{e}} \ln(1-x^2) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) - \frac{1}{e} + \ln \left(1 + \frac{1}{e} \right)$$

$$\text{d'où } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) - \frac{1}{e} + \ln \left(1 + \frac{1}{e} \right) u.a$$

Calcule $\mathcal{A}(\alpha)$

$$\mathcal{A}(\alpha) = \left(\int_{\alpha}^{\ln 2} f(x) dx \right) u.a$$

$$= \int_{\alpha}^{\ln 2} f'(x) \left[-1 + \frac{1}{2[1-f(x)]} + \frac{1}{2[1+f(x)]} \right] dx$$

$$\doteq \int_{\alpha}^{\ln 2} \left(-f'(x) + \frac{f'(x)}{2[1-f(x)]} + \frac{f'(x)}{2[1+f(x)]} \right) dx$$

$$= \left[-f(x) - \frac{1}{2} \ln|1-f(x)| + \frac{1}{2} \ln|1+f(x)| \right]_{\alpha}^{\ln 2}$$

$$= \left[-f(x) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{f(x)+1}{1-f(x)} \right| \right]_{\alpha}^{\ln 2}$$

$$= \left(-\sqrt{1-e^{-2\ln 2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-e^{-2\ln 2}}}{1-\sqrt{1-e^{-2\ln 2}}} \right) -$$

après les calculs on

$$\left(-\sqrt{1-e^{-2\alpha}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-e^{-2\alpha}}}{1-\sqrt{1-e^{-2\alpha}}} \right)$$

obtient

$$\mathcal{A}(\alpha) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \ln(2+\sqrt{3}) + \sqrt{1-e^{-2\alpha}} - \ln(1+\sqrt{1-e^{-2\alpha}}) - \alpha \right)$$

b- Calculons le volume $V(\alpha)$ d'eau nécessaire à l'arrosage de ces deux surfaces.

$$V(\alpha) = \pi \int_{\alpha}^{\ln 2} [f(x)]^2 dx u.v$$

$$= \pi \int_{\alpha}^{\ln 2} (1-e^{-2x}) dx u.v$$

$$= \pi \left[x + \frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{\alpha}^{\ln 2} u.v \text{ d'où}$$

$$V(\alpha) = \pi \left(\frac{1}{8} + \ln 2 - \alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) u.v$$

c- Calculons $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}(\alpha)$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} V(\alpha)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}(\alpha) = \ln(1+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} u.a$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} V(\alpha) = \left(-\frac{3}{8} + \ln 2 \right) u.v$$

• $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}(\alpha)$ est l'aire de (S_{α}) lorsque $\alpha \rightarrow 0$

• $\lim_{\alpha \rightarrow 0} V(\alpha)$ est le volume nécessaire à l'arrosage

deux surfaces lorsque $\alpha \rightarrow 0^+$

CORRIGE TYPE DE LA SE N°09

Problème 1 :

1°) Démontrons que φ est une bijection de I sur un intervalle L à préciser.

$$\varphi: [0; \pi] = I; x \mapsto \frac{2}{4 + \cos x}$$

$$4 + \cos x \neq 0, \forall x \in I$$

φ est continue et dérivable sur I et on a :

$$\varphi'(x) = \frac{2 \sin x}{(4 + \cos x)^2}$$

$$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pi$$

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; \pi[$$

$$\varphi(0) = \frac{2}{5} \text{ et } \varphi(\pi) = \frac{2}{3}$$

φ est continue et strictement croissante sur I et

$$\varphi(I) = \left[\frac{2}{5}; \frac{2}{3} \right] \text{ donc } \varphi \text{ est une bijection de } I \text{ sur}$$

$$L = \left[\frac{2}{5}; \frac{2}{3} \right]$$

2°) a- Etude de la dérivabilité de φ^{-1}

$$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pi \text{ et } \forall x \in]0; \pi[, \varphi'(x) \neq 0$$

$$\text{d'où } \varphi^{-1} \text{ est dérivable sur } E = \left] \frac{2}{5}; \frac{2}{3} \right[$$

b- Calculons $(\varphi^{-1})'(x)$ pour tout $x \in E$

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$$

$$\text{Posons } \varphi^{-1}(x) = y \text{ avec } \begin{cases} y \in [0; \pi] \\ x \in \left[\frac{2}{5}; \frac{2}{3} \right] \end{cases}$$

$$\varphi^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \varphi(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{4 + \cos y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} = 4 + \cos y$$

$$\varphi^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \cos y = \frac{2}{x} - 4$$

$$\varphi'(y) = \frac{2 \sin y}{(4 + \cos y)^2}$$

$$\text{Or } \sin^2 y = 1 - \cos^2 y$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{x} - 4\right)^2$$

$$= 1 - \frac{16x^2 - 16x + 4}{x^2}$$

$$= \frac{-15x^2 + 16x - 4}{x^2}$$

$$\text{Or } \sin y \geq 0 \text{ et } x > 0 \text{ donc } \sin y = \frac{\sqrt{-15x^2 + 16x - 4}}{x} \text{ et}$$

$$\varphi'(y) = \frac{\frac{2}{x} \sqrt{-15x^2 + 16x - 4}}{\left(\frac{2}{x}\right)^2}$$

$$\varphi'(y) = \frac{x}{2} \sqrt{-15x^2 + 16x - 4} \text{ donc } \forall x \in E ?$$

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{2}{x \sqrt{-15x^2 + 16x - 4}}$$

c-Déterminons la fonction G.

$$g \mapsto \frac{1}{x \sqrt{-15x^2 + 16x - 4}}$$

$$g \mapsto \frac{1}{2} (\varphi^{-1})'(x). \text{ Donc } G \text{ est de la forme}$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \varphi^{-1}(x) + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

$$\text{on a : } G\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + c = 0 ; c \in \mathbb{R} \text{ alors}$$

$$c = -\frac{1}{2} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = y \Leftrightarrow \cos y = \frac{2}{\frac{1}{2}} - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$c = -\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \text{ d'où } G(x) = \frac{1}{2} \varphi^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}$$

3°) Déduisons le montant M.

$$M = 100\,000 \times G\left(\frac{4}{7}\right) \text{ FCFA}$$

$$G\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{2} \varphi^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Posons } \varphi^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) = \alpha ; \alpha \in [0; \pi]$$

$$\varphi^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) = \alpha \Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{4 + \cos \alpha} = \frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \alpha = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Or } \alpha \in [0; \pi] \text{ donc } \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ et ainsi } \varphi^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{On a alors } G\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} ; \pi = 3 \text{ d'où } G\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{4}$$

par suite

$$M = 25\,000 \text{ FCFA}$$

Problème 2 :

4°) a-Développons et réduisons $u(x)$ et $v(x)$

$$u(x) = 9x^3 + 18x^2 - 20x - 40 \text{ et}$$

$$v(x) = 2x^3 - 18x^2 + 56x - 40$$

b- Démontrons que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 et une solution réelle z_1 .

Soit $z_0 = ib$, $b \in \mathbb{R}^*$ la solution imaginaire pure. Alors

$$(ib)^4 + (2i - 9)(ib)^3 + (28 - 18i)(ib)^2 + (56i - 20)(ib) - 40i = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$b^4 + 2b^3 - 28b^2 - 56b + i(9b^3 + 18b^2 - 20b - 40) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^4 + 2b^3 - 28b^2 - 56b = 0 \\ 9b^3 + 18b^2 - 20b - 40 = 0 \end{cases}$$

$$9b^3 + 18b^2 - 20b - 40 = 0 \Leftrightarrow u(b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b + 2)(9b^2 - 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = -2 \text{ ou } b = -\frac{2\sqrt{5}}{3} \text{ ou } b = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$b = -2$ est une solution de l'équation

$b^4 + 2b^3 - 28b^2 - 56b = 0$ alors l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure $z_0 = -2i$

Soit $z_1 = a$, $a \in \mathbb{R}$ la solution réelle alors

$$a^4 + (2i-9)(a)^3 + (28-18i)(a)^2 + (56i-20)(a) - 40i = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 9a^3 + 28a^2 - 20a + i(2a^3 - 18a^2 + 56a - 40) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 9a^3 + 28a^2 - 20a = 0 \\ 2a^3 - 18a^2 + 56a - 40 = 0 \end{cases}$$

$$2a^3 - 18a^2 + 56a - 40 = 0 \Leftrightarrow v(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(2a^2 - 16a + 40) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } 2a^2 - 16a + 40 = 0$$

Le discriminant de l'équation $2a^2 - 16a + 40 = 0$ est négatif donc $2a^2 - 16a + 40 \neq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$

$a = 1$ est une solution de l'équation

$$a^4 - 9a^3 + 28a^2 - 20a = 0 \text{ donc l'équation } P(z) = 0$$

admet une solution réelle $z_1 = 1$.

c- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+2i)(z-1)(z^2 - 8z + 20) = 0$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -2i \text{ ou } z = 1 \text{ ou } z = 4 - 2i \text{ ou } z = 4 + 2i$$

$$\text{Im}(z_3) < 0 \text{ donc on a : } z_0 = -2i ; z_1 = 1 ; z_3 = 4 - 2i \text{ ou}$$

$$z_4 = 4 + 2i$$

$$\text{D'où } S_C = \{z_0 ; z_1 ; z_3 ; z_4\}$$

5°) a-Déterminons l'affixe des points A, B, C et D

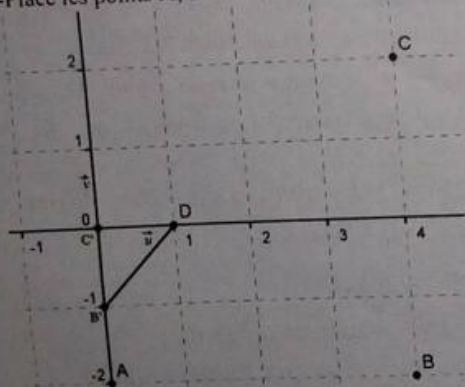
$$z_A = z_0 \Rightarrow z_A = -2i$$

$$z_B = z_3 \Rightarrow z_B = 4 - 2i$$

$$z_C = z_4 \Rightarrow z_C = 4 + 2i$$

$$z_D = z_1 \Rightarrow z_D = 1$$

b-Place les points A, B et C et D dans le plan $\mathcal{P}$.



6°) a-Déterminons l'affixe des points B' et C'.

On a : $B' = j'(B)$ et $C' = j'(C)$ et on trouve : $z_{B'} = -i$ et

$$z_{C'} = 0$$

b- Interprétons géométriquement $|z'|$ et $\arg(z')$

$$|z'| = \frac{CM}{AM} \text{ et } \arg(z') = \text{mes}(\widehat{MA, MC}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c- Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que

$$i) |z'| = 1$$

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{CM}{AM} = 1 \Leftrightarrow CM = AM \text{ alors l'ensemble}$$

recherché est la médiatrice du segment $[AC]$

$$ii) z' \in i\mathbb{R}^*$$

$$z' \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \neq C \\ M \neq A \\ \text{mes}(\widehat{MA, MC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Alors l'ensemble recherché est le cercle de diamètre $[AC]$ privé des points A et C.

d-Prouvons que les points A, B' et C' sont alignés.

$$\frac{z_{B'} - z_A}{z_{C'} - z_A} = \frac{1}{2} ; \frac{z_{B'} - z_A}{z_{C'} - z_A} \in \mathbb{R} \text{ d'où A, B' et C' sont}$$

alignés

7°) Nature du triangle à réaliser sur la face de la chemise

Le triangle à réalisé est le triangle B'DC' et

$$\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_D - z_{C'}} = -i \text{ alors le triangle à réalisé en face de la}$$

chemise est un triangle rectangle et isocèle

Problème 3:

Partie A :

8°) Etudions dans $\mathbb{R}$ le signe de $4e^{2x} - 5e^x + 1$

Posons $X = e^x$, considérons alors $4X^2 - 5X + 1$

L'équation $4X^2 - 5X + 1 = 0$ admet deux racines $X_1 = \frac{1}{4}$

$$\text{et } X_2 = 1 \text{ d'où } 4X^2 - 5X + 1 = 4\left(X - \frac{1}{4}\right)(X - 1) \text{ ou}$$

$$\text{encore } 4e^{2x} - 5e^x + 1 = 4\left(e^x - \frac{1}{4}\right)(e^x - 1) \text{ avec}$$

$$x_1 = -2 \ln 2 \text{ et } x_2 = 0 \text{ ces racines.}$$

Son tableau de signe est :

x	$-\infty$	$-2 \ln 2$	0	$+\infty$
$e^x - \frac{1}{4}$	-	0	+	+
$e^x - 1$	-	-	0	+
$4e^{2x} - 5e^x + 1$	-	0	-	+

$$\forall x \in]-\infty ; -2 \ln 2[\cup]0 ; +\infty[: 4e^{2x} - 5e^x + 1 > 0$$

$$\forall x \in]-2 \ln 2 ; 0[: 4e^{2x} - 5e^x + 1 < 0$$

$$\forall x \in \{-2 \ln 2 ; 0\} : 4e^{2x} - 5e^x + 1 = 0$$

$$9°) \varphi(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2$$

a- Domaine de définition de φ

$$D_\varphi = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[\text{ donc } D_\varphi =]0; +\infty[$$

Limites de φ aux bornes de D_φ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 2 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = -\infty$$

b- Etudions les variations de φ

φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1[$$

$$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$$

φ est strictement croissante sur $]0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

Tableau de variation de φ

x	0	1	+
$\varphi'(x)$		+	-
φ		↗	↘

c- Déduisons-en le signe $\varphi(x)$

D'après le tableau de variations ; $\varphi(x)$ admet un maximum en 1 et sa valeur maximale est 0.

D'où pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\varphi(x) \leq 0$.

Partie B :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{e^x}{2e^x - 1}, & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x + \sqrt{x} \ln x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

10°) a- Déterminons D_f le domaine de définition de f

$$D_f = D_1 \cup D_2 \text{ avec}$$

$$D_1 = \{x \in]-\infty; 0[/ 2e^x - 1 \neq 0\}$$

$$2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\ln 2 \text{ donc}$$

$$D_1 =]-\infty; -\ln 2[\cup]-\ln 2; 0[\quad (1)$$

$$D_2 = \{x \in]0; +\infty[/ x > 0\}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[; x > 0 \text{ donc } D_2 =]0; +\infty[\quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2) } D_f =]-\infty; -\ln 2[\cup]-\ln 2; +\infty[$$

b- Calculons les limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{e^x}{2e^x - 1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\ln 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\ln 2^-} \left(x + \frac{e^x}{2e^x - 1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\ln 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\ln 2^+} \left(x + \frac{e^x}{2e^x - 1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x + \sqrt{x} \ln x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) = -\infty$$

Branches infinies

$$\lim_{x \rightarrow -\ln 2^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\ln 2^+} f(x) = +\infty \text{ alors la droite}$$

d'équation $x = -\ln 2$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f)

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ calculons alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{e^x}{2e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{e^x}{2e^x - 1} = 1$$

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2e^x - 1} = 0 \text{ alors la droite } (D_1)$$

d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage $-\infty$.

$$\text{De même } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \text{ calculons alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x + \sqrt{x} \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) = -$$

$$\text{, calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{x} \ln x = +\infty \text{ alors } (C_f) \text{ admet}$$

une branche infinie de direction asymptotique la droite (D_2) d'équation $y = -x$ au voisinage de $+\infty$.

c- Position de (C_f) par rapport à (D_1) au voisinage de $-\infty$.

$$\text{Au voisinage de } -\infty : f(x) - x = \frac{e^x}{2e^x - 1}$$

$$f(x) - x > 0 \Leftrightarrow x \in]-\ln 2; 0[$$

$$f(x) - x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\ln 2[$$

D'où la courbe (C_f) est en dessous de (D_1) sur

$]-\infty; -\ln 2[$ et (C_f) est au dessus de (D_1) sur $]-\ln 2; 0[$

11°) a- Etudions la continuité de f en 0

On a : d'une part : $f(0) = 1$, d'autre part

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \frac{e^x}{2e^x - 1} = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x + 2\sqrt{x} \ln \sqrt{x} = 1$$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ d'où f est

continue en 0

b- Etudions la dérivabilité de f en 0 et interprétons graphiquement les résultats.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{e^x}{2e^x - 1} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2e^x - 1) + e^x - (2e^x - 1)}{x(2e^x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2e^x - 1) - e^x + 1}{x(2e^x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{e^x - 1}{x(2e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x}{2e^x - 1} = 0$$

D'où f est dérivable à gauche de 0 et son nombre dérivé à gauche de 0, $f'_g(0)$ est $f'_g(0) = 0$

$$\text{De même } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x + \sqrt{x} \ln x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x + \sqrt{x} \ln x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 + \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \times (2 \ln \sqrt{x}) \right) = -\infty$$

D'où f n'est pas dérivable à droite de 0.

Conclusion : f n'est pas dérivable en 0

Interprétation graphique :

La courbe (C_f) admet deux demi-tangentes en son point d'abscisse 0 définies par :

A gauche en 0 on a : $(T_g) : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = 1 \end{cases}$ et à droite en 0

$(T_d) : \begin{cases} x = 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$

12°) a- Calculons la dérivée de f

On trouve :

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{4e^{2x} - 5e^x + 1}{(2e^x - 1)^2} & \text{si } x \in]-\infty; -\ln 2[\cup]-\ln 2; 0[\\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x - 2\sqrt{x} + 2), & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

Signe de la dérivée :

Sur $]-\infty; -\ln 2[\cup]-\ln 2; 0[$, $f'(x)$ a le même signe que $4e^{2x} - 5e^x + 1$ et sur $]0; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe

que : $\ln x - 2\sqrt{x} + 2$

Donc d'après la partie A,

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2 \ln 2; -\ln 2[\cup]-\ln 2; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[\\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2 \ln 2[\\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2 \ln 2; 1\} \end{cases}$$

f est donc strictement décroissante sur $[-2 \ln 2; -\ln 2]$ et sur $]-\ln 2; +\infty[$

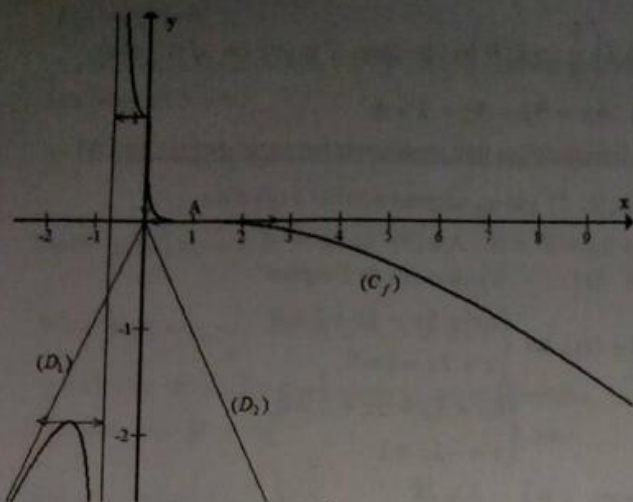
Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-2 \ln 2$	$-\ln 2$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	-
f	$-\infty$	$-\frac{1}{2} - 2 \ln 2$				$-\infty$

b-

en 1 f' s'annule sans changer de signe et $f(1) = 0$ alors le $A(1; 0)$ est un point d'inflexion pour (C_f) .

13°) Construction de la courbe (C_f) , des asymptotes et des tangentes



14°) Calculons l'aire A , en cm^2 , du domaine du plan délimité par la droite d'équation $y = x$, la courbe et les droites d'équations $x = -\ln 8$ et $x = -\ln 4$.

$$A = \int_{-\ln 8}^{-\ln 4} \left(x - x - \frac{e^x}{2e^x - 1} \right) dx \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \int_{-\ln 8}^{-\ln 4} \left[-\frac{1}{2} \ln |2e^x - 1| \right]_{-\ln 8}^{-\ln 4} \times 4 \text{ cm}^2 \text{ et on trouve}$$

$$A = 2 \ln \frac{3}{2} \text{ cm}^2$$

CORRIGE TYPE DE LA S.E N° 10

Problème 1 :

1°) a- Résolvons l'équation (E)

$$(E) : 4y'' + 4y' + y = 0$$

L'équation caractéristique associée à (E) est

$$4r^2 + 4r + 1 = 0 \text{ et son discriminant } \Delta = 0 \text{ alors}$$

$$4r^2 + 4r + 1 = 0 \Leftrightarrow r_0 = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \text{ d'où la solution}$$

générale de (E) est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y_{A,B} : x \mapsto (Ax + B)e^{-\frac{x}{2}} \text{ avec } (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

b- Déterminons h

$$h \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow h(x) = (Ax + B)e^{-\frac{x}{2}}, (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}(Ax + B)e^{-\frac{x}{2}}, (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{On a : } \begin{cases} h(0) = 2 \\ h'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2 \\ A - \frac{1}{2}B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases} \text{ d'où}$$

$$h(x) = (x + 2)e^{-\frac{x}{2}}$$

2°) a- Calculons U_n en fonction de n

$$U_n = \int_0^n h(x) dx = \int_0^n (x + 2)e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = (x + 2) \\ v'(x) = e^{-\frac{x}{2}} \end{cases} \text{ on a : } u'(x) = 1 \text{ et on peut prendre}$$

$$v(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} \text{ donc } U_n = \left[-2(x + 2)e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^n + 2 \int_0^n e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$U_n = \left[-2(x + 2)e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^n + 2 \left[-2e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^n$$

$$U_n = -2(n + 2)e^{-\frac{n}{2}} + 4 - 4 \left(e^{-\frac{n}{2}} - 1 \right)$$

$$U_n = -(2n + 8)e^{-\frac{n}{2}} + 8, \forall n \in \mathbb{N}$$

b- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 8$

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n - 8 = -(2n + 8)e^{-\frac{n}{2}} \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, U_n - 8 < 0, \text{ par suite } \forall n \in \mathbb{N}, U_n < 8, (a)$$

La fonction $x \mapsto (x + 2)e^{-\frac{x}{2}}$ est continue sur $[0; n]$ et

$$\forall x \in [0; n], (x + 2)e^{-\frac{x}{2}} > 0 \text{ donc } \int_0^n (x + 2)e^{-\frac{x}{2}} dx \geq 0$$

par suite $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0 (b)$

De (a) et (b), $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 8$

c- Déterminons le signe de $U_{n+1} - U_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = \int_0^{n+1} h(x) dx - \int_0^n h(x) dx$$

$$= \int_n^{n+1} h(x) dx + \int_0^n h(x) dx$$

$$U_{n+1} - U_n = \int_n^{n+1} h(x) dx ; h \text{ est continue sur } [n; n+1] \text{ et}$$

$$\forall x \in [n; n+1], h(x) > 0 \text{ d'où } U_{n+1} - U_n > 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

d- Etudions la convergente de la suite (U_n) et calculons sa limite.

(U_n) est croissante et majorée donc elle est

convergente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -2ne^{-\frac{n}{2}} - 8e^{-\frac{n}{2}} + 8 = 8 \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} -2ne^{-\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{-n}{2} \right) e^{-\frac{n}{2}} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -8e^{-\frac{n}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 8$$

3°) Soit M ce montant

$M = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \times 10^6 \text{ Fcfa}$ d'où l'urbaniste a évalué les travaux dans le devis à 8 000 000 Fcfa

Problème 2 :

4°) a- Déterminons un vecteur normal au plan (P)

$$(P) : \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = t + t' - 2; (t; t') \in \mathbb{R}^2 \\ z = t \end{cases}$$

Soit $\vec{v}_1(-2; 1; 1)$ et $\vec{v}_2(0; 1; 0)$ deux vecteurs non colinéaires du plan (P)

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2(-1; 0; -2)$ alors on peut prendre pour un vecteur normal au plan (P) le vecteur $\vec{n}(1; 0; 2)$

Déterminons un vecteur directeur $\vec{u}$ à la droite (D)

Posons $\frac{-2x+1}{4} = \frac{y+1}{3} = z = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}$

$$M(x; y; z) \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\alpha + \frac{1}{2} \\ y = 3\alpha - 1 \\ z = \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R} \text{ donc}$$

$\vec{u}(-2; 3; 1)$ est un vecteur directeur à (D).

b- Démontrons que (D) et (P) sont strictement parallèles

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 \times (-2) + 0 \times (3) + 2 \times 1 = 0 \Rightarrow (D) \parallel (P) \quad (1)$$

$A \in (P)$ voyons si $A \in (D)$?

$$A \in (D) \Rightarrow \begin{cases} 1 = -2\alpha + \frac{1}{2} \\ -2 = 3\alpha - 1 \\ 0 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{4} \\ \alpha = -\frac{1}{3} \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\frac{-1}{4} \neq -\frac{1}{3} \neq 0 \text{ alors } A \notin (D) \quad (2)$$

De (1) et (2) (D) est strictement parallèle au plan (P)

c- Déterminons une équation cartésienne du plan (Q)

(D) $\subset$ (Q) et (Q) $\perp$ (P) donc $\vec{u}(-2; 3; 1)$ et $\vec{n}(1; 0; 2)$ sont deux vecteurs de (Q).

$$\vec{u} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{n}(6; 5; -3)$ est un vecteur normal au plan (Q) donc (Q) : $6x + 5y - 3z + d = 0; d \in \mathbb{R}$

Soit $T\left(\frac{1}{2}; -1; 0\right) \in (D)$ donc $T \in (Q) \Leftrightarrow d = 2$

(Q) : $6x + 5y - 3z + 2 = 0$

5°) Déterminons une représentation paramétrique du plan (P)

$\vec{n}(1; 0; 2)$ est un vecteur normal à (P) donc

$$x + 2z + d' = 0; A \in (P) \Rightarrow d' = -1$$

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace

$$M \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y - 3z + 2 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y - 3z + 2 = 0 \\ x = -2z + 1 \end{cases}$$

Posons $z = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}$

$$M \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} 6(-2\lambda + 1) + 5y - 3\lambda + 2 = 0 \\ x = -2\lambda + 1 \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (P) : \begin{cases} x = -2\lambda + 1 \\ y = 3\lambda - \frac{8}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

6°) a- Démontrons que A, B et C déterminent un plan

$$\vec{AB}(-2; 2; 1) \text{ et } \vec{AC}(2; 0; -1)$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC}(-2; 0; -4) \neq \vec{0}$$

Alors A, B et C déterminent un plan

Equation cartésienne du plan (ABC)

$\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc

$$(ABC) : -2x - 4z + d = 0$$

$$A \in (ABC) \Rightarrow d = 2 \text{ d'où } (ABC) : -2x - 4z + 2 = 0$$

$$(ABC) : x + 2z - 1 = 0$$

b- Déterminons le volume en m^3 du monument OABC

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} |\vec{AO} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|$$

$$\vec{AO}(-1; 2; 0) \text{ ainsi}$$

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} |(-1) \times (-2) + (2) \times (0) + (0) \times (-4)| = \frac{2}{6}$$

Déterminons la masse du monument

Soit m cette masse ; on a : $\rho = \frac{m}{V}$ où ρ est la masse

volumique du béton donc

$$m = \rho \times V \text{ et on trouve}$$

$$m = 4 \text{ tonnes on obtient } V_{OABC} = \frac{8}{3} m^3$$

Problème 3 :

1/ 7°) Etudions les variations de g

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

$$D_g =]0; +\infty[$$

g est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \text{ on}$$

$$\text{trouve } g'(x) = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{1}{x^3} > 0 \text{ et } e^{-\frac{1}{x}} > 0 \text{ donc}$$

$g'(x) > 0, \forall x \in]0; +\infty[$ alors g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} - \left(-\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	1

8°) Dédudons que $\forall x > 0, 0 < g(x) < 1$

Des variations de g on a : $g(]0; +\infty[) =]0; 1[$ d'où

$$\forall x > 0, 0 < g(x) < 1$$

II/

9°) a- Prouvons que f est continue en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(-x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -(-x) \ln(-x) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) \ln(x) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}}\right) = 0$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ d'où f est continue en

0.

b- Etudions la dérivabilité de f en 0

Dérivabilité à droite en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 - e^{-\frac{1}{x}}\right) = 2 \text{ donc } f \text{ est} \end{aligned}$$

dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 2$

Dérivabilité de f à gauche en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \ln(-x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(-x) = +\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 0

Par suite f n'est pas dérivable en 0 et sa courbe

représentative (C) admet à l'origine du repère deux demi-

tangente définies par : $(T_g): \begin{cases} x = 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ et $(T_d): \begin{cases} x \leq 0 \\ y = 2x \end{cases}$

c- Démontrons que, pour tout $x > 0, f'(x) = 2 - g(x)$

la fonction $x \mapsto x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}}\right)$ est continue et dérivable sur

$]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2 - e^{-\frac{1}{x}}\right) - \frac{1}{x^2} (x) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= 2 - e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \text{ d'où tout } x > 0, \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2 - g(x)$$

10°) Etudions les variations de f

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln(-x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - e^{\frac{1}{x}} \right) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

La fonction $x \mapsto x \ln(-x)$ est continue et dérivable sur $] -\infty ; 0[$ comme produit de fonctions dérivables donc f est dérivables sur $] -\infty ; 0[$ et $\forall x \in] -\infty ; 0[$,

$$f'(x) = \ln(-x) + \frac{1}{x} \times (-x)$$

$$f'(x) = \ln(-x) + 1$$

Signe de $f'(x)$

$$\forall x \in]0; +\infty[\text{ on a : } 0 < g(x) < 1$$

$$0 < g(x) < 1 \Leftrightarrow -1 < -g(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < f'(x) < 2$$

$$\Leftrightarrow f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, \text{ posons } 1 + \ln(-x) > 0$$

$$1 + \ln(-x) > 0 \Leftrightarrow \ln(-x) > -1$$

$$\Leftrightarrow -x > e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\infty; -\frac{1}{e} \right[$$

En résumé on a :

$$\begin{cases} \forall x \in \left] -\infty; -\frac{1}{e} \right[\cup] 0; +\infty[: f'(x) > 0 \\ \forall x \in \left] -\frac{1}{e}; 0 \right[: f'(x) < 0 \\ f'\left(-\frac{1}{e}\right) = 0 \end{cases}$$

D'où f est strictement croissante sur $\left] -\infty; -\frac{1}{e} \right[$ et sur $\left] 0; +\infty \right[$ et f est strictement décroissante sur $\left] -\frac{1}{e}; 0 \right[$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$f\left(-\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \ln(e^{-1}) = \frac{1}{e}$$

1°) Prouvons que (C) admet une asymptote oblique (S) dont on précisera une équation cartésienne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(-x) = +\infty \text{ donc (C) admet une}$$

branche parabolique de direction l'axe des ordonnées, le voisinage de $-\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - e^{\frac{1}{x}} \right) = 1$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{cases}$$

Par suite la droite $(\Delta) : y = x + 1$ est asymptote oblique (C) au voisinage de $+\infty$ d'où le résultat

b- Justifions que (Δ) est tangente à (C) au point I

Si (Δ) est tangente à (C) en un point d'abscisse x_0 alors $a : f'(x_0) = 1$ et puisque $x_0 < 0$ donc

$$f'(x_0) = 1 + \ln(-x_0) \text{ donc } 1 + \ln(-x_0) = 1 \Leftrightarrow x_0 = -1$$

et $f(-1) = 0$ donc (Δ) est tangente à (C) au point $I(-1; 0)$

c- Etudions la position de la courbe (C) par rapport à (S)

Etudions le signe de $q(x) = f(x) - (x + 1)$ pour $x \geq 0$

$$q(x) = x \left(2 - e^{\frac{1}{x}} \right) - x - 1 = x \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right) - 1$$

q est continue et dérivable sur $] 0; +\infty[$ et sa dérivée

$$q'(x) = 1 - e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = 1 - g(x)$$

Or pour $x > 0$, $0 < g(x) < 1$ donc $q'(x) > 0$ alors q est strictement croissante sur $] 0; +\infty[$ et

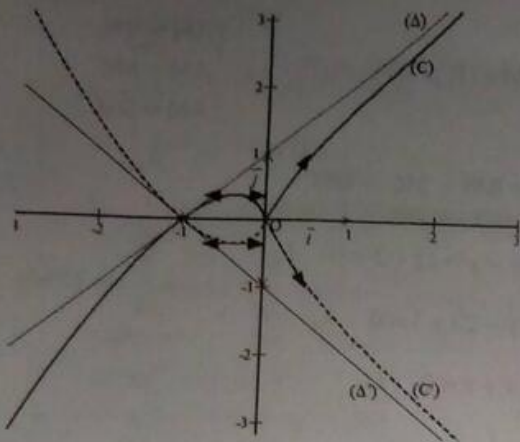
$$q(0) = \lim_{x \rightarrow 0} q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} q(0) = \lim_{x \rightarrow 0} q(0)$$

$$q(0) = f(0) - (0 + 1) = -1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = 0$$

Donc $q(0; +\infty) =] -1; 0[$ alors $q(x) < 0$, $\forall x \in [0; +\infty[$ et par suite (C) est en dessous de (S) pour $x \geq 0$

12°) Traçons les voies qui vont traverser le domaine



NB: (C') est la courbe de $-f$ en pointillé et (C) celle de f en trait plein

III/

13°) Calculons $\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx$

$$\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-1}^{\alpha} x \ln(-x) dx$$

Posons $\begin{cases} u(x) = \ln(-x) \\ v'(x) = x \end{cases}$; on a $u'(x) = \frac{1}{x}$

et prenons $v(x) = \frac{1}{2}x^2$ donc :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\alpha} f(x) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(-x) \right]_{-1}^{\alpha} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{\alpha} x dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(-x) \right]_{-1}^{\alpha} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^{\alpha} \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = \frac{1}{2}\alpha^2 \ln(-\alpha) - \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}$$

14°) déduisons en cm^2 l'aire $A(\alpha)$

$$A(\alpha) = \left(\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx - \left(- \int_{-1}^{\alpha} f(x) dx \right) \right) \times 4cm^2$$

$$= 2 \int_{-1}^{\alpha} f(x) dx \times 4cm^2 \text{ d'où}$$

$$A(\alpha) = (4\alpha^2 \ln(-\alpha) - 2\alpha^2 + 2)cm^2$$

15°) Déterminons la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers 0

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (4\alpha^2 \ln(-\alpha) - 2\alpha^2 + 2)cm^2$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} 4(-\alpha)^2 \ln(-\alpha) - 2\alpha^2 + 2 = 2 \text{ d'où}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A(\alpha) = 2cm^2$$

CORRIGE TYPE DE LA S.E N°11

Problème 1 :

1) a- Démontrons que le quadruplet de points (A, B, C, D) est un repère de l'espace, puis précisons son sens.

$$\overrightarrow{AB}(2; -2; -4) ; \overrightarrow{AC}(0; 2; -4) \text{ et } \overrightarrow{AD}(-4; 0; -4)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(16; 8; 4)$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = -64 + 0 - 16 = -80 \neq 0 \quad \text{donc}$$

$\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \neq 0$ alors A, B, C et D sont non coplanaires d'où (A, B, C, D) est un repère de l'espace.

De plus $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) < 0$ alors (A, B, C, D) est un repère indirect.

b- Déterminons les coordonnées (a, b, c) du point O dans ce nouveau repère (A, B, C, D)

$$\overrightarrow{AO} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{alors a, b et c vérifie}$$

$$\text{le système suivant : (S)} \begin{cases} 2a - 4c = 0 \\ -2a + 2b = 0 \\ -4a - 4b - 4c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -a + b = 0 \\ a - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a + c = 1 \\ a - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a + c = 1 \\ 5c = 1 \end{cases}$$

$$5c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{5}$$

$$2a + c = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{5} \text{ et } a + b + c = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{2}{5} \text{ d'où } O\left(\frac{2}{5}; \frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$$

2) a- Démonstre que $N \in (\Gamma)$ si et seulement si $x = y$

$$N \in (\Gamma) \Leftrightarrow IN = JN$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 = -2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -2x = -2y$$

$$\Leftrightarrow x = y \text{ d'où } N \in (\Gamma) \Leftrightarrow x = y$$

b- Déduisons que (Γ) est un plan dont nous précisons une équation cartésienne

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow x - y = 0$$

$x - y = 0$ est une équation cartésienne d'un plan dans l'espace d'où (Γ) est un plan dont une équation cartésienne est $x - y = 0$

c- Justifie que le point L est un point de (Γ) et que (IJ) est perpendiculaire à (Γ) .

$$L \in (\Gamma) \Leftrightarrow x_L = y_L \text{ or } L \text{ est le milieu du segment } [IJ]$$

$$\text{donc } L\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right); x_L = y_L = \frac{1}{2} \text{ donc } L \in (\Gamma).$$

Soit $\vec{n}(1; -1; 0)$ un vecteur normal à (Γ) .

$\vec{IJ}(-1; 1; 0)$ est vecteur directeur de la droite (IJ)

$\vec{n} = -\vec{IJ}$ donc $\vec{n} \wedge \vec{IJ} = \vec{0}$ d'où $(IJ) \perp (\Gamma)$.

3) a- Déterminons une équation cartésienne de chacun des plans (P_1) , (P_2) et (P_3)

- $\vec{AB}$ est un vecteur normal à (P_1) et T le milieu de $[AB]$ appartient à (P_1)

$$(P_1): 2x - 2y - 4z + d = 0, d \in \mathbb{R}; T(1; -1; 2) \in$$

(P_1) donc on trouve $d = 4$

$$(P_1): 2x - 2y - 4z + 4 = 0 \text{ d'où } (P_1)$$

$$: x - y - 2z + 2 = 0$$

- $\vec{AD}$ est un vecteur normal à (P_2) et Q milieu de $[AC]$ appartient à (P_2)

$$(P_2): 2y - 4z + d = 0, d \in \mathbb{R}; Q(0; 1; 2) \in (P_2)$$

$$\Rightarrow 2 - 8 + d = 0, d = 6$$

$$(P_2): 2y - 4z + 6 = 0 \text{ d'où } (P_2): y - 2z + 3 = 0$$

- $\vec{AD}$ est un vecteur normal à (P_3) et F milieu de $[AD]$ appartient à (P_3)

$$(P_3): -4x - 4z + d = 0, d \in \mathbb{R}; F(-2; 0; 2) \in (P_3)$$

$$\Rightarrow 8 - 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

$$(P_3): -4x - 4z = 0 \text{ d'où } (P_3): x + z = 0$$

b-

$$M \in (P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) \Leftrightarrow M \in (P_1), M \in (P_2) \text{ et } M \in (P_3)$$

$$M \in (P_1) \Leftrightarrow AM = BM$$

$$M \in (P_2) \Leftrightarrow AM = CM$$

$$M \in (P_3) \Leftrightarrow AM = DM$$

$$\text{Ainsi } M \in (P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) \Leftrightarrow \begin{cases} AM = BM \\ AM = CM \\ AM = DM \end{cases}$$

$$AM = BM = MC = DM \text{ D'où}$$

c- Résolvons dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$(S): \begin{cases} x - y - 2z + 2 = 0 & L_1 \\ y - 2z + 3 = 0 & L_2 \\ x + z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z + 2 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0 \\ -y - 3z + 2 = 0 & L_3 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z + 2 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0 \\ -5z + 5 = 0 & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$-5z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = 1$$

$$\text{Pour } z = 1, y - 2 + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -1$$

$$\text{Pour } z = 1, y = -1, x + 1 - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{D'où } S_{\mathbb{R}^3} = \{(-1; -1; 1)\}$$

d- Dédudons que $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \{\Omega\}$ et Précisons les coordonnées du centre Ω de la sphère du château d'eau.

$$M \in (P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z + 2 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; z) = (-1; -1; 1)$$

$$\text{Par ailleurs } M \in (P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) \Leftrightarrow$$

$$AM = BM = CM = DM$$

Ω étant le centre de la sphère et ABCD inscrit dans la sphère on a : $A\Omega = B\Omega = C\Omega = D\Omega$ ainsi

$$M \in (P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) \Leftrightarrow M = \Omega \text{ d'où}$$

$$(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \{\Omega\} \text{ avec } \Omega(-1; -1; 1)$$

Problème 2 :

4) a- Linéarisons $\sin^6 x$

$$\sin^6 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^6$$

$$= -\frac{1}{64}(e^{2x} - e^{-2x})^6$$

$$= -\frac{1}{64}[e^{12x} - 6e^{10x} + 15e^{8x} - 20 + 15e^{-8x} - 6e^{-10x} + e^{-12x}]$$

$$= -\frac{1}{64}[e^{12x} + e^{-12x} - 6(e^{10x} + e^{-10x}) + 15(e^{8x} + e^{-8x}) - 20]$$

$$= -\frac{1}{64}(2\cos 6x - 12\cos 4x + 30\cos 2x - 20) \quad \text{d'où :}$$

$$\sin^6 x = -\frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}$$

b-Déduisons une primitive de la fonction

$u : x \mapsto \sin^6 x$ sur $[-1;1]$

Soit U une primitive de u sur $[-1;1]$

$$U : x \mapsto -\frac{1}{192}\sin 6x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{5}{16}x$$

c- Précisons le signe de α puis calculons α

$$\alpha = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos x)^3 (1 + \cos x)^4 dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos x)^3 (1 + \cos x)^3 (1 + \cos x) dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} ((1 - \cos x)(1 + \cos x))^3 (1 + \cos x) dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos^2 x)^3 (1 + \cos x) dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos x) \sin^6 x dx \quad \text{soit } t(x) = (1 + \cos x) \sin^6 x$$

t est continue sur $[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}]$ comme produit de fonctions

continues sur $[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}]$. De plus, $\forall x \in [-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}], t(x) \geq 0$

$$\text{donc } \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} t(x) dx \geq 0 \quad \text{d'où } \alpha \geq 0$$

Calcul de α .

t est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

$$t(-x) = (1 + \cos(-x))(\sin(-x))^6$$

$$= (1 + \cos x) \sin^6 x = t(x) \quad \text{donc } t \text{ est une fonction paire.}$$

t est une fonction paire et continue sur $\mathbb{R}$ et $(0; \frac{\pi}{6}) \in \mathbb{R}^+$

alors

$$\alpha = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} t(x) dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos x) \sin^6 x dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^6 x dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \sin^6 x dx$$

$$= 2[U(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{2}{7}[\sin^7 x]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2\left[-\frac{1}{192}\sin 6x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{5}{16}x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{2}{7}\left[\sin^7 x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{on trouve } \alpha = -\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{5\pi}{48} + \frac{1}{448}$$

Problème 3 :

5) Etudions les variations de h

h étant une fonction polynôme définie de $]-1; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$,

alors h est définie et dérivable sur $]-1; +\infty[$.

$$\forall x \in]-1; +\infty[,$$

$$h'(x) = 6(x+1)^2 + [4(x+1)^2 + 8x(x+1)]$$

$$= 10(x+1)^2 + 8x(x+1)$$

$$= (x+1)[10x+10+8x]$$

$$= (x+1)(18x+10) \quad \text{d'où}$$

$$h'(x) = (x+1)(18x+10)$$

$$\text{Posons } h'(x) = 0$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(18x+10) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou}$$

$$x = -\frac{5}{9} \text{ or } -1 \notin]-1; +\infty[\text{ donc } h'(x) = 0 \text{ pour } x = -\frac{5}{9}$$

x	-1	$-\frac{5}{9}$	$+\infty$
$h'(x)$		-	+

$\forall x \in]-1; -\frac{5}{9}[, h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante

sur $]-1; -\frac{5}{9}[$

$\forall x \in]-\frac{5}{9}; +\infty[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement

croissante sur $]-\frac{5}{9}; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} 2(x+1)^3 + 4x(x+1)^2 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(x+1)^3 + 4x(x+1)^2 - 1 = +\infty$$

Tableau de variation de h

x	-1	$-\frac{5}{9}$	$+\infty$
$h'(x)$		0	
$h(x)$	-1	$h(-\frac{5}{9})$	$+\infty$

$$h\left(-\frac{5}{9}\right) = 2\left(\frac{4}{9}\right)^3 - \frac{20}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^2 - 1 = -\frac{307}{243}$$

b- Démontrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution x_0 telle que $-\frac{5}{9} < x_0 < 0$

$$\bullet \quad h\left(-1; -\frac{5}{9}\right] = \left[-\frac{307}{243}; -1\right] \text{ et } 0 \notin \left[-\frac{307}{243}; -1\right]$$

$$\bullet \quad h\left(-\frac{5}{9}; +\infty\right) = \left[-\frac{307}{243}; +\infty\right]$$

h est continue et strictement croissante sur $]-\frac{5}{9}; +\infty[$ et

$$0 \in \left[-\frac{307}{243}; +\infty\right] \text{ donc l'équation}$$

$h(x) = 0$ admet une unique solution x_0

$$\left]-\frac{5}{9}; 0\right[\subset \left]-\frac{5}{9}; +\infty\right[\text{ et } h\left(-\frac{5}{9}\right) = -\frac{307}{243} < 0 ; \quad h$$

$$(0) = 1 > 0 \text{ donc } -\frac{5}{9} < x_0 < 0$$

b- Dédudons le signe de $h(x)$

Des variations de h on déduit :

$$\begin{cases} h(x) = 0, & \text{pour } x = x_0 \\ h(x) < 0, & \text{pour } x \in \left]-1; x_0\right[\\ h(x) > 0, & \text{pour } x \in]x_0; +\infty[\end{cases}$$

d- Déterminons un encadrement de x_0

$$-0,5 < -0,4 < -0,3 < -0,2 < -0,1 < 0$$

on a : $h(-0,2) < 0$ et $h(-0,1) > 0$ donc

$$-0,2 < x_0 < -0,1$$

6) a- Calculons les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition D_1

$$D_1 = \{x \in]0; +\infty[/ x+1 > 0\}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x+1 > 0 \text{ donc } D_1 =]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x(x+1)^2 + 1 - \ln(x+1) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x(x+1)^2 + 1 - \ln(x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[2x(x+1) + \frac{1}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} \right]$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x(x+1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

b- Démontrons que pour tout x élément de D_1

$$g'(x) = \frac{h(x)}{x+1}$$

La fonction polynôme $u_1 : x \mapsto 2x(x+1)^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0; +\infty[$ et la fonction polynôme $u_2 : x \mapsto x+1$ est dérivable et strictement positive sur $]0; +\infty[$ or $g = u_1 - \ln u_2$ sur $]0; +\infty[$ g est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{2(x+1)^2 + 4x(x+1) - \frac{1}{x+1}}{x+1} = \frac{2(x+1)^3 + 4x(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2}$$

$$2(x+1)^3 + 4x(x+1)^2 - 1 = h(x) \text{ d'où}$$

$$\forall x \in D_1, g'(x) = \frac{h(x)}{x+1}$$

c- Dressons le tableau des variations de g

le signe de $g(x)$.

$\forall x \in]0; +\infty[, x+1 > 0$ donc le signe de $g(x)$ est le même que celui de $h(x)$.

$\forall x \in]x_0; +\infty[$, $h(x) > 0$ et $]0; +\infty[\subset]x_0; +\infty[$ donc

$\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) > 0$

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	1	$+\infty$

Du tableau des variations on a : $\forall x \in]0; +\infty[$, $g(x) > 0$

7) a- Déterminons le domaine de définition D_2 de f

$D_2 = E_1 \cup E_2$ avec

$E_1 = \{x \in]0; +\infty[/ x+1 > 0\}$ et

$E_2 = \{x \in]-\infty; 0[/ x + e^{m-x} \in \mathbb{R}\}$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $x+1 > 0$ alors $E_1 =]0; +\infty[$

$\forall x \in]-\infty; 0[$, $x + e^{m-x} \in \mathbb{R}$, pour $m \in \mathbb{R}$ donc

$E_2 =]-\infty; 0[$ ainsi

$D_2 =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R}$, on a : $D_2 = \mathbb{R}$

b- Calculons les limites de f aux bornes de D_2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{m-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (m-x) \left[\frac{x}{m-x} + \frac{e^{m-x}}{m-x} \right] = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (m-x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{m-x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{m-x}}{m-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + x^2 + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty \quad \text{car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

c- Valeur(s) de m / f soit continue.

$$0 \in D_2; \lim_{x \rightarrow 0^-} f = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + e^{m-x} = e^m;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x^2 + \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 1 \text{ et } f(0) = e^m$$

$$f \text{ est continue en } 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} f = f(0)$$

$$\Leftrightarrow e^m = 1$$

$$\Leftrightarrow m = 0$$

8) a- Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + e^{-x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 0 \quad \text{car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1 \end{cases}$$

Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^2 + \frac{\ln(x+1)}{x+1} - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{1}{x+1} \times \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \text{ donc } f \text{ est dérivable à droite en } 0$$

$$\text{et } f'_d(0) = 1$$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0.

b- Calculons $f'(x)$

f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ comme somme de fonctions dérivables et

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = 1 - e^{-x}$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et

$$\forall x \in]0; +\infty[,$$

$$f'(x) = 2x + \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)^2 + 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \text{ or}$$

$$2x(x+1)^2 + 1 - \ln(x+1) = g(x)$$

$$\text{D'où } \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

c- Etudions le signe de $f'(x)$

$$\bullet \forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = 1 - e^{-x}$$

$$x \in]-\infty; 0[\Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow$$

$$-e^{-x} < -1 \quad 1 - e^{-x} < 0 \text{ d'où}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) < 0$$

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2},$$

$\forall x \in]0; +\infty[, (x+1)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ alors $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$

d- Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

9) a- Démontrons que (C_f) admet une branche parabolique en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty, \text{ calculons } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{e^{-x}}{-x} = -\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = -\infty \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées en $-\infty$

$$\text{b- Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 - x^2]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} = 0$$

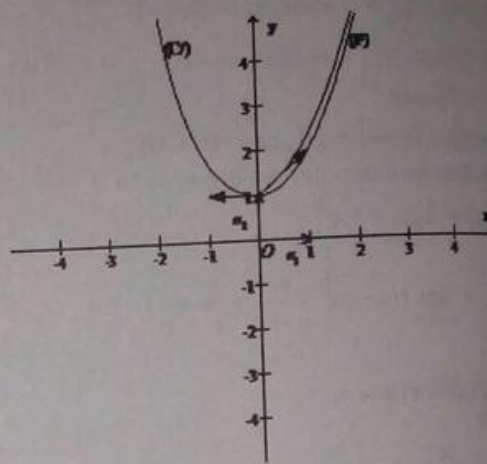
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 - x^2] = 0$$

, alors la parabole (P) d'équation $y = 1 + x^2$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$

10) construction de (P) , (C_f)

(C_f) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes définies par :

$$(T_g) : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ et } (T_d) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$



CORRIGE TYPE DE LA S.E N°12

Problème 1 :

1- a) Justifions que $B \in (D)$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{AM} = \vec{v}$$

$$\text{Calculons } \vec{u} \wedge \vec{AB} \quad \vec{u}(1; 2; 3)$$

$$\vec{u}(1; 2; 3) \text{ et } \vec{AB}(-1; -1; 1)$$

$$\vec{u} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (2+3)\vec{i} + (-3-1)\vec{j} + (-1+2)\vec{k}$$

$$= 5\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} \text{ or } \vec{v} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$$

Donc $\vec{u} \wedge \vec{AB} = \vec{v}$ d'où le point B appartient à l'ensemble (D)

b) Déduisons l'ensemble (D)

$$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{AM} = \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{AM} = \vec{u} \wedge \vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{AM} - \vec{u} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{u} \wedge (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \wedge (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0} \text{ d'où l'ensemble (D) est une}$$

droite passant par B et dirigée par le vecteur $\vec{u}$

2- Déterminons une équation cartésienne du plan (P)

Par hypothèse un repère du plan (P) est $(B; \vec{u}, \overrightarrow{AB})$ donc un

vecteur normal à (P) est $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{v}$ alors (P) :

$$5x - 4y + z + d = 0 \text{ avec } d \in \mathbb{R}; B \in (P) \Leftrightarrow$$

$$-4 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2 \text{ d'où : (P) :}$$

$$5x - 4y + z + 2 = 0$$

3- a) Justifions que $\overrightarrow{OV} = \vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - \vec{k}$

$$\{V\} = (P) \cap (\Delta')$$

$$(\Delta') : x - 2 = 2y - 4 = \frac{z - 2}{3}$$

Posons $x - 2 = 2y - 4 = \frac{z - 2}{3} = \alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = \alpha \\ 2y - 4 = \alpha; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ \frac{z - 2}{3} = \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 2 + \frac{1}{2}\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + 3\alpha \end{cases}$$

Donc $\forall M \in (P) \cap (\Delta') \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 + \frac{1}{2}\alpha & (2) \end{cases}, (\alpha \in \mathbb{R}) ; (1), (2) \text{ et } (3) \text{ dans}$$

$$\begin{cases} z = 2 + 3\alpha & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4y + z + 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

(4) permet d'obtenir $\alpha = -1$ on a donc :

$$\begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

alors $V\left(1; \frac{3}{2}; -1\right)$ par suite $\overrightarrow{OV} = \vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - \vec{k}$

b) Démontrons que (Q) est un plan

$$M \in (Q) \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ car } I = \text{bar}\{(A, -2); (B, 1); (C, 2)\}$$

alors (Q) est un plan passant par I et d'un vecteur normal

$\overrightarrow{AB}$

Déduisons une équation cartésienne de (Q)

Un vecteur normal à (Q) est le vecteur $\overrightarrow{AB}(-1; -1; 1)$

donc (Q) : $-x - y + z + d' = 0$ avec $d' \in \mathbb{R}$

$I = \text{bar}\{(A, -2); (B, 1); (C, 2)\}$ on trouve $I(0; -1; 4)$;

$$I \in (Q) \Leftrightarrow 0 + 1 + 4 + d' = 0$$

$$\Leftrightarrow d' = -5 \text{ d'où (Q) : } -x - y + z - 5 = 0$$

c) Déterminons la taille minimale des experts qui courent de danger

Cette taille minimum est la distance du point V au plan (Q)

$$d(V, (Q)) = \frac{|-x_V - y_V + z_V - 5|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} u.l$$

$$d(V, (Q)) = \frac{\left|-1 - \frac{3}{2} - 1 - 5\right|}{\sqrt{3}} \times 3,5 \text{ dm}$$

$$= \frac{17}{2\sqrt{3}} \times 3,5 \text{ dm}$$

$$= 17,17 \text{ dm} = 1,72 \text{ m d'où la taille minimale des}$$

experts qui courent de danger en accédant à cette salle au moment où le brasseur est en marche est de 1,72 mètre

Problème 2 :

4- a) Démontrons que (V_n) est décroissante

$$V_{n+1} = \int_0^1 2^x x^n dx ; V_n = \int_0^1 2^x x^{n-1} dx$$

$$V_{n+1} - V_n = \int_0^1 2^x x^n dx - \int_0^1 2^x x^{n-1} dx$$

$$= \int_0^1 2^x x^n (1 - x^{-1}) dx$$

$$= \int_0^1 2^x x^n \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$$

La fonction $x \mapsto 2^x x^n \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ est continue sur $]0; 1]$

comme produit de fonctions continues et $\forall x \in [0; 1]$ et avec

$$n \in \mathbb{N}^* \quad 2^x x^n \geq 0 \quad (1)$$

$$\forall x \in]0; 1]; \frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} < 0 \quad (2)$$

De (1) et (2), $\forall x \in]0; 1], 2^x x^n \left(1 - \frac{1}{x}\right) < 0$

La fonction $x \mapsto 2^x x^n \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ est continue et négative sur

$[0;1]$ donc $\int_0^1 2^x x^n \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx < 0$ alors $V_{n+1} - V_n < 0$

alors la suite (V_n) est décroissante

b) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n \geq 0$

$\forall x \in [0;1], 2^x > 0$ et $x^{n-1} \geq 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ donc $2^x x^{n-1} \geq 0$

Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $x \mapsto 2^x x^{n-1}$ est continue et positive sur $[0;1]$ donc $\int_0^1 2^x x^{n-1} dx \geq 0 \Leftrightarrow V_n \geq 0$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n \geq 0$$

Déduisons que la suite (V_n) est convergente

(V_n) est décroissante et minorée alors (V_n) est convergente

5- a) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$V_{n+1} = \frac{2 - nV_n}{\ln 2}$$

$$V_{n+1} = \int_0^1 2^x x^n dx = \int_0^1 e^{x \ln 2} x^n dx$$

Posons $u'(x) = e^{x \ln 2}$ et prenons $u(x) = \frac{1}{\ln 2} e^{x \ln 2}$

$$v(x) = x^n \text{ et } v'(x) = nx^{n-1}$$

$$V_{n+1} = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{\ln 2} e^{x \ln 2} x^n \right]_0^1 - \frac{n}{\ln 2} \int_0^1 e^{x \ln 2} x^{n-1} dx$$

$$= \frac{2}{\ln 2} - \frac{n}{\ln 2} V_n \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a :}$$

$$V_{n+1} = \frac{2 - nV_n}{\ln 2}$$

b) Déterminons V_1 et V_2

$$V_1 = \int_0^1 2^x dx = \int_0^1 e^{x \ln 2} dx = \left[\frac{1}{\ln 2} e^{x \ln 2} \right]_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \text{ donc}$$

$$V_1 = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,44 \text{ alors la vente de la première année est de 1,44 tonne}$$

$V_2 = \frac{2 - V_1}{\ln 2}$ on trouve $V_2 = \frac{2 \ln 2 - 1}{(\ln 2)^2} \approx 0,8$ alors la vente de la deuxième année est de 0,8 tonne

c) Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$,

$$V_{n-1} = \frac{2 - V_n \ln 2}{n-1}$$

$$V_{n+1} = \frac{2 - nV_n}{\ln 2} \text{ pour } n = n-1 \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

$$\text{on a : } V_n = \frac{2 - (n-1)V_{n-1}}{\ln 2} \Leftrightarrow$$

$$V_n \ln 2 = 2 - (n-1)V_{n-1} \Leftrightarrow (n-1)V_{n-1} = 2 - V_n \ln 2$$

$$\Leftrightarrow V_{n-1} = \frac{2 - V_n \ln 2}{n-1} \text{ d'où}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, V_{n-1} = \frac{2 - V_n \ln 2}{n-1}$$

6- a) Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$,

$$\frac{2}{n + \ln 2} \leq V_n \leq \frac{2}{n-1 + \ln 2}$$

$$\frac{2}{n + \ln 2} - V_n = \frac{2 - (n + \ln 2)V_n}{n + \ln 2}$$

$$= \frac{2 - nV_n - V_n \ln 2}{n + \ln 2}$$

$$= \frac{V_{n+1} \ln 2 - V_n \ln 2}{n + \ln 2}$$

$$= \frac{(V_{n+1} - V_n) \ln 2}{n + \ln 2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \frac{\ln 2}{n + \ln 2} > 0 \text{ et } V_{n+1} - V_n \leq 0 \text{ (car}$$

(V_n) est décroissante)

$$\text{Donc } \frac{(V_{n+1} - V_n) \ln 2}{n + \ln 2} \leq 0, \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\},$$

$$\frac{2}{n + \ln 2} \leq V_n \text{ (1)}$$

$$V_n - \frac{2}{n-1 + \ln 2} = \frac{(n-1 + \ln 2)V_n - 2}{n-1 + \ln 2}$$

$$= \frac{(n-1)V_n + V_n \ln 2 - 2}{n-1 + \ln 2}$$

$$= \frac{(n-1)V_n - 2 + V_n \ln 2}{n-1 + \ln 2}$$

$$= \frac{(n-1)V_n - (n-1)V_{n-1}}{n-1 + \ln 2}$$

$$= \frac{(n-1)(V_n - V_{n-1})}{n-1 + \ln 2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{n-1}{n-1+\ln 2} > 0$ et $V_n - V_{n-1} \leq 0$ (car (V_n) est une suite décroissante)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, V_n - \frac{2}{n-1+\ln 2} \leq 0$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, V_n \leq \frac{2}{n-1+\ln 2} \quad (2)$$

De (1) et (2) $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},$

$$\frac{2}{n+\ln 2} \leq V_n \leq \frac{2}{n-1+\ln 2}$$

b) Dédudons la limite de la suite (V_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+\ln 2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n-1+\ln 2} = 0 \quad \text{d'où}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

c) Les politiques actuelles de la société ne lui permettent pas d'exister à long terme car à long terme ($n \rightarrow +\infty$), les ventes V_n de la société à voisine à zéro.

Problème 3 :

7- a) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = -1 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1$$

$$\text{D'où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$$

Etudions la continuité de f en 0

$$D_f = \{x \in]-\infty, 0[\mid x \neq 0\} \cup \{x \in]0, +\infty[\mid x > 0\} \cup \{0\}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + e^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + e^x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} + \frac{e^x - 1}{x} = -1 + 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2(1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - x^2 \ln x = 0$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \text{donc } f \text{ est continue en } 0$$

b) Prouvons que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} + e^x - 2}{x^2} = 1$

posons $X = e^x$

$$X = e^x \Leftrightarrow x = \ln X$$

Si $x \rightarrow 0^-$, $X \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} + e^x - 2}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 1} \frac{e^{-\ln X} + X - 2}{(\ln X)^2}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 1} \frac{1 + X - 2}{(\ln X)^2}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 1} \frac{X^2 - 2X + 1}{X(\ln X)^2}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 1} \frac{1}{X} \times \frac{(X-1)^2}{(\ln X)^2}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 1} \frac{1}{X} \times \frac{1}{\left(\frac{\ln X}{X-1}\right)^2} = 1 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{X \rightarrow 1} \frac{1}{X} = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1 \end{cases}$$

$$\text{D'où} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} + e^x - 2}{x^2} = 1$$

c) Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} + e^x - 2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} + e^x - 2}{x^2} = 1 \quad \text{d'après 7-b)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \quad \text{donc } f \text{ est dérivable à gauche en } 0$$

$$\text{et } f'_g(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - x \ln x = 0$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \quad \text{donc } f \text{ est dérivable à droite en } 0$$

$$\text{et } f'_d(0) = 0$$

On a : $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0

Interprétation graphique :

La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes définies par :

$$(T_g) : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = x \end{cases} \quad \text{et} \quad (T_d) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

8- a) Etudions les variations de u

$$u(x) = (x+1)e^{-x} - (x-1)e^x - 2$$

Correction des évaluations

- $D_u =]-\infty; 0[$
- u est continue et dérivable sur $]-\infty; 0[$ comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in]-\infty; 0[, \\ u(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} - e^x - (x-1)e^x \\ = e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} - e^x - xe^x + e^x \\ = -x(e^{-x} + e^x)$$

$\forall x \in]-\infty; 0[, e^{-x} + e^x > 0$ donc le signe de $u(x)$ dépend de $-x$, $\forall x \in]-\infty; 0[, -x > 0$ donc $\forall x \in]-\infty; 0[, u(x) > 0$, alors u est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

- Limite aux bornes de D_u

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-x} - (x-1)e^x - 2 = -\infty, \text{ car} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-x} - xe^x + e^x - 2 = -\infty, \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)e^{-x} - (x-1)e^x - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$$

- Tableau de variation de u

x	$-\infty$	0
$u(x)$	$-\infty$	0
		$+$

Signe de $u(x)$

Du tableau de variation de u on a : $\forall x \in]-\infty; 0[, u(x) < 0$

b) Etudions les variations de la fonction f

f est continue et dérivable sur $]-\infty; 0[$ comme quotients de fonctions dérivables

$$\forall x \in]-\infty; 0[,$$

$$f'(x) = \frac{(-e^{-x} + e^x)x - (e^{-x} + e^x - 2)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-xe^{-x} + xe^x - e^{-x} + e^x + 2}{x^2}$$

$$= \frac{-(x+1)e^{-x} + (x-1)e^x + 2}{x^2} = \frac{-u(x)}{x^2}$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produits de fonctions dérivables. $\forall x \in]0; +\infty[,$

$$f(x) = 2x(1 - \ln x) - \frac{1}{x}x^2 \\ = 2x - 2x \ln x - x \\ = x(1 - 2 \ln x)$$

Signe de $f'(x)$

$\forall x \in]-\infty; 0[, x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de $-u(x)$, de 8-a), $\forall x \in]-\infty; 0[, -u(x) > 0$ donc

$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0$

$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ dépend de $1 - 2 \ln x$

$\forall x \in]0; +\infty[,$ posons $1 - 2 \ln x \leq 0$

$$1 - 2 \ln x \leq 0 \Leftrightarrow 2 \ln x \geq 1 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \in \left[e^{\frac{1}{2}}; +\infty \right[$$

$$\text{On a alors : } \begin{cases} \forall x \in]+\infty; 0[\cup]0; e^{\frac{1}{2}}[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in \left[e^{\frac{1}{2}}; +\infty \right[, f'(x) < 0 \\ f'\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 0 \end{cases}$$

Alors f est strictement croissante sur $]-\infty; e^{\frac{1}{2}}[$ et

strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}}; +\infty \right[$

Limites de f aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + e^x - 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^{-x}}{-x} + \frac{e^x - 2}{x} = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^{-x}}{-x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 2}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(1 - \ln x) = -\infty, \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	$\frac{e}{2}$	$-\infty$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{e}{2}$$

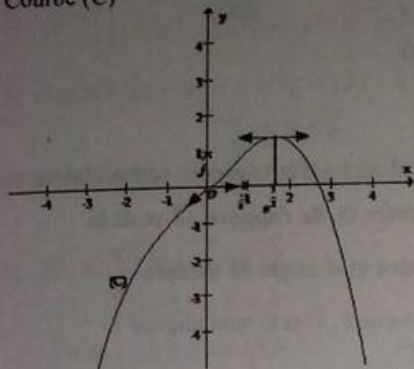
c) Etudions les branches infinies à la courbe (C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + e^x - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)^2} + \frac{e^x - 2}{x^2} = +\infty$$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty \text{ donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de } +\infty$$

Courbe (C)



9- a) Justifions que $\forall x \in I, 1 \leq h'(x) \leq \frac{3}{2}$

$$I = \left[e^{-\frac{1}{2}}; 1 \right], \forall x \in I, h'(x) = x(1 - 2 \ln x), h' \text{ est dérivable}$$

$$\text{sur } I \text{ et } \forall x \in \left[e^{-\frac{1}{2}}; 1 \right], h''(x) = -(1 + 2 \ln x)$$

$$\forall x \in I \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \ln x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq 2 \ln x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + 2 \ln x \leq 1 \text{ donc } \forall x \in I, 1 + 2 \ln x \geq 0, \text{ alors } \forall x \in I, h''(x) \leq 0 \text{ ainsi } h' \text{ est décroissante sur } I$$

$$x \in I \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}} \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow h'(1) \leq h'(x) \leq h'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq h'(x) \leq \frac{3}{2} \text{ d'où } \forall x \in I, 1 \leq h'(x) \leq \frac{3}{2}$$

Déduisons le sens de variation de g

$$g(x) = h(x) - x$$

g est dérivable sur I comme sommes de fonctions

$$\text{dérivables: } \forall x \in I, g'(x) = h'(x) - 1$$

$$\forall x \in I, 1 \leq h'(x) \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2} \text{ donc}$$

$$\forall x \in I, g'(x) \geq 0 \text{ donc } g \text{ est croissante sur } I$$

b) Démontrons que l'équation $h(x) = x$ admet dans I une solution unique α

$$h(x) = x \Leftrightarrow h(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

g est continue et strictement croissante sur $\left[e^{-\frac{1}{2}}; 1 \right]$

$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = h\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) - e^{-\frac{1}{2}} = e^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - e^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2e} - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$g(1) = h(1) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$1 \in I$ et $g(1) = 0$ alors l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique $\alpha = 1$

c) Démontrons que $\forall x \in I$, on a :

$$|h(x) - 1| \leq \frac{3}{2}|x - 1|$$

$$h \text{ est dérivable sur } I \text{ et } \forall x \in I \text{ on a : } 1 \leq h'(x) \leq \frac{3}{2}$$

par suite $|h'(x)| \leq \frac{3}{2}$ donc d'après le théorème des

inégalités des accroissements finis on a : $\forall x \in \left[e^{-\frac{1}{2}}; 1 \right];$

$$|h(x) - h(1)| \leq \frac{3}{2}|x - 1| \text{ d'où } \forall x \in I, |h(x) - 1| \leq \frac{3}{2}|x - 1| \text{ (Car } h(1) = 1)$$

d) Démontrons que h admet une bijection réciproque h^{-1} .

$$I \subset \left] -\infty; e^{\frac{1}{2}} \right] \text{ donc } f \text{ est continue et strictement croissante}$$

sur I alors f réalise une bijection de I sur

$$f(I) = \left[f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right); f(1) \right] = \left[\frac{3}{2e}; 1 \right]$$

h étant une restriction de f à l'intervalle I , d'où h admet une bijection réciproque h^{-1}

$$\text{Calculons } (h^{-1})'(1)$$

$$(h^{-1})' = \frac{1}{h'(h^{-1}(1))} = \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{1} = 1 \text{ d'où } (h^{-1})'(1) = 1$$

10- Valeurs de x pour lesquelles la société réalise un bénéfice.

$$\text{Posons pour } x \in]0; +\infty[f(x) = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Graphiquement $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; e[$ d'où la société réalise un bénéfice lorsque les variations des prix pratiqués autour du prix P est compris dans l'intervalle $]0; e[$.

CORRIGE TYPE DE LA S.E N° 13**Problème 1 :**1- a) Donne la forme exponentielle de z_C et z_D .

$$|z_C| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

soit θ_1 un argument de z_C . θ_1 est tel que :

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{on peut prendre } \theta_1 = \frac{\pi}{6} \text{ d'où}$$

$$z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

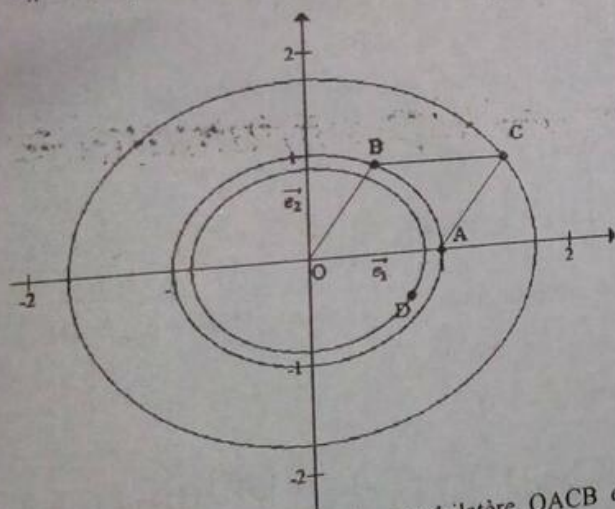
$$|z_D| = \left| \frac{-\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} \right|$$

$$= \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ un argument de } z_D \text{ est :}$$

$$\theta_2 = \pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \text{ d'où } z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

b) Plaçons les points A, B, C et D

$$z_A = 1, z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}, z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{11\pi}{6}}$$



c) Démontrons que le quadrilatère OACB est un losange :

$$\overline{z_{OA}} = z_A = 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \overline{z_{BC}} &= z_C - z_B = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 1 \quad (2) \end{aligned}$$

(1) et (2) on a :

$\overline{OA} = \overline{BC}$ de plus $OA = OB = 1$ alors OACB est un parallélogramme dont le triangle OAB est isocèle de sommet O d'où OACB est un losange.

d) Démontrons que les points A, C et D sont alignés.

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = -\frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

d'où les points A, C et D sont alignés.

2- a) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de la similitude plane directe s

On a : $s: z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} s(O) = O \\ s(A) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{z_C}{z_A} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \\ b = 0 \end{cases} \text{ alors}$$

$$s: z' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} z$$

$a \in \mathbb{C}^*$ et $|a| = \sqrt{3}$ d'où s est la composée commutative de l'homothétie de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et de la rotation de même centre et d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$

b) Démontrons que F, C et G sont alignés

$$\text{On a : } \begin{cases} s(A) = C \\ s(D) = F \\ s(C) = G \end{cases} \text{ comme les points A, C et D sont alignés d'où les points F, C et G sont alignés}$$

c) Déterminons l'écriture de F

$$s(D) = F \Rightarrow z_F = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} z_D \Rightarrow z_F = \frac{3}{2}$$

3- a) Déterminons l'écriture complexe de $f = \text{hos}$, en fonction de k.

$$f = \text{hos} \Rightarrow z = k \left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} z \right) + i \text{ d'où}$$

$$f: z' = k\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} z + i$$

b) Déterminons k pour que f soit une similitude plane directe de rapport 2, puis précisons les autres éléments caractéristiques de f.

$$|k\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}| = |k|\sqrt{3} = 2 \Leftrightarrow k = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ ou } k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Précisons les autres éléments caractéristiques de f.

$$\bullet \text{ si } k = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ l'angle est de mesure } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ et le}$$

$$\text{centre est le point d'affixe } \omega = \frac{i}{1 - 2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

- si $k = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ l'angle est de mesure $\theta' = \frac{7\pi}{6}$ et le

centre est le point d'affixe $\omega = \frac{i}{1+2e^{i\frac{\pi}{6}}}$

Problème 2 :

- 4- a) Calculons en fonction de x, y et z les coordonnées de $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$

$$\overrightarrow{AM}(x-1; y-2; z+4) \text{ et } \vec{u}(3; -2; 1)$$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} y-2 & -2 \\ z+4 & 1 \\ x-1 & 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 & 3 \\ y-2 & -2 \end{pmatrix} \text{ d'où}$$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}(y+2z+6; -x+3z+13; -2x-3y+8) \quad \text{b)}$$

$$\text{Déduisons } M \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3t+6 \\ y=-2t-2; t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+2z+6=4 \\ -x+3z+13=7 \\ -2x-3y+8=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+2z=-2 \\ -x+3z=-6 \\ -2x-3y=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3z+6 \\ y=-2z-2 \end{cases} \text{ en posant } z=t \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{R on obtient : } \begin{cases} x=3t+6 \\ y=-2t-2; (t \in \mathbb{R}) \text{ d'où} \\ z=t \end{cases}$$

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3t+6 \\ y=-2t-2; (t \in \mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$$

- c) Déduisons la nature de (Δ) et donne un repère de (Δ)

D'après 4-b) (Δ) est une droite de repère $(K_0; \vec{u})$ avec $K_0(6; -2; 0)$

- d) Calculons la distance de sécurité

Cette distance de sécurité est celle du point A à la droite (Δ) .

$$\text{Donc on a : } d(A; (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{AK_0} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} u.l$$

$$d(A; (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{OB}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ car } K_0 \in (\Delta) \text{ d'où}$$

$$\text{la distance de sécurité est : } d(A; (\Delta)) = \frac{\sqrt{966}}{14} u.l$$

- 5- a) Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$

$$\overrightarrow{AB}(3; 5; 6) : \vec{u}(3; -2; 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 3 \times 3 + 5 \times (-2) + 6 \times 1 \text{ d'où}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 5$$

- b) Démontrons que $M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$

$$M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 5$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \vec{u} = 5$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{BM} \cdot \vec{u} = 5$$

$$\Leftrightarrow 5 + \overrightarrow{BM} \cdot \vec{u} = 5 \text{ d'où}$$

$$M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{u} = 0$$

- c) Déterminons l'ensemble (Q) , puis donne une équation cartésienne de (Q)

D'après 5-b); (Q) est le plan passant par B et de vecteur normal $\vec{u}$ alors

$$(Q) : 3x - 2y + z + d = 0; d \in \mathbb{R}. B \in (Q) \text{ donc } d = 0$$

$$\text{d'où } (Q) : 3x - y + z = 0$$

- d) Etudions la position relative de (Δ) et (Q) puis détermine leur intersection.

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Δ) et un vecteur normal à (Q) donc $(\Delta) \perp (Q)$. Par suite (Δ) et (Q) sont sécants.

- e) Localisons par ses coordonnées le point où sera placé le piège

Ce point est le point H tel que : $\{H\} = (\Delta) \cap (Q)$

$$H \in (\Delta) \cap (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3t + 6 \\ y_H = -2t - 2 \\ z_H = t \\ 3x_H - y_H + z_H = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow 3(3t+6) - (-2t-2) + t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{22}{14} = -\frac{11}{7} \text{ en remplaçant } t \text{ dans la}$$

représentation paramétrique de (Δ) on obtient :

$$H\left(\frac{9}{7}; \frac{8}{7}; -\frac{11}{7}\right)$$

Problème 3 :

- 6- a) Démontrons que pour tout nombre réel x ,

$$g'(x) = \frac{2^x \ln 2}{(1+2^x)^2}, \text{ puis précisons le sens de variation de } g.$$

$$g(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$$

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} / 1 + 2^x \neq 0 \right\}$$

or $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + 2^x \neq 0$ donc $D_g = \mathbb{R}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables

sur $\mathbb{R}$. Remarquons que $g(x) = \frac{e^{x \ln 2}}{1 + e^{x \ln 2}}$

$\forall x \in \mathbb{R},$

$$g'(x) = \frac{(\ln 2)e^{x \ln 2}(1 + e^{x \ln 2}) - (\ln 2)e^{x \ln 2}(e^{x \ln 2})}{(1 + e^{x \ln 2})^2}$$

$$= \frac{(\ln 2)e^{x \ln 2} + (\ln 2)e^{2x \ln 2} - (\ln 2)e^{2x \ln 2}}{(1 + e^{x \ln 2})^2}$$

$$= \frac{(\ln 2)e^{x \ln 2}}{(1 + e^{x \ln 2})^2}$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{2^x \ln 2}{(1 + 2^x)^2}$$

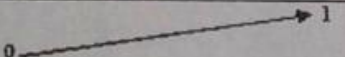
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2^x \ln 2}{(1 + 2^x)^2} > 0 \text{ donc } g \text{ est strictement croissante}$$

sur $\mathbb{R}$.

b) Dressons le tableau de variation de g
les calculs de limites aux bornes de D_g donne :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

Tableau de variation de g :

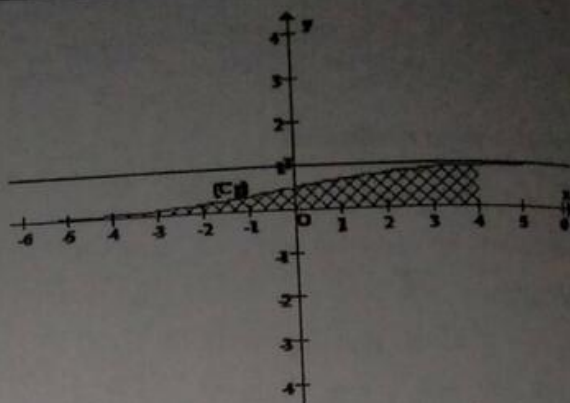
x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	0		1

c) Trace la courbe (C_g)

Etudions d'abord les branches infinies :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C_g) au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$, alors la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C_g) au voisinage de $+\infty$



7- a) Hachurons, sur le dessin, la portion de la ferme réservée à la production du « NERKA ».
(Voir figure)

b) Démontrons que, sur le terrain, l'aire de cette portion de la ferme est de 36 km^2 .

$$A = \left(\int_{-4}^4 g(x) dx \right) u.a$$

$$= \left[\frac{1}{\ln 2} \ln(1 + 2^x) \right]_{-4}^4$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \ln 2^4 \times 9 \text{ dam}^2$$

$$\text{d'où } A = 36 \text{ dam}^2$$

8- a) Etudions le sens de variation de k
 $k : I \rightarrow K(I)$

$$x \mapsto g(x) - x \text{ avec } I = [0; 1]$$

k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[0; 1]$.

$$\forall x \in [0; 1], h'(x) = g'(x) - 1$$

$$\text{On a : } 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \ln 2 \leq x \ln 2 \leq 2 \ln 2 \quad (1)$$

$$\forall x \in [0; 1], 1 \leq 2^x \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 1 + 2^x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 2^2 \leq (1 + 2^x)^2 \leq 3^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{(1 + 2^x)^2} \leq \frac{1}{9} \quad (2)$$

$$(1) \times (2) \Rightarrow \frac{\ln 2}{9} \leq \frac{2^x \ln 2}{(1 + 2^x)^2} \leq \frac{2 \ln 2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{9} - 1 \leq \frac{2^x \ln 2}{(1 + 2^x)^2} - 1 \leq \frac{\ln 2}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow -0,9229 \leq k'(x) \leq -0,6534 \text{ alors } \forall x \in [0; 1]$$

$k'(x) < 0$ par suite k est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

b) Démontrons que l'équation $k(x) = 0$ admet solution unique α .
 k est continue et

$k([0;1]) = [-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$; $0 \in [-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$ alors l'équation

$k(x) = 0$ admet une solution unique α dans $I = [0; 1]$.

9- a) Démontre que : $\forall x \in I, g(x) \in I$ et $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

D'après les variations de $g \quad \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \in I$ d'où
 $\forall x \in I, g(x) \in I$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \ln 2 \leq 2^x \ln 2 \leq 2 \ln 2 \quad (a)$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1}{(1+2^x)^2} \leq \frac{1}{4} \quad (b)$$

$$(a) \times (b) \Rightarrow \frac{\ln 2}{9} \leq g'(x) \leq \frac{2 \ln 2}{4} \leq \frac{1}{2} \text{ d'où}$$

$$\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

$$b) \text{ Dédus-en que : } \forall x \in I, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

g est dérivable sur I ; $\alpha \in I$ et $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

D'après la conséquence des inégalités des accroissements

finis on a : $\forall x \in I, |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$ or

$$g(\alpha) = \alpha \text{ d'où } \forall x \in I, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

10- a) Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$ et que $\forall n \in$

$$\mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

raisonnons par récurrence :

- $U_0 = 1 \in I$

- Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $U_k \in I$

$$U_k \in I \Rightarrow U_{k+1} = g(U_k) \in I \text{ d'après 9-a)}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$, donc d'après la question 9-b) on

$$a: |g(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

b) Dédus-en par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ D'après 10-a) on a :}$$

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_0 - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_1 - \alpha|$$

$$\vdots$$

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$$

En faisant le produit membre à membre et après simplification on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \alpha - U_0 \leq 0$$

$$\Rightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) Justifions que la suite U converge vers un réel à préciser.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ d'où } U \text{ est}$$

convergente vers α

d) Donnons, en fonction de α , la quantité de « NERIKI » que peut espérer Babatundé.
 Cette quantité serait : 100α

CORRIGE TYPE DE LA S.E N° 14

Problème 1 :

1- Résolvons par la méthode du pivot de Gauss le système

$$(S): \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y = 6 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 & L_1 \\ 3x + y = 6 & L_2 \\ x + y + z = 1 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 & L_1 \\ -5y - 6z = 6 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ -y - z = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 & L_1 \\ 5y + 6z = -6 & L_2 \\ z = -1 & L_3 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{cases}$$

$$L_2 \Rightarrow y = 0 \text{ et } L_1 \Rightarrow x = 2 \text{ d'où}$$

$$S_{IR} = \{(2; 0; -1)\}$$

$$S_{IR} = \{(2; 0; -1)\}$$

2- a) Montrons que les points H, G et K définissent un unique plan.

$$H(2;0;1), G(0;6;0) \text{ et } K(1;3;0). \overline{GH}(2;-6;1) \text{ et}$$

$$\overline{GK}(1;-3;0)$$

$$\overline{GH} \wedge \overline{GK} = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} \Rightarrow$$

$\overline{GH} \wedge \overline{GK} = 3\vec{i} + \vec{j} \neq \vec{0}$ donc les points H, G et K ne sont pas alignés, alors ils définissent un plan unique.

Correction des évaluations

b) Dédons une équation cartésienne du plan (R)

$\vec{GH} \wedge \vec{GK}$ est un vecteur normal à (R) on a : (R) :
 $3x + y + d = 0$ (avec $d \in \mathbb{R}$) or
 $G \in (R)$ donc $6 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$ d'où

$$(R) : 3x + y - 6 = 0$$

3- Déterminons un repère de (Δ) .

Posons $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{-z-1}{3} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ on obtient

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -1 - 3\alpha \end{cases} \text{ donc le point}$$

$S(0;1;-1) \in (\Delta)$ et $\vec{u}(2;2;-3)$ est un vecteur directeur

de (Δ) alors $(S; \vec{u})$ est un repère de (Δ)

Dédons que (Δ) est contenue dans le plan (P).

(P) : $x + 2y + 2z = 0$ et

$$x_s + 2y_s + 2z_s = 0 + 2(1) + 2(-1) = 2 - 2 = 0 \text{ d'où}$$

$S \in (P)$ (1)

$\vec{n}(1;2;2)$ est un vecteur normal à (P) et

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times (-3) = 6 - 6 = 0 \text{ donc } \vec{u} \text{ est}$$

un vecteur directeur de (P) alors $(\Delta) \subset (P)$ (2)

De (1) et (2) $(\Delta) \subset (P)$

4- Déterminons les coordonnées du point d'implantation du feu tricolore.

Les coordonnées de ce point sont solution du système

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y = 6 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Soit L ce point on a : $L(2;0;-1)$

Problème 2 :

5- Je calcule la probabilité de l'événement T

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\bar{D} \cap T) \\ = P(T/D) \times P(D) + P(T/\bar{D}) \times P(\bar{D}) \text{ on a :}$$

$$P(T) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} \Rightarrow P(T) = \frac{13}{30}$$

6- La probabilité qu'un conducteur non tombé dans le piège ne soit pas détecté

$$P(\bar{D}/\bar{T}) = \frac{P(\bar{D} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} \Rightarrow P(\bar{D}/\bar{T}) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{9}{10}}{1 - P(T)} \Rightarrow$$

$$P(\bar{D}/\bar{T}) = \frac{9}{10}$$

7- Calculons la probabilité que le conducteur tombe dans le piège

a) A « exactement 5 fois »

L'épreuve est de Bernoulli de paramètre $n=10$ et $p=\frac{13}{30}$

$$\text{donc } P(A) = C_{10}^5 \left(\frac{13}{30}\right)^5 \left(\frac{17}{30}\right)^5 \Rightarrow P(A) \approx 0,2249$$

b) B « au plus trois fois »

$$P(B) = C_{10}^0 \left(\frac{13}{30}\right)^0 \left(\frac{17}{30}\right)^{10} + C_{10}^1 \left(\frac{13}{30}\right)^1 \left(\frac{17}{30}\right)^9 + C_{10}^2 \left(\frac{13}{30}\right)^2 \left(\frac{17}{30}\right)^8 + C_{10}^3 \left(\frac{13}{30}\right)^3 \left(\frac{17}{30}\right)^7$$

$$P(B) = 0,3025$$

c) C « au moins une fois »

$$P(C) = 1 - \left(\frac{17}{30}\right)^{10} \Rightarrow P(C) = 0,9965$$

Problème 3 :

Partie A :

8- Résolvons l'équation (E) : $y'' - y(\ln 2)^2 = 0$

L'équation caractéristique associée à (E) est

$$r^2 - (\ln 2)^2 = 0$$

$$r^2 - (\ln 2)^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = (\ln 2)^2 \Rightarrow r_1 = \ln 2 \text{ ou}$$

$r_2 = -\ln 2$. Donc les solutions de (E) sont les fonctions

définies par : $f(x) = Ae^{x \ln 2} + Be^{-x \ln 2}$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$

9- Déterminons la solution φ

$$\varphi \text{ solution de (E) on a : } \begin{cases} \varphi(x) = Ae^{x \ln 2} + Be^{-x \ln 2} \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = \ln 2 \end{cases}$$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = A(\ln 2)e^{x \ln 2} - B(\ln 2)e^{-x \ln 2}$$

$$\varphi'(0) = A \ln 2 - B \ln 2 \quad \varphi'(0) = \ln 2 \Rightarrow A - B = 1$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \text{ on a : } \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$B = -\frac{1}{2}, \text{ d'où } \varphi(x) = \frac{1}{2}(2^x - 2^{-x})$$

Partie B :

10- a) Etudions la parité de u

$$D_u = \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a } (-x) \in \mathbb{R} \text{ (1)}$$

$$u(x) = \frac{1}{2}(2^x - 2^{-x}) \Leftrightarrow u(-x) = \frac{1}{2}(2^{-x} - 2^x)$$

$$\Leftrightarrow u(-x) = -\frac{1}{2}(2^x - 2^{-x})$$

$$u(x) = \frac{1}{2}(2^x - 2^{-x}) \Leftrightarrow u(-x) = -u(x) \quad (2)$$

De (1) et (2) u est impaire

b) Etudions le sens de variation de u
 u est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = \frac{1}{2}(\ln 2 \times 2^x - (-\ln 2) \times 2^{-x}) \Leftrightarrow$$

$$u'(x) = \frac{\ln 2}{2}(2^x + 2^{-x}), \quad u'(x) > 0,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ donc u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c) Dressons le tableau de variations de u .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(e^{x \ln 2} - e^{-x \ln 2}) = -\infty$$

car

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln 2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x \ln 2} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(e^{x \ln 2} - e^{-x \ln 2}) = +\infty$$

car

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x \ln 2} = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$u'(x)$		+
$u(x)$	$-\infty$	$+\infty$

d) Définissons la bijection réciproque de u^{-1}

u étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

alors u admet une bijection réciproque u^{-1}

$$\text{Posons } y = u(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(2^x - 2^{-x}) \Leftrightarrow$$

$$2y = 2^x - \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 2y \cdot 2^x - 1 = 0$$

Soit $X = 2^x$ avec $X > 0$ donc on a :

$$X^2 - 2yX - 1 = 0; \Delta = 4(y^2 + 1) > 0 \Rightarrow$$

$$X_1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1} \text{ ou}$$

$$X_2 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

On sait que $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 < y^2 + 1$

$$\Leftrightarrow |y| - \sqrt{y^2 + 1} < 0 \Rightarrow X_1 < 0 \text{ donc}$$

$$2^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow x = \frac{\ln(y + \sqrt{y^2 + 1})}{\ln 2}$$

u^{-1} est définie par :

$$u^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log_2(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

11- a) Etudions les branches infinies de (C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{u(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{e^{x \ln 2}}{x} + \frac{e^{-x \ln 2}}{-x \ln 2} (\ln 2) \right) = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x \ln 2}}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x \ln 2}}{-x \ln 2} = +\infty \end{cases}$$

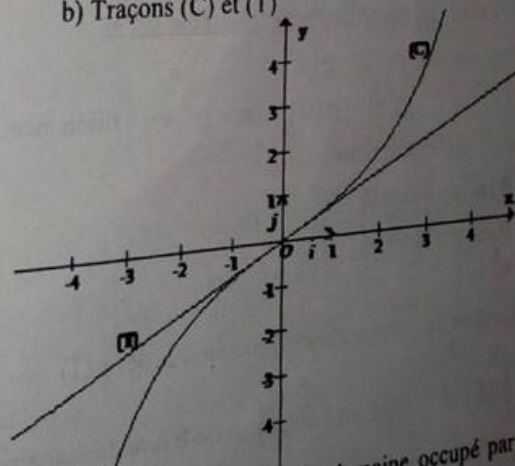
Donc (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left((\ln 2) \frac{e^{x \ln 2}}{x \ln 2} - \frac{e^{-x \ln 2}}{x} \right) = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 2}}{x \ln 2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x \ln 2}}{x} = 0 \end{cases}$$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$

b) Traçons (C) et (T)



c) Calculons l'aire du domaine occupé par le camp

$$\text{peut être} \quad A = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}(2^x - 2^{-x}) - x \ln 2 \right) dx \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\ln 2} e^{x \ln 2} + \frac{1}{\ln 2} e^{-x \ln 2} - x^2 \ln 2 \right]_0^2 \times 4 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A = 2 \left(\frac{9}{4 \ln 2} - 4 \ln 2 \right) \text{ cm}^2$$

Partie C :

12- a) Justifions que g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$$

La fonction $h: t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Par définition la fonction g est l'unique primitive de h qui s'annule en 0 donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$

b) Etudions la parité de g

$\forall t \in \mathbb{R}, (-t) \in \mathbb{R}$ et $h(-t) = h(t)$ donc h est paire

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $(-x) \in \mathbb{R}$.

$$g(-x) = \int_0^{-x} h(t) dt, \text{ posons } u = -t \text{ on a : } du = -dt \text{ et}$$

$$\begin{aligned} g(-x) &= \int_0^{-x} h(t) dt = \int_0^x h(-u) (-du) \\ &= - \int_0^x h(u) du = -g(x) \end{aligned}$$

d'où g est impaire

c) Etudions le sens de variation de g

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = h(x) \Rightarrow g'(x) = \sqrt{1+x^2} \text{ donc}$$

$g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) Etudions le signe de $g(x)$

si $x < 0$, alors $g(x) < g(0)$ car g est strictement croissante or $g(0) = 0$ donc :

$$\begin{cases} g(x) < 0, \text{ si } x \in]-\infty; 0[\\ g(x) < 0, \text{ si } x \in]0; +\infty[\\ g(0) = 0 \end{cases}$$

13- a) donnons une interprétation géométrique de $g(1)$

$$g(1) = \int_0^1 h(t) dt. g(1) \text{ est l'aire en unité d'aire du domaine}$$

limité par la courbe (C) de h , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$

b) Donnons une valeur de $g(1)$ par la méthode des trapèzes

$$\frac{b-a}{4} = \frac{1-0}{4} = 0,25$$

$$x_0 = 0, x_1 = 0,25, x_2 = 0,50, x_3 = 0,75 \text{ et } x_4 = 1$$

$$g(1) = 0,25 \left(\frac{1}{2} h(0) + h(0,25) + h(0,5) + h(0,75) + \frac{1}{2} h(1) \right)$$

on trouve $g(1) = 1,1515 \text{ u.a}$

14- a) Justifions que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f = g \circ u$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée des fonctions u et g , toutes dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculons $f'(x)$ et $f(0)$

$$f(x) = g(u(x))$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = u'(x) \times g'[u(x)]$, on sait que

$$u'(x) = \frac{\ln 2}{2} (2^x + 2^{-x})$$

$$f'(x) = \frac{\ln 2}{2} (2^x + 2^{-x}) \cdot \sqrt{1+[u(x)]^2} = \frac{\ln 2}{4} (2^x + 2^{-x})^2$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{\ln 2}{4} (2^{2x} + 2^{-2x} + 2)$$

$$f(0) = g[u(0)] = g(0) = 0 \text{ d'où } f(0) = 0$$

c) Déduisons l'expression de $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \ln 2 (e^{2x \ln 2} + e^{-2x \ln 2} + 2) \text{ on trouve donc}$$

$$f(x) = \frac{1}{8} (2^{2x} - 2^{-2x} + 4x \ln 2)$$

CORRIGE TYPE DE LA S.E N° 15 :

Problème 1 :

1°) a- Vérifions que D a pour coordonnées : $(1; -2; 2)$

$$\overline{AB}(-1; 1; 1) \text{ et } \overline{AC}(-1; -1; -1);$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \wedge \overline{AC}(0; -2; 2) \text{ or } \overline{AD} = \overline{AB} \wedge \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_D - 1 \\ x_D - 0 \\ x_D - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ d'où } D(1; -2; 2)$$

b- Déterminons un système d'équations paramétriques de la droite (Δ)

$(\Delta) \perp (ABC)$ donc un vecteur directeur de la droite (Δ) est $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$. $\forall M \in (\Delta)$ on a : $\overline{DM} = \alpha (\overline{AB} \wedge \overline{AC})$;

$$\alpha \in \mathbb{R}. \text{ Donc on a : } (\Delta) : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 - 2\alpha; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + 2\alpha \end{cases}$$

2°) a- Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC)

Un vecteur normal au plan (ABC) est $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(0; -2; 2)$ donc $(ABC) : -2y + 2z + d = 0$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC}(0; -2; 2) \text{ donc } (ABC) : -2y + 2z + d = 0$$

$A \in (ABC) \Rightarrow d=0$ d'où

$$(ABC): -y+z=0$$

b- Déterminons les coordonnées du point représentant l'ouverture sur la face (ABC)

Ce point est H et $\{H\} = (\Delta) \cap (ABC)$ donc on a :

$$\begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = -2 - 2\alpha \\ z_H = 2 + 2\alpha \\ -y_H + z_H = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = -2 - 2\alpha \\ z_H = 2 + 2\alpha \\ 2 + 2\alpha + 2 + 2\alpha = 0(1) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \alpha = -1 \text{ donc on obtient } \begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = 0 \\ z_H = 0 \end{cases} \text{ par suite}$$

$H(1;0;0)$

c- Déduisons la distance en mètre du point D au plan (ABC)

$$d(D, (ABC)) = DH \text{ car } (\Delta) = (DH) \perp (ABC)$$

$$DH = \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2} \times u.l$$

on obtient $DH = \sqrt{8} \times 3m$ d'où

$$d(D, (ABC)) = 6\sqrt{2}m^2$$

3°) a- Justifions que $ABCD$ est un tétraèdre

$$(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = 0 \times 0 + (-2 \times (-2)) + 2 \times 2 = 8 \neq 0$$

d'où $ABCD$ est un tétraèdre

b- Calcule en litre la capacité de la citerne

La capacité de la citerne est le volume du tétraèdre $ABCD$

$$\text{On a : } V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) \cdot \overline{AD}|_{u.v}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} |8| \times 27m^3$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = 36m^3 = 36.000dm^3 \text{ remarque } 1l = 1dm^3$$

D'où la capacité de la citerne est de 36.000 litres

4°) le maçon a bien respecté l'exigence de M. Kassim car M. Kassim voulait une citerne de capacité 36 000 litres : ce qui fait.

Problème 2 :

5°) a- Démontrons que l'écriture complexe de f est

$$z' = (-1+i)z + 3-i$$

$$f: \begin{cases} x' = -x - y + 3 \\ y' = x - y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x - y + 3 \\ iy' = ix - iy - i \end{cases}$$

$$\Rightarrow x' + iy' = -(x + iy) + i(x + iy) + 3 - i$$

$$\Rightarrow (x' + iy') = (x + iy)(-1+i) + 3 - i ; \quad M'(z') \text{ et}$$

$$M(z) \text{ d'où } f: z' = (-1+i)z + 3-i$$

b- Déterminons l'affixe du point F_0 tel que $f(F_0) = F$

on a : $z_F = (-1+i)z_{F_0} + 3-i$ et on obtient

$$z_{F_0} = \frac{z_F - 3 + i}{-1+i} = \frac{2i - 3 + i}{-1+i} = \frac{-3 + 3i}{-1+i} = 3$$

d'où $z_{F_0} = 3$

c- Démontrons que f est la composée d'une homothétie h et d'une rotation r dont tu préciseras les éléments caractéristiques.

$$f: z' = (-1+i)z + 3-i, \quad (-1+i) \in \mathbb{C}^* \text{ et}$$

$|-1+i| = \sqrt{2} \neq 1$, d'où f est la composée d'une homothétie h et d'une rotation r .

Éléments caractéristique de f .

- son centre Ω a pour affixe : $z_\Omega = \frac{3-i}{1-(-1+i)}$ on

$$\text{obtient } z_\Omega = \frac{7}{5} + \frac{1}{5}i \text{ donc } \Omega\left(\frac{7}{5}; \frac{1}{5}\right)$$

- son rapport $k = \sqrt{2}$

- et soit θ son angle. θ est un argument de $(-1+i)$

$$\text{donc on a : } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ on peut donc prendre}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

6°) a- Déterminons l'écriture complexe de g .

$$g: z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z + z_E(1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) \Leftrightarrow z' = iz + (3+i)(1-i)$$

$$\Rightarrow z' = iz + 4 - 2i \text{ d'où } g: z' = iz + 4 - 2i$$

b- Déterminons l'affixe du point G

$$g(F) = G \Rightarrow z_G = iz_F + 4 - 2i$$

$$\Rightarrow z_G = i(2i) + 4 - 2i \text{ on obtient } z_G = 2 - 2i$$

$$7°) a- \text{ Calculons } \frac{z_G - z_E}{z_F - z_E}$$

$$\frac{z_G - z_E}{z_F - z_E} = \frac{2 - 2i - (3+i)}{2i - (3+i)} \text{ on trouve } \frac{z_G - z_E}{z_F - z_E} = i$$

d'où EFG est un triangle isocèle et rectangle en E .

b- Calculons l'aire $\mathcal{A}$ en mètre carré du triangle EFG

$$\mathcal{A} = \frac{EF \times EG}{2} u.a$$

$$= \frac{|z_F - z_E|^2}{2} \times 4m^2$$

$$|z_F - z_E| = |2 - 2i - 3 - i| = |-1 - 3i| = \sqrt{10} \text{ d'où}$$

$$= 20m^2$$

a- Donnons l'écriture complexe de s

$$= \text{gof} \Rightarrow z' = i[(-1+i)z + 3-i] + 4-2i$$

$$\Rightarrow z' = (-1-i)z + 3i + 1 + 4 - 2i \text{ d'où}$$

$$s : z' = (-1-i)z + 5+i$$

b- Dédudons l'aire $\mathcal{A}'$ en mètre carré de la portion du domaine où sont cultivés les tomates.

L'aire recherchée est celle du triangle $E'F'G'$ or $s(E) = E'$, $s(F) = F'$ et $s(G) = G'$

$$\text{Donc } \mathcal{A}' = k^2 \times \mathcal{A} \text{ avec } k = |-1-i| = \sqrt{2}, \mathcal{A}'$$

$$= 2 \times 20m^2, \text{ d'où } \mathcal{A}' = 40m^2$$

Problème 3 :

1-

9°) a- Démontrons que f_m est continue à droite en 0.

$$D_f = [0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (mx + x \ln x) = 0 \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} mx = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \end{cases}$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_m(x) = f(0)$ d'où f_m est continue à droite en 0

b- Dérivabilité de f_m à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_m(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (m + \ln x) = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ alors } f_m \text{ n'est pas dérivable à droite en 0}$$

et C_m admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente

$$\text{d'équation : } \begin{cases} x = 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

10°) a- Etudions la limite de f_m lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(m + \ln x) = +\infty \text{ pour tout } m \text{ réel}$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases} \text{ donc}$$

$$\forall m \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty$$

b- Etudions les variations de f_m ; précisons en particulier, l'extrémum de f_m .

f_m est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f'_m(x) = m + \ln x + 1$$

Soit $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'_m(x) = m + 1 + \ln x$

$$\bullet f'_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-1-m} : \text{ donc}$$

$$\forall x \in]e^{-1-m}; +\infty[, f'_m(x) > 0 ;$$

$$\forall x \in]0; e^{-1-m}[, f'_m(x) < 0 \text{ et } f'_m(e^{-1-m}) = 0$$

D'où f_m est strictement croissante sur $[e^{-1-m}; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; e^{-1-m}]$.

$$f_m(e^{-1-m}) = m(e^{-1-m}) + (e^{-1-m}) \ln(e^{-1-m})$$

$$= me^{-1-m} + (-1-m)e^{-1-m}$$

$$f_m(e^{-1-m}) = -e^{-1-m}$$

d'où

d'où l'extrémum sur $]0; +\infty[$ est $f(e^{-1-m}) = -e^{-1-m}$

$\bullet$ Tableau de variation de f_m

x	0	e^{-1-m}	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	0	+
$f_m(x)$	0	$-e^{-1-m}$	$+\infty$

c- Dédudons l'ensemble (D)

la tangente à C_m parallèle à Ox est obtenu au point d'abscisse $x = e^{-1-m}$

$$(D) : y = 0 \times (x - e^{-1-m}) + f(e^{-1-m}) \text{ d'où on a : (D) :}$$

$$y = -e^{-1-m}, \forall m \in \mathbb{R}$$

d- Montrons que la tangente à C_m en B_m à une direction indépendante de m .

$$\text{Posons } f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow x(m + \ln x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou}$$

$$x = e^{-m} \text{ donc } B_m(e^{-m}; 0)$$

$$f'_m(e^{-m}) = 1 + m + \ln e^{-m} = 1 ; f'_m(e^{-m}) = 1$$

(indépendant de m), d'où le résultat

II-

11°) En utilisant la partie I-, traçons avec soin $C_{\frac{1}{2}}$ dans le

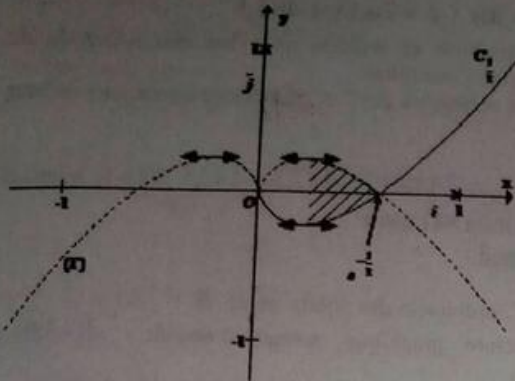
repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour $m = \frac{1}{2}$, le tableau de variation de f_m est :

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f'_1(x)$	-	0	+
$f_1(x)$	0	$-e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \ln x \right) = -\infty, \text{ d'où la courbe}$$

C_1 admet une branche parabolique de direction l'axe Oy .



12°) a-Démontrons que la fonction h est paire

$D_h = \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a } (-x) \in \mathbb{R}$

$$h(x) = -\frac{f_1(x)}{2} \quad \text{si} \quad x > 0 \quad \text{et}$$

$$h(-x) = -\frac{1}{2}x - x \ln x = -\left(\frac{1}{2}x + x \ln x\right) = -\frac{f_1(x)}{2}$$

(car si $x > 0, -x < 0$). On a donc

$$h(x) = -\frac{f_1(x)}{2} = h(-x) \text{ d'où } h \text{ est paire.}$$

b- démontrons que la partie de (Γ) correspondant à $x > 0$ est symétrique de C_1 par rapport à Ox .

Pour $x > 0, h(x) = -\frac{f_1(x)}{2}$, alors dans $\mathbb{R}_+$, les fonctions

h et $\frac{f_1}{2}$ sont opposées d'où leur courbes (Γ) et C_1 sont symétriques par rapport à (O, x)

c- Tracer de (Γ) (cf. représentation graphique) (en pointillé)

13°) a- Hachurons le domaine de culture des tomates

(Voir graphe) : domaine délimité par les courbes C_1, Γ et

les droites d'équations $x = \frac{1}{4}$ et $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} \text{b- } g(x) &= x^2 \ln x; \quad g'(x) = x + 2x \ln x \\ &= 2\left(\frac{1}{2}x + x \ln x\right) \end{aligned}$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{e}} \left(\frac{1}{2}x + x \ln x \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{e}} g'(x) dx = \frac{1}{2} [x^2 \ln x]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{e}} \quad \text{on}$$

$$\text{obtient } I = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2e} + \frac{\ln 2}{8} \right)$$

14°) Déduis-en l'aire en m^2 , de la portion du domaine où sont cultivées les tomates.

$$\text{Soit } A \text{ cette aire, } A = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{e}} \left(-\frac{f_1(x)}{2} - \frac{f_1(x)}{2} \right) dx \times u.a$$

$$\text{ce qui donne } A = -2 \times I \times 100m^2$$

$$\text{Soit } A = \left(\frac{1}{2e} - \frac{\ln 2}{8} \right) \times 100m^2 \Rightarrow$$

$$A = 50 \left(\frac{1}{e} - \frac{\ln 2}{4} \right) m^2 \quad \text{ou } A \approx 9,73m^2$$

CORRIGE TYPE DE LA S.E N° 16 :

Problème 1 :

1) Calculons z^2

$$\begin{aligned} z^2 &= (1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1))^2 \\ &= (1 + \sqrt{3})^2 + 2i(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1)^2, \quad \text{on} \\ \text{trouve } z^2 &= 4\sqrt{3} + 4i \end{aligned}$$

2) a- Ecrivons z^2 sous forme trigonométrique

$$|z^2| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ et soit } \theta \text{ un argument}$$

$$\text{de } z^2, \theta \text{ vérifie : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ d'où}$$

$$z^2 = 8 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

b- Déduisons le module et un argument de z

De 2)a- on peut écrire que $z^2 = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow z^2 = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ ou } z = -2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) > 0 \\ \operatorname{Im}(z) > 0 \end{cases}, \text{ on en déduit que } z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ et donc}$$

$$z = 2\sqrt{2} \text{ et } \arg(z) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{R})$$

a- Calculons z^6

$$\begin{aligned} z^6 &= \left(2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \right)^6 \\ &= (2\sqrt{2})^6 \left(\cos 6 \times \frac{\pi}{12} + i \sin 6 \times \frac{\pi}{12} \right) \quad (\text{Moivre}) \\ &= 512 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ d'où } z^6 = 512i \end{aligned}$$

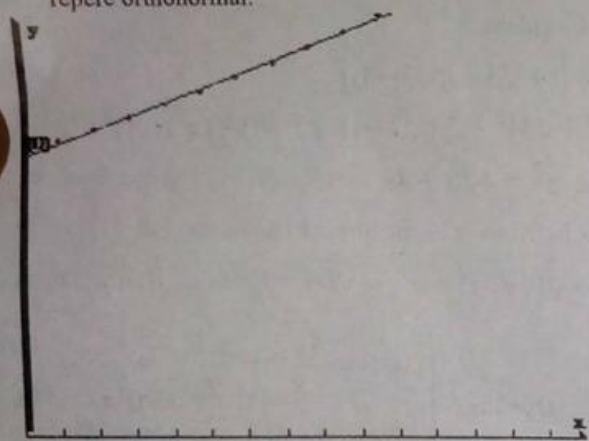
b- Donnons en francs, le montant de l'argent épargné à la banque par le père de ces héritiers.

Ce montant est $M = \operatorname{Im}(z^6) \times 1000 \text{ F}$ or $\operatorname{Im}(z^6) = 512$
d'où $M = 512.000 \text{ F}$

Le montant épargné par le père des enfants est donc 512 000 francs

Problème 2:

4) Représentons le nuage de points $M(x_i; y_j)$ dans un repère orthonormal.



5) Déterminons les coordonnées du point moyen

Le point moyen c'est le point $G(\bar{x}; \bar{y})$ avec

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{10} n_i x_i = 5,5 \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{10} n_j y_j = 614,8$$

(calculatrice)

D'où $G(5,5; 614,8)$

6) Calculons le coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables X et Y. Puis Interprétons le résultat

$$r = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}} = 0,9987 \quad (\text{calculatrice})$$

Interprétation: Il y a une forte corrélation linéaire entre le rang des années et les montants

7) Déterminons une équation de la droite (D)

$$(D) : y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{V(X)} = 24,097$$

(calculatrice) et $b = \bar{y} - a\bar{x} = 482,27$

D'où (D) : $y = 24,1x + 482,3$

8) Déterminons en milliers de francs une estimation du montant à son retrait

Le retrait se fera en 2015 et cette année correspond au rang

$$x_i = 15$$

Donc $y_{15} = 24,1 \times 15 + 482,3 = 843,8$ d'où le montant au retrait est 843 800 F

Problème 3:

Partie A:

9) a- Coordonnées des points A et B

Une lecture graphique permet d'obtenir: $A(-3;0)$ et $B(0;3)$

Déduisons $f(-3)$ et $f(0)$

(C) passe par A et B donc $f(-3) = 0$ et $f(0) = 3$

b- Montrons que (AB): $y = x + 3$

posons (AB): $y = ax + b$;

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 0}{0 - (-3)} = 1 \text{ et}$$

$$b = y_A - x_A = 0 - (-3) = 3 \text{ d'où}$$

$$(AB): y = x + 3$$

10) a- Prouvons que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + b-c)e^{-x}$$

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}. \quad f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

$$= (2ax + b - ax^2 - bx - c)e^{-x} \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + b-c)e^{-x}$$

b- Déduisons $f'(0)$

$$f'(0) = b - c$$

11) démontre que a, b et c sont solution du système

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$f(-3) = 0 \Leftrightarrow (9a - 3b + c)e^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$9a - 3b + c = 0 \quad (1)$$

$$f(0) = 3 \Leftrightarrow c = 3 \quad (2)$$

La tangente à (C) en $B(0;3)$ est (AB): $y = x + 3$, donc

$$\text{on a: } f'(0) = 1 \Leftrightarrow b - c = 1 \quad (3)$$

De (1), (2) et (3) a , b et c sont solution de :

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

b- Résolvons $\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a - 3(4) + 3 = 0 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$$

D'où $f(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$

Partie B :

12) a- Vérifions $\forall x \neq 0, f(x) = \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)x^2 e^{-x}$

$f(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$ en mettant x^2 on obtient

$$\forall x \neq 0, f(x) = \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)x^2 e^{-x}$$

b- Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)x^2 e^{-x} = 0 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)^2 e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 e^X = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Déduisons une asymptote à la courbe (C_f) .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors la droite d'équation : $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

c- Déterminons la limite de la fonction f en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x + 3)e^{-x} = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

13) a- Vérifions que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (-2x - 2)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 4x + 3) \text{ après}$$

développement et simplification on obtient :

$$f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$$

b- Signe de $f'(x)$ et dressons le tableau de variations de f

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2 - 2x + 1$.

Posons $-x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = 8$ et on obtient

$$x_1 = -1 - \sqrt{2} \text{ ou } x_2 = -1 + \sqrt{2}$$

Alors :

$$\forall x \in]-\infty; -1 - \sqrt{2}[\cup]-1 + \sqrt{2}; +\infty[; f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}[; f'(x) > 0$$

$$f'(-1 - \sqrt{2}) = f'(-1 + \sqrt{2}) = 0$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-1 - \sqrt{2})$	$f(-1 + \sqrt{2})$	0

$$f(-1 - \sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})e^{1+\sqrt{2}} \text{ et}$$

$$f(-1 + \sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})e^{1-\sqrt{2}}$$

c- Calculons une valeur approchée à 10^{-1} près de l'ordonnée de chacun des points de la courbe (C_f) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

On a : $f(-1 - \sqrt{2}) \approx -9,3$ et $f(-1 + \sqrt{2}) \approx 3,2$

14) Montrons que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α pour x appartenant à

l'intervalle $[-1; 0]$. $[-1; 0] \subset]-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}[$

donc f est continue et strictement croissante sur $[-1; 0]$ et

$f([-1; 0]) = [f(-1); f(0)]$ on a : $f([-1; 0]) = [0; 3]$;

$2 \in [0; 3]$ alors l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α dans $[-1; 0]$.

Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}

Utilisé une méthode appropriée et on obtient

$$-0,6 < \alpha < -0,5 \text{ car } \begin{cases} f(-0,6) \approx 1,74 \\ f(-0,5) \approx 2,05 \end{cases}$$

Partie C :

15) démontrons que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

$$F(x) = (-x^2 - 6x - 9)e^{-x}$$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= (-2x - 6)e^{-x} - e^{-x}(-x^2 - 6x - 9) \\ &= (-2x - 6 + x^2 + 6x + 9)e^{-x} \end{aligned}$$

$$F'(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x} = f(x)$$

On a donc : $F(x) = f(x)$, d'où F est une primitive f de sur $\mathbb{R}$

16) Déduisons une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$,
 $g(x) = x + 3 - f(x)$, g est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle des primitives sur $\mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}$, une primitive de g est :

$$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - F(x)$$

17) Calculons A

$$A = \int_{-3}^0 (x+1-f(x))dx \Leftrightarrow$$

$$A = [G(x)]_{-3}^0$$

$$= G(0) - G(-3) = \left(9 - \left(-\frac{9}{2}\right)\right) \times 2 \times 0,5 \text{ cm}^2$$

$$A = 13,5 \text{ cm}^2$$

18) Déduisons en en hm^2 , l'aire de la portion du domaine réservé au benjamin Issa.

$$A' = 13,5 \times (10\,000)^2 \text{ cm}^2$$

$$= 1350\,000\,000 \text{ cm}^2 = 13,5 \text{ hm}^2$$

d'où la portion réservée à Issa est de $13,5 \text{ hm}^2$

CORRIGE TYPE DE LA S.E N° 17 :

Problème 1 :

1) a- calculons $p(E_1)$ et $p(E_2)$

Soit D l'évènement « le stylo a un défaut » et Ω l'univers associé à cette épreuve

$$p(E_1) = p(A \cap \bar{D}) = p_{\bar{D}}(A) \times p(\bar{D})$$

$$p_{\bar{D}}(A) = \frac{92}{100} = \frac{23}{25} \quad \text{et} \quad p(\bar{D}) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} \quad \text{donc}$$

$$p(E_1) = \frac{23}{25} \times \frac{9}{10} \quad \text{d'où} \quad p(E_1) = \frac{207}{250}$$

$$p(E_2) = p(A \cap D) = p_D(A) \times p(D)$$

$$p(D) = 1 - p(\bar{D}) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \quad \text{et}$$

$$p_D(A) = 1 - p_{\bar{D}}(A) = 1 - \frac{94}{100} = \frac{3}{50} \quad \text{donc}$$

$$p(E_2) = \frac{3}{50} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{500}$$

$$A = (A \cap D) \cup (A \cap \bar{D}) \quad \text{donc}$$

$$p(A) = p(E_1) + p(E_2)$$

$$= \frac{207}{250} + \frac{3}{500} = \frac{414+3}{500} \quad \text{d'où} \quad p(A) = \frac{417}{500}$$

c- la probabilité recherchée est $p_A(D)$

$$p_A(D) = \frac{p(A \cap D)}{p(A)} = \frac{\frac{3}{500}}{\frac{417}{500}} \quad \text{d'où} \quad p_A(D) = \frac{3}{417}$$

2) Il s'agit d'un schéma de Bernoulli à 5 épreuves et de probabilité de succès $p = \frac{417}{500}$

a- Soit B l'évènement « 2 exactement des stylos soient acceptés »

$$p(B) = C_5^2 \left(\frac{417}{500}\right)^2 \left(1 - \frac{417}{500}\right)^3 \quad p(B) \approx 0,0318$$

b- Soit B_1 l'évènement « aucun des stylos ne soit accepté »

$$p(B_1) = C_5^0 \left(\frac{417}{500}\right)^0 \left(\frac{83}{500}\right)^5 \quad p(B_1) \approx 0,000126$$

Soit B_2 l'évènement « l'un au moins des stylos soit accepté »

$$p(B_2) = 1 - p(B_1) \quad p(B_2) \approx 0,99987$$

Problème 2 :

3) Calculons $I + J$

$$I + J = \int_0^{\pi} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\pi} = -e^{-\pi} + 1,$$

$$I + J = 1 - e^{-\pi}$$

4) $(E): y'' + 2y' + 5y = 0$

a- Démontrons que $f: x \mapsto e^{-x} \cos(2x)$ de (E) est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -e^{-x} \cos 2x - 2\sin 2x e^{-x} = e^{-x} (-\cos 2x - 2\sin 2x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = -e^{-x} (-\cos 2x - 2\sin 2x) + (-2\sin 2x - 4\cos 2x) e^{-x}$$

$$= e^{-x} (\cos 2x + 2\sin 2x + 2\sin 2x - 4\cos 2x) = e^{-x} (4\sin 2x - 3\cos 2x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'''(x) = -e^{-x} (4\sin 2x - 3\cos 2x) + 2e^{-x} (-\cos 2x - 2\sin 2x) + 2e^{-x} \cos 2x$$

$= e^{-x}(4\sin 2x - 4\sin 2x - 5\cos 2x + 5\cos 2x) = 0$ d'où f est solution de (E)

b- Dédudons que $F: x \mapsto -\frac{1}{2}[f'(x) + 2f(x)]$

est une primitive de f

F est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonction dérivable :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -\frac{1}{2}[f''(x) + 2f'(x)] \quad (1) \quad \text{or}$$

$$f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2f'(x) = -f''(x) - 5f(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}(f''(x) + 5f(x)) \quad (2)$$

De (1) et (2) on a : $F'(x) = f'(x)$ par suite F est une primitive de f

c- Calculons $I - J$

$$I - J = \int_0^{\pi} e^{-x} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} e^{-x} \cos 2x dx$$

$$= \int_0^{\pi} f(x) dx = [F(x)]_0^{\pi} = F(\pi) - F(0)$$

$$F(\pi) = -\frac{1}{5}[f'(\pi) + 2f(\pi)]$$

$$= -\frac{1}{5}[-e^{-\pi} + 2e^{-\pi}] = -\frac{1}{5}e^{-\pi}$$

$$F(0) = -\frac{1}{5}[f'(0) + 2f(0)]$$

$$= -\frac{1}{5}[-1 + 2] = -\frac{1}{5} \text{ donc } I - J = -\frac{1}{5}e^{-\pi} + \frac{1}{5}$$

$$\text{d'où } I - J = \frac{1}{5}(1 - e^{-\pi})$$

d- Déterminons la solution h de (E)

L'équation caractéristique associée à (E) est :

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 20 = (4i)^2 \text{ on trouve}$$

$$r_1 = -1 - 2i; r_2 = -1 + 2i \text{ alors les solutions de (E)}$$

sont les fonctions $x \mapsto (A \cos 2x + B \sin 2x)e^{-x}$, $(A; B) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Posons } h(x) = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^{-x}$$

$$h(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$h'(x) = (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)e^{-x} - e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

$$h'(0) = 1 \Leftrightarrow 2B - A = 1 \Leftrightarrow 2B = 1 \text{ car } A = 0 \text{ donc}$$

$$B = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } h(x) = e^{-x} \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)$$

e- Déterminons les entiers naturels n pour que u^n soit imaginaire pur

$$z_1 = -1 - 2i \text{ et } z_2 = -1 + 2i$$

$$u = z_1 + z_2 + 2i, \text{ on trouve } u = -2 + 2i$$

$$|u| = 2\sqrt{2}. \text{ Soit } \alpha \text{ un argument de } u.$$

$$\alpha = \arg(u) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{On peut prendre } \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$u = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u^n = (2\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{3\pi n}{4} + i \sin \frac{3\pi n}{4} \right)$$

$$u^n \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(u^n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{3\pi n}{4} = 0$$

$$\cos \frac{3\pi n}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi n}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow 3n = 2 + 4k$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{2 + 4k}{3}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{2}{3}(1 + 2k) \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{d'où les entiers naturels recherchés est } n = \frac{2}{3}(1 + 2k)$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$

5) a- Dédudons les valeurs de I et J des questions 3) et 4)-

$$\begin{cases} I + J = 1 - e^{-\pi} \\ I - J = \frac{1}{5}(1 - e^{-\pi}) \end{cases}$$

$$2I = (1 - e^{-\pi})\left(\frac{1}{5} + 1\right) = \frac{6}{5}(1 - e^{-\pi}) \text{ d'où}$$

$$I = \frac{3}{5}(1 - e^{-\pi}) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-\pi}$$

$$I + J = 1 - e^{-\pi} \Leftrightarrow$$

$$J = -I + 1 - e^{-\pi} = -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}e^{-\pi} + 1 - e^{-\pi} \text{ on trouve donc}$$

$$\text{que } J = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-\pi}$$

$$I = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-\pi} \text{ et } J = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-\pi}$$

b- Calculons le nombre A

$$\begin{aligned} A &= -e^{\pi}(10I + 5J - 8) \\ &= -e^{\pi}(6 - 6e^{-\pi} + 2 - 2e^{-\pi} - 8) = -e^{\pi}(-8e^{-\pi}) \end{aligned}$$

d'où $A = 8$

Alors le chiffre d'affaire annuel de la société est
8.000.000 F

Problème 3 :

$$6) u(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

a- Etudions les variations de u

$$\bullet D_u =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

u est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\bullet \forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[, u'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\text{d'où on trouve que } u'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[, \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 \text{ donc}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, u'(x) < 0$$

$$\forall x \in]-\infty; -1[, x(x+1)^2 < 0 \text{ et } -1 < 0 \text{ donc}$$

$$\forall x \in]-\infty; -1[, \frac{-1}{x(x+1)^2} > 0 \text{ par suite}$$

$\forall x \in]-\infty; -1[, u'(x) > 0$ en résumé on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[, u'(x) > 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, u'(x) < 0 \end{cases} \text{ alors}$$

u est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

• Limites aux bornes de D_u

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x+1} = 0 \end{cases} \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x+1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right]$$

Posons $X = \left(1 + \frac{1}{x}\right)$; si $x \rightarrow -1^-$, $X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -1^-} u(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x+1} = -1$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0 \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \end{cases}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$

• Tableau de variation de u

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$u(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$u(x)$	0	$+$	0	0

b- Dédudons le signe de $u(x)$

Du tableau des variations de u on a :

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[, u(x) > 0$$

7) Justifions que $E =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^* / 1 + \frac{1}{x} > 0 \text{ et } x \neq 0 \right\} \cup \{0\}$$

$$1 + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[\text{ donc}$$

$$E = (]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[) \cup \{0\} \text{ d'où}$$

$$E =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

8) Etudions la continuité de g à droite en 0.

$$g(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x+1) - x \ln x} = 1 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) - x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$ donc g est continue à

droite en 0.

9) a- Vérifions que $\forall x \in]0; +\infty[,$

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{e^{x \ln(x+1) - x \ln x} - 1}{x \ln(x+1) - x \ln x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; +\infty[, \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \frac{e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1}{x} \\ &= \frac{e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1}{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{e^{x \ln(x+1) - x \ln x} - 1}{x \ln(x+1) - x \ln x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

d'où le résultat

b- Etudie la dérivabilité de g à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln(x+1) - x \ln x} - 1}{x \ln(x+1) - x \ln x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$t = x \ln(x+1) - x \ln x,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln(x+1) - x \ln x} - 1}{x \ln(x+1) - x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = +\infty \text{ alors } g \text{ n'est pas dérivable à}$$

droite en 0

c- Interprétation

(C) admet au point $M_0(0; 1)$ une demi-tangente verticale

$$\text{définie par : } \begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

10) a-Déterminons l'ensemble de dérivabilité D de g

La fonction $t_1 : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur

$]-\infty; -1[$ et sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. La fonction polynôme $t_1 : x \rightarrow x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ or

$g = e^{t_1 t_2}$ sur $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ donc g est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]0; +\infty[$ d'où

$$D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

b- Démontrons que $\forall x \in D, g'(x) = u(x)g(x)$

$$\forall x \in D, g'(x) = \left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)' e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \times x \right) g(x) \\ &= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \times \frac{x^2}{x+1} \right) g(x) \\ &= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right) g(x) \end{aligned}$$

d'où $\forall x \in D$, $g'(x) = u(x)g(x)$

11) Etudions le sens de variation de g

$\forall x \in D$, $g(x) > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $u(x)$

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$, $u(x) > 0$ donc $\forall x \in D$, $g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]0; +\infty[$

12) a- Calculons les limites de g aux bornes de E

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e \end{aligned}$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} e^x = e \end{cases}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = e$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e \end{aligned}$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} e^x = e \end{cases}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e$

b- Dressons le tableau de variation de g

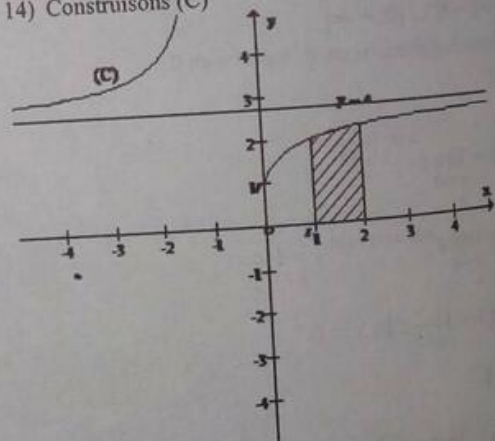
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	-	+	+
$g(x)$	e	$+\infty$	e	e

13) Etudions les branches infinies de (C)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e$ alors la droite d'équation $y = e$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} g = +\infty$ alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C)

14) Construisons (C)



15) a- déterminons $g(I)$

g est continue et strictement croissante sur I alors

$$g(I) = [g(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} g] \text{ d'où } g(I) = [1; e]$$

b- Justifions que h est une bijection

g est continue et strictement croissante sur I alors réalise une bijection de $I \rightarrow g(I)$ or $h: I \rightarrow (I)$ d'où h est une bijection

c- Déterminons l'ensemble de dérivabilité de h^{-1}
 g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) \neq 0$ alors h^{-1} est dérivable sur $g(]0; +\infty[) =]1; e[$ D'où l'intervalle $]1; e[$ est

l'ensemble de dérivabilité de h^{-1}

16) Justifions que f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$

$$f(x) = \int_1^x g(t) dt$$

g est continue $]0; +\infty[$ et $I \in]0; +\infty[$ alors f est l'unique primitive de g sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1. Par suite f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$

Calculons $f'(x)$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x) \text{ soit } f'(x) = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

b- sens de variation de f

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

c- Déduisons le signe de $f(x)$

f étant continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $f(1) = 0$ alors

$$\forall x \in]0; 1[, x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ d'où :}$$

$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[, f(x) < 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, f(x) > 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

d- encadrement de $f(2)$

$$f(2) = \int_1^2 g(t) dt$$

On a : $x_0 = 1$ et $x_4 = 2$

$$x_1 = 1 + 0,25 = 1,25; x_2 = 1,25 + 0,25 = 1,5;$$

$$x_3 = 1,5 + 0,25 = 1,75$$

Posons :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{4}(g(1) + g(1,25) + g(1,5) + g(1,75)) \\ &= 0,25 \times (2 + 2,0849 + 2,1516 + 2,2055) \\ &= 2,1105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{4}(g(1,25) + g(1,5) + g(1,75) + g(2)) \\ &= 0,25 \times (2,0849 + 2,1516 + 2,2055 + 2,25) \\ &= 2,173 \end{aligned}$$

D'où $2,111 < f(2) < 2,173$

e- soit A l'aire du domaine considéré (voir courbe)

$$A = \left(\int_1^2 g(x) dx \right) \times 4 \text{ cm}^2 \text{ D'où}$$

$$= f(2) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$8,444 \text{ cm}^2 < A < 8,692 \text{ cm}^2$$

CORRIGE TYPE DE LA SE N° 18 :

Problème 1 :

1) a- Calculons $p(5)$ et $q(5)$

$$\begin{aligned} p(5) &= -(5)^3 + 19(5)^2 - 115(5) + 225 \\ &= -125 + 475 - 575 + 225 \\ &= -700 + 700 = 0 \text{ alors } p(5) = 0 \end{aligned}$$

$$q(5) = (5)^3 - 13(5)^2 + 51(5) - 55$$

$$= 125 - 325 + 225 - 55$$

$$= 380 - 380 = 0 \text{ alors } q(5) = 0$$

Réolvons $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$

On a :

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 19x^2 - 115x + 225 & x-5 \\ \hline x^3 - 5x^2 & \\ \hline 14x^2 - 115x + 225 & -x^2 + 14x - 45 \\ -14x^2 + 70x & \\ \hline -45x + 225 & \\ 45x - 225 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 19x^2 - 115x + 225 & x-5 \\ \hline x^3 - 13x^2 + 51x - 55 & \\ \hline -x^3 + 5x^2 & \\ \hline -x^2 + 51x - 55 & x^2 - 8x + 11 \\ 8x^2 - 40x & \\ \hline 11x - 55 & \\ -11x + 55 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{Donc } p(x) = 0 \Rightarrow (x-5)(-x^2 + 14x - 45) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-5=0 \text{ ou } -x^2+14x-45=0$$

$$\Leftrightarrow x=5 \text{ ou } -x^2+14x-45=0$$

$$-x^2+14x-45=0$$

$$\Delta=16 \text{ donc } -x^2+14x-45=0 \Leftrightarrow x=\frac{-14-4}{-2}=9 \text{ ou}$$

$$x=\frac{-14+4}{-2}=5$$

Alors l'ensemble solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $p(x)=0$ est $S_1=\{5; 9\}$

$$q(x)=0 \Rightarrow (x-5)(x^2-8x+11)=0$$

$$\Leftrightarrow x=5 \text{ ou } x^2-8x+11=0$$

$$x^2-8x+11=0$$

$$\Delta=20 \text{ donc } x^2-8x+11=0 \Leftrightarrow x=\frac{8-2\sqrt{5}}{2}=4-\sqrt{5}$$

$$\text{ou } x=\frac{8+2\sqrt{5}}{2}=4+\sqrt{5}$$

Alors l'ensemble solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$q(x)=0 \text{ est : } S_2=\{5; 4-\sqrt{5}; 4+\sqrt{5}\}$$

b- Démontrons que (E') admet une racine z_0 dont le point image $M_0 \in \Delta$ à la droite $(\Delta): y=x$

$M_0 \in (\Delta)$ donc $z_0 = x + ix$ avec $x \in \mathbb{R}$

Posons :

$$R(z) = z^3 - (13+19i)z^2 + 2(-32+83i)z + 10(45-11i)$$

$$R(x+ix) = (x+ix)^3 - (13+19i)(x+ix)^2 + 2(-32+83i)(x+ix) + 10(45-11i)$$

$$= 2ix^3(1+i) - 2ix^2(13+19i) - 64x - 64xi - 166x + 450 - 110i$$

$$= -2x^3 + 38x^2 - 230x + 450 + i(2x^3 - 26x^2 + 102x - 110)$$

$$R(x+ix)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^3 + 38x^2 - 230x + 450 = 0 \\ 2x^3 - 26x^2 + 102x - 110 = 0 \end{cases}$$

$$R(x+ix)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 + 19x^2 - 115x + 225 = 0 \\ 2x^3 - 26x^2 + 102x - 110 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(x)=0 \\ q(x)=0 \end{cases}$$

La valeur de x qui vérifie ce système est $x=5$ d'où

$$z_0 = 5 + 5i$$

c- Résolvons (E')

$$(E') \Leftrightarrow R(z)=0$$

$$R(z) = (z-5-5i)(az^2+bz+c) \text{ avec } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \text{ et } c \in \mathbb{C}$$

$$R(z) = az^3 + [b-(5+5i)a]z^2 + [c-(5+5i)b]z - c(5+5i) \text{ par identification on a :}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b-(5+5i)a=-13-19i \\ c-(5+5i)b=-64+166i \\ -c(5+5i)=450-110i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8-14i \\ c=-34+56i \end{cases}$$

$$\text{Donc (E')} (z-5-5i)(z^2-(8+14i)z-34+56i)=0 \Leftrightarrow$$

$$z_0 = 5 + 5i \text{ ou } z^2 - (8+14i)z - 34 + 56i = 0$$

$$\text{On a : } \Delta = 4 \text{ ainsi } z_1 = \frac{8+14i-2}{2} = 3+7i \text{ ou}$$

$$z_2 = 4+7i \text{ d'où}$$

$$S_c = \left\{ 5+5i; 3+7i; 5+7i \right\}$$

d- Dédudisons les solutions de l'équation (E)

$$(E) : \Leftrightarrow \left(\frac{z}{1+i} - 4 - i \right) \left[z^3 - (13+19i)z^2 + 2(-32+83i)z + 10(45-11i) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{1+i} - 4 - i \right) = 0 \text{ ou}$$

$$z^3 - (13+19i)z^2 + 2(-32+83i)z + 10(45-11i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{1+i} = (4+i) \text{ ou } z = 5+5i \text{ ou } z = 3+7i \text{ ou } z = 5+7i$$

$$\frac{z}{1+i} = (4+i) \Leftrightarrow z = (4+i)(1+i) = 3+5i$$

L'ensemble solution de (E) dans $\mathbb{C}$ est :

$$S = \left\{ 5+5i; 3+7i; 5+7i; 3+5i \right\}$$

$$2) \text{ a- Ecrivons } \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \text{ et } \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \text{ sous forme}$$

exponentielles

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{5+5i - (5+7i)}{3+7i - (5+7i)} = \frac{-2i}{-2} = i$$

$$\text{alors : } \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} = \frac{5+5i - (3+5i)}{3+7i - (3+5i)} = \frac{2}{2i} = -i \text{ alors}$$

$$\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

b- Dédudisons la nature de chacun des triangles ABC ADC

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{z_A - z_B}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ donc ABC est un}$$

triangle isocèle et rectangle en B

$$\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{z_A - z_D}{z_C - z_D} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ donc ADC est un}$$

triangle isocèle et rectangle en D

3) a- Démontrons que les points A, B, C et D sont cocycliques et que les points B et D sont équidistants des points A et C

ABC et ADC étant des triangles respectivement rectangle en B et en D donc ils sont inscrits dans le cercle de diamètre AC par suite A, B, C et D sont cocycliques

$$BD = |z_D - z_B|$$

$$= |3 + 5i - 5 - 7i| = |-2 - 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = |z_C - z_A|$$

$$= |3 + 7i - 5 - 5i| = |-2 + 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ on a :}$$

BD = AC alors les points B et D sont équidistants des points A et C

b- Déduisons que les conditions de solidité des bâtiments sont alors respectées

Les points A, B, C et D étant cocycliques alors ils appartiennent à un même cercle et de plus les points B et D sont équidistants des points A et C on en déduit donc que les conditions de solidité des bâtiments sont alors respectées

c- Donnons une équation cartésienne du cercle représentant la ceinture de sécurité.

Ce cercle passe par les points A, B, C et D. ABC est un triangle isocèle et rectangle en B donc ce cercle ($\mathcal{C}$) aura pour un diamètre le segment [AC]

Ainsi le rayon de ($\mathcal{C}$) est $r = \frac{AC}{2} = \sqrt{2}$ et son centre I a

$$\text{pour affixe } z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = 4 + 6i$$

D'où l'équation cartésienne du cercle représentant la ceinture de sécurité est :

$$(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 5$$

4) a- Donnons une signification géométrique de

$$\left| \frac{z - 5 - 5i}{iz + 5 - 3i} \right| \text{ et } \arg\left(\frac{z - 5 - 5i}{iz + 5 - 3i}\right)$$

$$\left| \frac{z - 5 - 5i}{iz + 5 - 3i} \right| = \left| \frac{z - (5 + 5i)}{i(z - 3 - 5i)} \right|$$

$$= \left| \frac{z - z_A}{i(z - z_D)} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{i} \right| \times \left| \frac{z - z_A}{z - z_D} \right| = 1 \times \frac{AM}{DM} \text{ d'où}$$

$$\left| \frac{z - 5 - 5i}{iz + 5 - 3i} \right| = \frac{AM}{DM}$$

$$\arg\left(\frac{z - 5 - 5i}{iz + 5 - 3i}\right) = \arg\left[\left(\frac{1}{i}\right) \times \left(\frac{z - z_A}{z - z_D}\right)\right] [2\pi]$$

$$= \arg\frac{1}{i} + \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_D}\right) [2\pi]$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \text{mes}(\widehat{MD, MA}) [2\pi]$$

$$\text{d'où } \arg\left(\frac{z - 5 - 5i}{iz + 5 - 3i}\right) = -\frac{\pi}{2} + \text{mes}(\widehat{MD, MA}) [2\pi]$$

b- Déterminons alors l'ensemble (E_1)

(E_1) est tel que $\left(\frac{z - 5 - 5i}{iz + 5 - 3i}\right) \in \mathbb{R}^*$ donc

$$-\frac{\pi}{2} + \text{mes}(\widehat{MD, MA}) = \frac{\pi}{2} + 2k, (k \in \mathbb{Z})$$

$\Leftrightarrow \text{mes}(\widehat{MD, MA}) = \pi + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ d'où (E_1) est la droite (AD) privée des points A et D

Problème 2 :

5) a- Donnons en mètres les dimensions de la base du grand bâtiment.

La base du grand bâtiment est le rectangle EFGH donc ces dimensions sont :

$$EF = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 0\right)^2 + (0 - 0)^2 + (2 - 2)^2} \times 8 \text{ m} = 20 \text{ m}$$

$$EH = \sqrt{(0 - 0)^2 + (2 - 0)^2 + (2 - 2)^2} \times 8 \text{ m} = 16 \text{ m}$$

d'où la longueur $L = 20 \text{ m}$ et la largeur $l = 16 \text{ m}$

b- Déterminons les coordonnées du centre L du rectangle EFGH

L est le milieu du segment [FH] donc

$$x_L = \frac{x_F + x_H}{2} = \frac{5}{4}; y_L = \frac{y_F + y_H}{2} = 1 \text{ et}$$

$$z_L = \frac{z_F + z_H}{2} = 2 \text{ d'où } L\left(\frac{5}{4}; 1; 2\right)$$

c- Déterminons les coordonnées du point G EFGH est un rectangle donc on a :

$$\overline{EF} = \overline{HG} \Rightarrow \begin{cases} x_G - x_H = \frac{5}{2} \\ y_G - y_H = 0 \\ z_G - z_H = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{5}{2} \\ y_G = 2 \\ z_G = 2 \end{cases} \text{ d'où } G\left(\frac{5}{2}; 2; 2\right)$$

6) a- Démontrez que l'ensemble (Δ) est la droite passant par

K milieu du segment $[FH]$ et dirigée par $\vec{e}_3$

$M \in (\Delta)$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) \wedge \vec{e}_3 = (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{e}_3$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} - \overrightarrow{GM} - \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}) \wedge \vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{ML} \wedge \vec{e}_3 = \vec{0} \text{ et } L=K$$

d'où (Δ) est la droite passant par K milieu du segment $[FH]$ et dirigée par $\vec{e}_3$

b- Donne un système d'équations paramétriques de (Δ)

Pour tout point M de l'espace tel que $M \in (\Delta)$ on a :

$$\overrightarrow{KM} = \alpha \vec{e}_3, \alpha \in \mathbb{R} \text{ alors :}$$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = 1 \\ z = 2 + \alpha \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R})$$

7) a- Démontrons que $\overrightarrow{O_1S} = \frac{5}{4}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$

Par hypothèse $\{S\} = (\Delta) \cap (P)$ alors on a :

$$S \in (\Delta) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x_S = \frac{5}{4} & (1) \\ y_S = 1 & (2) \\ z_S = 2 + \alpha & (3) \\ 12x_S - 5z_S + 10 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(1), (2) \text{ et } (3) \text{ dans } (4) \Rightarrow 12 \times \frac{5}{4} - 5 \times (2 + \alpha) + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 3, \text{ donc : } \begin{cases} x_S = \frac{5}{4} \\ y_S = 1 \\ z_S = 2 + \alpha = 5 \end{cases} \text{ par suite :}$$

$$\overrightarrow{O_1S} = \frac{5}{4}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$

b- Calculons en mètre la hauteur du grand bâtiment
Cette hauteur est la distance LS on a donc :

$$h = LS = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\right)^2 + (1-1)^2 + (5-2)^2} \times 8 \text{ m}$$

$$= 3 \times 8 \text{ m d'où } h = 24 \text{ m}$$

c- Calculons en mètres carrés l'aire de la surface latérale du bâtiment.

$$A_1 = \left(2 \times \frac{1}{2} \|\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{ES}\| + 2 \times \frac{1}{2} \|\overrightarrow{EH} \wedge \overrightarrow{ES}\| \right) \times 64 \text{ m}^2$$

$$= (\|\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{ES}\| + \|\overrightarrow{EH} \wedge \overrightarrow{ES}\|) \times 64 \text{ m}^2$$

$$\overrightarrow{EF} \left(\frac{5}{2}; 0; 0 \right); \overrightarrow{EH} (0; 2; 0) \text{ et } \overrightarrow{ES} \left(\frac{5}{4}; 1; 3 \right)$$

$$\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{ES} \left(0; -\frac{15}{2}; \frac{5}{2} \right) \text{ et } \overrightarrow{EH} \wedge \overrightarrow{ES} \left(6; 0; -\frac{5}{2} \right)$$

$$\|\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{ES}\| = \frac{5\sqrt{10}}{2} \text{ et } \|\overrightarrow{EH} \wedge \overrightarrow{ES}\| = \frac{13}{2}$$

$$\text{Alors : } A_1 = \left(\frac{5\sqrt{10} + 13}{2} \right) \times 64 \text{ m}^2$$

$$\text{donc } A_1 = 32(5\sqrt{10} + 13) \text{ m}^2$$

Problème 3 :

$$\begin{cases} f(x) = \exp_2 \left(\frac{x+1}{x} \right) - x + 1, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \ln(x+e) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

8) a- Déterminons l'ensemble de définition de f

$$D = \{x \in]-\infty; 0[/ x \neq 0\} \cup \{x \in [0; +\infty[/ x+e > 0\}$$

$$D =]-\infty; 0[\cup [0; +\infty[$$

d'où

$$D_f = \mathbb{R}$$

b- Calculons la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x+1}{x} \ln 2} - x + 1 \text{ car}$$

$$= +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x+1}{x} \ln 2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 1 = +\infty \end{cases} \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+e) = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

9) Etudions la continuité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\frac{x+1}{x} \ln 2} - x + 1 \right), \text{ car}$$

$$= 1$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} \ln 2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue en } 0$$

10) a- Démontrons :

$$\bullet \forall x \in]-\infty; 0[; \frac{f(x)-1}{x} = \frac{2^{\frac{x+1}{x}} - x + 1 - 1}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-1}{x} &= \frac{2^{\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x}{x} \\ &= \frac{2 \times 2^{\frac{1}{x}} - x}{x}, \text{ d'où} \\ &= \frac{2}{x} e^{\frac{\ln 2}{x}} - 1 \end{aligned}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, \frac{f(x)-1}{x} = \frac{2}{x} e^{\frac{\ln 2}{x}} - 1$$

$$\bullet \forall x \in]0; +\infty[, \begin{aligned} f(x) &= \ln e^{\left(\frac{x}{e} + 1\right)} \\ &= \ln e + \ln \left(\frac{x}{e} + 1\right) \end{aligned} \text{ d'où}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = 1 + \ln \left(1 + \frac{x}{e}\right)$$

b- Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} e^{\frac{\ln 2}{x}} - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} e^{\frac{\ln 2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{\ln 2}{x} e^{\frac{\ln 2}{x}} \times \frac{1}{\ln 2} = 0$$

Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$

LA PASSION DES MATHS »

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{e}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{e}\right)}{\frac{x}{e}} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \frac{1}{e}$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0

c- Dédudions une interprétation graphique des résultats.

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc (C) admet au point d'abscisse 0 deux demi tangentes définies par :

$$(T_g): \begin{cases} y = -x + 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ et } (T_d): \begin{cases} y = \frac{1}{e}x + 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

d-Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

11) a- Etudions les variations de f et déterminons

$$I = f(0; +\infty)$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]-\infty; 0[,$

$$f'(x) = -\left(\frac{\ln 2}{x^2} e^{\frac{x+1}{x} \ln 2} + 1\right)$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x+e}$

$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) < 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$

donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et

strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

$$I =]1; +\infty[$$

b-Démontrons que l'équation $f(x) = 2$ admet deux solutions de signe contraire.

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et

$f(]-\infty; 0]) = [1; +\infty[$, $2 \in [1; +\infty[$ donc l'équation

admet $f(x) = 2$ admet une solution unique dans

$]-\infty; 0[$

$]-\infty; 0[$

Correction des évaluations

- f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et $f([0; +\infty[) = [1; +\infty[$;
 $2 \in [1; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique dans $]0; +\infty[$
 De ce qui précède l'équation $f(x) = 2$ admettant une solution unique dans $] -\infty; 0[$ et dans $]0; +\infty[$ alors l'équation $f(x) = 2$ admet deux solutions de signes contraires

*Prouvons que $4,67 < \beta < 4,68$.

$]4,67; 4,68[\subset]0; +\infty[$; $f(4,67) \approx 1,9998$ et $f(4,68) \approx 2,0012$; $2 \in]f(4,67); f(4,68)[$ D'où $4,67 < \beta < 4,68$

c- Etudions les branches infinies de (C).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} e^{\frac{\ln 2}{x}} - 1 + \frac{1}{x} \right) = -1 \text{ et}$$

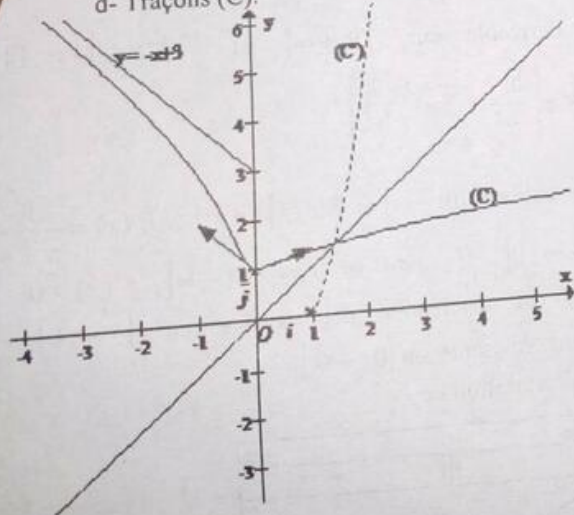
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2e^{\frac{\ln 2}{x}} + 1 \right) = 3 \text{ donc la droite}$$

d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+e)}{(x+e)} \times \frac{(x+e)}{x} = 0 \text{ donc (C) admet}$$

une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

d- Traçons (C).



Partie B :

12) Démontrons que k admet une bijection réciproque k^{-1} et précise l'ensemble de définition de k^{-1} .
 k est la restriction de f à $]0; +\infty[$, donc k est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $f(]0; +\infty[) =]1; +\infty[$ alors k est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]1; +\infty[$ par suite k admet une bijection réciproque k^{-1} d'ensemble de définition

13) a- Déterminons le plus grand ensemble E sur lequel k^{-1} est dérivable.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) \neq 0$ donc k^{-1} est dérivable sur $E = f(]0; +\infty[)$ soit $E =]1; +\infty[$

b- Calculons $k^{-1}(2)$ et déduisons le nombre dérivé de k^{-1} en 2

$$\text{posons } k(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(x+e) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+e > 0 \\ x = e^2 - e \end{cases}$$

$$x = e^2 - e \text{ d'où } k^{-1}(2) = e^2 - e$$

Nombre dérivé de k^{-1} en 2

Ce nombre dérivé est :

$$\begin{aligned} (k^{-1})'(2) &= \frac{1}{k'(k^{-1}(2))} \\ &= \frac{1}{k'(e^2 - e)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{e^2 - e + e}} = e^2 \end{aligned}$$

D'où le nombre dérivé de k^{-1} en 2 est e^2

c- Donnons l'équation de la tangente à la courbe de k^{-1} au point d'abscisse 2.

Soit (T') cette tangente :

$$(T') : y = (k^{-1})'(2)(x-2) + k^{-1}(2) \Leftrightarrow$$

$$(T') : y = e^2 x - e^2 - e$$

d- Déterminons pour tout $x \in I$, $k^{-1}(x)$

Posons $k^{-1}(x) = y$ avec $y \in]0; +\infty[$ on a donc :

$$k^{-1}(x) = y \Leftrightarrow k(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \ln(y+e) = x$$

$$\Leftrightarrow y = e^x - e \text{ d'où } k^{-1}(x) = e^x - e$$

e- Construisons sur le même graphique la courbe de k^{-1}

(voir graphique en pointillé)

Partie C :

14) a- Démontrons que F est définie sur $] -\infty; 0[$

$$F(x) = \int_{-1}^x \left(2^{\frac{t+1}{t}} - t + 1 \right) dt$$

Soit la fonction $u : x \mapsto 2^{\frac{t+1}{t}} - t + 1$, u est définie sur $\mathbb{R}^*$ et est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$; $-1 \in] -\infty; 0[$ et $-1 \notin]0; +\infty[$ d'où F est définie sur $] -\infty; 0[$

b- Démontrons que F est dérivable sur $] -\infty; 0[$ déterminons $F'(x)$

u est continue sur $] -\infty; 0[$ et F est l'unique primitive de u qui s'annule en -1 d'où F est dérivable sur $] -\infty; 0[$

$$\forall x \in] -\infty; 0[, F'(x) = 2^{\frac{x+1}{x}} - x + 1 = f(x)$$

$$\text{Soit } F'(x) = f(x)$$

c. Démontrons que G est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et déterminons $G'(x)$

F est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est

dérivable sur $] -\infty; 0[$ donc $F\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur

$] -\infty; 0[$ par suite la fonction $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $] -\infty; 0[$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in] -\infty; 0[, G'(x) = F'(x) - \frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$G'(x) = 2^{\frac{x+1}{x}} - x + 1 - \frac{1}{x^2} \left[2^{x+1} - \frac{1}{x} + 1 \right]$$

15) a. Donnons une interprétation graphique de $F(-2)$

$F(-2)$ est l'aire exprimée en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = -1$.

b. Calculons une valeur approchée de $F(-2)$ par la méthode des trapèzes

$$a = -2; b = -1; n = 4 \text{ et } \frac{b-a}{n} = 0,25$$

$$x_0 = -2, \quad x_1 = -1,75; \quad x_2 = -1,5; \quad x_3 = -1,25; \\ x_4 = b = -1$$

$$F(-2) = 0,25 \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \frac{1}{2} f(x_3) \right]$$

$$\approx -3,743$$

$$F(-2) \approx -3,743$$

c. Déduisons une valeur approchée de l'aire $A = |F(-2)| \times u.a$ soit $A = 3,743 u.a$

TCHIKAMA

CORRIGE TYPE DE LA S.E.N ° 19 :

Problème 1 :

1) Etudions les variations de h sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- Ensemble de définition de h

$$D_h = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

- Limites aux bornes de D_h

$$h(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = +\infty$$

- h est continue et dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, et

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], h'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } h'(x) > 0 \text{ pour tout } x \text{ de}$$

$$\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

Donc h est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

- Tableau de variation de h .

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$	0	+
$h(x)$	1	$+\infty$

2) Déterminons $h\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$

h étant continue et strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a

donc :

$$h\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[h(0); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x)\right] = [1; +\infty[$$

3) Démontrons que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

h étant continue et strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

elle est une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1; +\infty[$. Elle

admet alors une bijection réciproque h^{-1} dont l'ensemble de définition est $[1; +\infty[$.

4) Déterminons le domaine de dérivabilité E de h^{-1}

$$E = h\left(\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right] \setminus \{h(x) \mid h'(x) = 0 \text{ et } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\}\right]$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } h(0) = 1 \text{ donc } E =]1; +\infty[$$

Calculons $(h^{-1})'(x)$.

$$\forall x \in E, (h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))}$$

$$\text{Posons que } h^{-1}(x) = y \text{ avec } \begin{cases} y \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\\ y \in [1; +\infty[\end{cases} \text{ on a donc}$$

$$x = h(y)$$

$$x = \frac{1}{\cos y} \Leftrightarrow \cos y = \frac{1}{x} \text{ et } \sin y = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \text{ (car)}$$

$$y \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ alors}$$

$$(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(y)}$$

$$(h^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{\sin y}{\cos^2 y}}$$

$$(h^{-1})'(x) = \frac{\cos^2 y}{\sin y} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}} = \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\text{d'où } (h^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

5) Déterminons le code α

$$\alpha = \frac{1}{(h^{-1})'(2)} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \text{ d'où}$$

$$\alpha = 2\sqrt{3}$$

Problème 2 :

6) Démontrons que (Δ) est une droite dont on précisera le repère

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overline{MA} \wedge \overline{MB} = \overline{MC} \wedge \overline{MA}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MA} \wedge (\overline{MB} + \overline{MC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{MA} \wedge \overline{MI} = \vec{0} \text{ avec } A \neq I \text{ alors } \overline{MA} \text{ et } \overline{MI} \text{ sont colinéaires donc } (\Delta) \text{ est la droite } (AI) \text{ dont le repère est } (A; \overline{AI})$$

7) a- Déterminons une représentation paramétrique de (Δ)

pour tout M de l'espace tel que $M \in (\Delta)$ on a : $\overline{AM} = t\overline{AI}$
 $(t \in \mathbb{R})$. $I(2; 1; 0)$ est le milieu du segment $[BC]$ donc

$$\overline{AI}(1; 2; 0) \text{ alors le système } \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases} \text{ est}$$

une représentation paramétrique de (Δ)

b. Écrivons une équation cartésienne du plan (P) déterminé par les points A, B et C .

calculons $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$, $\overline{AB}(2; 1; 1)$ et $\overline{AC}(0; 3; -1)$ on

a. $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(-4; 2; 6)$ donc (P) :

$$-4x + 2y + 6z + d = 0.$$

$$d \in \mathbb{R}; A(1; -1; 0) \in (P) \Leftrightarrow -4 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$$

d'où on obtient après simplification par 2 l'équation:

$$(P): -2x + y + 3z + 3 = 0$$

c. Déterminons une équation cartésienne du plan (Q) perpendiculaire à (P) et contenant la droite (D) .

$$(D): \frac{2x+1}{2} = -y = z-1.$$

Un vecteur normal à (P) est $\overline{n_p}(-2; 1; 3)$ et un vecteur

directeur de (D) est $\overline{u}(1; -1; 1)$.

$\overline{n_p} \wedge \overline{u}$ est un vecteur normal au plan (Q) .

$$\overline{n_p} \wedge \overline{u} = 4\overline{i} + 5\overline{j} + \overline{k} \text{ donc}$$

$$(Q): 4x + 5y + z + d = 0, d \in \mathbb{R}; \text{ le point}$$

$$\left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right) \in (D) \text{ donc appartient à } (Q) \text{ ainsi } d = 1 \text{ et par}$$

conséquent:

$$(Q): 4x + 5y + z + 1 = 0$$

d. Détermine un système d'équations paramétriques de la droite

$$(D_1) = (P) \cap (Q)$$

$$M \in (D_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + 3z + 3 = 0 \\ 4x + 5y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3z = -y - 3 \quad (1) \\ 4x + z = -1 - 5y \quad (2) \end{cases}$$

$$2 \times (1) + (2) \Rightarrow 7z = -7y - 7$$

$$\Leftrightarrow z = -y - 1 \text{ dans } (2) \text{ on a:}$$

$$4x - y - 1 = -1 - 5y \Leftrightarrow x = -y \text{ en posant } y = \alpha,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ on obtient:

$$(D_1): \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha - 1 \end{cases}, (\alpha \in \mathbb{R})$$

8) Calculons le volume de ce tétraèdre.

$$V = \frac{1}{6} |\overline{AE} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC})| \times (9 \text{ cm})^3$$

$$\overline{AE}(-9; 8; 9) \text{ et } \overline{AB} \wedge \overline{AC}(-4; 2; 6)$$

$$V = \frac{|36 + 16 + 54|}{6} \text{ cm}^3 \text{ d'où } V = 12879 \text{ cm}^3$$

Problème 3:

Partie A:

9) Étudions les variations de g

$$g(x) = e^x - x - 1$$

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^x - x - 1 \geq 0 \right\} \text{ donc}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

• Limites aux bornes de D_g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x - 1 = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x - 1 = +\infty \end{cases}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

• g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x - 1$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\forall x \in]-\infty; 0[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0$; donc g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

• Tableau de variation de g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

10) Démontrons que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$

Soit D_f cet ensemble

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - x \neq 0\}$$

D'après la question 9) $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 \Rightarrow e^x - x > 0$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x \neq 0$ d'où $D_f = \mathbb{R}$

Partie B :

11) Calculons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = -1 \text{ car} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \times \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

12) a- Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$. En

effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} \text{ après}$$

développement et simplification du numérateur

$$f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$$

b- Dressons le tableau de variation de f

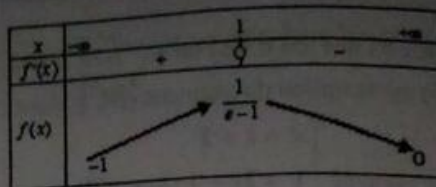
Signe de la dérivée

le signe de $f'(x)$ dépend $(1-x)$

car $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x - x)^2 > 0$ et $e^x > 0$

posons $(1-x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\text{donc } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$



13) a- Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f en son point d'abscisse 0.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0); \quad f'(0) = 1 \text{ et } f(0) = 0 \text{ d'où}$$

$$(T): y = x$$

b- Étudions la position de (C) par rapport à (T).

$$f(x) - x = \frac{-xg(x)}{e^x - x} \text{ le signe de } f(x) - x \text{ est celui de } -x$$

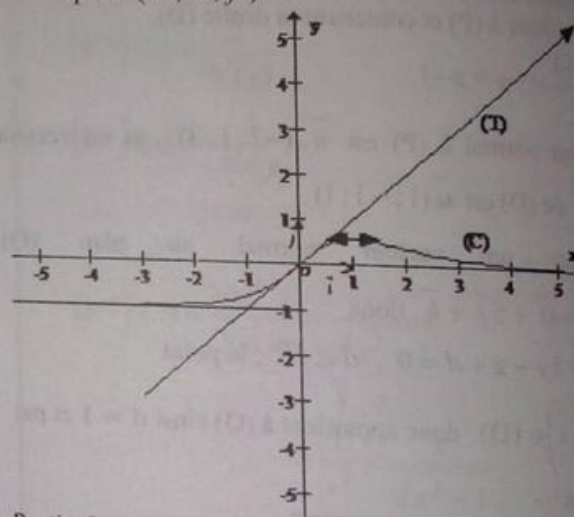
Donc :

(C) est au dessus de (T) sur $] -\infty; 0[$

(C) est au dessus de (T) sur $] 0; +\infty[$

(C) et (T) sont confondus pour $x = 0$

14) Traçons la courbe (C) et la tangente (T) dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$



Partie C :

15) Déterminons $f(1)$ et démontrons que k est une bijection

$$f(1) = f\left(\left]1; +\infty\right[\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(1) \text{ car } f \text{ est}$$

strictement décroissante sur $\left]1; +\infty\right[$ donc

$$f(1) = \left] 0; \frac{1}{e-1} \right[$$

16) Déterminons l'ensemble de dérivabilité de k^{-1} .

$$f'(1) = 0 \text{ alors } E = \left] 0; \frac{1}{e-1} \right[- \{f(1)\}$$

$$E = \left] 0; \frac{1}{e-1} \right[$$

17) Démontrons que le point $S\left(\frac{2}{e^2-2}; 2\right)$ appartient à la courbe représentative de k^{-1} .

$k(2) = f(2) = \frac{2}{e^2 - 2}$ d'où $S\left(\frac{2}{e^2 - 2}; 2\right)$ appartient à la courbe représentative de k^{-1} .

CORRIGE TYPE DE LA S.E.N ° 20 :

Problème 1 :

1. a) Calculons la probabilité des événements $I \cap F$, $I \cap \bar{F}$, $\bar{I} \cap F$ et $\bar{I} \cap \bar{F}$.

les données de l'énoncé sont : $P(I) = 0,8$, $P(\bar{I}) = 0,2$, $P_I(F) = 0,75$; $P_I(\bar{F}) = 0,15$ on a donc :

$$P(I \cap F) = P_I(F) \times P(I) = 0,75 \times 0,8 = 0,6 \quad \text{d'où } \underline{P(I \cap F) = 0,6}$$

$$P(I \cap \bar{F}) = P_I(\bar{F}) \times P(I) = (1 - P_I(F)) \times P(I) \quad \text{d'où } \underline{P(I \cap \bar{F}) = 0,2}$$

$$= 0,25 \times 0,8 = 0,2$$

$$P(\bar{I} \cap F) = P_{\bar{I}}(F) \times P(\bar{I}) = (1 - P_{\bar{I}}(\bar{F})) \times P(\bar{I}) \quad \text{d'où } \underline{P(\bar{I} \cap F) = 0,17}$$

$$= 0,85 \times 0,2 = 0,17$$

$$P(\bar{I} \cap \bar{F}) = P_{\bar{I}}(\bar{F}) \times P(\bar{I}) \quad \text{d'où } \underline{P(\bar{I} \cap \bar{F}) = 0,03}$$

$$= 0,15 \times 0,2 = 0,03$$

b) Déduisons le nombre de lapins susceptibles d'être vendus à l'occasion de la fête de « Nonvitcha ».

$$P(F) = P(I \cap F) + P(\bar{I} \cap F) = 0,77$$

$$\text{Soit } n \text{ le nombre de lapins. On a : } P(n) = \frac{616}{n} \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{616}{P(F)} = 800 \quad \text{d'où le nombre de lapins susceptibles d'être vendus est de 800.}$$

2. Calculons la probabilité p que le souhait du restaurant soit réalisé.

soit q la probabilité qu'il n'y est aucun de race importée $q = (0,8)^{10}$. Alors $p = 1 - q = 0,89$ $p = 1 - q = 0,89$

d'où $p = 0,89$

Problème 2 :

3. a) Démontrons que (E) admet une solution imaginaire pure.

soit $z_0 = ib$, $b \in \mathbb{R}^*$ une solution imaginaire pure de (E). on

$$(ib)^3 - 2(2 + 3i)(ib)^2 - 4(1 - 4i)(ib) + 16 - 8i = 0$$

après un développement et après regroupement des réels et imaginaires on obtient :

$$b^3 - 16b + 16 + i(-b^3 + 6b^2 - 4b - 8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4b^2 - 16b + 16 = 0 & (1) \\ -b^3 + 6b^2 - 4b - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

On résout (1) et on

vérifie ses solutions dans (2) et on trouve donc $b = 2$. D'où

(E) admet une solution imaginaire pure $z_0 = 2i$

b) Déterminons le polynôme $Q(z)$ tel que : $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.

Posons $Q(z) = az^2 + bz + c$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$.

$$(z - z_0)Q(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$$

$$= az^3 + (b - 2ai)z^2 + (c - 2bi)z - 2ic$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2ai = -4 - 6i \\ c - 2bi = -4 + 16i \\ -2ic = 16 - 8i \end{cases} \quad \text{on trouve : } \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 - 4i \\ c = 4 + 8i \end{cases}$$

$$Q(z) = z^2 - (4 + 4i)z + 4 + 8i = 0$$

c) Déduisons l'ensemble des solutions de l'équation (E).

$$(E) \Leftrightarrow (z - 2i)Q(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } Q(z) = 0$$

$$Q(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - (4 + 4i)z + 4 + i = 0$$

$$\Delta = -16 = (4i)^2 \quad \text{donc}$$

$$z_1 = \frac{4 + 4i - 4i}{2} = 2 \quad \text{et } z_2 = \frac{4 + 4i + 4i}{2} = 2 + 4i$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S_C = \{2; 2i; 2 + 4i\}$$

4. a) Déterminons la valeur m pour que l'écriture complexe de la similitude S soit : $z' = (1 - i)z + 2i$.

$$S(B) = C \Leftrightarrow w = (1 - i)v + 2i \Leftrightarrow$$

$$2 + 2i = (1 - i)(mi). \text{ On trouve } m = 2$$

b) Donnons la nature de S et ses éléments caractéristiques.

$$\text{On a } (1 - i) \in \mathbb{C}^* \text{ et } |1 - i| = \sqrt{2}.$$

$|1 - i| \neq 1$ donc S est la composée d'une rotation et d'une homothétie.

Le rapport de S est $k = \sqrt{2}$, le centre de S est le point A et l'angle θ de S est tel que :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{prenons } \theta = -\frac{\pi}{4}$$

c) Déterminons l'axe du point D

$$S(C) = D \Leftrightarrow z_D = (1 - i)(2 + 4i) + 2i. \text{ On obtient}$$

$$z_D = 6 + 4i$$

5. a) Déterminons la nature du triangle ABC

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{2 + 4i - 2i}{2 - 2i} = i \text{ alors ABC est un triangle isocèle et rectangle en B.}$$

b) Calculons en hectare l'aire A du triangle ABC

$$A = \frac{AB \times BC}{2} \text{ u.a or } AB = BC = |z_A - z_B| = 2\sqrt{2} \text{ et } u.a = hm^2 = ha$$

Donc $A = 4ha$

c) Dédisons-en l'aire A_T du domaine de Sodji

Le domaine ABCD de Sodji est tel que ACD est l'image de ABC par S.

Soit A' l'aire du triangle ACD rectangle en C.

$$A' = \frac{DC \times AC}{2} = \frac{\sqrt{2}BC \times \sqrt{2}AB}{2} = 2A$$

Alors $A_T = A + A' = 3A$ donc

$$A_T = 12ha$$

Problème 3 :

6. a) Détermine les nombres réels a et b

$\varphi(x) = e^{-x}(ax^2 + bx)$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = e^{-x}[-ax^2 + (2a - b)x + b]$$

φ est solution de (E_1) si et seulement si pour tout réel x,

$$\varphi'(x) + \varphi(x) = e^{-x}(2x + 2), \text{ ce qui conduit}$$

$$e^{-x}(2ax + b) = e^{-x}(2x + 2). \text{ On obtient } a = 1 \text{ et } b = 2.$$

b) Démontrons que $g - \varphi$ est solution de $(E_2) \Leftrightarrow$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (g - \varphi)'(x) + (g - \varphi)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(x) - \varphi'(x) + g(x) - \varphi(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(x) + g(x) = \varphi'(x) + \varphi(x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) + g(x) = e^{-x}(2x + 2), \text{ car } \varphi \text{ est solution de } (E_1) \Leftrightarrow g \text{ est solution de } (E_1). \text{ D'où le résultat.}$$

c) Résolvons l'équation (E_2) puis déduisons la résolution de l'équation (E_1) . (E_2) est une équation de la forme

$$ay' + by = 0 \text{ avec } a = b = 1.$$

Donc les solutions de (E_2) sont les fonctions $y_k(x) = ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$

$g - \varphi$ est solution de $(E_2) \Leftrightarrow g$ est solution de (E_1) donc on a : $(g - \varphi)(x) = ke^{-x} \Leftrightarrow g(x) = \varphi(x) + ke^{-x}$ soit

$g(x) = (x^2 + 2x)e^{-x} + ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$, d'où les solutions de (E_1) sont les fonctions y_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y_k(x) = (x^2 + 2x + k)e^{-x}, k \in \mathbb{R}$$

7. Démontrons que pour tout x élément de $\mathbb{R}$

$$f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$$

f étant solution de (E_1) , on a pour tout réel x,

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + k), k \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1. \text{ Donc } f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$$

8. Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)^2 e^{-x} \text{ car } = +\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right. \text{ soit } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1)^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{array} \right.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

9. a) Etudions le sens de variation de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = (2x + 2)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 2x + 1)$$

$$f'(x) = (-x^2 + 1)e^{-x}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2 + 1$. En posant $-x^2 + 1 = 0$ on a : $x = -1$ ou $x = 1$

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[; f'(x) < 0 \\ \forall x \in]-1; 1[; f'(x) > 0 \\ \forall x \in \{-1; 1\}; f'(x) = 0 \end{array} \right.$$

D'où f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$; et f est strictement croissante sur $[-1; 1]$

b) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	$+\infty$	0	$4e^{-1}$	0

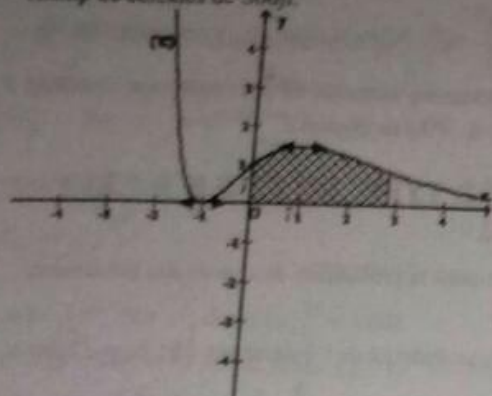
10. a) Etudions les branches infinies de (G)
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe (G) au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x} e^{-x} = -\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

b) Construisons (C) et hachurons la partie représentant le champ de céréales de Sodji.



11. a) Démontrons pour tout réel x ,

$$f(x) = e^{-x}(2x+2) - f'(x)$$

f est une solution de l'équation différentielle (E_1) , donc :

$$f'(x) + f(x) = 2(x+1)e^{-x} \text{ ce qui conduit à :}$$

$$f(x) = e^{-x}(2x+2) - f'(x)$$

b) Calculons L .

$$\text{Posons } u(x) = 2x+2 \text{ alors } u'(x) = 2$$

$$v'(x) = e^{-x} \text{ , prenons}$$

$$v(x) = -e^{-x} \text{ alors}$$

$$L = \left[-(2x+2)e^{-x} \right]_0^{2\sqrt{2}} - \int_0^{2\sqrt{2}} 2(-e^{-x}) dx$$

$$= \left[(-2x-4)e^{-x} \right]_0^{2\sqrt{2}}$$

$$= (-4\sqrt{2}-4)e^{-2\sqrt{2}} + 4 \text{ d'où}$$

$$L = (-4\sqrt{2}-4)e^{-2\sqrt{2}} + 4$$

c) Dédisons-en, en hectares, l'aire du champ de céréales.

Soit p cette aire. On a :

$$p = \left(\int_0^{2\sqrt{2}} f(x) dx \right) \times 10\,000^2 \text{ cm}^2$$

De la question 11.a) on déduit que :

$$\int_0^{2\sqrt{2}} f(x) dx = L - [f(x)]_0^{2\sqrt{2}}$$

$$= L - (9 + 4\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}} + 1$$

$$= 5 - (13 + 8\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}$$

$$\text{Alors } p = \left(5 - (13 + 8\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}} \right) ha$$

12. a) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[1; +\infty[$ une solution unique α et que

$$1 < \alpha < \frac{3}{2}$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \text{ avec}$$

$$h(x) = f(x) - x$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$h'(x) = f'(x) = f'(x) - 1$$

$$\forall x \in [1; +\infty[, \begin{cases} f'(x) \leq 0 \\ -1 < 0 \end{cases} \text{ donc } \forall x \in [1; +\infty[,$$

$$h'(x) < 0$$

Donc h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

$$h(1) = -1 + 4e^{-1} > 0 \text{ et } h\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{25}{4}e^{-\frac{3}{2}} < 0, h(1)$$

et $h\left(\frac{3}{2}\right)$ sont de signes contraires.

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet dans $[1; +\infty[$ une solution unique α comprise entre 1 et $\frac{3}{2}$.

D'où le résultat.

b) Démontrons que pour tout $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$,

$$f(x) \in \left[1; \frac{3}{2}\right] \text{ et } |f'(x)| \leq \frac{5}{4e}$$

• f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$; donc

$$f\left(\left[1; \frac{3}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right); f(1)\right]$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4}e^{-\frac{3}{2}} \approx 1,39 \text{ et } f(1) = \frac{4}{e} \approx 1,47, \text{ on a donc}$$

$$f\left(\left[1; \frac{3}{2}\right]\right) \subset \left[1; \frac{3}{2}\right]. \text{ D'où } f(x) \in \left[1; \frac{3}{2}\right], \forall x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$$

• on a $|f'(x)| = (x^2 - 1)e^{-x}, \forall x \in \left[1; \frac{3}{2}\right];$

$$x^2 - 1 \leq \frac{5}{4} \text{ et } e^{-x} \leq \frac{1}{e}$$

$$\text{d'où } |f'(x)| \leq \frac{5}{4e}$$

b) Dédudons que pour tout x élément de $\left[1; \frac{3}{2}\right]$, on

$$a : |f(x) - \alpha| \leq \frac{5}{4e} |x - \alpha|$$

De 12.b), et à l'aide des inégalités des accroissements finis appliquées à la fonction f sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$, on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{5}{4e} |x - \alpha|. \text{ Comme } f(\alpha) = \alpha, \text{ on a le résultat.}$$

13. a) Démontrons que pour tout entier n , $u_n \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$

$$u_0 = 1 \text{ et } 1 \in \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

Supposons que pour tout $n \geq 0$, $u_n \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$ et

$$\text{démontrons que } u_{n+1} \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$$

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_n \in \left[1; \frac{3}{2}\right]. \text{ D'après la question 12.b),}$$

$$u_{n+1} \in \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

De ce qui précède $u_n \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}$

b) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{4e} |u_n - \alpha| \text{ et } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4e}\right)^n$$

En utilisant les résultats des questions 13.a) et 12.b), on a :

$$|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{5}{4e} |u_n - \alpha| \text{ ce qui donne :}$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{4e} |u_n - \alpha|. \text{ L'application de ce résultat}$$

donne :

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{5}{4e} |u_0 - \alpha|;$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{5}{4e} |u_1 - \alpha|; \dots$$

$|u_n - \alpha| \leq \frac{5}{4e} |u_{n-1} - \alpha|$. En multipliant membre à membre ces n inégalités, on obtient après simplification :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{4e}\right)^n |u_0 - \alpha|. \text{ On sait que } 1 < \alpha < \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} < u_0 - \alpha < 0 \Leftrightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{5}{4e}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4e}\right)^n \text{ d'où } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4e}\right)^n$$

c) Dédudons que la production annuelle de provende va se stabiliser à long terme à une valeur qu'on précisera.

$$\text{De 13.b), on a pour tout } n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4e}\right)^n \text{ or}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4e}\right)^n = 0. \text{ Alors la suite } (u_n) \text{ converge vers } \alpha.$$

Ainsi la production annuelle de provende sera stabilisée à long terme à 10 α de tonnes.

CORRIGE TYPE DE LA S.E N° 21 :

Problème 1 :

1°) Déterminons la probabilité de chacun des événements $\{0\}$ et $\{1\}$

Soit p_1 la probabilité de l'évènement $\{0; 2; -\sqrt{2}\}$ on a :

$$p_1 + \frac{1}{2} p_1 = 1 \text{ donc } p_1 = \frac{2}{3} \text{ et } p_1 = 3p(\{0\}) \text{ par}$$

$$\text{conséquent } p(\{0\}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \text{ de plus } \frac{1}{2} p_1 = 3p(\{1\})$$

$$\text{donc } p(\{1\}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \text{ d'où}$$

$$p(\{0\}) = \frac{2}{9} \text{ et } p(\{1\}) = \frac{1}{9}$$

2°) Calculons la probabilité des événements R, S et T

$$\text{On a : } p(\{0\}) = p(\{2\}) = p(\{-\sqrt{2}\}) = \frac{2}{9}$$

$$p(\{1\}) = p(\{-1\}) = p(\{\sqrt{3}\}) = \frac{1}{9}$$

$$p(R) = p(\{1\}) + p(\{0\}) + p(\{2\}) = \frac{5}{9}$$

$$p(S) = p(R) + p(\{-1\}) = \frac{6}{9}$$

$$p(T) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} \text{ donc : } p(R) = \frac{5}{9}; p(S) = \frac{2}{3} \text{ et}$$

$$p(T) = \frac{1}{3}$$

Problème 2 :

3°) a- Calculons la probabilité pour que : $z = -1 + i\sqrt{3}$

Soit p' cette probabilité. $p' = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9}$ donc $p' = \frac{1}{81}$

b- Calculons la probabilité pour que $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Soit p'' cette probabilité

$p'' = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9}$ donc $p'' = \frac{4}{81}$
 4°) a- Ecrivons z_1 et z_2 sous forme exponentielle
 $z_1 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc on déduit que

$$z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ donc } z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

b- Déterminons la forme algébrique de $\left(\frac{1}{2}z_1\right)^{2013}$

$$\left(\frac{1}{2}z_1\right)^{2013} = e^{i\frac{4026\pi}{3}} = e^{i1342\pi} \text{ d'où}$$

5°) a- Calculons $(z_2)^6$ et $(2-i)^4$

$$(z_2)^6 = 2^6 \times e^{i\frac{30\pi}{4}} = 64 \times e^{8i\pi} \times e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ donc } (z_2)^6 = -64i$$

$$(2-i)^4 = (3-4i)^2 = -7-24i \text{ donc } (2-i)^4 = -7-24i$$

b- Déduisons-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de : $z^4 = -7-24i$
 $z^4 = -7-24i \Leftrightarrow z^4 - (2-i)^4 = 0 \Leftrightarrow$

$$[z - (2-i)][z + (2-i)][z - i(2-i)][z + i(2-i)] = 0 \text{ les solutions sont : } 2-i ; -2+i ; 1+2i \text{ et } -1-2i$$

6°) a- Calculons $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et donnons une équation de (C)

$$\text{On a : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i. \text{ On constate que : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in i\mathbb{R}^*$$

Le triangle ABC est rectangle en C. Le cercle (C) a donc pour équation : $x^2 + y^2 = 5$

b- Déterminons l'écriture complexe de s et précisons ses éléments caractéristiques

On a : $s(A) = A$ et $s(C) = B$ or l'écriture complexe de s est sous forme : $z' = az + b$, avec $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

$$\text{Donc } \begin{cases} 2-i = a(2-i) + b \\ -2+i = a(1+2i) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1+i \\ b = -1-2i \end{cases}$$

D'où l'écriture complexe de s est sous la forme :

$$z' = (1+i)z - 1 - 2i$$

s a pour centre le point A $(2-i)$; pour rapport $\sqrt{2}$ et pour

$$\text{angle } \frac{\pi}{4}$$

Problème 3 :

7°) a- Résolvons (E_0)

$y' + y = 0$. Les solutions sont les fonctions y de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $y(x) = ke^{-x}$, k étant une constante réelle

b- Prouvons que f est solution de (E)
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} \text{ donc}$$

$$f'(x) + f(x) = \frac{1}{1+e^x}. \text{ Par conséquent } f \text{ est une solution de (E)}$$

c- Démontrons que : h est solution de (E) $\Leftrightarrow (h-f)$ est solution de (E_0)

On a : $(h-f)$ solution de (E_0)

$$\Leftrightarrow (h-f)' + (h-f) = 0$$

$$\Leftrightarrow (h' + h) - (f' + f) = 0$$

$$\Leftrightarrow h' + h = \frac{1}{1+e^x} \text{ d'où } (h-f) \text{ est solution de } (E_0) \Leftrightarrow$$

h est solution de (E)

d- Déduisons les solutions de (E)

Les solutions de (E) sont les fonctions :

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^{-x} [k + \ln(1+e^x)], k \in \mathbb{R}$$

8°) a- Étudions les variations de g .

La fonction g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(1+e^x)^2}; g'(x) < 0 \text{ donc } g \text{ est}$$

strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

Tableau de variation de g .

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	-
$g(x)$	0	$-\infty$

b- Déduisons-en le signe de $g(x)$

La fonction g est continue et strictement et strictement décroissante

$$g\left(\left]-\infty; +\infty\right]\right) = \left]-\infty; 0\right[\text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$$

9°) Démontrons que (Δ) est asymptote à (Γ)

$$\text{On a : } g(x) - y = \frac{e^x}{1+e^x} - x + \ln(1-e^{-x}) + x - 1 = \frac{-1}{1+e^x} + \ln(1-e^{-x}).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{1+e^x} + \ln(1-e^{-x}) \right] = 0 \text{ donc}$$

$(\Delta) : y = -x + 1$ est asymptote à (Γ) au voisinage de $+\infty$

$$10°) a- \text{ Démontrons que : } f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{(1+e^x)}$$

Correction des évaluations

On a : $\frac{1+e^{-x}}{1+e^x} = \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1+e^x} = \frac{e^x+1}{e^x(1+e^x)} = e^{-x}$ d'où

$(1+e^{-x}) \frac{\ln(1+e^x)}{(1+e^x)} = f(x)$

b- Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \ln(1+e^x)$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = 1$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \end{cases}$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+e^{-x}) \frac{\ln(1+e^x)}{(1+e^x)}$

$= 0$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+e^{-x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+e^x) = +\infty \text{ donc} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c- Dédisons alors les asymptotes (Φ)

Les droites (Δ_1) et (Δ_2) d'équations respectives $y=0$ et $y=1$ sont des asymptotes de (Φ) (Δ_1) au voisinage de $+\infty$ et (Δ_2) au voisinage de $-\infty$)

11°) Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} g(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^{-x} \ln(1+e^x) + \frac{e^{-x} \times e^x}{1+e^x}$ donc $\forall x \in$

$\mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} g(x)$

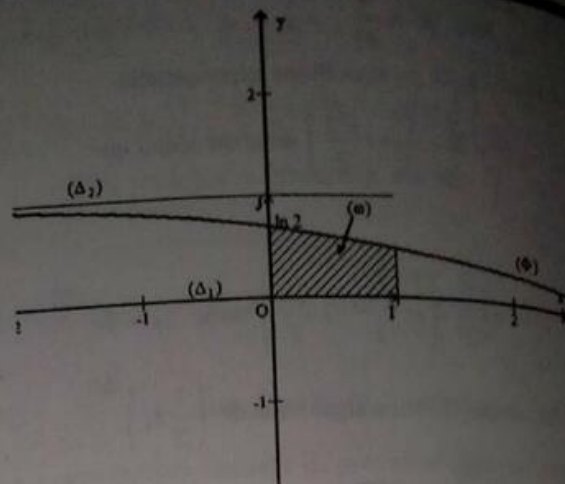
12°) a- Dressons le tableau de variations de f

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	1	0

b- Construisons (Φ)

$f(0) = \ln 2$



13°) a- Hachurons (Ω)

(Voir figure)

b- Démontrons que Ω

est telle que : $\frac{\ln 2}{e} \leq \Omega \leq \ln(1+e)$

$\Omega = \left(\int_0^1 e^{-x} \ln(1+e^x) dx \right) u.a$

$x \in [0; 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1$ (a)

$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 1+e^x \leq e+1$

$\Leftrightarrow \ln 2 \leq \ln(1+e^x) \leq \ln(e+1)$ (b)

(a) et (b) $\Rightarrow \forall x \in [0; 1], \frac{\ln 2}{e} \leq f(x) \leq \ln(e+1)$ par

conséquent Ω (en unité d'aire) est telle que :

$\frac{\ln 2}{e} \leq \Omega \leq \ln(1+e)$

CORRIGE TYPE DE LA S.E.N ° 22 :

Problème 1 :

1°) Déterminons les racines carrées de $-5-12i$

$|-5-12i| = 13$

Soit $u = x+iy, (x; y) \in \mathbb{R}^2$ une racine carrée de $-5-12i$

On a : $u^2 = -5-12i$

$u^2 = -5-12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

D'où les racines carrées de $-5-12i$ sont : $-2+3i$ et $2-3i$
 2°) Justifions que tout complexe z est solution de (E) si et seulement si $\bar{z}$ est solution de (E)

$$(z \text{ solution de (E)}) \Leftrightarrow z^4 + 10z^2 + 169 = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{z^4 + 10z^2 + 169} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{z^4} + 10\overline{z^2} + \overline{169} = 0$$

$$z \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow \bar{z}^4 + 10\bar{z}^2 + 169 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\bar{z} \text{ est solution de (E)})$$

D'où z est solution de (E) si et seulement si $\bar{z}$ solution de (E)

$$3^\circ) (E') : Z^2 + 10Z + 169 = 0$$

a- Résolvons (E')

Soit Δ le discriminant de (E').

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times 169$$

$$\Delta = -576 = (24i)^2 \text{ les solutions de (E')} \text{ sont donc}$$

$$Z_1 = \frac{-10 - 24i}{2} = -5 - 12i \text{ ou } Z_2 = \frac{-10 + 24i}{2} = -5 + 12i.$$

L'ensemble solution S de (E') dans $\mathbb{C}$ est :

$$S = \{-5 - 12i ; -5 + 12i\}$$

b- Dédoublons les solutions de (E)

$$(z \text{ solution de (E)}) \Leftrightarrow z^4 + 10z^2 + 169 = 0$$

$$\Leftrightarrow Z^2 + 10Z + 169 = 0 \text{ avec } Z = z^2$$

$$\Leftrightarrow Z = -5 - 12i \text{ ou } Z = -5 + 12i$$

$$z^2 = -5 - 12i \Leftrightarrow z = -2 + 3i \text{ ou } z = 2 - 3i \text{ d'après } 1^\circ)$$

Ainsi $2-3i$ et $-2+3i$ sont des solutions de (E).

Alors d'après 2°) $2-3i = 2+3i$ et $-2+3i = -2-3i$ sont aussi des solutions de (E). Or (E) admet au plus 4 solutions.

D'où les solutions de (E) sont : $-2+3i$; $-2-3i$; $2+3i$ et $2-3i$

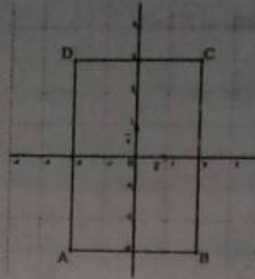
c- Plaçons les points A, B, C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$$\operatorname{Re}(z_A) < 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z_A) < 0 \text{ alors } z_A = -2 - 3i$$

$$\operatorname{Re}(z_D) < 0 \text{ alors } z_D = -2 + 3i$$

$$\operatorname{Im}(z_B) < 0 \text{ alors } z_B = 2 - 3i \text{ et donc } z_A = 2 + 3i$$

$$A(-2; -3) ; B(2; -3) ; C(2; 3) \text{ et } D(-2; 3)$$



Nature de la parcelle ABCD

$$z_B - z_A = 2 - 3i - (-2 - 3i) = 4$$

$$z_C - z_D = 2 + 3i - (-2 + 3i) = 4$$

On a : $z_B - z_A = z_C - z_D$ alors ABCD est un parallélogramme (1)

$$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = \frac{2 - 3i + 2 + 3i}{-2 + 3i + 2 + 3i} = \frac{4}{6i} = -\frac{2}{3}i \in i\mathbb{R}^* \text{ donc } (AB) \perp (AD)$$

(2) De (1) et (2) la parcelle ABCD est un rectangle.

4°) a- Déterminons l'écriture complexe de h .

h étant l'homothétie de centre d'affixe -2 et de rapport

$$k = -\frac{\sqrt{15}}{5} \text{ alors l'écriture complexe de } h \text{ est :}$$

$$z' = -\frac{\sqrt{15}}{5} z - 2 \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{5} \right)$$

b) Déterminons les affixes des points E, F, G et H.

On a : $h(A) = E$; $h(B) = F$; $h(C) = G$ et $h(D) = H$ donc

$$h(A) = E \Leftrightarrow z_E = -\frac{\sqrt{15}}{5} z_A - 2 \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{5} \right)$$

$$\Leftrightarrow z_E = -\frac{\sqrt{15}}{5} (-2 - 3i) - 2 \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{5} \right)$$

$$\Leftrightarrow z_E = -2 + \frac{3\sqrt{15}}{5} i$$

$$h(B) = F \Leftrightarrow z_F = -\frac{\sqrt{15}}{5} z_B - 2 \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{5} \right)$$

$$\Leftrightarrow z_F = -\frac{\sqrt{15}}{5} (2 - 3i) - 2 \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{5} \right)$$

$$\Leftrightarrow z_F = \frac{-10 - 4\sqrt{15}}{5} + \frac{3\sqrt{15}}{5} i$$

$$h(C) = G \Leftrightarrow z_G = -\frac{\sqrt{15}}{5} z_C - 2 \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{5} \right)$$

$$h(C) = G \Leftrightarrow z_G = -\frac{\sqrt{15}}{5}(2+3i) - 2\left(1 + \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow z_G = -\frac{10-4\sqrt{15}}{5} - \frac{3\sqrt{15}}{5}i$$

$$h(D) = H \Leftrightarrow z_H = -\frac{\sqrt{15}}{5}(-2+3i) - 2\left(1 + \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow z_H = -2 - \frac{3\sqrt{15}}{5}i$$

b- Calculons l'aire de la surface réduite de l'ancienne parcelle A et déduisons le pourcentage de réduction dans la zone de l'usine après lotissement

Soit A_1 l'aire de ABCD et A_2 celle de EFGH. On a :

$$A = A_1 - A_2 \text{ or } A_2 = k^2 A_1 \text{ donc}$$

$$A = (1 - k^2) A_1 \quad ; \quad 1 - k^2 = \frac{2}{3} \text{ et}$$

$$A_1 = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| u.a = 4 \times 6 u.a = 24 u.a \text{ d'où } A = \frac{48}{5} u.a \text{ où } u.a \text{ est l'unité d'aire}$$

Déduisons le pourcentage de réduction

$$\text{Ce pourcentage est : } \frac{A}{A_1} \times 100 = \frac{2}{5} \times 100 \text{ soit } 40\%$$

Problème 2 :

5°) Déterminons les coordonnées des points A, C, H et I dans le repère orthonormé direct (F ; $\overrightarrow{FE}$; $\overrightarrow{FG}$; $\overrightarrow{FB}$)

$$\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} \text{ donc } A(1; 0; 1);$$

$$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB} \text{ donc } C(0; 1; 1);$$

$$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} \text{ donc } H(1; 1; 0);$$

I étant l'isobarycentre des points C, F et H on a :

$$x_I = \frac{x_C + x_F + x_H}{3} = \frac{1}{3}$$

$$y_I = \frac{y_C + y_F + y_H}{3} = \frac{2}{3} \text{ alors } I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

$$z_I = \frac{z_C + z_F + z_H}{3} = \frac{1}{3}$$

6°) a- Représentation paramétrique de la droite (AG)

(AG) est la droite passant par A(1; 0; 1) et dirigée par

$\overrightarrow{AG}(-1; 1; -1)$. D'où une représentation paramétrique de la

$$\text{droite (AG) est : } \begin{cases} x = 1 - \beta \\ y = \beta \\ z = 1 - \beta \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

Equation cartésienne du plan (CFH)

Un vecteur normal au plan (CFH) est

$$\overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{FH} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{FE} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FH}$$

$$\text{; soit } \overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{FH} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donc une équation cartésienne du plan}$$

(CFH) est : $x - y + z + d = 0$ et puisque F(0; 0; 0) est un point de ce plan, alors $d = 0$

D'où une équation cartésienne du plan (CFH) est $x - y + z = 0$

b- Déduisons que (AG) est perpendiculaire au plan (CFH) en I.

$$\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de (AG) et } \overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{FH} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur normal à (CFH). On a : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{FH}$ donc (AG) $\perp$ (CFH) (a)

Soit $\{M(x; y; z)\} = (AG) \cap (CFH)$

$$M \in (AG) \cap (CFH) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \beta \\ y = \beta \\ z = 1 - \beta \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \beta - \beta + 1 - \beta = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - 3\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} = x_1 \\ y = \frac{2}{3} = y_1 \\ z = \frac{1}{3} = z_1 \end{cases}$$

Donc $(AG) \cap (CFH) = \{I\}$ (b) de (a) et (b) (AG) est perpendiculaire au plan (CFH) en I.

7°) Distance du point G au plan (CFH).

$$d(G; (CFH)) = \frac{|\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{FH}|}{\|\overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{FH}\|} = \frac{|0 - 1 + 0|}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Volume du tétraèdre CFGH

Soit $\mathcal{V}$ ce volume

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{FG} \cdot (\overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{FH})| u.v \quad ; \quad \overrightarrow{FG}(0; 1; 0) \text{ et}$$

$$\overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{FH}(-1; 1; -1) \text{ donc } \mathcal{V} = \frac{1}{6} u.v$$

Problème 3 :

$$8°) (E) : y'' - y' - 2y = -20x - 4$$

a- Démontrons que la fonction $u : x \mapsto 10x - 1$ est solution de (E)

La fonction u étant une fonction polynôme, elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$u'(x) = 10 \text{ et } u''(x) = 0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, u''(x) - u'(x) - 2u(x) = -10 - 2(10x - 1)$$

$= -20x - 4$ D'où la fonction numérique $u: x \mapsto 10x - 3$ est solution de (E).

b- Démontrons que k est solution de (E) si et seulement si $k-u$ est solution de (E')
(E'): $y'' - y' - 2y = 0$

k solution de (E)

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, k''(x) - k'(x) - 2k(x) = -20x - 4$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, k''(x) - k'(x) - 2k(x) = u''(x) - u'(x) - 2u(x)$$

(d'après 8°) a-)

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, k''(x) - u''(x) - k'(x) + u'(x) - 2k(x) + 2u(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (k-u)''(x) - (k-u)'(x) - 2(k-u)(x) = 0$$

$\Leftrightarrow k-u$ est solution de (E'). D'où le résultat.

c- Réolvons (E') puis déduisons les solutions de (E)

L'équation caractéristique associée à (E') est : $r^2 - r - 2 = 0$

$$r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \text{ ou } r = 2$$

D'où les solutions de (E') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}$ où $(A; B) \in \mathbb{R}^2$

k solution de (E) et $k-u$ solution de (E') alors les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $y = Ae^{-x} + Be^{2x} + u(x)$ Soit $y = Ae^{-x} + Be^{2x} + 10x - 3$ où $(A; B) \in \mathbb{R}^2$

d- Justifions que $g(x) = 4e^{-x} - e^{2x} + 10x - 3$.

g étant une solution particulière de (E) telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 4$, alors g est deux fois au moins dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{cases} g(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + 10x - 3 \\ g'(x) = -Ae^{-x} + 2Be^{2x} + 10 \\ g(0) = 0 \\ g'(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + 10x - 3 \\ -A + 2B = -6 \\ A + B = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + 10x - 3 \\ B = -1 \\ A = 4 \end{cases}$$

$$\text{D'où } g(x) = 4e^{-x} - e^{2x} + 10x - 3$$

$$\text{D'où } \begin{cases} f(x) = g(x), & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = -\sqrt{\ln(-x+1)}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a- Démontrons que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$

Soit D l'ensemble de définition de f .

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$\text{avec } D_1 = \{x \in]-\infty; 0[\mid -x+1 > 0 \text{ et } \ln(-x+1) \geq 0\}$$

$$D_2 = \{x \in [0; +\infty[\mid g(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$D_2 = [0; +\infty[, g(x) = 4e^{-x} - e^{2x} + 10x - 3 \in \mathbb{R} \text{ donc } D_2 = [0; +\infty[$$

$$-x+1 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[$$

$$\ln(-x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; 1[\\ -x+1 \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; 1[\\ -x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow]-\infty; 0]$$

$$\text{Donc } D_1 =]-\infty; 0[\cap]-\infty; 0] =]-\infty; 0]$$

$$D =]-\infty; 0] \cup [0; +\infty[= \mathbb{R}$$

D'où f est définie sur $\mathbb{R}$

b- Justifions que f est continue en 0

$$f(x) = g(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4e^{-x} - e^{2x} + 10x - 3) = 4 - 1 - 3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{\ln(-x+1)} = -\sqrt{\ln 1} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0).$$

D'où f est continue en 0.

c- Étudions la dérivabilité de f en 0 et interprétons les résultats

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sqrt{\ln(-x+1)}}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x+1)}{-x\sqrt{\ln(-x+1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x+1)}{-x} \times \frac{1}{\sqrt{\ln(-x+1)}}$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{\ln(-x+1)}} = +\infty \end{cases}$$

La fonction f n'est donc pas dérivable à gauche en 0.

Sur $[0; +\infty[$, f est la restriction de g à l'intervalle $[0; +\infty[$ or g est dérivable en 0 et $g'(0) = 4$. Par conséquent f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 4$

En conclusion f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique :

La courbe ($\mathcal{C}$) de f admet en son point d'abscisse 0 deux demi-tangentes, l'une à gauche (T_1) et l'autre à droite (T_2)

$$\text{définies par : } (T_1) : \begin{cases} x = 0 \\ y \leq f(0) = 0 \end{cases} \text{ et } (T_2) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 4x \end{cases}$$

10° a- Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x de $[0; +\infty[$

f est deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout x de $[0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = -4e^{-x} - 2e^{2x} + 10 \text{ et } f''(x) = 4e^{-x} - 4e^{2x}$$

b- Étudions le signe de $f''(x)$ sur $[0; +\infty[$ et déduisons le sens de variation la fonction f'

$$\text{Pour tout } x \text{ de } [0; +\infty[\quad f''(x) = 4e^{-x} - 4e^{2x} = 4e^{-x}(1 - e^{3x})$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^{-x}(1 - e^{3x}) = 0 \Leftrightarrow (1 - e^{3x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{3x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$x \in [0; +\infty[\Leftrightarrow 3x \geq 0 \Leftrightarrow e^{3x} \geq 1 \Leftrightarrow 1 - e^{3x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ car } 4e^{-x} > 0$$

Donc la fonction f' est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

c- Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ et $f'(0)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4e^{-x} - 2e^{2x} + 10) = 4 \text{ et } f'(0) = 4$$

b- Dédisons que $f'(x) = 0$ admet dans $[0; +\infty[$ une solution unique α .

La fonction f' est continue et strictement décroissante dans $[0; +\infty[$; $f'([0; +\infty[) =]-\infty; 4[$ et $0 \in]-\infty; 4[$. D'où $f'(x) = 0$ admet dans $[0; +\infty[$ une solution unique α .

11°) On pose $t = e^x$

a- Justifions que si $f'(x) = 0$ alors $t^3 - 5t + 2 = 0$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -4e^{-x} - 2e^{2x} + 10 = 0$$

$$\Rightarrow -2e^{-x}(2 + e^{3x} - 5e^x) = 0$$

$$\Rightarrow e^{3x} - 5e^x + 2 = 0 \text{ car } -2e^{-x} \neq 0$$

$$\Rightarrow (e^x)^3 - 5e^x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow t^3 - 5t + 2 = 0 \text{ avec } t > 0$$

d'où $f'(x) = 0$ alors $t^3 - 5t + 2 = 0$.

b- Justifions que $t = 2$ est solution de $t^3 - 5t + 2 = 0$ et déterminons deux nombres réels a et b tels que

$$t^3 - 5t + 2 = (t - 2)(t^2 + at + b)$$

$$2^3 - 5 \times 2 + 2 = 8 - 10 + 2 = -2 + 2 = 0 \text{ donc } 2 \text{ est solution de } t^3 - 5t + 2 = 0.$$

Faisons une division euclidienne de $t^3 - 5t + 2$ par $t - 2$

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 5t + 2 & t - 2 \\ -t^2 + 2t & \\ \hline 2t^2 - 5t + 2 & \\ -2t^2 + 4t & \\ \hline -t + 2 & \\ t - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc on a : $t^3 - 5t + 2 = (t - 2)(t^2 + 2t - 1)$

$a = 2$ et $b = -1$.

c- Trouvons les solutions de $t^3 - 5t + 2 = 0$

$$t^3 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t - 2)(t^2 + 2t - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t = 2 \text{ ou } t^2 + 2t - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Résolvons } t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$$

$$t = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \text{ ou } t = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

Puis que $t > 0$ D'où les solutions de $t^3 - 5t + 2 = 0$ sont $t = 2$ et $t = -1 + \sqrt{2}$

Dédisons α

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (e^\alpha)^3 - 5(e^\alpha) + 2 = 0 \text{ et } \alpha > 0 \text{ (d'après 11°) } \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha = 2 \text{ ou } e^\alpha = -1 + \sqrt{2} \text{ (d'après la résolution de } t^3 - 5t + 2 = 0; t > 0)$$

$$e^\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = \ln 2 \text{ et } e^\alpha = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = \ln(-1 + \sqrt{2})$$

$$\alpha > 0 \text{ Donc } \alpha = \ln 2$$

12°) a- Vérifions que $\forall x \in [0; +\infty[$,

$$f(x) = x \left(\frac{4}{xe^x} - \frac{e^{2x}}{x} + 10 - \frac{3}{x} \right)$$

$$\forall x \in [0; +\infty[, x \left(\frac{4}{xe^x} - \frac{e^{2x}}{x} + 10 - \frac{3}{x} \right) = \frac{4}{e^x} - e^{2x} + 10x - 3 = f(x)$$

$$\text{D'où } \forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = x \left(\frac{4}{xe^x} - \frac{e^{2x}}{x} + 10 - \frac{3}{x} \right)$$

b- Calculons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{4}{xe^x} - \frac{e^{2x}}{x} + 10 - \frac{3}{x} \right) = -\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{xe^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e^{2x}}{x} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-\sqrt{\ln(-x+1)}] = -\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+1) = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty \quad [t = -x+1] \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} -\sqrt{X} = -\infty \quad [X = \ln(t)] \end{cases}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$

c- Etudions le signe de f' sur $]0; +\infty[$ et sur $]0; \ln 2[$

Pour tout x de $]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = -4e^{-x} - 2e^{2x} + 10$
 f' est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $f'(0) = 4$
 $\forall x \in]0; \ln 2[\Rightarrow x < \ln 2$

$\Rightarrow f'(x) > 0$
 $\forall x \in]\ln 2; +\infty[\Rightarrow x > \ln 2$
 $\Rightarrow f'(x) < 0$
 Pour tout x de $]-\infty; 0[$: $f(x) = -\sqrt{\ln(-x+1)}$;
 f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et pour tout x de $]-\infty; 0[$, on
 $a : f'(x) = \frac{1}{2(-x+1)\sqrt{\ln(-x+1)}} > 0$

En résumé le tableau de signe de $f'(x)$ se présente comme suit :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	-

13°) a- Dressons le tableau de variation de f

f est strictement croissante sur $]-\infty; \ln 2]$ et f est strictement décroissante sur $[\ln 2; +\infty[$

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-5+1(\ln 2)$	$-\infty$

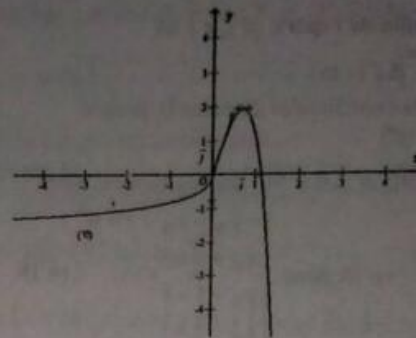
b- Construisons la courbe représentative de la fonction f
Branches infinies

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f &= -\infty \text{ calculons } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{\ln(-x+1)}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x+1)}{-x} \times \frac{1}{\sqrt{\ln(-x+1)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{-x} \times \frac{\ln(-x+1)}{-x+1} \times \frac{1}{\sqrt{\ln(-x+1)}} \\
 &= -1 \times 0 \times 0 = 0 \text{ donc } (\mathcal{C}) \text{ admet une branche}
 \end{aligned}$$

parabolique de direction celle de l'axe des abscisses aux voisinage de $-\infty$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= -\infty ; \text{ calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{xe^x} - \frac{e^{2x}}{x} + 10 - \frac{3}{x} \right) \\
 &= -\infty \text{ donc } (\mathcal{C}) \text{ admet une branche parabolique}
 \end{aligned}$$

de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$



14°) Déterminons la production minimale d'huile de l'usine
La production minimale d'huile est l'arrondi d'ordre 3 de $p(\alpha)$ hl.

$$p(\alpha) = 1000 \times f(\alpha) \quad f(\alpha) = 10 \ln 2 - 5 = 1,931$$

D'où la production minimale est égale 1931 hl par an.

CORRIGE TYPE DE LA S.E N° 23 :

Problème 1 :

1°) Déterminons une équation cartésienne du plan $(\mathcal{F})$.

On a le plan $(\mathcal{F})$ du sol est définie par les point A, B et C ;

donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{F})$.

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -1\vec{i} - 1\vec{k} \text{ alors}$$

$$(P) : -11x - 11z + d = 0 ; d \in \mathbb{R}.$$

$$C \in (\mathcal{F}) \Leftrightarrow d = 33 \text{ donc } (P) : -11x - 11z + 33 = 0 \text{ soit } (\mathcal{F}) : -x - z + 3 = 0.$$

2°) a- Vérifions que H est un point de (Δ) .

$$\text{On a : } x_H - 2y_H + 2z_H - 2 = -4 - 2(-1) + 2(2) - 2$$

$$= -4 + 2 + 4 - 2 = 0 \text{ et}$$

$$2x_H - y_H + z_H + 5 = 2(-4) - (-1) + 2 + 5$$

$$= -8 + 1 + 2 + 5 = 0$$

Donc $H \in (\Delta)$.

b- Justifions que (Δ) est une droite dont tu préciseras un repère.

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace tel que

$M \in (\Delta)$

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

Posons $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2\alpha - 2 = 0 \\ 3y - 3\alpha + 9 = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(-3 + \alpha) - 2\alpha + 2 \\ y = -3 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 + \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

D'où (Δ) est une droite de repère $(E; \vec{u})$ où $E(-4; -3; 0)$ et $\vec{u}(0; 1; 1)$.

3°) a- Déterminons les coordonnées du point D projeté orthogonal de H sur $(\mathcal{F})$

On a : $D \in (\mathcal{F})$ puis $\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors

$$\begin{cases} -y_D - z_D + 3 = 0 \\ x_D + 4 = 0 \\ y_D + 1 = t \\ z_D - 2 = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \text{ donc } \overrightarrow{HD} = t(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$$

$$\begin{cases} -y_D - z_D + 3 = 0 \\ x_D + 4 = 0 \\ y_D + 1 = t \\ z_D - 2 = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -1 + t \\ z_D = 2 + t \\ 1 - t - 2 - t + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = 0 \\ z_D = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

D'où $D(-4; 0; 3)$.

b- Démontrons que $D \in (\Delta)$.

Supposons que $D \in (\Delta)$

$$\begin{aligned} D \in (\Delta) &\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -3 + \alpha \\ z_D = \alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ 0 = -3 + \alpha \\ 3 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \alpha = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme α est unique alors $D \in (\Delta)$.

c- Dédouons la position de (Δ) et $(\mathcal{F})$

D étant le projeté orthogonal de H sur le plan $(\mathcal{F})$ implique que la droite (DH) est perpendiculaire à $(\mathcal{F})$.

Or $D \in (\Delta)$ et $H \in (\Delta)$ d'où (Δ) est perpendiculaire à $(\mathcal{F})$.

d- Déterminons h.

$$h = d(D; (\Delta)) = DH \text{ u.l.}$$

$$= \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2} \text{ u.l. on trouve}$$

$$h = \sqrt{2} \text{ u.l.}$$

4°) Calculons la distance d.

$$d = d(C; (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{EC} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ u.l.}$$

$$\overrightarrow{EC}(4; -1; -5); \vec{u}(0; 1; 1); \overrightarrow{EC} \wedge \vec{u} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k};$$

$$\|\overrightarrow{EC} \wedge \vec{u}\| = 4\sqrt{3} \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{2} \text{ donc } d = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ u.l.} = 2\sqrt{6} \text{ u.l.}$$

Problème 2 :

5°) Résolvons (E)

Soit Δ le discriminant de (E)

On a :

$$\begin{aligned} \Delta &= [2 + (2 - 3\sqrt{2})i]^2 - 4(3\sqrt{2} - i(3\sqrt{2} - 2)) \\ &= 4 + 4(2 - 3\sqrt{2})i - (4 - 12\sqrt{2} + 18) - 12\sqrt{2} + 4(3\sqrt{2} - 2)i \\ &= 4 + 4(2 - 3\sqrt{2})i - 4 + 12\sqrt{2} - 18 - 12\sqrt{2} - 4(2 - 3\sqrt{2})i \\ &= -18 = (3\sqrt{2}i)^2 \text{ donc} \end{aligned}$$

$$(E) \Leftrightarrow z = \frac{-2 - (2 - 3\sqrt{2})i - 3\sqrt{2}i}{2} \text{ ou}$$

$$z = \frac{-2 - (2 - 3\sqrt{2})i + 3\sqrt{2}i}{2}$$

$$(E) \Leftrightarrow z = -1 - i \text{ ou } z = -1 - (1 - 3\sqrt{2})i$$

D'où les solutions sont : $-1 - i$ et $-1 - (1 - 3\sqrt{2})i$

$-1 < -1 + 3\sqrt{2}$ donc $z_2 = -1 - i$ et $z_3 = -1 - (1 - 3\sqrt{2})i$

6°) Démontrons que $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) = e^{-i\frac{\pi}{8}}(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}})$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$$

$$= 1 + e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{8}} \times e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{8}}(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}})$$

$$D'où $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) = e^{-i\frac{\pi}{8}}(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}})$$$

7°) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de S

S est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i) \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$

$$|a| = 1$$

Donc la nature de S est une rotation.

Éléments caractéristiques

$$\text{Angle } \theta = \arg\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)\right]$$

$$= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

Centre Ω d'affixe

$$z_{\Omega} = \frac{b}{1 - a} = \frac{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{9\pi}{8}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)}$$

$$z_1 = \frac{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} \right) e^{i \frac{\pi}{4}}}{e^{-i \frac{\pi}{4}} \left(e^{i \frac{\pi}{4}} + e^{-i \frac{\pi}{4}} \right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} \right) e^{i \frac{\pi}{4}}}{2 \cos \frac{\pi}{8} e^{-i \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{2}}$$

Or $\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{2}} = -1 - i = z_2$ donc L_2 est le centre de la rotation S .

8°) a- Linéarisons les expressions suivantes :

$$\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{8} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{10\pi}{8} + \cos \left(-\frac{8\pi}{8} \right) \right]$$

$$\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{8} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{5\pi}{4} + \cos(-\pi) \right]$$

$$\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$$

$$\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{9\pi}{8} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{10\pi}{8} - \sin \left(-\frac{8\pi}{8} \right) \right]$$

$$\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{9\pi}{8} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{5\pi}{4} - \sin(-\pi) \right]$$

$$\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ donc } \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

b- Dédudons que $z' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z - \sqrt{2} - 1 - i$

en effet :

$$z' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z + 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z + 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{8} + 2\sqrt{2}i \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{9\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z + 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \right) + 2\sqrt{2}i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z - 1 - \sqrt{2} - i \text{ d'où } z' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z - \sqrt{2} - 1 - i$$

c- Déterminons l'abscisse du point L_1 .

on a : $S(L_1) = L_3$

$$S(L_1) = L_3 \Leftrightarrow z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z_1 - 1 - \sqrt{2} - i$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z_1 = z_3 + 1 + \sqrt{2} + i$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{\sqrt{2}}{-1+i} (z_3 + 1 + \sqrt{2} + i) \text{ en effectuant les}$$

opérations on trouve $z_1 = 2 - 4i$.

d- Dédudons la forme exacte de l'objet

S étant une rotation de centre L_2 et $S(L_1) = L_3$ alors $L_2 L_3 =$

$$L_2 L_1 \text{ et } \arg \left(\frac{L_3 - L_2}{L_1 - L_2} \right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ donc le}$$

triangle $L_1 L_2 L_3$ est isocèle en L_2 .

Problème 3 :

9°) a- étudions le sens de variation de g .

$$g(x) = \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{e^{-x}}{x+1}$$

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x+1 \neq 0 \right\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

La fonction $x \mapsto \ln|x+1|$ dérivable sur chacun des intervalles

$]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$ car $x+1 > 0$,

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$;

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est dérivable sur chacun des

intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$ comme fonctions rationnelles ;

La $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x+1}$ est dérivable sur chacun des intervalles

$]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$; donc g est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$.

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[, g'(x) = \frac{(x+2)(1-e^{-x})}{(x+1)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, (x+1)^2 > 0$ donc le signe de g' est celui du numérateur

Posons $g'(x) = 0$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(1-e^{-x}) = 0 \text{ et } x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et posons $1-e^{-x} < 0$

$$1-e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$x+2$	-	○	+	+	+
$1-e^{-x}$	-	-	-	○	+
$g'(x)$	+	○	-	-	+

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[, g'(x) > 0$ et

$\forall x \in]-2; -1[\cup]-1; 0[, g'(x) < 0$ donc

g est strictement croissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $[0; +\infty[$

g est strictement décroissante sur $[-2; -1[$ et sur $]-1; 0[$

b- Précisons les extremums de g et déduisons-en le signe de g

$g'(x)$ s'annule en -2 et en 0 en changeant de signe donc

$g'(-2) = 1 - e^2$ et $g(0) = 0$ sont les extremums de g .

D'où (Δ) est une droite de repère $(E; \vec{u})$ où $E(-4; -3; 0)$ et $\vec{u}(0; 1; 1)$.

3°) a- Déterminons les coordonnées du point D projeté orthogonal de H sur $(\mathcal{P})$

On a : $D \in (\mathcal{P})$ puis $\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors

$$\begin{cases} -y_D - z_D + 3 = 0 \\ \overrightarrow{HD} = t(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \text{ donc } \begin{cases} -y_D - z_D + 3 = 0 \\ x_D + 4 = 0 \\ y_D + 1 = t \\ z_D - 2 = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} -y_D - z_D + 3 = 0 \\ x_D + 4 = 0 \\ y_D + 1 = t \\ z_D - 2 = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -1 + t \\ z_D = 2 + t \\ 1 - t - 2 - t + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = 0 \\ z_D = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

D'où $D(-4; 0; 3)$.

b- Démontrons que $D \in (\Delta)$.

Supposons que $D \in (\Delta)$

$$D \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -3 + \alpha \\ z_D = \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ 0 = -3 + \alpha \\ 3 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

Comme α est unique alors $D \in (\Delta)$.

c- Dédudons la position de (Δ) et $(\mathcal{P})$

D étant le projeté orthogonal de H sur le plan $(\mathcal{P})$ implique que la droite (DH) est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

Or $D \in (\Delta)$ et $H \in (\Delta)$ d'où (Δ) est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

d- Déterminons h.

$$h = d(D; (\Delta)) = DH \text{ u.l.}$$

$$= \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2} \text{ u.l. on trouve}$$

$$h = \sqrt{2} \text{ u.l.}$$

4°) Calculons la distance d.

$$d = d(C; (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{EC} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ u.l.}$$

$$\overrightarrow{EC}(4; -1; -5); \vec{u}(0; 1; 1); \overrightarrow{EC} \wedge \vec{u} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k};$$

$$\|\overrightarrow{EC} \wedge \vec{u}\| = 4\sqrt{3} \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{2} \text{ donc } d = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ u.l.} = 2\sqrt{6} \text{ u.l.}$$

Problème 2 :

5°) Résolvons (E)

Soit Δ le discriminant de (E)

On a :

$$\Delta = [2 + (2 - 3\sqrt{2})i]^2 - 4(3\sqrt{2} - i(3\sqrt{2} - 2))$$

$$= 4 + 4(2 - 3\sqrt{2})i - (4 - 12\sqrt{2} + 18) - 12\sqrt{2} + 4(3\sqrt{2} - 2)$$

$$= 4 + 4(2 - 3\sqrt{2})i - 4 + 12\sqrt{2} - 18 - 12\sqrt{2} - 4(2 - 3\sqrt{2})$$

$$= -18 = (3\sqrt{2}i)^2 \text{ donc}$$

$$(E) \Leftrightarrow z = \frac{-2 - (2 - 3\sqrt{2})i - 3\sqrt{2}i}{2} \text{ ou}$$

$$z = \frac{-2 - (2 - 3\sqrt{2})i + 3\sqrt{2}i}{2}$$

$$(E) \Leftrightarrow z = -1 - i \text{ ou } z = -1 - (1 - 3\sqrt{2})i$$

D'où les solutions sont : $-1 - i$ et $-1 - (1 - 3\sqrt{2})i$

$-1 < -1 + 3\sqrt{2}$ donc $z_2 = -1 - i$ et $z_3 = -1 - (1 - 3\sqrt{2})i$

6°) Démontrons que $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) = e^{-i\frac{\pi}{8}} \left(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}} \right)$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$$

$$= 1 + e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{8}} \times e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{2\pi}{8}}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{8}} \left(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}} \right)$$

$$\text{D'où } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) = e^{-i\frac{\pi}{8}} \left(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}} \right)$$

7°) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques S

S est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$

$$|a| = 1$$

Donc la nature de S est une rotation.

Eléments caractéristiques

$$\text{Angle } \theta = \arg \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i) \right]$$

$$= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Centre Ω d'affixe

$$z_{\Omega} = \frac{b}{1 - a} = \frac{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} \right) e^{i\frac{9\pi}{8}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)}$$

$$z_3 = \frac{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} \right) e^{i \frac{9\pi}{8}}}{e^{-i \frac{\pi}{8}} \left(e^{i \frac{\pi}{8}} + e^{-i \frac{\pi}{8}} \right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} \right) e^{i \frac{9\pi}{8}}}{2 \cos \frac{\pi}{8} e^{-i \frac{\pi}{8}}} = \sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{4}}$$

On $\sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{4}} = -1 - i = z_2$ donc L_2 est le centre de la rotation S .

8°) a- Linéarisons les expressions suivantes :

$$\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{8} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{10\pi}{8} + \cos \left(-\frac{8\pi}{8} \right) \right]$$

$$\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{8} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{5\pi}{4} + \cos(-\pi) \right]$$

$$\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$$

$$\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{9\pi}{8} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{10\pi}{8} - \sin \left(-\frac{8\pi}{8} \right) \right]$$

$$\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{9\pi}{8} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{5\pi}{4} - \sin(-\pi) \right]$$

$$\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ donc } \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

b- Dédudons que $z' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z - \sqrt{2} - 1 - i$

en effet :

$$z' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z + 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z + 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{8} + 2\sqrt{2}i \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{9\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z + 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \right) + 2\sqrt{2}i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z - 1 - \sqrt{2} - i \text{ d'où } z' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z - \sqrt{2} - 1 - i$$

c- Déterminons l'axe du point L_1 .

on a : $S(L_1) = L_3$

$$S(L_1) = L_3 \Leftrightarrow z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z_1 - 1 - \sqrt{2} - i$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i)z_1 = z_3 + 1 + \sqrt{2} + i$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{\sqrt{2}}{-1+i} (z_3 + 1 + \sqrt{2} + i) \text{ en effectuant les } \frac{\sqrt{2}}{-1+i}$$

on trouve $z_1 = 2 - 4i$.

d- Dédudons la forme exacte de l'objet

S étant une rotation de centre L_2 et $S(L_1) = L_3$ alors $L_2L_1 =$

$$L_2L_1 \text{ et } \arg \left(\frac{L_3 - L_2}{L_1 - L_2} \right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ donc le}$$

triangle $L_1L_2L_3$ est isocèle en L_2 .

Problème 3 :

9°) a- étudions le sens de variation de g .

$$g(x) = \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{e^{-x}}{x+1}$$

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x+1 \neq 0 \right\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

La fonction $x \mapsto \ln|x+1|$ dérivable sur chacun des intervalles

$]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$ car $x+1 > 0$,

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$;

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est dérivable sur chacun des

intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$ comme fonctions rationnelles;

La $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x+1}$ est dérivable sur chacun des intervalles

$]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$; donc g est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$.

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[, g'(x) = \frac{(x+2)(1-e^{-x})}{(x+1)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, (x+1)^2 > 0$ donc le signe de g' est celui du numérateur

Posons $g'(x) = 0$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(1-e^{-x}) = 0 \text{ et } x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et posons $1 - e^{-x} < 0$

$$1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$x+2$	-	○	+	+	+
$1-e^{-x}$	-	-	-	○	+
$g'(x)$	+	○	-	-	+

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[, g'(x) > 0$ et

$\forall x \in]-2; -1[\cup]-1; 0[, g'(x) < 0$ donc

g est strictement croissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $[0; +\infty[$

g est strictement décroissante sur $[-2; -1[$ et sur $]-1; 0[$

b- Précisons les extremums de g et déduisons-en le signe

de g

$g'(x)$ s'annule en -2 et en 0 en changeant de signe donc

$g'(-2) = 1 - e^2$ et $g(0) = 0$ sont les extremums de g .

Correction des évaluations

Signe de $g(x)$
 g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -2[$ de même g est continue et strictement décroissante sur $]-2; -1[$ avec $g(-2) = 1 - e^{-2} < 0$ donc
 $\forall x \in]-\infty; -1[$, $g(x) < 0$

g est continue et strictement décroissante sur $]-1; 0[$ de même g est continue et croissante sur $]0; +\infty[$ avec $g(0) = 0$ ainsi $\forall x \in]-1; +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

(10°) a- Déterminons l'ensemble de définition de f

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \mid x+1 \neq 0 \text{ et } \ln|x+1| \neq 0 \right\} \cup]0; -1[$$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

$$\ln|x+1|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ |x+1|=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x = -2 \text{ ou } x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 0$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$$

b- Démontrons que f est continue en 0 et en -1.

$$0 \in D_f$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln|x+1|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0) \end{aligned}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \end{cases}$$

donc f est continue en 0

$$-1 \in D_f$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^x - 1}{\ln|x+1|} \\ &= 0 = f(-1) \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} e^x - 1 = e^{-1} - 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1} \ln|x+1| = -\infty \end{cases} \end{aligned}$$

Donc f est continue en -1.

c- i) Développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(x+1)$ et $x \mapsto e^x$.

Posons $u_1(x) = \ln(x+1)$ on a alors : $u_1'(x) = \frac{1}{x+1}$,

$$u_1''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}, u_1^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \text{ et } u_1(0) = 0, u_1'(0) = 1,$$

$$u_1''(0) = -1, u_1^{(3)}(0) = 2$$

Donc

$$\ln(x+1) = u_1(0) + u_1'(0)x + \frac{u_1''(0)}{2}x^2 + \frac{u_1^{(3)}(0)}{6}x^3 + x^3 \varepsilon_1(x)$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$\text{Soit } \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 + x^3 \varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

Posons $v_2(x) = e^x$; on a : $v_2'(x) = e^x$, $v_2''(x) = e^x$, $v_2'''(x) = e^x$ et $v_2(0) = 1$, $v_2'(0) = 1$, $v_2''(0) = 1$, $v_2'''(0) = 1$, $v_2^{(4)}(0) = 1$, puis :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

ii) Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{\ln|x+1|} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3 \varepsilon_2(x) - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x^3 \varepsilon_1(x)}{x \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3 \varepsilon_1(x) \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{6}x + x \varepsilon_2(x) - x \varepsilon_1(x) \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + x^2 \varepsilon_1(x) \right)} = 1; 1 \in \mathbb{R} \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0 \text{ donc } f \text{ est dérivable en 0.}$$

Interprétation :

(C) admet en son point d'abscisse $x_0 = 0$ une tangente d'équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = x+1$.

d-i) Etudions la dérivabilité de f en -1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{e^x - 1}{\ln(-x-1)}}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^x - 1}{(x+1) \ln(-x-1)} = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} e^x - 1 = e^{-1} - 1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \ln(-x-1) = 0 \text{ et } (x+1) \ln(-x-1) > 0 \end{cases}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en -1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{e^x - 1}{\ln(-x-1)} - 0}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^x - 1}{(x+1) \ln(x+1)} = +\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow -1} e^x - 1 = e^{-1} - 1 < 0$
 $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \ln(-x-1) = 0$ et $(x+1) \ln(-x-1) < 0$

ii) Interprétation
 (C) admet en son point d'abscisse $x_0 = -1$ deux demi-tangentes définies par :

$(T_s): \begin{cases} x = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ et $(T_d): \begin{cases} x = -1 \\ y \leq 0 \end{cases}$

11° a- Déterminons l'ensemble de dérivabilité E de f .
 D'après ce qui précède

$E = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$
 $=]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup]-1; +\infty[$

b- démontrons que : $\forall x \in E, f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(\ln|x+1|)^2}$

$\forall x \in E,$

$$f'(x) = \frac{e^x \left(\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} (e^x - 1) \right)}{(\ln|x+1|)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(\ln|x+1|)^2} \left(\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \right)$$

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(\ln|x+1|)^2}$$

c- Etudions le signe de $v(x) = \ln|x+1|$

Posons $\ln|x+1| = 0$ et $\ln|x+1| < 0$

$\ln|x+1| = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 0$

$\ln|x+1| < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ |x+1| < 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[\\ x \in]-2; 0[\end{cases}$

$\ln|x+1| < 0 \Leftrightarrow x \in]-2; -1[\cup]-1; 0[$

Et on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$\ln x+1 $	+	$\bigcirc$	-	-	$\bigcirc$ +

Donc :

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[, v(x) > 0$

$\forall x \in]-2; -1[\cup]-1; 0[, v(x) < 0$

$\forall x \in \{-2; 0\}, v(x) = 0$

d- Achéons les variations de f

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(\ln|x+1|)^2}$$

$\forall x \in E, e^x > 0$ et $(\ln|x+1|)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	+	+

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]-2; -1[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -2[$ et $]-2; -1[$

$\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-1; 0[$ et $]0; +\infty[$.
 Limites

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{\ln|x+1|} = 0$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x+1| = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{\ln|x+1|}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x+1)} - \frac{1}{\ln(x+1)}$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x+1)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\ln(x+1)} = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^x - 1}{\ln|x+1|} = -\infty$ car

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \ln|x+1| = 0 \text{ et } \ln|x+1| > 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} e^x - 1 = e^{-2} - 1 < 0 \end{cases}$

et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-	+	+
f	0		$+\infty$	0	$+\infty$

Diagram illustrating the variation of the function f based on the sign of the derivative $f'(x)$ and the values of f at critical points and boundaries.

- At $x = -\infty$, $f = 0$.
- Between $x = -\infty$ and $x = -2$, $f'(x) < 0$, so f decreases from 0 to $-\infty$.
- At $x = -2$, $f'(x)$ changes from negative to positive, indicating a local minimum.
- Between $x = -2$ and $x = -1$, $f'(x) < 0$, so f increases from $-\infty$ to $+\infty$.
- At $x = -1$, $f'(x)$ changes from negative to positive, indicating a local minimum.
- Between $x = -1$ and $x = 0$, $f'(x) < 0$, so f increases from $+\infty$ to 0.
- At $x = 0$, $f = 0$.
- Between $x = 0$ and $x = +\infty$, $f'(x) > 0$, so f increases from 0 to $+\infty$.

12° a- Déterminons $f(I)$

$f(I) = f([-1; +\infty]) = [0; +\infty[$

b- Démontrons que f_1 admet une bijection réciproque

f_1^{-1}

f_1 est continue et strictement croissante sur I avec $f_1(I) = f(I) = [0; +\infty[$ alors f_1 réalise une bijection de I sur $f_1(I)$ donc f_1 admet une bijection réciproque f_1^{-1} .

Correction des évaluations

c- Déterminons l'ensemble de dérivabilité E' de f_1^{-1} .

$f_1^{-1} : [0; +\infty[\rightarrow]-1; +\infty[$
 D'après 11°) d- f est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et
 $\forall x \in]-1; +\infty[, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 alors $E' = [0; +\infty[\setminus \{f(-1); f(0)\}$; $f(-1) = 0$ et $f(0) = 1$
 donc $E' =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

d- Etudions la dérivabilité de f_1^{-1} en 0 et précisons la demi-tangente éventuelle à (Γ)

f_1 n'est pas dérivable en -1 or $f_1(-1) = 0$ alors

$f_1^{-1}(0) = -1$ donc f_1^{-1} n'est pas dérivable en 0

la demi-tangente est définie par : $\begin{cases} y = -1 \\ x > 0 \end{cases}$.

e- Démontrons que le point $F(1; 0)$ appartient à (Γ) et détermine une équation de la tangente à (Γ) en F .

En effet $F \in (\Gamma) \Leftrightarrow f_1^{-1}(1) = 0$

Or on a : $f_1(0) = 1 \Leftrightarrow f_1^{-1}(1) = 0$
 $\Leftrightarrow F \in (\Gamma)$.

(T) $y = (f_1^{-1})'(1)(x-1) + f_1^{-1}(1)$

Or $(f_1^{-1})'(1) = 1$ et $f_1^{-1}(1) = 0$

Donc (T) : $y = x - 1$

13°) a- Démontrons que $\forall x \in]0; +\infty[,$ on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x^2} \times \left(\frac{x}{\ln x} \right) \times \frac{1 - e^{-x}}{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

$\forall x \in]0; +\infty[,$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{e^x - 1}{x \ln(x+1)} \\ &= \frac{e^x(1 - e^{-x})}{x \ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]} \\ &= \frac{e^x(1 - e^{-x})}{x \ln x + x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \\ &= \frac{e^x(1 - e^{-x})}{x \ln x \left(1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\ln x} \right)} \end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x^2} \times \left(\frac{x}{\ln x} \right) \times \frac{1 - e^{-x}}{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

b- Dédudions les branches infinies

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \left(\frac{x}{\ln x} \right) \times \frac{1 - e^{-x}}{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

$= +\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0$ alors $(\mathcal{C})$ admet une branche

parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

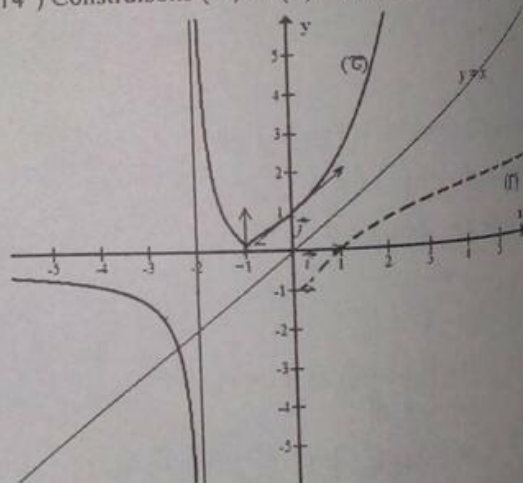
* On a : $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ donc la droite

d'équation $x = -2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

* on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est

asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$.

14°) Construisons $(\mathcal{C})$ et (Γ) dans le même repère.



BAC BURKINA-FASO

Sujet 1 : BAC 1^{er} tour 2005

Exercice 1 :

1^o) Calculons $(2+4i)^2$

$$(2+4i)^2 = 4 + 2 \times 2 \times 2i + 16i^2 = -12 + 16i$$

$$\text{Donc } (2+4i)^2 = -16 + 16i$$

2^o) a- Démontrons que l'équation (E) admet une solution réelle.Soit α la solution réelle de l'équation (E)

$$\text{On a : } \alpha^3 + (3-8i)\alpha^2 - (13+12i)\alpha + 9 + 20i = 0 \text{ ce qui équivaut à } (\alpha^3 + 3\alpha^2 - 13\alpha + 9) + i(-8\alpha^2 - 12\alpha + 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 + 3\alpha^2 - 13\alpha + 9 = 0 \\ -8\alpha^2 - 12\alpha + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 + 3\alpha^2 - 13\alpha + 9 = 0 \quad (L_1) \\ \alpha^2 + 3\alpha - 5 = 0 \quad (L_2) \end{cases}$$

$$(L_2) : 2\alpha^2 + 3\alpha - 5 = 0 ; \Delta = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$$

$$\text{On a : } \alpha_1 = \frac{-3-7}{4} = -\frac{5}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{-3+7}{4} = 1$$

 $\alpha = 1$ est la solution réelle car elle est la seule à vérifier (L_1)b- Résolvons dans $\mathbb{C}$ (E)

$$z^3 + (3-8i)z^2 - (13+12i)z + 9 + 20i = (z-1)(az^2 + bz + c)$$

Avec a et b des nombres complexes

$$(z-1)(z^2 + az + b) = z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} a-1 = 3-8i \\ b-a = -13-12i \\ -b = 9+20i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4-8i \\ b = -9-20i \end{cases}$$

$$\text{D'où (E) : } (z-1)(z^2 + (4-8i)z - 9 - 20i) = 0$$

$$\text{Résolvons } z^2 + (4-8i)z - 9 - 20i = 0$$

$$\Delta = (4-8i)^2 - 4 \times (-9-20i) = -12 + 16i = (2+4i)^2$$

$$z_1 = \frac{-4+8i-2-4i}{2} = -3+2i \text{ et } z_2 = \frac{-4+8i+2+4i}{2} = -1+6i$$

$$\text{D'où } S_E = \left\{ 1; -3+2i; -1+6i \right\}$$

3^o) a- Calculons $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2+4i}{4-2i} = \frac{i(4-2i)}{(4-2i)} = i$$

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AC}{AB} = |i| = 1 \text{ donc } AC = AB$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \text{mes}(\widehat{AB; AC}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} AC = AB \\ \text{mes}(\widehat{AB; AC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ d'où ABC est un triangle isocèle rectangle en A.}$$

rectangle en A.

b- Calculons l'affixe z_D de D

$$\begin{aligned} t_{\vec{u}}(B) = D &\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \vec{u} \Leftrightarrow z_D - z_B = z_{\vec{u}} \\ &\Leftrightarrow z_D = z_B + z_{\vec{u}} = 1 + 2 + 4i \end{aligned}$$

$$\text{D'où } z_D = 3 + 4i$$

c- Déterminons la nature exacte du quadrilatère ABCD.

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = 2 + 4i \text{ donc } \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} \text{ alors } \overline{AC} = \overline{BD} \text{ et}$$

ABDC est un parallélogramme ayant un angle droit $((AB) \perp (AC))$ et deux côtés consécutifs égaux $(AC = AB)$:

C'est alors un carré

Exercice 2 : (non corrigé)

Problème :

Partie A :

$$f : x \mapsto 2x + 1 - xe^{x-1}$$

1^o) Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 - xe^{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 - xe^x \times e^{-1} = -\infty \text{ car} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 + \frac{1}{x} - e^{x-1} \right) = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} - e^{x-1} \right) = -\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2^o) Démontrons que la droite $(\Delta) : y = 2x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$

$$f(x) - (2x + 1) = -xe^{x-1} \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x \times e^{-1} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

d'où la droite (Δ) est asymptote à (C) en $-\infty$ Etude de la position de (C) par rapport à (Δ)

$$f(x) - (2x + 1) = -xe^{x-1}$$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{x-1} > 0$ donc le signe de $f(x) - (2x + 1)$ est celui de $-x$.

$$f(x) - (2x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ on a donc :}$$

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, f(x) - (2x + 1) > 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, f(x) - (2x + 1) < 0 \text{ alors} \\ \text{pour } x = 0; f(x) - (2x + 1) = 0 \end{cases}$$

(C) est au dessus de (Δ) sur $]-\infty; 0[$

(C) est en dessous de (Δ) sur $]0; +\infty[$

Et pour $x=0$ (C) et (Δ) se coupent

3°) a- Calculons la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables

et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = 2 - (e^{x-1} + xe^{x-1}) = 2 - (x+1)e^{x-1}$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables

et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f''(x) = 0 - (e^{x-1} + (x+1)e^{x-1}) = -(x+2)e^{x-1}$$

b- Etudions les variations de f' et dressons son tableau de variation.

Le signe de $f''(x)$ est celui de $-(x+2)$ car $e^{x-1} > 0$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x+2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$$

$$\text{Alors } \begin{cases} f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\\ f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2; +\infty[\\ f''(-2) = 0 \end{cases}$$

f' est donc strictement croissante sur $]-\infty; -2]$ et strictement décroissante sur $]-2; +\infty[$.

Tableau de variation

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - (x+1)e^{x-1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \left(\frac{xe^x}{e} + \frac{e^x}{e} \right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - (x+1)e^{x-1}) = -\infty$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	2	0	0	$-\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$

c- Calculons $f'(1)$ et déduisons-en le signe de $f'(x)$

$$f'(1) = 2 - 2 = 0$$

De l'étude des variations de f' consignée dans le tableau de variation on déduit que :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[\text{ et } f'(1) = 0$$

d- Dressons le tableau de variation de f .

D'après l'étude de f' ci-dessus on déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	$-\infty$

4°) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que : $1,9 < \alpha < 2$ et $-0,6 < \beta < -0,5$

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et $f(]-\infty; 1]) =]-\infty; 2]$

comme $0 \in]-\infty; 2]$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans $]-\infty; 1]$. De plus $f(-0,5) = -0,11$

$$f(-0,6) = 0,11 \text{ donc } f(-0,5) \times f(-0,6) < 0 \text{ et } \beta \in]-0,6; -0,5]$$

$$\beta \in]-0,6; -0,5]$$

De même, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$ et $f(]1; +\infty[) =]-\infty; 2]$

Comme $0 \in]-\infty; 2]$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1; +\infty[$. De plus $f(1,9) = 0,12$

$$f(2) = -0,44 \text{ donc } f(1,9) \times f(2) < 0 \text{ et } \alpha \in [1,9; 2]$$

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $1,9 < \alpha < 2$ et $-0,6 < \beta < -0,5$

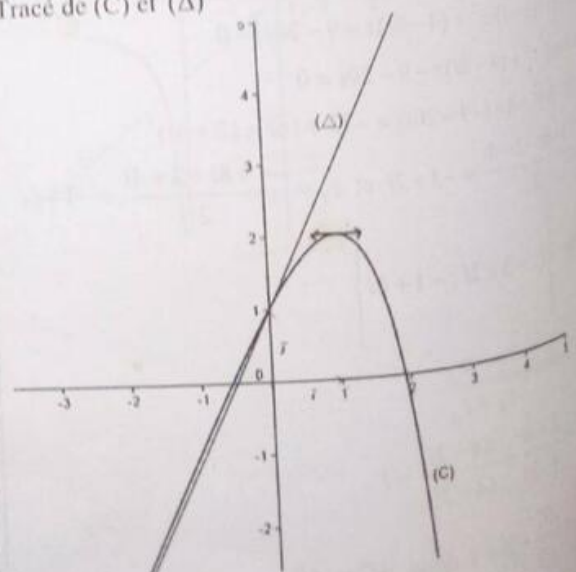
5°) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1-xe^{x-1}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} - e^{x-1} \right) = -\infty \text{ donc (C) admet } \alpha =$$

une branche parabolique de direction celle de l'axe (Oy)

Tracé de (C) et (Δ)



Partie B :

Pour tout x de $]0; +\infty[$; $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

1°) Démontrons que l'équation $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 1$

Soit $x \in]0, +\infty[$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 - xe^{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow xe^{x-1} = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow e^{x-1} = \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow x-1 = \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow g(x) = x$$

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$

2°) Etudions le sens de variation de la fonction g

g est dérivable sur $]0, +\infty[$ car les fonctions $x \mapsto 1 + \ln x$ et

$x \mapsto 2 + \frac{1}{x}$ y sont y dérivables.

Pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^2} \times \left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{-1}{x(2x+1)}$$

Pour tout x de $]0, +\infty[$; $w > 0$ et $2x+1 > 0$ donc $g'(x) < 0$.

g est alors strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

3°) $I = [1, 9; 2]$

a- Démontrons que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$
 g est continue (car elle y est dérivable) et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Comme $I \subset]0, +\infty[$, on a

$$g(I) = [g(2); g(1,9)] = [1,91; 1,93] \text{ car } g(2) = 1 + \ln \frac{5}{2} \approx 1,91 \text{ et}$$

$$g(1,9) = g\left(\frac{19}{10}\right) = 1 + \ln \frac{48}{19} \approx 1,93$$

D'où $g(I) \subset I$ et donc $g(x) \in I$ pour tout $x \in I$.

b- Prouvons que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$.

$$g'(x) = -\frac{1}{x(2x+1)} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{1}{x(2x+1)}$$

$$1,9 \leq x \leq 2 \quad (1)$$

$$1,9 \leq x \leq 9 \Leftrightarrow 3,8 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow 4,8 \leq 2x+1 \leq 5 \quad (2)$$

$$\text{Donc de (1) et (2) on a : } 1,9 \times 4,8 \leq x(2x+1) \leq 2 \times 5$$

$$1,9 \times 4,8 \leq x(2x+1) \leq 2 \times 5 \Leftrightarrow 9,12 \leq x(2x+1) \leq 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{x(2x+1)} \leq \frac{1}{9,12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \left| \frac{1}{x(2x+1)} \right| \leq \frac{1}{9,12} \leq \frac{1}{9}$$

$$\text{D'où } |g'(x)| \leq \frac{1}{9}$$

Remarque : On pourrait étudier les variations de g' pour traiter cette question.

$$4^\circ) \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$

a- Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$

Soit P_n la propriété $U_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$U_0 = 2$ donc $U_0 \in I$ et P_0 est vraie.

Supposons P_n est vraie et démontrons que P_{n+1} est vraie.

Comme $U_n \in I$, $g(U_n) \in I$ d'après Partie B/ 3°) a-

Or $g(U_n) = U_{n+1}$ donc $U_{n+1} \in I$ et P_{n+1} est vraie.

D'où P_n est vraie pour tout entier n , c'est-à-dire :

$U_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_n - \alpha|$ puis

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$$

• g est dérivable sur I et pour tout x de I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$ et $\alpha \in I$. D'après l'inégalité des

accroissement fini on a : $|g(U_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{9} |U_n - \alpha|$

$$|g(U_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{9} |U_n - \alpha| \Leftrightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_n - \alpha| \text{ car}$$

$$U_{n+1} = g(U_n) \text{ et } g(\alpha) = \alpha$$

$$\bullet |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$$

Ecrivons successivement les inégalités pour n allant de 0 à $n-1$

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_0 - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_1 - \alpha|$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_{n-1} - \alpha|$$

En faisant les produits membre à membre et en simplifiant on

$$\text{obtient : } |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$1,9 < \alpha < 2 \Leftrightarrow -2 < -\alpha < -1,9$$

$$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq |2 - 1,9| \leq \frac{1}{10} \text{ et on a :}$$

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$$

Remarque : On pourrait utiliser un raisonnement par récurrence.

c- Déduisons en la convergente de (U_n) et précisons sa limite

$$\text{On a : } \frac{1}{9} < 1. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha \text{ et}$$

(U_n) convergente vers α .

Partie C :

$$1^{\circ}) I = \int_1^{\alpha} x e^{x-1} dx$$

Calculons I

Posons $u(x) = e^{x-1}$ et $v(x) = x$, on a : $u(x) = e^{x-1}$ et $v'(x) = 1$

$$I = \left[x e^{x-1} \right]_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha} e^{x-1} dx$$

$$= \left[x e^{x-1} - e^{x-1} \right]_1^{\alpha} = (\alpha - 1) e^{\alpha-1} \text{ donc } \underline{I = (\alpha - 1) e^{\alpha-1}}$$

2^o) a- Calculons $\mathcal{A}$.

f est positive sur $[1; \alpha]$

$$\mathcal{A} = \int_1^{\alpha} f(x) dx \text{ u.a.} = \int_1^{\alpha} (2x + 1 - x e^{x-1}) dx \text{ u.a.}$$

$$= \left[x^2 + x - \left(x e^{x-1} - e^{x-1} \right) \right]_1^{\alpha} \text{ u.a.}$$

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \left(\alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1) e^{\alpha-1} \right) \text{ u.a.}$$

b- Démontrons que : $\mathcal{A}(\alpha - 1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)$

$$\text{on a : } g(\alpha) = \alpha$$

$$g(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = 2 + \frac{1}{\alpha} \text{ donc}$$

$$\mathcal{A} = \alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1) \left(2 + \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$= (\alpha - 1)(\alpha + 2) - (\alpha - 1) \left(2 + \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$= (\alpha - 1) \left[\alpha + 2 - \left(2 + \frac{1}{\alpha} \right) \right]$$

$$= (\alpha - 1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \text{ d'où}$$

$$\mathcal{A}(\alpha - 1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)$$

Sujet 2 : BAC 1^{er} tour 2006

Exercice 1 :

1^o) Résolvons dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système $\begin{cases} iz + \bar{z}' = -2\sqrt{3} \\ \bar{z} - iz' = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} iz + \bar{z}' = -2\sqrt{3} \\ \bar{z} - iz' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz + \bar{z}' = -2\sqrt{3} \\ \bar{z} - iz' = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} iz + \bar{z}' = -2\sqrt{3} \\ \bar{z} - iz' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz + \bar{z}' = -2\sqrt{3} \quad (L_1) \\ z + i\bar{z}' = -2 \quad (L_2) \end{cases}$$

En multipliant (L_1) par $(-i)$ on obtient :

$$\begin{cases} z - i\bar{z}' = 2\sqrt{3}i \\ z + i\bar{z}' = -2 \end{cases} \text{ , par addition des deux équations, on a :}$$

$$2z = -2 + 2\sqrt{3}i \text{ soit } z = -1 + \sqrt{3}i.$$

En multipliant (L_2) par $(-i)$ et en procédant comme

précédemment, on obtient : $\bar{z}' = -\sqrt{3} + i \Leftrightarrow z' = -\sqrt{3} - i$

$$S = \{-1 + \sqrt{3}i; -\sqrt{3} - i\}$$

2^o) $z_A = -1 + i\sqrt{3}$; $z_B = -\sqrt{3} - i$

a- Écrivons z_A , z_B , $z_A \times z_B$ sous forme trigonométrique

$$z_A = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$z_B = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

$$z_A \times z_B = 2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2 \cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$= 4 \cdot e^{i\frac{11\pi}{6}} \text{ donc } z_A \times z_B = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

$$z_A \times z_B = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

b- Démontrons que z_A^3 est un réel et z_B^3 est imaginaire pur

$$z_A^3 = \left(2 e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^3 = 8 e^{i2\pi} = 8 \text{ d'où } z_A^3 \in \mathbb{R}$$

$$z_B^3 = \left(2 e^{i\frac{7\pi}{6}} \right)^3 = 8 e^{i\frac{7\pi}{2}} = 8 e^{i\frac{3\pi}{2}} = -8i \text{ d'où } z_B^3 \in i\mathbb{R}$$

3^o) a- Calculons z_C

$r \left(O; -\frac{\pi}{2} \right)$, l'écriture complexe de r est : $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}} z$ avec

$$r(M) = M', M(z) \text{ et } M'(z')$$

$$r(A) = C \Leftrightarrow z_C = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times 2 e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

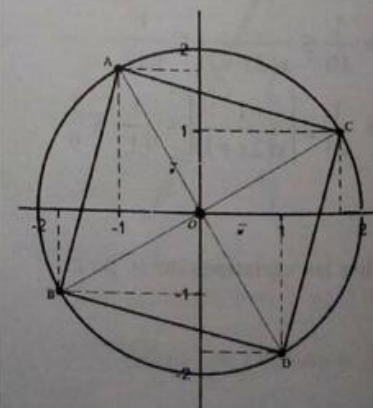
$$z_C = 2 e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i \text{ donc } \underline{z_C = \sqrt{3} + i}$$

b- Calculons z_D

$$r(C) = D \Leftrightarrow z_D = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times z_C = -i(\sqrt{3} + i) = 1 - i\sqrt{3} \text{ donc}$$

$$\underline{z_D = 1 - i\sqrt{3}}$$

c- Plaçons A ; B ; C et D



4°) a- Démontrons que O est le milieu de $[AD]$ et $[BC]$

$$O \text{ milieu de } [AD] \Leftrightarrow z_O = \frac{z_A + z_D}{2}$$

$$z_O = 0 \text{ et } \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{(-1+i\sqrt{3}) + (1-i\sqrt{3})}{2} = 0 \text{ d'où}$$

$$z_O = \frac{z_A + z_D}{2}. \text{ De façon analogue on prouve que}$$

$$z_O = \frac{z_B + z_C}{2} \text{ Ainsi } O \text{ est le milieu de } [AD] \text{ et } [BC]$$

b- Calculons le module et un argument de $\frac{z_A}{z_B}$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}};$$

$$\left| \frac{z_A}{z_B} \right| = \frac{|z_A|}{|z_B|} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \arg(z_A) - \arg(z_B) + k.2\pi$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{7\pi}{6} + k.2\pi = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

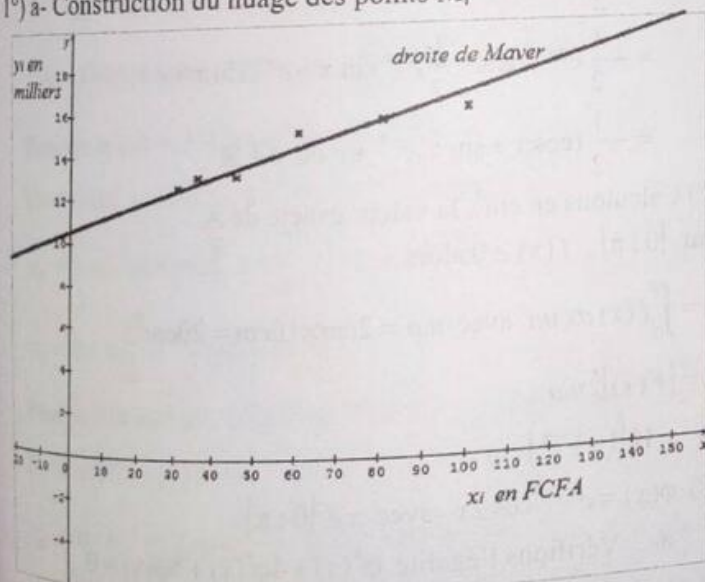
Donc un argument de $\frac{z_A}{z_B}$ est $-\frac{\pi}{2}$

c- La nature du quadrilatère $ABDC$

D'après 4°) a- $ABDC$ est un parallélogramme car les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ se coupent en leurs milieux. Et d'après 4°) a- On a : $(AD) \perp (BC)$ et $AD = BC$. D'où $ABDC$ est un carré

Exercice 2 :

1°) a- Construction du nuage des points M_i



b- un ajustement affine semble raisonnable car les points semblent alignés.

2°) a- Les coordonnées des points moyens G_1 et G_2

Sont $G_1(\bar{x}_1; \bar{y}_1)$ et $G_2(\bar{x}_2; \bar{y}_2)$

$$\bar{x}_1 = \frac{30+35+45}{3} = 36,66 \text{ et } \bar{y}_1 = \frac{12,5+2 \times 13}{3} = 12,83$$

$$\bar{y}_2 = \frac{15+15,5+16}{3} = 15,5$$

$G_1(36,66; 12,83)$, $G_2(80; 15,5)$. On place dans le repère les points G_1, G_2 , puis on trace la droite $(\Delta) = (G_1, G_2)$

b- Déterminons une équation de (Δ)

$$(\Delta): y = ax + b. G_1 \in (\Delta) \text{ et } G_2 \in (\Delta) \Rightarrow \begin{cases} 36,66a + b = 12,83 \\ 80a + b = 15,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,06 \\ b = 10,63 = 10,7 \end{cases} \text{ d'où } (\Delta): y = 0,06x + 10,7.$$

3°) Les estimations :

Pour $x = 150$ F, on a : $y = 0,06 \times 150 + 10,7 = 19,7$ soit 19 700

Pour $y = 20\,000$, on a : $20 = 0,06x + 10,7 \Rightarrow x = 155$ F

Problème :

$$f(x) = e^{-x} \sin x; x \in [0; +\infty[$$

Partie A:

1°) Démontrons que, pour tout $x \geq 0$, $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$

Pour tout réel $x \geq 0$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et comme $e^{-x} > 0$, alors on a : $-e^{-x} \leq e^{-x} \sin x \leq e^{-x}$, soit : $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$

Déduisons-en l'existence d'une asymptote à $(\mathcal{G})$ en $+\infty$

De l'inégalité précédente on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x})$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ d'où par théorème des gendarmes on a :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ainsi l'axe des abscisses ($y = 0$) est asymptote à

$(\mathcal{G})$ en $+\infty$.

2°) Déterminons les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{G})$ avec l'axe des abscisses

Les abscisses des points recherchés sont solutions de l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{N}$$

Donc les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{G})$ avec (Ox) sont les réels $x_k = k\pi, k \in \mathbb{N}$

3°) a- Établissons l'égalité, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right),$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \sin x \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

b- Calculons $f'(x)$ et étudions son signe sur $[0; \pi]$

f est dérivable sur $[0; \pi]$ et

$$f'(x) = (\cos x - \sin x)e^{-x} = \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

D'où $\forall x \in [0; \pi]$, $f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 \\ x \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - x = k\pi, k \in \mathbb{N} \\ x \in [0; \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} - k\pi, k \in \mathbb{N} \\ x \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\bullet \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{4} - x \leq \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geq 0$$

$$\bullet \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right] \Leftrightarrow -\pi \leq -x \leq -\frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - x \leq 0 \\ \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leq 0. \text{ En définitive on a :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], f'(x) > 0 \\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right], f'(x) < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array} \right.$$

c- Dressons le tableau de variation de f

f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et strictement

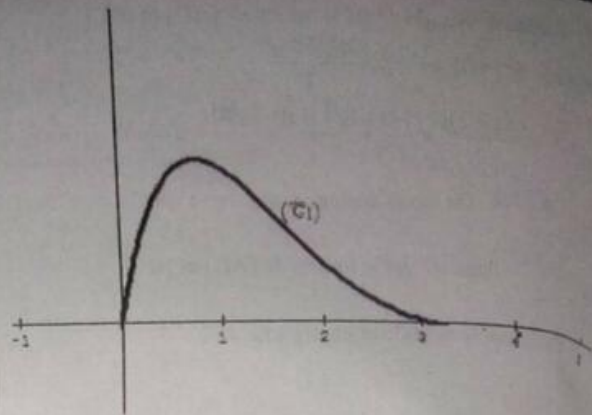
décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$

$$f(0) = 0; f(\pi) = 0 \text{ et } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	0

4°) traçons $(\mathcal{C}_1)$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	0	0,33	0,21	0,06	0



Partie B :

$$1^\circ) \text{ a- } f(x) = e^{-x} \sin x, f'(x) = (\cos x - \sin x)e^{-x} \text{ et}$$

$$f''(x) = (-\sin x - \cos x)e^{-x} - e^{-x}(\cos x - \sin x) = -2\cos x e^{-x}$$

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = -2\cos x e^{-x} + 2(\cos x - \sin x)e^{-x} + 2\sin x e^{-x} = 0 \text{ d'où pour tout } x \text{ de } \mathbb{R},$$

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$$

b- Dédudons-en une primitive F de f sur $[0; +\infty[$

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{2}[f''(x) + 2f'(x)] \text{ par}$$

suite, une primitive de f sur $[0; +\infty[$ est :

$$x \mapsto -\frac{1}{2}[f'(x) + 2f(x)] + c; c \in \mathbb{R}$$

NB : Une primitive de f'' est f' et une primitive de f' est f

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{2}f'(x) - f(x) + c \\ &= -\frac{1}{2}e^{-x}\cos x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin x - e^{-x}\sin x + c \\ &= -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x)e^{-x} + c \text{ où } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2°) Calculons en cm^2 , la valeur exacte de A .

Sur $[0; \pi]$, $f(x) \geq 0$ alors

$$A = \int_0^\pi f(x) dx \text{ u.a avec } u.a = 2\text{cm} \times 10\text{cm} = 20\text{cm}^2$$

$$A = [F(x)]_0^\pi u.a$$

$$A = 10(1 + e^{-\pi})\text{cm}^2$$

$$3^\circ) \varphi(x) = e^{-2x} \cos 2x \text{ avec } x \in [0; \pi]$$

$$\text{a- Vérifions l'égalité } \varphi''(x) + 4\varphi'(x) + 8\varphi(x) = 0$$

φ est dérivable sur $[0; \pi]$

$$\varphi'(x) = -2e^{-2x} \cos 2x - 2e^{-2x} \sin 2x$$

$$= -2e^{-2x}(\cos 2x + \sin 2x) \text{ de même } \varphi' \text{ étant dérivable}$$

sur $[0; \pi]$, on a :

$$\varphi''(x) = 4e^{-2x}(\cos 2x + \sin 2x) - 2e^{-2x}(-2\sin 2x + 2\cos 2x)$$

$$= 8e^{-2x} \sin 2x$$

Comme au 1°) a- on montre aisément au moyen des calculs

$$\text{que : } \varphi''(x) + 4\varphi'(x) + 8\varphi(x) = 0.$$

b- Dédudons-en une primitive Φ de φ sur $[0; \pi]$

$$\varphi'(x) + 4\varphi'(x) + 8\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = -\frac{1}{8}[\varphi'(x) + 4\varphi'(x)]$$

Ainsi une primitive Φ de φ sur $[0; \pi]$ est :

$$\Phi(x) = -\frac{1}{8}[\varphi'(x) + 4\varphi(x)] + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{4}(\sin 2x - \sin 2x)e^{-2x} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

c- Calculons le volume V

$$V = \pi \int_0^\pi f^2(x) dx \text{ u.v}$$

$$\int_0^\pi f^2(x) dx = \int_0^\pi e^{-2x} \sin^2 2x dx$$

$$= \int_0^\pi e^{-2x} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} \cos 2x \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-2x} dx - \frac{1}{2} [\Phi(x)]_0^\pi$$

$$\int_0^\pi f^2(x) dx = -\frac{1}{4}(e^{-2\pi} - 1) - \frac{1}{2}(\Phi(\pi) - \Phi(0))$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{e^{-2\pi}}{8} - \frac{e^{-2\pi}}{4} = \frac{1}{8}(1 - e^{-2\pi})$$

$$\text{D'où } V = \frac{1}{8}(1 - e^{-2\pi}) \text{ u.v}$$

Partie C :

$$u_n = \int_0^\pi e^{-x} \sin(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1^\circ) \text{ a- Démontrons que } u_n = \frac{n}{1+n^2}(1 - e^{-\pi} \cos n\pi)$$

$$\text{Posons } u'(x) = e^{-x} \text{ et } v(x) = \sin(nx)$$

$$\text{On a donc : } u(x) = -e^{-x} \text{ et } v'(x) = n \cos(nx)$$

$$u_n = [-e^{-x} \sin(nx)]_0^\pi + n \int_0^\pi e^{-x} \cos(nx) dx$$

$$u_n = 0 + n \int_0^\pi e^{-x} \cos(nx) dx$$

$$\text{Posons à nouveau : } u'(x) = e^{-x} \text{ et } v(x) = \cos(nx)$$

$$\text{Donc on a : } u(x) = -e^{-x} \text{ et } v'(x) = -n \sin(nx)$$

$$u_n = n[-e^{-x} \cos(nx)]_0^\pi - n^2 \int_0^\pi e^{-x} \sin(nx) dx$$

$$= n(-e^{-\pi} \cos n\pi + 1) - n^2 u_n$$

$$\text{Soit } (1+n^2)u_n = (1 - e^{-\pi} \cos(n\pi)) \Leftrightarrow$$

$$u_n = \frac{n}{1+n^2}(1 - e^{-\pi} \cos(n\pi))$$

$$\text{b- Déduisons-en que pour tout } n, |u_n| \leq \frac{2n}{1+n^2}$$

$$|u_n| = \left| \frac{n}{1+n^2} \times (1 - e^{-\pi} \cos(n\pi)) \right|$$

$$= \frac{n}{1+n^2} |1 - e^{-\pi} \cos(n\pi)| \text{ car } \frac{n}{1+n^2} \geq 0$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n\pi) \leq 1$$

$$-1 \leq \cos(n\pi) \leq 1 \Leftrightarrow -e^{-\pi} \leq -e^{-\pi} \cos(n\pi) \leq e^{-\pi}$$

$$\Leftrightarrow -2 < 1 - e^{-\pi} \leq 1 - e^{-\pi} \cos(n\pi) \leq 1 + e^{-\pi} < 2$$

$$\Leftrightarrow |1 - e^{-\pi} \cos(n\pi)| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{1+n^2} |1 - e^{-\pi} \cos(n\pi)| \leq \frac{2n}{1+n^2}$$

$$\text{D'où pour tout } n, |u_n| \leq \frac{2n}{1+n^2}$$

$$2^\circ) \text{ Calculons } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\text{On a : } |u_n| \leq \frac{2n}{1+n^2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0 \text{ par suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Sujet 3 : BAC 1^{er} tour 2007

Exercice 1 :

$$p(z) = z^3 - 5(1+i)z^2 - 2(1-9i)z + 16 - 8i$$

1^o) Démontrons que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 .

Soit $z_0 = ai$; $a \in \mathbb{R}^*$ la racine imaginaire de p .

$$p(ai) = (ai)^3 - 5(1+i)(ai)^2 - 2(1-9i)(ai) + 16 - 8i$$

$$= (5a^2 - 18a + 16) + i(-a^3 + 5a^2 - 2a - 8)$$

$$p(ai) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 - 18a + 16 = 0 & (1) \\ -a^3 + 5a^2 - 2a - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \text{ a pour solution } 2 \text{ et } \frac{8}{5}; 2 \text{ vérifie l'équation (2) tandis}$$

que $\frac{8}{5}$ ne vérifie pas.

Donc l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure qui est $z_0 = 2i$.

$$2^\circ) \text{ Résolvons dans } \mathbb{C}, \text{ l'équation } p(z) = 0$$

$$p(z) = (z - 2i)Q(z) \text{ où } Q(z) \text{ est un polynôme de degré deux.}$$

$$p(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c) \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } (b; c) \in \mathbb{C}^2.$$

$$\text{On a : } p(z) = az^3 + (b - 2ia)z^2 + (c - 2ib)z - 2ic \text{ par}$$

$$\text{identification on obtient } a = 1; b = -5 - 3i; c = 4 + 8i$$

$$\text{Résolvons } Q(z) = 0$$

$$Q(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + (-5 - 3i)z + 4 + 8i = 0$$

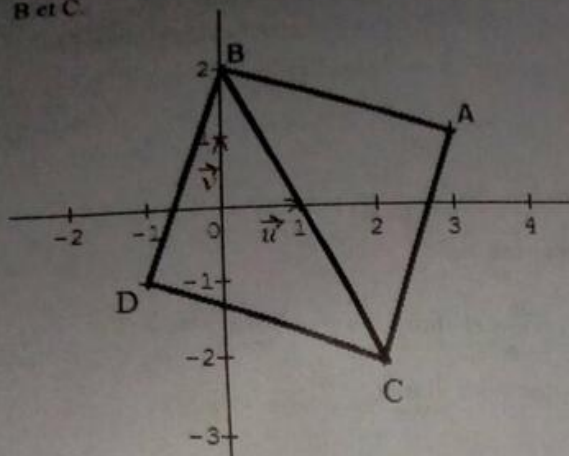
$$\text{Son discriminant } \Delta = (-3 - 5i)^2 - 4(4 + 8i) = -2i = (1 - i)^2$$

$$\text{On obtient } z = \frac{5 + 3i - (1 - i)}{2} = 2 + 2i \text{ ou}$$

$$z = \frac{5 + 3i + (1 - i)}{2} = 3 + i$$

Comme $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$ on a : $z_0 = 2i$; $z_1 = 3+i$;
 $z_2 = 2+2i$

3°) a- $z_B = 2i$; $z_A = 3+i$; $z_C = 2-2i$. Plaçons les points A, B et C.



b- Calculons $\frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_0 - z_1}$

$$\frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_0 - z_1} = \frac{\bar{z}_C - \bar{z}_A}{z_B - z_A} = \frac{2-2i-3-i}{2i-3-i} = \frac{-1-3i}{-3+i} = i$$

c- Dédudons la nature du triangle ABC.

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AC}{AB} = |i| = 1 \Rightarrow AC = AB \quad (1)$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \text{mes}(\widehat{AC; AB}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

De (1) et (2) ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

4°) a- Exprimons z' en fonction de z .

$$t_{AB}^{-1}(M) = M' \Leftrightarrow z' = z + z \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = z - 3 + i \text{ donc } \underline{z' = z - 3 + i}$$

b- Calculons l'affixe du point D.

$$t_{AB}^{-1}(C) = D \Leftrightarrow z_D = z_C - 3 + i = -1 - i$$

c- Nature de ABCD

$$t_{AB}^{-1}(C) = D \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD} \text{ donc ABCD est un parallélogramme.}$$

De plus $(AB) \perp (AC) \Rightarrow ABCD$ est un rectangle (un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de supports perpendiculaires est un rectangle) et $AB = AC$ d'où ABCD est un carré (un rectangle ayant 2 côtés consécutifs égaux est un carré)

Exercice 2 :

$$V_1 = \frac{1}{2} \text{ et } V_{n+1} = \frac{n+1}{2n} V_n$$

1°) Calculons :

$$V_2 = \frac{1+1}{2} V_1 = \frac{1}{2} ; V_3 = \frac{2+1}{2 \times 2} V_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} ;$$

$$V_4 = \frac{3+1}{2 \times 3} V_3 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

2°) a- Démontrons que pour tout entier $n > 0$, on a : $V_n > 0$.

Procédons par récurrence

Soit P_n la propriété : pour tout entier $n > 0$, on a : $V_n > 0$

On a : $V_1 = \frac{1}{2}$ donc $V_1 > 0$ et P_1 est vraie.

Supposons que P_k est vraie ($V_k > 0$) et démontrons que P_{k+1} est vraie.

$$V_{k+1} = \frac{k+1}{2k} V_k :$$

$k > 0$ donc $2k > 0$ et $k+1 > 0$ d'où $\frac{k+1}{2k} > 0$ comme $V_k > 0$

alors $\frac{k+1}{2k} V_k > 0$ et $V_{k+1} > 0$

P_{k+1} est vraie et la propriété est vraie pour tout $n > 0$, on a $V_n > 0$, pour tout $n > 0$.

b- Démontrons que (V_n) est décroissante

$$V_n > 0 \text{ pour tout } n > 0 \text{ et } \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{n+1}{2n}$$

Comme $n \geq 1$, on a : $n+n \geq n+1$ et $\frac{n+1}{2n} \leq 1$

On a : $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq 1$ et $V_n > 0$ pour tout entier n non nul, donc la

suite (V_n) est décroissante.

c- Dédudons que la suite (V_n) est convergente.

On a : $V_n > 0$ donc (V_n) est minorée et (V_n) est décroissante donc elle est convergente.

3°) Soit $U_n = \frac{V_n}{n}$, $\forall n > 0$

a- Prouvons que la suite (U_n) est géométrique.

$$U_{n+1} = \frac{V_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{2n} V_n = \frac{1}{2n} V_n = \frac{1}{2} \times \frac{V_n}{n} = \frac{1}{2} U_n$$

Donc pour tout $n > 0$, $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n$ d'où la suite (U_n) est

géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Son premier terme est $U_1 = V_1 = \frac{1}{2}$

b- Exprimons U_n puis V_n en fonction de n .

(U_n) étant une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme $U_1 = \frac{1}{2}$ alors $U_n = U_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\text{pour } n > 0, U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$U_n = \frac{V_n}{n} \Leftrightarrow V_n = n U_n \text{ soit } V_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c- Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

$$U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } \frac{1}{2} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$V_n = n \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ donc}$$

$$\ln(V_n) = \ln \left[n \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] = \ln n - n \ln 2 = n \left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2 \right)$$

$$\text{Ainsi } V_n = e^{n \left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2 \right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2 \right) = -\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

Problème :

Partie A : Pour tout x de $]0; +\infty[$; $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

1°) Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2 - 2 \ln x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 - 2 \ln x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x + \frac{2}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{aligned}$$

2°) Etudions le sens de variation de g et dressons son tableau de variation.

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2 \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) \text{ est du signe de } x^2 - 1.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0 \\ g'(1) = 0 \end{cases}$$

Alors g est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$

Tableau de variation de g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
g	$+\infty$	3	$+\infty$

3°) déduisons-en que $\forall x > 0$; $g(x) > 0$
 g étant décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$, g admet un minimum en 1 qui vaut 3 et alors $g(x) \geq 3 > 0$. Ainsi

$$\forall x > 0 ; g(x) > 0$$

Partie B :

$$\text{Pour tout } x \text{ de }]0; +\infty[: f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}$$

1°) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{2 \ln x}{x} \right) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{2 \ln x}{x} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Déduisons : Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$; alors (C) admet la

droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.

2°) a- Calculons $f'(x)$ et justifions que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout x de $]0; +\infty[$ on a :

$$f'(x) = 1 + 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Comme $x^2 > 0$; $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

Ainsi $f'(x) > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b- Déduisons le sens de variation de f puis dressons son

tableau de variation.

$f'(x) > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variations.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

3°) a- Démontrons que la droite $(\mathcal{D}) : y = x$ est asymptote à (C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ donc la droite d'équation } y = x \text{ est asymptote à (C) en } +\infty.$$

Position de $(\mathcal{D})$ et (C)

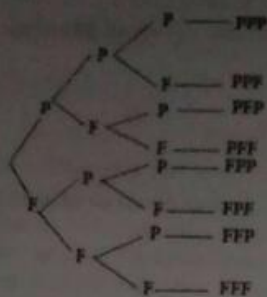
Soit $x > 0$

$$f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ car } x > 0$$

$\forall x \in]1; +\infty[$, $f(x) - x \geq 0$ et $\forall x \in]0; 1]$, $f(x) - x \leq 0$
 Donc (C) est en dessous de $(\mathcal{D})$ sur $]0; 1]$ et au dessus de $(\mathcal{D})$ sur $[1; +\infty[$.

b- Coordonnées de B
 $(\mathcal{D})$ est de coefficient directeur 1 ; la tangente en B est parallèle à $(\mathcal{D})$ lorsque les droites ont le même coefficient directeur. Le coefficient de la tangente étant $f'(x)$ on a alors l'égalité $f'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x > 0 \\ f'(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2 - 2 \ln x = x^2 \\ &\Leftrightarrow 2 - 2 \ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$



1°) M « le groupe est mixte »

L'événement contraire $\bar{M} = \{PPP, FFF\}$

$$p(\bar{M}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ et } p(M) = 1 - p(\bar{M}) = \frac{3}{4}$$

2°) a- Les valeurs prises par X.

Un groupe peut avoir en son sein 0 fille et avoir 0 tee-shirts.

Un groupe peut avoir en son sein 1 fille et avoir 3 tee-shirts.

Un groupe peut avoir en son sein 2 filles et avoir 6 tee-shirts.

Un groupe peut avoir en son sein 3 filles et avoir 9 tee-shirts.

Donc les valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{0; 3; 6; 9\}$

b- la loi de probabilité de X.

$$p(X=0) = \frac{\text{card}(X=0)}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{8}$$

$$p(X=3) = \frac{\text{card}(X=3)}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{8}$$

$$p(X=6) = \frac{\text{card}(X=6)}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{8}$$

$$p(X=9) = \frac{\text{card}(X=9)}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{8} \text{ cette loi de probabilité est résumée}$$

dans le tableau ci-dessous :

x	0	3	6	9
p(X=x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c- La fonction de répartition F

Elle est définie comme suit :

Si $x < 0$; $F(x) = 0$

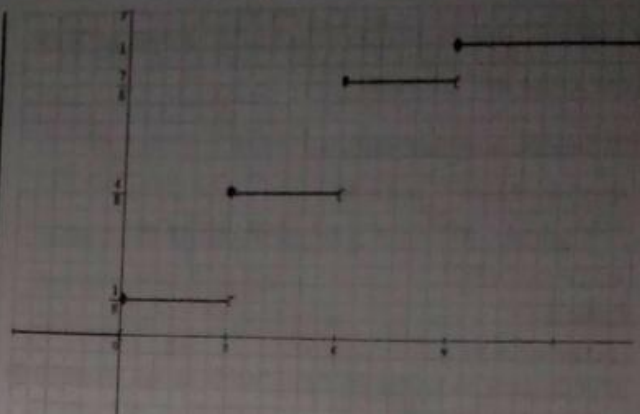
Si $0 \leq x < 3$; $F(x) = \frac{1}{8}$

Si $3 \leq x < 6$; $F(x) = \frac{4}{8}$

Si $6 \leq x < 9$; $F(x) = \frac{7}{8}$

Si $x \geq 9$; $F(x) = 1$

d- construction de la courbe de F.



e- Calculons l'espérance mathématique

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{3}{8} + 6 \times \frac{3}{8} + 9 \times \frac{1}{8} = \frac{9}{2}$$

$$3^\circ) p(X \geq 6) = p(X=6) + p(X=9) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Problème :

Partie A : (E) : $y' + y = x - 1$

1°) $u(x) = ax + b$

u est solution de (E) si et seulement si u est dérivable et pour tout réel x , on a : $u'(x) + u(x) = x - 1$

$$u'(x) = a$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) + u(x) = x - 1 \Rightarrow a + ax + b = x - 1$$

$$\Rightarrow (a-1)x + a + b + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ a+b+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \text{ d'où}$$

$$u(x) = x - 2$$

2°) Démontrons que la fonction v est une solution de (E) $\Leftrightarrow$

$v - u$ est solution de (E') : $y' + y = 0$.

v est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, v'(x) + v(x) = x - 1$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x)$$

Car $u'(x) + u(x) = x - 1$; Alors

v est solution de (E)

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, v'(x) - u'(x) + v(x) - u(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (v - u)'(x) + (v - u)(x) = 0$$

$\Leftrightarrow v - u$ est solution de (E') d'où le résultat

3°) Résolvons (E')

$$(E') : y' + y = 0$$

La solution générale de (E') est les fonction définie sur $\mathbb{R}$

par : $y(x) = Ae^{-x}$; ($A \in \mathbb{R}$)

4°) Dédution des solution de (E)

D'après 2°) v est solution $\Leftrightarrow v - u$ est solution de (E'). On a

donc $v(x) - u(x) = Ae^{-x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $v(x) = u(x) + Ae^{-x}$ ($A \in \mathbb{R}$)

La solution générale de (E) est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto x-2 + Ae^{-x} ; (A \in \mathbb{R})$$

5°) Solution h vérifiant $h(0)=1$

$$h(x) = x-2 + Ae^{-x} ; (A \in \mathbb{R})$$

$$h(0) = A-2 ; h(0)=1 \Rightarrow A-2=1 \Rightarrow A=3 \text{ d'où}$$

$$h(x) = x-2 + 3e^{-x}$$

Partie B :

$$f(x) = e^{-x} + x - 2$$

1°) Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$$D_f =]-\infty ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + x - 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\frac{e^{-x}}{-x} + 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^{-x}}{-x} = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + x - 2) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2°) Etudions le sens de variation de f puis dressons le tableau de variation de f .

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ; $f'(x) = -e^{-x} + 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]-\infty ; 0[, f'(x) < 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	-1	$+\infty$

3°) (D) : $y = x-2$

a- Démontrons que (D) est asymptote à (C_f) en $+\infty$

$$f(x) - (x-2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ on déduit que}$$

(D) est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

b- Position de (D) et (C_f)

$$f(x) - (x-2) = e^{-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ d'où alors (C_f) est au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$

$$4°) \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} + 1 - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e^{-x}}{-x} + 1 - \frac{2}{x} \right) = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

Interprétation graphique :

(C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $-\infty$.

5°) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que : $-1,2 < \alpha < -1,1$ et $1,8 < \beta < 1,9$

f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur

$$]-\infty ; 0] \text{ et } f(]-\infty ; 0]) = [f(0) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-1 ; +\infty[$$

$0 \in [-1 ; +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty ; 0]$. De plus $f(-1,2) \approx 0,12$ et $f(-1,1) \approx$

$$-0,1 \text{ donc } f(-1,2) \times f(-1,1) < 0 \text{ et } -1,2 < \alpha < -1,1$$

D'autre part : f est continue (car dérivable) et strictement

croissante sur $[0 ; +\infty[$ et

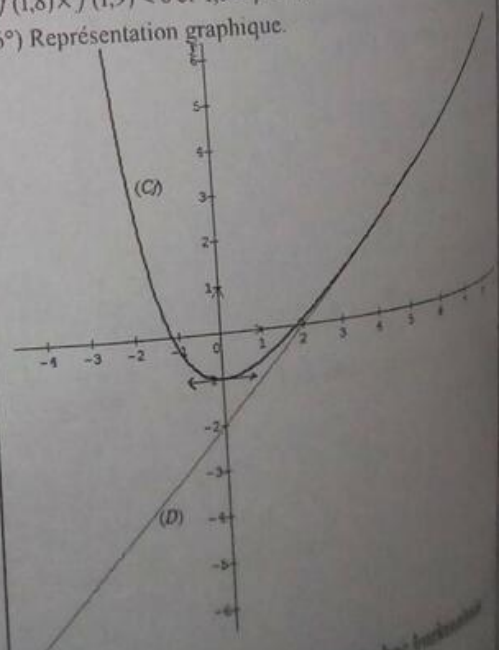
$$f([0 ; +\infty[) = [f(0) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-1 ; +\infty[; 0 \in [-1 ; +\infty[$$

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans

$$[0 ; +\infty[. \text{ De plus } f(1,8) \approx -0,03 \text{ et } f(1,9) \approx 0,05 \text{ donc}$$

$$f(1,8) \times f(1,9) < 0 \text{ et } 1,8 < \beta < 1,9$$

6°) Représentation graphique.



7°) Nombre de solution de l'équation $me^x - xe^x + 2e^x - 1 = 0$
 $me^x - xe^x + 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow me^x = xe^x - 2e^x + 1$

$$\Leftrightarrow m = x - 2 + \frac{1}{e^x} = x - 2 + e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow m = f(x)$$

Donc l'équation $me^x - xe^x + 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ donc elle admet :

pour $m < -1$, l'équation n'a pas de solution

pour $m = -1$, l'équation a une solution.

pour $m > -1$, l'équation a deux solutions.

Partie C :

1°) a- Calculons l'aire $A(\lambda)$

$$A(\lambda) = \int_2^\lambda (f(x) - (x-2)) dx \text{ u.a}$$

$$= \int_2^\lambda e^{-x} dx \text{ cm}^2 = \left[-e^{-x} \right]_2^\lambda \Rightarrow A(\lambda) = (-e^{-\lambda} + e^{-2}) \text{ cm}^2$$

b- Calculons la limite :

$$A(\lambda) = -e^{-\lambda} + e^{-2} = e^{-2} - \frac{1}{e^\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = e^{-2} \text{ car } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0$$

2°) a- Calculons $I = \int_2^4 (x-2)e^{-x} dx$

Posons $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x-2$

On a : $v'(x) = 1$ et prenons $u(x) = -e^{-x}$

$$\text{Donc } I = \left[(x-2)e^{-x} \right]_2^4 - \int_2^4 -e^{-x} dx$$

$$= \left[(x-2)e^{-x} \right]_2^4 + \left[-e^{-x} \right]_2^4 \text{ et on trouve}$$

$$I = -3e^{-4} + e^{-2}$$

b- Calculons le volume V engendré par la rotation

$$V = \pi \int_2^4 (f(x))^2 dx \text{ u.v}$$

$$= \pi \int_2^4 (e^{-x} + x - 2)^2 dx \text{ cm}^3$$

$$= \pi \int_2^4 [e^{-2x} + 2(x-2)e^{-x} + (x-2)^2] dx \text{ cm}^3$$

$$= \pi \int_2^4 e^{-2x} dx + 2\pi \int_2^4 (x-2)e^{-x} dx + \pi \int_2^4 (x-2)^2 dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_2^4 + 2\pi I + \pi \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_2^4 \text{ et on obtient :}$$

$$V = \pi \left(-\frac{1}{2}e^{-8} + \frac{11}{2}e^{-4} + 2e^{-2} + \frac{8}{3} \right) \text{ cm}^3.$$

Sujet 5 : BAC 2^{ème} tour 2009

Exercice 1 :

1°) ABFCDEGH étant un parallélépipède alors ABFC est un parallélogramme et on a : $\overline{AB} = \overline{CF}$.

Donc $F(x; y; z)$, $\overline{AB}(4; 2; 6)$, $\overline{CF}(x-2; y-2; z+6)$

$$\overline{AB} = \overline{CF} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=4 \\ y-2=2 \\ z+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow F(6; 4; 4)$$

2°) $\overline{AB}(4; 2; 5)$ et $\overline{AC}(4; 1; 3)$ et on trouve $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(1; 8; -4)$

$$\text{Aire}(\text{ABFC}) = \|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\|_{\text{u.a}} = \sqrt{1+64+16} = 9 \times 4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Soit Aire}(\text{ABFC}) = 36 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Aire}(\text{ABC}) = \frac{1}{2} \text{aire}(\text{ABFC}) = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

$$3^\circ) d = d(D; (\text{ABC})) = \frac{|\overline{AD} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC})|}{\|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\|} ; \overline{AD}(-1; -2; 7)$$

$$\overline{AD} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = -45 \text{ et on trouve } d = 5 \text{ u.l soit } d = 10 \text{ cm.}$$

4°) Volume de la pyramide

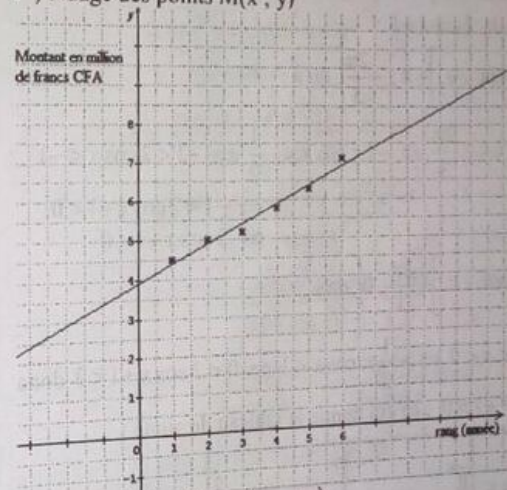
$$V = \frac{1}{3} d(D; (\text{ABC})) \times \text{aire}(\text{ABFC}) \text{ u.v on obtient } V = 120 \text{ cm}^3.$$

5°) Volume du parallélépipède ABFCDEGH

$$V' = d \times \text{aire}(\text{ABFC}) \text{ et on trouve } V' = 360 \text{ cm}^3.$$

Exercice 2 :

1°) Nuage des points $M(x; y)$



2°) a- $G_1(\bar{x}_1; \bar{y}_1)$; $G_2(\bar{x}_2; \bar{y}_2)$

$$\bar{x}_1 = \frac{1+2+3}{3} = 2 \text{ et } \bar{y}_1 = \frac{4.5+5.2+5.8}{3} = 5.5 \Rightarrow G_1(2; 5.5)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{4+5+6}{3} = 5 \text{ et } \bar{y}_2 = \frac{5.8+6.3+7.1}{3} = 6.4 \Rightarrow G_2(5; 6.4)$$

b- La droite $(G_1G_2) = (\Delta)$; voir la figure précédente.

c- Equation de (Δ) .

$$(\Delta) = (G_1G_2) \text{ a pour vecteur directeur } \overline{G_1G_2}(3; 1.5)$$

$$(\Delta) : y = mx + p ; m = \frac{1.5}{3} = 0.5 \text{ d'où } y = 0.5x + p, G_1 \in (\Delta)$$

$$\Rightarrow p = 3.9 \text{ soit } (\Delta) : y = 0.5x + 3.9$$

3°) Le rang de 2009 est $x = 8$, le montant en 2009 est alors $y = 0,5 \times 8 + 3,9 = 7,9$ (millions)

$$y > 2 \times 7,9 \Rightarrow 0,5x + 3,9 > 15,8 \Rightarrow x > 23,8.$$

Comme $x \in \mathbb{N}$, alors $x \geq 24$; soit à partir de l'année d'indice 24. Ce qui donne l'année $2001 + 24 = 2025$.

Ainsi en 2025, le montant des prêts sera strictement supérieur au double du montant de 2009.

Problème :

Partie A : $x \in]-\pi; 0[$, $g(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$.

1°) a- g est une somme de fonctions dérivables sur $]-\pi; 0[$, g est donc dérivable sur $]-\pi; 0[$.

$$g'(x) = -2 \sin x \cos x - \sin x = -\sin x(2 \cos x + 1).$$

b- Pour tout $x \in]-\pi; 0[$, $g'(x) = -\sin x(2 \cos x + 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pi$$

$$2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

$$x \in]-\pi; 0[\text{ donc } x = -\frac{2\pi}{3}.$$

Pour tout $x \in]-\pi; 0[$, $\sin x \leq 0$ donc $-\sin x \geq 0$

Signe de $2 \cos x + 1$:

Pour tout $x \in]-\pi; -\frac{2\pi}{3}[$ on a :

$$-\pi < x < -\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -1 < \cos x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 < 2 \cos x < -1 \\ \Leftrightarrow -1 < 2 \cos x + 1 < 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos x + 1 < 0$$

Pour tout $x \in]-\frac{2\pi}{3}; 0[$ on a :

$$-\frac{2\pi}{3} < x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \cos x < 1 \Leftrightarrow 0 < 2 \cos x + 1 < 3 \text{ donc } 2 \cos x + 1 > 0; \text{ ce qui donne le tableau de signe :}$$

x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	0
$-\sin x$		+	+
$2 \cos x + 1$	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+

Pour $x \in]-\pi; -\frac{2\pi}{3}[$, $g'(x) \leq 0$

Pour $x \in]-\frac{2\pi}{3}; 0[$, $g'(x) \geq 0$

c- Le tableau de variation de g :

g est strictement décroissante sur $]-\pi; -\frac{2\pi}{3}[$ et strictement

croissante sur $]-\frac{2\pi}{3}; 0[$

x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	0
$g'(x)$	-	0	+
g	-1	$-\frac{5}{4}$	1

2°) a- Démontrons que l'équation admet une solution unique

$$\beta \in]-\pi; 0[\text{ et que } \beta \in]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}[$$

g est continue sur $]-\pi; 0[$ en tant que fonction dérivable sur

$]-\pi; 0[$, g est donc continue sur $]-\pi; -\frac{2\pi}{3}[$ et sur

$$[-\frac{2\pi}{3}; 0[$$

i) g est continue et strictement décroissante sur

$$]-\pi; -\frac{2\pi}{3}[\text{ et } g\left(-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right) = \left[-\frac{5}{4}; -1\right] \text{ comme}$$

$$0 \notin \left[-\frac{5}{4}; -1\right] \text{ alors l'équation } g(x) = 0 \text{ n'admet pas de}$$

$$\text{solution dans }]-\pi; -\frac{2\pi}{3}[.$$

ii) g est continue et strictement croissante sur $[-\frac{2\pi}{3}; 0[$

$$g\left(-\frac{2\pi}{3}; 0\right) = \left[-\frac{5}{4}; 1\right]; 0 \in \left[-\frac{5}{4}; 1\right] \text{ alors l'équation}$$

$$g(x) = 0 \text{ admet une solution unique } \beta \text{ dans } \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right[$$

i) et ii) permettent de conclure que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]-\pi; 0[$.

$$g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}, g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0$$

$$g\left(-\frac{\pi}{3}\right) \times g\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow \beta \in \left]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right[.$$

b- De ce qui précède et d'après le tableau de variation de g on a : Pour tout $x \in]-\pi; \beta[$, $g(x) < 0$

Pour tout $x \in]\beta; 0[$, $g(x) > 0$ et $g(\beta) = 0$

Partie B :

$$f(x) = \frac{2 \cos(2x)}{1 + \cos x} + \frac{1}{2}, \text{ si } x \in]-\pi; 0[$$

$$f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x} + 1}, \text{ si } x > 0$$

1°) Continuité de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \cos 2x}{1 + \cos x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 - \frac{3}{e^{3x} + 1}\right) = \frac{1}{2} \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

2°) Dérivabilité de f en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin 2x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \times \cos x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(4 \cdot \frac{\sin x}{x} \times \frac{\cos x}{1 + \cos x} \right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2 ; f \end{aligned}$$

est donc dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{e^{3x} + 1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{2} \left(1 - \frac{2}{e^{3x} + 1} \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} \cdot \frac{(e^{3x} - 1)}{3x} \times \frac{1}{e^{3x} + 1} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \text{ car} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{e^X - 1}{X} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{3x} + 1} = \frac{1}{2} \text{ (en posant } 3x = X \text{)}$$

Ainsi f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \frac{9}{4}$

On a : $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation géométrique :

La courbe (C) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes : à gauche en 0 T_1 et à droite en 0 T_2 définies par :

$$(T_1) : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = 2x + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ et } (T_2) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

3°) a- Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{e^{3x} + 1} \right) = 2$$

b-

$$\text{Pour tout } x \in]-\pi; 0[, f(x) = \frac{2 \sin 2x}{1 + \cos x} + \frac{1}{2} = \frac{4 \sin x \cos x}{1 + \cos x} + \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{4 \sin x \cos x (1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} + \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{4 \sin x \cos x (1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} + \frac{1}{2}$$

Déduisons que $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{4 \sin x \cos x (1 - \cos x)}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{4 \cos x (1 - \cos x)}{\sin x} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} 4 \cos x (1 - \cos x) = -8 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \sin x = 0^-, \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = +\infty.$$

c- Déduisons les asymptotes de (C_f)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = -\pi$ est une asymptote verticale à (C_f) .

4°) a- f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et on a : $f'(x) = \frac{3e^{3x}}{(e^{3x} + 1)^2}$

$\frac{3e^{3x}}{(e^{3x} + 1)^2} > 0$ donc $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ et f est

strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

b- f est dérivable sur $]-\pi; 0[$ comme quotient de fonctions dérivable sur $]-\pi; 0[$ et on a :

$$\begin{aligned} \text{Pour } f'(x) &= 2 \cdot \frac{2 \cos 2x (1 + \cos x) + \sin x (\sin 2x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{2 \cos^3 x + 4 \cos^2 x - 2}{(1 + \cos x)^2} \\ &= 4 \cdot \frac{\cos^3 x + 2 \cos^2 x - 1}{(1 + \cos x)^2} \\ &= 4 \cdot \frac{\cos^3 x + \cos^2 x + \cos^2 x - 1}{(1 + \cos x)^2} \\ &= 4 \cdot \frac{(\cos x + 1)(\cos^2 x + \cos x - 1)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= 4 \cdot \frac{\cos^2 x + \cos x - 1}{1 + \cos x} = \frac{4g(x)}{1 + \cos x} \text{ donc} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{4g(x)}{1 + \cos x} \text{ pour tout } x \text{ de }]-\pi; 0[.$$

Pour tout $x \in]-\pi; 0[$, $1 + \cos x > 0$, d'où le signe de $f'(x)$

est celui de $g(x)$. Ainsi d'après la partie A n° 2°) on a :

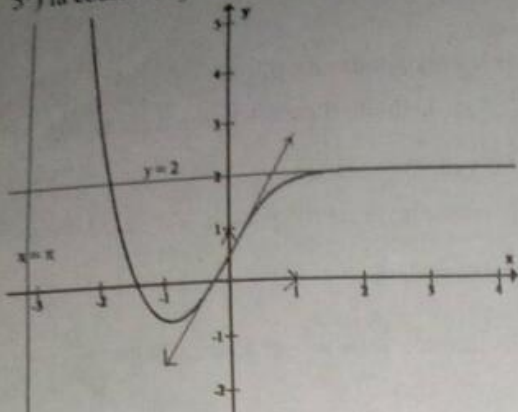
Pour tout $x \in]-\pi; \beta[$, $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $]-\pi; \beta[$.

Pour tout $x \in \beta; 0[$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $\beta; 0[$. Et $f'(x) = 0$ pour $x = \beta$.

c- Dressons le tableau de variation de f

x	0	β	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	
f	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	2	

5°) la courbe (C_f) .



Partie C :

Pour tout $x \in [1, 5; 2]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

1°) $x \in [1, 5; 2]$, $h(x) = f(x) - x$

h est dérivable sur $[1, 5; 2]$ comme somme de fonctions

dérivables sur $[1, 5; 2]$ et $h'(x) = f'(x) - 1$ or $f'(x) \leq \frac{1}{2} < 1$

d'où $h'(x) < 0$ et h est strictement décroissante sur $[1, 5; 2]$.

Déduisons-en que l'équation $f(x) = x$ admet une solution

unique α dans $[1, 5; 2]$.

$$h(1,5) = f(1,5) - 1,5 = 0,45 ; h(2) = -0,007 = -7.10^{-3}$$

h est continue et strictement décroissante sur $[1, 5; 2]$ et

$$h([1, 5; 2]) = [-7.10^{-3} ; 0,45] ; 0 \in [-7.10^{-3} ; 0,45] , \text{ donc}$$

l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [1, 5; 2]$

Or $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ d'où pour tout $x \in [1, 5; 2]$,

l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[1, 5; 2]$.

2°) $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a- Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 5; 2]$

- Pour $n = 0$; $u_0 = 1,5$ et $u_0 \in [1, 5; 2]$
- Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 5; 2]$ et démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \in [1, 5; 2]$

$u_n \in [1, 5; 2]$; $\alpha \in [1, 5; 2]$ et pour tout $x \in [1, 5; 2]$,

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

Supposons que $u_n \leq \alpha$, alors on a :

$$0 \int_{u_n}^{\alpha} dx \leq \int_{u_n}^{\alpha} f'(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_{u_n}^{\alpha} dx \Rightarrow 0 \leq f(\alpha) - f(u_n) \leq \frac{1}{2} (\alpha - u_n)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (\alpha - u_n)$$

$$\Rightarrow \alpha \leq \alpha - u_{n+1} + \alpha \leq \frac{1}{2} (u_n - \alpha) + \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (u_n + \alpha)$$

Or $u_n \leq 2$ et $\alpha \leq 2 \Rightarrow u_n + \alpha \leq 4$, donc

$$1,5 \leq \alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (u_n + \alpha) \leq 2 \Rightarrow 1,5 \leq u_{n+1} \leq 2$$

Ainsi $u_{n+1} \in [1, 5; 2]$

Supposons que $u_n \geq \alpha$

$$\text{On a : } 0 \int_{\alpha}^{u_n} dx \leq \int_{\alpha}^{u_n} f'(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{u_n} dx$$

$$0 \int_{\alpha}^{u_n} dx \leq \int_{\alpha}^{u_n} f'(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{u_n} dx \Rightarrow 0 \leq f(u_n) - f(\alpha) \leq \frac{1}{2} (u_n - \alpha)$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2} (u_n - \alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (u_n + \alpha)$$

Or $u_n \leq 2$ et $\alpha \leq 2 \Rightarrow u_n + \alpha \leq 4$, par suite on a :

$$1,5 \leq \alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (u_n + \alpha) \leq 2 \text{ ce qui donne : } 1,5 \leq u_{n+1} \leq 2$$

$u_{n+1} \in [1, 5; 2]$

D'où de tout ce qui précède $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 5; 2]$.

b- Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$$

f est dérivable sur $[1, 5; 2]$ et $\forall x \in [1, 5; 2]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$u_{n-1} \in [1, 5; 2]$ et $\alpha \in [1, 5; 2]$ d'où

$$|f(u_{n-1}) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha| \Rightarrow |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$$

Considérons la propriété $P(n) : n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$

$$\text{i) } n = 0 : |u_0 - \alpha| = \frac{1}{2^0} |u_0 - \alpha| \text{ d'où } |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0} |u_0 - \alpha|$$

$P(0)$ est vraie.

ii) supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\text{On a : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \text{ or } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \Rightarrow$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \right) \Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |u_0 - \alpha|$$

$P(n+1)$ est vraie.

$$\text{iii) par suite } \forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$$

démontrons maintenant que $\forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$

De ce qui précède on a : $\forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$

$$1,5 \leq \alpha \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -\alpha \leq -1,5$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq u_0 - \alpha \leq 0 \Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \text{ ce qui donne}$$

$$\text{alors : } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

c- Convergence de (u_n)

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \text{ comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$$

alors (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

d- Détermination de l'entier n_0 .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \text{ pour avoir : } |u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$$

$$\text{il suffit d'avoir : } \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3} \Rightarrow -(n+1) \ln 2 \leq -3 \ln 10$$

$$\Rightarrow (n+1) \ln 2 \geq 3 \ln 10$$

$$\Rightarrow n+1 \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2} \Rightarrow n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2} - 1 \Rightarrow n \geq 9$$

$$\text{D'où } n_0 = 9, |u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-3}.$$

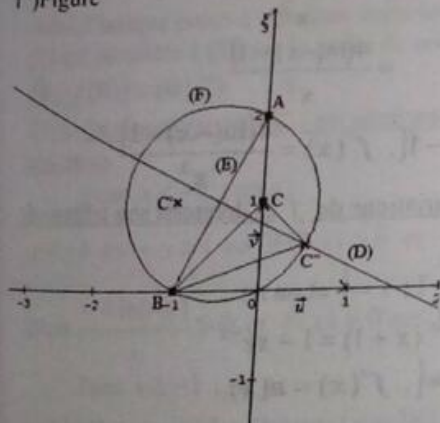
Remarque : u_9 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Sujet 6 : BAC 1^{er} tour 2010

Exercice 1 :

A(2i) ; B(-1) ; C(i), M(z) et M'(z') avec $z' = \frac{z+1}{z-2i}$

1°) Figure



$$2^\circ) f(C) = C' \Leftrightarrow z_{C'} = \frac{z_C + 1}{z_C - 2i} = \frac{i + 1}{i - 2i}$$

$$\text{Soit } z_{C'} = -1 + i \text{ et } C'(-1 + i).$$

Nature de ACBC'

On a : $\overrightarrow{AC}(-i)$ et $\overrightarrow{C'B}(-i)$ d'où $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'B}$ et par conséquent

ACBC' est un parallélogramme.

3°) C'' est un antécédent de C si $f(C'') = C$

C'' est unique si l'équation $z' = z_C$ admet une solution unique.

Soit $z \neq 2i$

$$z' = z_C \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-2i} = i$$

$$\Leftrightarrow z+1 = i(z-2i)$$

$$\Leftrightarrow z - iz = 1$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$$

Soit $z_{C''} = \frac{1+i}{2}$, cette solution étant unique alors C'' est

l'unique antécédent de C par f. C'' $\left(\frac{1+i}{2}\right)$

Nature du triangle BCC'' :

$$\frac{z_B - z_C}{z_{C''} - z_C} = \frac{-1-i}{\frac{1+i}{2}-i} = -2i$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_{C''} - z_C} = -2i \Rightarrow \text{mes}(\overrightarrow{CC''}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Donc le triangle BCC'' est rectangle en C.

$$4^\circ) |z'| = \left| \frac{z+1}{z-2i} \right| = \frac{|z+1|}{|z-2i|} = \frac{MB}{MA}$$

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-2i}\right) = \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

5°) Détermination des ensembles :

$$a- (E) = \{M(z) / z' \in \mathbb{R}^*\}$$

$$M \in (E) \Leftrightarrow \begin{cases} z' \neq 0 \\ \arg(z') = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M \neq A, M \neq B \text{ et } \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

alors (E) est le segment [AB] privé des points A et B.

$$b- (F) = \{M(z) / z' \in i\mathbb{R}^*\}$$

$$M \in (F) \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ \arg z' = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M \neq A, M \neq B \text{ et } \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Donc (F) est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

$$c- (D) = \{M(z) / |z'| = 1\}$$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} = 1, M \neq A \Leftrightarrow MA = MB \text{ et } M \neq A$$

Donc (D) est la médiatrice du segment [AB].

6°) Voir figure au 1°)

Exercice 2 : non corrigé

Problème :

Partie A : $u(x) = 1 - xe^{-x}$

1°) Etudions le sens de variation de u .

u est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u'(x) = -(e^{-x} - xe^{-x}) = (x-1)e^{-x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $u'(x)$ a le même signe que $x - 1$
 $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $\forall x \in]-\infty; 1[, u(x) < 0$;
 $\forall x \in]1; +\infty[u(x) > 0$

D'où u est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$

2°) Déduis-en le signe de $u(x)$ suivants les valeurs de x .
 De l'étude du sens de variation de u , on déduit que u admet un minimum égal à $u(1) = 1 - e^{-1}$ et comme $1 - e^{-1} > 0$ car $e^{-1} < 1$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$

Partie B :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{-4 \ln(-x)}{x} & , \text{ si } x \in]-\infty; -1[\\ f(x) = (x+1)(1+e^{-x}) & , \text{ si } x \in [-1; +\infty[\end{cases}$$

1°) a- Vérifions que f est continue en -1

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-4 \ln(-x)}{x} = \frac{-4 \ln 1}{-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)(1+e^{-x}) = (-1+1)(1+e^{-1}) = 0$$

$f(-1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$ donc f est continue en -1

b- Etudions la dérivabilité de f en -1

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4 \ln(-x)}{x(x+1)}$$

Posons $X = -x$

$$\frac{-4 \ln(-x)}{x(x+1)} = \frac{-4 \ln X}{-X(-X+1)} = \frac{-4}{X} \cdot \frac{\ln X}{X-1}$$

Si $x \rightarrow -1^-$; $X \rightarrow 1^+$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4}{X} \cdot \frac{\ln X}{X-1} = -4 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4}{X} = -4 \end{cases}$$

$-4 \in \mathbb{R}$, donc f est dérivable à gauche en -1 et

$$f'_g(-1) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (1 + e^{-x}) = 1 + e ; 1 + e \in \mathbb{R}$$

alors f est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1) = 1 + e$

On a : $f'_g(-1) \neq f'_d(-1)$ alors f n'est pas dérivable en -1

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet en son point d'abscisse -1 deux demi-tangentes définies par :

$$\text{A gauche en } -1 : (T_g) : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = -4x - 4 \end{cases} \text{ et à droite en } -1 :$$

$$(T_d) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = (1+e)x + 1 + e \end{cases}$$

c- Calculons la limite de f aux bornes de D

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4 \ln(-x)}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln X}{X} = 0 \text{ (en posant } X = -x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)(1+e^{-x}) = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1+e^{-x} = 1 \end{cases}$$

Eventuelle asymptote à (C)

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ alors l'axe des abscisses est asymptote à (C) en $-\infty$

d- Démontrons que (D) : $y = x + 1$

Pour tout $x \in [-1; +\infty[$, $f(x) - (x+1) = (x+1)e^{-x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$, d'où la droite (D) d'équation

$y = x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

Etudions la position relative de (C) et (D) sur $[-1; +\infty[$

Pour tout $x \in [-1; +\infty[$; $x+1 \geq 0$ et $e^{-x} > 0$ alors

$f(x) - (x+1) > 0$, $\forall x \in]-1; +\infty[$ et $f(x) - (x+1) = 0$ pour $x = -1$

D'où (C) est au dessus de (D) sur $] -1; +\infty[$ et pour $x = -1$ (C) et (D) se coupent

4°) a- Vérifions que $x < -1$, $f'(x) = \frac{4(\ln(-x)-1)}{x^2}$

f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et

$$f'(x) = \frac{-\frac{4}{x} \times x + 4 \ln(-x)}{x^2} = \frac{4(-1 + \ln(-x))}{x^2} = \frac{4(\ln(-x) - 1)}{x^2}$$

D'où pour $x \in]-\infty; -1[$, $f'(x) = \frac{4(\ln(-x)-1)}{x^2}$

b- Etudions les variations de f et dressons son tableau

variations

f est dérivable sur $[-1; +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = 1 + e^{-x} - e^{-x}(x+1) = 1 - xe^{-x}$$

Donc $\forall x \in [-1; +\infty[$, $f'(x) = u(x)$

Signe de $f'(x)$

Sur $]-\infty; -1[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln(-x) - 1$

Soit $x \in]-\infty; -1[$

$$\ln(-x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(-x) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq -e$$

Donc $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in]-\infty; -e]$ et $f'(x) < 0$, $\forall x \in]-e; -1[$

Sur $[-1; +\infty[$ le signe de $f'(x)$ est celui de $u(x)$
 Or $u(x) > 0$ donc $f'(x) > 0, \forall x \in [-1; +\infty[$

En résumé :
$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -e[\cup]-1; +\infty[\\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-e; -1[\\ f'(-e) = 0 \end{cases}$$

D'où f est strictement croissante sur $]-\infty; -e]$ et sur $[-1; +\infty[$

f est strictement décroissante sur $]-e; -1]$

Tableau de variation de f

$$f(-e) = -\frac{4}{e}$$

x	$-\infty$	$-e$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	$\nearrow$

c- Démontrons qu'il existe un unique point d'abscisse

supérieure à -1 où $(T) \parallel (D)$

$(T) \parallel (D)$ signifie que (T) et (D) ont même pente (coefficient directeur).

Avec $x_0 > -1$

(T) étant de pente $f'(x_0)$ et (D) de pente 1 on a :

$$\begin{cases} f'(x_0) = -1 \\ x_0 > -1 \end{cases} \text{ d'où } f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 1 - x_0 e^{-x_0} = 1$$

$$\Leftrightarrow -x_0 e^{-x_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ car } e^{-x_0} > 0$$

Ainsi l'unique point d'abscisse supérieure à -1 où la tangente (T) est parallèle à (D) est le point de coordonnées

$$(0; f(0)) = (0; 2)$$

5°) a- Démontrons que (C) est situé au-dessus de l'axe des abscisses.

Pour $x < -1$; on a :

$$x < -1 \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow \ln(-x) > 0 \text{ et } \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{x} > 0$$

$$\text{D'où } \frac{-4 \ln(-x)}{x} > 0 \text{ et } f(x) > 0 \text{ sur }]-\infty; -1[$$

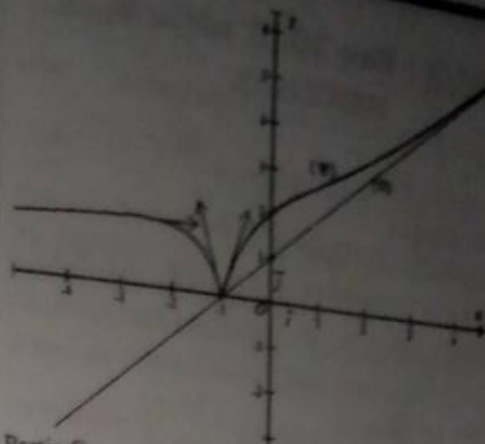
Pour $x \geq -1$; on a :

$$x+1 \geq 0 \text{ et } x+e^{-x} > 0 \text{ donc } (x+1)(1+e^{-x}) > 0 \text{ et}$$

$$f(x) \geq 0 \text{ sur } [-1; +\infty[$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ et par conséquent (C) est au-dessus de l'axe (Ox) .

b- Construisons de la courbe (C) et ses asymptotes :



Partie C :

6°) $\lambda \geq -1$

a- Calculons les intégrales I et J

$$\begin{aligned} I &= \int_{-e}^{-1} \frac{\ln(-x)}{x} dx = \left[\frac{1}{2} \ln^2(-x) \right]_{-e}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (0 - 1) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } I = -\frac{1}{2}$$

$$J = \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{-x} dx$$

Posons $u(x) = x+1$ et $v'(x) = e^{-x}$

On alors $u'(x) = 1$ et prenons $v(x) = -e^{-x}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } J &= \left[-(x+1)e^{-x} \right]_{-1}^{\lambda} - \int_{-1}^{\lambda} -e^{-x} dx \\ &= -(\lambda+1)e^{-\lambda} + \left[e^{-x} \right]_{-1}^{\lambda} \\ &= -(\lambda+1)e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + e \end{aligned}$$

$$\text{Donc } J = -(\lambda+2)e^{-\lambda} + e$$

b- Calculons en fonction de λ et en m^2 $A(\lambda)$ et

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= 8 + 4e - 4(\lambda+2)e^{-\lambda} \\ A(\lambda) &= 4 \left(\int_{-e}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^{\lambda} (f(x) - (x+1)) dx \right) m^2 \\ &= 4 \left(\int_{-e}^{-1} \frac{-4 \ln(-x)}{x} dx + \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{-x} dx \right) m^2 \\ &= 4(-4I + J) m^2 = 4(2 - (\lambda+2)e^{-\lambda} + e) m^2 \end{aligned}$$

D'où $A(\lambda) = 8 + 4e - 4(\lambda+2)e^{-\lambda} m^2$ d'où le résultat

7°) a- Calculons la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [8 + 4e - 4(\lambda+2)e^{-\lambda}] \\ &= (8+4e)m^2 \text{ car } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda+2)e^{-\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda+2}{e^{\lambda}} = 0 \end{aligned}$$

Sujet 9 : Bac 2013 série S₂₊₅ SENEGAL

Exercice I :

1°) a- $r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, $r = -0,973$

Il y a une forte corrélation entre X et Y .

b- La droite de régression de Y en X est : $y = ax + b$

avec $a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$

$y = -0,874x + 4,12$

c- Si $x = 6$ alors $y = -1,124$

Cette équation ne permet pas d'estimer le degré de salinité car au 6^{ème} mois de pluie, le degré de salinité ne peut être négatif.

2°) Soit $Z = \ln(Y - 1)$

a-

x_i	0	1	2	3	4
z_i	1,182	0,875	0,010	-1,83	-4,61

b- $r = \frac{\text{cov}(X, Z)}{\sigma(X)\sigma(Z)}$, $r = -0,944$.

c- *La droite de régression de Z en X est : $z = ax + b$

avec $a = \frac{\text{cov}(X, Z)}{V(X)}$ et $b = \bar{Z} - a\bar{X}$

$z = -1,428x + 1,982$

*On a : $z = \ln(y - 1)$ et $z = -1,428x + 1,982$ d'où

$\ln(y - 1) = -1,428x + 1,982 \Leftrightarrow y - 1 = e^{-1,428x + 1,982}$ ainsi
 $y = e^{-1,428x + 1,982} + 1$.

d- Si $x = 6$ alors $y = 1,001$. Le degré de salinité estimé au 6^{ème} est positif, il est très proche de celui du quatrième mois et lui est inférieur. Donc l'équation $y = e^{-1,428x + 1,982} + 1$ nous permet de faire cette estimation.

Exercice -II :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

$S = S\left(O, \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est la similitude de centre O , d'angle

$\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1°) $z' - z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_0)$ or $z_0 = 0$ donc $z' = i \frac{\sqrt{2}}{2} z$.

2°) a-

$z_1 = i \frac{\sqrt{2}}{2} z_0 = i \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i) = i \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_2 = i \frac{\sqrt{2}}{2} z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$z_3 = i \frac{\sqrt{2}}{2} z_2 = -i \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

b- $z_n = i \frac{\sqrt{2}}{2} z_{n-1}$, $n \geq 1$.

c- On voit que d'après 2°) b-, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme : $z_0 = 1 + i$ et de raison

$q = i \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $z_n = \left(i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n z_0$ ce qui donne

$z_n = \left(i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (1 + i)$, $n \geq 0$

d- $a_n = |z_n|$ donc $a_n = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$a_{n+1} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

$a_{n+1} = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ainsi

$a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_n$, $n \geq 0$ d'où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite

géométrique de premier terme $a_0 = \sqrt{2}$ et de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

e- (a_n) converge vers zéro car sa raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est

dans $]0; 1[$.

PROBLEME :

Partie A :

1°) Prouvons que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - \frac{x}{x} \right)$ or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} = 0$

2°) $k :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x(1 - \ln x)$

a- La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0; +\infty[$
la fonction $x \mapsto 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue
sur $]0; +\infty[$, d'où la fonction $x \mapsto (1 - \ln x)$ est
continue sur $]0; +\infty[$ par somme. Or la fonction
 $x \mapsto x$ est continue sur $]0; +\infty[$ d'où par produit
la fonction $x \mapsto x(1 - \ln x)$ est continue sur

$]0; +\infty[$. Par conséquent k est continue sur $]0; +\infty[$.

b- Vérifions que K est une primitive de k , dans $]0; +\infty[$.

$K :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x$$

La fonction $x \mapsto \frac{3}{4}x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ et la fonction

$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme

produit de fonctions dérivables. Donc K est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

Calcul de $K'(x)$:

$$\forall x \in]0; +\infty[, K'(x) = \left(\frac{3}{4}x^2 \right)' - \frac{1}{2}(x^2 \ln x)'$$

$$K'(x) = \frac{3}{2}x - x \ln x - \frac{1}{2}x = x - \ln x \text{ donc}$$

$$K'(x) = k(x)$$

Par suite K est une primitive de k , dans $]0; +\infty[$.

Partie B :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, & x \leq 0 \\ x \ln x, & x > 0 \end{cases}$$

3°) Déterminons D_f

$$D_f = \left\{ x \in]-\infty; 0] / e^x - x - 1 \neq 0 \right\} \cup \left\{ x \in]0; +\infty[/ x > 0 \right\}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$ donc $D_f =]-\infty; 0] \cup]0; +\infty[$ d'où

$$D_f =]-\infty; +\infty[$$

Les limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$

4°) a- Étudions la continuité de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - x - 1 = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ on a:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue en } 0$$

b- Étudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - x - 1}{x} = 0 \text{ (d'après la partie A)}$$

donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 par suite f n'est pas dérivable.

Interprétation géométrique :

La courbe représentative de $f : (C_f)$ admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes définies par les systèmes

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ à gauche et } \begin{cases} x = 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \text{ à droite}$$

5°) Donnons les domaines de continuité et de dérivabilité de f .

Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x - 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $] -\infty; 0[$, la fonction $x \mapsto x \ln x$ est continue sur

$]0; +\infty[$ comme produit de fonctions continues et f est continue en 0, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x - 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $] -\infty; 0[$, la fonction $x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur

$]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et f n'est pas dérivable en 0, donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{0\}$.

6°) Calculons la dérivée de f

Pour $x < 0$, $f'(x) = e^x - 1$

Pour $x > 0$, $f'(x) = 1 + \ln x$

Signe de $f'(x)$

Pour $x < 0$ $e^x < 1$ d'où

$$f'(x) < 0, \forall x \in]-\infty; 0[$$

Pour $x > 0$ posons $1 + \ln x \geq 0$

$$1 + \ln x \geq 0 \Rightarrow x \geq e^{-1} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{e}; +\infty \right[$$

$$\text{Donc } f'(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left] 0; \frac{1}{e} \right[;$$

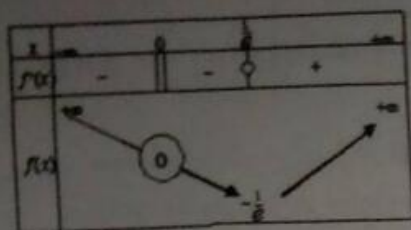
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[\text{ et } f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$$

En résumé:

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup \left] 0; \frac{1}{e} \right[, f'(x) < 0 \\ \forall x \in \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in \left\{ \frac{1}{e} \right\}, f'(x) = 0 \end{cases}$$

7°) Dressons le tableau de variations de f .

f est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{e}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{e}; +\infty[$



8°) Prouvons que la droite (Δ) d'équation : $y = -x - 1$ est une asymptote de la courbe (C_f) en $-\infty$

Pour $x < 0$, $[f(x) - (-x - 1)] = e^x$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ d'où } (\Delta): y = -x - 1$$

est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

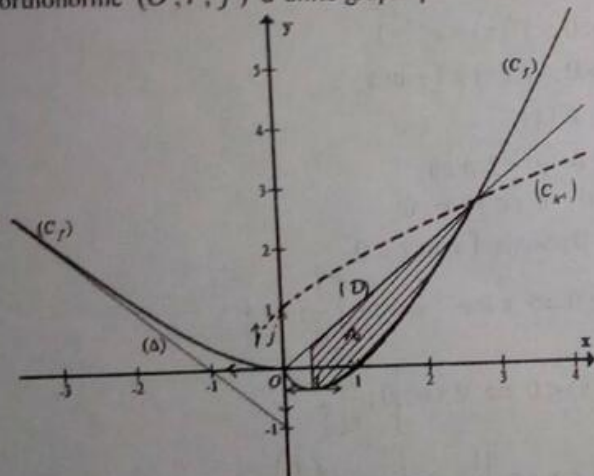
9°) Précisons la nature de la branche infinie de (C_f) quand x tend vers $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc (C_f) admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$ or alors (C_f) admet une branche

parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

10°) Traçons la courbe (C_f) de f dans un repère

orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.



11°) a- h est la restriction de f à l'intervalle $[\frac{1}{e}; +\infty[$

donc h est continue et strictement croissante sur $[\frac{1}{e}; +\infty[$,

donc elle est bijective. Elle réalise une bijection de $[\frac{1}{e}; +\infty[$

sur $[-\frac{1}{e}; +\infty[$ (d'après le tableau de variation de

f).

b- Représentons $(C_{h^{-1}})$

voir courbe en pointillé sur la figure

12°) a- Ce domaine est l'ensemble des points $M(x, y)$

tels que : $\begin{cases} \frac{1}{e} \leq x \leq e \\ h(x) \leq y \leq x \end{cases}$ On a donc :

$$A_1 = \int_{\frac{1}{e}}^e (x - h(x)) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^e (x - x \ln x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^e k(x) dx \text{ (d'après la partie A.)}$$

$$A_1 = [K(x)]_{\frac{1}{e}}^e = \left(K(e) - K\left(\frac{1}{e}\right) \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$A_1 = \left(e^2 - \frac{5}{e^2} \right) \text{ cm}^2$$

b- Ce domaine est le symétrique, par à la première bissectrice, du domaine d'aire A_1 de la question 12°) a- d'où

$$A_2 = \left(e^2 - \frac{5}{e^2} \right) \text{ cm}^2$$

Sujet 10 : Bac 2014 série S₂₋₄₋₅ SENEGAL

Exercice 1 :

A/ Question de cours

1°) Soit z un nombre complexe non nul donné.

- L'écriture algébrique de z est de la forme $z = a + ib$, avec a sa partie réelle et b sa partie imaginaire,
- L'écriture exponentielle de z est de la forme : $z = re^{i\theta}$ avec r

son module et θ un de ses arguments,

- L'écriture trigonométrique de z est de la forme : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec r son module et θ un de ses arguments.

2°) L'écriture complexe de la rotation r de centre $K(z_0)$ d'angle θ .

Soient $K(z_0)$, $M(z)$, et $M'(z')$ et r la rotation de centre $K(z_0)$ qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ on a :

$$\begin{cases} KM' = KM \\ \widehat{(KM, KM')} = \theta + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ce qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} |z' - z_0| = |z - z_0| \\ \arg\left(\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{D'où } r: z' = e^{i\theta} z + z_0(1 - e^{i\theta})$$

$$\text{B/ } z_0 = 1 - i\sqrt{3}$$

1°) Donnons une écriture trigonométrique de z_0 .

On a : $|1-i\sqrt{3}| = 2$, soit θ un argument de z_0 alors

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ on peut alors prendre } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{D'où } z_0 = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

2°) Prouvons que $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} z_0^4 &= 2^4 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]^4 \\ &= 16 \left(\cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= 16 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -8 + 8i\sqrt{3} \text{ d'où } z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3} \end{aligned}$$

3°) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = 1$

$z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 = e^{i0}$ les solutions de cette équation sont les

nombre complexes z_k définies par : $z_k = \sqrt[4]{1} e^{i \frac{2k\pi}{4}}$ avec $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

On a : donc $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i \frac{\pi}{2}} = i$, $z_2 = e^{i\pi} = -1$ et

$z_3 = e^{i \frac{3\pi}{2}} = -i$ d'où l'ensemble des solutions S de l'équation

$z^4 = 1$ est : $S = \{1; i; -1; -i\}$

4°) Dédisons-en les solutions de (E)

$$(E) : z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$$

$$(E) \Leftrightarrow \frac{z^4}{-8 + 8i\sqrt{3}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}} \right)^4 = 1 \text{ (d'après B/2°)}$$

$$(E) \Leftrightarrow \frac{z}{1-i\sqrt{3}} = 1 \text{ ou } \frac{z}{1-i\sqrt{3}} = i \text{ ou } \frac{z}{1-i\sqrt{3}} = -1 \text{ ou } \frac{z}{1-i\sqrt{3}} = -i$$

$$\frac{z}{1-i\sqrt{3}} = -i \text{ (d'après B/3°)}$$

$$(E) \Leftrightarrow z = 1-i\sqrt{3} \text{ ou } z = \sqrt{3} + i \text{ ou } z = -1+i\sqrt{3} \text{ ou } z = -\sqrt{3} - i$$

$$z = -\sqrt{3} - i$$

Les solutions de (E) sous forme

algébrique sont : $z'_0 = 1-i\sqrt{3}$; $z'_1 = \sqrt{3} + i$;

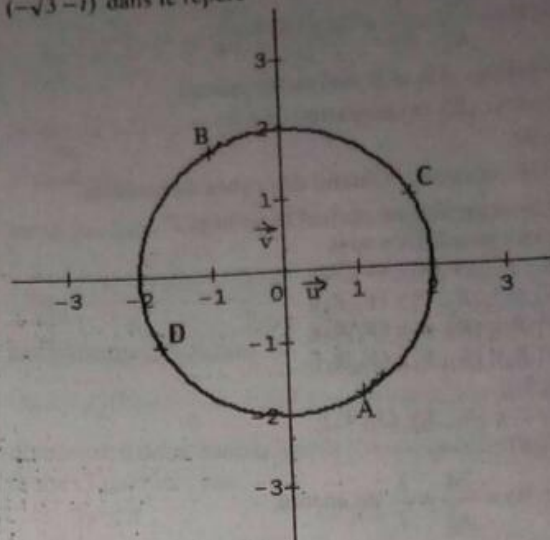
$z'_2 = -1+i\sqrt{3}$ et $z'_3 = -\sqrt{3} - i$.

Trigonométrique sont : $z'_0 = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$

$$z'_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z'_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \text{ et } z'_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

5°) Plaçons $A(1-i\sqrt{3})$, $B(-1+i\sqrt{3})$, $C(\sqrt{3}+i)$ et $D(-\sqrt{3}-i)$ dans le repère



6°) Ecriture complexe de r

D'après A/2°) si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par r alors : $r :$

$$z' = z e^{i \frac{\pi}{2}}$$

7°) Vérifions $r(A) = C$; $r(C) = B$ et $r(B) = D$

$$z_A e^{i \frac{\pi}{2}} = 2e^{-i \frac{\pi}{3}} e^{i \frac{\pi}{2}} = 2e^{i \frac{\pi}{6}} = z_C \text{ d'où } r(A) = C$$

$$z_C e^{i \frac{\pi}{2}} = 2e^{i \frac{\pi}{6}} e^{i \frac{\pi}{2}} = 2e^{i \frac{2\pi}{3}} = z_B \text{ d'où } r(C) = B$$

$$z_B e^{i \frac{\pi}{2}} = 2e^{i \frac{2\pi}{3}} e^{i \frac{\pi}{2}} = 2e^{i \frac{7\pi}{6}} = z_D \text{ d'où } r(B) = D$$

8°) Dédisons-en que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon

$$r(A) = C \Rightarrow |z_A| = |z_C|,$$

$$r(C) = B \Rightarrow |z_C| = |z_B|,$$

$$r(B) = D \Rightarrow |z_B| = |z_D| \text{ d'où } |z_A| = |z_C| = |z_B| = |z_D| = 2 \text{ ce qui est équivalent à}$$

$OA = OB = OC = OD = 2$ d'où A, B, C et D sont sur le même cercle (C) de centre O et de rayon 2.

Exercice 2 :

Une boîte contient 8 cubes indiscernables au toucher : $R_1; R_2;$

$R_2; R_2; V_1; V_1; V_2; J_2;$

R représente la couleur rouge, V la couleur verte, J la couleur jaune, 1 et 2 les numéros des couleurs.

A/ Soit $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements de cet espace probabilisé.

A et B sont indépendants si et seulement si

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

B) On choisit successivement et sans remise 2 cubes de la boîte.

1°) Soient les événements A : "Obtenir des cubes de couleurs différentes" et B : "Obtenir au plus un cube portant le numéro 2"

$$a- p(A) = \frac{A_4^1 \times A_4^1 + A_3^1 \times A_5^1 + A_1^1 \times A_7^1}{A_8^2} = \frac{19}{28}$$

$$b- p(\bar{B}) = \frac{A_5^2}{A_8^2} + \frac{5}{14} \text{ d'où } p(B) = \frac{9}{14}$$

c- vérifions si A et B sont indépendants

Calculons $p(A \cap B)$ et comparons-le avec

$$p(A) \times p(B)$$

$(A \cap B)$, l'événement : "Obtenir des cubes de couleurs

différentes avec au plus un portant le numéro 2".

Les différentes possibilités sont :

$(R_1; V_1); (R_1; V_1); (V_1; R_1); (V_1; R_1);$

$(R_2; V_1); (V_1; R_2); (R_2; V_1); (V_1; R_2);$

$(R_2; V_1); (V_1; R_2); (R_2; V_1); (V_1; R_2);$

$(R_2; V_1); (V_1; R_2); (R_2; V_1); (V_1; R_2);$

$(R_1; J_2); (J_2; R_1);$

$(V_1; J_2); (J_2; V_1); (V_1; J_2); (J_2; V_1);$

$(R_1; V_2); (V_2; R_1);$

$$\text{Donc } p(A \cap B) = \frac{24}{A_8^2} = \frac{3}{7} \text{ ou encore}$$

$$p(A \cap B) = \frac{(A_1^1 \times A_1^1 + A_1^1 \times A_3^1 + A_2^1 \times A_4^1 + A_2^1 \times A_1^1) \times 2}{A_8^2} = \frac{3}{7}$$

$$\text{or } p(A) \times p(B) = \frac{19}{14} \times \frac{19}{28} \text{ qui est différent de } \frac{3}{7}$$

d'où A et B ne sont pas indépendants.

2°) a- Déterminons la loi de probabilité de X.

$X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ et la loi de probabilité de X est résumé dans le tableau suivant :

$X = x_i$	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{14}$	$\frac{8}{14}$	$\frac{3}{14}$

b- Calculons l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(X = x_i) = \frac{8}{14} + \frac{6}{14} = 1$$

c- Calculons la variance $V(X)$ de X.

$$V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p(X = x_i) - [E(X)]^2 = \frac{8}{14} + \frac{12}{14} - 1 = \frac{3}{7}$$

C/ Tirage simultané de 3 cubes de la boîte :

$$a- p(C) = \frac{C_3^3 + C_3^2 \times C_5^1}{C_8^3} = \frac{2}{7}$$

$$b- p_n = p(D_n) = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^n$$

$$c- (p_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante et } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$$

Problème :

$$\text{Partie A : } g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$$

1°) a- Déterminons l'ensemble de définition D_g de g.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} ; x \neq 1\} \text{ on a : } D_g =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

b- Les limites de g aux bornes de D_g .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - (x-1) \ln(1-x)}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - (x-1) \ln(x-1)}{x-1} = +\infty$$

2°) Déterminons g' , la fonction dérivée de g, et dressons le tableau de variations de g.

Les fonctions $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ et $x \mapsto \ln|x-1|$ sont dérivables en

tout point de D_g d'où g est dérivable sur D_g et :

$$g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = -\frac{x}{(x-1)^2}$$

Tableau de variation de g

Sur D_g , $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur

$$]0; 1[\text{ et }]1; +\infty[$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	-
g	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

3°) Prouvons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $4 < \alpha < 5$.

g est dérivable sur D_g donc continue sur D_g

- g est donc continue et strictement décroissante sur $]0; 1[$ et $g(]0; 1[) =]-\infty; 0[$; $0 \notin]-\infty; 0[$ donc $g(x) \neq 0, \forall x \in]0; 1[$
- g est continue et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$; $g(]1; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$ or $0 \in]-\infty; +\infty[$ il existe donc un unique réel $\alpha \in]1; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$
- De plus $g(4) \approx 0,23$ et $g(5) \approx -0,14$

$$g(4) \times g(5) < 0 \text{ donc } 4 < \alpha < 5.$$

D'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $4 < \alpha < 5$.

4°) Signe de g sur D_g

D'après 2 et 3 de la partie A on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Partie B :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln|x-1|}{x}, & \text{si } x > 0 \\ \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

5°) a- Vérifions que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Soit D_f le domaine de définition de f

$$D_f = \{x \in]-\infty; 0] / e^{2x} + 3e^x + 2 \neq 0\} \cup \{x \in]0; +\infty[/ x \neq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$$

$$\begin{cases} x \in]-\infty; 0] \\ e^{2x} + 3e^x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0]$$

$$\begin{cases} x \in]0; +\infty[\\ x \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{donc } D_f =]-\infty; 0] \cup]0; 1[\cup]1; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|x-1|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} \times \frac{\ln(x-1)}{(x-1)} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln|x-1| = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

b- Précisons les droites asymptotes à (C_f)

la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C_f) et la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C_f) aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

6°) a- Etudions la continuité de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln|x-1|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln(1-x)}{-x} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{On a aussi } f(0) = \frac{-6e^0}{e^0 + 3e^0 + 2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue en } 0.$$

b- on admet que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x) + x}{x} = -\frac{1}{2}$ Prouvons que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln|x-1|}{x} - (-1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln|x-1|}{x} + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln|x-1| + x}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln|x-1| + x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2 \frac{e^{2x} - 1}{2x} - 3 \frac{e^x - 1}{x} \right] \times \frac{1}{e^{2x} + 3e^x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - 3) \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

2° méthode :

remarquons que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{x} = 2e^{2 \cdot 0} - 3e^0 = -1$ d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{6}$$

Interprétation graphique :

On a : $f'_g(0) = -\frac{1}{6}$ et $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$ d'où (C_f) admet en son point d'abscisse 0 deux demi tangente l'une à gauche (T_g) et l'autre à droite (T_d) définie par :

$$(T_g) : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = -\frac{1}{6}x - 1 \end{cases} \text{ et } (T_d) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = -\frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

7°) a- Démontrons que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\alpha} \text{ or } g(\alpha) = 0 \text{ ce qui nous donne}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha - 1} = \ln(\alpha - 1) \text{ d'où } f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

b- Calculons $f'(x)$ et dressons le tableau de variation de f

$$\begin{aligned} \text{Sur }]0; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) &= \frac{\frac{1}{x-1}(x) - \ln|x-1|}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x}{x-1} - \ln|x-1|}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{Sur }]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{-6e^x(3e^{2x} + 6e^x + 2)}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2}$$

Signe de $f'(x)$

Sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ f' a le même signe que $g(x)$

Sur $]-\infty; 0[, f'(x) < 0$

En résumé on a le tableau de signe de f'

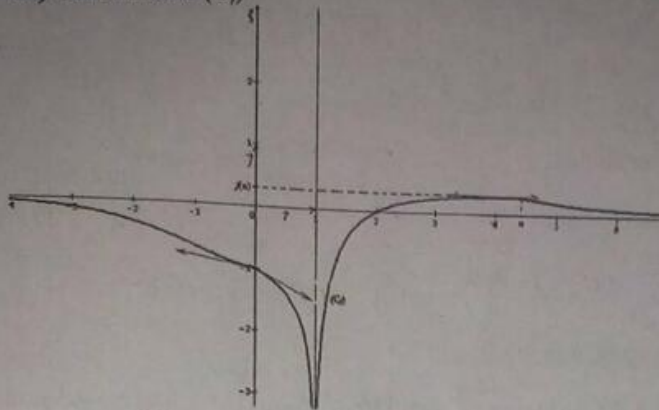
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	-

Tableau de variation de f

f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $[\alpha; +\infty[$ et
 f est strictement croissante sur $]1; \alpha]$

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	-	-
f	0	-1	1	$\alpha-1$	0

8°) Construisons (C_f)



9°) a- $\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}$ nous donne $a = -12$ et

$b = 6$ d'où $\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-12}{x+2} + \frac{6}{x+1}$

b- D'après 9°) a- $\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = \frac{-12}{e^x + 2} + \frac{6}{e^x + 1}$

$$= \frac{-12}{e^x(1 + 2e^{-x})} + \frac{6}{e^x(1 + e^{-x})}$$

$$= \frac{-12e^{-x}}{(1 + 2e^{-x})} + \frac{6e^{-x}}{(1 + e^{-x})} \text{ d'où}$$

$$\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = \frac{-12e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} + \frac{6e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

c- Soit A l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe, les droites d'équations $x = -\ln 2$ et $x = 0$

$$A = \int_{-\ln 2}^0 -f(x) dx \times u.a$$

$$= \int_{-\ln 2}^0 \frac{6e^{-x}}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx \times u.a$$

$$= \int_{-\ln 2}^0 \left(\frac{12e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} - \frac{6e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) dx = \left[-6 \ln(1 + 2e^{-x}) + 6 \ln(1 + e^{-x}) \right]_{-\ln 2}^0 \times 4 \text{ cm}^2$$

$$\text{D'où } A = 24 \ln \frac{10}{9} \text{ cm}^2$$

Sujet 28 : Bac BENIN 2000 série D (PI)

Exercice 1 :

$$P(z) = z^3 + \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})z^2 + 4(\sqrt{2} + 1)z - 4\sqrt{2}(1 - i)^3$$

Calculons $P(-2i)$ et $P(1 + i)$

$$\begin{aligned} P(-2i) &= (-2i)^3 + \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(-2i)^2 + 4(\sqrt{2} + 1)(-2i) - 4\sqrt{2}(1 - i)^3 \\ &= 8i - 4\sqrt{2} - 8 - (4\sqrt{2} + 8)i + 8\sqrt{2} + 8 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i \\ &= -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 8 + 8 + (8 - 4\sqrt{2} - 8 + 4\sqrt{2})i \\ &= 0 \text{ donc } \underline{P(-2i) = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1 + i) &= (1 + i)^3 + \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(1 + i)^2 + 4(\sqrt{2} + 1)(1 + i) - 4\sqrt{2}(1 - i)^3 \\ &= -2 - 2i - 2\sqrt{2} - 4 + (2\sqrt{2} + 4)i - 4\sqrt{2} - 4 + 4i(\sqrt{2} + 1) - 4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2} \\ &= -2 - 4 - 4 - 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + (2 + 2\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{2})i \\ &= -10 - 10\sqrt{2} + (10 + 10\sqrt{2})i \text{ donc} \end{aligned}$$

$$\underline{P(1 + i) = (10 + 10\sqrt{2})(-1 + i)}$$

2°) Démontrons que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle.

Soit $a \in \mathbb{R}$. a est une solution de l'équation $P(z) = 0$ si et seulement si $P(a) = 0$

On a :

$$P(a) = a^3 + \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})a^2 - 4\sqrt{2} + [\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})a^2 + 4(1 + \sqrt{2})a + 4\sqrt{2}]$$

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})a^2 - 4\sqrt{2} = 0 & \textcircled{+} \\ \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})a^2 + 4(1 + \sqrt{2})a + 4\sqrt{2} = 0 & \textcircled{\times} \end{cases}$$

La résolution l'équation $\textcircled{\times}$ nous donne $a = -2$ ou

$$a = 2(1 - \sqrt{2}). \text{ Seule la racine } -2 \text{ est une solution de } \textcircled{+}$$

3°) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

$$P(-2i) = 0 \text{ et } P(-2) = 0 \text{ donc}$$

$$P(z) = (z + 2i)(z + 2)(z - b) \text{ (avec } b \in \mathbb{C})$$

$$\text{Soit } P(z) = z^3 + (2 + 2i - b)z^2 + [b(2 + 2i) + 4i]z - 4bi \text{ (} b \in \mathbb{C})$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 2 + 2i - b = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(1 + i) \\ b(2 + 2i) + 4i = 4i(\sqrt{2} + 1) \\ -4bi = -4\sqrt{2}(1 - i) \end{cases}$$

$$\text{L'équation } 2 + 2i - b = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(1 + i) \text{ donne}$$

$$b = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}. \text{ On vérifie que : } b(2 + 2i) + 4i = 4i(\sqrt{2} + 1)$$

$$\text{et } -4bi = -4\sqrt{2}(1 - i)$$

Par conséquent, on a :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 2i)(z + 2)(z + \sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -2i \text{ ou } z = -2 \text{ ou } z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$ est :

$$S_C = \{-2i; -2; -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\}$$

4°) a- Ecrivons u sous forme trigonométrique.

$$u = z_0 \times z_1 \times z_2$$

$$u = -2(-2i)(-2 - 2i) = 4i(-2 - 2i) = -8i + 8$$

$$|u| = \sqrt{(8)^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}$$

$$\text{Soit } \theta \text{ un argument de } u, \text{ on a : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ alors on peut}$$

$$\text{prendre } \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{D'où } u = 8\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

b- Ecrivons u^{2000} sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} u^{2000} &= (8\sqrt{2})^{2000} \left[\cos\left(\frac{-2000\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-2000\pi}{4}\right) \right] \\ &= (8\sqrt{2})^{2000} [\cos(-500\pi) + i \sin(-500\pi)] \\ &= (8\sqrt{2})^{2000} \end{aligned}$$

$$u^{2000} = (8\sqrt{2})^{2000} = 2^{7000}$$

c- Déterminons une équation du cercle circonscrit au triangle $M_0M_1M_2$.

$$\text{On a : } \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_1} = \frac{-2 - 2i + 2}{-2 - 2i + 2i} = \frac{-2i}{-2} = i$$

$$\text{Puisque } \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_1} = i \text{ alors le triangle } M_0M_1M_2 \text{ est rectangle}$$

en M_2 . Par conséquent le cercle circonscrit à $M_0M_1M_2$ a pour centre l milieu de $[M_0M_1]$ et a pour rayon $\frac{1}{2}M_0M_1$. Soit I

le centre de ce cercle. On trouve $I(-1; -1)$ et

$$\frac{1}{2}M_0M_1 = \sqrt{2} \text{ alors une équation du cercle circonscrit au}$$

$$\text{triangle } M_0M_1M_2 \text{ est : } (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

Exercice 2 :

1°) Vérifions que les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1; -2; \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à (P)}$$

$$\vec{n}' \begin{pmatrix} 1; -2; 3 \end{pmatrix} \text{ est un vecteurs normal à (Q)}$$

$$\text{On a : } \vec{n} \wedge \vec{n}' = -3\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$$

Puisque $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}$ alors (P) et (Q) ne sont pas parallèles.

2°) Déterminons une représentation paramétrique de (D)

Soit $M(x; y; z)$ un point de (D)

$$\text{On a : } M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + \frac{3}{2}z + \frac{5}{2} = 0 \\ x - 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ x-2y+3z-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+7=0 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-7 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2t-7 \\ y=t \\ z=3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

donc une représentation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x=2t-7 \\ y=t \\ z=3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3°) Déterminons une équation du plan (R) passant par A(1; -1; 0) et perpendiculaire aux plans (P) et (Q)

$\vec{n} \wedge \vec{n'}$ est un vecteur normal au plans (R) et

$$\vec{n} \wedge \vec{n'} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$(R): -3x - \frac{3}{2}y + d = 0 \text{ et } A \in (R) \text{ par suite } d = \frac{3}{2}. \text{ Une}$$

$$\text{équation cartésienne de (R) est } -3x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} = 0 \text{ soit :}$$

$$(R): 2x + y - 1 = 0$$

4°) a- Supposons que A(1; -1; 0) soit un point de (Q) on a :
 $1 - 2(-1) + 3(0) - 2 = 0$ ce qui donne $1 = 0$, ce qui est absurde. On conclut que $A \notin (Q)$

$$b- d(A; (Q)) = \frac{|x_A - 2y_A + 3z_A - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} u.l = \frac{1}{\sqrt{14}} u.l$$

$$\text{avec } u.l = \text{unité de longueur d'où } d(A; (Q)) = \frac{\sqrt{14}}{14} u.l$$

Problème

Partie A :

1°) Déterminons a et b pour que la fonction p soit solution de (E).

$$p(x) = ax + b \Rightarrow p'(x) = a$$

$$(p \text{ solution de (E)}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, p'(x) - p(x) = 2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - a = 0 \\ a - b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2 \text{ et } b = 0$$

2°) a- Démontrons que φ solution de (E) si et seulement si $\varphi - p$ est solution de (E').

$$\varphi - p \text{ solution de (E')} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) - \varphi(x) = 2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \varphi \text{ est une solution de (E)}$$

$$b- (E'): y' - y = 0$$

l'ensemble des solutions de (E') est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x$; $\lambda \in \mathbb{R}$

c) Déterminons la solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = 1$

D'après la question 2-a) on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) - 2x = \lambda e^x \text{ soit } \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \lambda e^x + 2x$$

$$\text{Par ailleurs } \varphi(0) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \text{ d'où } \varphi(x) = 2x + e^x. \text{ On a donc : } \varphi: x \mapsto 2x + e^x$$

Partie B :

3°) a- Etudions les variations f

• Soit D_f le domaine de définition de f on a : $D_f =$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 + e^x. \forall x \in \mathbb{R}$

$$2 + e^x > 0 \text{ par suite } f \text{ est strictement croissante sur}$$

• Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b- Démontrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc elle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

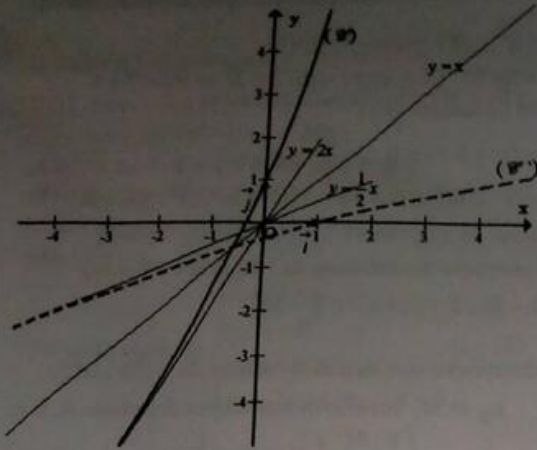
c- Etudions les branches infinies de (γ)

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à (γ) au voisinage de $-\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{e^x}{x} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Donc (γ) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$



4°) Démontrons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique x_0 vérifiant $-1 < x_0 < 0$

$$g(x) = f(x) - x; \quad g(x) = x + e^x$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 + e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc il existe un unique réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$ or $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$, donc l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique x_0 . De plus

$$\text{on a : } g(-1) \times g(0) = \left(-1 + \frac{1}{e}\right) < 0 \quad \text{d'où on a :}$$

$$-1 < x_0 < 0$$

$$5^\circ) h = f^{-1}$$

a- Justifions que $h(x_0) = x_0$

$$f(x_0) = x_0 \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(x_0) = h(x_0) \quad \text{d'où} \quad h(x_0) = x_0$$

b- Démontrons que $\forall x \in]-\infty; x_0], h(x) \in]-\infty; x_0]$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $f^{-1} = h$ est strictement croissante sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ par conséquent en particulier h est strictement croissante sur $]-\infty; x_0]$

On a donc :

$$x \leq x_0 \Rightarrow h(x) \leq h(x_0)$$

$$\Leftrightarrow h(x) \leq x_0 \quad (\text{car } h(x_0) = x_0)$$

$$\Leftrightarrow h(x) \in]-\infty; x_0] \quad \text{en conclusion} \quad \forall x \in]-\infty; x_0],$$

$$h(x) \in]-\infty; x_0]$$

6°) a- Démontrons que $\forall x \in]-\infty; x_0], \text{ on a : } 0 < h'(x) < \frac{1}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc $f'(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors la réciproque h est dérivable sur

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in]-\infty; x_0], \text{ on a : } h'(x) = \frac{1}{f'(h(x))} = \frac{1}{2 + e^{h(x)}} \quad \text{et}$$

$$0 < \frac{1}{2 + e^{h(x)}} < \frac{1}{2} \quad \text{car } 2 + e^{h(x)} > 2. \quad \text{D'où}$$

$$\forall x \in]-\infty; x_0], \text{ on a : } 0 < h'(x) < \frac{1}{2}$$

b- Démontrons que pour tout nombre x appartenant

$$]-\infty; x_0]; \text{ on a : } |h(x) - x_0| \leq \frac{1}{2} |x - x_0|$$

h est dérivable sur $]-\infty; x_0]$ et $\forall x \in]-\infty; x_0]$ on a :

$0 < h'(x) < \frac{1}{2}$ par suite $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis on a : $\forall x \in]-\infty; x_0];$

$$|h(x) - h(x_0)| \leq \frac{1}{2} |x - x_0|; \quad h(x_0) = x_0 \quad \text{d'où}$$

$$\forall x \in]-\infty; x_0]; \text{ on a : } |h(x) - x_0| \leq \frac{1}{2} |x - x_0|$$

Partie C :

7°) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in]-\infty; x_0]$

. On a : $U_0 \in]-\infty; x_0]$ (car $-1 < x_0$)

. Supposons que pour k donné et $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_k \in]-\infty; x_0].$$

$$U_k \in]-\infty; x_0] \Rightarrow h(U_k) \in]-\infty; x_0]$$

(Car $\forall x \in]-\infty; x_0], h(x) \in]-\infty; x_0]$)

. $U_{k+1} \in]-\infty; x_0]$ car $h(U_k) = U_{k+1}$ En conclusion, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in]-\infty; x_0]$$

8°) a- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2} |U_n - x_0|$

$$|U_{n+1} - x_0| = |h(U_n) - x_0| \quad \text{et d'après 6°) b- on a :}$$

$$|h(U_n) - x_0| \leq \frac{1}{2} |U_n - x_0| \quad \text{d'où} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|U_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2} |U_n - x_0|$$

b- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0|$$

$$|U_1 - U_0| \leq \frac{1}{2} |U_0 - x_0| \quad \text{or} \quad \frac{1}{2} |U_0 - x_0| \leq |U_0 - x_0| \quad \text{donc}$$

$$|U_1 - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |U_0 - x_0|$$

. Supposons que pour k donné et $k \in \mathbb{N}$ on ait

$$|U_{k+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |U_0 - x_0|$$

$$|U_{k+2} - x_0| \leq \frac{1}{2} |U_{k+1} - x_0| \text{ (d'après 8°a-) et}$$

$$|U_{k+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |U_0 - x_0| \text{ donc}$$

$$|U_{k+2} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} |U_0 - x_0|$$

En conclusion on a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0|$$

c- Dédudons que (U_n) est convergente et précisons sa limite

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0| \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0| = 0 \text{ on en déduit que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = x_0$$

d'où la suite (U_n) est convergente et sa limite est x_0

Sujet 29 : Bac BENIN 2001 série D (PI)

Exercice 1 :

1°) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$u^2 - (-11 + i)u + 32 - 4i = 0$$

$\Delta = (-11 + i)^2 - 4(32 - 4i) = -8 - 6i = (1 - 3i)^2$
une racine carrée de Δ est $1 - 3i$. Les solutions de l'équation sont : $u_1 = -6 + 2i$ et $u_2 = -5 - i$

Soit S_1 l'ensemble des solutions : $S_1 = \{-6 + 2i; -5 - i\}$

2°) a- Démontrons que pour tout nombre complexe z , on a :

$$\begin{aligned} P(z) &= [z^2 - (4-i)z]^2 - (-11+i)[z^2 - (4-i)z] + 32 - 4i \text{ posons} \\ f(z) &= [z^2 - (4-i)z]^2 - (-11+i)[z^2 - (4-i)z] + 32 - 4i \\ &= z^4 - 2(4-i)z^3 + [(4-i)z]^2 - (-11+i)z^2 + (-11+i)(4-i)z + 32 - 4i \\ &= z^4 - 2(4-i)z^3 + (15-8i+11-i)z^2 + (-44+15i+1)z + 32 - 4i \\ &= z^4 - 2(4-i)z^3 + (26-9i)z^2 - (43-15i)z + 32 - 4i = P(z) \text{ d'où} \\ \forall z \in \mathbb{C}, P(z) &= [z^2 - (4-i)z]^2 - (-11+i)[z^2 - (4-i)z] + 32 - 4i \end{aligned}$$

b- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

D'après 1°) et 2°) a- on a :

$$\begin{aligned} (P(z) = 0) &\Leftrightarrow [z^2 - (4-i)z = -6 + 2i \text{ ou } z^2 - (4-i)z = -5 - i] \\ &\Leftrightarrow [z^2 - (4-i)z + 6 - 2i = 0 \text{ ou } z^2 - (4-i)z + 5 + i = 0] \end{aligned}$$

Posons (E_1) l'équation : $z^2 - (4-i)z + 6 - 2i = 0$ et (E_2)

l'équation $z^2 - (4-i)z + 5 + i = 0$

Résolvons l'équation (E_1)

$$z^2 - (4-i)z + 6 - 2i = 0$$

$$\Delta = (4-i)^2 - 4(6-i) = -9 = (3i)^2$$

Les solutions de (E_1) sont : $z_1 = 2 - 2i$ et $z_2 = 2 + i$

$$\text{Résolvons l'équation } (E_2)$$

$$z^2 - (4-i)z + 5 + i = 0$$

$$\Delta = (4-i)^2 - 4(5+i) = -5 - 12i = (2-3i)^2$$

Les solutions de (E_2) sont : $z_3 = 1 + i$ et $z_4 = 3 - 2i$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$

$$S_2 = \{2 - 2i; 2 + i; 1 + i; 3 - 2i\}$$

3°) a- Déterminons une mesure en radians de $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$

Soit z_A, z_B et z_C les affixes respectives des points A, B, C.

On a :

$$\begin{aligned} \text{mes}(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) &= \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &= \arg(3i) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Une mesure en radian de $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$ est $\frac{\pi}{2}$

b- Equation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC

une mesure de $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$ est $\frac{\pi}{2}$; donc le triangle ABC est rectangle en B. Par suite le cercle (C) à lui circonscrit a pour centre I le milieu du segment $[AC]$ et pour rayon $\frac{AC}{2}$. On a :

$$I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ et } \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

d'où une équation cartésienne de (C) est :

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

Exercice 2 :

1°) Déterminons l'ensemble (Δ)

Soit $M \in E$

$$\begin{aligned} M \in (\Delta) &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0} \text{ par suite } (\Delta) \text{ est une droite} \end{aligned}$$

passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$

2°) Déterminons une représentation paramétrique de (Δ)

Une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3°) a- Déterminons une équation cartésienne du plan (P)

Le plan (P) est orthogonal à (Δ) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de

(Δ) donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à (P). On a : (P)

$$: x - 2y + 2z + d = 0 \quad (d \in \mathbb{R})$$

$$A \in (P) \Leftrightarrow -4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4 \text{ d'où}$$

$$(P) : x - 2y + 2z + 4 = 0$$

b- Calculons les coordonnées du point I.

Soit $I(x_I; y_I; z_I)$

$$I \in (\Delta) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 3 + t \\ y_I = -2t \\ z_I = 4 + 2t \\ x_I - 2y_I + 2z_I + 4 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{On trouve : } t = -\frac{5}{3} ; \text{ d'où } I\left(\frac{4}{3}; \frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

4°) a- Démontrons que (Δ') n'est pas orthogonal à (P).

$$\vec{u}(1; -2; 2) \text{ et } \vec{v}(2; 1; -1)$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = 5\vec{j} + 5\vec{k} ; \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \text{ donc } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas}$$

colinéaires ; d'où la droite (Δ') n'est pas orthogonal à (P).

b- Déterminons une équation cartésienne de (P')

(Δ) $\perp$ (P) et (P') $\perp$ (P') donc (Δ) // (P'). Par conséquent $\vec{u}$ est un vecteur de (P')

(Δ') $\subset$ (P') donc $\vec{v}$ est un vecteur de (P').

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de (P') et $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ donc

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal à (P').

$$\text{On a : } (P') : 5y + 5z + d = 0 ; d \in \mathbb{R}. \text{ Or } I \in (P') \text{ donc}$$

$$d' = -20 \text{ d'où } (P') : y + z - 4 = 0$$

c- Déterminons un repère de (D) = (P) $\cap$ (P')

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace

$$\text{On a : } M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z + 4 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

Donc (D) est la droite passant par $J(4; 4; 0)$ et dirigée par : $\vec{w}(-4; -1; 1)$. Ce qui signifie que (J; $\vec{w}$) est un repère de (D)

Problème:

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

Partie A:

1°) a- Déterminons l'ensemble de définition D de f

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \geq 0 \text{ et } x + \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \right\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$$

$$\sqrt{x^2 + 1} + x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = -x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = x^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = 0 \text{ (absurde) donc } \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\sqrt{x^2 + 1} + x \neq 0 \text{ d'où } D = \mathbb{R}$$

b- déterminons les limites aux bornes de D

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = +\infty \text{ or}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

c- Déterminons la fonction dérivée première de f.

La fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x + \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \text{ donc la fonction } u \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \text{ est}$$

dérivable sur $\mathbb{R}$ et par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, u'(x) &= \frac{-\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)} \exp\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

d- Dressons le tableau de variation de f

$$\sqrt{x^2 + 1} + x \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \leq -x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2 + 1 \leq x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 \leq 0 \text{ (impossible)} \end{cases}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} + x > 0$ et par ailleurs $\forall x \in \mathbb{R},$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0 \text{ et } \exp\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) > 0 \text{ d'où, } \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f'(x) < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	1

2°) a- Etudions les branches infinies de (C)

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est

asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ?$$

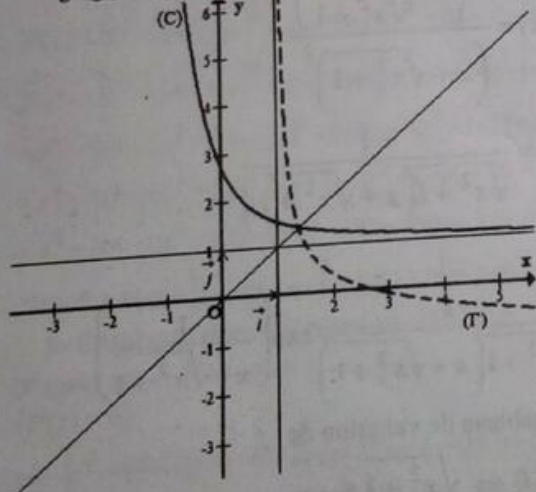
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{(\sqrt{x^2+1}-x)}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} e^{\sqrt{x^2+1}} = -\infty$$

$$\text{Car : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^{-x}}{(-x)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\sqrt{x^2+1}} = +\infty \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

b- Construisons (C)



3°) a- Déterminons $K = f(\mathbb{R})$

f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc

$$f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[=]1; +\infty[\text{ donc}$$

$$K =]1; +\infty[$$

b- Démontrons que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur K

f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = K$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur K d'où f est une bijection.

c- Construisons (Γ)

(Voir figure)

(Γ) est la courbe en pointillé

Partie B :

$$g(x) = \ln[f(x)] = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

4°) Démontrons que pour tout élément $x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$, on a :

$$\frac{1}{4} \leq g(x) \leq 1$$

$$\frac{1}{4} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{16} \leq x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} + 1 \leq x^2 + 1 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{17}}{4} \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{17}}{4} \leq x + \sqrt{x^2+1} \leq 1+\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{2}} \leq \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \leq \frac{4}{1+\sqrt{17}}$$

Or $1+\sqrt{2} < 4$, $\sqrt{17} > 4$ donc $1+\sqrt{17} > 5$ par suite

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{1+\sqrt{2}} \text{ et } \frac{4}{1+\sqrt{17}} < \frac{4}{5} < 1$$

Donc $\frac{1}{4} \leq g(x) \leq 1$ d'où $\forall x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$, on a : $\frac{1}{4} \leq g(x) \leq 1$

5°) Déterminons k

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})}$$

$$|g'(x)| = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} g(x)$$

$$\text{Or d'après 4°), } x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{17}}{4} \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2} \\ \frac{1}{4} \leq g(x) \leq 1 \end{cases}$$

suite, pour tout x élément de $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ on a :

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \leq |g'(x)| \leq \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{4\sqrt{17}}{17} \text{ or } \frac{4\sqrt{17}}{17} \in]0; 1[\text{ donc on peut choisir}$$

$$k = \frac{4\sqrt{17}}{17}. \text{ Ainsi pour tout } x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right], \text{ on a : } |g'(x)| \leq k$$

$$\text{avec } k = \frac{4\sqrt{17}}{17} \text{ et } k \in]0; 1[$$

6°) Démontrons que l'équation $g(x) = x$ admet une solution

unique a appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right], \text{ on a :}$$

$$g(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 1 = 4x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$g(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ or } \frac{\sqrt{3}}{3} \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \text{ donc l'équation}$$

$g(x) = x$ admet une solution unique a appartenant à

$$\text{l'intervalle } \left[\frac{1}{4}; 1\right], \left(a = \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$7^\circ) (u_n): \begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$a- \text{ Démontrons que } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4} \leq u_n \leq 1$$

$$\bullet u_0 = \frac{1}{4} \text{ donc } \frac{1}{4} \leq u_0 \leq 1$$

$$\bullet \text{ Supposons que pour } n \text{ élément de } \mathbb{N}, \frac{1}{4} \leq u_n \leq 1$$

$$u_n \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \Leftrightarrow g(u_n) \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \text{ (d'après 4°) donc}$$

$$u_n \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \Leftrightarrow u_{n+1} \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \text{ En conclusion, } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{1}{4} \leq u_n \leq 1$$

$$b- \text{ Démontrons que } \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - a| \leq k|u_n - a|$$

$$- g \text{ est dérivable sur } \left[\frac{1}{4}; 1\right] \text{ et } \forall x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \text{ on a :}$$

$$|g'(x)| \leq k$$

$$- \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \text{ et } a \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \text{ donc d'après le}$$

théorème des inégalités des accroissements finis on a :

$$|g(u_n) - g(a)| \leq k|u_n - a| \text{ or } g(u_n) = u_{n+1} \text{ et } g(a) = a$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - a| \leq k|u_n - a|$$

$$c- \text{ Dédudons que } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } |u_n - a| \leq k^n$$

$$\bullet \text{ Pour } n = 0, |u_0 - a| = \left|\frac{1}{4} - a\right|$$

$$\frac{1}{4} \leq a \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -a \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq u_0 - a \leq 0 \text{ donc}$$

$$|u_0 - a| \leq \frac{3}{4}$$

$$k^0 = 1 \text{ et } \frac{3}{4} < 1 \text{ donc } |u_0 - a| \leq k^0$$

$\bullet$ Supposons que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$,

$$|u_n - a| \leq k^n$$

Par hypothèse, $|u_{n+1} - a| \leq k|u_n - a|$ donc

$$|u_{n+1} - a| \leq k(k^n) \text{ d'où } |u_{n+1} - a| \leq k^{n+1}$$

En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq k^n$

d- Démontrons que la suite (u_n) est convergente et précisons sa limite

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq k^n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0 \text{ car } k \in]0; 1[\text{ on en}$$

dédud que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ d'où la suite (u_n) est convergente et sa limite est a

Sujet 30 : Bac BENIN 2002 série D (PI)

Exercice 1 :

1°) a- Vérifions que I est un point de (D)

$$\vec{u}(1; 1; 1) \text{ et } \vec{AI}(-3; -2; -3) \text{ donc}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{AI} = -\vec{j} + \vec{k} = \vec{v} \text{ d'où } I \in (D)$$

b- Démontrons que M est un point de (D) si et seulement si

$$\vec{u} \wedge \vec{IM} = \vec{0}$$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{AM} = \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{AM} = \vec{u} \wedge \vec{AI} \text{ (car } \vec{u} \wedge \vec{AI} = \vec{v} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \wedge (\vec{AM} - \vec{AI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{IM} = \vec{0}$$

c- Dédudons de b) que (D) est une droite dont nous précisons un repère

$$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \overrightarrow{IM} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{IM} \text{ sont colinéaires avec } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ par}$$

conséquent (D) est la droite de repère $(I; \vec{u})$

2°) a- Démontrons que (Δ) est perpendiculaire à (P)

$\vec{u}(1; 1; 1)$ est à la fois un vecteur directeur de (Δ) et un vecteur normal à (P) donc (Δ) est perpendiculaire à (P)

b- Calculons les coordonnées de H

$$H \in (\Delta) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H + 2 = y_H = z_H \\ x_H + y_H + z_H + 2 - 3\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_H = \sqrt{3} - 2; y_H = z_H = \sqrt{3} \text{ d'où les}$$

coordonnées de H sont $(\sqrt{3} - 2; \sqrt{3}; \sqrt{3})$

3°) a- Démontrons que A, B et C appartiennent à un même plan (Q)

Dans l'espace, il existe toujours au moins un plan contenant trois points; donc A, B et C appartiennent à un même plan (Q)

b- Déterminons une équation cartésienne de (Q)

$(\Delta) = (BC)$ et B et C sont deux points distincts de (Q) donc (Δ) est contenue dans le plan (Q); par suite I est un point de

(Q) et $\vec{u}$ est un vecteur de (Q) car $(I; \vec{u})$ est un repère de

(Δ) . On a : $(\Delta): x + 2 = y = z$ et $x_A + 2 = 3; y_A = 2$ et $z_A = 3$

On a : $x_A + 2 \neq y_A$ donc $A \notin (\Delta)$ donc $\overrightarrow{AI}$ et $\vec{u}$ sont deux

vecteurs non colinéaires de (Q); par suite $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AI}$ est un vecteur normal à (Q);

or $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AI} = \vec{v}$ et $\vec{v}(-1; 0; 1)$ donc

(Q) : $-x + z + d = 0$. $A \in (Q) \Leftrightarrow d = -2$ d'où

(Q) : $-x + z - 2 = 0$

Exercice 2 :

1°) Justifions que V_n existe.

La fonction $t \mapsto t + 1$ est continue sur $[0; 1]$ et $\forall t \in [0; 1]$,

$t + 1 > 0$ donc la fonction $t \mapsto \ln(t + 1)$ est continue sur

$[0; 1]$; par suite la fonction $t \mapsto t^n \ln(t + 1)$ est continue sur

$[0; 1]$ comme produit de deux fonctions continues sur $[0; 1]$

d'où V_n existe.

2°) a- Démontrons que pour tout entier non nul et pour

$x \in [0; 1]$ on a : $0 \leq x^n \ln(1 + x) \leq x^n \ln 2$ et

$(x - 1) \ln(1 + x) \leq 0$

$\forall x \in [0; 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$1 \leq 1 + x \leq 2$ donc $0 \leq \ln(1 + x) \leq \ln 2$ et $0 \leq x^n \leq 1$ par

suite $0 \leq x^n \ln(1 + x) \leq x^n \ln 2$

$1 + x \geq 1 \Rightarrow \ln(1 + x) \geq 0$; or $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow$

$-1 \leq x - 1 \leq 0$ par suite $(x - 1) \ln(1 + x) \leq 0$

b- Vérifions que (V_n) est une suite décroissante

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$V_{n+1} - V_n = \int_0^1 t^{n+1} (t - 1) \ln(1 + t) dt \text{ or d'après 2°) a-}$$

$\forall t \in [0; 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $(t - 1) \ln(1 + t) \leq 0$ et

$t^n > 0$ donc $t^n (t - 1) \ln(1 + t) \leq 0$; de plus la fonction

$t \mapsto t^n (t - 1) \ln(1 + t)$ est continue sur $[0; 1]$

il s'ensuit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n \leq 0$ d'où la suite

(V_n) est décroissante.

c- Dédudons-en que (V_n) est convergente

la fonction $t \mapsto t^n \ln(1 + t)$ est continue sur $[0; 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$t^n \ln(1 + t) \geq 0$; donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n \geq 0$ par suite (V_n) est

minorée. (V_n) étant décroissante et minorée, alors (V_n) est convergente.

3°) a- Dédudons de 2°) a- que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq V_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

Les fonctions : $t \mapsto t^n \ln 2$ et $t \mapsto t^n \ln(1 + t)$ sont

continues sur $[0; 1]$ et d'après 2°) a- $\forall t \in [0; 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$0 \leq t^n \ln(1 + t) \leq t^n \ln 2$ donc $0 \leq V_n \leq \int_0^1 t^n \ln 2 dt$ soit

$$0 \leq V_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

b- Calculons la limite de (V_n) .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq V_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

Problème :

Partie A :

1°) a- Calculons les limites de h aux bornes de I .

$h(x) = -x + 1 - 2 \ln x$; $I =]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 1) = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln x = -\infty \end{cases}$$

b- Dressons le tableau de variation de h

h est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $h'(x) = -1 - \frac{2}{x}$

$\forall x \in I$, $h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur I .

x	0	+	+	+
h(x)	-	-	-	-
h(x)	-	-	-	-

2°) Calculons $h(1)$ déterminons le signe de $h(x)$

$h(1) = 0$ h est continue et strictement décroissante sur

$]0; +\infty[$ et $h(1) = 0$ donc :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[, & h(x) > 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, & h(x) < 0 \\ & h(1) = 0 \end{cases}$$

Partie B :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}(x + \ln x)$$

3°) a- Calculons les limites de f aux bornes de I

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}(x + \ln x)$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln x) = -\infty \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{0^+} f = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) = 0 \text{ car : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \lim_{+\infty} f = 0$$

b- Étudions le sens de variations de f

f est dérivable sur I et $\forall x \in I$,

$$f'(x) = \frac{-x + 1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{h(x)}{x^3}$$

donc $f'(x)$ a le même signe que $h(x)$ car : $\forall x \in I$, $x^3 > 0$

$$\text{par suite : } \begin{cases} \forall x \in]0; 1[, & f'(x) > 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, & f'(x) < 0 \\ & f'(1) = 0 \end{cases}$$

Alors f est strictement croissante sur $]0; 1]$ et f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

c- Dressons le tableau de variation de f

x	0	1	+	+	+
f'(x)	-	0	-	-	-
f(x)	-	1	-	-	-

4°) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$

- f est continue et strictement croissante sur $]0; 1]$ et $f([0; 1]) =]-\infty; 1]$ or $0 \in]-\infty; 0]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; 1]$ (1)
- f est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et $f([1; +\infty[) =]0; 1]$ et $0 \notin]0; 1]$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[1; +\infty[$ (2); de (1) et (2) on déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$

- De plus $[0,5; 0,6] \subset I$ et $\begin{cases} f(0,5) = -0,772 < 0 \\ f(0,6) = 0,247 > 0 \end{cases}$ donc $0,5 < \alpha < 0,6$

5°) a- Déterminons J et démontrons que g est une bijection

f est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ donc

$$f([1; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(1) \right] =]0; 1]$$
 donc $J =]0; 1]$

f étant continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et $f([1; +\infty[) =]0; 1]$ alors g est une bijection

b- Résolvons dans J l'équation $g^{-1}(x) = e$

$$e \in]0; 1[\text{ donc } g^{-1}(x) = e \Leftrightarrow x = f(e)$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-2} + e^{-1}$$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $g^{-1}(x) = e$

$$\text{dans } J; S = \{e^{-2} + e^{-1}\}$$

c- Calculons $(g^{-1})(e^{-2} + e^{-1})$

$$\begin{aligned} (g^{-1})(e^{-2} + e^{-1}) &= \frac{1}{g^{-1}(e^{-2} + e^{-1})} \\ &= \frac{1}{g'(e)} = \frac{-e^3}{e+1} \end{aligned}$$

$$(g^{-1})(e^{-2} + e^{-1}) = \frac{-e^3}{e+1}$$

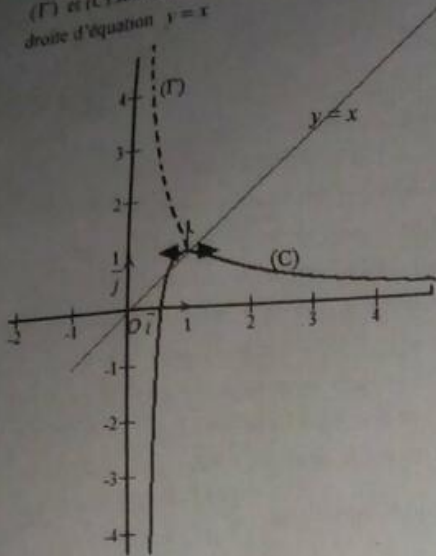
6°) Construisons (C) et (Γ)

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$

est asymptote à (C)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

(Γ) et (C) sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$



Sujet 31 : Bac BENIN 2003 série D (PI)

Exercice 1 :

1°) Calculons $(\sqrt{3} - i)^2$

$$(\sqrt{3} - i)^2 = 3 - 1 - 2i\sqrt{3} \text{ donc } (\sqrt{3} - i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$$

2°) Résolvons dans C, l'équation

$$z^2 - (\sqrt{3} + 3i)z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$$

$$\Delta = (\sqrt{3} + 3i)^2 - 4(-2 + 2i\sqrt{3}) \text{ donc}$$

$$\Delta = 2 - 2i\sqrt{3} = (\sqrt{3} - i)^2 \text{ (d'après 1°)}$$

$$\text{On a : } z_1 = \frac{\sqrt{3} + 3i + \sqrt{3} - i}{2} = \sqrt{3} + i ;$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3} + 3i - \sqrt{3} - i}{2} = 2i \text{ d'où}$$

$$S_C = \{\sqrt{3} + i ; 2i\}$$

Forme trigonométrique des solutions

$$\text{On a : } \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \text{ et}$$

$$2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

3°) a- Déterminons la nature du triangle OAB.

$$OA = |\sqrt{3} + i| = 2 ; OB = |2i| = 2 \text{ et}$$

$$AB = |2i - (\sqrt{3} + i)| = |i - \sqrt{3}| = 2 \text{ on a : } OA = OB = AB$$

par suite le triangle AOB est équilatéral.

b- Vérifions que $f(B) = A$

$$e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}} \left(2e^{i\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= 2e^{i\frac{\pi}{6}} = z_A \text{ d'où } f(B) = A$$

c- Ecriture de l'axe C' sous forme trigonométrique et algébrique

• Ecriture trigonométrique de $z_{C'}$

$$z_{C'} = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_C$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{3}} (-2 + 2i) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} \text{ d'où}$$

$$z_{C'} = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

• Ecriture algébrique de $z_{C'}$

$$z_{C'} = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-2 + 2i)$$

$$z_{C'} = (-1 + \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} + 1)$$

Déduisons les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

$$\text{De ce qui précède on a : } \begin{cases} 2\sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{12} = -1 + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{12} = \sqrt{3} + 1 \end{cases} \text{ d'où}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Exercice 2 :

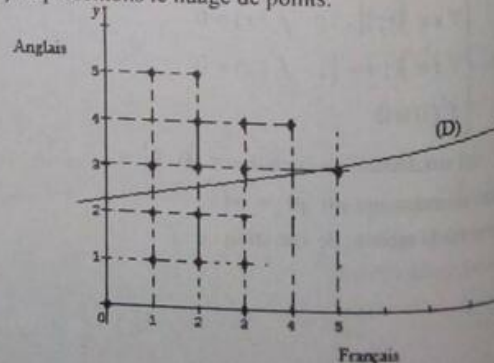
1°) Tableau des effectifs de X

X_j	0	1	2	3	4	5	Total
Eff	1	6	7	9	1	1	25
n_j							

Tableau des effectifs de Y

Y_j	0	1	2	3	4	5	Total
Eff	2	4	4	8	5	2	25
n_j							

2°) Représentons le nuage de points.



3°) a- Calcule les coordonnées du point moyen G du nuage.

$G(\bar{x}; \bar{y})$ avec $\bar{x} = \frac{1}{25} \sum n_i x_i$ et $\bar{y} = \frac{1}{25} \sum n_j y_j$ on a :

$\bar{x} = 2,24$ et $\bar{y} = 2,64$ d'où $G(2,24; 2,64)$

b- Calculons $\text{cov}(X, Y)$ et $V(X)$

$\text{cov}(X, Y) = \left(\frac{1}{25} \sum n_{ij} x_i y_j \right) - \bar{x} \bar{y} = 0,2064$

$V(X) = \left(\frac{1}{25} \sum n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2 = 1,2224$

4°) a- Déterminons une équation de la droite de régression (D) de y en x.

(D): $y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$ on a :

$a = 0,1688$ et $b = 2,2618$ d'où

(D): $y = 0,1688x + 2,2618$

b- Traçons (D) (Voir figure)

5°) Calculons le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y)

$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X) \times \sigma(Y)} ; r = 0,1351$

$|r| < 0,87$ donc Il y a une mauvaise corrélation entre X et Y.

Problème :

1°) a- Déterminons l'ensemble de définition D de f

$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2x - 1 \neq 0 \right\}$ donc $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

b- Calculons les limites de f aux bornes de D.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} - \frac{1}{2} \ln(-2x+1)$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} - \frac{1}{2} \ln(-x) - \frac{1}{2} \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) \left[\frac{e^{-x}}{\ln(-x)} - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{2} \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$

Car : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln 2}{2} \end{cases}$ d'où

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} |2x-1| = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$

2°) a- Déterminons la fonction dérivée première f' et la dérivée seconde f'' de f.

• f est dérivable en tout point de D comme somme de fonctions dérivables sur D

$\forall x \in D, f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{2x-1}$

• f' est dérivable en tout point de D comme somme de fonctions dérivable sur D.

$\forall x \in D, f''(x) = e^{-x} + \frac{1}{(2x-1)^2}$

b- Etudions le sens de variation de f'

$\forall x \in D, f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur

$\left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$ et sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

c- Etudions le signe de f'(x)

$f'(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'(x)		+		+
f(x)			0	

On a donc : $\forall x \in \left] -\infty; 0 \right[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[, f'(x) < 0$

$\forall x \in \left] 0; \frac{1}{2} \right[, f'(x) > 0$ et $f'(0) = 0$

3°) a- Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	-
f(x)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

b- Etudions les branches infinies de (C).

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{\ln(-2x+1)}{-2x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e^{-x}}{-x} + \frac{-2x+1}{-2x} \times \frac{\ln(-2x+1)}{(-2x+1)} \right) = -\infty$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{2} \times \frac{\ln(2x-1)}{(2x-1)} \times \frac{2x-1}{x} \right) = 0 \text{ alors la}$$

courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = +\infty \text{ donc la droite d'équation } x = \frac{1}{2} \text{ est}$$

asymptote à (C)

4°) a- Démontrons que (C) coupe une seule fois l'axe des abscisses en α et $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

- D'après les variations de f , on a : $\forall x \in]-\infty; \frac{1}{2}[$,

$f(x) \geq 1$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de

solutions dans $]-\infty; \frac{1}{2}[$

- f est continue et strictement décroissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$

et $f\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) = \mathbb{R}$ et puisque $0 \in \mathbb{R}$, alors

l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]\frac{1}{2}; +\infty[$

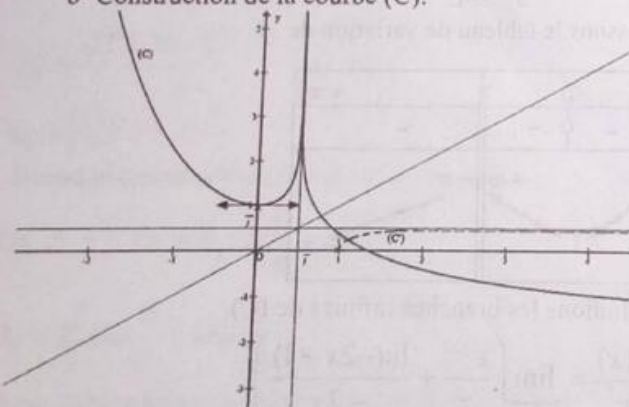
De plus 1 et $\frac{3}{2}$ appartiennent à $]\frac{1}{2}; +\infty[$ et

$f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ donc $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ par suite (C) coupe l'axe

des abscisses une et une seule fois au point d'abscisse α

avec $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

b- Construction de la courbe (C).



5°) Calculons A

$$A = \left(\int_1^\alpha f(x) dx \right) u.a, \text{ u.a} = \text{unité d'aire}$$

$$\int_1^\alpha f(x) dx = \int_1^\alpha \left(e^{-x} - \frac{1}{2} \ln(2x-1) \right) dx$$

$$= \int_1^\alpha e^{-x} dx - \frac{1}{2} \int_1^\alpha \ln(2x-1) dx$$

$$\bullet \int_1^\alpha e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_1^\alpha = -e^{-\alpha} + e^{-1}$$

$$\bullet \text{ calcul de } \int_1^\alpha \ln(2x-1) dx$$

Posons $u'(x) = 1$ et on peut prendre $u(x) = x$

$$v(x) = \ln(2x-1) \Rightarrow v'(x) = \frac{2}{2x-1}$$

$$\text{Donc } \int_1^\alpha \ln(2x-1) dx = \left[\left(x - \frac{1}{2} \right) \ln(2x-1) - x \right]_1^\alpha$$

$$= \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \ln(2\alpha-1) - \alpha + 1$$

$$A = \left(-e^{-\alpha} + e^{-1} - \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \ln(2\alpha-1) + \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \right) u.a$$

Exprimons l'aire A en fonction de α et $e^{-\alpha}$

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} - \frac{1}{2} \ln(2\alpha-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(2\alpha-1) = e^{-\alpha} \text{ donc}$$

$$A = \left[- \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) e^{-\alpha} + e^{-1} + \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \right] u.a$$

6°) Démontrons que g admet une application réciproque g^{-1}

f est continue et strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2} \right]$ et

$f\left(\left[0; \frac{1}{2} \right]\right) = [1; +\infty[$, g est une bijection de $\left[0; \frac{1}{2} \right]$ sur

$[1; +\infty[$, par suite elle admet une bijection réciproque g^{-1}

définie de $[1; +\infty[$ sur $\left[0; \frac{1}{2} \right]$.

7°) a- Justifions que (C') admet une demi-tangente verticale en un point d'abscisse 1.

$$g(0) = f(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \text{ donc la courbe}$$

représentative de g admet une demi-tangente horizontale au point $(0; 1)$ donc (C') admet au point de coordonnées $(1; 0)$ une demi-tangente verticale.

b- Précisons les branches infinies de (C').

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} g(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g^{-1}(x) = \frac{1}{2} \text{ d'où la droite}$$

d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote à (C') au voisinage de $+\infty$.

c- Construction de la courbe (C')

La courbe (C') est tracée dans le même repère que (C) . (C') est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice) de la partie de la courbe de (C) dans l'intervalle

$$\left[0; \frac{1}{2}\right]$$

Sujet 32 : Bac BENIN 2004 série D (PI)

Exercice 1 :

1°) Déterminons α , β et γ

$(E): \alpha z'' + \beta z' + \gamma z = 0$ a pour équation caractéristique

$$(2r+1)^2 = 0$$

$$(2r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2}$ est la seule solution de l'équation caractéristique associée à (E) . Or (E) a pour équation caractéristique

$$\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0. \text{ Donc on a : } \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}^* \\ \frac{1}{4} = \frac{\gamma}{\alpha} \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \alpha = 4t \\ \beta = 4t, t \in \mathbb{R}^*. \text{ On peut prendre } \alpha = \beta = 4 \text{ et } \gamma = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

2°) a- Ecrivons et résolvons l'équation (E)

$$(\alpha = \beta = 4, \gamma = 1) \Leftrightarrow (\gamma = 1; \alpha = \beta = 4)$$

$$\text{On a : } (E): 4z'' + 4z' + z = 0$$

L'équation caractéristique associée à (E) est

$$4r^2 + 4r + 1 = 0 \text{ et son discriminant } \Delta = 0 \text{ alors}$$

$$4r^2 + 4r + 1 = 0 \Leftrightarrow r_0 = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \text{ d'où la solution}$$

générale de (E) est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto (Ax + B)e^{-\frac{x}{2}} \text{ avec } (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

b- Déterminons la solution y de (E) vérifiant les conditions indiquées

La courbe représentative de y admet en son point $M_0(0; 2)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses signifie que :

$$y(0) = 2 \text{ et } y'(0) = 0 \text{ avec } y(x) = (Ax + B)e^{-\frac{x}{2}};$$

$$(A; B) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} B = 2 \\ A - \frac{1}{2}B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases} \text{ par suite}$$

$$y: x \mapsto (x+2)e^{-\frac{x}{2}}$$

3°) a- Calculons U_n en fonction de n

$$U_n = \int_0^n h(x) dx = \int_0^n (x+2)e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = (x+2) \\ v'(x) = e^{-\frac{x}{2}} \end{cases} \text{ on a : } u'(x) = 1 \text{ et on peut prendre}$$

$$v(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} \text{ donc } U_n = \left[-2(x+2)e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^n + 2 \int_0^n e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$U_n = \left[-2(x+2)e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^n + 2 \left[-2e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^n$$

$$U_n = -2(n+2)e^{-\frac{n}{2}} + 4 - 4 \left(e^{-\frac{n}{2}} - 1 \right)$$

$$U_n = -(2n+8)e^{-\frac{n}{2}} + 8, \forall n \in \mathbb{N}$$

b- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 8$

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n - 8 = -(2n+8)e^{-\frac{n}{2}} \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$U_n - 8 < 0, \text{ par suite } \forall n \in \mathbb{N}, U_n < 8. (a)$$

La fonction $x \mapsto (x+2)e^{-\frac{x}{2}}$ est continue sur $[0; n]$ et

$$\forall x \in [0; n], (x+2)e^{-\frac{x}{2}} > 0 \text{ donc } \int_0^n (x+2)e^{-\frac{x}{2}} dx \geq 0 \text{ par}$$

suite $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$ (b)

De (a) et (b), $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 8$

c- Déterminons le signe de $U_{n+1} - U_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = \int_0^{n+1} h(x) dx - \int_0^n h(x) dx$$

$$= \int_n^{n+1} h(x) dx + \int_0^n h(x) dx$$

$$= \int_n^{n+1} h(x) dx; h \text{ est continue sur}$$

$[n; n+1]$ et $\forall x \in [n; n+1], h(x) > 0$ d'où

$$U_{n+1} - U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

d- Etudions la convergente de la suite (U_n) et calculons sa limite.

(U_n) est croissante et majorée donc elle est convergente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -2ne^{-\frac{n}{2}} - 8e^{-\frac{n}{2}} + 8 = 8 \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} -2ne^{-\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{-n}{2} \right) e^{-\frac{n}{2}} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -8e^{-\frac{n}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 8$$

Exercice 2 :

1°) Déterminons les coordonnées de K

$$z_x = h\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{3} \text{ donc on}$$

$$a: K\left(\frac{1}{3}; 0\right)$$

2°) Résolvons l'équation (E) : $h(z) = \frac{2}{3} \cos \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$h(z) = \frac{2}{3} \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} z \in \mathbb{C}^* \\ z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

Le discriminant réduit de $z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0$ est

$$\cos^2 \alpha - 1 = (i \sin \alpha)^2$$

Les solutions de (E) sont $\cos \alpha + i \sin \alpha$ et $\cos \alpha - i \sin \alpha$

3°) a- Déduisons la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E')

$$(E'): z^4 - 2z^2 \cos \alpha + 1 = 0$$

Posons $Z = z^2$

$$\text{On a : } (E') \Leftrightarrow Z^2 - 2Z \cos \alpha + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow Z = e^{i\alpha} \text{ ou } Z = e^{-i\alpha}$$

$$\bullet Z = e^{i\alpha} \Leftrightarrow z^2 = \left(e^{i\frac{\alpha}{2}} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow z = e^{i\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z = -e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow z = e^{i\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z = e^{i\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\bullet Z = e^{-i\alpha} \Leftrightarrow z^2 = \left(e^{-i\frac{\alpha}{2}} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow z = e^{-i\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z = -e^{-i\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow z = e^{-i\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z = e^{i\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

L'ensemble des solutions de (E') est :

$$\left\{ e^{i\frac{\alpha}{2}}; e^{-i\frac{\alpha}{2}}; e^{i\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right)}; e^{i\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)} \right\}$$

b- Prouvons que les solutions de (E') sont deux à deux conjuguées

$$\bullet e^{i\frac{\alpha}{2}} = \overline{e^{-i\frac{\alpha}{2}}} \text{ donc } e^{i\frac{\alpha}{2}} \text{ et } e^{-i\frac{\alpha}{2}} \text{ sont conjugués}$$

$$\bullet e^{i\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right)} = \overline{e^{i\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)}} \text{ donc } e^{i\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right)} \text{ et } e^{i\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)} \text{ sont conjugués}$$

c- Décomposons $p(x) = x^4 - 2x^2 \cos \alpha + 1$

$$\text{on a : } p(x) = \left(x - e^{i\frac{\alpha}{2}} \right) \left(x - e^{-i\frac{\alpha}{2}} \right) \left(x - e^{i\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right)} \right) \left(x - e^{i\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)} \right)$$

$$= \left[x^2 - \left(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}} \right) x + 1 \right] \left[x^2 - \left(e^{i\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right)} + e^{i\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)} \right) x + 1 \right]$$

$$\text{donc } p(x) = \left(x^2 - 2x \cos \frac{\alpha}{2} + 1 \right) \left(x^2 + 2x \cos \frac{\alpha}{2} + 1 \right)$$

4°) a- Démontrons que f est une similitude plane directe donc nous précisons le rapport.

L'écriture complexe de f est : $z' = (1-i)z + \frac{1}{3}i$ et elle sous la

forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et

$b \in \mathbb{C}$. On en déduit que f est une similitude plane directe de rapport $|1-i| = \sqrt{2}$

b- Démontrons que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie

$(1-i) \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ et $|1-i| \neq 1$ alors f est la composée d'une rotation r et d'une homothétie h. la rotation r admet :

$$\text{- Pour centre } \Omega \text{ tel que } z_{\Omega} = \frac{\frac{1}{3}i}{1-(1-i)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{- Pour angle } \theta \text{ un argument de } 1-i; \text{ on prend } \theta = -\frac{\pi}{4}$$

L'homothétie h admet pour centre $\Omega\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ et pour rapport

$$k = \sqrt{2}.$$

Problème :

$$\begin{cases} f(x) = \exp_2(x^2 - 3x + 2) & , \text{ si } x \in [0; 2] \\ f(x) = x - 1 - \frac{1}{\ln(x-2)} & , \text{ si } x \in]2; +\infty[\end{cases}$$

1°) Démontrons que $D = [0; 3[\cup]3; +\infty[$

$$D = [0; 2] \cup \{x \in]2; +\infty[\mid \ln(x-2) \neq 0\}$$

$$\ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ donc}$$

$$D = [0; 2] \cup (]2; 3[\cup]3; +\infty[) \text{ d'où } D = [0; 3[\cup]3; +\infty[$$

2°) a- Étudions la continuité de f en 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(x - 1 - \frac{1}{\ln(x-2)} \right) = 1 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\ln(x-2)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} e^{(x^2 - 3x + 2) \ln 2} = 1 \text{ et } f(2) = \exp_2(0) = 1$$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$; d'où f est

continue en 2.

b- Etudions la dérivabilité de f en 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{(x^2 - 3x + 2) \ln 2} - 1}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{(x^2 - 3x + 2) \ln 2} - 1}{(x^2 - 3x + 2) \ln 2} (x - 1) \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \ln 2 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) \ln 2 = 2 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{(x^2 - 3x + 2) \ln 2} - 1}{(x^2 - 3x + 2) \ln 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^X - 1}{X} = 1 \text{ en posant}$$

$$X = (x^2 - 3x + 2) \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \ln 2 \text{ donc } f \text{ est dérivable à gauche en 2 et}$$

$$f'_g(2) = \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[1 - \frac{1}{(x - 2) \ln(x - 2)} \right] \text{ en}$$

posant $X = x - 2$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) \ln(x - 2) = \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0 \text{ avec}$$

$$X \ln X < 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty \text{ alors } f \text{ n'est}$$

pas dérivable à droite en 2

Conclusion : f n'est pas dérivable en 2

c- Précisons les demi-tangentes éventuelles à la courbe (C) au point d'abscisse 2.

- A gauche au point d'abscisse 2, (C) admet une demi-

$$\text{tangente définie par : } \begin{cases} y = x \ln 2 - 2 \ln 2 + 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

- A droite au point d'abscisse 2, (C) admet une demi-

$$\text{tangente définie par : } \begin{cases} x = 2 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

3°) a- Précisons l'ensemble de dérivabilité de f et déterminons f' .

L'ensemble de dérivabilité de f est

$$D' = [0; 2[\cup]2; 3[\cup]3; +\infty[$$

$$D' = [0; 2[\cup]2; 3[\cup]3; +\infty[\text{ b-}$$

$$\forall x \in [0; 2[, f'(x) = (2x - 3)(\ln 2) \exp_2(x^2 - 3x + 2)$$

$$\forall x \in]2; 3[\cup]3; +\infty[, f'(x) = 1 + \frac{1}{(x - 2) \ln(x - 2)}$$

Etudions le sens de variation de f

$$\forall x \in \left[0; \frac{3}{2}\right], f'(x) < 0$$

$$\text{On a : } \forall x \in \left]\frac{3}{2}; 2\right[\cup]2; 3[\cup]3; +\infty[, f'(x) > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Il en résulte que la fonction f est strictement décroissante sur

$\left[0; \frac{3}{2}\right]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles

$\left]\frac{3}{2}; 3\right[$ et $]3; +\infty[$.

4°) a- Calculons les limites de f aux bornes de D

$$f(0) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left[x - 1 - \frac{1}{\ln(x - 2)} \right] = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \ln(x - 2) = 0 \\ \ln(x - 2) < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[x - 1 - \frac{1}{\ln(x - 2)} \right] = -\infty \text{ car :}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x - 2) = 0 \\ \ln(x - 2) > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 - \frac{1}{\ln(x - 2)} \right] = +\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x - 2)} = 0 \end{cases}$$

b- Dressons le tableau de variation de f

x	0	$\frac{3}{2}$	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	4		1	$+\infty$	$+\infty$

5°) a- Démontrons que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln(x - 2)} \right) = 0 \text{ par suite, la}$$

droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

b- Prouvons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique

* $f([0; 3]) = \left[2^{-\frac{1}{4}}; +\infty \right]$. Or $0 \notin \left[2^{-\frac{1}{4}}; +\infty \right]$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[0; 3]$.

* f est continue et strictement croissante sur $]3; +\infty[$ et $f(3; +\infty) = \mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]3; +\infty[$.

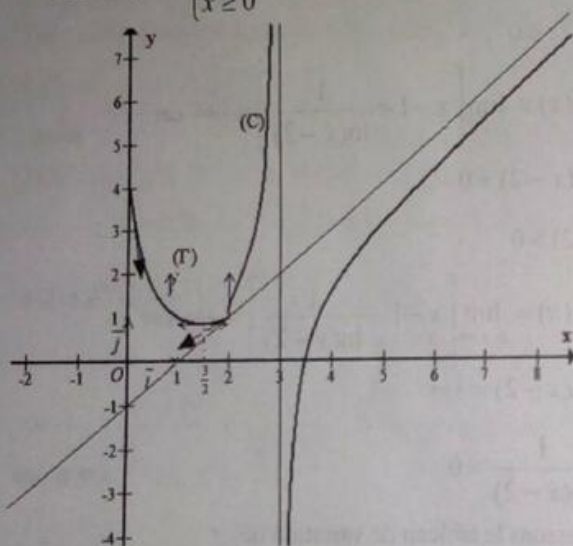
Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

Par ailleurs : $\left\{ \begin{array}{l} \frac{17}{5}; \frac{7}{2} \subset]3; +\infty[\\ f\left(\frac{17}{5}\right) < 0 \text{ et } f\left(\frac{7}{2}\right) > 0 \end{array} \right.$ d'où $\alpha \in \left] \frac{17}{5}; \frac{7}{2} \right[$

c- Construisons (C)

- La droite d'équation $x = 3$ est asymptote à (C)
- La demi-tangente à (C) à droite au point d'abscisse 0 est

définie par : $\begin{cases} y = -12x \ln 2 + 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$



6°) a- Justifions que $F(x) = \int_4^x \frac{dt}{\ln(t-2)}$ est définie et dérivable sur $[4; +\infty[$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(t-2)}$ est continue sur $[4; +\infty[$, donc

F est dérivable sur $[4; +\infty[$.

b- Etudions le sens de variation de F sur $[4; +\infty[$

$\forall x \in [4; +\infty[; F'(x) = \frac{1}{\ln(x-2)}$ or $\forall x \in [4; +\infty[$,

$\ln(x-2) > 0$ donc la fonction F est strictement croissante sur $[4; +\infty[$.

c- Encadrons $F(5)$ par la méthode des rectangles.

$h: t \mapsto \frac{1}{\ln(t-2)}$ est strictement décroissante sur $[4; +\infty[$

On a : $S_1 < F(5) < S_2$ avec

$$S_1 = 0,2[h(4,2) + h(4,4) + h(4,6) + h(4,8) + h(5)] = 1,06;$$

$$S_2 = 0,2[h(4) + h(4,2) + h(4,6) + h(4,8)] = 1,174$$

d- Calculons et encadrons l'aire demandée.

Soit A l'aire demandée.

On a : $A = \left(\int_4^5 (x-1-f(x)) dx \right) \times 4 \text{ cm}^2$ d'où

$$A = \left(\int_4^5 \frac{dx}{\ln(x-2)} \right) \times 4 \text{ cm}^2 \text{ donc } A = 4F(5) \text{ cm}^2$$

7°) a- Démontrons que g admet une application réciproque g^{-1} .

f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}; 2 \right]$ sur

$\left[2^{-\frac{1}{4}}; 1 \right]$ donc g est une bijection par suite elle admet une

application réciproque g^{-1} .

b- Déterminons l'intervalle K sur lequel g^{-1} est dérivable

g est dérivable sur $\left[\frac{3}{2}; 2 \right]$ et $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. D'où

l'ensemble de dérivabilité de g^{-1} est K

$$= g\left(\left[\frac{3}{2}; 2\right]\right) = \left[2^{-\frac{1}{4}}; 1\right].$$

8°) a- Démontrons que $A \in (\Gamma)$ et définissons un système qui définit la demi-tangente à (Γ) en A .

$$* g(2) = f(2) = 1;$$

$$g(2) = 1 \Rightarrow A(1; 2) \in (\Gamma)$$

* La demi-tangente à (Γ) au point A est définie par :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\ln 2}x - \frac{1}{\ln 2} + 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

b- Calculons $g^{-1}(x)$ pour tout nombre x appartenant

$$\left[2^{-\frac{1}{4}}; 1 \right]$$

soit $x \in \left[2^{-\frac{1}{4}}; 1 \right]$; posons $g^{-1}(x) = y; y \in \left[\frac{3}{2}; 2 \right]$

on a : $g^{-1}(x) = y \Rightarrow g(y) = x$

$$\Leftrightarrow (y^3 - 3y + 2) \ln 2 = \ln x$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 3y + 2 - \frac{\ln x}{\ln 2} = 0 \quad \text{①}$$

$\Delta = 1 + 4 \frac{\ln x}{\ln 2}$ les solutions de l'équation

⊗ sont : $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{\ln x}{\ln 2}}$ et $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{\ln x}{\ln 2}}$

or $y \in \left[\frac{3}{2}; 2 \right]$ donc $\forall x \in \left[2^{-\frac{1}{4}}; 1 \right]$,

$g^{-1}(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{\ln x}{\ln 2}}$

c- Construisons de (Γ) (Voir figure)

Sujet 33 : Bac BENIN 2005 série D (PI)

Exercice 1 :

1°) a- Déterminons les séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j)

Série marginale (x_i, n_i)

x_i	0,5	1	2	2,5
n_i	2	2	1	1

Série marginale (y_j, n_j)

y_j	2,5	3	4	5	5,5
n_j	1	1	2	1	1

b- Calculons $\bar{x}$ et $\bar{y}$

On a : $\bar{x} = \frac{1}{6} \sum n_i x_i$ on trouve $\bar{x} = 1,25$

$\bar{y} = \frac{1}{6} \sum n_j y_j$, on trouve $\bar{y} = 4$

2°) a- Dressons le tableau à double entrée de la série (x_i, y_j, n_{ij})

On a le tableau suivant :

$x_i \backslash y_j$	0,5	1	2	2,5
2,5	0	0	1	0
3	0	0	0	1
4	0	2	0	0
5	1	0	0	0
5,5	1	0	0	0

b- Déterminons la covariance du couple de caractères (x, y)

On a : $\text{cov}(x, y) = \frac{1}{6} \sum n_{ij} x_i y_j - \bar{x} \bar{y}$ soit

$\text{cov}(x, y) = -0,708$

3°) Calculons le coefficient de corrélation linéaire entre x et y et interprétons.

On a : $r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma(x) \times \sigma(y)}$ soit $r = -0,907$

$0,87 < |r| < 1$ d'où la corrélation linéaire entre x et y est forte

4°) Etablissons une équation de la droite de régression de y en x .

On a : $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$ avec $a = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma(x)}$. On trouve :

$y = -1,26x + 5,575$

5°) a- Démontrons que le bénéfice total $b(x)$ réalisé est donné par la formule : $b(x) = -1,26x^2 + 5,701x - 0,5575$

On a : bénéfice réalisé = prix de vente - frais

Donc

$b(x) = xy - 0,1y$

$= x(-1,26x + 5,575) - 0,1(-1,26x + 5,575)$ on obtient :

$b(x) = -1,26x^2 + 5,701x - 0,5575$

b- Déterminons le prix de vente d'un téléviseur permettant de réaliser un bénéfice maximal

$b(x) = -1,26x^2 + 5,70x - 0,5575$ et sa dérivée

$b'(x) = -2,52x + 5,701$ de plus on a : $-1,26 < 0$, donc le

bénéfice maximal est atteint si et seulement si : $b'(x) = 0$, soit pour $x = 2,26201587$

Par conséquent, le prix de vente d'un téléviseur permettant de réaliser le bénéfice maximal est :

$x_0 = 2,26201587 \times 100.000$ F CFA

soit $x_0 \approx 226 202$ francs CFA

Le bénéfice maximal est :

$b(x_0) = (-1,26(x_0)^2 + 5,70x_0 - 0,5575) \times 100000$ fcfca On

trouve : $b(x_0) = 639 119$ F CFA

On a : pour $x = x_0$; $y = -1,26x_0 + 5,575$, soit $y = 2,7$.

Ainsi le nombre de téléviseurs à vendre pour réaliser le bénéfice maximal est :

$y_0 = 2,7 \times 10$ soit $y_0 = 27$.

Exercice 2 :

1°) a- Etudions le sens de variation de f

f est dérivable sur $\left[0; \frac{1}{2} \right]$ et $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right]$,

$f'(x) = \frac{10}{(2x+4)^2}$

$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right]$, $f'(x) > 0$, d'où f est strictement

croissante sur I .

b- Démontrons que $\forall x \in I$, $f(x) \in I$

f étant strictement croissante sur I , on a :

$\forall x \in I$, $f(x) \in \left[f(0); f\left(\frac{1}{2}\right) \right]$, or $f(0) = \frac{1}{4}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

et $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \subset I$ par suite $\forall x \in I$, $f(x) \in I$

2°) a- Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

On a : $U_0 = 0$ et $U_0 \in I$ (a)

Soit $k \in \mathbb{N}$; si $U_k \in I$ alors $f(U_k) \in I$ (d'après 1°) b-)

Or $f(U_k) = U_{k+1}$, donc $U_k \in I \Rightarrow U_{k+1} \in I$ (b)

De (a) et (b) on déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$.

b- Etudions le sens de variation de (U_n)

On a : $U_0 = 0$ et $U_1 = \frac{1}{4}$ donc $U_0 < U_1$

Supposons que pour tout k donné, $k \in \mathbb{N}$, on ait : $U_k < U_{k+1}$

$U_k < U_{k+1} \Rightarrow f(U_k) < f(U_{k+1})$ (Car f est strictement

croissante sur I et $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I \Rightarrow U_k < U_{k+1} \Rightarrow$

$U_{k+1} < U_{k+2}$. Il en résulte que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < U_{n+1}$. Ainsi la suite (U_n) est croissante.

c- Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente et calculons sa limite l

D'après 2°) a- et b-, la suite (U_n) est croissante et majorée par

conséquent elle est convergente ; de plus : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

et f est continue sur I , donc la limite l de la suite (U_n) est

solution du système : $\begin{cases} x \in I \\ f(x) = x \end{cases}$ or $\left(\begin{cases} f(x) = x \\ x \in I \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2} \right)$

; d'où $l = \frac{1}{2}$

Problème :

Partie A :

1°) Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} g$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

2°) a- Calculons $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout x élément de $] -\infty ; 0]$.

$\forall x \in] -\infty ; 0]$, $g'(x) = (x+1)e^x - 1$ et $g''(x) = (x+2)e^x$

b- Démontrons que (C_g) admet un point d'inflexion I à

préciser.

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ car $\forall x \in] -\infty ; 0]$, $e^x > 0$

Tableau de signe de $g''(x)$

x	$-\infty$	-2	0
$g''(x)$	$-$	0	$+$

g'' s'annule en -2 en changeant de signe par conséquent (C_g) admet le point $I(-2 ; g(-2))$ comme point d'inflexion.

c- Dressons le tableau de variation de g' et déterminons le signe de $g'(x)$.

x	$-\infty$	-2	0
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1	$g(-2)$	0

$$g'(-2) = -1 - \frac{1}{e^2} < 0$$

On en déduit que : $\begin{cases} \forall x \in] -\infty ; 0] , g'(x) < 0 \\ g'(0) = 0 \end{cases}$

Partie B :

3°) L'ensemble de définition de f

Soit D_f cet ensemble

$$D_f = \left\{ x \in] -\infty ; 0] / xe^x - x \geq 0 \right\} \cup \left\{ x \in] 0 ; +\infty [/ x > 0 \right\}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

4°) Démontrons que f est continue en 0

On a : $f(0) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (xe^x - x) = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x + 2x \ln x = 0$ donc

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ par suite f est continue en 0.

5°) a- Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2(-1 + \ln x) = -\infty$$

Donc f est dérivable à gauche en 0 et de nombre dérivé à gauche en 0 : $f'_g(0) = 0$ et f n'est pas dérivable à droite en

0 ; en conclusion f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation géométrique

La représentation graphique de f admet en son point d'abscisse 0 deux demi-tangentes l'une à gauche définie par :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ et l'autre à droite définie par : } \begin{cases} x = 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

b- Calculons $f'(x)$ et déterminons son signe pour tout x

élément de $] 0 ; +\infty [$

$$\forall x \in] 0 ; +\infty [, f'(x) = 2 \ln x$$

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

6°) Dressons le tableau de variation de f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x(-1 + \ln x) = +\infty$$

$\forall x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) = g'(x)$ d'où d'après les résultats 2°) c- ;

5°) a- et b-, on a :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

7°) a- Démontrons que ϕ est une bijection.

La fonction f est continue et strictement croissante sur J donc la fonction

$$\phi: J \rightarrow f(J)$$

$x \mapsto \phi(x) = f(x)$ est une bijection.

b- Prouvons que la dérivée première $(\phi^{-1})'$ de ϕ^{-1} est positive sur $f(J) - \{-2\}$

ϕ est dérivable sur J et on a : $\begin{cases} \forall x \in]1; +\infty[, \phi'(x) > 0 \\ \phi'(1) = 0 \end{cases}$

donc l'ensemble de dérivabilité de ϕ^{-1} est

$$f(J) - \{f(1)\} = f(J) - \{-2\} ; \text{ par suite pour tout } x$$

élément de $f(J) - \{-2\}$, $(\phi^{-1})' > 0$

Partie C :

8°) Justifions que la droite $(\Delta): y = -x$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ d'où la droite } (\Delta)$$

d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

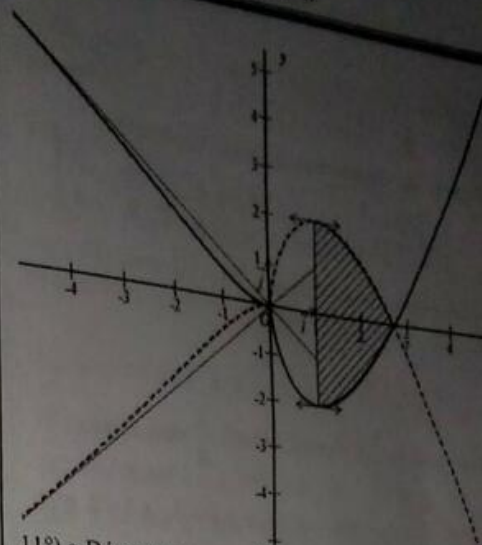
9°) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donnons une conclusion.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(-1 + \ln x) = +\infty \text{ donc } (C_f) \text{ admet}$$

au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

10°) Construisons (C_f) et (C_h) et les tangente en 0.

(C_f) est en trait plein et (C_h) en pointillé



11°) a- Démontrons que H est définie et continue sur J . La fonction h est continue sur J car $h = -f$ et f est continue sur J et $1 \in J$ par conséquent la fonction

$$H: \int_1^x h(t) dt \text{ est la primitive sur } J$$

de h s'annulant en 1 ; par suite H est définie et continue sur J .

b- Calculons $H(e)$. Et donnons une interprétation géométrique.

$$H(e) = \int_1^e h(t) dt \text{ soit } H(e) = \int_1^e -f(t) dt$$

$$H(e) = - \int_1^e 2x(-1 + \ln x) dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -1 + \ln x \end{cases} \text{ on a } v'(x) = \frac{1}{x} \text{ et prenons}$$

$$u(x) = x^2$$

$$H(e) = - \left(\int_1^e x^2(-1 + \ln x) dx - \int_1^e x dx \right) \text{ on trouve}$$

$$H(e) = \left[x^2(1 - \ln x) + \frac{x^2}{2} \right]_1^e \text{ et } H(e) = \frac{e^2 - 3}{2}$$

$$H(e) = \int_1^e -f(t) dt \text{ et } \forall t \in [1; e], -f(t) \geq 0 \text{ et la}$$

fonction $t: x \mapsto -f(t)$ est continue sur $[1; e]$, donc $H(e)$ est la mesure en unité d'aire de l'aire du domaine plan limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

c- Calculons A (C_f) et (C_h) étant symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des abscisses, on a : $A = 2H(e)$ soit $A = (e^2 - 3)u.a$ ($u.a$ unités d'aire).

Sujet 34 : Bac BENIN 2006 série D (PI)

Exercice 1 :

1°) Déterminons les coordonnées des points E, I et J

$$E(0; 0; 1) ; I\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right) ; J\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

2°) a- Donnons une équation cartésienne du plan (EIJ).

$$\overrightarrow{EI}\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right) ; \overrightarrow{EJ}\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) ; \overrightarrow{EI} \wedge \overrightarrow{EJ}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$$

Un vecteur normal au plan (EIJ) est : $\overrightarrow{EI} \wedge \overrightarrow{EJ}$ donc (EIJ) a une équation cartésienne de la forme :

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z + d = 0 \quad (d \in \mathbb{R}).$$

Or $E \in (EIJ)$ donc $-\frac{3}{4} + d = 0$ soit $d = \frac{3}{4}$ on a donc :

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow -2x + y - 3z + 3 = 0 \text{ d'où}$$

$$(EIJ) : -2x + y - 3z + 3 = 0$$

b- Justifions que AEIJ est un tétraèdre.

On a : $\overrightarrow{EA} \cdot (\overrightarrow{EI} \wedge \overrightarrow{EJ}) = \frac{3}{4}$ donc $\overrightarrow{EA} \cdot (\overrightarrow{EI} \wedge \overrightarrow{EJ}) \neq 0$ par

suite les points A, E, I et J sont non coplanaires d'où AEIJ est un tétraèdre.

Soit V le volume du tétraèdre AEIJ :

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{EA} \cdot (\overrightarrow{EI} \wedge \overrightarrow{EJ})| \text{ u.v. on trouve } V = \frac{1}{8} \text{ u.v.}$$

3°) a- Démontrons que : $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MI}$

- J est le centre du carré BCGF donc J est isobarycentre des points B, C, G et F alors : $\forall M \in \mathcal{E}$, on a :

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MJ}$$

- I est le milieu du segment [GH], donc

$$\forall M \in \mathcal{E}, \text{ on a : } \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MI}$$

b- Dédudons-en que (Γ) est une droite dont nous donnerons un repère.

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MJ} \wedge 2\overrightarrow{MI} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MI} = \vec{0}$$

De plus $I \neq J$, donc (Γ) est la droite (IJ). Un repère de (Γ)

est $(I; \overrightarrow{IJ})$.

4°) Calculons la distance de A à (Δ)

Un repère de (Δ) est $(I; \overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u}(1; -1; -1)$ on a :

$$d(A; (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} \text{ u.l (u.l unité de longueur) on trouve}$$

$$d(A; (\Delta)) = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ u.l}$$

Exercice 2 :

1°) a- Calculons $P(-i)$ et $P(i)$

On trouve $P(-i) = 4 - 2i$ et $P(i) = 0$

b- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

i est une racine de $P(z)$, donc il existe un polynôme du second degré $Q(z)$ tel que : $P(z) = (z - i)Q(z)$

On pose : $Q(z) = az^2 + bz + c$ on trouve

$$Q(z) = z^2 - 2z + 2$$

Résolvons l'équation $Q(z) = 0$

Son discriminant $\Delta = -4 = (2i)^2$

$$\text{Donc } Q(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i \text{ ou } z = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

par suite l'ensemble solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ est :

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ i ; 1 - i ; 1 + i \right\}$$

2°) $z_A = i ; z_B = 1 + i$ et $z_C = 1 - i$

a- Déterminons la nature du triangle ABC

On a : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = -\frac{1}{2}i ; \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in i\mathbb{R}^*$, donc le triangle

ABC est rectangle en B.

b- Donnons une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.

Le triangle ABC étant rectangle en B, ce cercle a pour centre le milieu I de [AC] et pour rayon $r = \frac{AC}{2}$;

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1}{2} ; r = \frac{|z_C - z_A|}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{L'équation de ce cercle est donc : } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}$$

3°) a- Déterminons le nombre réel m tel que $g : x \mapsto me^{-x}$ soit solution de (E_2)

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -me^{-x}$ et $g''(x) = me^{-x}$

(g solution de $(E_2) \Leftrightarrow (\forall m \in \mathbb{R})$

$$(m + 2m + 2m)e^{-x} = 10e^{-x})$$

(g solution de $(E_2) \Leftrightarrow (m = 2)$

b- Démontrons que $f(E_2) \Leftrightarrow f - g$ est solution de (E_1)

f est solution de (E_2)

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 10e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = g''(x) - 2g'(x) + 2g(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (f - g)''(x) - 2(f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0$$

$\Leftrightarrow f - g$ est solution de (E_1)

c- Dédudons les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_2)

Résolvons d'abord l'équation (E_1)

L'équation caractéristique de (E_1) est : $r^2 - 2r + 2 = 0$ et ses solutions sont : $r_1 = 1 - i$ et $r_2 = 1 + i$ (d'après 1°) b-)

Ainsi la solution générale de (E_1) est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto (A \cos x + B \sin x)e^x$ ($A; B \in \mathbb{R}^2$)

Soit f les fonctions solutions de (E_2)

D'après la question précédente on a : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - g(x) = (A \cos x + B \sin x)e^x \quad (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (A \cos x + B \sin x)e^x + 2e^{-x}, (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

Les solutions de (E_2) sont donc les fonctions

$$f : x \mapsto (A \cos x + B \sin x)e^x + 2e^{-x}, (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

Problème :

Première partie :

$$1^{\circ}) a- D = \left\{ x \in \mathbb{R} / 1 + e^{-x} \neq 0 \right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}, 1 + e^{-x} \neq 0$$

donc $D = \mathbb{R}$

b- Etudions les variations de f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f = 2 ; f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} ;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		+
$f(x)$	0	2

2^o) a- Démontrons que le point $A(0; 1)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f(-x) + f(x) &= \frac{2}{1 + e^x} + \frac{2}{1 + e^{-x}} \\ &= \frac{2}{1 + e^x} + \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}} \\ &= \frac{2}{1 + e^x} + \frac{2e^x}{1 + e^x} = 2 \end{aligned}$$

$$= 2 \text{ d'où le point } A(0; 1)$$

est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$

b- Vérifions que $A \in (\mathcal{C})$ et déterminons une équation

cartésienne de la tangente à $(\mathcal{C})$ en A .

$f(0) = 1$ donc $A \in (\mathcal{C})$

Equation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en A est : $y = \frac{1}{2}x + 1$.

3^o) Démontrons que la droite d'équation $f(x) = x$ admet une

solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $1,6 < \alpha < 1,7$

Soit $h : x \mapsto h(x) = f(x) - x$. On a : $h(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(x) = x$$

h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x) - 1$ on trouve $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = -\frac{1 + e^{-2x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) < 0$ donc h est continue et strictement

décroissante sur $\mathbb{R}$ et $h(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} h; \lim_{x \rightarrow +\infty} h[: \lim_{x \rightarrow -\infty} h = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h = -\infty$ donc $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; $0 \in h(\mathbb{R})$ alors l'équation

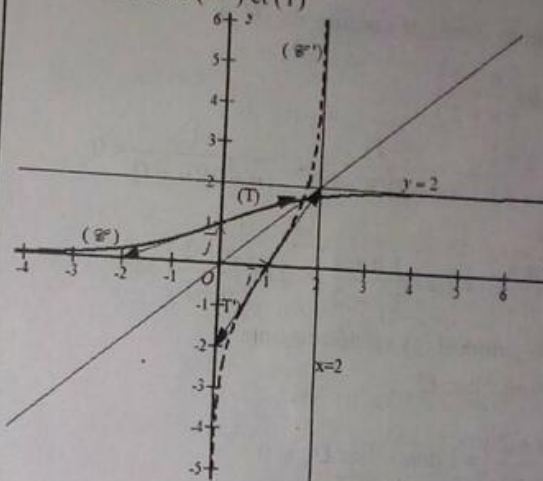
$h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

$$h(1,6) = 0,064 \text{ et } h(1,7) = -0,009 ; h(1,6) \times h(1,7) < 0$$

donc $1,6 < \alpha < 1,7$ Il en résulte de tout ce qui précède que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que

$$1,6 < \alpha < 1,7$$

4^o) Construisons $(\mathcal{C}')$ et (T)



5^o) a- Démontrons que g est une bijection.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) =]0; 2[$ d'où g est une bijection.

b- Etudions la dérivabilité de g^{-1} sur J

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \neq 0$. Donc g^{-1} est dérivable sur $g(\mathbb{R}) = J$

Equation de la tangente (T') à $(\mathcal{C}')$ en son point d'abscisse 1.

$$y = (g^{-1})'(1) = (x-1) + g^{-1}(1) \text{ soit } y = 2(x-1)$$

c- Construisons $(\mathcal{C}')$ (voir figure) (en pointillé)

d- Calculons $(g^{-1})'(x), \forall x \in J$

$$\text{On trouve, } \forall x \in J, (g^{-1})'(x) = \frac{2}{x(2-x)}$$

Deuxième partie :

6^o) a- Justifions l'existence de U_n

f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln n \in \mathbb{R}$

et $\ln(n+1) \in \mathbb{R}$. Donc U_n existe.

b- Interprétation géométrique de U_n

$\forall x \in [\ln n; \ln(n+1)]$, $f(x) > 0$; donc U_n est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe ($\curvearrowright$), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \ln n$ et $x = \ln(n+1)$

c- Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 2 \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x + e^{-x}}$

$$f(x) = \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{2e^x}{1 + e^x} \text{ donc } U_n = 2 \left[\ln(1 + e^x) \right]_{\ln n}^{\ln(n+1)}$$

$$= 2(\ln(n+2) - \ln(n+1)) \text{ d'où } U_n = 2 \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

d- Etudions le sens de variation de (U_n)

$$U_{n+1} = 2 \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$$

$$\frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \text{ et } \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

donc on a :

$$\frac{n+3}{n+2} < \frac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow 2 \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) < 2 \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \text{ soit}$$

$U_{n+1} < U_n$ alors (U_n) est décroissante.

Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right) = 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

7°) a- Donnons une interprétation géométrique de S_n

S_n représente l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe ($\curvearrowright$), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x = \ln(n+1)$

b- Dédisons-en une écriture simple de S_n

$$S_n = \int_0^{\ln(n+1)} f(x) dx \text{ et on trouve } S_n = 2 \ln\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

8°) Calculons l'aire $A(n)$

$$A(n) = \int_0^{\ln(n+1)} (2 - f(x)) dx \text{ u.a.}$$

$$= \left(2 \ln(n+1) - 2 \ln\left(\frac{n+2}{2}\right) \right) \text{ u.a. d'où}$$

$$A(n) = 2 \ln\left(\frac{2n+2}{n+2}\right) \text{ u.a. or } \text{u.a.} = 1 \text{ cm}^2 \text{ donc}$$

$$A(n) = 2 \ln\left(\frac{2n+2}{n+2}\right) \text{ u.a. } \lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = 2 \ln 2$$

Sujet 35 : Bac BENIN 2007 série D

Exercice :

1°) a- Déterminons en fonction de r et θ , le module et l'argument de $\frac{z_1 + i}{z_2 + i}$

$$\left| \frac{z_1 + i}{z_2 + i} \right| = |r| = -r \text{ car } r < 0 \text{ et } \arg\left(\frac{z_1 + i}{z_2 + i}\right) = \theta + \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

b- Dédisons $\frac{z_1 + i}{z_2 + i}$ sous forme trigonométrique :

$$\frac{z_1 + i}{z_2 + i} = -r \left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

2°) Déterminons θ pour que les points A, M_1 , M_2 soient alignés.

$$A, M_1, M_2 \Leftrightarrow \frac{z_1 + i}{z_2 + i} \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } \theta = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{2}$$

3°) a- Déterminons θ pour que le triangle AM_1M_2 soit rectangle en A.

$$AM_1M_2 \text{ est rectangle en A} \Leftrightarrow \frac{z_1 + i}{z_2 + i} \in i\mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0 + k\pi$$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } \theta = 0$$

b- i) Vérifions que $z_2 + i = \frac{i}{r}(z_1 + i)$

AM_1M_2 est rectangle en A donc d'après 3°) a- $\theta = 0$ alors on a :

$$\frac{z_1 + i}{z_2 + i} = -r \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = -ir \text{ par suite}$$

$$z_2 + i = \frac{i}{r}(z_1 + i)$$

ii) Dédisons que M_2 est l'image de M_1 par la similitude plane directe

$$z_2 + i = \frac{i}{r}(z_1 + i) \quad z_2 = \frac{i}{r}z_1 - \frac{1}{r} - i \text{ cette égalité est sous la}$$

$$\text{forme : } z_2 = az_1 + b \text{ où } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \text{ or } |a| = -\frac{1}{r} \text{ donc } M_2$$

est l'image de M_1 par la similitude plane directe de rapport

$$k = -\frac{1}{r}, \text{ d'angle } -\frac{\pi}{2} \text{ et de centre } A(-i)$$

Exercice 2 :

1°) a- Vérifions que les points A et B appartiennent à (Q)

(Q) est le plan de repère $R = (A; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1(1; 1; 0)$ et $\vec{e}_2(1; 1; 1)$ donc $A \in (Q)$

Soit $\vec{n} = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$; $\vec{n}(1; -1; 0)$ est un vecteur normal au plan (Q); par suite une équation cartésienne du plan (Q) est : $x - y + 1 = 0$

$$x_B - y_B + 1 = 0 - 1 + 1 = 0 \text{ donc } B \in (Q)$$

b- Démontrons que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires

$\vec{n}'(1; 1; 1)$ est un vecteur normal au plan (P)

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times 1 = 0 \text{ donc } (P) \perp (Q)$$

c- Donnons un repère de (Δ)

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace

$$M \in (P) \cap (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = -2t + 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Un repère de la droite (Δ) est $(1; \vec{e}_3)$ où $1(-1; 0; 2)$ et $\vec{e}_3(1; 1; -2)$

2°) a- Démontrons que (D) est parallèle aux plans (P) et (Q)

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times (-2) = 0 \text{ donc } (D) // (P)$$

$$\vec{n}' \cdot \vec{u} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-2) = 0 \text{ donc } (D) // (Q)$$

b- Calculons la distance du point A à la droite (D)

$$d(A, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{AC} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ u.l avec } \overrightarrow{AC} \wedge \vec{u}(2; 0; 1) \text{ donc}$$

$$d(A, (D)) = \frac{\sqrt{30}}{6} \text{ u.l}$$

c- Calculons le volume V du tétraèdre ABIC

$$V = \frac{1}{6} |\vec{AI} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})| \text{ u.v, } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-2; 2; -1) \text{ et}$$

$$\vec{AI}(0; 0; 1) \text{ donc } V = \frac{1}{6} \text{ u.v}$$

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve. On a :

$$\text{card} \Omega = A_6^3 = 120$$

$$P_0 = \frac{A_4^3}{120} = \frac{24}{120} \text{ d'où } P_0 = \frac{1}{5}$$

Problème :

Partie A :

1°) a- Déterminons D

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x + 2 \neq 0 \right\} =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$$

b- Etudions les limites de f_n aux bornes de D

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x+2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{n}} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{n}} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f_n(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2} 2x+3 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2} x+2 = 0 \text{ et } x+2 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f_n(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2} 2x+3 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2} x+2 = 0 \text{ et } x+2 > 0 \end{cases}$$

c- Etudions les branches infinies de la courbe (C_n)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0 \text{ donc l'axe des abscisses est asymptote à}$$

(C_n) au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f_n(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -2} f_n(x) = -\infty \text{ donc la droite}$$

d'équation $x = -2$ est asymptote à (C_n)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+2} \times \frac{1}{n} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{x} = +\infty$$

Donc (C_n) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2°) Etudions le sens de variation de f_n

Sujet 36 : Bac BENIN 2008 série D (PI)**Exercice 1 :**

1°) a- Démontrons que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

(P) : $x + y + z - 1 = 0$ et (Q) : $x + y - 2z - 4 = 0$, $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ des vecteurs normaux respectifs de (P) et (Q). On a : $\vec{n}(1; 1; 1)$; $\vec{n'}(1; 1; -2)$ et $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 1 + 1 - 2 = 0$ par suite les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux d'où les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

b- Donnons un repère de leur droite d'intersection (Δ)

* Déterminons le point I de (Δ) tel que : $x_I = 0$

$$\text{On a : } \begin{cases} y_I + z_I = 1 \\ y_I - 2z_I = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_I = 2 \\ z_I = -1 \end{cases} \text{ donc}$$

$$I(0; 2; -1)$$

* $\vec{n} \wedge \vec{n'}$ est un vecteur directeur de (Δ) avec

$$\vec{n} \wedge \vec{n'}(-3; 3; 0). \text{ Prenons } \vec{u} = \frac{1}{3}(\vec{n} \wedge \vec{n'}) ; \vec{u} \text{ est aussi un}$$

vecteur directeur de (Δ) par suite un repère de (Δ) est :

$$(I; \vec{u})$$

2°) a- Vérifions si le point A appartient à (Δ)

$$\vec{AI} \wedge \vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j} ; \vec{AI} \wedge \vec{u} \neq \vec{0} ; \text{ par suite le point A n'appartient pas à la droite } (\Delta).$$

b- Calculons la distance des points A à la droite (Δ).

$$d(A, (\Delta)) = \frac{\|\vec{AI} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2u.l \text{ d'où } d(A, (\Delta)) = 2u.l$$

3°) a- Déterminons une représentation paramétrique de ($\mathcal{D}$)

($\mathcal{D}$) est perpendiculaire au plan (P) donc $\vec{n}$ un vecteur normal à (P) est un vecteur directeur de ($\mathcal{D}$) et A un point de ($\mathcal{D}$) donc une représentation paramétrique de ($\mathcal{D}$) est :

$$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 1, (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = \alpha + 1 \end{cases}$$

b- Dédisons-en les coordonnées du point H

$$\text{On a : } \{H\} = (\mathcal{D}) \cap (P) \text{ et } H \in (\mathcal{D}) \cap (P) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_H = \alpha + 1 \\ y_H = \alpha + 1 \\ z_H = \alpha + 1 \\ x_H + y_H + z_H - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \alpha + 1 \\ y_H = \alpha + 1 \\ z_H = \alpha + 1 \\ \alpha = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{1}{3} \\ y_H = \frac{1}{3} \\ z_H = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ par}$$

$$\text{suite } H\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

4°) a- Déterminons une équation cartésienne du plan (R)

Le plan (R) est perpendiculaire aux plans (P) et (Q) donc (Δ) l'intersection de (P) et (Q) est perpendiculaire au plan (R) ; par suite $\vec{u}(-1; 1; 0)$ vecteur directeur de (Δ) est un vecteur normal à (R).

$$(R) : -x + y + d = 0$$

A $\in$ (R) donc $-x_A + y_A + d = 0$ par suite $d = 0$ d'où une équation cartésienne du plan (R) est $-x + y = 0$

b- Déterminons $(P) \cap (Q) \cap (R)$

$$(P) \cap (Q) = (\Delta) \text{ donc } (P) \cap (Q) \cap (R) = (\Delta) \cap (R)$$

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in (\Delta) \cap (R) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\beta \\ y = \beta + 2 \\ z = -1 \\ -x + y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\beta \\ y = \beta + 2 \\ z = -1 \\ \beta = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Par suite } (P) \cap (Q) \cap (R) = \{E(1; 1; -1)\}$$

Exercice 2 :

1°) a- Linéarisons $\sin x \cos 2x$, pour tout réel x

$$\begin{aligned} \sin x \cos 2x &= \frac{1}{2} [\sin(x + 2x) + \sin(x - 2x)] \\ &= \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin x \end{aligned}$$

b- Dédisons que U est une primitive de u sur $\mathbb{R}$

U est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x ,

$$U'(x) = \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin x = u(x) \text{ d'où } U \text{ est une primitive de } u \text{ sur } \mathbb{R}$$

2°) a- Calculons I_n en fonction de n

$$I_n = \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx$$

Posons $F(x) = x \Rightarrow F'(x) = 1$

$W'(x) = \cos nx$ on peut prendre $W(x) = \frac{1}{n} \sin nx$

$$\begin{aligned} \text{On a : } I_n &= \left[\frac{1}{n} x \sin nx \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{n^2} [\cos nx]_0^\pi \\ &= \frac{1}{n^2} (\cos n\pi - 1) \\ &= \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

b. Dédisons I_1, I_2 et I_3

$$I_1 = \frac{1}{1^2} ((-1)^1 - 1) = -2 \text{ donc } I_1 = -2$$

$$I_2 = \frac{1}{2^2} ((-1)^2 - 1) = 0 \text{ donc } I_2 = 0$$

$$I_3 = \frac{1}{3^2} ((-1)^3 - 1) = -\frac{2}{9} \text{ donc } I_3 = -\frac{2}{9}$$

3°) Calculons J

$$J = \int_0^\pi x^2 \sin x \cos 2x \, dx$$

Posons $K(x) = x^2 \Rightarrow K'(x) = 2x$

$L'(x) = u(x)$, on peut choisir : $L(x) = U(x)$

$$\text{On a : } J = [x^2 U(x)]_0^\pi - 2 \int_0^\pi x U(x) \, dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x U(x) \, dx &= \int_0^\pi x \left(\frac{-1}{6} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x \right) dx \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^\pi x \cos 3x \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi x \cos x \, dx \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi x U(x) \, dx = -\frac{1}{6} I_3 + \frac{1}{2} I_1$$

$$\int_0^\pi x U(x) \, dx = -\frac{26}{27} \text{ et } [x^2 U(x)]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{3}$$

$$\text{D'où } J = -\frac{\pi^2}{3} + \frac{52}{27}$$

Problème :

Partie A :

1°) Justifions que l'ensemble de définition f est :

$$E =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0$$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ d'où l'ensemble de définition de f est :

$$E =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

2°) Calculons les limites de f aux bornes de E

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln|e^x - 1| = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln|e^x - 1| = -\infty \text{ car}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -\ln|e^x - 1| = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

3°) a- Etudions le sens de variation de f

La fonction $x \mapsto e^x - 1$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et ne s'annule pas sur ces intervalles. Elle est dérivable sur chacun de ces intervalles et par suite f est dérivable en tout point de E .

$$\forall x \in E, f'(x) = \frac{-e^x}{e^x - 1}$$

$$\forall x \in E, -e^x < 0; \forall x \in]-\infty; 0[, e^x - 1 < 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, e^x - 1 > 0 \text{ par suite :}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty; 0[$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) < 0 \text{ donc } f \text{ est strictement décroissante sur }]0; +\infty[$$

b- Dressons le tableau des variations de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$+\infty$	$-\infty$

4°) a- Démontrons que la droite la droite (D) d'équation

$y = -x$ est asymptote à la courbe

($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$

$$\forall x \in]0; +\infty[, e^x - 1 > 0 \text{ donc } |e^x - 1| = e^x - 1$$

Par suite $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f(x) = -\ln(e^x - 1)$$

$$\begin{aligned} &= \ln[e^x (1 - e^{-x})] = -\ln e^x - \ln(1 - e^{-x}) \\ &= -x - \ln(1 - e^{-x}) \end{aligned}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) + x = -\ln(1 - e^{-x})$$

Partie B :

5°) a- Déterm

f est conti

$$f(]0; +\infty[)$$

$$f(K) =]-\infty$$

b- Démon

f est continu

$$h(K) = f(K)$$

6°) a- Courbe d

b- Détermin

h est dérivable :

dérivable sur h

c- Établiss

Soit $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x}) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 - e^{-x}) = 0$ par suite

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$ d'où la droite (D) d'équation $y = -x$ est

asymptote à la courbe

(C) au voisinage de $+\infty$

b- Étudions la position de (C) par rapport à (D) sur $]0; +\infty[$

$\forall x \in]0; +\infty[, e^{-x} > 0$; et $0 < 1 - e^{-x} < 1$ donc

$\forall x \in]0; +\infty[, \ln(1 - e^{-x}) < 0$ donc $-\ln(1 - e^{-x}) > 0$ par

suite $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) + x > 0$ par conséquent (C) au

dessus de (D) sur $]0; +\infty[$.

c- Achéons l'étude des branches infinies de (C).

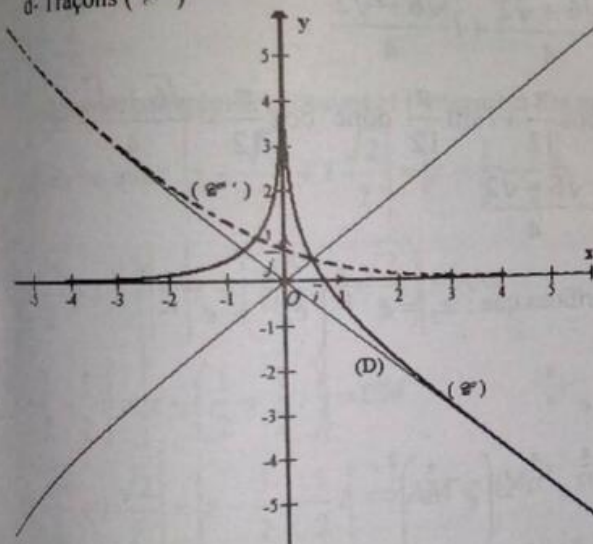
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des

abscisses) est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} f = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ (axe des

ordonnées) est asymptote à (C).

d- Traçons (C')



Partie B :

5°) a- Déterminons $f(K)$

f est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc

$f(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f; \lim_{x \rightarrow 0^+} f[=]-\infty; +\infty[$ donc

$f(K) =]-\infty; +\infty[$

b- Démontrons que h est une bijection

f est continue et strictement décroissante sur K et

$h(K) = f(K)$ d'où h est une bijection.

6°) a- Courbe de (C') (Voir figure : en pointillé) E' de g .

b- Déterminons l'ensemble de dérivabilité E' de g .

h est dérivable sur K et $\forall x \in K, h'(x) \neq 0$ donc g est

dérivable sur $h(K) = \mathbb{R}$; par suite $E' = \mathbb{R}$

c- Établissons que $\forall x \in E', g'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$

Établissons que $\forall x \in E', g'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, y \in]0; +\infty[, g(x) = y \Leftrightarrow x = h(y)$

$$\forall x \in E', g'(x) = \frac{1}{h'(g(x))}$$

$$= \frac{1}{h'(y)}$$

$$= \frac{e^y - 1}{-e^y}$$

$$h(y) = x \Leftrightarrow -\ln(e^y - 1) = x$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^y - 1) = -x$$

$$\Leftrightarrow e^y - 1 = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow e^y = 1 + e^{-x}$$

$$\text{On a : } g'(x) = \frac{e^{-x} + 1 - 1}{-(e^{-x} + 1)}$$

$$= \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} = \frac{-1}{e^x + 1} \text{ d'où pour tout } x \text{ élément de}$$

$$E', \text{ on a : } g'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$$

d- Démontrons que, pour tout élément x de $]0; +\infty[$:

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

$$x \in]0; +\infty[\Leftrightarrow x > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x > 1$$

$$\Leftrightarrow e^x + 1 > 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^x + 1} < \frac{1}{2} \text{ or } |g'(x)| = \frac{1}{1 + e^x} \text{ d'où pour}$$

$$\text{tout élément } x \text{ de }]0; +\infty[: |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

e- Dédudions que, pour tous éléments a et b de

$$]0; +\infty[\text{ on a : } |g(a) - g(b)| \leq \frac{1}{2} |a - b|$$

- g est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

- Pour tous éléments a et b de $]0; +\infty[$ on a :

d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|g(a) - g(b)| \leq \frac{1}{2} |a - b|$$

Partie C :

7°) Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n > 0$

*pour $n = 0, U_0 = \ln 2$ donc $U_0 > 0$

*supposons que pour k entier naturel donné on a $U_k > 0$

$U_k > 0 \Leftrightarrow g(U_k) > 0$ car $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

En conclusion pour tout entier naturel $n, U_n > 0$

8°) $\alpha = \ln\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)$. Démontrons que : $g(\alpha) = \alpha$

Correction bac Bénin (PI)

$$\begin{aligned}
 g(\alpha) = \alpha &\Leftrightarrow h(\alpha) = \alpha \\
 &\Leftrightarrow -\ln(e^\alpha - 1) = \alpha \\
 &\Leftrightarrow \ln(e^\alpha - 1) = -\alpha \\
 &\Leftrightarrow e^\alpha - 1 = e^{-\alpha} \\
 &\Leftrightarrow e^{2\alpha} - e^\alpha - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(e^\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(e^\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow e^\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ ou } e^\alpha = \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \\
 &\Leftrightarrow e^\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ (car } \frac{-\sqrt{5}+1}{2} < 0, \text{ donc}
 \end{aligned}$$

$$e^\alpha = \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \text{ impossible)}$$

$$e^\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right); \text{ d'où } g(\alpha) = \alpha$$

9°) a- Démontrons que pour tout entier naturel n ,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$ et $\alpha > 0$ donc d'après la question 6°) c- en posant $a = U_n$ et $b = \alpha$ on a :

$$|g(U_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \text{ or } U_{n+1} = g(U_n) \text{ et } g(\alpha) = \alpha$$

$$\text{d'où pour tout entier naturel } n, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

b- Prouvons que pour tout entier naturel n ,

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

- pour $n=0$, $|U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |U_0 - \alpha|$
- Supposons que pour k entier naturel donné on ait :

$$|U_k - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |U_0 - \alpha|$$

$$\text{On a : } |U_k - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |U_0 - \alpha| \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} |U_k - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} |U_0 - \alpha| \text{ et or } |U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_k - \alpha|$$

$$\text{donc } |U_{k+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} |U_0 - \alpha| \text{ en conclusions pour tout}$$

$$\text{entier naturel } n, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

10°) Dédudons la limite de (U_n)

$$\left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| = 0; \text{ on déduit que}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

D'où la suite (U_n) est convergente et sa limite est α

Sujet 37 : Bac BENIN 2009 série D (P)

Exercice 1 :

1°) a- Ecrivons $z_1 z_2$ sous forme algébrique :

$$z_1 z_2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

b- Ecrivons sous forme exponentielle z_1 , z_2 et $z_1 z_2$:

$$z_1 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}; z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_1 z_2 = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

c- Dédudons-en les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

$$z_1 z_2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$= \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \text{ donc } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

2°) a- Vérifions que : $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}} \right)$

$$z_3 = 1 - e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{12}} e^{i\frac{\pi}{12}} - \left(e^{-i\frac{\pi}{12}} \right)^2$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}} \right) \text{ d'où } z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}} \right)$$

b- Dédudons-en le module et un argument de z_3 .

$$z_3 = 2i \sin \frac{\pi}{12} e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{12} e^{i\frac{5\pi}{12}} \text{ or } 2 \sin \frac{\pi}{12} > 0 \text{ donc}$$

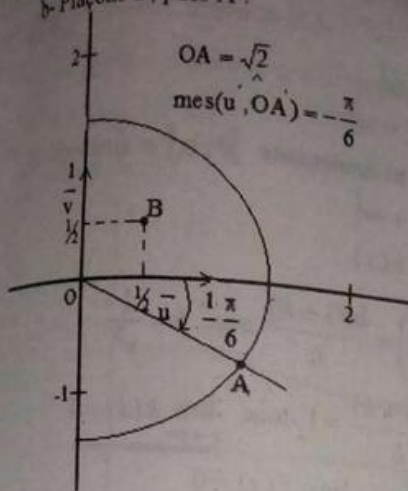
$$|z_3| = 2 \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \text{ donc } |z_3| = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \text{ et un}$$

$$\text{argument de } z_3 \text{ est } \frac{5\pi}{12}$$

c- Démontrons que $z_3^{12} \in \mathbb{R}^*$

$$z_3^{12} = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right)^{12} \cdot e^{i5\pi} = - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right)^{12} \text{ d'où } z_3^{12} < 0$$

3^o a- Démontrons que A, B et C ne sont pas alignés :
 $|z_1| = OA$ et un argument de z_1 est la mesure de l'angle orienté $(u, \overrightarrow{OA})$
 b- Plaçons B, puis A :



c- Déterminons géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\left| z - \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \left| z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right|$$

$$\left| z - \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \left| z - \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right| = AM$$

$$\left| z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \left| z - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right| = BM$$

$$\left| z - \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \left| z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right| \Leftrightarrow AM = BM$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 2 :

1^o a- Démontrons que A, B et C ne sont pas alignés :

$$\overrightarrow{AB}(-1; -1; 1) \text{ et } \overrightarrow{AC}(0; -6; -3)$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(9; -3; 6)$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc A, B et C ne sont pas alignés.

b- Calculons l'aire du triangle ABC

Soit A cette aire.

$$A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ u.a} = \frac{3\sqrt{14}}{2} \text{ u.a} \text{ donc}$$

$$A = \frac{3\sqrt{14}}{2} \text{ u.a}$$

2^o Démontrons que ABCE est un rectangle :

$$\overrightarrow{AB}(-1; -1; 1) \text{ et } \overrightarrow{EC}(-1; -1; 1)$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$ donc ABCE est un parallélogramme $\otimes$

$$\overrightarrow{AE}(1; -5; -4)$$

LA PASSION DES MATHS

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -1 + 5 - 4 = 0$$

De $\otimes$ et $\oplus$, on déduit que ABCE est un rectangle

3^o a- Donnons une équation cartésienne du plan (ABC)
 On obtient : (ABC) : $3x - y + 2z + 5 = 0$

b- Déterminons une représentation paramétrique de (Δ)

$$\text{On trouve : } (\Delta) : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t \\ z = -2 + 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

4^o a- Déterminons les coordonnées de H

On a : $\{H\} = (\Delta) \cap (ABC)$ donc on obtient $H\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -3\right)$

b- Calculons la distance de D au plan (ABC)

$$d(D, (ABC)) = DH = \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ u.l}$$

c- Calculons le volume du tétraèdre ABCD
 Soit V ce volume

$$V = \frac{1}{3} DH \times A_{u.v} \text{ on obtient : } V = \frac{7}{2} \text{ u.v}$$

Problème :

Partie A :

1^o a- Démontrons que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, on

$$a : g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a : $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{-2}{x(x^2 + 1)} + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$$

b- Etudions le signe de $g'(x)$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x^2 + 1)^2} \text{ or } \forall x \in]0; +\infty[.$$

$$\frac{2(x+1)}{x(x^2 + 1)^2} > 0 \text{ donc le signe de } g'(x) \text{ est celui de } x-1.$$

Ainsi :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1[$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$$

2^o Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1} = +\infty$$

3°) a- Dressons le tableau des variations de g

* g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; 1[$.

* Tableau des variations de g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		$-1 + \ln 2$	0

b- Dédudons-en que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0,5 < \alpha < 0,6$

- g est continue et strictement décroissante sur $]0; 1[$ et $g(0; 1] =]-1 + \ln 2; +\infty[$ et $0 \in]-1 + \ln 2; +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0; 1[$
- g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $g([1; +\infty[) = [-1 + \ln 2; 0[$ et $0 \notin [-1 + \ln 2; 0[$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]1; +\infty[$
- Il en résulte de tout ce qui précède que, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$
- Par ailleurs : $g(0,5) \approx 0,009$ et $g(0,6) \approx -0,114$ donc $g(0,5) \times g(0,6) < 0$ d'où $0,5 < \alpha < 0,6$

4°) Déterminons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
 g est continue sur $]0; +\infty[$ et $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ donc g garde un signe constant sur chacun des intervalles $]0; \alpha[$ et $]\alpha; +\infty[$

Or $0,5 \in]0; \alpha[$ et $g(0,5) > 0$ donc

$$\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0;$$

$0,6 \in]\alpha; +\infty[$ et $g(0,6) < 0$ donc

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$$

En résumé pour tout x élément de $]0; +\infty[$:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; +\infty[$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; \alpha[$$

Partie B :

5°) a- Démontrons que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + x \cdot \frac{-2}{x(x^2 + 1)}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1} = g(x)$$

D'où $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$

b- Dédudons-en le sens de variation de f .

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$ donc :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; \alpha[$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; +\infty[$$

D'où f est strictement croissante $]0; \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$

6°) a- Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$

$$k(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{\ln(1+h)}{h} \text{ avec } h = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 1$$

b- Dédudons-en que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{k(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

7°) a- Démontrons que f est continue à droite de 0.

Soit D l'ensemble de définition de f , $D =]0; +\infty[$

$$0 \in D \text{ et } f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x > 0, f(x) &= x[\ln(1+x^2) - \ln x^2] \\ &= x \ln(1+x^2) - 2x \ln x \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0) \text{ d'où } f \text{ est continue à droite en } 0.$$

b- Etudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\text{Pour } x > 0, \frac{f(x)}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas}$$

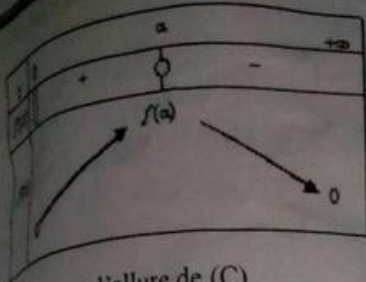
dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique.

$$f \text{ est continue en } 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \text{ donc } f \text{ admet en } 0$$

une demi-tangente verticale définie par $\begin{cases} x=0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

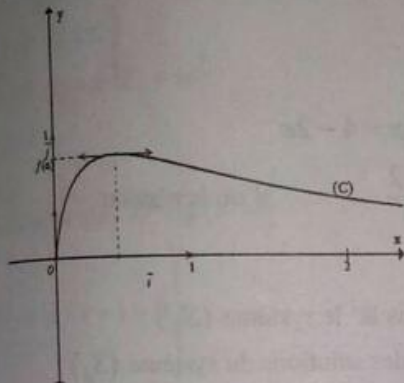
8°) a- Dressons le tableau des variations de f :



Donnons l'allure de (C)

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

Allure de (C)



a- Calculons J_λ :

La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$, en particulier sur $[\lambda; 1]$, $\lambda \in]0; 1[$ donc J_λ existe et on a :

$$J_\lambda = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 \frac{-x}{x^2 + 1} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_\lambda^1$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{2} \ln(1 + \lambda^2) \text{ d'où}$$

$$J_\lambda = \ln 2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{2} \ln(1 + \lambda^2)$$

b- Calculons $A(\lambda)$

f est continue sur $[\lambda; 1]$ et $\forall x \in [\lambda; 1], f(x) \geq 0$

$$\text{donc } A(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x) dx \text{ u.a.}$$

$$A(\lambda) = J_\lambda \times 25 \text{ cm}^2$$

c- Calculons $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} J_\lambda = \ln 2 \text{ donc } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda) = 25 \ln 2 \text{ cm}^2$$

Sujet 38 : Bac BENIN 2010 série D (PI)

Exercice 1 :

1°) Déterminons u et v

$$\begin{cases} u - v = i \\ u - 2iv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 + 2i \\ v = 1 + i \end{cases}$$

2°) a- Vérifions que

$$p(z) = (z - 2 - 3i)[z^2 - (7 + 10i)z - 14 + 32i]$$

Le développement de :

$$p(z) = (z - 2 - 3i)[z^2 - (7 + 10i)z - 14 + 32i]$$

Donne $z^3 - (9 + 13i)z^2 + (-30 + 73i)z + 124 - 22i$ d'où le résultat.

b- Calculons $(3 + 2i)^2$

$$(3 + 2i)^2 = 9 - 4 + 12i = 5 + 12i$$

c- Résolvons dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 0$

$$(P(z) = 0) \Leftrightarrow z = 2 + 3i \text{ ou}$$

$[z^2 - (7 + 10i)z - 14 + 32i] = 0 (E)$ soit Δ le discriminant de l'équation précédente

$$\Delta = (7 + 5i)^2 - 4(-14 + 32i) = 5 + 12i \text{ donc } \Delta = (3 + 2i)^2 \text{ d'où}$$

$$(E) \Leftrightarrow z = 5 + 6i \text{ ou } z = 2 + 4i$$

L'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$ est :

$$\{2 + 3i; 5 + 6i; 2 + 4i\}$$

3°) a- Déterminons l'écriture complexe de S

L'écriture complexe de S est sous la forme : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(1 + 2i) + b = 1 + 2i \\ a(2 + 3i) + b = 1 + i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-1 - i}{2} \text{ et } b = \frac{1 + 7i}{2}$$

$$(S) : z' = \left(\frac{-1 - i}{2} \right) z + \frac{1 + 7i}{2}$$

b- Calculons le coefficients de corrélation linéaire de (X, Y)

X	1	2	1	5	2
Y	2	3	1	6	4

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{11}{5} = 2,2$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{16}{5} = 3,2$$

$$V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{54}{25} = 2,16$$

$$V(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{Y}^2 = \frac{74}{25} = 2,96$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{X}\bar{Y} = \frac{59}{25} = 2,36$$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = 0,93$$

Exercice 2 :

1°) a- Démontrons que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants
 $\vec{n}_1(1; -2; 1)$ et $\vec{n}_2(-5; -2; 1)$ sont respectivement des
 vecteurs normaux aux plans (P_1) et (P_2) ; on a :

$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = -6\vec{j} - 12\vec{k}$ donc $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \neq \vec{0}$ par suite les plans
 (P_1) et (P_2) sont sécants

b- Donnons une représentation paramétrique de (Δ)

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 5x + 2y - z = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}t \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ donc} \\ z = t \end{cases}$$

$$(\Delta): \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

c- Calculons la distance du point A à la droite (Δ)

un repère de (Δ) est $(B; \vec{u})$ avec $B\left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{6}; 0\right)$ et
 $\vec{u}(0; 1; 2)$

$$d(A, (\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{145}}{5}$$

2°) a- Justifions que (S_a) est équivalent au système

$$\begin{cases} (2a+1)x = 4-2a \\ y = \frac{x-2}{2} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$(S_a) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ z = -1 \\ ax + y + z = -a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 2 \\ ax + y = 1 - a \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + \frac{x-2}{2} = 1 - a \\ y = \frac{x-2}{2} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x-2}{2} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$z = -1$$

$$(2a+1)x = 4-2a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x-2}{2} \\ z = -1 \end{cases}$$

d'où le résultat

b- Résolvons dans $\mathbb{R}^3$ le système (S_a)

Soit E l'ensemble des solutions du système (S_a)

*Si $a = -\frac{1}{2}$ alors $E = \Phi$

$$\text{*Si } a \neq -\frac{1}{2} \text{ alors } (S_a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4-2a}{2a+1} \\ y = \frac{1-3a}{2a+1} \\ z = -1 \end{cases} \text{ d'où}$$

$$E = \left\{ \left(\frac{4-2a}{2a+1}; \frac{1-3a}{2a+1}; -1 \right) \right\}$$

3°) a- Calculons la probabilité de chacun des événements A et B

Soit $p(A)$ et $p(B)$ les probabilités respectives de A et B

$$p(A) = \frac{3}{5} \text{ et } p(B) = \frac{1}{5}$$

b- Calculons la probabilité p pour que (S_a) n'admette aucune solution sachant que la boule tirée est rouge :

$$p = \frac{1}{3}$$

Problème :**Partie A :**

1°) Déterminons le sens de variation de g

g est définie, continue et dérivable sur $]1; +\infty[$

$\forall x \in]1; +\infty[$, $g'(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$
 $\forall x \in]1; +\infty[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante
 2°) Calculons $g(2)$
 $g(2) = 0$
 Déduisons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x
 Puisque g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et que $g(2) = 0$ alors : $\forall x \in]1; 2[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]2; +\infty[$, $g(x) > 0$ en résumé :
 $g(x) < 0$ si $x \in]1; 2[$
 $g(x) > 0$ si $x \in]2; +\infty[$
 $g(2) = 0$

Partie B :

1°) a. Justifions que $D =]1; +\infty[$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x-1 > 0 \right\}$$

$$x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ d'où } D =]1; +\infty[$$

b. Etudions les limites de f aux bornes D

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} |x-2| \ln(x-1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x-2| \ln(x-1) = +\infty$$

c. Etudions la dérivabilité de f en 2 et donnons une interprétation géométrique.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -\ln(x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-1) = 0 \text{ ainsi on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0 \text{ donc } f \text{ est}$$

dérivable en 2 et on a : $f'(2) = 0$

Interprétation géométrique :

(C) admet en son point d'abscisse 2, une tangente d'équation : $y = 0$

4°) a. Calculons $f'(x)$ pour $x \in]1; 2[$ et pour $x \in]2; +\infty[$

$$\forall x \in]1; 2[, f'(x) = -\ln(x-1) + \frac{2-x}{x-1}$$

$$\forall x \in]2; +\infty[, f'(x) = \ln(x-1) + \frac{x-2}{x-1}$$

b. Vérifions que $\forall x \in]1; 2[, f'(x) = -g(x)$ et

$$\forall x \in]2; +\infty[, f'(x) = g(x)$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, g(x) = 1 - \frac{1}{x-1} + \ln(x-1) = \frac{x-2}{x-1} + \ln(x-1) \text{ d'où } \forall x \in]1; 2[$$

$$f'(x) = -g(x)$$

$$\forall x \in]2; +\infty[, f'(x) = g(x)$$

c. Déduisons-en que $\forall x \in]1; 2[\cup]2; +\infty[$, $f'(x) > 0$
 $\forall x \in]1; 2[, g(x) < 0$ donc $f'(x) > 0$
 $\forall x \in]2; +\infty[, g(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$
 D'où $\forall x \in]1; 2[\cup]2; +\infty[, f'(x) > 0$

d. Dressons le tableau de variation de f

x	1	2	+
f'(x)		+	+
f(x)		0	+

5°) a. Etudions les branches infinies de (C)

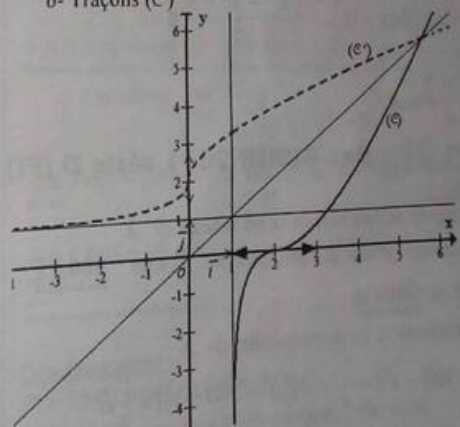
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ donc la droite d'équation } x=1 \text{ est}$$

asymptote à (C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ donc (C) admet une}$$

branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

b. Traçons (C)



6°) a. Démontrons que h est une bijection.

f étant continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et que $f(]1; +\infty[) = \mathbb{R}$, h est donc continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$, par conséquent h est une bijection de $]1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminons l'ensemble de dérivabilité de h^{-1} .
 h est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ de plus $h(2) = 0$ donc h^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.

2°) a- Déterminons la nature du triangle ABC

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-3 + i - 4i}{3 + i - 4i} = \frac{-3 - 3i}{3 - 3i} = -i$$

donc $\arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = -\frac{\pi}{2}$ et $AB = AC$ par conséquent le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

b- Déterminons l'écriture complexe de f

L'écriture complexe de f est de forme : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = z_A \\ az_B + b = z_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -i \\ b = -4 + 4i \end{cases}$$

Donc l'écriture complexe de f est : $z' = -iz - 4 + 4i$

c- Déduisons-en la nature et les éléments caractéristiques de f

L'écriture complexe de f est $z' = -iz - 4 + 4i$ donc

$z' = e^{-i\frac{\pi}{2}} z - 4 + 4i$ d'où f est la rotation de centre A et

d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$

3°) a- Déterminons l'écriture complexe de S

L'écriture complexe de S est

$$z' = -2(-iz - 4 + 4i) + 12i = 2iz + 8 + 2i \text{ d'où l'écriture}$$

complexe de S est : $z' = 2iz + 8 + 4i$

b- Donnons la nature et les éléments caractéristiques de S

$a = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $b = 8 + 4i$ d'où S est la similitude plane

directe de centre A de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$

Problème :

Première partie :

1°) Dressons le tableau de variation de u puis construisons la courbe (C)

u est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, u'(x) = \frac{1}{x}$$

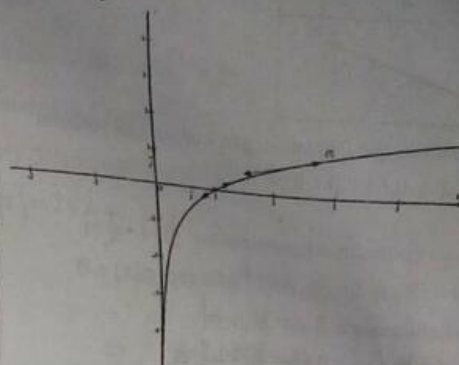
$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$$

Tableau de variation de u

x	0	$+\infty$
$u'(x)$		+
$u(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$u(1) = 0; u(e) = 1; (T_1): y = x - 1$$

$$(T_e): y = \frac{1}{e}x$$



2°) a- Démontrons que U est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$

$$\forall x \in]0; +\infty[,$$

$$U'(x) = (\ln x)^2 + x \left(\frac{2}{x} \ln x \right) - 2(1 + \ln x) + 2$$

$$= (\ln x)^2 + 2 \ln x - 2 - 2 \ln x + 2 = (\ln x)^2$$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[; U'(x) = (\ln x)^2$, par conséquent U est une primitive de la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$

b- Calculons le volume $V(\alpha)$ du solide S_α

$$V(\alpha) = \left(\pi \int_{\alpha}^1 [u(x)]^2 dx \right)_{u,v} = \pi [U(x)]_{\alpha}^1 u.v$$

$$V(\alpha) = \pi (-\alpha (\ln \alpha)^2 + 2\alpha \ln \alpha - 2\alpha + 2) u.v$$

c- Calculons $\lim_{\alpha \rightarrow 0} V(\alpha)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} V(\alpha) = 2\pi u.v \text{ car } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^r \ln \alpha = 0 \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ donc}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} V(\alpha) = 2\pi u.v$$

Deuxième partie :

3° a- Etudions les variations de g

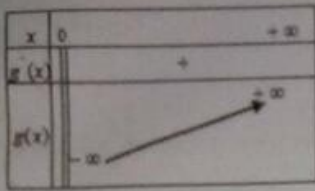
g est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de g



b- Démontrons que l'équation $g(x)$ admet une solution unique β et que $0,65 < \beta < 0,66$

g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $g(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β sur $]0; +\infty[$.

De plus, $0,65 \in]0; +\infty[$; $0,66 \in]0; +\infty[$ et $g(0,65) = -0,00828$; $g(0,66) = 0,02$ par conséquent $g(0,65) \times g(0,66) < 0$ d'où l'unique solution β de l'équation $g(x) = 0$ vérifie $0,65 < \beta < 0,66$

c- Dédudons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . g étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $g(\beta) = 0$ alors

$$\text{on a : } \begin{cases} g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; \beta[\\ g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\beta; +\infty[\\ g(\beta) = 0 \end{cases}$$

4°) a- Calculons la distance OM

$$M \in (C) \Leftrightarrow M(x; u(x)) \text{ avec } x > 0$$

$$\text{Donc } OM = \sqrt{x^2 + [u(x)]^2} = \sqrt{x^2 + (\ln x)^2} \text{ soit}$$

$$OM = \sqrt{f(x)}$$

b- Démontrons que si un point A de (C) d'abscisse a est le plus proche de O alors $f(a)$ est le minimum de f sur $]0; +\infty[$

Soit A un point de (C) d'abscisse a ($a > 0$)

Si A est un point de (C) le plus proche de O alors :

$OA^2 = f(a)$ et pour tout point M de (C) d'abscisse x ($x > 0$), on a : $OA \leq OM$.

$$OA \leq OM \Leftrightarrow OA^2 \leq OM^2 \Leftrightarrow f(a) \leq f(x) \text{ pour tout } x \text{ élément de }]0; +\infty[$$

Par conséquent, $f(a)$ est le minimum de f sur $]0; +\infty[$

c- Démontrons que f est dérivable sur $]0; +\infty[$,

$f'(x)$ et $g(x)$ ont même signe

les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto (\ln x)^2$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) &= 2x + \frac{2}{x} \ln x \\ &= \frac{2(x^2 + \ln x)}{x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} g(x)$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{2}{x} g(x)$$

$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{2}{x} > 0$ par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$, $\forall x \in]0; +\infty[$

d- • Démontrons que $f(\beta)$ est le minimum de f sur

$]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; \beta[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]\beta; +\infty[, f'(x) > 0 \text{ et } f'(\beta) = 0$$

f est donc strictement décroissante sur $]0; \beta[$ et strictement croissante sur $]\beta; +\infty[$, par conséquent $f(\beta)$ est le minimum de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

• Dédudons les coordonnées du point B de (C) qui est le plus proche de O .

D'après les questions 4°) b- et c-

$f(a)$ est le minimum de f sur $]0; +\infty[$ or $f(\beta)$ est l'unique minimum de f sur $]0; +\infty[$ d'où $\underline{B(\beta; \ln \beta)}$

e- • Donnons l'expression de $f(\beta)$ sous forme de polynôme en β

$$f(\beta) = \beta^2 + (\ln \beta)^2 \text{ or } g(\beta) = 0 \text{ soit } \ln \beta = -\beta^2 \text{ donc}$$

$$f(\beta) = \beta^4 + \beta^2$$

• Dédudons un encadrement de la distance OB

$$OB = \sqrt{f(\beta)} = \sqrt{\beta^4 + \beta^2} = \beta \sqrt{\beta^2 + 1}$$

$$0,65 < \beta < 0,66 \Rightarrow 0,77 < OB < 0,80 \text{ car}$$

$$\sqrt{0,65^4 + 0,65^2} \approx 0,775245929$$

$$\sqrt{0,66^4 + 0,66^2} \approx 0,790789074$$

Troisième partie :

5°) a- Démontrons que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[n; n+1]$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x \in [n; n+1] \text{ on a :}$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \int_n^{n+1} \frac{dx}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{n} \text{ donc on a :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$$

b- Dédudons que $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$ et

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = [\ln x]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln n$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

Du résultat précédent on a :

$$\ln 2 - \ln 1 \leq 1$$

$$\ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\ln 4 - \ln 3 \leq \frac{1}{3}$$

$$\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

en faisant la somme membre à membre et après réduction on

$$a: \ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

6°) a- Etudions le sens de variation de la suite (v_n)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } \frac{1}{n+1} > 0 \text{ donc}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n > 0$ d'où la suite (v_n) est strictement croissante

b- Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq v_n$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

Sujet 40 : Bac BENIN 2012 série D (PI)

Exercice 1 :

1°) Donnons l'écriture complexe de T

$$z' = x' + iy'$$

$$= (-x - y + 4) + i(x - y + 8)$$

$$= -x - y + 4 + ix - iy + 8i$$

$$= -(x + iy) + i(x + iy) + 4 + 8i$$

$$= (-1 + i)z + 4 + 8i \text{ d'où } T: z' = (-1 + i)z + 4 + 8i$$

2°) Nature et éléments caractéristique de T .

L'écriture complexe de T est de la forme $z' = az + b$ avec

$$a = -1 + i \text{ et } b = 4 + 8i$$

$a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ et $|a| = \sqrt{2}$ donc T est la composée commutative d'une homothétie h et d'une rotation r . h a pour rapport

$\sqrt{2}$ et pour centre I d'affixe $4i$; r a pour centre I et pour angle $\frac{3\pi}{4}$.

En conclusion, T est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, de centre I et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

3°) Déterminons l'ensemble (C)

$$|z'| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |(-1 + i)z + 4 + 8i| = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |-1 + i| \left| z - \frac{4 + 8i}{1 - i} \right| = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |z - (-2 + 6i)| = 2$$

Soit $K(-2 + 6i)$ on a : $|z'| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow KM = 2$ donc (C) est le cercle de centre K et de rayon 2.

Exercice 2 :

1°) Déterminons l'ensemble des valeurs prises par X .

Soit E cet ensemble :

$$E = \{-4; 0; 4; 5; 9; 14\}$$

2°) Donnons la loi de probabilité de X

Soit Ω l'univers associé à cette expérience réalisée.

$$\text{card } \Omega = C_{10}^2 = 45$$

$$P(X = -4) = \frac{C_5^2}{45} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_5^1 \times C_5^1}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 4) = \frac{C_3^1}{45} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

$$P(X = 5) = \frac{C_2^1 \times C_5^1}{45} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$P(X = 9) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{45} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

$$P(X = 14) = \frac{C_2^2}{45} = \frac{1}{45}$$

x_i	-4	0	4	5	9	14
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{1}{45}$

3°) a- Déterminons la probabilité d'obtenir :

i) 2 boules noires

Soit P_1 cette probabilité

$$P_1 = \frac{C_2^2}{C_{n+5}^2} = \frac{2}{(n+5)(n+4)}$$

ii) aucune boule blanche

Soit P_2 cette probabilité

$$P_2 = \frac{C_5^2}{C_{n+5}^2} = \frac{20}{(n+5)(n+4)}$$

b- Déterminons la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche.

Cette probabilité est $P_2 = \frac{20}{(n+5)(n+4)}$

c- Déterminons n pour que cette probabilité soit égale à

$$\frac{2}{11}$$

$$P_2 = \frac{2}{11} \Leftrightarrow \frac{20}{(n+5)(n+4)} = \frac{2}{11}$$

$$\Leftrightarrow 110 = n^2 + 9n + 20$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 9n - 90 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n+15)(n-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow n = -15 \text{ ou } n = 6 \text{ or } n > 0 \text{ donc } \underline{n = 6}$$

Problème :

Partie A :

1° a- Vérifions que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3 \text{ donc}$$

$$\underline{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$$

b- Etudions les variations de u

Soit D_u l'ensemble de définition de u .

$$D_u = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

• Limites aux bornes de D_u

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 1 - \ln|x|) = -\infty \text{ car :}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln|x| = -\infty \end{cases} \text{ donc } \underline{\lim_{x \rightarrow -\infty} u = -\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 1 - \ln|x|)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} - \frac{\ln x}{x^3} \right) \text{ car en } +\infty, x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3} - \frac{\ln x}{x^3} \right) = 1 \text{ donc}$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 1 - \ln|x|) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} -\ln|x| = +\infty \end{cases}$$

$$\text{donc } \underline{\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = +\infty}$$

• u est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, u'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{3x^3 - 1}{x}$$

$$= \frac{3\left(x^3 - \frac{1}{3}\right)}{x} \text{ donc}$$

$$u'(x) = \frac{3}{x} \left(x - \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \right) \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt[3]{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^2 \right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*; \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt[3]{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^2 \right) > 0 \text{ donc le signe de } u'$$

$$\text{est celui de } \frac{x - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}{x}$$

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt[3]{3}}$$

$$u'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup \left] \frac{1}{\sqrt[3]{3}}; +\infty[$$

$$u'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left] 0; \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right[$$

• Sens de variation

u est strictement décroissante sur $\left] 0; \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right[$, strictement

croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $\left] \frac{1}{\sqrt[3]{3}}; +\infty[$.

• Tableau de variation

$$u\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = \frac{1}{3} + 1 - \ln 3^{\frac{-1}{3}} = \frac{4}{3} + \frac{\ln 3}{3} = \frac{4 + \ln 3}{3}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	$+\infty$
$u'(x)$	+	-	0	+
$u(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{4 + \ln 3}{3}$	$+\infty$

2° a- Calculons $u(-1)$

$$\underline{u(-1) = 0}$$

Sur $]-\infty; 0[$, u est continue et strictement croissante. $u(]-\infty; 0[) = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-\infty; 0[$.

Sur $]0; +\infty[$, u admet un minimum en $\frac{1}{\sqrt{3}}$ qui est

égale à $\frac{4 + \ln 3}{3}$ donc $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$u(x) \geq \frac{4 + \ln 3}{3} \text{ or } \frac{4 + \ln 3}{3} > 0 \text{ donc}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[; u(x) \neq 0$$

En conclusion, l'équation $u(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}^*$ une seule solution. Puisque $u(-1) = 0$

Alors -1 est l'unique solution de l'équation $u(x) = 0$.

c- Dédisons en le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x

D'après ce qui précède, $\forall x \in]0; +\infty[$, $u(x) > 0$

$\forall x \in]-\infty; -1[$; $u(x) < 0$ et $\forall x \in]-1; 0[$;

$u(x) > 0$

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{En résumé on a : } \begin{cases} \forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[; u(x) > 0 \\ \forall x \in]-\infty; -1[; u(x) < 0 \\ u(-1) = 0 \end{cases}$$

Partie B :

1) Etudions les variations de f

Soit D_f , l'ensemble de définition de f .

$$D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

• Limite aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

• f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) &= x + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln|x|}{x^2} \\ &= \frac{x^3 + 1 - \ln|x|}{x^2} \text{ donc} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{x^2}$$

D'après la question 2°) c- de la partie A, on a :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 0[\cup]1; +\infty[$$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$, strictement décroissante sur $]-1; 0[$ et $]1; +\infty[$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

4°) Etudions les branches infinies

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à $(\mathcal{C})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Pour } x > 0, \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{\ln x}{x^2} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

d'où $(\mathcal{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont la direction est celle de l'axe des ordonnées.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ?$$

Pour $x < 0$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{\ln(-x)}{(-x)^2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{(-x)^2} = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \text{ d'où } (\mathcal{C}) \text{ admet au voisinage de } -\infty \text{ une}$$

branche parabolique dont la direction est celle de l'axe des ordonnées.

b- Démontrons que la courbe $(\mathcal{C})$ de f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α telle que : $\frac{2}{3} < \alpha < 1$

sur $]-\infty; 0[$; f admet un minimum en -1 égal à $\frac{1}{2}$

donc $\forall x \in]-\infty; 0[$, $f(x) \geq \frac{1}{2}$, par conséquent $(\mathcal{C})$

ne rencontre pas l'axe des abscisses sur $]-\infty; 0[$

sur $]0; +\infty[$, f est continue et strictement croissante et

$f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$. $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$

admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$

par conséquent $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en seul point sur $]0; +\infty[$.

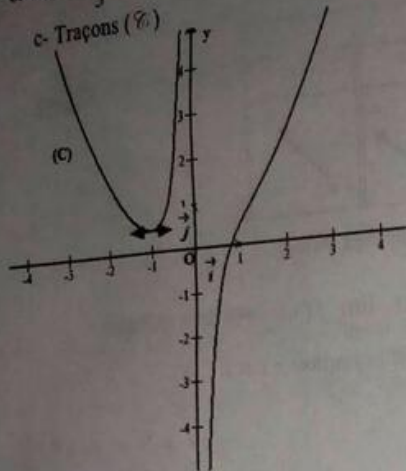
$$\text{Par ailleurs, } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9} + \frac{3}{2} \ln \frac{2}{3} \approx 0,38$$

Et $f(1) = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) \times f(1) < 0$ donc $\frac{2}{3} < \alpha < 1$

En conclusion, $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en un seul point dont l'abscisse

α vérifie $\frac{2}{3} < \alpha < 1$

c- Traçons $(\mathcal{C})$



Partie C :

5°) a- Démontrons qu'une équation de la courbe (Γ) est

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\ln|x|}{x}$$

$$M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\ln|x|}{x}$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}(-x')^2 + \frac{\ln|-x'|}{(-x')}$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}x'^2 - \frac{\ln|x'|}{x'} \text{ donc } M' \text{ appartient à la}$$

droite (Γ) d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\ln|x|}{x}$

b- Étudions la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Γ)

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{\ln|x|}{x} \right) = 2 \frac{\ln|x|}{x} = g(x)$$

$$\ln|x| = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

$$\ln|x| < 0 \Leftrightarrow 0 < |x| < 1$$

$$\Leftrightarrow x \in]-1; 0[\cup]0; 1[$$

$$\ln|x| > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

Tableau de signe de $g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\ln x $	+	0	-	0	+
x	-	-	-	+	+
$g(x)$	-	0	+	0	+

$(\mathcal{C})$ est en dessous de (Γ) sur les intervalles $]-\infty; -1[$ et $]0; 1[$.

$(\mathcal{C})$ est au dessus de (Γ) sur $]1; 0[$ et $]1; +\infty[$

$(\mathcal{C})$ et (Γ) se coupent en $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ et $A'\left(1; \frac{1}{2}\right)$

c- Calculons A

$$A = \left(\int_{\alpha}^1 -\frac{\ln x}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \right) u.a$$

$$= \left[-\frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_{\alpha}^1 + \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^e u.a$$

$$A = \left(\frac{1}{2}(\ln \alpha)^2 + \frac{1}{2} \right) u.a$$

d- Exprimons A comme polynôme de variable α

$$A = \frac{1}{2}(\ln \alpha)^2 + \frac{1}{2} \text{ or } f(\alpha) = 0 \text{ donc } \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 0 \text{ soit}$$

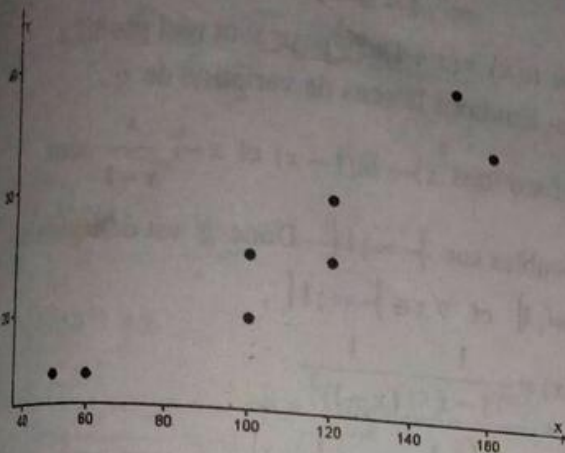
$$\ln \alpha = -\frac{1}{2}\alpha^3 \text{ et par suite}$$

$$A = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\alpha^3 \right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\alpha^6 + \frac{1}{2}$$

$$A = \left(\frac{1}{8}\alpha^6 + \frac{1}{2} \right) u.a$$

Problème 1 :

a- Représentons le Nuage de points



b- Déterminons les coordonnées du point moyen G

Posons : $G(\bar{x}; \bar{y})$ avec :

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i = 107,5$$

$$\bar{y} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i = 25,625 \text{ donc } G(107,5; 25,625)$$

2°) a- Calculons le coefficient de corrélation linéaire

Calculons d'abord les variances $V(X)$ et $V(Y)$ et le covariance $\text{cov}(X, Y)$

$$V(X) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i^2 - \bar{x}^2 = 1318,75$$

$$V(Y) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i^2 - \bar{y}^2 = 71,484375$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i y_i - \bar{x} \bar{y} = 289,0625$$

$$\text{On a : } r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = 0,94$$

b- Explication de la proposition de loyer

On a : $0,87 \leq |r| < 1$. Donc il y a une forte corrélation linéaire entre le salaire et la proposition de loyer. Le salaire permet alors d'expliquer la proposition de loyer.

Déterminons une équation de la droite de régression

Soit (D) cette droite.

$$(D): y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}$$

alors $a = 0,219$ et $b = 2,062$

$$\text{On peut prendre } (D): y = 0,219x + 2,062$$

Problème 2 :

1°) a- Détermine l'écriture complexe de la translation t

$$t: z' = z + 6 + 2i$$

b- Justifie que la rotation r a pour écriture complexe : $z' = -iz$

L'écriture complexe de r est : $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}} z$ d'où r

c- Déterminons les coordonnées des points C et D

On a : $t(B) = C \Leftrightarrow z_C = z_B + 6 + 2i$

$$\Leftrightarrow z_C = -2 + 6i + 6 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z_C = 4 + 8i \text{ donc } C(4; 8)$$

$$\text{On a : } r(B) = D \Leftrightarrow z_D = -iz_B$$

$$\Leftrightarrow z_D = -i(-2 + 6i)$$

$$\Leftrightarrow z_D = 6 + 2i$$

$$\text{Donc } D(6; 2)$$

d- Démontrons que ABCD est un carré.

$$\text{On a : } z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = -2 + 6i$$

$$\text{et } z_{\overline{DC}} = z_C - z_D = -2 + 6i \text{ alors } z_{\overline{AB}} = z_{\overline{DC}} \Leftrightarrow$$

$$\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow ABCD \text{ est un parallélogramme (a)}$$

$$\text{De plus : } \frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = \frac{-2 + 6i}{6 + 2i} = i \text{ alors le triangle}$$

ABD est isocèle et rectangle en A.

(a) et (b) $\Rightarrow$ ABCD est un carré

2°) a- Expression de x' et y' en fonction de x et y .

Pour $(x; y) \neq (6; 2)$

$$z' = \frac{x + iy + 2 - 6i}{x + iy - 6 - 2i}$$

$$= \frac{(x+2) + i(y-6)}{(x-6) + i(y-2)}$$

$$= \frac{[(x+2)+i(y-6)][(x-6)-i(y-2)]}{(x-6)^2 + (y-2)^2}$$

$$= \frac{(x^2 - 4x + y^2 - 8y) + i(-4x - 8y + 40)}{(x-6)^2 + (y-2)^2}$$

Alors $x' = \frac{x^2 - 4x + y^2 - 8y}{(x-6)^2 + (y-2)^2}$ et

$$y' = \frac{-4x - 8y + 40}{(x-6)^2 + (y-2)^2}$$

b- Déterminons l'ensemble (C)

$$M \in (C) \Leftrightarrow z' \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + y^2 - 8y}{(x-6)^2 + (y-2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + y^2 - 8y = 0 \\ (x-6)^2 + (y-2)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = 20 \\ (x; y) \neq (6; 2) \end{cases}$$

Donc (C) est le cercle de centre le point d'affixe $2 + 4i$ et de rayon $2\sqrt{5}$ privé du point D.

c-Justifions que le tracé de (C) permet d'obtenir une représentation de la haie-circulaire.

Les points $A(0; 0)$, $B(-2; 6)$, $C(4; 8)$ et $D(6; 2)$ appartiennent au cercle d'équation

$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$ donc le tracé de (C) permet d'obtenir une représentation de la haie-circulaire.

Problème 3 :

1°) a- Résolvons sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$

L'équation caractéristique de cette équation différentielle du second ordre sans second membre est $r^2 + 2r + 1 = 0$ de solution réelle unique -1 .

Alors les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $y_{A,B}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y_{A,B}(x) = (Ax + B)e^{-x} \text{ avec } (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

b- Dédudions-en que pour tout x élément de $[0; +\infty[$, on a : $u(x) = (x+1)e^{-x}$

u est solution de l'équation $y'' + 2y' + y = 0$. Il existe deux réels A et B tels que :

$$u(x) = (Ax + B)e^{-x}$$

Pour tout réel x , on a :

$$u'(x) = Ae^{-x} - e^{-x}(Ax + B) = (-Ax + A - B)e^{-x}$$

$$u(0) = 1 \Leftrightarrow B = 1$$

$$u'(0) = 0 \Leftrightarrow A - B = 0$$

$$\Leftrightarrow A = B = 1$$

D'où $u(x) = (x+1)e^{-x}$ pour tout réel positif x .

2°) a- Etudions le sens de variation de g .

Les fonctions $x \mapsto \ln(1-x)$ et $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ sont

dérivables sur $] -\infty; 1[$. Donc g est dérivable sur $] -\infty; 1[$ et $\forall x \in] -\infty; 1[$,

$$g'(x) = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{(x-1)^2} = -\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) \text{ pour tout } x \in] -\infty; 1[.$$

$g'(x) < 0$. Donc g est strictement décroissante sur $] -\infty; 1[$.

b- Dédudions-en que : $\forall x \in] -\infty; 0[$, $g(x) > 0$.

g étant strictement décroissante sur $] -\infty; 1[$, donc

g est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$. De plus

$g(0) = 0$ donc $g(x) > 0$, $\forall x \in] -\infty; 0[$.

3°) a- Justifions que $E = \mathbb{R}$

$$E = \left\{ x \in] -\infty; 0[\mid 1-x > 0 \right\} \cup [0; +\infty[$$

$$= (]-\infty; 0[\cap] -\infty; 1[) \cup [0; +\infty[$$

$$=] -\infty; 0[\cup [0; +\infty[= \mathbb{R}$$

b- Calculons les limites de f aux bornes de E .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \ln(1-x) + 1)$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) = +\infty \end{cases} \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)e^{-x} + e^{-x} = 0 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = 0$$

4°) a- Etudions la dérivabilité de f en 0.

Pour $x < 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \ln(1-x)$ donc

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.

Pour $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x}$
 $= e^{-x} + \frac{e^{-x} - 1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} - \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 0$

Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = -1 \end{cases}$ on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ alors f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$
 Etant dérivable à gauche en 0 et à droite en 0 et $f'_g(0) = f'_d(0)$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

b- Calculons $f'(x)$, $\forall x \in]-\infty; 0[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$

Pour tout x élément de $]-\infty; 0[$,

$$f'(x) = \ln(1-x) + \frac{-x}{1-x} = g(x)$$

Pour tout x élément de $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+1) \Rightarrow$$

$$f'(x) = -xe^{-x}$$

c- Dressons le tableau de variation de f

D'après la question 2°) b- $g(x) > 0$, $\forall x \in]-\infty; 0[$ et $f'(x) = g(x)$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $-x < 0$ et $e^{-x} > 0$, alors $f'(x) < 0$, $\forall x \in]0; +\infty[$. Donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			1	0

Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $-1,3 < \alpha < -1,2$

f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ qui contient les nombres $-1,3$ et $-1,2$

$$f(-1,3) = -1,3 \ln(2,3) + 1 = -0,083 < 0$$

$$f(-1,2) = -1,2 \ln(2,2) + 1 = 0,0533 > 0$$

alors l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-\infty; 0[$ une solution unique appartenant à $]-1,3; -1,2[$.

f est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $f([0; +\infty]) =]0; 1[$ or $0 \notin]0; 1[$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]0; +\infty[$.

En somme l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $-1,3 < \alpha < -1,2$

6°) a- Etudions les branches infinies de la courbe (Γ)

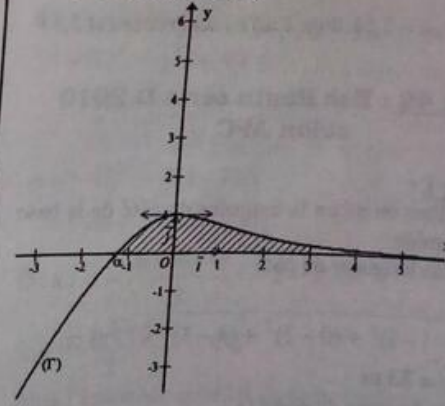
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote de (Γ) au voisinage de $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln(1-x) + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

donc (Γ) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction, celle de l'axe des ordonnées.

b- Construisons (Γ)



Partie B :

7°) a- Justifions que h est une primitive de f sur $]-\infty; 0[$

f est continue sur $]-\infty; 0[$. La fonction h est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $\forall x \in]-\infty; 0[$,

$$h'(x) = x \ln(1-x) + \frac{1}{x-1} \times \frac{x^2-1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$= x \ln(1-x) + 1 \text{ on a donc}$$

$h'(x) = f(x)$ sur $]-\infty; 0[$ et $h'(0) = f(0)$. D'où h est une primitive de f sur $]-\infty; 0[$.

b- Calculons $\int_0^{\alpha} (x+1)e^{-x} dx$

$$\int_0^{\alpha} (x+1)e^{-x} dx = \left[-(x+1)e^{-x} \right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} -e^{-x} dx$$

$$= \left[-(x+2)e^{-x} \right]_0^{\alpha}$$

$$= 2 - (\alpha+2)e^{-\alpha}$$

8°) a- Justifions que :

$$\int_{\alpha}^3 f(x) dx = \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{2\alpha} - 5e^{-3} + 2$$

$$\int_{\alpha}^3 f(x) dx = \int_{\alpha}^0 (x \ln(1-x) + 1) dx + \int_0^3 (x+1)e^{-x} dx$$

$$= h(0) - h(\alpha) - 5e^{-3} + 2$$

$$= -\frac{\alpha^2-1}{2} \ln(1-\alpha) + \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - 5e^{-3} + 2$$

Or $\alpha \ln(1-\alpha) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(1-\alpha) = -\frac{1}{\alpha}$ alors

$$\int_{\alpha}^3 f(x) dx = \frac{\alpha^2-1}{2\alpha} + \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - 5e^{-3} + 2$$

$$= \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{2\alpha} - 5e^{-3} + 2 \text{ d'où le résultat}$$

b- Valeur approchée de l'aire des espaces verts.
L'aire de la partie réservée pour l'aménagement des espaces verts est $\int_{\alpha}^3 f(x) dx$ unités d'aire.

D'après la question précédente et avec $\alpha = -1,25$ on

a : $\int_{\alpha}^3 f(x) dx = 2,54$ donc l'aire recherchée est 2,54 u.a

Sujet 42 : Bac Bénin série D 2010 selon APC

Problème 1 :

1°) Calculons en mètre la longueur du côté de la base de la pyramide

Soit C cette longueur du côté

$C = AB$

$$= \sqrt{(-1-1)^2 + (0-2)^2 + (4-3)^2} \times 11 \text{ m on}$$

trouve $C = 33 \text{ m}$

2°) a- Coordonnées du point D

ABCD est un carré car SABCD est une pyramide régulière de base ABCD

ABCD est donc un parallélogramme on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x_D \\ -1-y_D \\ 6-z_D \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1+2 = 3 \\ y_D = -1+2 = 1 \text{ d'où} \\ z_D = 6-1 = 5 \end{cases}$$

D(3;1;5)

b- Déterminons les coordonnées G de l'isobarycentre des points A, B, C et D

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}, \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}, \frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\right)$$

On trouve $G\left(1; \frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$

3°) a- Démontrons que (E) est une droite passant par H et dirigé par $\vec{\mu}$

$$M \in (E) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \vec{\mu} = (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}) \wedge \vec{\mu}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{DM}) \wedge \vec{\mu} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \wedge \vec{\mu} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} \wedge \vec{\mu} = \vec{0}$$

H milieu du segment [AC] donc $H\left(1; \frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$, ainsi

$$H = G$$

$M \in (E) \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MH} \wedge \vec{\mu} = \vec{0}$ d'où (E) est la droite passant par H, milieu du segment [AC] et dirigé par $\vec{\mu}$

b) Ecrivons une représentation paramétrique de (E)

$$(E) : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \frac{1}{2} - 2\alpha, (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = \frac{9}{2} - 2\alpha \end{cases}$$

4°) Démontrons que $S\left(\frac{1}{3}; \frac{11}{6}; \frac{35}{6}\right)$

$$\{S\} = (E) \cap (P)$$

$$M \in (E) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha (1) \\ y = \frac{1}{2} - 2\alpha (2) \\ z = \frac{9}{2} - 2\alpha (3) \\ 11x - 10y + 2z + 3 = 0 (4) \end{cases}$$

(1), (2) et (3) dans (4) $\Leftrightarrow$

$$11(1+\alpha) - 10\left(\frac{1}{2} - 2\alpha\right) + 2\left(\frac{9}{2} - 2\alpha\right) + 3 = 0 \text{ on trouve}$$

$$\alpha = -\frac{2}{3}$$

$$= -5 + 1 - 6i = -4 - 6i \quad (2)$$

De (1) et (2) $\overline{z_{KL}} = \overline{z_{NM}} \Leftrightarrow \overline{KL} = \overline{NM}$ donc KLMN est un parallélogramme (a)

KL et LM sont deux côtés consécutifs du quadrilatère KLMN

$$\frac{z_K - z_L}{z_M - z_L} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{2 + 4i + 2 + 2i}{-5 + 2 + 2i}$$

$$= \frac{4 + 6i}{-3 + 2i} = \frac{4 + 6i}{-3 + 2i} \cdot \frac{-3 - 2i}{-3 - 2i} = \frac{-12 - 8i - 18 - 12i}{9 - 4i^2} = \frac{-30 - 20i}{13} = -2i \in i\mathbb{R} \text{ donc (KL)}$$

$\perp$ (LM) (b)

De (a) et (b) KLMN est un rectangle

b) Déterminons une équation cartésienne de (Γ)

(Γ) est un cercle circonscrit au rectangle KLMN donc un diamètre de (Γ) est le segment $[MK]$

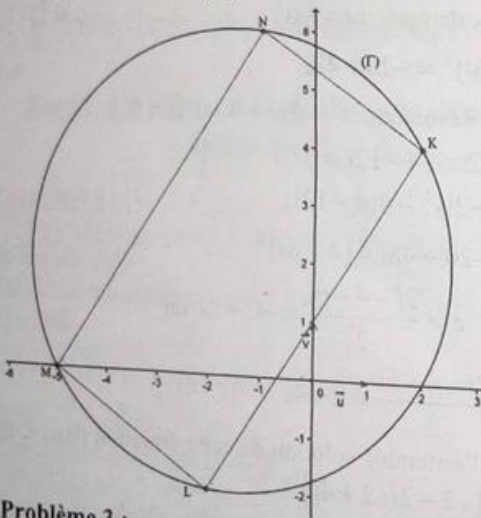
Donc le centre I de (Γ) a pour affixe

$$z_I = \frac{z_M + z_K}{2} = -\frac{3}{2} + 2i$$

$$\text{Et le rayon de } (\Gamma) \text{ est } R = \frac{MK}{2} = \frac{|z_K - z_M|}{2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

$$\text{D'où } (\Gamma) : \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{65}{4}$$

c) construisons (Γ)



Problème 3 :

10°) Etudions le sens de variation de g

$$g(x) = 1 - (x^2 + 1)e^{-x}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -2xe^{-x} + (x^2 + 1)e^{-x}$$

$$= (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$$

$$g'(x) = (x-1)^2 e^{-x}$$

donc

$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geq 0$ et $e^{-x} > 0$ donc

$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, g'(x) > 0 \\ g'(1) = 0 \end{array} \right.$ d'où g est strictement

croissante sur $\mathbb{R}$

11°) Calculons $g(0)$ et déduisons le signe de $g(x)$

$$g(0) = 0$$

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$g(0) = 0 \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in]-\infty; 0[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0 \\ g(0) = 0 \end{array} \right.$$

12°) Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{x^2 + 2x + 3}{x} \right) e^{-x} = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + 3e^{-x}$$

$$= +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

13°) a- Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables

$\forall x \in \mathbb{R},$

$$f'(x) = 1 + (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

$$= 1 + (2x + 2 - x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

$$= 1 + (-x^2 - 1)e^{-x}$$

$$= 1 - (x^2 + 1)e^{-x}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$

b- Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

$$f(0) = -1 + 3 = 2$$

14°) a- Etudions les branches infinies de (C)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1+(x^2+2x+3)e^{-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} + \frac{x^2+2x+3}{x} e^{-x} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

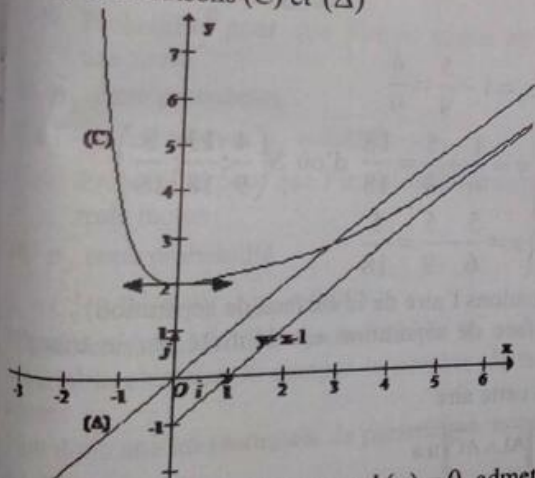
admet une branche parabolique de direction l'axes des ordonnées au voisinage de $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1+(x^2+2x+3)e^{-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} + \left(x+2+\frac{3}{x}\right)e^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} + xe^{-x} + 2e^{-x} + \frac{3}{x}e^{-x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + 3e^{-x} = -1$ alors la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

b) Construisons (C) et (Δ)



15°) Démontrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α vérifiant $2 < \alpha < 3$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x) - 1$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, -(x^2 + 1) < 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) < 0$ donc h est continue et strictement

$$h(x) < 0 \text{ donc } h \text{ est continue et strictement décroissante sur } \mathbb{R} \text{ et } h(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

Donc $h(\mathbb{R}) =]-1; +\infty[$, $0 \in]-1; +\infty[$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α

$$\text{De plus }]2; 3[\subset \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} h(2) = 0,4887 \\ h(3) = -0,1038 \end{cases}$$

$g(2) \times g(3) < 0$ donc $2 < \alpha < 3$ par suite l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α vérifiant $2 < \alpha < 3$

16°) Démontrons que $\forall x \in [2; 3], f(x) \in [2; 3]$

$$\begin{aligned} [2; 3] &\subset [0; +\infty[\text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur } [2; 3] \\ x \in [2; 3] &\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow f(2) \leq f(x) \leq f(3) \end{aligned}$$

$$f(2) = 1 + 11e^{-2} = 2,48 > 2 \text{ et}$$

$$f(3) = 2 + 18e^{-3} = 2,89 < 3$$

Donc $f(2) \leq f(x) \leq f(3) \Leftrightarrow 2 < f(2) \leq f(x) \leq f(3) < 3$ d'où $\forall x \in [2; 3], f(x) \in [2; 3]$

17°) a- Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n \in [2; 3]$

Raisonnons par récurrence

$$\mu_0 = 2 \in [2; 3]$$

Supposons que jusqu'à un ordre $k \in \mathbb{N}, \mu_k \in [2; 3]$ et démontrons que $\mu_{k+1} \in [2; 3]$

$$\mu_{k+1} = f(\mu_k)$$

$$\text{De 16°) } \mu_k \in [2; 3], f(\mu_k) \in [2; 3] \Leftrightarrow$$

$$\mu_{k+1} \in [2; 3] \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}, \mu_n \in [2; 3]$$

b- Prouvons que (μ_n) est strictement croissante

$$\mu_1 = f(\mu_0) = f(2) = 2,48$$

On a donc : $\mu_0 < \mu_1$

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que, $\mu_k < \mu_{k+1}$

$$\mu_k < \mu_{k+1} \Leftrightarrow f(\mu_k) < f(\mu_{k+1}) \text{ car } f \text{ est strictement croissante sur } [2; 3]$$

$$\Leftrightarrow \mu_{k+1} < \mu_{k+2}, \text{ d'où } (\mu_n) \text{ est strictement croissante } \Leftrightarrow \mu_{n+1} < \mu_{n+2}$$

c- Dédisons que la suite (μ_n) est convergente.

(μ_n) est croissante et majorée donc la suite (μ_n) est convergente

18°) Justifions que le prix remporté par Yori dépasse 20 000

Soit P ce prix

$$P = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_n \times 10\,000 \text{ euro}$$

(μ_n) est convergente et sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$
 $f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \alpha$, avec $\alpha \in [2; 3]$

Alors $P > 20\,000$ d'où le prix remporté par Yori au CID dépasse 20 000

Sujet 43: Bac Bénin série D 2011 selon APC

Problème 1 :

1°) Déterminons les coordonnées des points D, C et I

$D(0;1;0)$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow C(1;1;0)$$

I milieu de $[ED]$ donc

$$I\left(\frac{x_E + x_D}{2}, \frac{y_E + y_D}{2}, \frac{z_E + z_D}{2}\right); E(0;0;1) \text{ alors}$$

$$I\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

2°) Justifions que $(\mathcal{P}) : x - y + z = 0$

$(\mathcal{P})$ passe par les points I, A et C non alignés donc

$\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$

$$\overrightarrow{AI}\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ et } \overrightarrow{AC}(1;1;0)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\mathcal{P}) : -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + d = 0, d \in \mathbb{R}$$

$$A \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow d = 0 \text{ alors}$$

$$(\mathcal{P}) : -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \text{ par suite}$$

$(\mathcal{P}) : x - y + z = 0$ (l'égalité précédente a été multipliée par -2)

3°) Coordonnées du point S

$$\{S\} = (\Delta) \cap (\mathcal{P})$$

$$(\Delta) : x - 1 = -y + \frac{1}{6} = z - \frac{5}{6} \text{ posons}$$

$$x - 1 = -y + \frac{1}{6} = z - \frac{5}{6} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace

$$\text{On a donc } M \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \alpha \\ -y + \frac{1}{6} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z - \frac{5}{6} = \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \frac{1}{6} - \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \frac{5}{6} + \alpha \end{cases}$$

$$M \in (\Delta) \cap (\mathcal{P})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha (1) \\ y = \frac{1}{6} - \alpha (2) \\ z = \frac{5}{6} + \alpha (3) \\ x - y + z = 0 (4) \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

(1), (2) et (3) dans (4) $\Leftrightarrow$

$$1 + \alpha - \frac{1}{6} + \alpha + \frac{5}{6} + \alpha = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + \frac{5}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{5}{9}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \\ y = \frac{1}{6} + \frac{5}{9} = \frac{13}{18} \\ z = \frac{5}{6} - \frac{5}{9} = \frac{5}{18} \end{cases} \text{ d'où } S\left(\frac{4}{9}; \frac{13}{18}; \frac{5}{18}\right)$$

4°) Calculons l'aire de la surface de séparation

La surface de séparation est délimitée par le triangle IAC

Soit A cette aire

$$A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AC}\|_{u,a}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \times (1\text{m})^2$$

$$\Leftrightarrow \text{d'où } A = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{m}^2$$

5°) Calculons le volume du compartiment en forme de tétraèdre ACID

$$V_{ACDI} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|_{u,v}$$

$\overline{ACD}(0;1;0)$ donc

$$V_{ACD} = \frac{1}{6} \left| -\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \times 0 \right| = \frac{1}{12} \text{ u.v.}$$

soit $V_{ACD} = \frac{1}{12} \text{ m}^3$

↳ Déduisons le volume du second compartiment
soit V ce volume

$V = V_{ABCDE} - V_{ACD}$, or

$$V_{ABCDE} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{AB^2 \times AE}{3} = \frac{1}{3} \text{ m}^3$$

Donc $V = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) \text{ m}^3$ alors $V = \frac{1}{4} \text{ m}^3$

Problème 2 :

(1) A chaque jeu joué, on associe deux « issues » :
soit Firmin gagne une moto (avec une probabilité $p=0,1$), soit Firmin ne gagne pas. On a donc une expérience de Bernoulli. On répète indépendamment cette expérience 5 fois. On a donc un schéma de 5 épreuves de Bernoulli.

a- Probabilité pour que Firmin ne gagne aucune moto

soit p_1 ; $p_1 = C_5^0 (0,1)^0 (1-0,1)^5 = (0,9)^5$ on trouve $p_1 = 0,59049$

b- Probabilité pour que Firmin gagne au moins une moto

soit p_2 cette probabilité

$p_2 = 1 - p_1$ on trouve $p_2 = 0,409$

c- Probabilité pour que Firmin gagne exactement trois motos

soit p_3 cette probabilité

$p_3 = C_5^3 (0,1)^3 (0,9)^2$, $p_3 = 0,0081$

(2) a- déterminons la loi de probabilité de X
la variable aléatoire X compte le nombre de motos gagnées

soit donc une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,1$.

l'univers associé à cette épreuve

$(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

$P(X=0) = p_1 = 0,59049$

$P(X=1) = C_5^1 (0,1)^1 (0,9)^4 = 0,32805$

$P(X=2) = C_5^2 (0,1)^2 (0,9)^3 = 0,0729$

$P(X=3) = p_3 = 0,0081$

$P(X=4) = C_5^4 (0,1)^4 (0,9)^1 = 0,00045$

$P(X=5) = C_5^5 (0,1)^5 (0,9)^0 = (0,1)^5 = 0,00001$

résumé dans le tableau

X_i	0	1	2	3	4	5
$p(X=X_i)$	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

b- Déterminons l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$

$E(X) = np$

$= 5 \times 0,1 \Leftrightarrow E(X) = 0,5$

$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

$= \sqrt{5 \times 0,1 \times 0,9} \Leftrightarrow \sigma(X) = 0,6708$

Problème 3 :

$f_m(x) = (2x+m) \ln(x^2+mx-3)$

1°) a- Prouvons que $D_m = J_m \cup J'_m$

$$D_m = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 + mx - 3 \neq 0 \right\}$$

Posons $x^2 + mx - 3 = 0$. Le discriminant Δ de cette équation est : $\Delta = m^2 + 12$; $\Delta > 0$.

$x^2 + mx - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 12}}{2}$ ou

$x = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 12}}{2}$. On a le tableau de signe

suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-m - \sqrt{m^2 + 12}}{2}$	$\frac{-m + \sqrt{m^2 + 12}}{2}$	$+\infty$
$x^2 + mx - 3 = 0$	+	○	○	+

Alors

$$D_m = \left] -\infty; \frac{-m - \sqrt{m^2 + 12}}{2} \right[\cup \left] \frac{-m + \sqrt{m^2 + 12}}{2}; +\infty \right[$$

b- Prouvons que f_m est dérivable et déterminons sa dérivée f'_m .

La fonction $x \mapsto 2x+m$ est dérivable sur chacun des intervalles J_m et J'_m (1)

La fonction $x \mapsto x^2 + mx - 3$ est dérivable sur J_m et J'_m et $\forall x \in D_m$, $x^2 + mx - 3 > 0$ donc la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + mx - 3)$ est dérivable sur J_m et sur J'_m

(2)

(1) et (2) $\Rightarrow f_m$ est dérivable sur chacun des intervalles J_m et J'_m .

$\forall x \in D_m$, $f'_m(x) = 2 \ln(x^2 + 2x - 3) + \frac{(2x+m)^2}{x^2 + mx - 3}$

2°)

*Étudions les limites de f_0 aux bornes de D_0

$$f_0(x) = 2x \ln(x^2 - 3) \text{ et } D_0 =]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 3) = +\infty, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = -\infty$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} 2x = -2\sqrt{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \ln(x^2 - 3) = -\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f_m(x) = +\infty$$

$$- \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} 2x = 2\sqrt{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \ln(x^2 - 3) = -\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f_m(x) = -\infty$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 3) = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty$$

Etudions les limites de f_2 aux bornes de D_2

$$f_2(x) = (2x+2) \ln(x^2 + 2x - 3) \text{ et}$$

$$D_2 =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$$

On obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f_2(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = -\infty$$

3°) a-

*Etudions le sens de variation de f'_0

$$f'_0(x) = 2 \ln(x^2 - 3) + \frac{4x^2}{x^2 - 3}$$

f'_0 est dérivable sur tout intervalle de D_0 .

$$\forall x \in D_0, f''_0(x) = \frac{4x}{x^2 - 3} + \frac{8x(x^2 - 3) - 2x(4x^2)}{(x^2 - 3)^2}$$

$$f''_0(x) = \frac{4x(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2}$$

Le signe de f''_0 sur D_0 est celui de $x(x^2 - 9)$. On a alors :

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$
$f''_0(x)$	-	○	+	○	-	+

$\forall x \in]-\infty; -3[\cup]\sqrt{3}; 3[$, $f''_0(x) < 0$
donc f'_0 est strictement décroissante sur $]-\infty; -3[$
et sur $]\sqrt{3}; 3[$.

$\forall x \in]-3; -\sqrt{3}[\cup]3; +\infty[$, $f''_0(x) > 0$

donc f'_0 est strictement croissante sur $]-3; -\sqrt{3}[$
et sur $]3; +\infty[$.

*Etudions le sens de variation de f'_2

$$f'_2(x) = 2 \ln(x^2 + 2x - 3) + \frac{(2x+2)^2}{x^2 + 2x - 3}$$

f'_2 est dérivable sur tout intervalle de D_2 .

$\forall x \in D_2$,

$$f''_2(x) = \frac{2(2x+2)}{x^2 + 2x - 3} + \frac{4(2x+2)(x^2 + 2x - 3) - (2x+2)^2}{(x^2 + 2x - 3)^2} \text{ on}$$

$$\text{obtient : } f''_2(x) = \frac{4(x+1)(x^2 + 2x - 11)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

Le signe de f''_2 sur D_2 est celui de la fonction

$$x \mapsto (x+1)(x^2 + 2x - 11).$$

Posons $x^2 + 2x - 11 = 0$, le discriminant δ de cette

$$\text{équation est : } \delta = 48 = (4\sqrt{3})^2$$

$$x^2 + 2x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = -1 - 2\sqrt{3} \text{ ou } x = -1 + 2\sqrt{3}$$

Le tableau de signe de $f''_2(x)$ se présente comme suit :

x	$-\infty$	$-1 - 2\sqrt{3}$	-3	1	$-1 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''_2(x)$	-	○	+	○	-	+

Alors la fonction f'_2 est strictement décroissante sur

$]-\infty; -1 - 2\sqrt{3}[$ et sur $]1; -1 + 2\sqrt{3}[$; f'_2 est

strictement croissante sur $]-1 - 2\sqrt{3}; -3[$ et sur

$[-1 + 2\sqrt{3}; +\infty[$.

b- *Précisons le signe de $f'_0(-3)$, $f'_0(3)$,

$$f'_2(-1 - 2\sqrt{3}) ; f'_2(-1 + 2\sqrt{3})$$

$$f'_0(-3) = 2 \ln 6 + 6 ; \text{ donc } f'_0(-3) > 0$$

$$f'_0(3) = 2 \ln 6 + 6 ; \text{ donc } f'_0(3) > 0$$

$$f'_2(-1 - 2\sqrt{3}) = 2 \ln 8 + 6 ; \text{ donc } f'_2(-1 - 2\sqrt{3}) > 0$$

$$f'_2(-1 + 2\sqrt{3}) = 2 \ln 8 + 6 ; \text{ donc } f'_2(-1 + 2\sqrt{3}) > 0$$

*Dressons le tableau de variation de f_0

D'après les résultats de 3°) a-, f'_0 admet sur

$]-\infty; -\sqrt{3}[$ un minimum en -3. Or $f'_0(-3) > 0$,

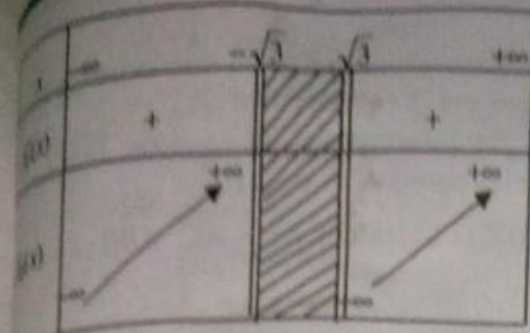
donc $f'_0(x) > 0, \forall x \in]-\infty; -\sqrt{3}[$

De même f'_0 admet sur $]\sqrt{3}; +\infty[$ un minimum en

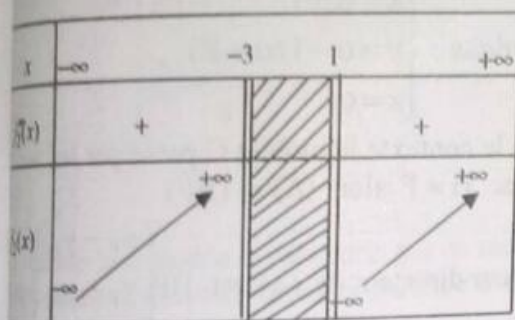
3. Or $f'_0(3) > 0$; donc $f'_0(x) > 0, \forall x \in]\sqrt{3}; +\infty[$.

Au total $f'_0(x) > 0$ pour tout $x \in D_0$

Tableau des variations de f_0



Construisons le tableau des variations de f_2
 d'après les résultats de 3°) a-), f_2' admet sur
 $]-1-2\sqrt{3}; -3[$ un minimum en $-1-2\sqrt{3}$. Or
 $-1-2\sqrt{3} > 0$, $f_2'(x) > 0$, pour tout
 $x \in]-\infty; -3[$
 même f_2' admet sur $]1; +\infty[$ un minimum en
 $-1+2\sqrt{3}$. Or $f_2'(-1+2\sqrt{3}) > 0$. Donc $f_2'(x) > 0$,
 $x \in]1; +\infty[$
 total, $f_2'(x) > 0$, $\forall x \in D_2$
 le tableau des variations de f_2



Justifions que l'équation $f_0(x) = 4$ admet une
 solution unique α dans $[-2; \sqrt{3}[$
 f_0 est continue et strictement croissante sur
 $]-\sqrt{3}[$; donc elle réalise une bijection de
 $]-\sqrt{3}[$ sur $f_0(]-\sqrt{3}[)$ or
 $f_0(]-\sqrt{3}[) = [0; +\infty[$ et $4 \in [0; +\infty[$
 l'équation $f_0(x) = 4$ admet une solution unique
 dans $[-2; \sqrt{3}[$.

Justifions que l'équation $f_2(x) = 4$ admet une
 solution unique β dans $[-4; -3[$
 f_2 est continue et strictement croissante sur
 $]-3[$; donc elle réalise une bijection de
 $]-3[$ sur $f_2(]-3[)$. Or
 $f_2(]-3[) = [-6 \ln 5; +\infty[$ et $4 \in [-6 \ln 5; +\infty[$
 l'équation $f_2(x) = 4$ admet une solution unique
 dans $[-4; -3[$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations $f_0(x) = 0$

$$\begin{aligned} f_0(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in D_0 \text{ et } 2x \ln(x^2 - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in D_0 \text{ et } (x=0 \text{ ou } x^2 - 3 = 1) \\ &\Leftrightarrow x \in D_0 \text{ et } (x=0 \text{ ou } x=-2 \text{ ou } x=2) \\ &\Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } x=2 \\ -2 \text{ et } 2 &\text{ sont les seules solutions de l'équation } f_0(x) = 0 \end{aligned}$$

*Résolvons l'équation $f_2(x) = 0$

$$\begin{aligned} f_2(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in D_2 \text{ et } (2x+2) \ln(x^2 + 2x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in D_2 \text{ et } (x = -1 \text{ ou } x^2 + 2x - 4 = 0) \\ &\Leftrightarrow x \in D_2 \text{ et } (x = -1 \text{ ou } x = -1 - \sqrt{5} \text{ ou } x = -1 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

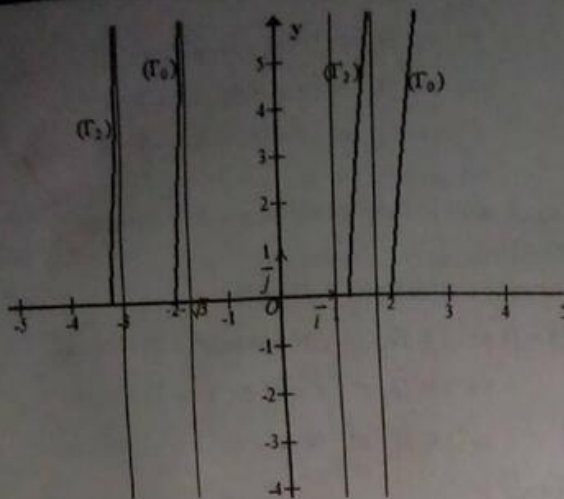
$$\Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{5} \text{ ou } x = -1 + \sqrt{5}$$

Les solutions de l'équation $f_2(x) = 0$ sont :

$$x = -1 - \sqrt{5} \text{ et } x = -1 + \sqrt{5}.$$

*Construisons (Γ_0) et (Γ_2) .

- Les droites d'équations $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$ sont des asymptotes à (Γ_0) .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_0(x)}{x} = +\infty$ donc (Γ_0) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction, celle de l'axe des ordonnées.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_0(x)}{x} = +\infty$ donc (Γ_0) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction, celle de l'axe des ordonnées.
- Les droites d'équations $x = -3$ et $x = 1$ sont des asymptotes à (Γ_2) .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = +\infty$ donc (Γ_2) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique, de direction, celle de l'axe des ordonnées.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = +\infty$; donc (Γ_2) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction, celle de l'axe des ordonnées.



5°) a- Justifions que F_m est une primitive de f_m sur J_m et sur J'_m
 F_m est dérivable sur J_m et sur J'_m (x)
 $\forall x \in D_m$,

$$F'_m(x) = (2x+m) \ln[(x^2+mx-3)-1] + \frac{(2x+m)(x^2+mx-3)}{x^2+mx-3}$$

Alors $F'_m(x) = f_m(x)$, $\forall x \in D_m$ (xx)

(x) et (xx) $\Rightarrow F_m$ est une primitive de f_m sur J_m et sur J'_m .

b- i) Calculons l'aire A_1 du domaine :

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq f_2(x) \\ -3,24 \leq x \leq \beta \end{cases}$$

$$A_1 = \left(\int_{-3,24}^{\beta} f_2(x) dx \right) u.a$$

$$\int_{-3,24}^{\beta} f_2(x) dx = [F_2(x)]_{-3,24}^{\beta} = F_2(\beta) - F_2(-3,24)$$

$$F_2(\beta) = [(-3,14)^2 + 2(-3,14) - 3] \ln[(-3,14)^2 - 6,28 - 3] - 1] \\ \approx -0,895723$$

$$F_2(-3,14) = [(-3,24)^2 - 6,48 - 3] \ln[(-3,24)^2 - 6,48 - 3] - 1] \\ \approx -0,999846 \text{ alors } A_1 \approx 0,010412 u.a$$

ii) Calculons l'aire A_2 du domaine

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq f_0(x) \\ -2 \leq x \leq \alpha \end{cases}$$

$$A_2 = \left(\int_{-2}^{\alpha} f_0(x) dx \right) u.a$$

$$\int_{-2}^{\alpha} f_0(x) dx = [F_0(x)]_{-2}^{\alpha} = F_0(\alpha) - F_0(-2)$$

$$F_0(\alpha) = (\alpha^2 - 3) \ln(\alpha^2 - 3) - 1 \\ = [(-1,82)^2 - 3] \ln[(-1,82)^2 - 3] - 1] \\ \approx -0,675868$$

$$F_0(-2) = -1 \text{ alors } A_2 = 0,32413 u.a$$

Sujet 44: Bac Bénin série D 2012 selon APC

-1-

1°) Déterminons une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ matérialisé par la plaque (R).

D'après les informations du contexte, la plaque (R) contient les points A, B et C. Donc

$(\mathcal{P}) = (ABC)$. Calculons $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ $\overline{AB}(1; 2; -3)$ et $\overline{AC}(0; 1; -1)$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \overline{AB} \wedge \overline{AC}(1; 1; 1) \neq \vec{0}$ donc un vecteur normal à

$(\mathcal{P})$ est $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(1; 1; 1)$ ainsi :

$(\mathcal{P}): x + y + z + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$; $A(1; 0; 3) \in (\mathcal{P}) \Rightarrow 1 + 0 + 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$ d'où

$$(\mathcal{P}): x + y + z - 4 = 0$$

2°) Justifions que la trajectoire du mobile G est représentée par la droite (Δ) de représentation

$$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \ (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = \alpha \end{cases}$$

D'après le contexte le mobile G passe par les points H et F, avec $H \neq F$ alors $(\Delta) = (HF)$

Un vecteur directeur de (Δ) est $\overline{HF} \begin{pmatrix} x_F - x_H \\ y_F - y_H \\ z_F - z_H \end{pmatrix}$ soit

$$\overline{HF}(1; 1; 1)$$

$\forall M \in (\Delta)$ tel que $M \in (\Delta)$ on a :

$$\overline{HM} = \alpha \overline{HF} \ (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$(\Delta): \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1, (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = \alpha \end{cases}$$

3°) Justifions que la droite (Δ) et le plan $(\mathcal{P})$ sont perpendiculaires.

Un vecteur directeur de la droite (Δ) est $\overline{HF}(1; 1; 1)$ et un vecteur normal du plan $(\mathcal{P})$ est $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(1; 1; 1)$.

Constatons que $\overline{HF} = \overline{AB} \wedge \overline{AC}$, d'où $(\Delta) \perp (\mathcal{P})$.

4°) Déterminons les coordonnées du point K où se produira éventuellement le choc entre le mobile G et la plaque matérialisant le plan $(\mathcal{P})$.

On a : $\{K\} = (\mathcal{P}) \cap (\Delta)$

$$\begin{aligned} (K) \in (H) \cap (\Delta) &\Rightarrow \begin{cases} x_K = \alpha + 1 \\ y_K = \alpha - 1 \\ z_K = \alpha \\ x_K + y_K + z_K - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \alpha + 1 \\ y_K = \alpha - 1 \\ z_K = \alpha \\ \alpha + 1 + \alpha - 1 + \alpha - 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \alpha + 1 \\ y_K = \alpha - 1 \\ z_K = \alpha \\ \alpha = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3} \\ y_K = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \\ z_K = \frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$$K\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

5°) Calculons la distance à parcourir par le mobile G depuis l'instant t_1 jusqu'au moment du choc éventuel. Cette distance est $d(H, (P))$

$$d(H, (P)) = \frac{|x_H + y_H + z_H - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \text{ u.l.}$$

$$= d(H, (P)) = \frac{|-4|}{\sqrt{3}} \text{ u.l. d'où}$$

$$d(H, (P)) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ u.l.}$$

-II-

6°) Calculons la probabilité pour que l'appel du passant tombe sur un numéro en service :

a) Au premier essai :

Soit p_1 cette probabilité

Dans les 5 numéros 3 étant hors de la zone on

déduit donc que 2 est en service alors : $p_1 = \frac{2}{5}$

b) Au second essai sachant qu'il n'a pas repris le premier numéro

Soit p_2 cette probabilité

$$p_2 = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \text{ d'où } p_2 = \frac{3}{10}$$

7°) a- Déterminons l'écriture complexe de γ . γ est une similitude plane directe donc son écriture complexe est de la forme

$$\gamma: z' = az + b, \quad a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \gamma(0) = 0 \text{ et } \gamma(1) = 1 &\Rightarrow a = \frac{z_1 - 0}{z_1 - 0} \\ &\Rightarrow a = \frac{-2 + 2i}{2i} = 1 + i \end{aligned}$$

$\gamma(0) = 0 \Rightarrow b = 0$ d'où $\gamma: z' = (1 + i)z$

b- Déterminons l'ensemble (Γ)

$$(\Gamma) = \left\{ M(z) \in (\mathbb{C}) / \frac{z}{2 + iz} \in \mathbb{R} \text{ avec } 2 + iz \neq 0 \right\}$$

$$\text{Posons } 2 + iz = 0 \Leftrightarrow z = 2i$$

$$\text{Donc } \frac{z}{2 + iz} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 2i \\ \frac{z}{2 + iz} = \overline{\left(\frac{z}{2 + iz} \right)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 2i \\ \frac{z}{2 + iz} = \frac{\bar{z}}{2 - i\bar{z}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 2i \\ z(2 - i\bar{z}) = \bar{z}(2 + iz) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 2i \\ 2z - iz\bar{z} = 2\bar{z} + iz\bar{z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 2i \\ 2(z - \bar{z}) - 2iz\bar{z} = 0 \end{cases} \text{ en posant}$$

$z = x + iy$ avec x, y des nombres réels tels que $(x; y) \neq (0; 2)$ on obtient :

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \neq (0; 2) \\ 4iy - 2i(x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \neq (0; 2) \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \neq (0; 2) \\ x^2 + (y - 1)^2 = 1 \end{cases}$$

(Γ) est le cercle de centre $\Omega(0; 1)$ et de rayon 1, d'où (Γ) est le cercle (C) privé du point I.

8°) a- Calcule l'angle de tir

L'angle de tir est celui de la similitude plane

$$\gamma: z' = (1 + i)z$$

or l'angle de γ est argument de $1 + i$. Soit donc θ un argument de $1 + i$. $|1 + i| = \sqrt{2}$ et on a :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ on peut prendre } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ d'où l'angle de}$$

tir est $\frac{\pi}{4}$.

b- Calculons la distance d
 d = rayon de (Γ)

(I) est le cercle (C) : $x^2 + (y-1)^2 = 1$ alors le rayon de (C) est $\sqrt{1} = 1$ en dizaine de kilomètres on a :

$$d = 10 \text{ km}$$

-III-

9°) a- Justifions que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{1; 2\}$.

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 \neq 0 \right\}$$

Posons $x^2 - 3x + 2 = 0$ le discriminant de cette équation est : $\Delta = 9 - 4(1)(2) = 1 > 0$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2$$

$$\text{d'où } D_f = \mathbb{R} - \{1; 2\}$$

b- Etudions les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x^2 - 3x + 2| = +\infty \text{ car}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3x + 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right. \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln|x^2 - 3x + 2| = +\infty \text{ car}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right. \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln|x^2 - 3x + 2| = -\infty \text{ car}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 3x + 2 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = -\infty \end{array} \right. \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln|x^2 - 3x + 2| = -\infty \text{ car}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3x + 2 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 2} \ln x = -\infty \end{array} \right. \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

c- Etudions le sens de variation de f .

f est dérivable en tout point de son domaine de définition comme composée de fonctions dérivable.

$$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$$

Signe de $f'(x)$

$$2x-3=0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2$$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$2x-3$	-	-	+	+	+
x^2-3x+2	+	0	-	0	+
$f'(x)$	-	+	+	-	+

$$\forall x \in]-\infty; 1[\cup]\frac{3}{2}; 2[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; \frac{3}{2}[\cup]2; +\infty[, f'(x) > 0 \text{ et } f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \text{ alors}$$

f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et sur

$]\frac{3}{2}; 2[$ et strictement croissante sur $]1; \frac{3}{2}[$ et sur

$]2; +\infty[$

d- Dressons le tableau de variation de f .

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left|\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2\right| = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4$$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	+	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\ln 4$	$-\infty$	$+\infty$

10°) a- Etudions les branches infinies de la courbe (C_f).

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty \text{ donc la droite d'équation}$$

$$x = 1 \text{ est asymptote verticale à } (C_f)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \text{ donc la droite d'équation } x = 2 \text{ est}$$

$$\text{asymptote verticale à } (C_f)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x^2 - 3x + 2|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x^2| \times \ln\left|1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln(-x) + \ln\left|1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln(-x)}{x} + \frac{\ln\left|1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right|}{x} = 0 \text{ car}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2 \frac{\ln(-x)}{(-x)} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left|1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right|}{x} = \ln 1 = 0 \end{array} \right. \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.
Même démarche, on obtient :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

b- Construisons (C_f)

Déterminons quelques points remarquables :

$$f(0) = \ln 2 ;$$

$$\text{posons } f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln|x^2 - 3x + 2| = 0$$

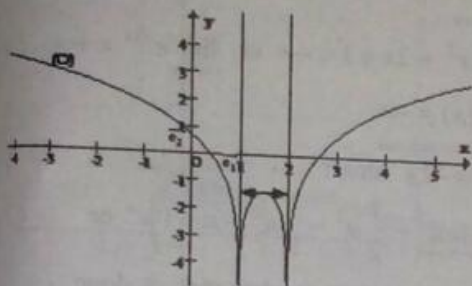
$$\Leftrightarrow |x^2 - 3x + 2| = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 1 \text{ ou } x^2 - 3x + 2 = -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ ou } x^2 - 3x + 3 = 0$$

La résolution des deux équations permettent de

$$\text{conclure que : } f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \text{ et } f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$



Sujet 45: Bac Bénin série D 2013 selon APC

1.

1°) a- Calculons $(2 - 6i)^2$

$$(2 - 6i)^2 = 4 - 36 - 24i$$

$$(2 - 6i)^2 = -32 - 24i$$

b- Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^2 - 4(1+i)z + 8 + 14i = 0$$

Soit Δ le discriminant de cette équation

$$\Delta = 16(1+i)^2 - 4(8 + 14i) = -32 - 24i$$

$= (2 - 6i)^2$ les solutions z_1 et z_2 de l'équation

sont :

$$z_1 = \frac{4 + 4i - 2 + 6i}{2} = 1 + 5i \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{4 + 4i + 5 - 6i}{2} = 3 - i$$

2°) a- Justifions que $-1 + i$ est racine de $P(z)$

$$P(-1 + i) = 2 + 2i - (3 + 5i)(-2i) + 14i(-1 + i) + 22 + 6i$$

$$= 2 + 2i + 6i - 10 - 14i - 14 + 22 + 6i$$

$$= 0 \text{ donc } -1 + i \text{ est une racine de } P(z)$$

b- Démontrons que : $z_A = -1 + i$, $z_B = 1 + 5i$ et

$$z_C = 3 - i$$

$-1 + i$ étant une racine de $P(z)$, il existe un polynôme $Q(z)$ de degré 2 tel que :

$$P(z) = (z + 1 - i)Q(z)$$

Posons $Q(z) = az^2 + bz + c$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$.

$$(z + 1 - i)Q(z) = az^3 + ((b + a(1 - i))z^2 + (c + b(1 - i))z + c(1 - i))$$

par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a(1 - i) = -3 - 5i \\ c + b(1 - i) = 14i \\ c(1 - i) = 22 + 6i \end{cases}$$

On trouve $Q(z) = z^2 - (4 + 4i)z + 8 + 14i$ alors

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -1 + i \text{ ou } Q(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -1 + i \text{ ou } z = 1 + 5i \text{ ou } z = 3 - i$$

Or $\text{Re}(-1 + i) < \text{Re}(1 + 5i) < \text{Re}(3 - i)$ d'où

$$z_A = -1 + i, z_B = 1 + 5i \text{ et } z_C = 3 - i$$

3°) a- Prouvons que ABC est isocèle et rectangle en A.

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3 - i + 1 - i}{1 + 5i + 1 - i} = -i$$

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$ donc ABC est un triangle rectangle en A.

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1, \text{ donc ABC est un triangle isocèle de}$$

sommet A. d'où ABC est un triangle isocèle et rectangle en A.

b- Calculons l'aire $\mathcal{A}$ de la portion ABC

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times AC}{2} \text{ u.a.}, AB = AC = |z_A - z_B| = 2\sqrt{5} \text{ et}$$

$$\text{u.a.} = (50 \times 50) \text{ m}^2 = 2500 \text{ m}^2 = 0,25 \text{ ha}$$

Donc $\mathcal{A} = 2,5 \text{ ha}$

4°) a- Déterminons l'écriture complexe S.

Soit $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ l'écriture complexe de S

$$S(B) = B \Rightarrow z_B = az_B + b$$

$$S(A) = C \Rightarrow z_C = az_A + b \text{ alors } a = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = 1 + i$$

$$\text{et } b = z_B(1 - a) = 5 - i \text{ d'où } S: z' = (1 + i)z + 5 - i$$

b- Déterminons l'affixe du sommet D

$$S(C) = D \Leftrightarrow z_D = (1 + i)(3 - i) + 5 - i$$

$$\underline{\underline{z_D = 9 + i}}$$

Le domaine ABCD est tel que BCD est l'image de ABC par la similitude S dont le rapport

$$k = |1 + i| = \sqrt{2}$$

ABC étant rectangle en A son image BCD par la similitude S est rectangle en C.

Soit A' l'aire du triangle BCD rectangle en C.

$$A' = \frac{DC \times BC}{2} = \frac{\sqrt{2}AC \times \sqrt{2}AB}{2} = 2(A)$$

alors l'aire A_T du domaine est :

$$A_T = A + A' = A + 2(A) \text{ d'où } A_T = 3A$$

II-

6°) a- Etudions le sens de variation de h .

h est dérivable sur I et pour $x \in I$,

$$h'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-1)}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

Pour tout $x \in I$, $h'(x) > 0$; donc h est strictement croissante sur I .

b- Démontrons que pour tout $x \in I$, $h(x) \in I$

h est continue et strictement croissante sur I alors $h(I) = [h(1); h(2)]$

$$= \left[1; \frac{5}{2}\right] \text{ or } \left[1; \frac{5}{2}\right] \subset I \text{ d'où pour tout } x \in I, h(x) \in I.$$

c- Déduisons-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$

$U_0 = 2$ et $2 \in I$ donc $U_0 \in I$

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$ et démontrons que $U_{n+1} \in I$

$U_n \in I \Rightarrow h(U_n) \in I$ donc $U_{n+1} \in I$ d'où $U_n \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

7°) a- Démontrons que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

On a : $U_0 = 2$, $U_1 = \frac{5}{2}$ et $2 > \frac{5}{2}$ donc $U_0 < U_1$

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} < U_n$ et démontrons que $U_{n+2} < U_{n+1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$ et h est strictement croissante sur I . Alors

$$U_{n+1} < U_n \Rightarrow h(U_{n+1}) < h(U_n)$$

$$\Rightarrow U_{n+2} < U_{n+1} \text{ par suite } U_{n+1} - U_n < 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

b- Déduisons-en que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$ donc la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 1. Etant décroissante et minorée, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

8°) a- Déterminons le nombre de d'espèce de plante disponibles.

Soit N ce nombre.

$N = 100/l$ où l est la limite de la suite convergente

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. h est continue sur I et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$, donc l est une solution dans I de l'équation

$$h(x) = x$$

$$h(x) = x \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+1} = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ et } x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ alors } l = 1, \text{ Il y a}$$

donc 100 espèces de plantes

III-

9°) a- Déterminons l'ensemble de définition D_f de f .

$f(x)$ est définie pour tout réel x . Donc $D_f = \mathbb{R}$

b- Calculons les limites de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

En posant $u = -2x$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}u^3 - \frac{1}{2}u^2 - u + 1 \right) e^u \text{ or}$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} |u|^\alpha e^u = 0 \text{ pour tout nombre réel } \alpha \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

10°) a- Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -8x(x-1)^2 e^{-2x}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = (12x^2 - 4x + 2)e^{-2x} - 2e^{-2x}(4x^3 - 2x^2 + 2x + 1)$$

$$f'(x) = (-8x^3 + 16x^2 - 8x)e^{-2x}$$

$$f'(x) = -8x(x^2 - 2x + 1)e^{-2x} \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f'(x) = -8x(x-1)^2 e^{-2x}$$

b- Etudions le sens de variation de f

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^2 \geq 0$ et $e^{-2x} > 0$ donc le signe de

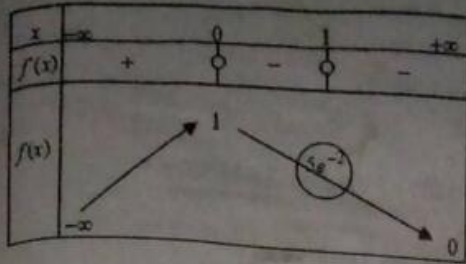
$f'(x)$ est celui de $-x$ on obtient donc :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[$$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

c- Dressons le tableau des variations de f



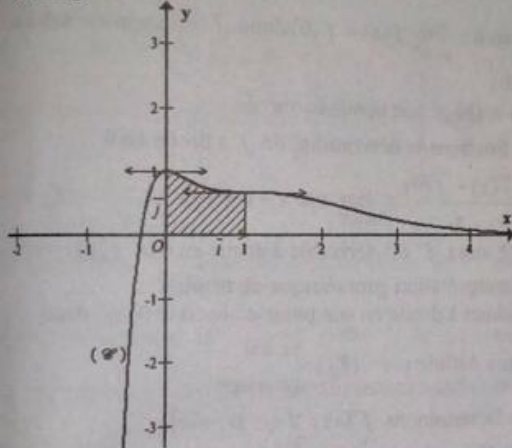
11°) Etudions les branches infinies de la courbe (C)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ donc (C) admet une branche infinie au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^3 - 2x^2 + 2x + 1}{x} \right) e^{-2x}$$

$= +\infty$ donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.



12°) a- Déterminons a, b, c, d pour que F soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de f .

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)e^{-2x} - 2e^{-2x}(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

$$F'(x) = [-2ax^3 + (3a - 2b)x^2 + (2b - 2c)x + c - 2d]e^{-2x}$$

$F'(x) = f(x)$ alors par identification on a :

$$\begin{cases} -2a = 4 \\ 3a - 2b = -2 \\ 2b - 2c = 2 \\ c - 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = -3 \\ d = -2 \end{cases} \text{ donc}$$

$$F(x) = -(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2)e^{-2x}$$

b- Déterminons l'aire du plan d'eau.

Soit δ cette aire

$$\delta = \left[\int_0^1 f(x) dx \right] \times (5000 \text{ cm})^2$$

$$\int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = 2 - 9e^{-2}$$

$$\delta = (2 - 9e^{-2}) \times 25\,000\,000 \text{ cm}^2 \quad \delta = (2 - 9e^{-2}) \times 0,25 \text{ ha}$$

$$\delta = \frac{1}{4} (2 - 9e^{-2}) \text{ ha donc } \delta = \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{4e^2} \right) \text{ ha}$$

13°) Déterminons le nombre de plans de l'espèce en voie de disparition.

Soit N' ce nombre.

$$N' = (7,5 - \delta) \times \frac{2}{3} \times 100$$

$$N' = \left(7 + \frac{9}{4e^2} \right) \times \frac{2}{3} \times 100 = 487$$

Le nombre de plants de l'espèce en voie de disparition peut être estimé à 487

Sujet 46: Bac Bénin série D 2013 selon APC

(session des malades)

Problème 1 :

1°) a- Ecrivons $16(-\sqrt{3} + i)$ sous forme exponentielle

$$16(-\sqrt{3} + i) = 32e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

b- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

$$(E) \Leftrightarrow z^5 = 32e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Les solutions de (E) sont les racines cinquièmes de $32e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

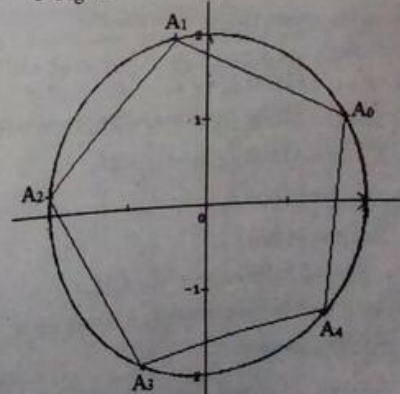
Ce sont les nombres z_k tels que : $z_k = \sqrt[5]{32} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}\right)}$ avec $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

$$\text{On a : } z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, z_1 = 2e^{i\frac{17\pi}{30}}, z_2 = 2e^{i\frac{29\pi}{30}}, z_3 = 2e^{i\frac{41\pi}{30}}$$

$$, z_4 = 2e^{i\frac{53\pi}{30}} \text{ l'ensemble des solutions de (E) est :}$$

$$S = \{z_0; z_1; z_2; z_3; z_4\}$$

c- Figure



d- Nature du polygone
Ce polygone est régulier et à 5 côtés : c'est un pentagone.

2°) a- Démontrons que la longueur en unité de longueur d'un côté est $l = 4 \sin \frac{\pi}{5}$

On a : $l = A_0 A_1$.
Dans le triangle $O A_0 A_1$ isocèle en O ,
On a : $O A_0 = 2$ et $\text{mes}(A_0 \hat{O} A_1) = \frac{2\pi}{5}$

$$\text{Donc } \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\frac{1}{2} A_0 A_1}{O A_0} = \frac{A_0 A_1}{2 O A_0}$$

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{A_0 A_1}{4} \text{ donc } A_0 A_1 = 4 \sin \frac{\pi}{5} \text{ d'où}$$

$$l = 4 \sin \frac{\pi}{5}$$

b- Dédisons-en une valeur approchée du périmètre du polygone.
Soit P le périmètre

$$\text{On a : } P = 5l \times 2 \text{ cm donc } P = 5 \times 4 \sin \frac{\pi}{5} \times 2 \text{ cm} = 23,51 \text{ cm d'où}$$

$$P = 23,51 \text{ cm}$$

Problème 2 :

3°) Démontrons que a , b et c vérifient le système (Σ)
Des informations du problème, on a successivement les équations suivantes :

$$a + \frac{1}{2}(b + c) = 8500$$

$$b + \frac{1}{3}(a + c) = 8500$$

$$c + \frac{1}{4}(a + b) = 8500 \text{ d'où le système :}$$

$$(\Sigma) : \begin{cases} 2a + b + c = 17000 \\ a + 3b + c = 25500 \\ a + b + 4c = 34000 \end{cases}$$

4°) Transformons le système (Σ) en un système triangulaire équivalent.

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 17000 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 5b + c = 34000 & L_2 \leftarrow -L_1 + 2L_2 \\ b + 7c = 51000 & L_3 \leftarrow -L_1 + 2L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 17000 & L_1 \\ 5b + c = 34000 & L_2 \\ 34c = 221000 & L_3 \leftarrow -L_2 + 5L_3 \end{cases}$$

5°) Dédisons-en le coût de chaque cadeau et la somme S .

$$(L_3) \Leftrightarrow c = \frac{221000}{34} = 6500$$

$$(L_2) \Leftrightarrow 5b = 34000 - c = 27500 \text{ donc } b = 5500$$

$$(L_1) \Leftrightarrow 2a = 17000 - (b + c) = 5000 \text{ donc } a = 2500$$

d'où :

$$1^{\text{er}} \text{ cadeau} \rightarrow 2500 \text{ F}$$

$$2^{\text{e}} \text{ cadeau} \rightarrow 5500 \text{ F}$$

$$3^{\text{e}} \text{ cadeau} \rightarrow 6500 \text{ F}$$

La somme S .

$$S = a + b + c$$

$$= 2500 + 5500 + 6500 \text{ d'où } S = 14500 \text{ F}$$

Problème 3 :

6°) a- Vérifions que $D = [0; +\infty[$

$$D = \{x \in \mathbb{R}^* / x > 0\} \cup \{0\}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[\text{ donc } D =]0; +\infty[\cup \{0\} \text{ soit}$$

$$D = [0; +\infty[$$

b- Justifions que f est continue sur D

Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto -ex$ sont continues sur $]0; +\infty[$ et de plus $\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$

alors la fonction $x \mapsto x^2 \ln x - ex$ est continue sur $]0; +\infty[$ par suite f est continue sur $]0; +\infty[$ (a)

$$\text{De plus : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x - ex = 0 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$$

Alors on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue à droite en 0 (b)

De (a) et (b) f est continue sur D

c- Etudions la dérivabilité de f à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x - e = -e,$$

$-e \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -e$

*Interprétation géométrique du résultat

(C) admet à droite en son point d'abscisse 0 une demi

tangente définie par : $(T_d) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = -ex \end{cases}$

d- Déterminons $f'(x)$, $\forall x \in]0; +\infty[$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 2x \ln x + x - e$$

7°) a- Etudions le sens de variation de u

$$u(x) = 2x \ln x + x - e$$

u est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[, u'(x) = 2 \ln x + 3$$

Signe de $u'(x)$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$2 \ln x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\text{Alors : } \begin{cases} \forall x \in]0; e^{-\frac{1}{2}}[, u'(x) < 0 \\ \forall x \in]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[, u'(x) > 0 \\ u(e^{-\frac{1}{2}}) = 0 \end{cases}$$

Donc u est strictement décroissante sur $]0; e^{-\frac{1}{2}}]$ et

strictement croissante sur $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = -e \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$$

c- Démontrons que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique et que $1,5 < \alpha < 1,6$

* u est continue et strictement décroissante sur $]0; e^{-\frac{1}{2}}]$ et

$$u\left(]0; e^{-\frac{1}{2}}\right] = \left[u\left(e^{-\frac{1}{2}}\right); -e\right]$$

$$u\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -2e^{-\frac{1}{2}} - e \text{ donc } 0 \notin \left[u\left(e^{-\frac{1}{2}}\right); -e\right] \text{ alors}$$

$$\forall x \in]0; e^{-\frac{1}{2}}], u(x) \neq 0$$

* u est continue et strictement croissante sur $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$ et

$$u\left(]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right) = \left]-2e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right[\text{ or } 0 \in \left]-2e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right[$$

donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$

$$\text{De plus }]1,5; 1,6[\subset]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[; \quad u(1,5) = -0,0019 \text{ et}$$

$$u(1,6) = 0,3857$$

$$\text{On a : } u(1,5) \times u(1,6) < 0 \text{ donc } 1,5 < \alpha < 1,6$$

De tout ce qui précède l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique et que $1,5 < \alpha < 1,6$

d- Déterminons le signe de $u(x)$

Des variations de u et d'après la questions précédente on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, u(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, u(x) > 0 \\ u(\alpha) = 0 \end{cases}$$

e) a- Dressons le tableau de variation de f

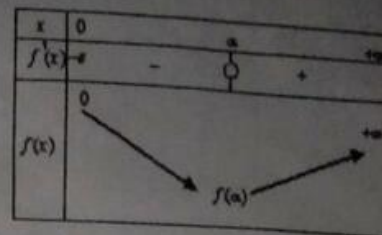
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x[x \ln x - e] = +\infty$$

Signe de $f'(x)$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = u(x)$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $u(x)$ alors

$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, f'(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) > 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases}$$



$$f(\alpha) = \alpha^2 \ln \alpha - e\alpha$$

b- Calculons $f(e)$

$$f(e) = e^2 - e^2 = 0 \text{ donc } f(e) = 0$$

c- Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$ dont on précisera

* f est continue et strictement décroissante sur $]0; \alpha[$ et $0 \notin]f(0); \alpha[$ donc $f(x) \neq 0, \forall x \in]0; \alpha[$

* f est continue et strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$ et

$$f(]\alpha; +\infty[) =]f(\alpha); +\infty[$$

$0 \in]f(\alpha); +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une

solution unique dans $]\alpha; +\infty[; e \in]\alpha; +\infty[$ et

$f(e) = 0$ on en déduit de tout ce qui précède que

l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$ qui est le réel e .

d- Déterminons le signe de $f(x), \forall x \in]0; +\infty[$

$$\text{Des variations de } f \text{ on a : } \begin{cases} \forall x \in]0; e[, f(x) < 0 \\ \forall x \in]e; +\infty[, f(x) > 0 \\ f(e) = 0 \end{cases}$$

$$9^{\circ} \text{ a- Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

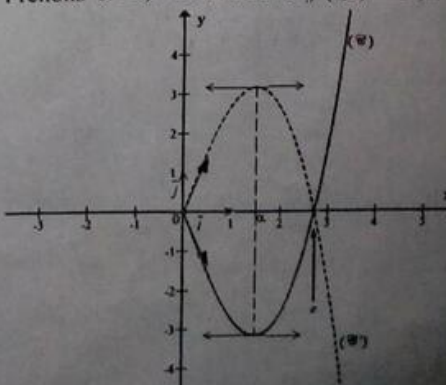
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Interprétation géométrique

($\odot$) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

b- Traçons ($\odot$)

Prenons $\alpha = 1,5$ et on trouve $f(1,5) = -3,2$



c- Explication

Soit $g(x) = ex - x^2 \ln x$ on a : $\forall x \in]0; +\infty[$,
 $g(x) = -f(x)$ alors $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la
fonction $x \mapsto ex - x^2 \ln x$ est le symétrique de la courbe $(\mathcal{C}')$
par rapport à l'axe des abscisses.
Tracer de la courbe $(\mathcal{C}')$
Voir figure.

10°) Précisons le signe de u_n

$$u_n = -2 \int_{\frac{1}{n}}^e f(x) dx$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \frac{1}{n} < e.$$

Or $\forall x \in]0; e]$, $f(x) \leq 0$ et $[\frac{1}{n}; e] \subset]0; e]$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\frac{1}{n}}^e f(x) dx \leq 0$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^e f(x) dx \leq 0 \Leftrightarrow -2 \int_{\frac{1}{n}}^e f(x) dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow u_n \geq 0 \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$$

b- Donnons une interprétation géométrique de u_n .
Exprimé en unité d'aire, u_n est l'aire du plan délimité par
les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{n}$ et
 $x = e$.

$$11^\circ) \text{ a- Démontrons que } u_{n+1} - u_n = -2 \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = -2 \int_{\frac{1}{n+1}}^e f(x) dx + 2 \int_{\frac{1}{n}}^e f(x) dx$$

$$u_{n+1} - u_n = -2 \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx - 2 \int_{\frac{1}{n}}^e f(x) dx$$

$$u_{n+1} - u_n = -2 \left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{n}}^e f(x) dx \right) \text{ d'où}$$

$$u_{n+1} - u_n = -2 \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx$$

b- Dédudons-en le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \text{ et } \forall x \in \left[\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n} \right], f(x) \leq 0$$

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ alors la suite } (u_n)_{n \geq 1} \text{ est}$$

croissante

12°) a- Déterminons $G'(x)$

G est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$G'(x) = x^2 \ln x$$

b- Calculons u_n en fonction de n

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) = G'(x) - ex$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = -2 \left(\int_{\frac{1}{n}}^e (G'(x) - ex) dx \right)$$

$$u_n = -2 \left[G(x) - \frac{e}{2} x^2 \right]_{\frac{1}{n}}^e \text{ on trouve}$$

$$u_n = \frac{5}{9} e^3 - \left(\frac{2 \ln n}{3n^3} + \frac{2}{9n^3} + \frac{e}{n^2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

c- Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{On obtient } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{9} e^3$$

Interprétation géométrique

Lors que n est de plus en plus grand, l'aire du plan
délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations

$x = \frac{1}{n}$ et $x = e$ est de plus en plus proche de $\frac{5}{9} e^3$ u.a

Sujet 47: Bac Bénin série D 2014 selon APC

Problème 1:

1°) a- Justifions que : $P(z) = (z+i)(z^2 + (\sqrt{3}-3i)z - 8)$

$$\text{soit } A = (z+i)(z^2 + (\sqrt{3}-3i)z - 8)$$

$$A = z^3 + (\sqrt{3}-3i)z^2 - 8z + iz^2 + (3+i\sqrt{3})z - 8i$$

$$= z^3 + (\sqrt{3}-2i)z^2 + (-5+i\sqrt{3})z - 8i = P(z)$$

b- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z+i=0 \text{ ou } z^2 + (\sqrt{3}-3i)z - 8 = 0$$

Soit Δ le discriminant de l'équation :

$$z^2 + (\sqrt{3}-3i)z - 8 = 0$$

$$\text{On a : } \Delta = (\sqrt{3}-3i)^2 + 32$$

$$= 26 - 6\sqrt{3}i$$

Soit $\delta = x + iy$; $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ une racine carrée de Δ .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ x^2 - y^2 = 26 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ 2xy = -6\sqrt{3} \end{cases}$$

On trouve $\delta = 3\sqrt{3} - i$ ou $\delta = -3\sqrt{3} + i$ et les solutions de

l'équation $z^2 + (\sqrt{3}-3i)z - 8 = 0$ sont : $\sqrt{3} + i$ et

$$-2\sqrt{3} + 2i.$$

En conclusion, les solutions de $P(z) = 0$ sont les nombres

complexes : $-i$; $\sqrt{3} + i$; $-2\sqrt{3} + 2i$.

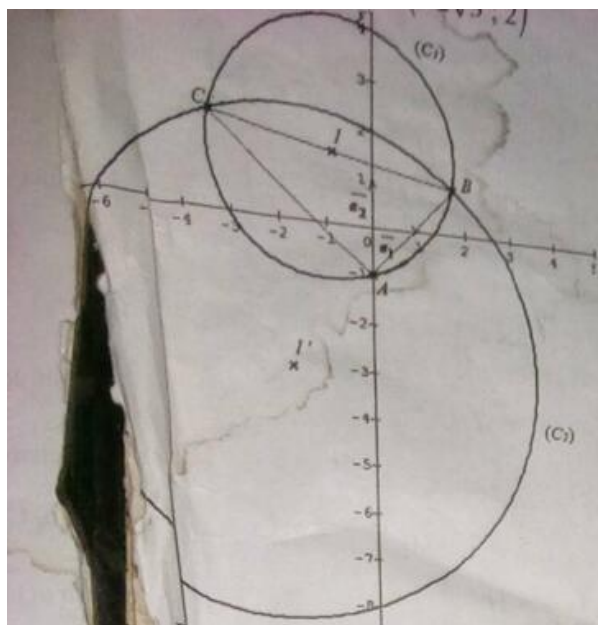
c- Relation entre $P(z)$ et d'autres éléments de la

couverture.

Les racines du polynôme $P(z)$ ont pour image les points

A , B et C marquées sur la couverture.

2°) a- Plaçons les points A , B et C .



Montrons que le triangle ABC est rectangle.

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\sqrt{3} + 2i}{-2\sqrt{3} + 3i} = -\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

équation:

$i \in i\mathbb{R}$ donc le triangle ABC est rectangle en A .

014 c- Précise le centre et le rayon de (C_1)

(C_1) est le cercle circonscrit au triangle ABC qui est rectangle en A donc le cercle (C_1) a pour rayon 1, le milieu de $[BC]$ et pour rayon $r = \frac{BC}{2}$. Le point I a pour

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \text{ et on a : } r = \sqrt{7}.$$

Déterminons l'écriture complexe de la similitude s . L'écriture complexe de s est sous la forme : $z' = az + b$ $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

$$s(A) = B \text{ et } s(B) = C \text{ donc } \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases} \text{ soit}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_A - z_B} = -1 + i\sqrt{3}, \text{ par suite } b = z_B - az_A = 0. \text{ Ainsi}$$

de Δ .

$$z' = (-1 + i\sqrt{3})z.$$

Déterminons les éléments caractéristiques de s . $\sqrt{3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|-1 + i\sqrt{3}| = 2$ donc s a pour rapport 2,

pour centre le point O et pour angle $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminons le centre et le rayon de (C_2) . (C_2) est l'image de (C_1) par la similitude s de rapport 2 et de centre O . Le cercle (C_2) a pour centre le point $I' = s(I)$ et pour rayon $r' = 2r = 2\sqrt{7}$. Le point I' a pour affixe

$-1 + i\sqrt{3}$. Le cercle (C_2) passe par les points B et C . Représentons (C_1) et (C_2) sur la même figure.

5°) Prouvons que $k = \frac{1}{10}$

Soit Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire réalisée. $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$.

On a : $p(\Omega) = 1$ soit $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1$

Puisque $p(i) = k$ soit alors $k + 2k + 3k + 4k = 1$ soit

$$10k = 1 \text{ d'où } k = \frac{1}{10}.$$

6°) a- Déterminons la loi de probabilité de X .

Les valeurs possibles de X sont : 6 ; 7 ; 8 ; 9

$$p(X=6) = p(4) = \frac{2}{5}$$

$$p(X=7) = p(3) = \frac{3}{10}$$

$$p(X=8) = p(2) = \frac{1}{5}$$

$$p(X=9) = p(1) = \frac{1}{10}$$

Cette loi de probabilité est résumée dans le tableau suivant :

x	6	7	8	9
$p(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

b- Déterminons puis représentons la fonction de répartition F de X .

on a : $F : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto F(x) = p(X \leq x)$$

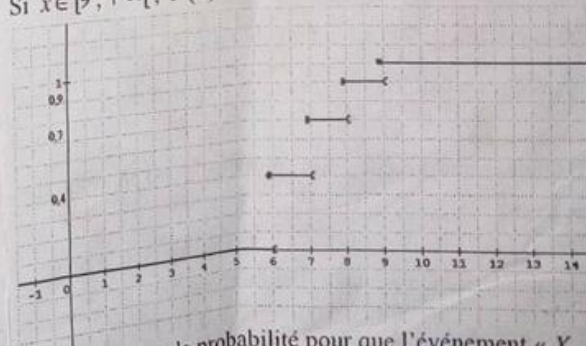
Si $x \in]-\infty; 6[$, $F(x) = 0$;

Si $x \in [6; 7[$, $F(x) = \frac{2}{5}$;

Si $x \in [7; 8[$, $F(x) = \frac{7}{10}$;

Si $x \in [8; 9[$, $F(x) = \frac{9}{10}$;

Si $x \in [9; +\infty[$, $F(x) = 1$



7°) Déterminons la probabilité pour que l'événement « X est pair » se réalise au moins une fois. Soit Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de fois un numéro pair est apparu au cours des 5 lancers. Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et

$$p = p(2) + p(4) = \frac{3}{5}. \text{ La probabilité cherchée est}$$

$$p_1 = 1 - p(X=0) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{3093}{3125}$$

Problème8°) a- Calculez $f'(x)$ pour tout $x > 0$ Pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = a + b \ln x + c + x \left(\frac{2a}{x} \ln x + \frac{b}{x} \right)$$

$$= a + b + (2a + b) \ln x + b + c$$

b- Déterminez a, b et c .

$$f(e) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$$

$$f'(e) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$$

$$f'(e) = 0 \Leftrightarrow a(\ln e)^2 + (2a + b) \ln e + b + c = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} \left[a(\ln e)^2 + b \ln \frac{1}{\sqrt{e}} + c \right] = \frac{9}{4\sqrt{e}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow a - 2b + c = 9$$

$$\text{On obtient le système : } \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ a - 2b + c = 9 \end{cases}$$

D'où on trouve $a = 1$, $b = -2$ et $c = 1$.Démontrons que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$

les $x = e^{-\alpha}$, $\ln x = -\alpha$. On sait que pour tout $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} \ln x = 0 \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0 \text{ et par suite } \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0.$$

b- Démontrons que f est continue sur $[0; +\infty[$.La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0; +\infty[$ donc f est continue sur $]0; +\infty[$.Par ailleurs, pour tout $x > 0$ on a :

$$f(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + x \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0) \text{ d'où } f \text{ est continue en } 0.$$

De tout ce qui précède, on déduit que f est continue sur $[0; +\infty[$.c- Étudie la dérivabilité de f à droite en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.

$$\text{Pour tout } x > 0, \frac{f(x) - f(0)}{x} = (\ln x)^2 - 2 \ln x + 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.$$

Interprétation géométrique :

La courbe (Γ) de f admet au point O une demi-tangenteverticale à droite définie par : $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.d- Justifions que pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = (\ln x - 1)(\ln x + 1).$$

Pour tout $x > 0$, $f(x) = x[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 1]$ donc

$$f'(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x + 1 + x \left(\frac{2}{x} \ln x - \frac{2}{x} \right)$$

$$= (\ln x)^2 - 1$$

$$= (\ln x - 1)(\ln x + 1)$$

10°) Étudions le sens de variation de f .Étudions le signe de $f'(x)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \text{ ou } x = e.$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x \in]-1; 1[$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{e}; e \right[$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left] 0; \frac{1}{e} \right[\cup]e; +\infty[$$

Puisque f est continue sur $[0; +\infty[$ alors f strictement croissante sur les intervalles $\left] 0; \frac{1}{e} \right[$ et $]e; +\infty[$; et strictement décroissante sur $\left] \frac{1}{e}; e \right[$.b- Calculons la limite de f en $+\infty$.

$$\text{Pour tout } x > 0, \text{ on a : } f(x) = x(\ln x)^2 \left[1 - \frac{2}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2} \right) = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

c- Dressons le tableau de variations de f .

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{4}{e}$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

$$11^\circ) \text{ a- Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{Pour tout } x > 0 \text{ on a : } \frac{f(x)}{x} = (\ln x)^2 \left(1 - \frac{2}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2} \right)$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ alors la courbe } (\Gamma) \text{ admet}$$

voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont l'axe des ordonnées est celle de l'axe des ordonnées.b- Traçons (Γ)