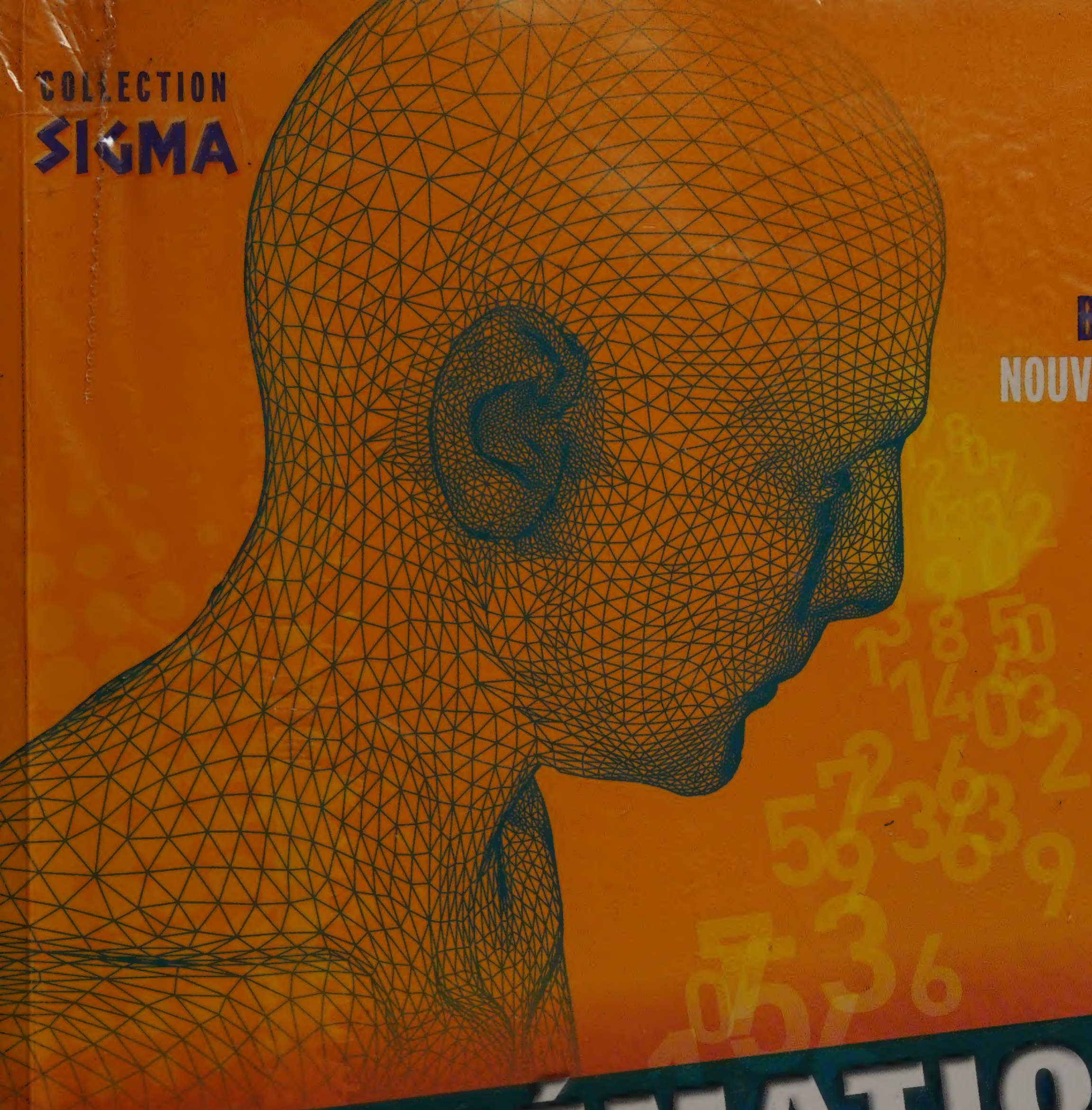
COLLECTION
SIGMA



STL

SPÉCIALITÉ
BIOTECHNOLOGIES
NOUVEAU PROGRAMME

MATHÉMATIQUES
TERMINALE

Philippe Dutarte
François Mailloux
Bernard Verlant

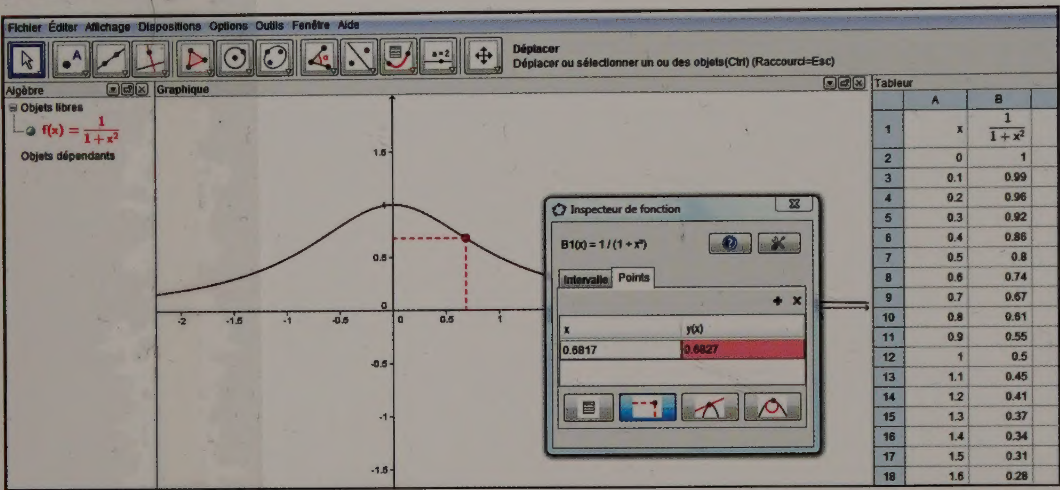
FOUCHER

GeoGebra

GeoGebra est un logiciel mathématique libre permettant la manipulation d'objets géométriques et les calculs analytiques.
Téléchargement ou utilisation en ligne : http://www.geogebra.org

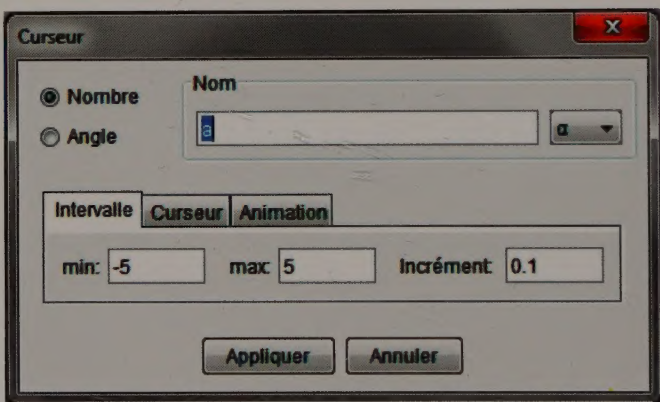
Présentation de l'environnement de travail

La zone de travail peut comprendre trois parties : la zone d'information à gauche « fenêtre algèbre » qui contient les objets créés et leur valeur ; la zone de dessin au centre et, si besoin, la zone « tableur » à droite. Pour construire la figure, on peut utiliser les boutons avec les fenêtres d'aide ou la barre de saisie située en bas de la feuille GeoGebra. Certains boutons ouvrent des boîtes de dialogue.



Créer une variable numérique

Les variables numériques sont associées à des curseurs dont on peut définir les différentes propriétés : intervalle de définition, couleur, position…
On fait varier un curseur en déplaçant le curseur avec la souris ou avec les touches → et ← du clavier.



Mettre des objets en forme

Pour améliorer la lisibilité de la fenêtre graphique, il ne faut pas négliger la mise en forme des objets créés.
Pour les modifier, faire un clic droit de la souris sur l'objet dont on veut modifier les propriétés ou sur la feuille de travail afin de faire apparaître « Propriétés ». Il est possible de ne pas afficher l'étiquette d'un objet pour éviter de surcharger la figure.
On peut aussi écrire du « texte dynamique » en lien avec les valeurs des variables. Par exemple, après avoir créé trois variables a, b et c on veut étudier l'effet du coefficient $\Delta = b^2 - 4ac$ sur les propriétés de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$. On sélectionne le bouton « texte » qui se trouve dans le menu « curseur » et on écrit :
"Δ = b2-4ac ="+(b^2-4*a*c). L'écran affichera le texte avec la valeur correspondant à $b^2 - 4ac$.

STL

SPÉCIALITÉ
BIOTECHNOLOGIES

MATHÉMATIQUES
TERMINALE

Philippe Dutarte
François Mailloux
Bernard Verlant

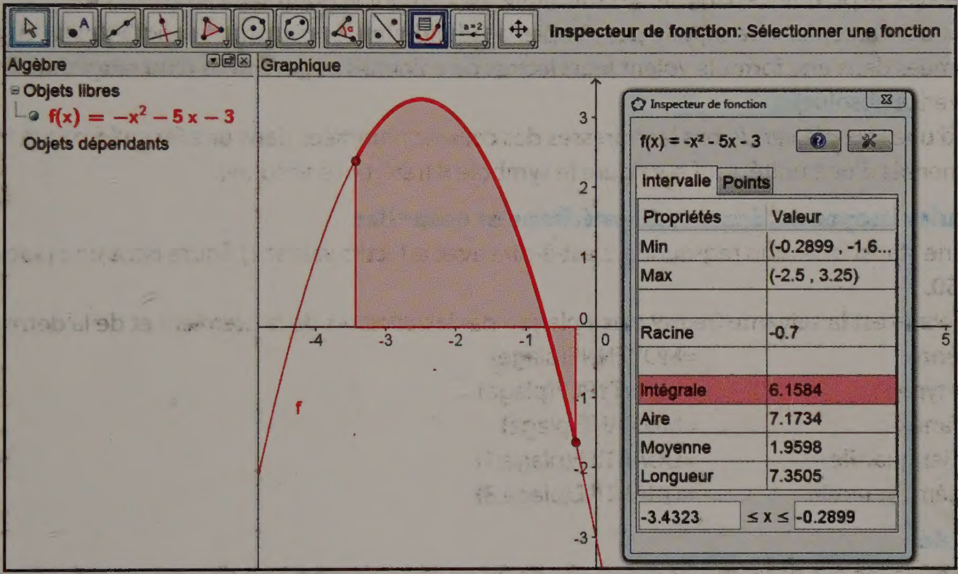
FOUCHER

Représenter une fonction, une tangente ou une suite ; calculer une dérivée, une primitive, une intégrale

GeoGebra est aussi un outil de calcul. Il peut calculer la fonction dérivée avec la commande dérivée[f], une primitive avec intégrale[f), une intégrale avec intégrale[f,a,b], où la fonction f aura été définie auparavant. Il peut aussi placer la tangente à une courbe en un point avec la commande tangente[a,f], où a est l'abscisse du point.
Il est possible aussi de créer des listes de valeurs ou de points. Par exemple la commande séquence[k^2,k,1,10] créera la liste {1,4,9,16,25,49,64,81,100} et la commande séquence[(0,1/k),k,1,10] créera la liste des points et les fera figurer sur la feuille.

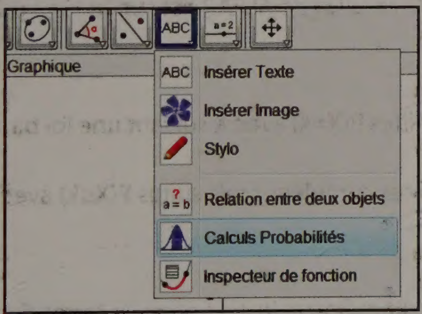
Outil « Inspecteur de fonction »

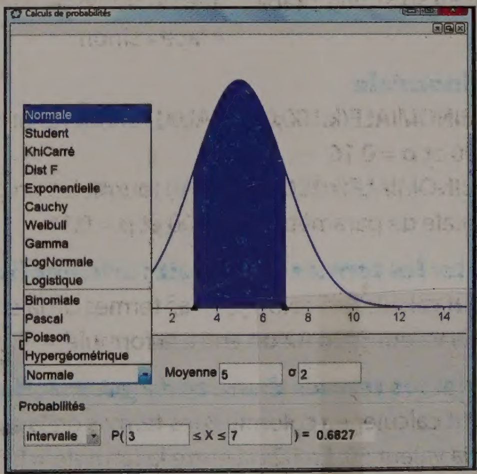
L'outil « Inspecteur de fonction » permet notamment de déterminer, sur un intervalle, un minimum, un maximum, une intersection avec l'axe des abscisses ou de calculer une intégrale, une aire, une valeur moyenne, la longueur d'une courbe.



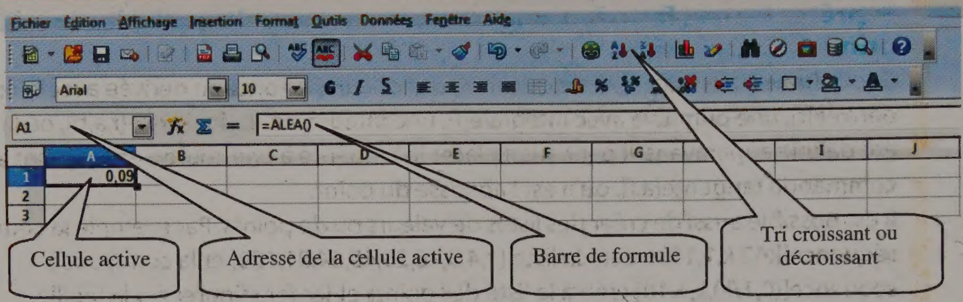
Outil « Calcul Probabilités »

L'outil « Calcul Probabilités » permet, en choisissant la loi (binomiale, exponentielle ou normale), de calculer une probabilité « à gauche », « à droite » ou « sur un intervalle ».





TABLEURS : OpenOffice Calc et Excel



Sélection et « recopie »

Pour sélectionner des cellules, on glisse avec le pointeur de la souris en forme de flèche, en gardant le bouton gauche enfoncé.
Pour recopier la formule d'une cellule, on approche le pointeur de la souris du coin inférieur droit de la cellule puis on glisse avec le pointeur en forme de croix noire, en gardant le bouton gauche enfoncé.
Attention, « recopier » ne signifie pas « copier à l'identique ». Lors d'une recopie à droite les adresses des cellules nommées dans une formule voient leurs lettres de colonnes augmentées d'un rang, sauf si y figure le symbole $ (référence absolue).
Lors d'une recopie vers le bas les adresses des cellules nommées dans une formule voient leurs numéros de lignes augmentés d'une unité, sauf si y figure le symbole $ (référence absolue).

Calculer moyenne, écart type, médiane et quartiles

La série statistique (non regroupée, c'est-à-dire avec effectifs valant 1) figure dans une plage de cellules du type A1:E50.
La syntaxe est la suivante (remplacer « plage » par les adresses de la première et de la dernière cellule séparées par :) :

Moyenne	=MOYENNE(plage)
Écart type	=ECARTYPEP(plage)
Médiane	=MEDIANE(plage)
Premier quartile	=QUARTILE(plage;1)
Troisième quartile	=QUARTILE(plage;3)

Simuler

=ALEA() (avec des parenthèses vides) affiche un nombre décimal « au hasard » dans l'intervalle [0 ; 1[.

=ENT(ALEA()+0,4)	affiche 1 avec la probabilité 0,4 et 0 sinon.
=NB.SI(A1:B50;"<=0,5")	affiche le nombre de cellules qui, dans la plage de A1 à B 50, contiennent un nombre inférieur ou égal à 0,5.
=SI(ALEA>0,5;"pile";"face")	affiche le texte « pile » si le résultat de ALEA() est supérieur à 0,5 et affichera le texte « face » sinon.

Loi binomiale

=LOI.BINOMIALE(k;100;0.16;FAUX) fournit les probabilités P(X=k) avec X suivant une loi binomiale de paramètres n = 100 et p = 0.16.
=LOI.BINOMIALE(k;100;0.16;VRAI) fournit les probabilités cumulées croissantes P(X≤k) avec X suivant une loi binomiale de paramètres n = 100 et p = 0.16.

Calculer les termes d'une suite arithmétique

On veut calculer en colonne A les termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme 5 et de raison 100. En A1 on entre la valeur 5. En A2 on entre la formule = A1+100. Puis on recopie vers le bas.

Calculer les termes d'une suite géométrique

On veut calculer en colonne B les termes de la suite géométrique (v_n) de premier terme 50 et de raison 1,05. En B1 on entre la valeur 50. En B2 on entre la formule = B1*1,05. Puis on recopie vers le bas.

Crédits photographiques

p. 31 © F. Engel/Urba Images Server
p. 70 © Josse/Leemage
P. 96 © Aisa/Leemage & ©MP/Leemage
P. 115 © Louie Psihoyos/Cosmos

p. 7, 14, 22, 23, 25, 28, 32, 56, 67, 69, 80, 84, 89, 94, 113, 121, 122, 128, 131, 144, 145, 155, 159, 165, 167, 180, 182, 188, 189, 197, 205, 206, 212, 215, 219, 226, 228, 230, 235, 238, 242, 245, 257, 264, 270, 271, 273, 282, 285, 286, 294, 295, 297, 300, 301, 302, 304, 314, ph © Marie-Claude Hugues/Bernard Verlant

ISBN 978-2-216-11926-4

Sommaire

CHAPITRE 7

Équations différentielles

CHAPITRE 8

Statistique à deux variables

CHAPITRE 9

Probabilités et statistique

Présentation du manuel

Ce manuel de mathématiques est destiné aux élèves de **Terminale Sciences et technologies de laboratoire (STL)** spécialité : **Biotechnologies**.

Chacun des neuf chapitres propose :

■ Un ***Cours*** avec des **ACTIVITÉS *d'approche***

Les notions nouvelles sont dégagées à partir de quelques activités d'approche utilisant le plus souvent les TICE. Le cours s'appuie sur des situations issues de la physique ou de la technologie.
Des **exercices résolus** mettent en évidence les **méthodes**.
À la fin de chaque chapitre **« Ce qu'il faut savoir »** rassemble les principaux résultats.

■ Des **Travaux pratiques** sur ordinateur

Très progressifs, avec des fiches techniques, ils peuvent être abordés directement par les élèves en salle d'informatique et/ou utilisés en classe entière. Les réponses partielles, pour permettre un travail autonome des élèves, de ces TP figurent à la fin de l'ouvrage.

■ Des ***Exercices*** corrigés et non corrigés

Ils sont nombreux et variés. Ceux qui sont à support concret ou liés au domaine des biotechnologies ou des sciences physiques et chimiques ne nécessitent aucune connaissance autre que mathématique.

Ils sont classés par thèmes et difficultés croissantes :

- \+ désigne des exercices d'application directe du cours ;
- ++ désigne des exercices pour s'entraîner ;
- +++ désigne des exercices ou problèmes qui, par leur niveau de difficulté et (ou) leur longueur, correspondent au niveau d'exigences de l'épreuve du baccalauréat ;
- ++++ désigne des exercices pour « aller plus loin » ou des exercices comportant moins d'indications.

■ À la fin de chaque chapitre, figurent de nombreux ***Exercices pour le baccalauréat*** avec des corrigés détaillés.

■ Des ***Activités corrigées d'algorithmique*** figurent dans les exercices de chaque chapitre.

■ À la fin de l'ouvrage figurent ***huit épreuves d'entraînement au baccalauréat***. Elles recouvrent l'ensemble du programme de terminale STL-Biotechnologies, notamment pour l'utilisation de logiciels et l'algorithmique. Un index et des réponses à la fin de l'ouvrage permettent un travail autonome.

Les ressources numériques

Chaque chapitre est enrichi de ressources numériques interactives :

- des **ANIMATIONS VIDÉO** permettent d'illustrer certains points du cours ou certaines méthodes ; elles peuvent être utilisées en vidéo-projection en classe entière, ou individuellement pour la remédiation ou l'accompagnement personnalisé ;
- des **QCM INTERACTIFS** prolongent les QCM du manuel, pour un travail de révision ou de remédiation, ils indiquent les scores obtenus et les bonnes réponses.

Deux logos signalent ces ressources dans le livre :

Animation vidéo **QCM interactifs**

CHAPITRE 1

Suites géométriques

EN TERMINALE STL – BIOTECHNOLOGIES, LES RÉSULTATS SUR LES SUITES GÉOMÉTRIQUES SONT COMPLÉTÉS. LES SUITES GÉOMÉTRIQUES SONT NOTAMMENT UTILISÉES DANS DES SITUATIONS ISSUES DES BIOTECHNOLOGIES.

CAPACITÉS

- Reconnaître et justifier la présence d'une suite géométrique dans une situation donnée.
- Connaître et utiliser la formule donnant $1 + q + \ldots + q^n$ où $q \neq 1$.
- Connaître et utiliser $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ pour q positif.

ACTIVITÉ 1 — 0,99 et 1,01 sont « voisins » et pourtant, avec un tableur...

On considère les deux suites (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 0{,}99^n$ et $w_n = 1{,}01^n$.

1° On rappelle que le terme général d'une suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est $u_n = u_0q^n$.
Démontrer que (v_n) et (w_n) sont des suites géométriques en précisant leur premier terme et leur raison.

2° Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} < v_n$ et $w_{n+1} > w_n$.

3° À l'aide d'une feuille de calcul où la colonne A représente les valeurs de n, la colonne B celles de v_n et la colonne C celles de w_n, indiquer à partir de quelle valeur de n on a :

a) $v_n \leq 10^{-1}$; $v_n \leq 10^{-3}$; $v_n \leq 10^{-6}$ (un millionième) ; $v_n \leq 10^{-9}$ (un milliardième).

b) $w_n \geq 10$; $w_n \geq 10^3$; $w_n \geq 10^6$ (un million) ; $w_n \geq 10^9$ (un milliard).

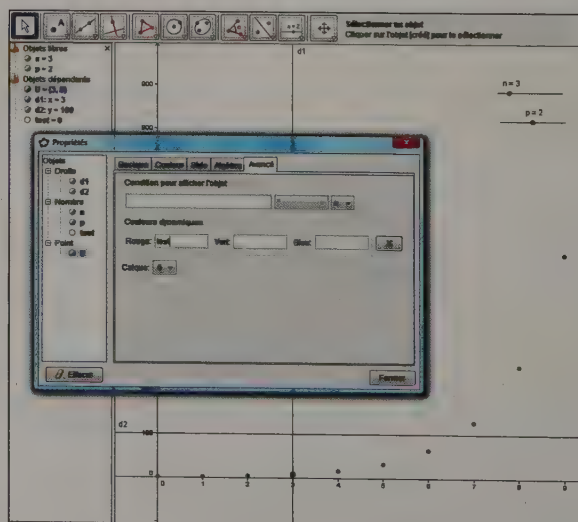
4° Proposer une conjecture pour chacune des suites (v_n) et (w_n) lorsque n prend de « grandes valeurs ».

ACTIVITÉ 2 — Introduire la notion de limite d'une suite avec le logiciel GeoGebra

On se propose de montrer comment on peut formaliser la notion de limite d'une suite géométrique.
On considère une culture de bactéries, pour laquelle le nombre de bactéries au bout de n heures, n entier naturel, est donné par $u_n = 2^n$.
Pour représenter les premiers termes de la suite (u_n) à l'aide de GeoGebra :
– faire un clic droit sur le graphique, choisir Propriétés/Axes et entrer, pour axeX, min : – 1, max : 16 et, pour axeY, min : – 100, max : 1 000 ;
– créer un curseur n allant de 0 à 16 avec un incrément de 1 ;
– entrer dans la barre de saisie U=(n,2^n) ;
– par un clic droit sur le point U, choisir « Trace activée » puis bouger le curseur. (On peut « rafraîchir » l'écran avec Ctrl+F.)

1° Décrire l'évolution de la population de bactéries.

2° On souhaite observer que, pour un entier naturel p donné, il existe un seuil à partir duquel le nombre de bactéries u_n est supérieur ou égal à 10^p.
• Créer un curseur p allant de 0 à 4 avec un incrément de 1.
• Entrer dans la barre de saisie d1:x=n puis d2:y=10^p.
• Créer un test de dépassement en entrant dans la barre de saisie :
test=Si[y(U)>=10^p,1,0].
• Faire un clic droit sur U dans la fenêtre algèbre et, dans Propriétés/Avancé/Couleurs dynamiques, entrer test pour la couleur rouge.
Bouger le curseur n pour déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle on a $u_n \geq 10^p$ lorsque :
a) $p = 1$; **b)** $p = 2$; **c)** $p = 3$; **d)** $p = 4$.
(Le cas échéant, modifier l'échelle pour axe Y.)



1 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

A. Rappels

DÉFINITION

Une **suite géométrique** est une suite numérique dont chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par une constante q appelée **raison**.
Pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.

q ne dépend pas de n.

THÉORÈMES

- Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q :
$$\boldsymbol{u_n = u_0 q^n} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$
- Pour une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q :
$$\boldsymbol{u_n = u_1 q^{n-1}} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

Par exemple, $u_6 = u_0q^6$ ou $u_6 = u_1q^5$.

ON PEUT RETENIR QUE

$$u_n = (\text{premier terme}) \times (\text{raison})^{\text{nombre de termes avant } u_n}.$$

ON PEUT RETENIR QUE

- Chaque fois qu'on est confronté à une situation du type « une population, une production, un prix … augmente de x % tous les ans », on peut définir une suite géométrique de raison $1+\dfrac{x}{100}$.
- S'il s'agit d'une diminution de x %, on peut définir une suite géométrique de raison $1-\dfrac{x}{100}$.

B. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Somme des $(n+1)$ premières puissances d'un nombre réel q

Posons $s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.

Multiplions s_n par $-q$, puis ajoutons membre à membre les deux égalités :

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$
$$-qs_n = -q - q^2 - \ldots - q^n - q^{n+1}$$
$$s_n(1-q) = 1 - q^{n+1}.$$

Donc, si $q \neq 1$, $s_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Les termes en q, q^2, …, q^n s'éliminent deux à deux.

THÉORÈME

$$\text{Si } q \neq 1,\ 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Animation vidéo

La somme $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ peut être notée $\sum_{i=0}^{n} q^i$ qui se lit « somme de i égale zéro à n de q puissance i ».

Σ est la lettre grecque majuscule « sigma ».

Dans le cas où $q = 2$ et $n = 9$, on obtient :

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9 = \frac{1-2^{10}}{1-2}, \text{ donc } \sum_{i=1}^{9} 2^i = 2^{10} - 1 = 1\,023.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $1^n = 1$.

Remarque

Si $q = 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$, $q^n = 1$.
Alors $s_n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ est une somme de $n + 1$ termes, tous égaux à 1.
Donc $s_n = n + 1$.

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q de premier terme u_0.

Soit $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

$S_n = u_0 + u_0 q + \ldots + u_0 q^n$,

$S_n = u_0(1 + q + \ldots + q^n)$.

On utilise le théorème précédent.

Donc $S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ dans le cas où $q \neq 1$.

De même, pour une suite géométrique de premier terme u_1 : si $q \neq 1$,

$u_1 + \ldots + u_n = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

THÉORÈME

Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, si $q \neq 1$,
$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Si $b = 1$, $S_n = (n+1)u_0$.

Ce résultat est utilisable pour toute somme de termes successifs d'une suite géométrique.

ON PEUT RETENIR QUE

$$S_n = (\text{premier terme}) \times \frac{1-(\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1-(\text{raison})}.$$

EXERCICE résolu

Reconnaître et justifier la présence d'une suite géométrique dans une situation donnée

ÉNONCÉ

Une entreprise propose à un technicien de laboratoire impliqué dans un projet innovant une prime qui peut prendre deux formes :
- un montant annuel initial de 1 000 € augmenté chaque année de 2 % pendant 5 ans,
- un montant annuel initial de 975 € augmenté chaque année de 3 % pendant 5 ans.

Quelle proposition permet au technicien de bénéficier du total le plus avantageux sur l'ensemble des six années où la prime est versée ?

MÉTHODE

Reconnaître et justifier la présence d'une suite géométrique dans une situation donnée.

SOLUTION

Dans les deux cas le montant annuel de la prime est augmenté d'un pourcentage fixe pendant cinq ans. D'après le dernier rappel du paragraphe **1.A.** du cours, ce montant est le terme général d'une suite géométrique :
- de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1 + \dfrac{2}{100} = 1{,}02$ dans le premier cas,
- de premier terme $u'_0 = 975$ et de raison $q' = 1 + \dfrac{3}{100} = 1{,}03$ dans le second cas.

Sur l'ensemble des six années, le technicien reçoit :

• dans le premier cas $u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5$;

or $\sum_{i=0}^{5} u_i = u_0 \frac{1-q^6}{1-q}$,

donc le montant total est : $1\,000 \frac{1-1{,}02^6}{1-1{,}02} \approx 6\,308$ € ;

• dans le second cas $u'_0+u'_1+u'_2+u'_3+u'_4+u'_5$; le montant total est, de même, $975 \frac{1-1{,}03^6}{1-1{,}03} \approx 6\,307$ €.

À un euro près, les deux propositions sont équivalentes.

VOIR AUSSI LES EXERCICES CORRIGÉS 15 et 17

2 Limite d'une suite géométrique

A. Limite de (q^n), où $q > 0$

Voir l'activité d'approche 1.

Nous avons observé à l'aide d'un tableur les deux comportements très différents des suites $(0{,}99)^n$ et $(1{,}01)^n$ quand n prend de « grandes » valeurs : la suite $(0{,}99)^n$ prend des valeurs très « proches » de 0 et la suite $(1{,}01)^n$ prend de « grandes » valeurs.

Nous admettons ici que $\lim_{n\to+\infty} 0{,}99^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} 1{,}1^n = +\infty$.

Plus généralement le théorème suivant est admis.

THÉORÈME

Soit q un nombre réel *strictement positif*

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q>1\,; \\ 1 & \text{si } q=1\,; \\ 0 & \text{si } 0<q<1. \end{cases}$$

$1^n = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exemple

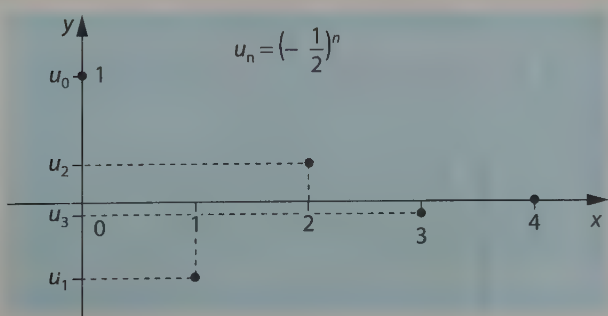
Voir l'activité d'approche 2.

$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$; $\lim_{n\to+\infty} 0{,}917^n = 0$.

Remarque

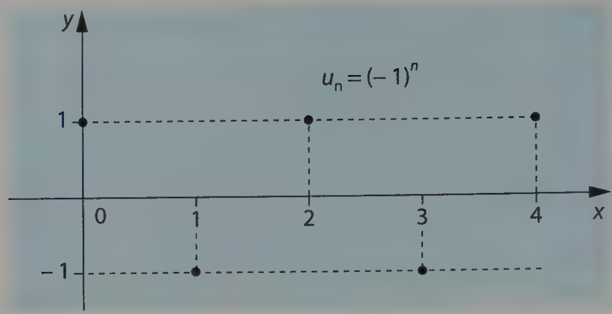
Observons graphiquement le comportement de la suite $(u_n) = (q^n)$ sur quelques exemples où q est négatif.

Cas où $q = -\frac{1}{2}$.



Nous admettons que $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

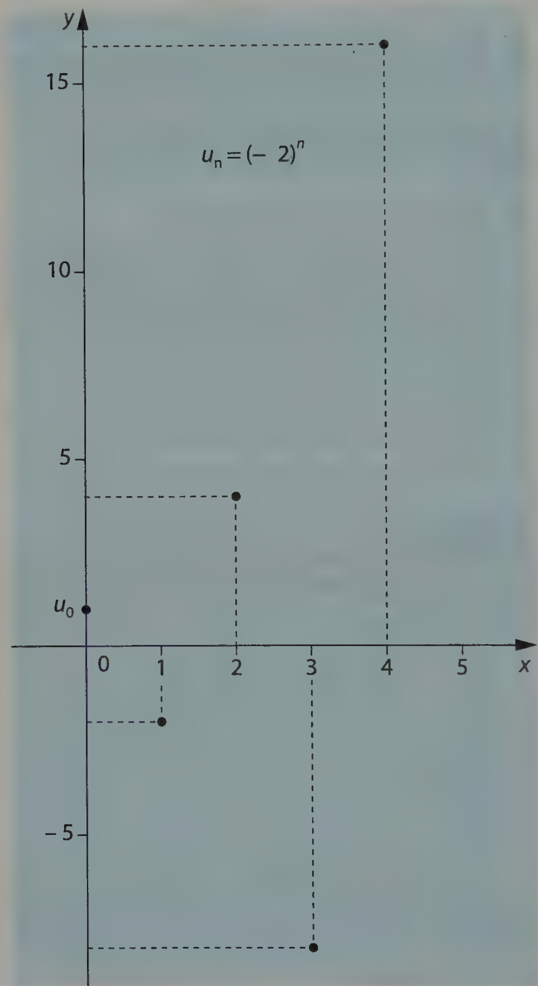
Cas où $q = -1$



$u_0 = u_2 = u_4 = 1$
$u_1 = u_3 = -1$

Pour tout n pair, $(-1)^n = 1$ et pour tout n impair, $(-1)^n = -1$.
La suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Cas où $q = -2$



$u_0 = 1$
$u_1 = -2$
$u_2 = 4$
$u_3 = -8$
$u_4 = 16$
$u_5 = -32$
$u_6 = 64$

La suite $(-2)^n$ n'a pas de limite.

B. Limite d'une suite géométrique

On admet le résultat suivant :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0, de raison q, avec $q > 0$.

- Si pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n$, avec $u_0 > 0$ et $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n$, avec $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exemple

• Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 0{,}9$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;

• soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 1{,}2$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Ce qu'il faut savoir

Suites géométriques

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 ou u_1, de raison q.

• Pour tout entier n de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{u_{n+1} = qu_n}$.

• Lorsque le premier terme de la suite est u_0 : pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_0 q^n}$.

• Lorsque le premier terme de la suite est u_1 : pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{u_n = u_1 q^{n-1}}$.

• Lorsque le premier terme de la suite est u_0 : $\boldsymbol{u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$, $\boldsymbol{q \neq 1}$.

• **Pour une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique**, on peut retenir que :

$$\textbf{(Somme de termes successifs)} = \textbf{(Premier terme)} \times \frac{1-(\textbf{Raison})^{\textbf{nombre de termes}}}{1-(\textbf{Raison})}.$$

Augmentation ou diminution de x %

• Chaque fois qu'on est confronté à une situation du type « une population, une production, un prix … augmente de x % tous les ans », on peut définir une suite géométrique de raison $1+\dfrac{x}{100}$.

• S'il s'agit d'une diminution de x %, on peut définir une suite géométrique de raison $1-\dfrac{x}{100}$.

Limite de q^n

• Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

• Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

• Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0, de raison q.

• Si, pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n$, avec $u_0 > 0$ et $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

• Si, pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n$, avec $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

RÉPONSES P. 325

TP 1 Étudier des suites à l'aide d'un tableur et utiliser la limite de (q^n)

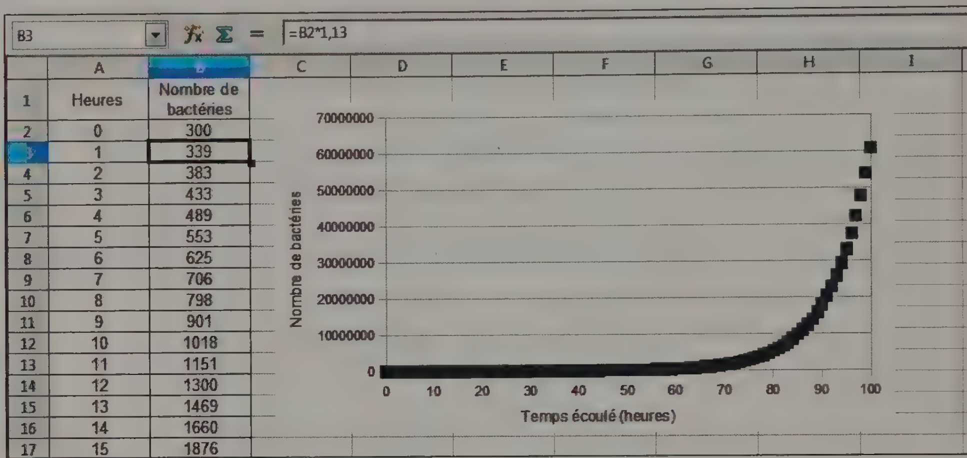
Évolution d'une population de bactéries

LOGICIEL UTILISÉ
Tableur

Dans un milieu de culture en laboratoire, une population microbienne évolue en fonction du temps. Au début de l'étude, le nombre de bactéries est de 300 et l'on estime qu'il augmente de 13 % chaque heure.

A. Évolution, heure par heure, du nombre de bactéries

On utilise le tableur pour étudier la population de bactéries (on pourra présenter la feuille de calcul comme ci-dessous, en plaçant la colonne B au format nombre avec 0 décimale).



B3 =B2*1,13

	A	B
1	Heures	Nombre de bactéries
2	0	300
3	1	339
4	2	383
5	3	433
6	4	489
7	5	553
8	6	625
9	7	706
10	8	798
11	9	901
12	10	1018
13	11	1151
14	12	1300
15	13	1469
16	14	1660
17	15	1876

1. Justifier la formule = B2*1,13 entrée en cellule B3.

2. On désigne par (u_n) la suite définie par $u_0 = 300$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}13 \times u_n$ de sorte que u_n, arrondi à l'unité, correspond au nombre de bactéries au bout de n heures. Calculer et représenter à l'aide du tableur les valeurs de u_n pour n allant de 0 à 100.

3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Quelle est sa limite ?

4. Déterminer, d'abord graphiquement, puis à l'aide des valeurs u_n calculées, au bout de combien d'heures le nombre de bactéries dépasse 100 000.

B. Effet d'un antibiotique

En réalité, au bout de 15 heures, on verse dans le milieu de culture un antibiotique qui détruit progressivement les bactéries. Le nombre de bactéries, que l'on pouvait estimer à 1 876 au bout de 15 heures se met alors à diminuer et l'on admet que le nombre de bactéries vivantes dans le milieu au temps n, exprimé en heures, est donné, pour tout entier n, $n \geq 15$, par :

$$v_n = 1\,876 \times 0{,}85^{n-15}\text{, arrondi à l'unité.}$$

1. Quelle formule peut-on entrer en cellule C17 (correspondant à $n = 15$), puis recopier vers le bas, pour obtenir les valeurs de v_n parmi les trois formules suivantes ?

=B17*0,85^(A17-15)   =B$17*0,85^(A17-15)
=B17*0,85^(A$17-15)

2. Quelle est la limite de la suite $(0{,}85^n)$? En écrivant $v_n = 1\,876 \times 0{,}85^{-15} \times 0{,}85^n$, en déduire la limite de la suite (v_n).

3. À partir de quelle valeur n du temps, les bactéries sont-elles toutes mortes ($v_n < 1$) ?

TP 2 Mettre en œuvre un algorithme pour déterminer un seuil

Désintégration du radon

La désintégration de l'atome de radium donne de l'hélium et une émanation gazeuse, le radon, qui elle-même se désintègre avec le temps selon la formule :

$u_{n+1} = 0{,}835 \times u_n$,

où u_n désigne la masse du gaz au bout du n-ième jour. On considère qu'au début de l'expérience on a $u_0 = 1$.

LOGICIELS UTILISÉS
- Calculatrices
- Algobox
- Scilab

A. Analyse d'un algorithme

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. L'algorithme suivant a été exécuté sur calculatrices, Algobox et Scilab.

```
PROGRAM:RADON
:1→U
:0→N
:While U>10^-1
:0.835*U→U
:N+1→N
:End
:Disp N,U
```

```
prgmRADON
                13
       .0959233155
              Fait
```

```
======RADON ======
1→U↵
0→N↵
While U>10^-1↵
0.835×U→U↵
N+1→N↵
WhileEnd↵
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
======RADON ======
While U>10^-1↵
0.835×U→U↵
N+1→N↵
WhileEnd↵
N◢
U
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

```
                13
  0.09592331549
```

```
▼ VARIABLES
  ├ u EST_DU_TYPE NOMBRE
  └ n EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├ u PREND_LA_VALEUR 1
  ├ n PREND_LA_VALEUR 0
  ▼ TANT_QUE (u>pow(10,-1)) FAIRE
      ├ DEBUT_TANT_QUE
      ├ u PREND_LA_VALEUR 0.835*u
      ├ n PREND_LA_VALEUR n+1
      └ FIN_TANT_QUE
  ├ AFFICHER n
  └ AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

```
Résultats
13
0.0959233155
```

```
u=1
n=0
while u>10^-1
»    u=0.835*u
»    n=n+1
end
afficher([n,u])
```

```
13.    0.0959233154895
```

a. À quoi correspond la variable n ? la variable u ?

b. Quelle est la condition d'arrêt de la boucle « Tant que » ?

3. Interpréter les résultats affichés.

B. Modification de l'algorithme

On souhaite programmer un algorithme permettant d'obtenir la première valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle $u_n \leq 10^{-p}$, p étant un entier naturel donné.

1. Modifier l'algorithme précédent de façon à répondre à ce problème puis le programmer, par exemple avec une calculatrice, AlgoBox ou Scilab.

2. Déterminer, à l'aide de votre programme, au bout de combien de jours la masse de radon est inférieure à 10^{-2}, à 10^{-3}, à 10^{-6}.

Algorithmique

Boucle conditionnelle « Tant que »

Structure

Dans une boucle « **Tant que** », le *traitement* est répété tant que la *condition* est vraie. Quand la condition est fausse, on sort de la boucle.

Tant que *condition*
| *traitement*
FinTantque

Syntaxe

Texas Instruments	Casio	AlgoBox	Scilab
:While *condition* :Then :*traitement* :End	While *condition* ↵ Then ↵ *traitement* ↵ WhileEnd	Ajouter TANT QUE...	while *condition* *traitement* end

Exemple

Rechercher, à partir de $n = 0$, le plus petit entier n tel que $1{,}05^n \geq 2$.

Texas Instruments

```
PROGRAM:TANTQUE
:0→N
:While 1.05^N<2
:N+1→N
:End
:Disp N
```

Casio

```
======TANTQUE ======
0→N↵
While 1.05^N<2↵
N+1→N↵
WhileEnd
TOP BTM SRC MEN A⇔a CHAR
```

AlgoBox

```
▼ VARIABLES
  └ n EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├ n PREND_LA_VALEUR 0
  ▼ TANT_QUE (pow(1.05,n)<2) FAIRE
    ├ DEBUT_TANT_QUE
    ├ n PREND_LA_VALEUR n+1
    └ FIN_TANT_QUE
  └ AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

Scilab

```
n=0
while 1.05^n<2
    n=n+1
end
disp(n)
```

Boucle « Pour »

Structure

Dans une boucle « **Pour** », le *traitement* est répété un nombre fixé de fois (ici n fois). Un compteur (noté ici k) s'incrémente automatiquement de 1 à chaque itération.

Pour k **de** 1 **à** n
| *traitement*
FinPour

Syntaxe

Texas Instruments	Casio	AlgoBox	Scilab
:For(K,1,N) :*traitement* :End	For 1 → K To N ↵ *traitement* ↵ Next	Ajouter POUR...DE...A	for k=1:n *traitement* end

Exemple

Calculer la somme 1 + 2 + … + 100 des 100 premiers nombres entiers.

Texas Instruments

```
PROGRAM:POUR
:0→S
:For(K,1,100)
:S+K→S
:End
:Disp S
```

Casio

```
======POUR     ======
0→S↵
For 1→K To 100↵
S+K→S↵
Next↵
S◢
COM CTL JUMP ? ◢ ▷
```

AlgoBox

```
▼ VARIABLES
  ├ k EST_DU_TYPE NOMBRE
  └ S EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├ S PREND_LA_VALEUR 0
  ▼ POUR k ALLANT_DE 1 A 100
    ├ DEBUT_POUR
    ├ S PREND_LA_VALEUR S+k
    └ FIN_POUR
  └ AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

Scilab

```
S=0
for k=1:100
    S=S+k
end
disp(S)
```

TP 3 Mettre en œuvre un algorithme avec le tableur pour déterminer un seuil

Ce TP peut permettre d'évaluer des capacités mathématiques développées grâce aux TICE.

Concentration d'un médicament

LOGICIEL UTILISÉ
Tableur

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse de courte durée. La concentration du médicament dans le sang est immédiatement maximale puis elle diminue en fonction du temps. On note C_0 la concentration initiale à la fin de l'injection et C_n la concentration au bout de n minutes. On prend pour unité de temps la minute et $C_0 = 1$ pour unité de concentration. On suppose que la diminution de la concentration entre les instants n et $n+1$ est proportionnelle à la concentration à l'instant n, ce qui conduit à la relation :

pour tout entier naturel n, $C_{n+1} - C_n = -k\,C_n$, où k est une constante telle que $0 < k < 1$.

Dans ce TP, on envisage les situations où k vaut 0,045 ; 0,035 ou 0,015.

A. Calcul des premiers termes de (C_n) avec un tableur

1. Exprimer, pour tout entier naturel n, C_{n+1} en fonction de C_n.

2. Calculer, à l'aide du tableur, les valeurs de C_n pour les dix premières heures.

(Présenter les calculs de manière dynamique, de façon à pouvoir modifier la valeur de k.)

3. Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Quelle est sa limite ?

	A	B
1	k =	0,045
2		
3	n	Cn
4	0	1
5	1	0,955
6	2	0,912
7	3	0,871
8	4	0,832
9	5	0,794
10	6	0,759

Appelez le professeur pour présenter votre démarche et vos réponses.

B. Seuil de concentration inférieure à 10^{-p}

Pour p donné, valant 1, 2 ou 3, on recherche le seuil n à partir duquel la concentration C_n est inférieure ou égale à 10^{-p}.

1. À l'aide des fonctions SI et MIN du tableur, créer un algorithme répondant au problème précédent pour les dix premières heures.

2. Mettre en œuvre l'algorithme précédent pour compléter, après l'avoir reproduit, le tableau ci-dessous.

Seuil n à partir duquel $C_n \leq 10^{-p}$

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
$k = 0,045$	$n =$	$n =$	$n =$
$k = 0,035$	$n =$	$n =$	$n =$
$k = 0,015$	$n =$	$n =$	$n =$

Appelez le professeur pour présenter votre démarche et vos réponses.

Algorithmique

Utilisation du tableur en algorithmique

Le tableur permet de mettre en œuvre des algorithmes en utilisant la recopie, la notion d'adresse relative et absolue, ainsi que certaines fonctions logiques.

Recopie

Pour recopier la formule d'une cellule, on glisse avec le pointeur de la souris en forme de **croix noire**, en gardant le bouton gauche enfoncé.

Attention, « recopier » ne signifie pas « copier à l'identique » (voir ci-dessous).

Adresse relative et adresse absolue

Une cellule est repérée par son « adresse ». Par exemple A1 signifie colonne A, ligne 1. L'adresse A1 est **relative**.

La recopie vers le bas **augmentera la référence** de ligne d'une unité et la recopie vers la droite augmentera la référence de colonne selon l'ordre de l'alphabet.

= A1*B1	= B1*C1
= A2*B2	

= $A$1*B1	= $A$1*C1
= $A$1*B2	

L'adresse $A$1 est **absolue. La recopie ne modifie pas cette adresse.**

Fonction SI

La formule =SI(test ; valeur si vrai ; valeur si faux) permet de conditionner deux actions alternatives au résultat d'un test logique.

Par exemple, la formule =SI(0,8^A3<0,5;A3;" ") affiche le contenu de la cellule A3 si 0,8^A3<0,5 et n'affiche rien sinon. Cette formule est, par recopie, à l'origine de l'algorithme suivant, déterminant le seuil à partir duquel la suite de terme général $(0,8)^n$ fournit des résultats inférieurs à 0,5.

La cellule E1 contient la formule =MIN(B:B).

B3 fx =SI(0,8^A3<0,5;A3;"")

	A	B	C	D	E
1	Le plus petit entier tel que 0,8^n < 0,5 est :				4
2	n	recherche seuil			
3	0				
4	1				
5	2				
6	3				
7	4	4			
8	5	5			
9	6	6			
10	7	7			

Quelques mots d'histoire

Robert Frankston (né en 1949) et **Daniel Bricklin** (né en 1951) sont les deux informaticiens américains à l'origine du tableur. La légende veut que l'idée soit venue lors d'un cours d'université. L'enseignant, après avoir dressé une grande table de calculs, y décèle une erreur, ce qui l'oblige à effacer et recalculer de nombreuses cases. Les cellules d'un tableur automatisent le processus.

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE	Exercices corrigés	Exercices non corrigés
Calculer des termes, calculer une somme de termes d'une suite géométrique	1, 4, 9	2, 3, 5 à 8 10 et 11
Étudier des situations conduisant à une suite géométrique	12, 15, 17	13, 14, 16 18 à 23, 44 à 47, 52
Calculer avec des intérêts composés	24, 25	26, 27
Déterminer la limite d'une suite géométrique	28, 47	29, 30
TICE Utiliser un tableur	31, 32, 33 38, 44, 50	37, 47, 49 50, 51, 52
ALGO Utiliser le logiciel Scilab	34	
ALGO Utiliser un algorithme	34, 35, 48	

Suites géométriques

1. + Suite géométrique de premier terme u_0

La suite géométrique (u_n) est définie par :
$u_0 = 16$ et, pour tout entier n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Pour tout entier n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{10}. Arrondir à 10^{-3}.
4. Représenter graphiquement la suite (u_n).
5. On note $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Calculer S_{10}. Arrondir à 10^{-3}.

CORRIGÉ P. 325

2. + Suite géométrique

La suite géométrique (u_n) est définie par $u_0 = 9$ et pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

3. + Suite géométrique

La suite géométrique (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = 4u_n, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_9$.

Dans les exercices **4** à **7** u_n désigne une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

4. + On donne le premier terme et la raison

$u_0 = 1\,000$ et $q = 1{,}022\,5$
Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de u_{10} et de S_{10}.

CORRIGÉ P. 325

5. + On donne le premier terme et la raison

a) $u_0 = -2$ et $q = 3$; calculer u_5 et S_5.
b) $u_0 = 500$ et $q = 1{,}032\,5$; calculer u_{10} et S_{10}.
Arrondir à 10^{-2}.

6. + On donne un terme et la raison

a) $u_5 = 32\,768$ et $q = 0{,}8$; calculer u_0.
b) $u_4 = 20\,736$ et $q = 1{,}2$; calculer u_0.

7. ++ On donne deux termes

$u_2 = 4$ et $u_4 = \frac{16}{9}$; calculer q.

8. +++ Reconnaître une suite géométrique

▶ *Avec prise d'initiatives.*

1. Démontrer que les nombres 50 000, 48 000, 46 080 peuvent être, dans cet ordre, les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 d'une suite géométrique (u_n) dont on précisera la raison q.

2. Calculer u_{10} et S_{10}. Arrondir à 10^{-2}.

9. ++ Suite géométrique de premier terme u_1

La suite géométrique (u_n) est définie par :

$u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$,

$u_{n+1} = 2u_n$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4.

2. Pour tout entier non nul n, exprimer u_n en fonction de n.

3. Calculer u_{11} et $S_{11} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{11}$.

4. Représenter graphiquement la suite (u_n).

CORRIGÉ P. 326

10. ++ Suite géométrique de premier terme u_0, calcul de termes

La suite géométrique (C_n) est définie par :

$C_0 = 1\,000$ et, pour tout entier n de $\mathbb{N}$,

$C_{n+1} = 1{,}022\,5\ C_n$.

Dans ce qui suit, arrondir les valeurs approchées à 10^{-2}.

1. Calculer C_1, C_2, C_3.

2. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, exprimer C_n en fonction de n.

3. Calculer C_{31} et C_{32}. En déduire le plus petit nombre entier n tel que $C_n \geq 2C_0$.

11. ++ Le premier terme est v_1, trouver le premier terme qui franchit un seuil donné

La suite géométrique (v_n) est définie par le premier terme $v_1 = 100\,000$ et la raison $q = 0{,}9$.

1. Écrire les cinq premiers termes de la suite géométrique (v_n).

2. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, exprimer v_n en fonction de n.

3. Calculer v_7 et v_8. En déduire le plus petit entier n tel que $v_n \leq \frac{1}{2}v_1$.

Exemples de situations conduisant à des suites géométriques

12. ++ Croissance d'une population de bactéries

On s'intéresse, lors d'une expérience, à la croissance d'une population de bactéries dont le nombre triple toutes les heures. À l'instant $t = 0$ la population est de 10 germes.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Temps (h)	0	1	2	6	9
Nombre de germes	10				

2. On appelle :

u_0 le nombre de germes à l'instant $t = 0$,

u_1 le nombre de germes à l'instant $t = 1$,

u_2 le nombre de germes à l'instant $t = 2$,

u_n le nombre de germes à l'instant $t = n$.

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

b) En déduire la nature de la suite de terme général u_n et donner ses caractéristiques.

c) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

d) Calculer le nombre de germes obtenus au bout de 12 heures, au bout de 13 heures.

e) Déduire du **d)** au bout de combien d'heures la population dépasse 10^7 germes.

CORRIGÉ P. 326

13. ++ Radioactivité

Les éléments radioactifs sont instables et ont tendance à se désintégrer. On considère une masse de noyaux radioactifs, par exemple de plutonium provenant des déchets d'une centrale nucléaire.

La période T est le temps au bout duquel la moitié des noyaux initialement présents ont été désintégrés.

Soit N_0 le nombre de noyaux à l'instant $t = 0$.

On a :

t	0	T	$2T$	…
Nombre de noyaux radioactifs restant à l'instant t	N_0	$\frac{N_0}{2}$	$\frac{N_0}{4}$	…
Nombre total de noyaux désintégrés à l'instant t	0	$\frac{N_0}{2}$	$\frac{N_0}{2} + \frac{N_0}{4}$	…

1. Vérifier que les nombres de noyaux radioactifs restant aux instants $t = 0$, $t = T$, $t = 2T$, …, $t = nT$, forment une suite géométrique dont on donnera la raison.

2. Calculer, en fonction de N_0, le nombre total de noyaux désintégrés à l'instant $t = 10T$.

(Pour le plutonium 239, $T = 24\,000$ ans…)

14. +++ L'épidémie de grippe entre décembre 2009 et janvier 2010

On s'intéresse au développement d'une épidémie de grippe, en France, entre décembre 2009 et janvier 2010. On note g_n le nombre de cas de grippes déclarés pour 100 000 habitants au cours de la semaine n de l'année 2009.

n	49	50	51	52
g_n	193	312	468	666
Coefficient multiplicatif		1,62		

1. Déterminer les deux coefficients multiplicatifs permettant de passer de g_{50} à g_{51} et de g_{51} à g_{52}.
Arrondir éventuellement à 10^{-2}.

2. On décide d'approcher la suite (g_n) par la suite géométrique (u_n) de raison 1,5 telle que $u_{49} = 193$.
Ainsi, u_{53} approchera le nombre de cas de grippe de la première semaine de l'année 2010.

a) Calculer u_{53}.

b) En réalité, pendant la première semaine de l'année 2010, il y a eu 954 cas de grippe déclarés pour 100 000 habitants. Déterminer l'erreur, en nombre de cas pour 100 000 habitants, entre la valeur réelle et la valeur prévue par la suite (u_n). Exprimer cette erreur en pourcentage de la valeur réelle.

15. +++ Exemple de variations successives égales à t %

Le prix de vente d'un équipement neuf pour les laboratoires d'analyses biologiques était $V_0 = 12\,000$ € en 2007. On admet que cet équipement perd 20 % de sa valeur chaque année. Pour tout entier naturel n, on désigne par V_n la valeur de revente de cet équipement l'année $(2007 + n)$.

1. a) Démontrer que $V_1 = 0{,}8 \times V_0$. Calculer V_1.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0{,}8\, V_n$. En déduire la nature de la suite (V_n).

c) Donner l'expression de V_n en fonction de n.

d) Calculer V_5. Que représente V_5 ?

2. Pendant la même période, de 2007 à 2012, on admet que le prix de cet équipement a augmenté de 2 % chaque année. On note $P_0 = 12\,000$ €. Pour tout entier naturel n, on désigne par P_n le prix d'achat neuf de l'équipement l'année $(2007 + n)$.

a) Démontrer que la suite (P_n) est une suite géométrique de premier terme P_0 dont on précisera la raison.

b) Donner l'expression de P_n en fonction de n.

c) Calculer P_5. Arrondir à l'euro. Que représente P_5 ?

En 2012 un laboratoire a revendu l'équipement acheté en 2007 pour la somme de 12 000 € et l'a remplacé par le même équipement neuf. Combien a-t-il dû débourser ?

▶ Augmentation ou diminution de t %

• Chaque fois qu'on est confronté à une situation du type « une population, une production, un prix … augmente de t % tous les ans », on peut définir une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$.

• S'il s'agit d'une diminution de t %, on peut définir une suite géométrique de raison $1 - \frac{t}{100}$.

CORRIGÉ P. 326

16. ++ On calcule une somme de termes consécutifs

Une blanchisserie industrielle prévoit d'augmenter sa capacité de lavage de draps d'hôpitaux de 10 % chaque année. Cette blanchisserie a lavé 260 000 draps la 1re année.
Dans ce qui suit, U_n désigne le nombre prévu de draps lavés la n-ième année, donc $U_1 = 260\,000$.

1. Calculer U_2, U_3 et U_4.

2. $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots$ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.

a) Déterminer la valeur de q.

b) Exprimer U_n en fonction de n.

3. On admet que l'objectif prévisionnel est maintenu.

a) Calculer le nombre de draps lavés la 10e année.

b) Calculer le nombre total de draps que la blanchisserie aura lavés pendant 10 ans.

▶ Rappel

Pour une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique on a :

$$\begin{pmatrix}\text{Somme}\\ \text{des termes}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Premier}\\ \text{terme}\end{pmatrix} \times \frac{1-(\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1-(\text{raison})}.$$

17. ++ Production d'incubateurs réfrigérés

En janvier 2011, une firme offrait sur le marché 2 000 unités d'un nouveau modèle d'incubateur réfrigéré, avec une perspective d'augmentation de cette production de 5 % par an pendant 7 ans.
On pose $p_0 = 2\,000$.
On note p_n la quantité offerte en janvier de l'année $(2011 + n)$.$(2011 + n)$ désigne les années 2012 pour $n = 1$; 2013 pour $n = 2$…

1. Calculer p_1, p_2, p_3.

2. Exprimer, pour tout entier n, p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire la nature de la suite (p_n).

Méthode :
Pour établir qu'une suite (u_n) est une suite géométrique, montrer que, pour tout entier n, $u_{n+1} = qu_n$; q, constant, est la raison de la suite géométrique.

3. Exprimer p_n en fonction de n.

4. Calculer la production totale prévisible entre janvier 2011 et janvier 2018.

CORRIGÉ P. 326

18. ++ Évolution d'une production, le premier terme est u_1

Une entreprise commence cette semaine la fabrication de systèmes d'alarme pour les locaux professionnels.
La production, la première semaine, sera $u_1 = 2\,000$. Puis l'entreprise prévoit d'augmenter sa production chaque semaine de 10 %.

On désigne par u_n, le nombre de systèmes fabriqués la n-ième semaine.

1. Calculer u_2, u_3, u_4.

2. a) Quel coefficient multiplicateur permet de passer de u_1 à u_2 ? de u_2 à u_3 ? de u_n à u_{n+1} ?

b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.

3. Calculer la production totale au cours des 20 premières semaines. Le résultat est à arrondir à l'unité.

19. +++ Augmentation annuelle de 1,5 %

Un laboratoire d'analyses biologiques a embauché un technicien le 1er juillet 2007, aux conditions suivantes :

– salaire mensuel net : $u_0 = 2\,000$ € au 1er juillet 2007 ;

– augmentation de 1,5 % par an.

On note : u_1 : le salaire au 1er juillet 2008 ;

u_2 : le salaire au 1er juillet 2009 ;

...

u_n : le salaire au 1er juillet de l'année $(2007 + n)$.

1. Calculer le salaire mensuel u_1 au cours de la deuxième année puis le salaire mensuel u_2 au cours de la 3e année. Les résultats seront arrondis au centime d'euro.

2. Les salaires successifs de ce technicien forment une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 2\,000$ €.

Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

▶ *Procéder comme à l'exercice corrigé 17.*

3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Si le salaire du technicien devait augmenter tous les ans de 1,5 % pendant 7 ans, quel serait son montant en juillet 2014 ?

20. +++ Pour protéger l'environnement

Pour répondre à une nouvelle norme antipollution, un important groupe industriel de l'agroalimentaire doit ramener progressivement sa quantité de rejets, qui est de 50 000 tonnes par an en 2010, à une valeur inférieure ou égale à 30 000 tonnes en 10 ans au plus, soit une réduction de 40 %.

Il s'engage à réduire chaque année sa quantité de rejets de 4 % (soit un taux annuel de diminution de 4 %).

1. S'il rejette 48 000 tonnes en 2011, respecte-t-il son engagement ?

2. Pour tout entier n, on note r_n la quantité de rejets de l'année « 2010 + n ».

a) Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n.

Quelle est la nature de la suite (r_n) ?

b) Exprimer r_n en fonction de n.

3. Calculer, à la tonne près, la quantité de rejets prévus pour l'année 2020. La norme sera-t-elle respectée en 2020 ?

4. Un taux annuel de diminution de 5 % permettrait-il de respecter la norme ?

▶ *Avec prise d'initiatives*

21. +++ En période de sécheresse

Un jardinier dispose d'une citerne pouvant contenir 1 500 litres d'eau et remplie aux deux tiers. En période de sécheresse, cette citerne perd d'un jour à l'autre 5 % du contenu qu'elle avait au début du jour.

1. Quel est le volume contenu dans la citerne après un jour de sécheresse ? après deux jours de sécheresse ?

2. Après dix jours de sécheresse, le jardinier décide d'arroser ses 65 arbustes. Il a besoin pour cela de 10 litres d'eau par arbuste.

Sa réserve sera-t-elle suffisante ?

▶ **Conseil :** *on peut construire une suite géométrique.*

22. +++ Payer en quatre fois

Une entreprise achète un robot 6 800 €. Les conditions de paiement sont les suivantes : les quatre remboursements, notés u_0, u_1, u_2, u_3 sont des termes successifs de la suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison $q = 0{,}6$.

Calculer les quatre remboursements : u_0, u_1, u_2, u_3.

▶ *Avec prise d'initiatives.*

23. +++ L'injection d'un calmant

On a injecté un centimètre cube de produit calmant à un malade. Toutes les demi-heures, son organisme élimine 10 % de ce produit.

1. Quel volume de ce produit calmant le malade a-t-il éliminé au bout de six heures ?

2. Sachant que ce produit n'est plus efficace lorsque le volume restant est inférieur à 500 millimètres cubes, au bout de combien de temps le produit sera-t-il inefficace ?

▶ *Avec prise d'initiatives.*

Intérêts composés

▶ **Placements avec intérêts composés**

- *Placer un capital C_0 à x % par an* ***avec intérêts composés*** *signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital et que, l'année suivante, ils rapportent eux aussi des intérêts.*
- *Pour un placement avec intérêts composés à x %, on note $i = \frac{x}{100}$; i est l'intérêt versé pour un capital de un euro ; les capitaux disponibles successifs au bout d'une année, …, n années : C_1, …, C_n sont alors des termes successifs d'une* ***suite géométrique de premier terme C_0 et de raison : (1 + i)****.*
- *La* ***valeur acquise*** *est, à la fin du placement, le montant du capital augmenté des intérêts produits.*
- *Ce type de placement est notamment celui des « livrets A », des « LEP » (livrets d'épargne populaire), des « livrets jeunes » des « LDD » (livrets de développement durable).*

Dans les problèmes d'intérêts composés, on ne considère que des suites géométriques de premier terme C_0. Un premier terme C_1 est inadapté dans ce cas.

24. ++ Placement avec intérêts composés

Dans cet exercice, on donnera éventuellement des valeurs approchées des résultats, arrondies au centime.

On place un capital C_0 = 6 000 € à 3,5 % par an avec intérêts composés. Cela signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital, et que, l'année suivante, ils rapportent eux aussi des intérêts.

On note C_n le capital obtenu (ou « valeur acquise ») au bout de n années.

1. Calculer C_1, C_2, C_3.

2. a) Donner pour tout entier n, l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.

b) En déduire que les nombres C_0, C_1, C_2…, C_n sont des termes successifs d'une suite géométrique de premier terme C_0 dont on précisera la raison.

c) Donner l'expression de C_n en fonction de n. Calculer C_{20} et C_{21}.

3. Au bout de combien d'années le capital initial aura-t-il doublé ?

CORRIGÉ P. 326

▶ **Conseils :** *dans chacun des exercices* **25** *et* **26**, **27** *on peut mettre en évidence une (ou deux) suite(s) géométrique(s).*

25. +++ Le capital inconnu

Quel capital faut-il placer aujourd'hui à 2,9 % par an, avec intérêts composés, pour que la valeur acquise dans 10 ans soit 10 000 euros ?

CORRIGÉ P. 326

26. +++ Calcul de la valeur acquise et du taux pour un placement à intérêts composés

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. *Calcul de la valeur acquise*

Calculer la *valeur acquise* par un capital de 2 650 € placé à intérêts composés pendant 4 ans au taux semestriel de 1,50 %.

En déduire le montant des intérêts acquis. Arrondir au centime d'euro.

2. *Calculer le taux*

Déterminer à quel taux annuel il faut placer, à intérêts composés, une somme de 10 000 € pour que sa *valeur acquise* au bout de deux ans de placement soit de 10 506,25 €.

27. ++++ Un « truc » de banquier : « la règle des 70 »

Pour estimer l'importance de l'augmentation de la valeur acquise d'un capital placé à intérêts composés, les banquiers utilisent une formule approchée : « Pour doubler un capital placé à i % par an, avec intérêts composés, il suffit de le placer pendant n années, n étant tel que le produit ni soit approximativement égal à 70 %. »

Par exemple, au taux de 7 %, un capital double approximativement en dix ans.

1. Combien de temps faut-il laisser un capital placé au taux de 10 % par an, avec intérêts composés, pour qu'il double ?

2. Même question avec un taux de 5 %.

3. a) Pour un capital de 1 000 €, calculer avec une calculatrice la valeur acquise lorsqu'il a été placé à 7 % par an avec intérêts composés pendant dix ans. Arrondir à l'euro.

b) Même question qu'au a) avec 10 % en sept ans.

c) Même question qu'au a) avec 5 % et quatorze ans.

▶ *Cette approximation ne peut être justifiée en terminales STL – Biotechnologies.*

Limites de suites géométriques

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ (exercices **28** à **30**).

28. +

a) $u_n = (1{,}3)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
b) $u_n = (0{,}2)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
c) $u_n = 300(1{,}05)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
d) $u_n = 100(0{,}95)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

CORRIGÉ P. 326

29. +

a) $u_n = (1{,}2)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
b) $u_n = (0{,}8)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

30. +

a) $u_n = 200(1{,}1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
b) $u_n = 500(0{,}99)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Exemples d'utilisation de logiciels

31. +++ **Température d'une pièce en aluminium pour les laboratoires** TICE

Une pièce en aluminium pour du matériel de laboratoire vient d'être fabriquée. Sa température est de 400 °C. Elle refroidit dans un local à une température ambiante de 20 °C. Au bout de 10 minutes, la température de la pièce en aluminium est 291,7 °C.

On étudie le refroidissement de cette pièce en aluminium en utilisant la loi physique suivante : pendant chaque intervalle de temps d'une minute, le refroidissement de la pièce en aluminium est proportionnel à la différence entre la température de la pièce en aluminium au début de l'intervalle et la température ambiante. En notant $\theta(n)$ la température de la pièce en aluminium à l'instant n, exprimé en minutes, cette loi se traduit par :

$$\theta(n+1) - \theta(n) = -k(\theta(n) - 20),$$

où k est une constante réelle positive.

On considère la suite (y_n) définie, pour tout entier naturel n, par $y_n = \theta(n) - 20$.

1. Donner les valeurs de y_0 et y_{10}.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$y_{n+1} = (1-k)y_n.$$

Que peut-on en déduire quant à la nature de la suite (y_n) ?

3. À l'aide du tableur, et de l'outil valeur cible, déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de k. (On pourra initialiser la recherche en prenant $k = 0{,}04$.)

4. En utilisant le tableur, déterminer le plus petit entier n pour lequel la température $\theta(n)$ de la pièce en aluminium est inférieure à 100 °C.

5. On considère la suite (a_n) définie, pour tout entier naturel n, par $a_n = \theta(n) - \theta(n+1)$.

a) Vérifier à l'aide du tableur que les premières valeurs de a_n sont les termes consécutifs d'une suite géométrique.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $a_n = ky_n$.
En déduire une justification du fait que (a_n) est une suite géométrique.
Utiliser le tableur pour déterminer le plus petit entier n tel que la différence de température $\theta(n) - \theta(n+1)$ est inférieure à 1 °C.

	A	B	C	D
1	k=	0,040		
2	n	y(n)	Θ(n)	
3	0	380,00	400,00	
4	1	364,80	384,80	
5	2	350,21		
6	3	336,20		
7	4	322,75		
8	5	309,84		
9	6	297,45		
10	7	285,55		
11	8	274,13		
12	9	263,16		
13	10	252,64	272,64	
14	11	242,53	262,53	

Recherche de valeur cible
Paramétrages par défaut
Cellule de formule: $B$13
Valeur cible: 271,7
Cellule variable: B1

CORRIGÉ P. 326

32. +++ **Avec le tableur : capacité de production éolienne** TICE

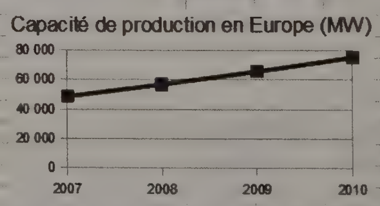
On étudie, à l'aide d'un tableur, l'évolution de la capacité de production éolienne (en MW) de l'Europe et de l'Asie (source : EWEA).

1. Comparer les deux graphiques obtenus.

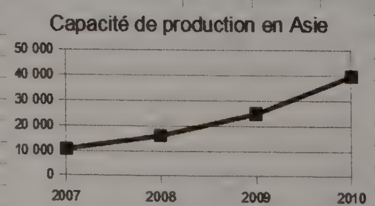
2. Quelle formule, entrée en C5 et recopiée vers la droite, permet de calculer l'accroissement annuel de la production européenne ?

3. Quelle formule, entrée en C20 et recopiée vers la droite, permet de calculer le taux d'accroissement annuel de la production asiatique (les cellules sont au format pourcentage) ?

	A	B	C	D	E	F
1	Capacité de production éolienne en Europe					
2						
3	Année	2007	2008	2009	2010	
4	Puissance (MW)	48 543	57 005	65 810	75 293	
5	Accroissement annuel		8 462	8 805	9 483	



	A	B	C	D	E	F
16	Capacité de production éolienne en Asie					
17						
18	Année	2007	2008	2009	2010	
19	Puissance (MW)	10 678	16 060	24 850	39 769	
20	Taux d'accroissement annuel		50%	55%	60%	



4. Pour n entier naturel, on modélise la production éolienne (en MW) l'année $(2010 + n)$ par :

$u_0 = 75\,293$ et $u_{n+1} = u_n + 8\,917$ pour la production européenne et $v_0 = 39\,769$ et $v_{n+1} = 1{,}55 \times v_n$ pour la production asiatique.

Déterminer, à l'aide du tableur, l'année à partir de laquelle la production asiatique dépassera la production européenne, selon ces modèles.

CORRIGÉ P. 327

33. +++ Avec le tableur : isolation phonique TICE

L'unité d'intensité du son utilisée dans cet exercice est le décibel (dB). Une source sonore émet un son d'intensité 100 décibels ($u_0 = 100$).

On appelle u_n l'intensité du son mesurée après la traversée de n plaques d'isolation phonique, sachant que chaque plaque d'isolation absorbe 10 % de l'intensité du son qui lui parvient.

Par exemple, après la première plaque d'isolation, l'intensité du son est :

$$u_1 = u_0 - \frac{10}{100}\,u_0.$$

Répondre, à l'aide d'un tableur, aux questions suivantes.

B3 | =B2-0,1*B2

	A	B	C
1	Nombre de plaques	Intensité sonore (dB)	
2	0	100	
3	1	90	
4	2	81	
5	3	72,9	
6	4	65,61	
7	5	59,05	

1. Quelle intensité sonore obtient-on avec dix plaques d'isolation phonique (arrondir à 10^{-2}) ?

2. Déterminer le nombre n de plaques à partir duquel l'intensité sonore devient inférieure à 1 dB.

Un peu d'acoustique

• *Avion au décollage :*	*130 dB ;*
Seuil de douleur :	***120 dB***
• *Concert :*	*105 dB ;*
Seuil de danger :	***85 dB***
• *Salle de classe :*	*65 dB ;*
• *Voix humaine normale :*	*45 dB ;*
• *Chuchotements :*	*25 dB.*

CORRIGÉ P. 327

34. ++++ Mettre en œuvre un algorithme pour déterminer un seuil avec la calculatrice, AlgoBox ou Scilab ALGO

Certains éléments radioactifs, dont les atomes se désintègrent en émettant un rayonnement, sont utilisés, à petite dose, en médecine. La « demi-vie » d'un tel élément radioactif est le temps après lequel subsiste la moitié des noyaux présents au début de la période.

A. Étude de l'iode 131

On considère une population de 10^7 noyaux d'iode 131 (début de l'étude). Statistiquement, le nombre de noyaux d'iode 131 diminue de 8,3 % par jour.

On modélise le nombre de noyaux d'iode 131 dans cette population au bout de n jours, après le début de l'étude, à l'aide d'une suite géométrique (u_n).

1. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Donner l'expression du terme général u_n en fonction de n.

3. Justifier que la demi-vie de l'iode 131 est le seuil n_0 à partir duquel on a, si $n \geq n_0$, $0{,}917^n \leq 0{,}5$.

4. Déterminer la demi-vie de l'iode 131 à l'aide de la calculatrice.

B. Algorithme de détermination d'une demi-vie

On considère un élément radioactif pour lequel $u_{n+1} = q \times u_n$ avec $0 < q < 1$.

1. Programmer l'algorithme suivant, dans le langage d'une calculatrice ou d'un logiciel.

Entrée :
Saisir q.
Initialisation :
n prend la valeur 0.
Traitement :
Tant que $q^n > 0{,}5$
n prend la valeur $n + 1$
FinTantque
Sortie :
Afficher n.

2. Tester le programme réalisé pour $q = 0{,}917$. Que doit-on obtenir ?

3. À l'aide du programme précédent, déterminer la demi-vie de l'iridium 192, pour lequel $q \approx 0{,}990\,67$, puis pour le cobalt 60, pour lequel $q \approx 0{,}999\,64$.

CORRIGÉ P. 327

35. ++++ Avec Scilab : maladie bovine

ALGO

L'évolution d'une maladie bovine est modélisée à l'aide de deux suites (a_n) et (u_n).

La suite (a_n) est définie par $a_1 = 15$ et, pour tout entier n non nul, $a_{n+1} = 0{,}9 \times a_n$. Cette suite correspond, en pourcentage, au taux d'augmentation le mois n du nombre de bovins malades. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5\,000$ et, pour tout entier n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{a_n}{100}\right) \times u_{n-1}.$$

Arrondi à l'unité, u_n correspond au nombre de bovins malades le mois n.

1. a) Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

b) Quel est le taux d'augmentation de la maladie le deuxième mois ? Le troisième mois ?

2. Montrer que $u_1 = 5\,750$.

3. Mettre en œuvre l'algorithme suivant, donné ici en langage Scilab.

Qu'indique le dernier affichage ?

```
a(1)=15
u(1)=5750
for n=2:10
    a(n)=0.9*a(n-1)
    u(n)=(1+a(n)/100)*u(n-1)
    afficher([n,a(n),u(n)])
end
```

4. Créer un algorithme qui affiche la valeur de n à partir de laquelle $u_{n+1} - u_n \leq 100$ (c'est-à-dire que l'extension de cette maladie est, selon ce modèle, de moins de 100 animaux malades supplémentaires par mois à partir du mois $n + 1$). Mettre en œuvre cet algorithme.

CORRIGÉ P. 327

36. +++ Demi-vie d'un médicament

TICE

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse (de courte durée). La concentration du médicament dans le sang est immédiatement maximale, puis elle diminue en fonction du temps. On fait l'hypothèse (H) suivante :

La diminution de la concentration entre deux instants t_0 et t_1 est proportionnelle à la fois à la durée $t_1 - t_0$ et à la concentration à l'instant t_0.

On note C_0 la concentration initiale et C_n la concentration au bout de n minutes. On prendra pour unité de temps la minute et pour unité de concentration la concentration initiale C_0. On a donc $C_0 = 1$.

1. On admet que l'hypothèse (H) conduit à la relation, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} - C_n = -0{,}035\, C_n$.

a) Exprimer, pour tout entier naturel n, C_{n+1} en fonction de C_n.

b) Quelle est la nature de la suite (C_n) ?

2. a) À l'aide d'un tableur, calculer la valeur de C_n, pour n allant de 1 à 300.

b) Tracer le nuage des points de coordonnées (n, C_n) représentant l'évolution de la concentration sur 5 heures.

3. *Étude de la demi-vie*

La demi-vie est la période au bout de laquelle la concentration du médicament dans le sang diminue de moitié.

a) Au bout de combien de minutes la concentration initiale a-t-elle diminué de moitié ?

Donner le résultat sous forme d'un encadrement de deux entiers consécutifs.

b) Quelle est la concentration au bout de 30 minutes ? Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2}.

c) Au bout de combien de minutes cette dernière concentration aura-t-elle été divisée par 2 ? Donner le résultat sous forme d'un encadrement de deux entiers consécutifs.

d) Que peut-on conjecturer ? Tester cette conjecture sur d'autres valeurs.

CORRIGÉ P. 327

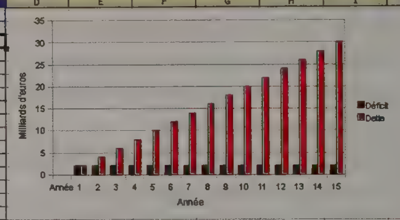
37. +++ Avec le tableur : déficit et dette

TICE

1. Les comptes d'un organisme social d'un pays de l'Union européenne présente un déficit budgétaire de 2 milliards d'euros chaque année. La feuille de calcul suivante détermine l'évolution de sa dette.

C3 =C2+B3

	A	B	C
1	Année	Déficit	Dette
2	1	2	2
3	2	2	4
4	3	2	6
5	4	2	8
6	5	2	10
7	6	2	12
8	7	2	14
9	8	2	16
10	9	2	18
11	10	2	20
12	11	2	22
13	12	2	24
14	13	2	26
15	14	2	28
16	15	2	30
17			



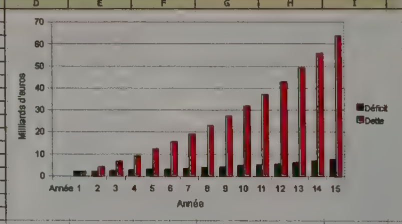
a) La formule =C2+B3 a été entrée en cellule C3 puis recopiée vers le bas. Quelle formule contient la cellule C4 ?

b) Quelle est la nature et la raison de la suite correspondant à la dette, apparaissant en colonne C ?

2. On suppose maintenant que le déficit augmente de 10 % chaque année.

B3 =B2*1,1

	A	B	C
1	Année	Déficit	Dette
2	1	2	2
3	2	2,2	4,2
4	3	2,42	6,62
5	4	2,66	9,28
6	5	2,93	12,21
7	6	3,22	15,43
8	7	3,54	18,97
9	8	3,9	22,87
10	9	4,29	27,16
11	10	4,72	31,87
12	11	5,19	37,06
13	12	5,71	42,77
14	13	6,28	49,05
15	14	6,9	55,95
16	15	7,59	63,54
17			



a) Quelle est la nature et la raison de la suite des déficits, apparaissant en colonne B ?

b) Montrer que la dette au bout de 15 ans peut être calculée par la formule :

$$2 \times \frac{1 - 1{,}1^{15}}{1 - 1{,}1}.$$

RÉPONSES P. 327

Faites le point !

QCM

Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.

QCM interactifs 38-39-40-41-42-43

38. ++ Suite géométrique de premier terme u_0

(u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0, de raison q. $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

		a	b	c
1	$u_0 = 3$ et $q = 4$ alors, u_3 est égal à :	12	48	192
2	$u_1 = 5$ et $u_2 = 2$ alors, q est égal à :	10	0,4	2,5
3	$u_0 = 10$ et $q = 1{,}04$ alors, u_n est égal à :	$10(1{,}04)^{n-1}$	$10(1{,}04)^n$	$10 + 1{,}04^n$
4	$u_0 = 3$ et $q = 2$ alors, S_{10} est égal à :	1 024	3 069	6 141

39. ++ Suite géométrique de premier terme u_1

(u_n) est une suite géométrique de premier terme u_1, de raison q. $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

		a	b	c
1	$u_1 = 100$ et $q = 1{,}1$ alors, u_4 est égal à :	146,11	139,76	133,1
2	$u_1 = 2$ et $q = 4$ alors, S_5 est égal à :	682	680	2 730

40. ++ Limite d'une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 0{,}9$.

		a	b	c
	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ est égal à :	0	1	$+\infty$

41. ++ Variations successives de t %

		a	b	c
1	Une population de 7 000 bactéries augmente chaque heure de 4 %. Au bout de 2 heures, elle sera d'environ :	10 360	10 776	11 207
2	Pour soigner une infection, un assuré social diminue chaque jour la dose de son médicament du jour précédent de 20 % ; le premier jour il en prend 3 mg, le sixième jour il en prend :	environ 0,98 mg	0 mg	environ 0,79 mg

42. ++ Intérêts composés et valeur acquise

		a	b	c
1	Dans un placement à intérêts composés à 2 % par an, les capitaux disponibles au bout d'un an, deux ans..., n ans, sont les termes successifs d'une suite géométrique de raison :	2	0,02	1,02
2	On place un capital de 10 000 € à 4 % par an avec intérêts composés. Au bout de deux ans le capital disponible est :	10 800 €	10 816 €	10 400 €

43. ++ Calculs de termes d'une suite géométrique avec le tableur

TICE

1.

	A	B
1	n	$u(n)$
2	0	8 000
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	

La feuille de calcul ci-dessus est utilisée pour calculer les premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme 8 000 et de raison 1,06.

Quelle formule, à recopier vers le bas, peut-on entrer dans la cellule B3 ?

a) =8 000*1,06 **b)** =$B$2*1,06

c) =B2*1,06 **d)** =1,06^A3

2. La feuille de calcul ci-dessous est utilisée pour calculer les premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme 400 et de raison 0,8.

Quelle formule, à recopier vers la droite, peut-on entrer dans la cellule C3 ?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$u(n)$	400										
3												

a) =$B$2*0,8 **b)** =B2^0,8

c) =400*0,8 **d)** =B2*0,8

Exercices
Pour le baccalauréat

Les exercices pour le baccalauréat sont des exercices qui pourraient figurer dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat STL-Biotechnologies.

44. +++ Problème de production

Une unité de production fabrique un certain type de matériel pour les laboratoires.

En 2011, la production annuelle a été de 5 000 unités.

On admet que la production augmente de 4 % chaque année.

Tous les résultats de production seront arrondis à l'unité.

1. Calculer la production en 2012.

2. Calculer les productions de 2013 et 2014.

3. On désigne par P_1 la production de 2011, par P_2 celle de 2012 et par P_3 celle de 2013…

D'une façon générale, on désigne par P_n la production en $2011 + n$.

Démontrer que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

4. Exprimer P_n en fonction de n.

5. a) Déterminer la valeur de n correspondant à l'année 2017.

b) Quelle sera alors la production en 2017 ?

6. Déterminer la production totale entre début 2011 et fin 2017.

▶ Augmentation ou diminution de *t* %

- *Chaque fois qu'on est confronté à une situation du type « une population, une production, un prix… augmente de t % tous les ans », on peut définir une suite géométrique de raison $1+\frac{t}{100}$.*
- *S'il s'agit d'une diminution de t %, on peut définir une suite géométrique de raison $1-\frac{t}{100}$.*

45. +++ Une nouvelle maladie

Une maladie est apparue en 2005 dans un pays. Le nombre des nouveaux cas augmente chaque année de 15 % par rapport à ceux de l'année précédente. Pour le moment, seul un médicament permet de traiter une partie des symptômes de cette maladie mais sans la guérir. Il y avait 300 cas recensés en 2005.

On note u_0 le nombre de cas en 2005, n le nombre d'années écoulées depuis 2005 et u_n le nombre de nouveaux cas en $2005 + n$.

1. Justifier que u_n est le terme général d'une suite géométrique de raison 1,15.

2. Justifier que le nombre de nouveaux cas en 2008, arrondi à l'unité, était 456.

3. Quelle est l'estimation du nombre de nouveaux cas que l'on peut faire pour 2015 si la progression reste identique ?

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En quelle année peut-on estimer que le nombre de nouveaux cas va dépasser pour la première fois les 10 000 personnes ?

▶ *Avec prise d'initiatives.*

5. En 2012, quel était le nombre total de personnes ayant contracté la maladie depuis son apparition ?

6. En 2015, à combien peut-on estimer le nombre total de personnes qui auront contracté la maladie depuis son apparition ?

46. +++ Un placement insuffisant

Le responsable d'un laboratoire désirait acquérir un équipement en 2011. Au 1er janvier 2007, il avait placé la somme de 16 000 €, à intérêts composés, au taux annuel de 4 %. On note u_n le capital, exprimé en euros, disponible au 1er janvier de l'année $(2007 + n)$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 (arrondir à l'unité).

2. Montrer qu'il ne disposait pas, au 1er janvier 2011, de la somme nécessaire à l'acquisition de l'équipement si le prix de celui-ci était de 20 500 €.

Quelle somme lui manquait-il (arrondir à 100 €) ?

3. Déterminer la somme, exprimée en euros, qu'il aurait dû placer au 1er janvier 2007 pour disposer du capital nécessaire à l'achat de l'équipement au 1er janvier 2011 (arrondir la somme à 10 euros).

47. +++ Nombre d'abonnés TICE

Une publication pour les professionnels des biotechnologies, vendue exclusivement sur abonnement, comptait 25 000 abonnés au début de l'année 2011.

Le service des abonnements estime que, d'une année sur l'autre, d'une part 80 % des lecteurs renouvellent leur abonnement et, d'autre part, qu'il y aura 20 000 nouveaux abonnés.

On note 0 l'année de référence 2011. Les années suivantes seront notées 1, 2...

On a construit sur tableur la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F	G	
1	Année n	0	1	2	3	4	5	
2	Abonnés	25000	40000	52000	61600	69280	75424	
3	$V(n)$	75000	60000	48000	38400	30720	24576	
4	$V(n+1)/V(n)$		0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	

C2

1. Quelle formule a-t-on entrée en ~~B2~~ puis recopiée vers la droite pour compléter la ligne ?

2. On note U_n le nombre estimé d'abonnés durant l'année n. La suite (U_n) est-elle géométrique ? Justifier la réponse.

3. La ligne 3 contient les premiers termes d'une suite (V_n) calculée à partir de la suite (U_n).

La cellule B3 contient la formule =100000-B2 qui a été recopiée vers la droite pour compléter la ligne. Quelle est l'expression de V_n en fonction de U_n ?

4. La cellule C4 contient la formule =C3/B3 qui a été recopiée vers la droite pour compléter la ligne.

a) Que peut-on conjecturer pour la suite (V_n) ?

b) En admettant que cette conjecture soit vérifiée, montrer que $V_n = 75\,000 \times 0{,}8^n$.

c) En déduire U_n en fonction de n.

48. ++++ Algorithme à trous ALGO

On place un capital C, à intérêts composés, au taux annuel i, c'est-à-dire qu'après chaque année, le capital présent en début d'année est multiplié par $(1 + i)$.

1. Reproduire et compléter l'algorithme suivant, pour qu'il affiche la valeur du capital après n années de placement.

```
Saisir C
Saisir i
Saisir n
Pour k allant de ...... à ......
    C prend la valeur ...............
FinPour
Afficher C
```

2. a) On place $C = 10\,000$ € à intérêts composés au taux de 3 %. Quelle est la valeur du capital après deux années de placement ?

b) Vérifiez votre algorithme à l'aide de l'exemple précédent, en fournissant un tableau indiquant les valeurs successives des variables k et C.

CORRIGÉ P. 328

49. +++ Étude d'une pathologie respiratoire TICE

A. Utilisation d'une suite géométrique

On prévoit que le nombre de malades atteints d'une certaine pathologie respiratoire, en France, augmente de 6 % par an à partir de 2011. On désigne par u_n le nombre de malades l'année $(2011 + n)$. On a $u_0 = 61\,353$.

Dans ce qui suit, tous les résultats sont à arrondir à l'unité.

1. Calculer u_1 et u_3.

2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}06\, u_n$.

b) En déduire la nature de la suite (u_n).

c) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

3. Déterminer le nombre de malades que l'on peut prévoir pour 2017.

4. Déterminer le nombre total de malades atteints de cette pathologie pour les six années de 2011 à 2017.

B. Avec le tableur

1. La feuille de calcul ci-dessous donne le nombre de malades atteints de la pathologie respiratoire en France depuis 2007. Les cellules de la ligne 3 sont au format Pourcentage.

	A	B	C	D	E	F
1	Année	2007	2008	2009	2010	2011
2	Nombre de malades	51 382	53 283	55 702	58 431	61 353
3	Augmentation depuis 2007					

Quelle formule peut-on entrer en C3, puis recopier vers la droite, pour obtenir le taux d'augmentation du nombre de ces malades depuis l'année 2007 ?

2. On sait que le taux d'évolution du nombre de malades atteints de cette pathologie entre 2011 et 2012 a été de + 6 %. Calculer le nombre de malades pour l'année 2012.

50. +++ Vrai-faux TICE

Répondez, par VRAI ou FAUX, aux questions suivantes (une justification est demandée lorsque la réponse est FAUX, aucune justification n'est demandée lorsque la réponse est VRAI).

1. On considère la suite (u_n) telle que : $u_n = 3n - 2$.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 3.

2. On considère la suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3(1{,}05)^n$.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

3. On injecte u_0 cm^3 d'un médicament dans le sang d'un patient. La quantité de ce médicament présente dans le sang du patient n heures après l'injection est u_n. La quantité de médicament présente dans le sang baisse de 20 % chaque heure.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8.

4. On reprend la situation décrite dans la question **3.** ci-dessus. Cinq heures après l'injection, il reste dans le sang du patient environ 67 % de la quantité injectée.

5. La feuille de calcul ci-après est utilisée pour calculer les premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme 5 000 et de raison 1,02.

La formule, à recopier vers le bas, à entrer dans la cellule B3 est : 5 000*1,02.

	A	B
1	*n*	*u*(*n*)
2	0	5 000
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	

CORRIGÉ P. 328

51. +++ Un QCM

TICE

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.

Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point.

On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

1. Une culture biologique comporte 5 000 bactéries, dont le nombre augmente de 20 % chaque heure.

Quelle formule peut-on entrer en B3, puis recopier vers le bas, pour compléter la colonne B ?

	A	B
1	Temps (heures)	Nombre de bactéries
2	0	5 000
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	

a) =0,8*5 000 **b)** =0,8*B2

c) =1,2*B2 **d)** =1,2*$B$2

2. On injecte dans le sang une dose de 4 ml d'un médicament. La quantité de médicament présente dans le sang diminue chaque heure de 15 %.

Quelle formule peut-on entrer en C2, puis recopier vers la droite, pour obtenir, à chaque heure, la quantité de médicament (en ml) présente dans le sang ?

	A	B	C	D	E
1	Temps (heures)	0	1	2	3
2	Quantité de médicament (ml)	4			

a) =0,85*B2 **b)** =0,15*B2

c) =0,85*$B$2 **d)** =0,15*$B$2

3. On estime que le nombre de patients présentant une certaine pathologie va diminuer de 5 % par an. Aujourd'hui, il y a 7 500 cas par an. Dans 10 ans il y aura :

a) 3 750 cas ; **b)** 4 266 cas ;

c) 4 491 cas ; **d)** 4 727 cas.

52. +++ Dans un laboratoire

TICE

Dans un laboratoire de chimie, un stagiaire utilise un liquide dont l'évaporation est importante. À l'origine, il y a 75 cl de liquide dans la bouteille. Le stagiaire referme mal cette bouteille et on considère alors que le liquide perd chaque jour 5 % de son volume par évaporation.

1. On note u_n la quantité de liquide, exprimée en cl, présente dans la bouteille au bout de n jours. Ainsi, $u_0 = 75$.

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Vérifier que, pour tout nombre entier n, $u_n = 75 \times (0{,}95)^n$.

c) Calculer la quantité de liquide restant dans la bouteille au bout de sept jours (on donnera le résultat arrondi au dixième).

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer le nombre minimum de jours nécessaires pour que la bouteille contienne moins de 25 cl.

CHAPITRE 2

Limites de fonctions

LIMITE, INFINI SONT DES MOTS FAISANT PARTIE DU VOCABULAIRE MATHÉMATIQUE. CE SONT AUSSI DES CONCEPTS UTILISÉS NON SEULEMENT EN MATHÉMATIQUES, MAIS AUSSI EN BIOTECHNOLOGIES, EN SCIENCES PHYSIQUES, EN TECHNOLOGIE, EN ÉCONOMIE...

CAPACITÉS

- Interpréter une représentation graphique en termes de limite.
- Interpréter graphiquement une limite en termes d'asymptote.
- Déterminer la limite d'une fonction simple.

ACTIVITÉS *d'approche*

ACTIVITÉ 1 — Le chauffe-eau

On considère un chauffe-eau de puissance 8 719 watts dans lequel l'eau froide arrive à la température de 10 °C. Le débit fourni est Q en kg.s^{-1} et l'eau chaude sort à la température de θ °C.

On montre en technologie que :

$$\theta = 10 + \frac{8\,719}{4\,185\,Q}.$$

A. Étude d'une fonction en mathématiques

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $Q \mapsto \theta$.

1° Étudier les variations de f.

2° Construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ unités : 1 cm pour 0,01 kg.s^{-1} en abscisse et 1 cm pour 10 °C en ordonnée.
Observez qu'une droite horizontale $\mathscr{D}$ que l'on tracera peut servir de guide pour tracer la partie de $\mathscr{C}$ correspondant aux grandes valeurs de l'abscisse Q.
Pour quelles valeurs de Q l'écart vertical entre $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ est-il inférieur à 1 mm ?

B. Aspect physique du problème

1° Trouver une interprétation physique de l'existence de la droite horizontale $\mathscr{D}$.

2° L'eau, sous une pression atmosphérique normale, se vaporise à 100 °C.
Quel est le débit minimum correspondant ?

C. Où l'on tient compte du confort de l'usager

Pour éviter à l'usager de se brûler, on limite la température à 70 °C. Quel est le débit minimum correspondant ? (Pour ce débit, le gaz est coupé instantanément.)

▶ **Indication pour le B1°.**
Lorsque le débit est « grand », l'eau circulant dans le chauffe-eau a-t-elle le temps de beaucoup chauffer ?

ACTIVITÉ 2 — Introduire la notion d'asymptote parallèle aux axes

Interprétation avec GeoGebra des asymptotes en termes de limites

LOGICIEL UTILISÉ
GeoGebra

On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$.

Représenter la fonction f à l'aide de GeoGebra en entrant dans la barre de saisie :

f(x) = Si[x>1,(3*x+2)/(x-1)] .

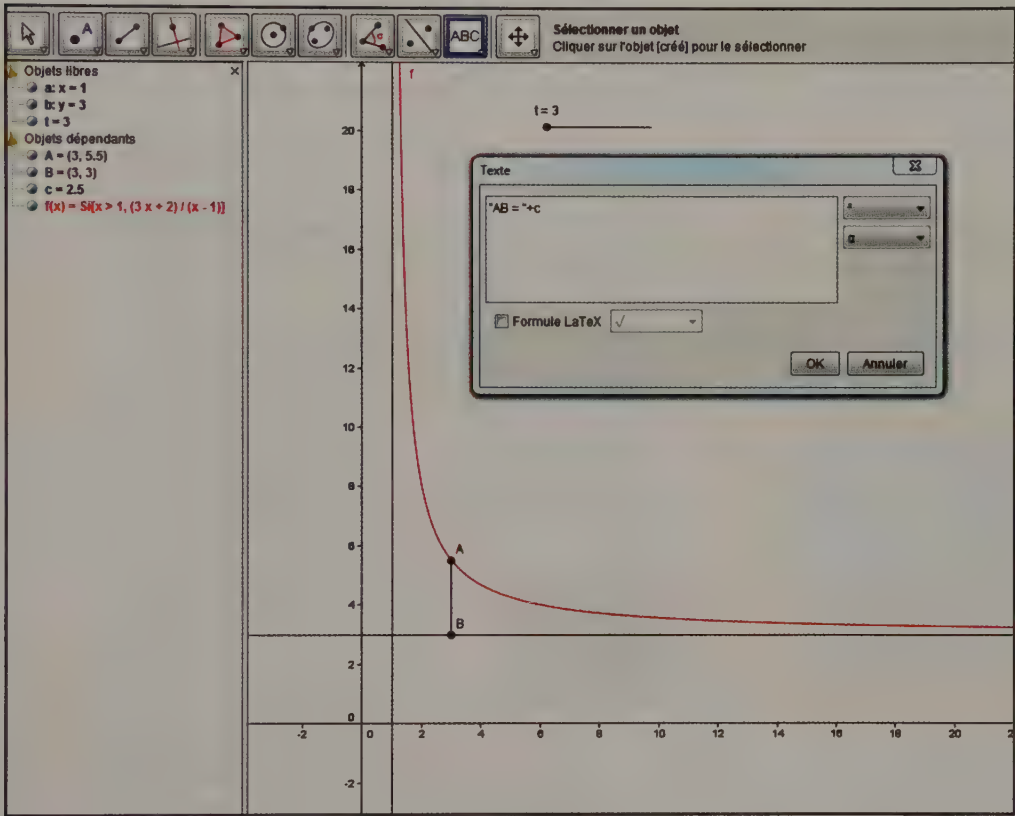
Tracer les droites d'équation $x = 1$ et $y = 3$ en entrant ces équations dans la barre de saisie.

Ces droites sont dites « asymptotes » à la courbe représentative de *f*.

A. Caractérisation en termes de limite de l'asymptote horizontale

Créer un curseur *t* allant de 2 à 100 avec un incrément de 0,1. Créer les point A et B en entrant dans la barre de saisie A=(t,f(t)) et B=(t,3).

Créer le segment [AB] et afficher sa longueur.



1° Que peut-on dire de la longueur AB lorsque *t* se rapproche de 100 ?

2° À laquelle des trois expressions suivantes est égale la longueur AB ?
❒ $t - f(3)$; ❒ $f(t) - 3$; ❒ $f(t - 3)$.

3° Quelle « limite » peut-on conjecturer pour $f(t)$ lorsque *t* tend vers $+\infty$?

B. Caractérisation de l'asymptote verticale en termes de limite

Créer un curseur *h* allant de 1 à 2 avec un incrément 0.

Créer le point C d'abscisse *h* et situé sur la courbe représentative de *f*. Créer le point D d'abscisse 1 et de même ordonnée que C. Créer le segment [CD] et afficher sa longueur.

1° Que peut-on dire de la longueur CD lorsque *h* se rapproche de 1 ?

2° Que peut-on dire de $f(h)$ lorsque *h* se rapproche de 1 ?

3° Quelle « limite » peut-on conjecturer pour $f(h)$ lorsque *h* tend vers 1 ?

Cours

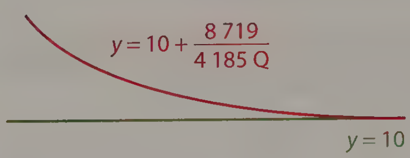
1 Asymptotes parallèles aux axes

A. Limite finie d'une fonction à l'infini

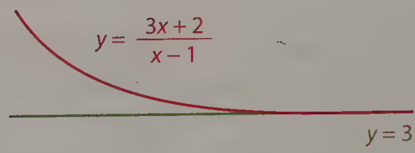
Voir les activités d'approche **1** et **2**.

Nous avons observé sur deux exemples que la courbe représentative d'une fonction peut se rapprocher d'une **droite horizontale** en se confondant presque avec elle lorsque la variable prend de grandes valeurs.

Une telle droite est appelée **asymptote horizontale** ; son équation est de la forme $y = C$ où C est une constante.



Activité 1



Activité 2

Une telle situation a déjà été rencontrée avec une fonction de référence : la fonction inverse.

Cette fonction a été étudiée en Seconde et en Première.

Fonction $g_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$

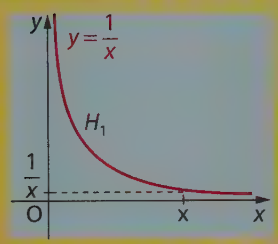


Figure 1

Nous savons que sa courbe représentative est une branche hyperbole H_1.

Nous pouvons observer graphiquement et numériquement que, lorsque x prend de grandes valeurs, $g_1(x) = \dfrac{1}{x}$ est proche de 0.

x	100	1 000	10^4	10^5	…
$\dfrac{1}{x}$	0,01	0,001	10^{-4}	10^{-5}	…

Plus précisément, pour tout entier naturel p, $|g_1(x)| \leq 10^{-p}$ est équivalent à $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{10^p}$, c'est-à-dire à $x \geq 10^p$.

Par analogie avec la limite d'une suite, on dit que la fonction g_1 a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} g_1(x) = 0$.

On étend la notion de limite : pour les suites la variable est un entier n, pour les fonctions c'est un réel x.

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

L'axe des abscisses du repère (d'équation $y = 0$) est une **asymptote horizontale** de H_1.

Fonction $g_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]-\infty, 0[$

Nous pouvons procéder de même avec la fonction g_2 mais ici la variable prend des valeurs **négatives**.

Attention aux sens des inégalités.

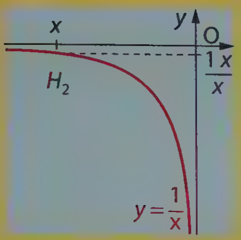


Figure 2

x	– 100	– 1 000	– 10^4	– 10^5	…
$\frac{1}{x}$	– 0,01	– 0,001	– 10^{-4}	– 10^{-5}	…

Nous obtenons de même : $\lim\limits_{x\to-\infty} g_2(x)=0$.

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

L'axe des abscisses du repère est une **asymptote horizontale** de H_2.

Autres fonctions de référence

Comme $\frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas définie lorsque x est négatif le problème de sa limite en $-\infty$ ne se pose pas.

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

L'axe des abscisses du repère est une **asymptote horizontale** des courbes représentatives des fonctions $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ et $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Limite finie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

Considérons la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2+\frac{1}{x^2}$.

Pour tout $x>0$, $f(x)-2=\frac{1}{x^2}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, d'après la propriété ci-dessus.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-2\big)=0$.

Nous écrivons alors ce résultat : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2}$.

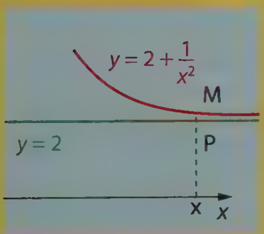


Figure 3

Soit M un point de la courbe représentative de f. Son abscisse est x et son ordonnée $y_M=2+\frac{1}{x^2}$.

Soit P le point de la droite horizontale d'équation $y=2$ ayant même abscisse que M.

$y_P=2$
Comme $y_M-y_P>0$, la courbe est au-dessus de son asymptote.

$y_M-y_P=\frac{1}{x^2}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(y_M-y_P)=0$.

Pour les grandes valeurs de x, la courbe est très proche de la droite d'équation $y=2$.

La droite d'équation $y=2$ est appelée **asymptote horizontale** de la courbe.

Plus généralement on introduit la définition suivante.

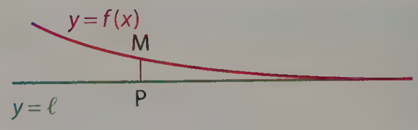
DÉFINITION

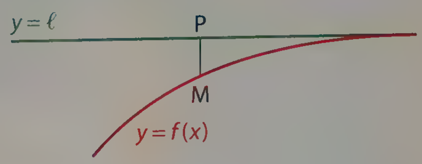
Définition analogue avec $-\infty$.

La fonction f a pour limite le nombre réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ signifie $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-\ell|=0}$.

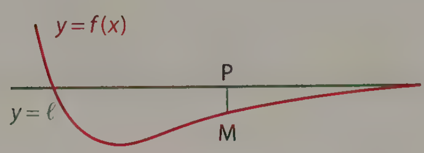
La droite d'équation $y=\ell$ est alors une **asymptote horizontale** de la courbe représentative de la fonction f.

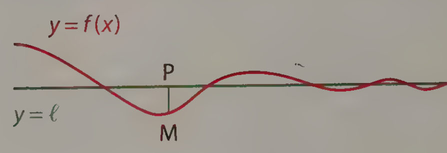
$|f(x) - \ell| = PM$ où P et M sont les points de même abscisse x situés respectivement sur l'asymptote horizontale et sur la courbe.





La courbe et son asymptote horizontale peuvent avoir un ou plusieurs points communs.



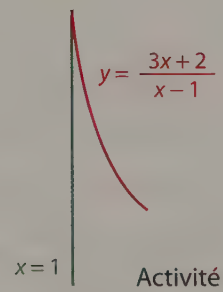


B. Limite infinie d'une fonction en un point

Voir l'activité d'approche **2**.

Une telle droite est appelée **asymptote verticale** ; son équation est de la forme $x = a$ où a est un nombre fixé pour lequel f n'est pas définie.

Nous avons observé que la courbe représentative d'une fonction peut se rapprocher d'une **droite verticale** en se confondant presque avec elle lorsque la variable prend des valeurs très proches d'un nombre fixé a pour lequel la fonction n'est pas définie.



Activité 2

D'autres exemples sont traités dans la partie **3** de ce chapitre.

Ici encore une telle situation a déjà été rencontrée avec une fonction de référence : la fonction inverse.

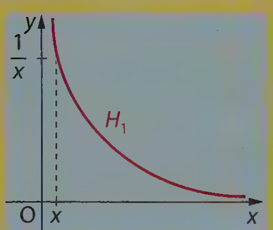


Figure 4

Fonction $g_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$

Nous pouvons observer graphiquement et numériquement que, lorsque x est positif et voisin de 0, $g_1(x) = \frac{1}{x}$ prend de grandes valeurs.

x	0,1	0,01	0,001	0,000 1	…
$\frac{1}{x}$	10	100	1 000	10 000	…

Plus précisément, pour tout entier naturel p, $g_1(x) \geq 10^p$ est équivalent à $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{10^{-p}}$, c'est-à-dire à $x \leq 10^{-p}$.

Par analogie avec la limite d'une suite, on dit que la fonction g_1 a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0 et on note $\lim\limits_{x \to 0} g_1(x) = +\infty$.

> Attention : $+\infty$ n'est pas un nombre réel.

PROPRIÉTÉ

Pour $g_1(x) = \frac{1}{x}$ défini sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$.

L'axe des ordonnées du repère d'équation $x = 0$ est une **asymptote verticale** de la courbe H_1 représentative de g_1.

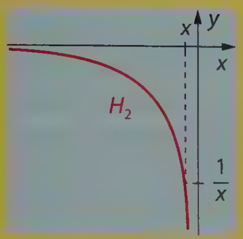


Figure 5

Fonction $g_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]-\infty, 0[$

Nous pouvons observer graphiquement et numériquement que, lorsque x est négatif et voisin de 0, $g_2(x) = \frac{1}{x}$ prend des valeurs négatives grandes en valeur absolue.

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,000\,1$	…
$\frac{1}{x}$	-10	-100	$-1\,000$	$-10\,000$	…

Nous obtenons de même : $\lim\limits_{x \to 0} g_2(x) = -\infty$.

> Attention au sens des inégalités avec des nombres **négatifs**.

PROPRIÉTÉ

Pour $g_2(x) = \frac{1}{x}$ défini sur $]-\infty, 0[$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = -\infty$.

L'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** de la courbe H_2 représentative de g_2.

Remarque

La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ n'a pas de limite en 0.
En effet quand x se rapproche de 0 dans $\mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x}$ peut prendre des valeurs du type 10^6, 10^8, … et aussi du type -10^6, -10^8…
Le point M de l'hyperbole représentative de la fonction g peut passer sans cesse de la branche H_1 à la branche H_2 et inversement.

> $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle !

> Voir les deux figures précédentes.

Remarque

Dans tout le paragraphe **B** les fonctions considérées ne sont pas définies en a.
Dans le cas contraire où $f(a)$ existe, nous pouvons observer à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice que, pour une fonction f usuelle (par exemple une fonction polynôme ou une fonction rationnelle), $f(x)$ prend des valeurs proches de $f(a)$ lorsque x est suffisamment proche de a.
Plus précisément $f(x)$ peut être aussi proche de $f(a)$ que l'on veut dès que x est suffisamment proche de a.
On note cette propriété $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ et on admet le théorème suivant.

> $a = 0$ pour g_1 et g_2.

> Une fonction rationnelle est un quotient de fonctions polynômes.

THÉORÈME

Soit f une fonction polynôme ou une fonction rationnelle ou la fonction racine carrée ou la fonction sinus ou la fonction cosinus.
Soit a un nombre réel appartenant à un intervalle I sur lequel f est définie.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

> f est définie en a.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

$f(1) = \frac{1}{2}$.

Donc, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

2 Limite infinie d'une fonction à l'infini

D'autres exemples sont traités dans la partie **3** du cours.

Observons les valeurs prises par les fonctions de référence $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$ pour de grandes valeurs de x.

$(10^n)^p = 10^{np}$.

x	10	$100 = 10^2$	$1\,000 = 10^3$	$10\,000 = 10^4$	...
x^2	10^2	10^4	10^6	10^8	...
x^3	10^3	10^6	10^9	10^{12}	...
$\sqrt{x}$	$\sqrt{10} \approx 3{,}16$	10	$10\sqrt{10} \approx 31{,}6$	100	...

Dans chaque cas, on peut démontrer à l'aide de puissances de 10, que $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pour x suffisamment grand.

f désignant l'une quelconque de ces fonctions, **il semble** que, lorsque x prend de grandes valeurs, il en soit de même de $f(x)$.

On est conduit à admettre que :

la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, ce qui se note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$(-10)^2 = +100$,
$(-10)^3 = -1\,000$,
$(-10)^4 = -10\,000$.

En considérant des valeurs *négatives* de x de plus en plus grandes en valeur absolue, et en tenant compte de la parité des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, on obtient de même :

Attention : nous n'obtenons pas toujours le même résultat ; pensez au signe de x, x^2, x^3 lorsque x est négatif.

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$$

Plus généralement nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est } \textbf{pair}, \\ -\infty & \text{si } n \text{ est } \textbf{impair}. \end{cases}$$

3 Limites et opérations

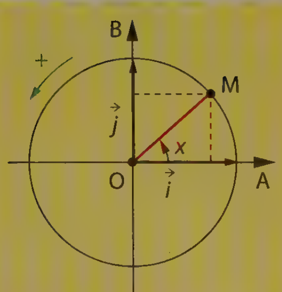


Figure 6

Remarque

Lorsque x devient grand, le point M du cercle trigonométrique tourne sur ce cercle : son abscisse $\cos x$ et son ordonnée $\sin x$ varient entre -1 et 1 sans se rapprocher durablement d'un nombre L de l'intervalle $[-1, 1]$.
On démontre que **les fonctions sinus et cosinus n'ont de limite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.**
La plupart des théorèmes suivants permettent, sous certaines hypothèses, de démontrer que certaines fonctions ont une limite, finie ou infinie, en $+\infty$ ou en $-\infty$ ou en un nombre réel a, et de déterminer cette limite.

Dans les théorèmes admis ci-dessous, présentés sous forme de tableaux, u et v sont des fonctions définies sur un même intervalle I et α désigne $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel a ; L et L' sont des nombres réels.

A. Somme de deux fonctions

N'oubliez pas que $u(x)+v(x)=v(x)+u(x)$.

Dans le cas menant au point d'interrogation, on ne peut conclure directement ; il faut effectuer une étude supplémentaire.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x)=$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha}[u(x)+v(x)]=$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$

Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$.

D'après **2**, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et d'après **1A.**, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

f est définie sur $]0,+\infty[$.

D'après **1B.**, $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ car $x>0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

Exemple 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2+x$.

D'après **2**, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

D'après **2**, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$.

Nous ne pouvons pas conclure directement pour la limite de $g(x)$ en $-\infty$.

Nous poursuivrons l'étude au paragraphe **C.**.

B. Produit d'une fonction par une constante

On suppose que la constante k n'est pas nulle.

Si $k=0$, alors pour tout x de I, $ku(x)=0$.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=$	L	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} ku(x)=$	kL	$*\infty$	$*\infty$

$*\infty$ correspond soit à $+\infty$, soit à $-\infty$. Le signe $+$ ou $-$ s'obtient de façon évidente dans chaque exemple.

Exemples

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x=-\infty$.

C. Produit de deux fonctions

N'oubliez pas que $u(x)v(x) = v(x)u(x)$.

$*\infty$ correspond soit à $+\infty$, soit à $-\infty$. Le signe $+$ ou $-$ s'obtient de façon évidente dans chaque exemple.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) =$	L	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) =$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} [u(x) \times v(x)] =$	LL'	$*\infty$	?	$*\infty$

Exemple 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ d'après **A.**.

$\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 = -\infty$ d'après **B.**.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)(-3x^2) = -\infty$.

Exemple 2

Au paragraphe **A.** nous n'avons pas déterminé la limite de $g(x) = x^2 + x$ en $-\infty$.

Pour $x = -100$, $x = -1\,000$, $x = -10\,000$, …, le monôme qui semble jouer le rôle le plus important dans le polynôme $g(x)$ est x^2.

$g(-100) = 10\,000 - 100 = 9\,900$,

$g(-1\,000) = 10^6 - 10^3 = 999\,000$,

$g(-10^4) = \ldots$

Mettons-le en facteur dans $g(x)$:

Pour tout $x < 0$, $g(x) = x^2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

Retenons la méthode qui nous a permis d'obtenir la limite du polynôme $g(x)$ en $-\infty$:

MÉTHODE

Pour obtenir la limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$, on peut mettre en facteur le monôme de plus haut degré.

C'est le monôme qui semble jouer le rôle le plus important pour les grandes valeurs de x.

On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME

En $+\infty$ ou en $-\infty$, une fonction polynôme a même limite que sa fonction monôme de plus haut degré.

EXERCICE résolu 1

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + x$.

1° Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2° Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3° Compléter le tableau de variation de f donné ci-dessous avec les résultats obtenus au **1°** et au **2°**.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f	?	↘	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	↗	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	↘	?

MÉTHODE

Appliquer le théorème ci-dessus

Utiliser des résultats de **2** et **3B**.

Procéder comme au **1°**.

SOLUTION

1° La fonction polynôme f a même limite en $-\infty$ que sa fonction monôme de plus haut degré.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3)$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3) = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2° $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$.

4°

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f	$+\infty$	↘	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	↗	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	↘	$-\infty$

VOIR AUSSI LES EXERCICES CORRIGÉS 5 et 6

D. Inverse d'une fonction

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) =$	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{1}{u(x)} =$	$\frac{1}{L}$	Voir théorèmes 1 et 2	0

Dans le cas où $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = 0$, on peut souvent conclure en utilisant un des deux théorèmes admis ci-dessous :

THÉORÈME 1

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = 0$ et si au voisinage de α on a $u(x) > 0$, alors

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{1}{u(x)} = +\infty.$$

THÉORÈME 2

Si $\lim_{x \to \alpha} u(x) = 0$ et si au voisinage de α on a $u(x) < 0$, alors

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{1}{u(x)} = -\infty.$$

A est un nombre réel.

c est un nombre réel positif.

« Au voisinage de $+\infty$ » signifie sur un intervalle $]A, +\infty[$.

« Au voisinage de $-\infty$ » signifie sur un intervalle $]-\infty, A[$.

« Au voisinage de *a* » signifie sur un intervalle $]a-c, a+c[\, \cap\, \mathrm{I}$, où I est l'intervalle de définition de la fonction.

Exemples

• Soit *f* la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. Cherchons $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$.

D'après **1B.**, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Pour tout *x* de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\cos x > 0$ (voir la figure).

Donc $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ d'après le théorème 1.

• Soit *g* la fonction définie sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ par $g(x) = \frac{1}{\cos x}$; nous obtenons de même $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = -\infty$ d'après le théorème 2.

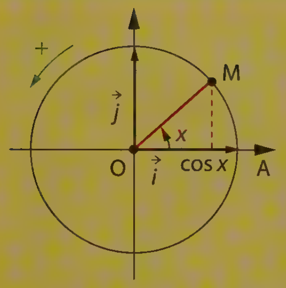


Figure 7

EXERCICE résolu 2

ÉNONCÉ

1° Soit la fonction *f* définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé.

a) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

c) Déterminer $\lim_{x \to 2} f(x)$.

2° Soit *g* la fonction définie sur $]-\infty, 2[$ par $g(x) = \frac{1}{2-x}$.

On désigne par $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de *g* dans le même repère.

a) Déterminer $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}'$?

c) Déterminer $\lim_{x \to 2} g(x)$.

MÉTHODE

Appliquer le théorème du tableau de **D.** : colonne de droite.

Utiliser la définition d'une asymptote horizontale (**1A.**).

SOLUTION

1° a) $\lim_{x \to +\infty} 2 - x = -\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2-x} = 0$ d'après le théorème sur la limite de l'inverse d'une fonction.

b) L'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est une asymptote horizontale de la courbe $\mathscr{C}$.

Appliquer le théorème 2.

c) $\lim\limits_{x \to 2}(2-x)=0$ et, pour tout x de $]2, +\infty[$, $2-x<0$; donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{2-x}=-\infty$ (lorsque $x>2$), c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to 2} f(x)=-\infty$.

Appliquer le théorème du tableau de **D.** : colonne de droite.

2° a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2-x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2-x}=0$.

b) Identique à 1° b).

c) $\lim\limits_{x \to 2}(2-x)=0$ et, pour tout x de $]-\infty, 2[$, $2-x>0$;

Appliquer le théorème 1.

donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{2-x}=+\infty$ (lorsque $x<2$), c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to 2} g(x)=+\infty$.

VOIR AUSSI LES EXERCICES CORRIGÉS 9 à 12

Remarque

Interprétons graphiquement les deux résultats : $\lim\limits_{x \to 2} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2} g(x)=+\infty$.

Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et soit H le point de la droite verticale d'équation $x=2$ ayant la même ordonnée que M.

Lorsque x se rapproche suffisamment de 2, la distance MH peut être aussi petite que l'on veut.

Il en est de même avec $\mathscr{C}'$.

On dit que la droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}$ et de la courbe $\mathscr{C}'$.

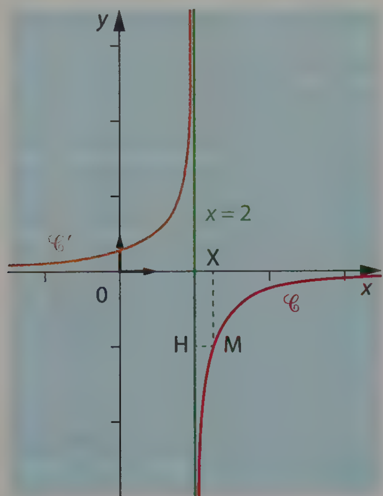


Figure 8

Plus généralement :

DÉFINITION

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)=-\infty$.

La droite d'équation $x=a$ est une **asymptote verticale** de la représentation graphique de f.

En particulier, si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = L$ et si $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) = L' \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{L}{L'}$.

E. Quotient de deux fonctions

Sur tout intervalle I où le quotient $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ est défini, on remarque que $\dfrac{u(x)}{v(x)} = u(x) \times \dfrac{1}{v(x)}$ et on utilise les théorèmes sur la limite de l'inverse $\dfrac{1}{v(x)}$ et la limite d'un produit.

Voici deux exemples de situations où ces théorèmes ne permettent pas de conclure directement.

f est une fonction rationnelle, c'est-à-dire un quotient de deux fonctions polynômes.

Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 5}{2x - 1}$.

On se propose de déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Ici $u(x) = 3x^2 + 4x - 5$ est un polynôme.

En mettant en œuvre la méthode proposée au paragraphe **C.**, nous obtenons :

pour tout x de $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, $u(x) = 3x^2\left(1 + \dfrac{4}{3x} - \dfrac{5}{3x^2}\right)$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{4}{3x} - \dfrac{5}{3x^2}\right) = 1 + 0 - 0 = 1$,

donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty}$.

De même avec $v(x) = 2x - 1 = 2x\left(1 - \dfrac{1}{2x}\right)$, nous obtenons $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$,

donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{v(x)} = 0}$.

Le tableau sur la limite d'un produit ne permettant pas d'obtenir directement $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) \times \dfrac{1}{v(x)}$, nous revenons à la fonction rationnelle f.

Pour tout x de $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, $f(x) = \dfrac{3x^2\left(1 + \dfrac{4}{3x} - \dfrac{5}{3x^2}\right)}{2x\left(1 - \dfrac{1}{2x}\right)}$,

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x} \times \frac{1 + \dfrac{4}{3x} - \dfrac{5}{3x^2}}{1 - \dfrac{1}{2x}},$$

Après simplification $f(x) = \dfrac{3}{2}x \times \dfrac{1 + \dfrac{4}{3x} - \dfrac{5}{3x^2}}{1 - \dfrac{1}{2x}}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \dfrac{4}{3x} - \dfrac{5}{3x^2}}{1 - \dfrac{1}{2x}} = \dfrac{1}{1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{2}x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Une fonction rationnelle est un quotient de fonctions polynômes.

C'est le monôme qui semble jouer le rôle le plus important pour les grandes valeurs de x.

Retenons la méthode :

MÉTHODE

Pour obtenir la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$, on peut mettre en facteur au numérateur et au dénominateur le monôme de plus haut degré.

On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME

En $+\infty$ ou en $-\infty$, une fonction rationnelle a même limite que le quotient des fonctions monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

EXERCICE résolu 3

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $]-3, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+3}$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

MÉTHODE

Appliquer le théorème ci-dessus.

Simplifier la fraction.

SOLUTION

La fonction rationnelle f a même limite en $+\infty$ que le quotient des fonctions monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x}$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 15

Si f est définie en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarque

Le théorème précédent ne permet pas d'obtenir la limite d'une fonction rationnelle f en un nombre réel a où elle n'est pas définie.

Exemple 2

Soit la fonction f définie sur $]-3, 1[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2x-3}$.

f n'est pas définie en 1 et en -3 ; on se propose de déterminer la limite de f en 1 et la limite de f en -3.

Puisque $x^2 + 2x - 3$ s'annule pour $x = 1$ et $x = -3$, nous pouvons factoriser ce polynôme :

pour tout x de $]-3, 1[$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+3)}$.

Méthode
On isole le facteur non défini en 1.

• Pour trouver la limite de f en 1, écrivons $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \times \dfrac{x^2+1}{x+3}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{x+3} = \frac{1}{2} ; \quad \lim_{x \to 1} x - 1 = 0 \text{ et,}$$

Le signe de $x-1$ est donné par :

x		1	
$x-1$	$-$	0	$+$

pour tout x de $]-3, 1[$, $x - 1 < 0$; donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ lorsque $x < 1$ d'après le théorème 2 du paragraphe **D.**.

Nous en déduisons que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$ d'après le tableau sur la limite d'un produit.

Méthode
On isole le facteur non défini en -3.

• Pour trouver la limite de f en -3, écrivons $f(x) = \dfrac{1}{x+3} \times \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2+1}{x-1} = -\frac{5}{2} ; \quad \lim_{x \to -3} x + 3 = 0 \text{ et,}$$

Le signe de $x+3$ est donné par :

x		-3	
$x+3$	$-$	0	$+$

pour tout x de $]-3, 1[$, $x + 3 > 0$; donc $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x+3} = +\infty$ lorsque $x > -3$ d'après le théorème 1 du paragraphe **D.**. Nous en déduisons que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -\infty$ d'après le tableau sur la limite d'un produit.

Retenons la méthode :

MÉTHODE

Pour obtenir la limite d'une fonction rationnelle en a où elle n'est pas définie, on peut factoriser le dénominateur, puis isoler le facteur non défini en a.

Ce facteur est en général $\frac{1}{x-a}$ (ou $\frac{1}{(x-a)^2}$ ...).

Exemple 3

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

On se propose de déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$, puis d'interpréter graphiquement ces deux limites.

$f(x)=(x^2+1)\left(\frac{1}{x}\right)$.

- $\lim\limits_{x\to 0} x^2+1=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$ car $x>0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ d'après le tableau sur la limite d'un produit.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f a une asymptote verticale : l'axe des ordonnées (d'équation $x=0$).

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}$ d'après le théorème sur la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

Pour interpréter graphiquement cette limite, nous allons écrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}$, c'est-à-dire $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

Nous savons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$.

Or $f(x)-x=\mathrm{MN}$ où M et N sont les points de même abscisse x, M étant sur la courbe $\mathscr{C}$ et N sur la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$.

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(y_M-y_N)=0$.

Le point M de la courbe $\mathscr{C}$ est aussi proche que l'on veut, pour x suffisamment grand, du point N de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$. On dit que la droite $\mathscr{D}$ est une **asymptote oblique** de la courbe $\mathscr{C}$.

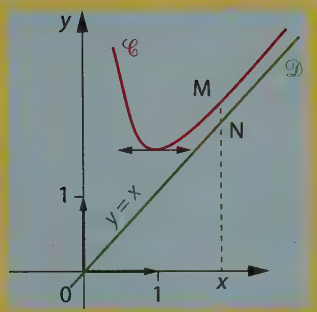


Figure 9

Plus généralement :

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur $]A,+\infty[$ par $f(x)=ax+b+g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

La droite d'équation $y=ax+b$ est une *asymptote* de la représentation graphique de la fonction f.

On dispose d'un énoncé analogue en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$ et $]A,+\infty[$ par $]-\infty, A[$.

EXERCICE résolu 4

ÉNONCÉ

Soit la fonction définie sur $]-\infty, 2[$ par $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x-2}$.

Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 3$ est une asymptote de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.

MÉTHODE

Chercher la limite en $-\infty$ de $f(x) - (ax + b)$.

Utiliser la définition d'une asymptote oblique.

SOLUTION

Pour tout x de $]-\infty, 2[$,

$f(x) - (x - 3) = \dfrac{4}{x-2}$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x} = 0$.

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 3$ est donc une asymptote oblique de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.

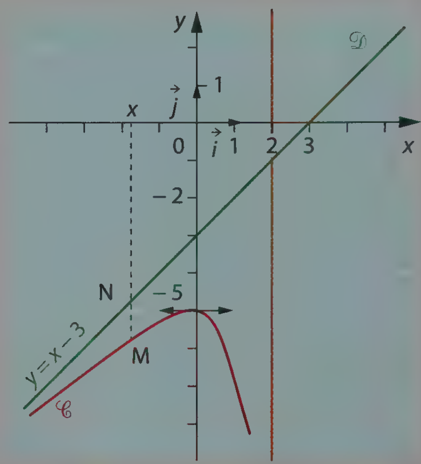


Figure 10

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 28

Remarques

- On a intérêt à tracer l'asymptote $\mathcal{D}$ avant la courbe $\mathcal{C}$; l'asymptote sert alors de guide pour dessiner $\mathcal{C}$.
- On détermine la **position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à l'asymptote $\mathcal{D}$ en étudiant le signe de $y_M - y_N$** qui mesure l'écart (positif ou négatif) entre la courbe et l'asymptote.

$$y_M - y_N = ax + b + g(x) - (ax + b) = g(x).$$

Le sens positif est donné par le vecteur $\vec{j}$.

MÉTHODE

La position relative de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie par $f(x) = ax + b + g(x)$ par rapport à son asymptote oblique Δ d'équation $y = ax + b$ est donnée par le signe de $f(x) - (ax + b) = g(x)$.

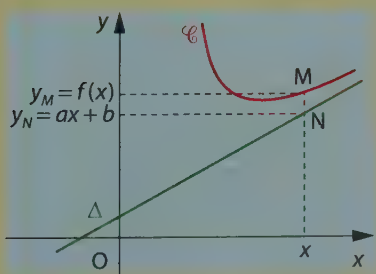


Figure 11

Si $y_M - y_N = f(x) - (ax + b) > 0$,
$\mathcal{C}$ est **au-dessus** de Δ.

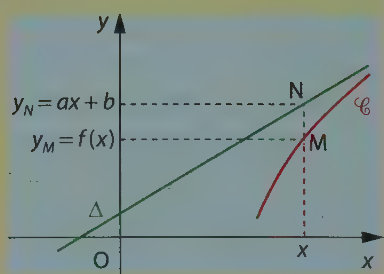


Figure 12

Si $y_M - y_N = f(x) - (ax + b) < 0$,
$\mathcal{C}$ est **au-dessous** de Δ.

Exemples

• Reprenons la fonction f dont la courbe représentative est donnée dans l'exemple 3 ci-dessus. Pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) - x = \dfrac{1}{x}$, donc $f(x) - x > 0$; la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de son asymptote $\mathscr{D}$.

• Reprenons la fonction f dont la courbe représentative est donnée dans l'exercice résolu 4. Pour tout x de $]-\infty, 2[$, $f(x) - (x-3) = \dfrac{4}{x-2}$, donc $f(x) - (x-3) < 0$; la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de son asymptote $\mathscr{D}$.

Ce qu'il faut savoir

Limites des fonctions de référence

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	
$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$		
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$
Si la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $]-\infty, 0[$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = -\infty$		Si la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$		

Limite au voisinage d'une valeur a pour laquelle la fonction f est définie

Le résultat suivant s'applique à toutes les fonctions rencontrées en mathématiques en Terminale STL – Biotechnologies.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle I sur lequel f est définie.

Alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Énoncés usuels sur les limites

Dans ce qui suit, α peut être remplacé par un nombre fixé a, ou les symboles $-\infty$ et $+\infty$.

• **Somme de deux fonctions**

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) =$	L			$+\infty$		$-\infty$
et $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} [u(x) + v(x)] =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$

? signifie que l'on ne peut pas conclure directement.

• **Produit d'une fonction par une constante non nulle**

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) =$	L	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} ku(x) =$	kL	$* \infty$	$* \infty$

$*$ correspond soit à $+\infty$, soit à $-\infty$. Le signe + ou – s'obtient de façon évidente dans chaque exemple.

- **Produit de deux fonctions**

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	L	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} [u(x)\times v(x)] =$	LL'	$*\,\infty$	?	$*\,\infty$

$*$ correspond soit à $+\infty$, soit à $-\infty$. Le signe $+$ ou $-$ s'obtient de façon évidente dans chaque exemple.

- **Inverse d'une fonction**

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{u(x)} =$	$\dfrac{1}{L}$	Voir théorèmes 1 et 2	0

Théorème 1

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = 0$ et si, au voisinage de α, on a $u(x) > 0$, alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{u(x)} = +\infty$.

Théorème 2

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = 0$ et si, au voisinage de α, on a $u(x) < 0$, alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{u(x)} = -\infty$.

Fonctions polynômes et rationnelles au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Animation vidéo

- Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction polynôme a même limite que sa fonction monôme de plus haut degré.
- Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction rationnelle a même limite que le quotient des fonctions monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Asymptotes

- **Asymptote verticale**

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

La droite Δ d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.

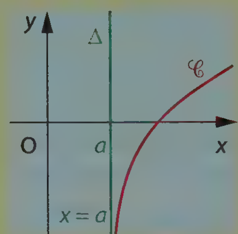


Figure 13

- **Asymptote horizontale**

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

La droite Δ d'équation $y = L$ est une **asymptote horizontale** de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.

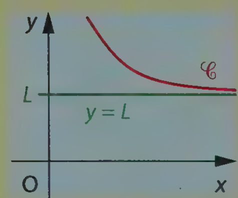


Figure 14

• Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} =]A, +\infty[$ (ou $\mathrm{I} =]-\infty, A[$) par $f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$).

La droite Δ d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f (en $+\infty$ ou $-\infty$).

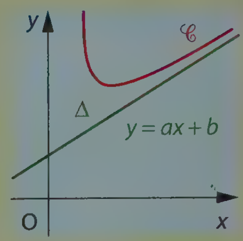


Figure 15

• Position relative d'une courbe représentative et de son asymptote oblique

La position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de son asymptote Δ est donnée par le signe de $f(x) - (ax + b)$ lorsque x varie.

Si, pour tout x de I, $f(x) - (ax + b) \geq 0$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

Si, pour tout x de I, $f(x) - (ax + b) \leq 0$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ.

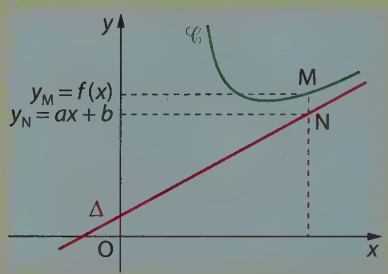


Figure 16

Si, $y_M - y_N = f(x) - (ax + b) > 0$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

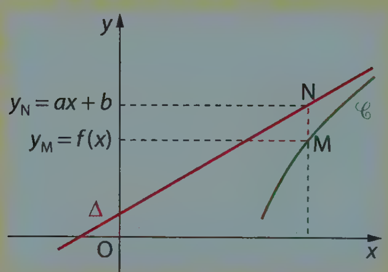


Figure 17

Si, $y_M - y_N = f(x) - (ax + b) < 0$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ.

RÉPONSES p. 328

TP 1 Conjecturer limites et asymptotes

LOGICIEL UTILISÉ
Calculatrice

Comportement asymptotique d'une fonction

Ce TP est destiné à vous guider dans l'utilisation d'une calculatrice pour l'étude du comportement asymptotique d'une fonction. On réalise tout d'abord une représentation graphique que l'on analyse, puis on complète cette analyse graphique par l'exploration de tables de valeurs numériques.

On considère la fonction f définie sur $]1{,}5\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-3}$.

A. Représentation graphique et asymptotes

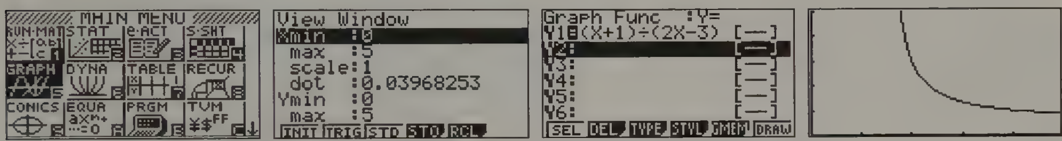
On désire réaliser, sur une calculatrice, une représentation graphique de la fonction f.

Calculatrice Casio

On se place dans le menu de graphiques en faisant MENU GRAPH EXE.

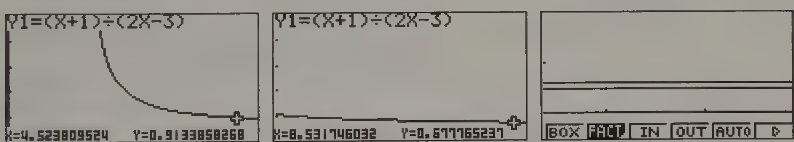
Pour régler la fenêtre, faire SHIFT V-Windows. On peut prendre ici Xmin : 0 ; Xmax : 5 ; Ymin : 0 ; Ymax : 5.

Dans l'écran d'accueil du menu graphique, éditer la fonction en entrant en Y_1 l'expression de $f(x)$, puis faire DRAW pour obtenir le tracé de la courbe.



Le comportement asymptotique de la fonction s'observe là où la courbe « sort » de l'écran. On peut parcourir la courbe en faisant SHIFT Trace puis ◄ ou ►.

On peut tracer la droite d'équation $y=0{,}5$ puis zoomer en faisant SHIFT Zoom IN, positionner le curseur à l'endroit voulu et faire EXE.



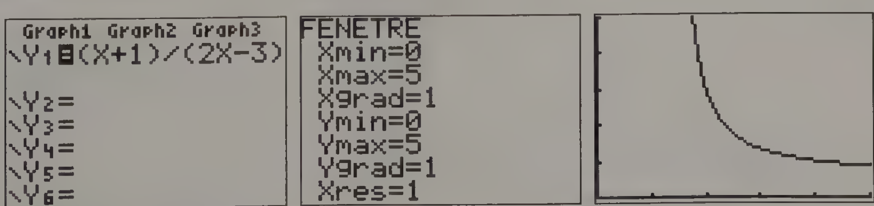
Calculatrice Texas Instruments

Pour les modèles traduits en français, les instructions sont en bleu.

Pour éditer la fonction, faire f(x) ou Y= puis entrer en Y_1 l'expression de $f(x)$.

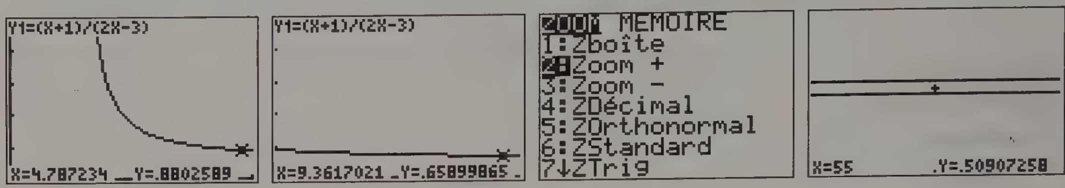
Pour régler la fenêtre, faire fenêtre ou WINDOW. On peut prendre ici Xmin : 0 ; Xmax : 5 ; Ymin : 0 ; Ymax : 5.

Faire graphe ou GRAPH pour obtenir le tracé de la courbe.



Le comportement asymptotique de la fonction s'observe là où la courbe « sort » de l'écran. On peut parcourir la courbe en faisant trace ou TRACE puis ◄ ou ►.

On peut tracer la droite d'équation $y = 0{,}5$ puis zoomer en faisant [zoom] ou [ZOOM] puis [zoom +] ou [Zoom IN], positionner le curseur à l'endroit voulu et faire [entrer] ou [ENTER].



1. Observer la valeur de x lorsque le spot situé sur la courbe se rapproche de la « sortie » en haut de l'écran. Conjecturer une équation de l'asymptote verticale.

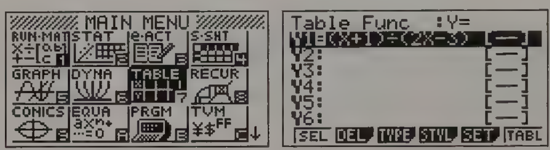
2. Observer la valeur de y lorsque le spot situé sur la courbe se rapproche de la « sortie » à droite de l'écran. Conjecturer une équation de l'asymptote horizontale.

B. Exploration numérique

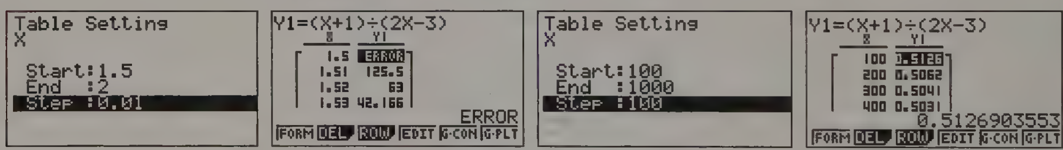
On souhaite compléter l'étude graphique par une étude numérique.

Calculatrice Casio

On se place dans le menu des tables en faisant [MENU] [TABLE] [EXE].



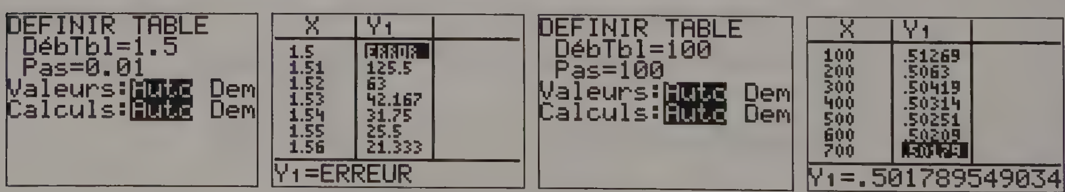
Pour régler la table, faire, selon les modèles, [SET] ou [RANG]. Pour afficher la table, faire [TABL]. Construire les deux tables ci-dessous.



Calculatrice Texas Instruments

Pour les modèles traduits en français, les instructions sont en bleu.

Pour régler la table, faire [2nde] [déf table] ou [2nd] [TBLSET]. Pour afficher la table, faire [2nde] [table] ou [2nd] [TABLE]. Construire les deux tables ci-dessous.



1. **a.** À quoi correspond le message d'erreur dans la première table ?

b. Dans la première table, quel est le comportement de y lorsque x se rapproche de 1,5 ? Quelle limite peut-on conjecturer pour $f(x)$?

2. Dans la seconde table, quel est le comportement de y lorsque x devient grand ? Quelle limite peut-on conjecturer pour $f(x)$?

TP 2 Conjecturer puis justifier

Les limites de la calculatrice

LOGICIEL UTILISÉ

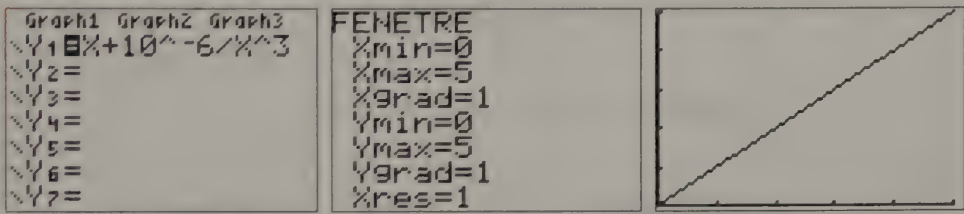
Calculatrice

Ce TP explore des situations de limites où la calculatrice est parfois en difficulté. Attention aux conjectures trop rapides... Un argument algébrique est alors nécessaire pour conclure.

A. Limite en 0 de $x + 10^{-6} \div x^3$

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{10^{-6}}{x^3}$.

1. a. La fonction f a été représentée à l'aide d'une calculatrice, dans la « fenêtre » ci-dessous.



D'après ce graphique, conjecturer la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

b. À l'aide de votre calculatrice, compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant. (Pour régler la table de la calculatrice avec des valeurs de x à la demande, sur T.I., sélectionner dans « Valeurs » Dem ou Ask ; sur Casio, une fois la table affichée, sélectionner une valeur de x puis entrer cette valeur.)

x	1	0,5	0,4	0,1	0,05
$f(x) \approx$					

Quelle valeur de $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ce tableau permet-il de conjecturer ?

c. Prolonger le tableau pour les valeurs ci-dessous.

x	0,01	0,005	0,001	10^{-6}
$f(x) \approx$				

Quelle valeur de $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ce nouveau tableau permet-il de conjecturer ?

Confirmer cette conjecture en modifiant la fenêtre de la représentation graphique sur votre calculatrice.

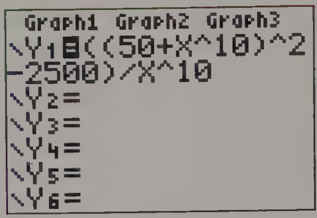
2. a. Quelle est la limite quand x tend vers 0, $x > 0$, de x et de $\dfrac{1}{x^3}$?

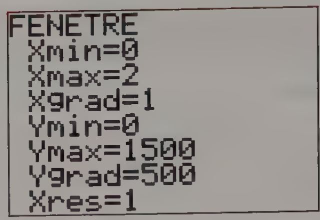
b. En déduire, à l'aide des opérations sur les limites, la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

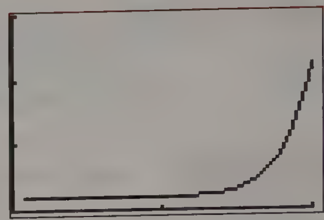
B. Limite en 0 de $((50 + x^{10})^2 - 2\,500) \div x^{10}$

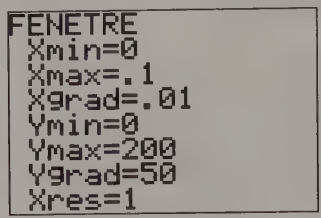
Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{(50 + x^{10})^2 - 2\,500}{x^{10}}$.

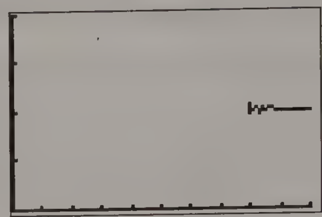
1. a. La fonction g a été représentée à l'aide d'une calculatrice, dans les « fenêtres » ci-après.











Ces graphiques permettent-ils de conjecturer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$?

b. À l'aide de votre calculatrice, complétez, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant.

x	2	1	0,5	0,1	0,05	0,01	0,001
$g(x) =$							

Quelle valeur de $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ ce tableau permet-il de conjecturer ?

2. **a.** Développer $(50 + x^{10})^2$ et en déduire que, pour $x > 0$, $g(x) = 100 + x^{10}$.

b. Utiliser l'expression précédente pour calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$. Comparer avec la conjecture effectuée au **1.**

TP 3 Interpréter une limite en situation technologique

LOGICIELS UTILISÉS

GeoGebra

Tableur

Asymptote et cinétique chimique

Le modèle de Michaelis-Menten permet de décrire la cinétique d'une réaction chimique catalysée par un enzyme agissant sur un substrat. Ce modèle exprime la vitesse initiale v de la réaction chimique, exprimée en mol.L^{-1}.s^{-1}, en fonction de la concentration x de substrat, exprimée en mol.L^{-1}, sous la forme :

$$v = \frac{ax}{K + x},$$

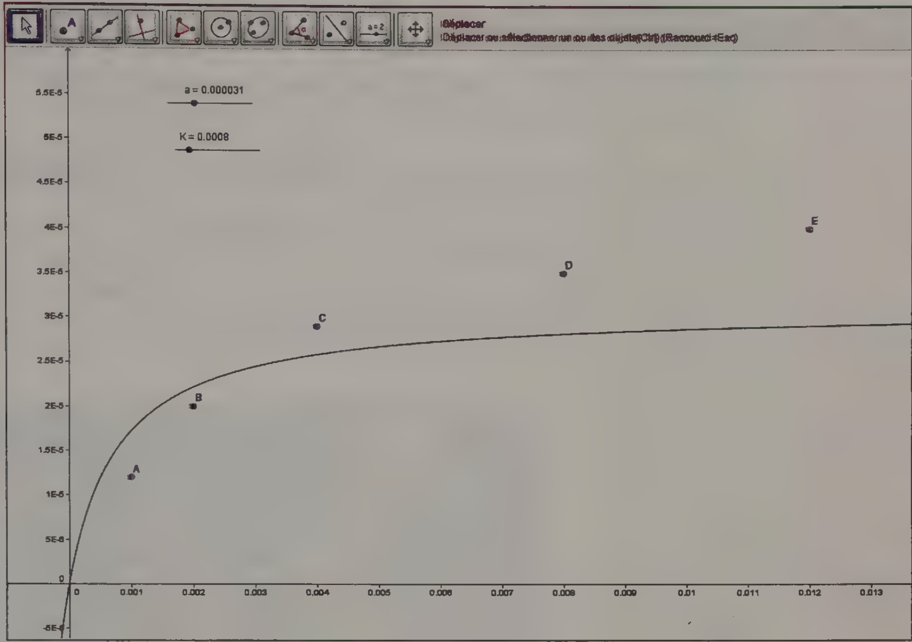
où K est la constante de Michaelis, spécifique de l'enzyme.

Dans le cadre de l'étude d'une certaine réaction enzymatique, on possède les données expérimentales suivantes où v est la vitesse initiale de la réaction chimique obtenue pour une concentration x du substrat.

x (mol.L^{-1})	1.10^{-3}	2.10^{-3}	4.10^{-3}	8.10^{-3}	12.10^{-3}
v (mol.L^{-1}.s^{-1})	$1{,}2.10^{-5}$	2.10^{-5}	$2{,}9.10^{-5}$	$3{,}5.10^{-5}$	4.10^{-5}

A. Ajustement avec GeoGebra

Dans un fichier GeoGebra, placer les cinq points correspondant aux mesures, créer un curseur a de 0 à 10^{-4} (saisir 1E-4) avec un incrément de 10^{-6}, et un curseur K de 0 à 5.10^{-3} avec un incrément de 10^{-4}. Tracer la courbe d'équation $y = \dfrac{ax}{K + x}$.



1. Régler les curseurs de façon que la courbe passe « au mieux » à proximité des cinq points expérimentaux. Noter les valeurs de a et K obtenues.

2. Comment agit le curseur a sur l'allure de la courbe ? Comment agit le curseur K ?

3. **a.** La courbe admet une asymptote horizontale. Donner son équation.

b. Quelle est la vitesse « limite » de réaction dont on se rapproche en augmentant la concentration en substrat ?

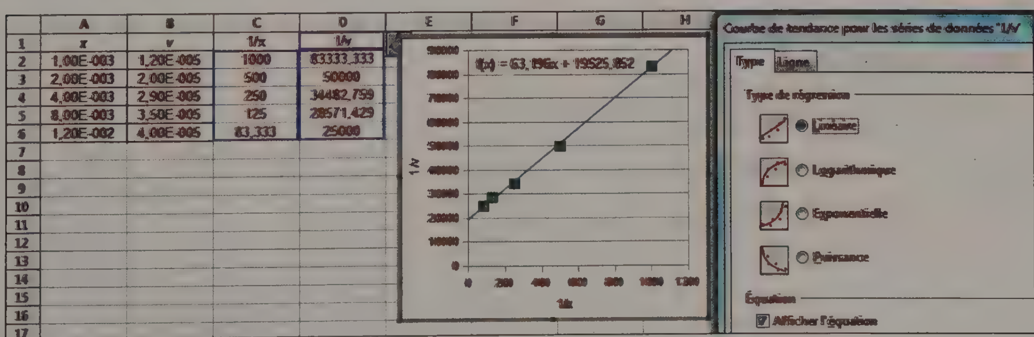
4. Pour avoir une bonne adaptation de l'enzyme au substrat, c'est-à-dire une vitesse de réaction rapidement importante lorsqu'on augmente la concentration en substrat, faut-il que la constante K soit élevée ou faible ?

B. Exploitation d'un tableur

On peut effectuer les transformations algébriques suivantes, permettant de se ramener au tracé d'une droite :

$$v=\frac{ax}{K+x} \Leftrightarrow \frac{1}{v}=\frac{K+x}{ax} \Leftrightarrow \frac{1}{v}=\frac{K}{ax}+\frac{x}{ax} \Leftrightarrow \frac{1}{v}=\frac{K}{a}\times\frac{1}{x}+\frac{1}{a}.$$

1. **a.** Représenter à l'aide d'un tableur les points de coordonnées $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{v}\right)$ correspondant aux cinq mesures, puis ajuster au graphique (clic droit sur un point) une « courbe de tendance » sous forme d'une droite dont on affiche l'équation.



	A	B	C	D
1	x	v	1/x	1/v
2	1,00E-003	1,20E-005	1000	83333,333
3	2,00E-003	2,00E-005	500	50000
4	4,00E-003	2,90E-005	250	34482,759
5	8,00E-003	3,50E-005	125	28571,429
6	1,20E-002	4,00E-005	83,333	25000

b. L'équation affichée conduit à $\dfrac{1}{a} = 19\,526$ et $\dfrac{K}{a} = 63{,}196$. En déduire les valeurs de a et de K (donner une écriture scientifique avec deux chiffres significatifs) et comparer avec celles obtenues à l'aide de GeoGebra.

2. L'existence d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto v(x) = \dfrac{ax}{K+x}$ montre qu'à partir d'un certain point l'augmentation de la concentration x du substrat améliore très peu la vitesse de réaction.

Déterminer à l'aide du tableur le plus petit entier naturel n à partir duquel la différence des vitesses $v((n+1).10^{-3}) - v(n.10^{-3})$ est inférieure à 10^{-7} mol.L^{-1}.s^{-1}.

Exercices

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE	Exercices corrigés	Exercices non corrigés
Déterminer la limite d'une fonction de référence	1 et 2	
Déterminer la limite d'une fonction polynôme ou rationnelle en un point où elle est définie	3 et 4	
Déterminer la limite d'une fonction polynôme en $-\infty$ et en $+\infty$	5, 6, 8	7
Déterminer la limite d'une fonction rationnelle aux bornes de son ensemble de définition	9 à 13, 15, 20	14, 16 à 19, 21 à 23
Interpréter graphiquement une limite en termes d'asymptotes	24, 25, 27, 28	26, 29 à 31
Exploiter le tableau de variation d'une fonction	60	32, 33, 54
Interpréter une représentation graphique en termes de limite	34	35 à 41, 57
Déterminer des limites et étudier le sens de variation d'une fonction	56	42 à 48, 55
TICE Utiliser un tableur		57
ALGO Utiliser Algobox et Scilab	49	
TICE Utiliser un logiciel de calcul formel		58

Déterminer des limites de fonctions de référence

Méthode : *Pour les exercices 1 et 2, utiliser les limites des fonctions de référence et les théorèmes sur les opérations algébriques des paragraphes* **3 A., B., C.** *et* **D.**.

1. +

Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble I sur lequel la fonction f est définie.

a) $f : x \mapsto -x^2$; $\quad$ $I = \mathbb{R}$.

b) $f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^3$; $\quad$ $I = \mathbb{R}$.

c) $f : x \mapsto -2x^4$; $\quad$ $I = \mathbb{R}$.

d) $f : x \mapsto -\dfrac{2}{x}$; $\quad$ $I =]-\infty, 0[$.

e) $f : x \mapsto -\dfrac{6}{x^2}$; $\quad$ $I =]0, +\infty[$.

CORRIGÉ P. 330

2. +

Déterminer les limites aux bornes de l'intervalle I sur lequel la fonction f est définie :

a) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$; $\quad$ $I = [0, +\infty[$.

b) $f : x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $\quad$ $I =]0, +\infty[$.

CORRIGÉ P. 330

Déterminer la limite d'une fonction polynôme ou rationnelle en un point où elle est définie

▶ **Rappel :** *Soit f une fonction polynôme ou une fonction rationnelle ou la fonction racine carrée ou la fonction sinus ou la fonction cosinus.*

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle I sur lequel f est définie.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exercices

3. +

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

CORRIGÉ P. 330

4. +

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

Déterminer $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0,5} f(x)$.

CORRIGÉ P. 330

Déterminer la limite d'une fonction polynôme en $-\infty$ et en $+\infty$

5. +

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2$.
Compléter les deux égalités suivantes :

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 = \ldots$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} -x^2 = \ldots$

Peut-on déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ en appliquant un théorème sur la limite d'une somme ?

2. En procédant comme à l'exercice résolu **1** du cours, déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

CORRIGÉ P. 330

6. +

En procédant comme à l'exercice résolu **1** du cours, déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ dans chacun des cas suivants.

a) $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$.
b) $f(x) = -x^3 + x + 1$.
c) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$.

CORRIGÉ P. 330

7. + Limites de fonctions polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$

▶ **Rappel :** *Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction polynôme a même limite que sa fonction monôme de plus haut degré.*

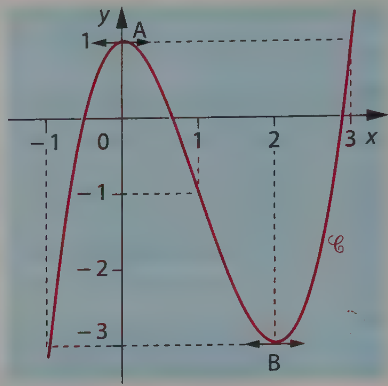
Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

a) $f : x \longmapsto -x^2 + x + 1$.
b) $f : x \longmapsto -2x^3 + 4x - 1$.
c) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x^3 - x + 1$.
d) $f : x \longmapsto -x^4 + x^2 + 3$.

▶ *Voir aussi l'exercice résolu **1** du cours.*

8. ++ Lecture de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique ; recherche de la limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$

Le plan est muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A et B d'abscisses respectives 0 et 2 sont parallèles à l'axe des abscisses.



1. Déterminer graphiquement $f(0), f(1), f'(2)$.

▶ **Rappel :** *Si f est dérivable en a, le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est f'(a).*

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.
Déterminer les constantes a, b, c à l'aide des résultats obtenus au 1.

▶ *On est conduit à résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues.*

3. On admet maintenant que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

▶ *Utiliser le théorème pour les fonctions polynômes énoncé au paragraphe **2C.** du cours.*

4. Compléter le tableau de variation suivant à l'aide de ce qui précède.

x	$-\infty$		?		?		$+\infty$
$f'(x)$		?	0	?	0	?	
$f(x)$	?	↗	?	↘	?	↗	?

CORRIGÉ P. 330

Déterminer la limite d'une fonction rationnelle en $-\infty$ et en $+\infty$

9. +

1. Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$.

Pour tout nombre réel x de $]1, +\infty[$, $f(x)=(3x+1)\times\dfrac{1}{x-1}$.

Compléter les égalités suivantes :

$\lim\limits_{x\to +\infty} (3x+1) = \ldots$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = \ldots$

Peut-on déduire des deux résultats précédents $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en appliquant un théorème sur la limite d'un produit ?

2. En procédant comme dans l'exercice résolu **3** du paragraphe **3E.** du cours, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

CORRIGÉ P. 330

10. +

En procédant comme au **2.** de l'exercice **9.**, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ dans chacun des cas suivants.

a) f définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+2x+1}{x-2}$.

b) f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-2x+1}{3x^2+2x-1}$.

CORRIGÉ P. 330

Déterminer la limite infinie d'une fonction rationnelle en a fini

Méthode : *Pour déterminer la limite d'une fonction rationnelle en un nombre réel a où elle n'est pas définie, isoler le facteur non défini en a.*

11. +

1. Soit f la fonction définie sur $]3, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-x+2}{x-3}$.

On cherche $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

Pour tout nombre réel x de $]3, +\infty[$, $f(x) = (-x+2) \times \dfrac{1}{x-3}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 3}(x-3)$.

Quel est le signe de $x-3$ quand x appartient à $]3, +\infty[$?

En déduire $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x-3}$ dans le cas où $x > 3$.

b) Compléter l'égalité suivante :

$\lim\limits_{x \to 3}(-x+2) = \ldots$

c) Des résultats du **a)** et du **b)**, à l'aide d'un résultat sur la limite d'un produit, déduire $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

2. Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par

$g(x) = \dfrac{-2x+1}{3x^2-2x-1}$.

On cherche $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

a) Vérifier que, pour tout nombre réel x de $]-\infty, 1[$,

$g(x) = \dfrac{-2x+1}{(x-1)(3x+1)} = \dfrac{1}{x-1} \times \dfrac{-2x+1}{3x+1}$.

b) Compléter le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$		0	

En déduire $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ lorsque $x < 1$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2x+1}{3x+1}$ lorsque $x < 1$.

Des résultats obtenus au **b)** et au **c)**, déduire $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

CORRIGÉ P. 330

12. +

f est définie sur $]1, +\infty[$. En procédant comme à l'exercice **11**, déterminer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

a) $f(x) = -\dfrac{4x}{x-1}$; b) $f(x) = \dfrac{1-2x}{1-x^2}$.

CORRIGÉ P. 331

Déterminer les limites d'une fonction rationnelle aux bornes de son ensemble de définition

f est une fonction définie sur l'intervalle I, déterminer les limites de f aux bornes de I.
(Exercices **13** à **22**)

13. +

$f : x \mapsto \dfrac{x+1}{3x-1}$; I $= \left]\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$.

CORRIGÉ P. 331

14. ++

1. $f : x \mapsto \dfrac{-x+1}{x+3}$; I $=]-\infty, -3[$.

2. $f : x \mapsto \dfrac{-x+1}{x+3}$; I $=]-3, +\infty[$.

► *Voir aussi les exercices résolus* **2** *et* **3** *du cours.*

15. +

$f : x \mapsto \dfrac{x+3}{x^2-4}$; I $=]-2, 2[$.

CORRIGÉ P. 331

16. +

$f : x \mapsto \dfrac{2x+4}{x^2+x+4}$; I $= \mathbb{R}$.

17. ++

$f : x \mapsto \dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$; I $=]1, +\infty[$.

18. ++

$f : x \mapsto \dfrac{-3x^2+x+2}{x^2-x-2}$; I $=]2, +\infty[$.

► *Factoriser le dénominateur.*

19. +

$f : x \mapsto \dfrac{-x^2 - x + 3}{(x-2)^2}$; $\quad$ $I =]-\infty, 2[$.

20. +

$f : x \mapsto 2x + 1 + \dfrac{1}{x-3}$; $\quad$ $I =]3, +\infty[$.

CORRIGÉ P. 331

21. +

$f : x \mapsto -3x + 1 + \dfrac{2}{x}$; $\quad$ $I =]0, +\infty[$.

22. +

$f : x \mapsto -x + 4 + \dfrac{2}{2x+3}$; $\quad$ $I =]-\infty, -\dfrac{3}{2}[$.

23. ++ **Intensité lumineuse**

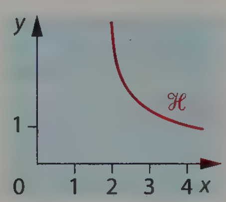
L'intensité d'une source lumineuse située à une distance r d'un observateur est donnée par $I(r) = \dfrac{k}{r^2}$ où $k > 0$.

Déterminer et interpréter $\lim\limits_{r \to 0} I(r)$ et $\lim\limits_{r \to +\infty} I(r)$.

Interpréter graphiquement une limite en termes d'asymptote

24. + **Asymptotes parallèles aux axes de coordonnées**

Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$, et $\mathcal{H}$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).



1. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x)$.

b) Déduire du **a.**, l'existence d'une asymptote Δ_1 pour la courbe $\mathcal{H}$, en donner une équation.

2. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Déduire du **a)**, l'existence d'une asymptote Δ_2 pour la courbe $\mathcal{H}$, en donner une équation.

3. Construire Δ_1 et Δ_2 après avoir reproduit la figure.

▸ **Indication :** *1. Écrire $f(x) = (x+1) \times \dfrac{1}{2x-3}$ pour isoler le facteur non défini en $\dfrac{3}{2}$.*

*Pour déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{1}{2x-3}$, on peut procéder comme à l'exercice résolu **2** du cours.*

*2. a) Procéder comme à l'exercice résolu **3** du cours.*

1. b) et 2. b) On peut se reporter aux définitions d'asymptotes rappelées page 48.

CORRIGÉ P. 331

25. ++ **Rechercher les asymptotes**

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition qui est donné.

2. Écrire une équation de chacune des éventuelles asymptotes parallèles aux axes de coordonnées de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a) $f : \begin{cases} \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x+3}{2x-3}. \end{cases}$ $\quad$ b) $f : \begin{cases}]2, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{3x^2+x+1}{x^2-x-2}. \end{cases}$

▸ *On ne demande ni étude de variation ni tracé.*

CORRIGÉ P. 331

26. ++

Écrire une équation de chacune des éventuelles asymptotes parallèles aux axes de coordonnées de la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a) $f : \begin{cases}]-1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{-x+2}{x+1}. \end{cases}$ $\quad$ b) $f : \begin{cases}]-\infty, -2[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^2+4}{x^2+x-2}. \end{cases}$

c) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}. \end{cases}$

▸ *On peut utiliser les résultats relatifs aux asymptotes figurant dans la partie « Ce qu'il faut savoir », page 48.*

27. ++

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = x + 3 + \dfrac{2}{x+1}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

Que peut-on en déduire comme asymptote pour la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f ?

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+3)]$.

Que peut-on en déduire comme asymptote pour la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f ?

▸ **Conseil :** *on peut se reporter à l'exercice résolu **4** du cours, dans le paragraphe **3E**.*

CORRIGÉ P. 332

28. ++

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x-1}$.

1. Vérifier que, pour tout x de $]1, +\infty[$,
$f(x) = x + 4 + \dfrac{5}{x-1}$.

2. En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ dont on donnera une équation.

3. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

4. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle une autre asymptote ? Si oui, en donner une équation.

▶ **Conseil :** *on peut se reporter à l'exercice résolu* **4** *du cours.*

CORRIGÉ P. 332

29. +

Écrire une équation de chacune des éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) $f : \begin{cases}]-2, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - 3 + \dfrac{4}{x+2}. \end{cases}$ b) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -3x + 1 - \dfrac{2x}{x^2+1}. \end{cases}$

30. ++

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{x-2}$.

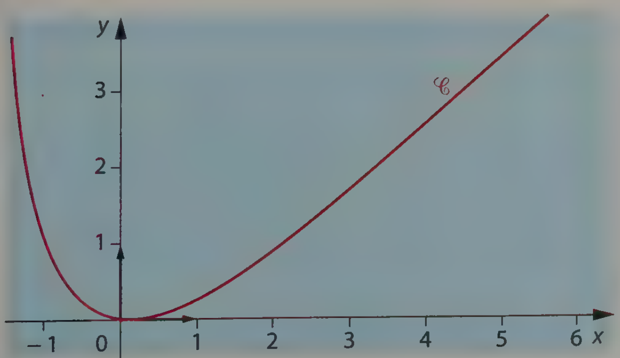
1. Vérifier que, pour tout nombre réel x de $]2, +\infty[$,
$f(x) = x + 5 + \dfrac{14}{x-2}$.

2. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.

3. La courbe représentative de f admet-elle une autre asymptote ? Si oui, en donner une équation.

31. ++ Asymptote oblique

Soit f la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x+2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.



1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ dont on donnera une équation.

2. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$ sur $]-2, +\infty[$.

3. Démontrer que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

4. Reproduire la figure et la compléter avec les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$.

▶ **Conseil :** *on peut se reporter aux résultats et aux exemples du paragraphe* **3E.** *du cours.*

Exploiter un tableau de variation pour déterminer des limites

32. ++ Le tableau de variation est donné

Soit f la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ dont le tableau de variation est le suivant.

x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

1. Lire dans le tableau de variation $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2 cm.

a) Déterminer les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$.

b) On précise que $f(-1) = 0$ et que $f(2) = 1$. Tracer une courbe $\mathscr{C}$ possible.

33. ++ Le tableau de variation est donné (bis)

Soit une fonction f, de la variable réelle x, définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La fonction f a pour tableau de variation :

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	5

1. a) Recopier et compléter :
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ldots$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$

b) Donner un intervalle sur lequel la fonction f est décroissante.

c) La fonction f admet-elle sur $]0, +\infty[$ un maximum ? Si oui, préciser la valeur de ce maximum.

d) La fonction f admet-elle sur $]0, +\infty[$ un minimum ? Si oui, préciser la valeur de ce minimum.

2. La courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes. Pour chacune d'elles, donner une équation.

3. On sait de plus que $f(1) = 2$ et $f'(1) = -2$.

Dans le plan rapporté au repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm :

a) Placer le point A de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.

b) Construire la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en A.

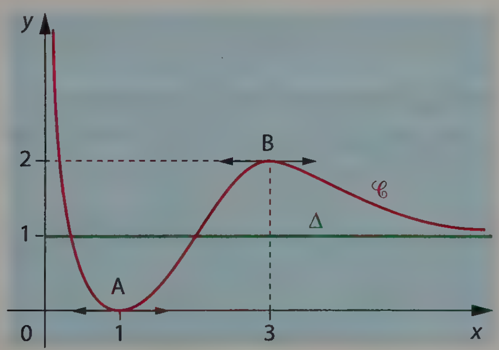
c) Donner une allure possible de la courbe $\mathscr{C}$.

Interpréter une représentation graphique en termes de limite

34. ++ Les asymptotes sont données

On donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On précise que l'axe des ordonnées et la droite Δ sont des asymptotes de $\mathscr{C}$, que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}$ au point A de coordonnées (1, 0) et que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B de coordonnées (3, 2) est parallèle à l'axe des abscisses. On précise également qu'il n'existe pas d'autre point que A et B en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ a un coefficient directeur nul.



1. À l'aide des indications ci-dessus déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2. Établir le tableau de variation de f, dans lequel on fera figurer les limites.

CORRIGÉ P. 332

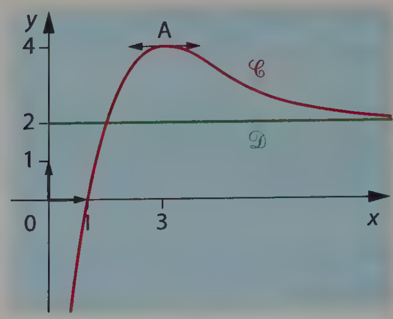
35. ++

On donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On précise que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont des asymptotes de $\mathscr{C}$.

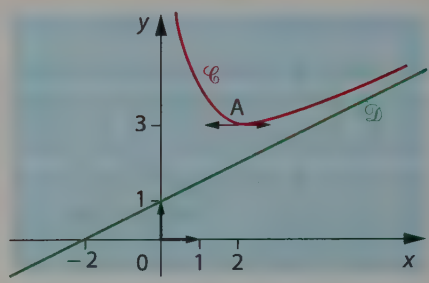
1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2. Donner le tableau de variation de f. On précise que, dans le cas où le point A figure sur le graphique, la tangente à $\mathscr{C}$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses.



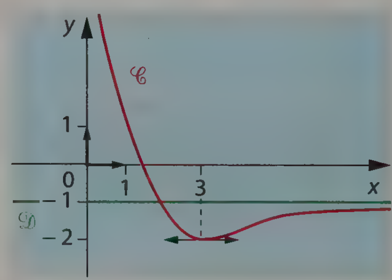
36. ++

Même énoncé que l'exercice **35**.



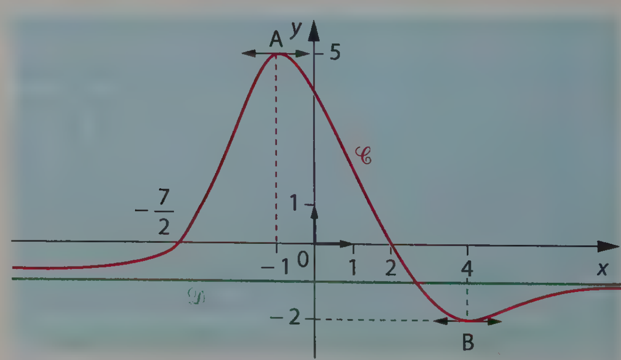
37. ++

Même énoncé que l'exercice **35**.



38. ++

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ admet pour asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$ la droite $\mathscr{D}$ (figure ci-dessous).

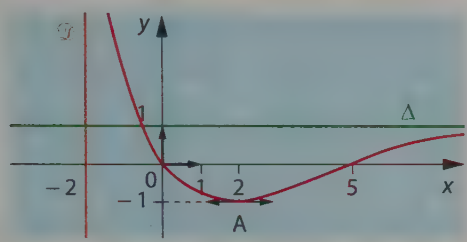


1. Déterminer à partir du graphique $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet au point A(– 1, 5) et au point B(4, – 2) une tangente parallèle à l'axe des abscisses. On admet également que les points A et B sont les seuls points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
Dresser le tableau de variation de f.
3. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq 0$.

39. ++

Soit f la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ admet pour asymptotes la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = -2$ et la droite Δ d'équation $y = 1$.

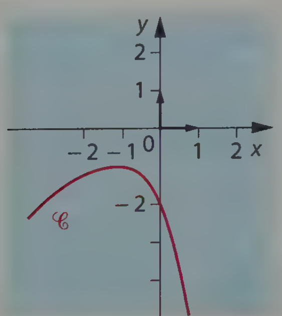


1. Déterminer à partir du graphique
$\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet au point A de coordonnées (2, – 1) une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
Établir le tableau de variation de f.
3. Donner, dans un tableau, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $]-2, +\infty[$.

40. ++ Asymptote oblique

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-1}$.

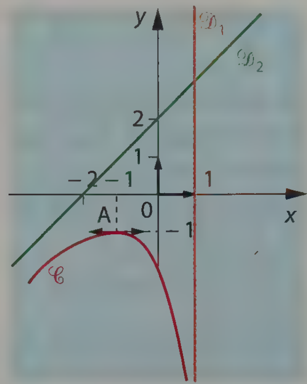
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.



1. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ dont on donnera une équation.
2. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$ sur $]-\infty, 1[$.
3. a) Démontrer que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$.
b) Que peut-on déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
4. Reproduire la figure et la compléter avec les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$.

41. +++ On recherche les coefficients

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ de la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+d}$ où a, b, c, d sont quatre nombres réels que l'on se propose de déterminer. La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A(– 1, – 1).



1. On admet que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont les asymptotes de $\mathscr{C}$. Déduire du graphique une équation de chacune des asymptotes $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de $\mathscr{C}$.
2. Déterminer les nombres réels a, b, c, d.

▶ *Avec prise d'initiatives.*

Déterminer des limites, étudier le sens de variation d'une fonction, tracer sa courbe représentative

▶ **Étudier les variations**

- *On détermine la dérivée (si elle existe). (On peut se reporter au tableau des dérivés rappelé au début du chapitre 3.)*
- *On étudie le signe de la dérivée.*
- *On établit le tableau de variation de la fonction.*

▶ **Construire la courbe représentative**

- *Le plan étant muni d'un repère orthonormé (ou orthogonal), on dessine la courbe représentative après avoir placé :*
  – les éventuels points représentatifs d'extremums (leurs coordonnées figurent dans le tableau de variation) ;
  – des points ou des droites particuliers (par exemple, des tangentes obtenues au cours de l'étude), des asymptotes ;
  – quelques points dont les coordonnées sont obtenues avec la calculatrice.

Vérifier l'allure de la courbe sur l'écran de la calculatrice graphique.

Pour chacun des exercices **42** à **48**, on fera figurer les limites obtenues dans le tableau de variation.

42. ++

1. Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

2. Étudier les variations de f.

3. Construire la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ après avoir déterminé les coordonnées de quelques points avec la calculatrice.

43. ++

Même énoncé que l'exercice **42** avec : $f(x) = x^3 - 3x$.

44. ++

Soit $f : \begin{cases}]2,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{3-2x}{2-x}. \end{cases}$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition qui est donné.
2. Écrire une équation de chacune des éventuelles asymptotes de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.
3. Étudier les variations de f et construire la courbe $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ après avoir déterminé les coordonnées de quelques points avec une calculatrice.

45. ++

Même énoncé que l'exercice **44** avec :

$f : \begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}. \end{cases}$

46. +++

Même énoncé que l'exercice **44** avec :

$f : \begin{cases}]-2,2[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^2-12x+36}{4(x^2-4)}. \end{cases}$

47. ++

Soit $f : \begin{cases}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x-\dfrac{4}{x}. \end{cases}$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet deux asymptotes dont une est oblique.
3. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote oblique.
4. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.
5. Construire $\mathscr{C}$ et les asymptotes dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ après avoir déterminé les coordonnées de quelques points avec une calculatrice.

48. ++

Même énoncé que l'exercice **47** avec :

$f : \begin{cases}]-\infty,2[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+1-\dfrac{9}{x-2}. \end{cases}$

Exemple d'utilisation de logiciels

49. +++ Algorithme de seuil avec la calculatrice, AlgoBox ou Scilab

ALGO

Un chauffe-eau de puissance 8 719 watts dans lequel l'eau froide arrive à la température de 10 °C fournit selon un débit Q, exprimé en kg.s^{-1}, de l'eau à la température T °C telle que :

$T = 10 + \dfrac{8\,719}{4\,185 \times Q}$.

1. Donner $\lim\limits_{Q \to +\infty} \left(10 + \dfrac{8\,719}{4\,185 \times Q}\right)$.
2. On considère l'algorithme ci-dessous.

Initialisation
Q prend la valeur 0,05
Traitement
Tant que $\dfrac{8\,719}{4\,185 \times Q} > 0{,}1$
Q prend la valeur $Q + 0{,}01$
Fin Tantque
Sortie
Afficher Q

a) La boucle « Tant que » de cet algorithme dépend d'une condition. Laquelle ?

b) Quand sort-on de la boucle ?

c) Définir le rôle de l'algorithme.

3. Saisir le programme correspondant à cet algorithme sur calculatrice, AlgoBox ou Scilab et l'exécuter.

Quelle est la valeur affichée par le programme ?

CORRIGÉ P. 332

RÉPONSES P. 332

Faites le point !

QCM

Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.

QCM interactifs 50-51-52-53

Limites de fonctions polynômes ou rationnelles

50. ++ Fonctions polynômes

Dans chaque question, f est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$.

1 $f(x)=-3x^2+x+1$

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2 $f(x)=-2x^3+x^2$

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

51. + Fonctions rationnelles

Dans chaque question, f est une fonction rationnelle définie sur $]1, +\infty[$.

1 $f(x)=\dfrac{-3x+1}{x-1}$

a. $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty$

b. $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-3$

2 $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$

a. $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$

b. $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$

c. $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty$

3 Si $f(x)=\dfrac{-3x+1}{(x-1)(x+2)}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

a. -3 b. 0 c. $-\infty$

52. ++ Limites infinies d'une fonction rationnelle

Dans chaque question, f est une fonction rationnelle définie sur $]-\infty, 2[$.

1 $f(x)=\dfrac{-4x+1}{x-2}$

a. $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty$

b. $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-3$

2 $f(x)=\dfrac{-3x}{(x-2)^2}$

a. $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$

b. $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$

c. $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty$

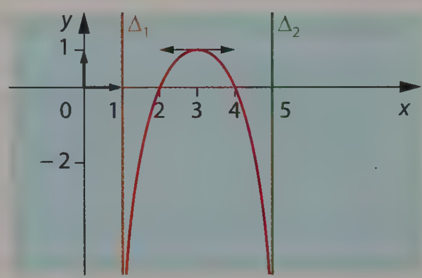
3 Si $f(x)=-2x-1-\dfrac{1}{x-2}$ alors $\lim\limits_{x\to2} f(x)=$

a. $-\infty$ b. 0 c. $+\infty$

Courbe et asymptotes

53. +++

Parmi les trois tableaux de variation suivants, déterminer lequel ou lesquels sont susceptibles de correspondre à la fonction f dont la courbe représentative est la suivante. On précise que les droites Δ_1 et Δ_2 sont des asymptotes verticales.



a

x	1		3		5
$f'(x)$	||	+	0	−	||
$f(x)$	|| -5	↗	1	↘	-5 ||

b

x	1		3		5
$f'(x)$	||	+	0	−	||
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ||

c

x	1		3		4		5
$f'(x)$	||	+	0	−	0	+	||
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$ ||

Les exercices pour le baccalauréat sont des exercices qui pourraient figurer dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat STL-Biotechnologies.

54. +++ Exploiter le tableau de variation d'une fonction

On se propose d'étudier la fonction numérique f dont on connaît le tableau de variation :

x	-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	-4	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	3	↘	-1	↗	0

1. Donner les ensembles de définition de f et de sa dérivée f'.
2. Quelles sont les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition ? Donner les équations des asymptotes de la courbe représentative de f.
3. Écrire les équations des tangentes à la courbe représentative de f que le tableau de variation permet de connaître.
4. On précise que $f(1) = 0$.
Tracer une esquisse de la courbe représentative de f.
5. Résoudre graphiquement dans $]-1, +\infty[$ l'inéquation $f(x) \leq 0$.
6. Déterminer le nombre de solutions dans $]-1, +\infty[$ de l'équation $f(x) = -0{,}5$.

55. +++ Courbe et asymptotes

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]2, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{2}{x-2}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1. Recopier et compléter le tableau suivant (les résultats seront arrondis au centième) :

x	2,5	3	3,5	4	5	6	7
$f(x)$							

2. a) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(x)$.
b) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]\cancel{0}$ 2$, +\infty[$, $f'(x) > 0$.
c) En déduire le tableau de variation de la fonction f.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. Quelle asymptote Δ en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}$?
4. a) Calculer $f(x) - (x - 1)$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x-1)\right)$.
b) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$?
5. Tracer Δ, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$.

56. +++ Déterminer des limites et des asymptotes, exploiter le tableau de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par : $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{9}{2x+1}$.

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où les unités graphiques sont 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x)$.
b) Que peut-on déduire du résultat obtenu au **a)** pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. a) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
b) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$ lorsque x varie dans $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
4. a) On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que, pour tout x de $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$,

$$f'(x) = \frac{8(x+2)(x-1)}{(2x+1)^2}.$$

b) En déduire le tableau de variation de f sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
Compléter le tableau de variation en y portant les limites obtenues au **1.** et au **2.**
5. Déduire du tableau de variation le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
6. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

CORRIGÉ P. 332

57. +++ Catalyse enzymatique et tableur TICE

On réalise l'hydrolyse de l'ion fumarate par l'eau, catalysée par l'enzyme fumarase.
On suppose que, pour une certaine concentration initiale en enzyme, la vitesse initiale v de la réaction chimique, exprimée en mol.L^{-1}.s^{-1}, en fonction de la concentration x de l'ion fumarate, exprimée en mol.L^{-1}, est donnée par

$$v = \frac{ax}{K+x},$$

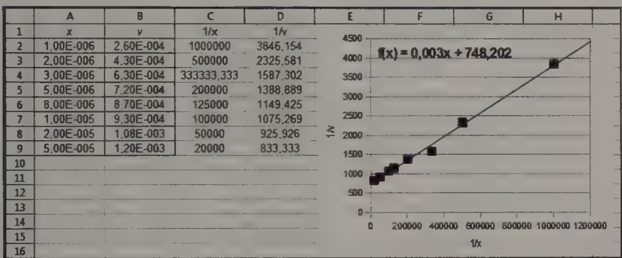
où K est la constante de Michaelis de l'enzyme fumarase.

La mesure de v pour différentes concentrations x a donné les résultats suivants.

x mol.L^{-1}	v mol.L^{-1}.s^{-1}
1.10^{-6}	$2,6.10^{-4}$
2.10^{-6}	$4,3.10^{-4}$
3.10^{-6}	$6,3.10^{-4}$
5.10^{-6}	$7,2.10^{-4}$
8.10^{-6}	$8,7.10^{-4}$
10.10^{-6}	$9,3.10^{-4}$
20.10^{-6}	$10,8.10^{-4}$
50.10^{-6}	12.10^{-4}

1. On admet l'équivalence $v = \dfrac{ax}{K+x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{v} = \dfrac{K}{a} \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a}$.

Un tableur a permis d'ajuster une droite aux points expérimentaux de coordonnées $\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{v}\right)$.



	A	B	C	D
1	x	v	1/x	1/v
2	1,00E-006	2,60E-004	1000000	3846,154
3	2,00E-006	4,30E-004	500000	2325,581
4	3,00E-006	6,30E-004	333333,333	1587,302
5	5,00E-006	7,20E-004	200000	1388,889
6	8,00E-006	8,70E-004	125000	1149,425
7	1,00E-005	9,30E-004	100000	1075,269
8	2,00E-005	1,08E-003	50000	925,926
9	5,00E-005	1,20E-003	20000	833,333

Montrer que l'on peut en déduire $a \approx 1,3.10^{-3}$ et $K \approx 4.10^{-6}$.

2. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1,3.10^{-3} \times x}{4,10^{-6} + x}$.

b) En déduire la vitesse maximale de la réaction chimique pour cette concentration initiale en enzyme.

58. +++ Limites et calcul formel avec Maxima

TICE

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{x-2}$.

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants, qui ne sont pas à démontrer.

```
Fichier  Editer  Cell  Maxima  Equations  Algèbre  Calculs  Simplifier

(%i1) define(f(x),(x^2+3*x+4)/(x-2));
                x^2 + 3 x + 4
(%o1) f(x):= -------------
                   x - 2

(%i2) limit(f(x),x,2,plus);
(%o2) ∞

(%i3) limit(f(x),x,inf);
(%o3) ∞

(%i4) f(x)-(x+5);
       x^2 + 3 x + 4
(%o4)  ------------- - x - 5
           x - 2

(%i5) factor(%);
        14
(%o5)  -----
       x - 2

(%i6) limit(14/(x-2),x,inf);
(%o6) 0
```

1. a) Expliquer l'argument « plus » apparaissant dans l'instruction limit(f(x), x, 2, plus).

b) Que vaut $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$? En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote, dont on donnera une équation.

2. Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

3. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x+5)\right]$.

b) Quelle interprétation graphique peut-on donner du résultat précédent, en considérant la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 5$?

Des « vrais-faux » pour le baccalauréat

59. +++ Exploiter un tableau de variation

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et on nomme $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

▶ *Répondre par VRAI ou par FAUX. Les réponses devront être justifiées, éventuellement par des graphiques.*

1. Pour tout réel x de $]0, 1]$, $f(x) \leq 1$.

2. L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$.

3. L'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique dans $]0, 1[$.

4. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

6. La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.

CORRIGÉ P. 393

60. +++ Exploiter un tableau de variation

On donne ci-dessous les variations d'une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on nomme $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-1	↗	1

▶ *Répondre, par VRAI ou FAUX, aux questions suivantes (une justification est demandée lorsque la réponse est FAUX, aucune justification n'est demandée lorsque la réponse est VRAI).*

1. Pour tout réel x, $f(x) \geq -2$.

2. L'équation $f(x) = -3$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

3. L'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans $[2, 4]$.

4. Pour tout réel x, $f'(x) \geq 0$.

5. $f'(1) < 0$.

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

7. La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote.

Des QCM pour le baccalauréat

61. +++ Un tableau de variation est donné

▶ *Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. On demande d'indiquer la réponse exacte sans justification.*

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5, +\infty[$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-5		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	-3	↘	-5	↗	4	↘	$-4{,}5$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Sur l'intervalle $]-5, +\infty[$, l'équation $f(x) = -2$:
- admet une seule solution ;
- admet deux solutions ;
- admet quatre solutions.

2. Sur l'intervalle $]-5, +\infty[$, la courbe $\mathscr{C}$:
- admet une seule asymptote, la droite d'équation $x = -5$;
- admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations $x = -4{,}5$ et $y = -5$;
- admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations $y = -4{,}5$ et $x = -5$.

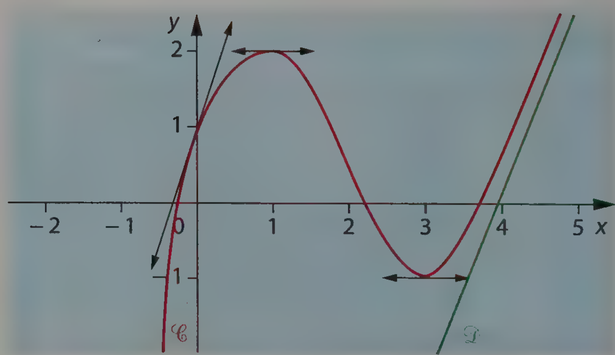
3. On sait que $f'(2) = 0$. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
- $y = 4$
- $y = 4(x - 2)$
- $x = 4$.

4. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1, 2)$ est $y = 3x - 1$. On a :
- $f(2) = 1$
- $f'(1) = -1$
- $f'(1) = 3$.

62. +++ La courbe représentative est donnée

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$. On sait que la fonction f est croissante sur $]-1, 1]$ et sur $]3, +\infty[$ et que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$.

▶ *Chaque question comporte trois affirmations, une seule des trois est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte sans justifier votre choix.*



1. Une asymptote à $\mathscr{C}$ est la droite d'équation :
- $y = -1$
- $x = 1$
- $x = -1$.

2. La droite $\mathscr{D}$ a pour équation :
- $y = \dfrac{5}{2}x - 10$
- $y = \dfrac{5}{2}x - 9$
- $y = 3x - 10$.

3. Le nombre dérivé de f en 0 est :
- 1
- 3
- -3.

4. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $]-1, +\infty[$ est :
- 2
- 1
- 3.

CHAPITRE 3

Compléments sur les dérivées et primitives

APRÈS AVOIR DÉRIVÉ DE NOUVELLES FONCTIONS, NOUS ALLONS NOUS INTÉRESSER À L'OPÉRATION INVERSE DE LA DÉRIVATION D'UNE FONCTION ; C'EST AINSI QUE L'ON PEUT OBTENIR UNE VITESSE À PARTIR D'UNE ACCÉLÉRATION OU DIFFÉRENTES GRANDEURS EN BIOLOGIE, EN SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES...

CAPACITÉS

- Calculer les dérivées des fonctions de la forme : $x \mapsto u^n(x)$.
- Connaître et utiliser des primitives des fonctions de référence.
- Déterminer des primitives de fonctions de la forme $u'u^n$, où n est un entier relatif différent de -1.

ACTIVITÉ 1 Des fonctions différentes, définies sur un même intervalle, qui ont même dérivée

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2x - 3$.

1° Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 3x$.
Comparer g' et f.

2° Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = x^2 - 3x + 5$.
Comparer h' et f.

3° Déterminer trois nouvelles fonctions h_1, h_2, h_3 dont la dérivée est la fonction f.

ACTIVITÉ 2 Deux fonctions ayant même dérivée, mais définies sur $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas intervalle

Le plan est muni d'un repère orthonormé unique $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

1° Soit f_1 et g_1 les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g_1(x) = \dfrac{1}{x} + 2$.

Tracer les courbes représentatives $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{C}_1$ respectivement de f_1 et de g_1. (On ne demande pas l'étude des variations de f_1 et g_1.)
Comparer les fonctions f'_1 et g'_1.

2° Soient f_2 et g_2 les fonctions définies sur $]-\infty, 0[$ par $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g_2(x) = \dfrac{1}{x} - 1$.

Tracer les courbes représentatives $\mathscr{H}_2$ et $\mathscr{C}_2$ respectivement de f_2 et de g_2.
Comparer les fonctions f'_2 et g'_2.

3° Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ si } x > 0 \\ f_2(x) \text{ si } x < 0 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} g_1(x) \text{ si } x > 0 \\ g_2(x) \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Quelles sont les courbes représentatives $\mathscr{H}$ et $\mathscr{C}$ respectivement de f et de g ?
Comparer les fonctions dérivés f' et g'.
Existe-t-il une constante C (indépendante de x) telle que, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $g(x) = f(x) + C$?

Quelques mots d'histoire

La notion de dérivée s'est dégagée progressivement, grâce notamment aux travaux menés en parallèle d'une part, par Isaac Newton (1642-1727) en Angleterre et, d'autre part, par Wilhelm Gottfried Leibniz (1646-1716) en Allemagne sur le calcul infinitésimal.

Isaac Newton, 1642-1727 est un mathématicien et un physicien anglais.

1 Calcul de dérivées : compléments

La fonction dérivée d'une fonction a été introduite en Première : les dérivées des fonctions de référence et les résultats concernant les opérations sur les fonctions dérivables sont rappelés dans la rubrique **Ce qu'il faut savoir** de ce chapitre.

Voir à la fin du cours.

A. Dérivation d'une fonction composée u^n

Soit n un nombre entier relatif non nul, soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I si n est négatif. Si, pour tout x de I, $f(x) = [u(x)]^n$, on peut noter : $f = u^n$. Ainsi, par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-3x + 1)^2$ peut s'écrire $f = u^2$ où $u : \mapsto u(x) = -3x + 1$.

f est une fonction composée.

$f = u^n$ avec $n = 2$.

• Nous avons démontré en Première que la formule $(uv)' = u'v + vu'$ donnant la dérivée du produit uv de deux fonctions dérivables u et v devient, dans le cas particulier où $v = u$: $(u^2)' = u'u + uu'$, c'est-à-dire $\mathbf{(u^2)' = 2u'u}$.

Ainsi, par exemple pour la fonction f définie ci-dessus, on a $u(x) = -3x + 1$, donc $u'(x) = -3$.

Le résultat sur la dérivée de $u^2 = f$ donne : $f'(x) = 2(-3)(-3x + 1)$, c'est-à-dire $f'(x) = 6(3x - 1)$.

• Nous pouvons de même utiliser la formule $(uv)' = u'v + uv'$ dans le cas particulier où $v = u^3$.

Nous avons dans ce cas $uv = uu^2 = u^3$ et $v' = (u^2)' = 2u'u$.

Donc $(u^3)' = u'u^2 + u(2u'u)$, c'est-à-dire :

$(u^3)' = u'u^2 + 2u'u^2$,

$\mathbf{(u^3)' = 3u'u^2}$.

$f = u^n$ avec $n = 3$.

Ainsi, par exemple pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x - 1)^3$, on a $f = u^3$ où $u(x) = 5x - 1$.

Comme $u'(x) = 5$, le résultat sur la dérivée de $u^3 = f$ donne : $f'(x) = 3(5)(5x - 1)^2$, donc $f'(x) = 15(5x - 1)^2$.

• Nous savons que la formule donnant la dérivée de l'inverse d'une fonction u s'écrit : $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

En utilisant des exposants négatifs, nous pouvons l'écrire : $\mathbf{(u^{-1})' = -u'u^{-2}}$.

• Nous pouvons observer que les trois formules obtenues ci-dessus $(u^2)' = 2u'u$, $(u^3)' = 3u'u^2$ et $(u^{-1})' = -u'u^{-2}$ sont les trois cas particuliers de la formule générale $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, où n est un entier relatif non nul, obtenus respectivement pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = -1$.

Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME

Soit n un nombre entier relatif non nul, soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I si n est négatif.

La fonction u^n est dérivable sur I et pour tout x de I :

$$(u^n)'(x) = nu^{n-1}(x) \times u'(x).$$

Ne pas oublier $u'(x)$.

EXERCICE résolu 1

ÉNONCÉ

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = \sin^2(\omega t + \varphi)$ dans le cas où $\omega = 3$ et $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

MÉTHODE

Identifier u et n tels que $f = u^n$.

Calculer $u'(t)$.

Appliquer le théorème.

SOLUTION

Pour tout t de $[0, +\infty[$, $f(t) = \sin^2\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Donc $f = u^2$ avec $u(t) = \sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$.

$u'(t) = 3\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$ d'après le résultat rappelé dans la rubrique **Ce qu'il faut savoir** sur la dérivée de la fonction $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$.

D'après le théorème sur la dérivée de u^n :

pour tout t de $[0, +\infty[$, $f'(t) = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) \times 3\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$,

$f'(t) = 6\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 65

Remarque 1

D'après le résultat $2\sin a \cos a = \sin 2a$ que nous admettons ici, on peut aussi écrire : $f'(t) = 3\sin\left(6t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Remarque 2

Les dérivées des deux fonctions $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ sont deux cas particuliers d'un résultat plus général concernant les fonctions composées du type $t \mapsto f(at + b)$ où a et b sont deux constantes.

Voir la rubrique **Ce qu'il faut savoir**.

La variable t peut être remplacée par x.

THÉORÈME

Si f est dérivable en $at_0 + b$, la fonction g définie par $t \mapsto g(t) = f(at + b)$ est dérivable en t_0 et a pour nombre dérivé

$$g'(t_0) = af'(at_0 + b).$$

Ne pas oublier a.

B. Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si la fonction dérivée f' est elle aussi dérivable sur I, sa fonction dérivée $(f')'$ est notée f'' et est appelée **dérivée seconde de f** sur I.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$.

- f' est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 6x^2 - 2x + 1$,
- f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 12x - 2$.

C. Notation différentielle des dérivées

Aucune connaissance n'est exigible sur ce thème en mathématiques.

En biotechnologies, en physique et en chimie, on utilise la **notation différentielle** pour les dérivées successives d'une fonction $f : x \mapsto f(x)$: $\frac{df}{dx}$ au lieu de f' et $\frac{d^2f}{dx^2}$ au lieu de f''.

Il en est de même pour la fonction u où $u(t)$ est une tension électrique.

• Ainsi pour la fonction $i : t \mapsto i(t)$ où $i(t)$ désigne une intensité électrique dépendant du temps t, on pourra utiliser les deux notations équivalentes i' et $\frac{di}{dt}$ pour la dérivée de la fonction i.

Attention : ici x est une fonction de la variable t.

• De même, en notant $x(t)$ la distance parcourue par un mobile, la vitesse instantanée qui varie avec le temps t, est notée $v(t) = x'(t)$ ou $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$.

Si la fonction $v = x'$ est elle-même dérivable, sa dérivée est $v' = \frac{dv}{dt} : t \mapsto v'(t) = \frac{dv}{dt}(t)$.

$v'(t)$ est l'*accélération $a(t)$ du mobile* qui est notée :

$a(t) = v'(t) = x''(t)$ ou $a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$.

• En biotechnologies, si C et x sont, par exemple, des concentrations, $\frac{dc}{dt}$ et $\frac{dx}{dt}$ sont des vitesses de croissance utilisées pour décrire des évolutions de C et x.

2 Primitives d'une fonction sur un intervalle

A. Définition

Exemple

L'activité d'approche **1** fournit d'autres exemples.

Soit les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 6x^2 - 3$ et $F : x \mapsto 2x^3 - 3x + 4$.

Vérifiez que, pour tout nombre réel x, $F'(x) = f(x)$.

f est la fonction dérivée de F ; on dit que F est **une primitive** de f sur $\mathbb{R}$.

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction F définie sur I est une **primitive** de f sur I lorsqu'elle est dérivable sur I et que $F' = f$.

B. Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle

Soit $f : x \mapsto 2x$, définie sur $\mathbb{R}$.

$F : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$, est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

De même $F_1 : x \mapsto x^2 + 1$, $F_2 : x \mapsto x^2 - 4$, ..., sont des primitives de f.

f admet-elle d'autres primitives sur $\mathbb{R}$ que les fonctions $x \mapsto x^2 + C$ où C est une constante réelle ?

La réponse est donnée par le théorème suivant que nous admettons.

Nous pouvons retenir en abrégé : sur un **intervalle** deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

L'activité d'approche **2** montre que ce résultat n'est pas vrai sur $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas un intervalle.

THÉORÈME

Si f est une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est constitué des fonctions définies sur I par $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante réelle.

Exemple

Les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 3$ sont les fonctions $x \mapsto x^3 - 3x + C$ où C est une constante réelle.

Remarque

Parmi les primitives de la fonction f définie dans l'exemple ci-dessus, cherchons s'il existe une fonction F telle que $F(2) = 6$.
F convient si et seulement si $F(x) = x^3 - 3x + C$ avec $2^3 - (3 \times 2) + C = 6$, c'est-à-dire $C = 4$.
Il existe donc une primitive unique de f prenant la valeur 6 pour $x = 2$; c'est $F : x \mapsto x^3 - 3x + 4$.

Observez que C est la solution unique d'une équation du premier degré.

Plus généralement nous pouvons démontrer de la même façon le théorème suivant :

THÉORÈME

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.

Parmi les primitives de f définies sur I, il en existe une et une seule prenant une valeur donnée y_0 pour une valeur donnée x_0 de la variable.

Dans le cas particulier ci-dessus $y_0 = 6$ et $x_0 = 2$.

C. Primitives des fonctions de référence

La lecture du tableau des dérivées des fonctions de référence dans le sens f' vers f permet d'obtenir les primitives de ces fonctions.

Dans ce qui suit, C est une constante réelle quelconque.

f est définie par	sur	Les primitives F de f sont définies par
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + C$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	• $\mathbb{R}$ si $n > 0$ • $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n < 0$ et $n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$F(t) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + C$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$F(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + C$

En notant $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ on observe que cette formule est un cas particulier de la précédente.

Remarque 1

Pour $n = -1$, la fonction $x \mapsto x^n = \frac{1}{x}$ définie sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$ admet des primitives sur l'un et l'autre de ces intervalles mais nous ne les connaissons pas ; le chapitre suivant apportera une réponse.

Nous avons remarqué qu'en dérivant sinus ou cosinus, on « tourne de $+\frac{\pi}{2}$ ».
Inversement on « tourne de $-\frac{\pi}{2}$ ».

Remarque 2

En sciences physiques, on utilise les deux derniers résultats de ce tableau de la façon suivante :

- une primitive de $t \mapsto \sin(\omega t+\varphi)$ est :

$$t \mapsto -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)=\frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right),$$

- une primitive de $t \mapsto \cos(\omega t+\varphi)$ est :

$$t \mapsto \frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)=\frac{1}{\omega}\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right).$$

Attention : $F\times G$ n'est pas en général une primitive de $f\times g$.
De même pour l'inverse $\frac{1}{G}$ et le quotient $\frac{F}{G}$.

Remarque 3

En s'appuyant sur les résultats concernant les opérations sur les fonctions dérivables, on établit que :

- Si F est une primitive de f sur un intervalle I et si G une primitive de g sur I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- Si F est une primitive de f sur un intervalle I, et si a est un nombre réel, alors aF est une primitive de af sur I.

EXERCICE résolu 2

ÉNONCÉ

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=2x^3-3x^2+4x-7$.

MÉTHODE

Utiliser le tableau des primitives des fonctions de référence et la remarque 3.

SOLUTION

Du tableau donnant les primitives des fonctions de référence et des résultats concernant la primitive d'une somme et la primitive du produit d'une fonction par un nombre réel, on déduit que les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=2\times\left(\frac{1}{4}x^4\right)-3\times\left(\frac{1}{3}x^3\right)+4\times\left(\frac{1}{2}x^2\right)-7x+C$$

où C est une constante réelle.

$$F(x)=\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2-7x+C$$

où C est une constante réelle.

VOIR AUSSI LES EXERCICES CORRIGÉS 71 et 72

EXERCICE résolu 3

ÉNONCÉ

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :
$f(x)=3x+1-\frac{2}{x^2}$.

MÉTHODE

Utiliser le tableau des primitives des fonctions de référence et la remarque 3.

SOLUTION

En procédant comme dans l'exercice **2**, on déduit qu'une primitive de f est définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$F(x)=3\left(\frac{1}{2}x^2\right)+x+2\left(\frac{1}{x}\right), \qquad F(x)=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{2}{x}.$$

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 74

Remarque :
Lorsqu'on demande **une** primitive sans condition particulière, on prend habituellement $C = 0$.

D. Primitives de fonctions de la forme $u'u^n$

n est un entier relatif différent de -1.

$u(x) \neq 0$ pour tout x de I si $n < 0$.

Nous avons vu au paragraphe **1A.** qu'une fonction de la forme u^n dérivable sur un intervalle I a pour dérivée $nu'u^{n-1}$.

Donc une primitive d'une fonction de la forme $nu'u^{n-1}$ est u^n.

$n \neq 0$.

Nous en déduisons, par multiplication par la constante $\frac{1}{n}$, que, d'après la remarque 3 du paragraphe **2C.** : une primitive d'une fonction de la forme $u'u^{n-1}$ est $\frac{1}{n}u^n$.

En remplaçant n par $n+1$ nous obtenons le résultat dans le tableau suivant.

$u(x) \neq 0$ pour tout x de I si $n < -1$.

Ce résultat est un cas particulier du précédent avec $n = -2$.

f est définie sur un intervalle I par :	Les primitives F de f sont définies sur I par :
$f(x) = u'(x)[u(x)]^n,\ n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1} + C$
$f(x) = \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$	$F(x) = -\frac{1}{u(x)} + C$

Remarque
La mise en œuvre des résultats figurant dans ce tableau conduit aux deux observations suivantes.
1. Pour déterminer des fonctions dérivées et des fonctions primitives il faut, dans un cas comme dans l'autre, trouver « la bonne formule ». Mais le problème est plus difficile dans le cas des primitives que dans celui de dérivées car il faut identifier une fonction u et sa dérivée u' et, le plus souvent, choisir une constante multiplicative.
2. **Lorsqu'on a trouvé une primitive d'une fonction, il est prudent de procéder à une vérification en dérivant la primitive obtenue.**

Ce qui veut dire que pour déterminer des primitives, il faut savoir dériver les fonctions usuelles.

EXERCICE résolu 4

ÉNONCÉ

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \frac{x}{(3x^2+1)^2}$.

SOLUTION

MÉTHODE

Faire apparaître la forme $\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ dans l'expression de $f(x)$.

$f(x)$ ressemble à $\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$ (mais ce n'est pas…).

On pose $u(x) = 3x^2 + 1$, alors $u'(x) = 6x$. D'où : $f(x) = \frac{1}{6} \times \left[\frac{6x}{(3x^2+1)^2}\right]$.

Cette écriture de $f(x)$ permet d'avoir « exactement » dans le crochet une expression de la forme $\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$.

Utiliser le résultat correspondant figurant dans le tableau.

Une primitive de la fonction correspondante est définie par $-\frac{1}{u(x)}$, d'après le tableau précédent. Une primitive de f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = \frac{1}{6} \times \left[-\frac{1}{3x^2+1}\right]$, $\quad F(x) = -\frac{1}{6(3x^2+1)}$.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 93

Ce qu'il faut savoir

Rappels de la classe de Première

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$mx+p$	m	$\mathbb{R}$
$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\omega \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$-\omega \sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivables

$(u+v)' = u' + v'$

$(u^2)' = 2u'u$

$(ku)' = ku'$, où k est une constante réelle.

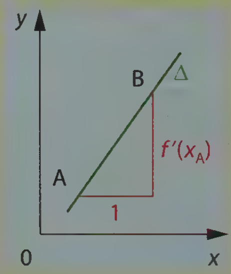
$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$, où $v(x) \neq 0$ pour tout x de I.

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, où $v(x) \neq 0$ pour tout x de I.

Construire une tangente à la courbe représentative d'une fonction f en un de ses points A, d'abscisse x_A

À partir du point donné $A(x_A, y_A)$ où $y_A = f(x_A)$, on obtient un deuxième point B de la tangente Δ en ajoutant 1 à l'abscisse de A et $f'(x_A)$ à l'ordonnée de A : $x_B = x_A + 1$ et $y_B = y_A + f'(x_A)$.



Équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f, dérivable en a, au point d'abscisse a

$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$.

Sens de variation d'une fonction

- Si f est dérivable sur l'intervalle I et si la dérivée f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f est dérivable sur l'intervalle I et si la dérivée f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.
- Si f est dérivable sur l'intervalle I et si la dérivée f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.

Compléments sur la dérivation

$f(x)=[u(x)]^n$, n entier relatif non nul	$f'(x)=nu'(x)\,[u(x)]^{n-1}$
Cas particulier : $n=-1$	
$f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$	$f'(x)=\dfrac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$

Primitives d'une fonction sur un intervalle

Primitives des fonctions usuelles

Animation vidéo

F donne la forme générale des primitives sur un intervalle I de la fonction f. C est une constante réelle quelconque.

$f(x)$	$F(x)$	Intervalle de validité
$f(x)=a$	$F(x)=ax+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ n entier non nul positif	$F(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{x}+C$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+C$	$\mathbb{R}$
$f(t)=\sin(\omega t+\varphi)$	$F(t)=-\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)+C$	$\mathbb{R}$
$f(t)=\cos(\omega t+\varphi)$	$F(t)=\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)+C$	$\mathbb{R}$

Primitives de fonctions de la forme $u'u^n$

Dans ce qui suit, C est une constante réelle quelconque.

f est définie sur I par :	Les primitives F de f sont définies sur I par :
$f(x)=u'(x)[u(x)]^n$ $n\in\mathbb{Z}-\{-1\}$	$F(x)=\dfrac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1}+C$
Cas particulier : $n=-2$: $f(x)=\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}+C$

RÉPONSES P. 333

TP 1 Résoudre un problème d'optimisation à l'aide des TICE

LOGICIELS UTILISÉS
GeoGebra
Maxima

Réseau minimal

Quatre villages A, B, C et D sont situés aux sommets d'un carré de 10 kilomètres de côté. On se propose de relier ces quatre villages par un réseau de fibres optiques comportant deux « nœuds » en M et N comme indiqué sur la figure GeoGebra. Les points M et N sont symétriques par rapport au centre du carré et le réseau est symétrique par rapport aux médiatrices du carré.

On recherche la position du point M pour laquelle la longueur totale du réseau est minimale.

A. Expérimentation à l'aide de GeoGebra

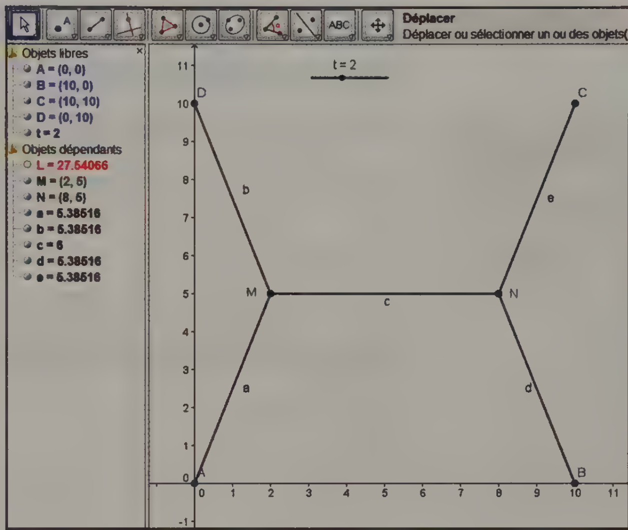
Placer les points A, B, C et D dans un repère GeoGebra comme ci-contre.

Créer un curseur t allant de 0 à 5 avec un incrément de 0,01.

Placer le point M de coordonnées $(t, 5)$.

Créer la figure du réseau et calculer sa longueur L.

Rechercher, à l'aide du logiciel, une valeur approchée de t, arrondie à 10^{-2}, pour laquelle la longueur L est minimale .

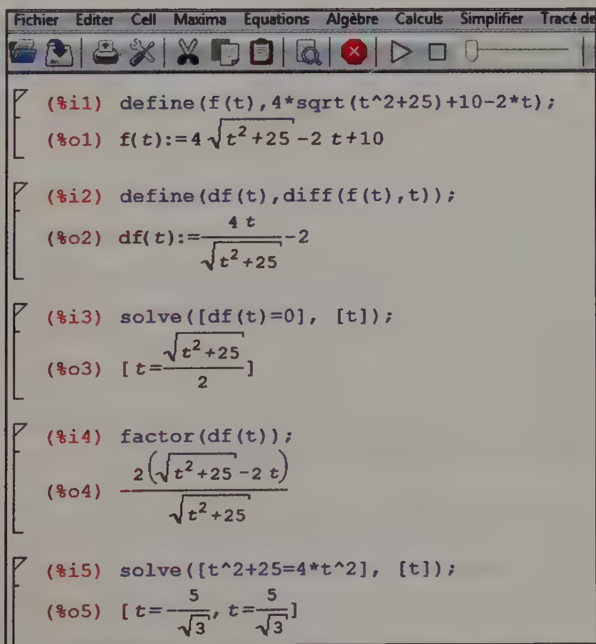


B. Résolution analytique à l'aide de Maxima

1. **a.** Utiliser l'énoncé de Pythagore pour justifier que $AM = \sqrt{t^2+25}$.

b. En déduire que la longueur du réseau est donnée, en fonction de t appartenant à l'intervalle $[0, 5]$, par $f(t) = 4\sqrt{t^2+25}+10-2t$.

2. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'affichage suivant, où les entrées dans le logiciel sont repérées par (%i) et les sorties par (%o).



a. Qu'affiche la sortie n° 2 ?

b. Que demande l'entrée n° 3 ? Pourquoi cette demande a-t-elle été faite ?

c. Que peut-on penser de la sortie n° 3 ?

d. Expliquer l'entrée n° 5.

e. Comparer le résultat de la sortie n° 5 avec la valeur obtenue à l'aide de GeoGebra.

TP 2 Exploiter la dérivée dans un algorithme

Descendre vers le minimum en suivant la plus grande pente, avec un algorithme

LOGICIELS UTILISÉS
GeoGebra
Scilab

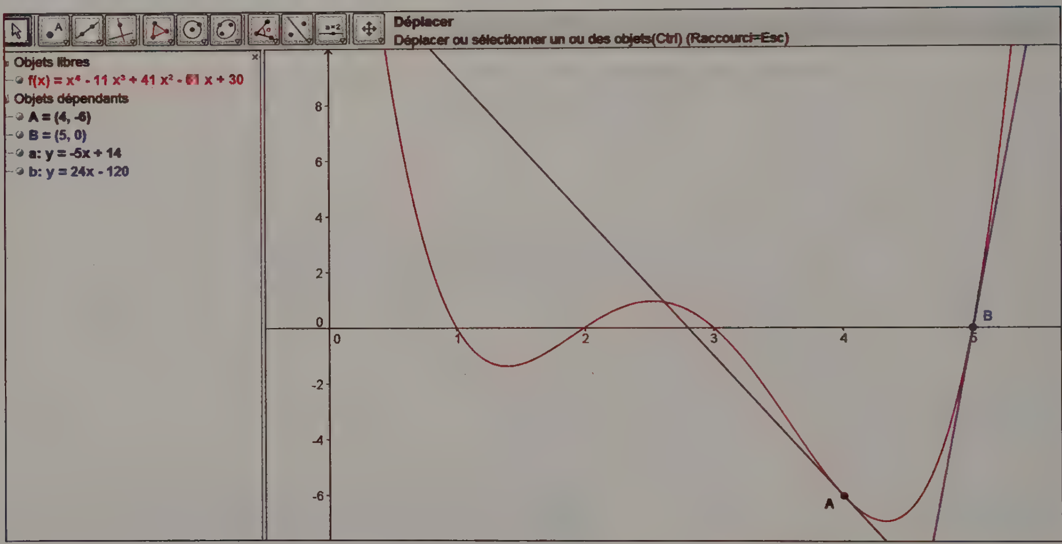
A. Position du problème

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$f(x) = x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30$.

On cherche à calculer la valeur α de x qui minimise $f(x)$.

Une représentation graphique de f a été obtenue ci-dessous à l'aide de GeoGebra.



1. Donner, à l'aide du graphique, un encadrement de α entre deux nombres entiers consécutifs.

2. a. Calculer l'expression de la dérivée de f.

b. En déduire que la valeur α cherchée est racine d'une équation de degré 3.

3. La résolution de cette équation de degré 3 n'est pas facile ! L'idée de l'algorithme développé dans ce TP est de « descendre » vers le minimum en suivant la « plus grande pente ».

a. On considère les points A et B situés sur la courbe représentative de f et d'abscisses respectives $a = 4$ et $b = 5$.

Donner les coefficients directeurs des tangentes à la courbe aux points A et B. (On peut utiliser les équations de ces tangentes fournies par GeoGebra.)

b. Quel est, du point A ou du point B, celui où, en valeur absolue, la « pente est la plus grande » ?

B. Analyse de l'algorithme

On a programmé ci-dessous, en langage Scilab, un algorithme de descente vers le minimum.

```
1  a=input("a = ")
2  b=input("b = ")
3  function y=f(x)
4      y=x^4-11*x^3+41*x^2-61*x+30
5  endfunction
6  function y=df(x)
7      y=4*x^3-33*x^2+82*x-61
8  endfunction
9  while max(abs(df(a)),abs(df(b)))>10^-9 & df(a)<=0 & df(b)>=0
10     if -df(a)>=df(b) then c=a+0.01*(b-a)
11         else c=b-0.01*(b-a)
12     end
13     if df(c)>0 then b=c
14         else a=c
15     end
16 end
17 if max(abs(df(a)),abs(df(b)))<=10^-9 then
18     disp("minimum pour x valant "+string((a+b)/2))
19 end
```

1. Pour comprendre le programme, commençons par effectuer « à la main » la boucle « while », en reproduisant et complétant le tableau suivant. On suppose que l'on introduit dans le programme a = 4 et b = 5 et l'on peut s'aider du graphique.

	a	b	df(a)	df(b)	test while	c	df(c) > 0 ?
Itération 1	4	5	– 5	24	VRAI		
Itération 2							

2. Donner une interprétation graphique de chacune des conditions :
max(abs(df(a)),abs(df(b)))>10^-9 ; df(a)<=0 et df(b)>=0 apparaissant à la ligne 9.

3. À quoi correspond la condition -df(a)>=df(b) de la ligne 10 ?

4. Quel est le rôle des lignes 13 à 15 ?

C. Mise en œuvre de l'algorithme

Implanter le programme précédent dans Scilab.

1. Exécuter le programme pour a = 4 et b = 5. Quel est l'affichage ?

2. Exécuter le programme pour a = 0 et b = 5. Expliquer l'affichage.

3. Exécuter le programme pour a = 2 et b = 4. Expliquer l'absence d'affichage.

4. Justifier que l'on peut utiliser cet algorithme pour rechercher le maximum d'une fonction en remplaçant f par $-f$.

Algorithmique

Instruction conditionnelle « Si... alors... sinon... »

Structure

L'instruction conditionnelle « **Si... alors... sinon** » permet dans un programme d'effectuer un *traitement* ou un autre, selon qu'une *condition* est vraie ou fausse.

```
Si condition alors
    traitement 1
  sinon
    traitement 2
FinSi
```

Syntaxe

Texas Instruments	Casio	AlgoBox	Scilab
:If *condition* :Then :*traitement* 1 :Else :*traitement* 2 :End	If condition ↵ Then ↵ traitement 1 ↵ Else ↵ traitement 2 ↵ IfEnd	Ajouter SI...ALORS Cocher la case « Ajouter SINON » dans la boîte de dialogue	if *condition* then *traitement* else *traitement* end

Exemple

Afficher « PILE » si le générateur de nombres aléatoires fournit un nombre inférieur ou égal à 0,5 et « FACE » sinon.

Texas Instruments

```
PROGRAM:PILEFACE
:If NbrAléat≤0.5
:Then
:Disp "PILE"
:Else
:Disp "FACE"
:End
```

Casio

```
======PILEFACE======
If Ran# ≤0.5↵
Then ↵
"PILE"↵
Else ↵
"FACE"↵
IfEnd
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

AlgoBox

```
VARIABLES
DEBUT_ALGORITHME
  SI (random()<=0.5) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "PILE"
    FIN_SI
  SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "FACE"
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

Scilab

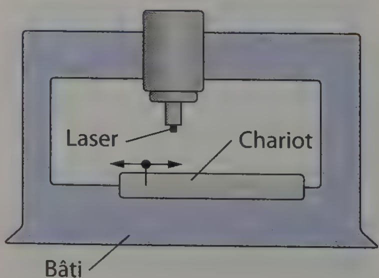
```
if rand() >= 0.5 then disp("PILE")
    else disp("FACE")
end
```

TP 3 Utiliser des primitives dans un mouvement uniformément accéléré ou uniformément retardé

LOGICIEL UTILISÉ
GeoGebra

Chariot pour découpage laser

Dans ce TP, pour faciliter l'usage de GeoGebra, la variable temps, exprimée en seconde, est notée x. Les distances sont exprimées en centimètre.



On étudie le déplacement du chariot d'une machine à découpage laser. Ce déplacement s'effectue en trois phases.

Durant la phase 1, s'étendant sur l'intervalle de temps $[0, 2]$, le mouvement du chariot est *uniformément accéléré* et le chariot passe d'une vitesse initiale nulle à une vitesse de 10 cm.s^{-1}.

Durant la phase 2, le chariot évolue à vitesse constante pendant l'intervalle de temps $[2, 10]$.

Durant la phase 3, s'étendant sur l'intervalle de temps $[10 ; 12{,}5]$, le mouvement du chariot est uniformément retardé et le chariot passe d'une vitesse de 10 cm.s^{-1} à une vitesse nulle.

On cherche à déterminer la distance parcourue par le chariot en fonction du temps.

A. Fonction vitesse

Durant chacune des trois phases du mouvement, l'accélération a du chariot est constante : $a > 0$ sur l'intervalle [0, 2] ; $a = 0$ sur l'intervalle [2, 10] et $a < 0$ sur l'intervalle [10 ; 12,5].

On admet que sur chacun de ces intervalles, la fonction v correspondant à la vitesse est une primitive de celle correspondant à l'accélération.

1. Montrer que si $x \in [0, 2]$, $v(x) = 5x$.

2. Montrer que si $x \in [10 ; 12{,}5]$, $v(x) = -4x + 50$.

B. Recherche de la distance parcourue à l'aide de GeoGebra

On admet que sur chacun des intervalles [0, 2] ; [2, 10] et [10 ; 12,5], la fonction donnant la distance parcourue en fonction du temps depuis l'instant $x = 0$, est une primitive de celle correspondant à la vitesse.

1. Dans un fichier GeoGebra, entrer dans la barre de saisie :

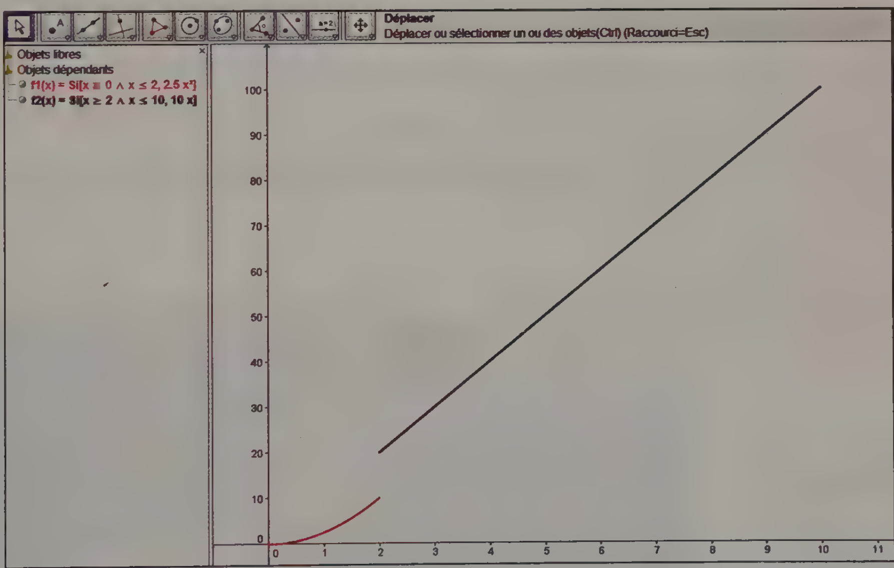
f1(x)=Si[x>=0∧x<=2,Intégrale[5*x]]

(le symbole ∧ signifie « et », il se trouve dans le menu déroulant en bas à droite ; « Intégrale » est un terme impropre, il s'agit d'une primitive).

Donner une expression de la fonction de la distance parcourue selon le temps sur l'intervalle [0, 2].

2. **a.** Entrer dans la barre de saisie : f2(x)=Si[x>=2∧x<=10,Intégrale[10]].

Qu'est-ce qui ne convient pas ?



b. Quelle est la primitive de la fonction $x \mapsto 10$ correspondant à l'expression de la fonction de la distance parcourue selon le temps sur l'intervalle [2, 10] ?

Compléter la représentation graphique sur GeoGebra.

3. Créer un curseur c allant de – 300 à 300 avec un incrément de 1.

Entrer dans la barre de saisie : f3(x)=Si[x>=10∧x<=12.5,Intégrale[-4*x+50]] puis entrer f3(x)+c.

Manipuler le curseur pour obtenir une expression de la fonction de la distance parcourue selon le temps sur l'intervalle [10 ; 12,5].

TP 4 Déterminer des primitives dans une situation technologique

Ce TP permet d'évaluer des capacités mathématiques développées grâce aux TICE.

LOGICIEL UTILISÉ
GeoGebra

Distance de freinage d'un TGV

Dans ce TP, pour faciliter l'usage de GeoGebra, la variable temps, exprimée en seconde, est notée x.

Un TGV roulant à 360 km/h freine brusquement.

1. Exprimer sa vitesse en m/s juste avant le freinage.

2. On désigne par a la fonction décélération (en m.s^{-2}) en fonction du temps x (en s) définie par $a(x) = -0{,}5x$.

On admet que la fonction v, correspondant à la vitesse (en m.s^{-1}) en fonction du temps, est une primitive de a.

a. Utiliser GeoGebra pour tracer une primitive de a (il suffit de saisir Intégrale[-0.5x]).

b. À l'aide du résultat de la question 1., représenter la fonction vitesse v en fonction du temps.

Appelez le professeur pour présenter votre démarche et votre réponse.

3. On désigne par d la fonction distance de freinage du TGV (en m) en fonction du temps ($d(x)$ est la distance parcourue par le TGV à l'instant x depuis le début du freinage). On admet que d est la primitive de v qui vérifie $d(0) = 0$.

Représenter la fonction d.

4. Exploiter le graphique et la fenêtre algèbre de GeoGebra, pour répondre aux questions suivantes.

a. Quelle est la distance de freinage pour $x = 6{,}3$ s ? Quelle est alors la vitesse du TGV ?

b. Quelle est la distance de freinage nécessaire à l'arrêt du TGV ?

Appelez le professeur pour présenter votre démarche et vos réponses.

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE	Exercices corrigés	Exercices non corrigés
Consolider les acquis concernant le nombre dérivé d'une fonction en un point	1	2 à 4
Consolider les acquis concernant le calcul d'un nombre dérivé	6, 9, 13, 15, 17, 18, 21, 22, 24, 27	5, 7, 8, 10 à 12, 14, 16, 19, 20, 23 25, 26, 28 à 31
Justifier par un calcul un résultat de dérivé donné	36	32 à 35, 37, 38
Calculer un nombre dérivé	39	40 à 43
Écrire une équation d'une tangente	44	45 à 48
Résoudre une équation trigonométrique	49, 50, 52	51, 53
Prendre des initiatives pour déterminer un extremum		54 à 58
Calculer la dérivée d'une fonction définie par $x \mapsto u^n(x)$	59 à 61, 65	62 à 64, 66, 67
Calculer des dérivées successives		68 et 69
Déterminer les primitives d'une fonction usuelle	70 à 74, 81, 82	75 à 80, 83 à 87
Déterminer les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto u'(x)u^n(x)$	88, 89, 93, 97	90 à 92 94 à 96, 98
Déterminer la primitive d'une fonction vérifiant une condition donnée	99, 101	100, 102
Étudier un mouvement uniformément accéléré ou retardé		
TICE Utiliser GeoGebra	103	
TICE Utiliser le tableur	103	106
TICE Utiliser Maxima	103	107

Les exercices 1 à 58 sont destinés à consolider les acquis de première STL.

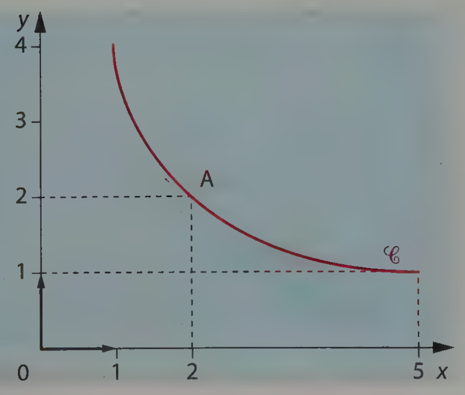
Tangente à la courbe représentative d'une fonction *f* et nombre dérivé

1. + Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé

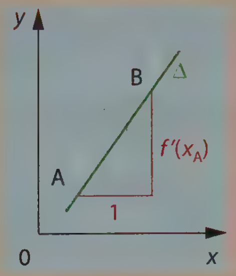
La figure donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $[1, 5]$.

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente T au point $A(2, 2)$ et que $f'(2) = -1$.

Reproduire la figure et construire la tangente T.



▶ **Rappel :** *à partir du point donné $A(x_A, y_A)$ où $y_A = f(x_A)$, on obtient un deuxième point B de la tangente Δ en ajoutant 1 à l'abscisse de A et $f'(x_A)$ à l'ordonnée de A : $x_B = x_A + 1$ et $y_B = y_A + f'(x_A)$.*



CORRIGÉ P. 335

2. + Déterminer un nombre dérivé à partir d'une tangente

Dans le plan muni du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, soit $\mathscr{C}$ la courbe représentatrice d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A(– 1, 3) passe par le point B(3, 5). Déterminer le nombre dérivé $f'(-1)$ de f en – 1.

3. + Déterminer des nombres dérivés à l'aide d'un graphique

Le plan est muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité 2 cm pour 1 sur chaque axe.

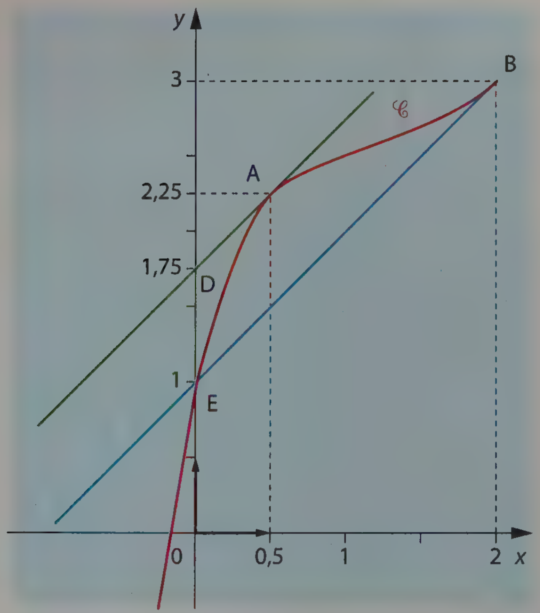
Soit f la fonction définie sur l'intervalle [– 0,25 ; 2] dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ sur la figure.

1. À l'aide des données de la figure, déterminer le coefficient directeur de chacune des droites (AD) et (EB).

2. Vérifier que les deux droites (AD) et (EB) sont parallèles.

▶ **Rappel :** *deux droites qui ont même coefficient directeur sont parallèles.*

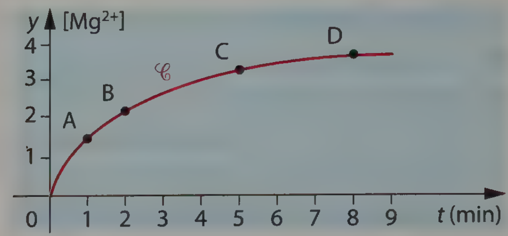
3. On admet que la droite (AD) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et que la droite (EB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B. En déduire $f'(0,5)$ et $f'(2)$.



4. ++++ Vitesse en chimie

Aucune connaissance n'est exigible sur ce thème en mathématiques.

Lors de l'attaque du magnésium par une solution d'acide chlorhydrique, il y a formation d'ions magnésium Mg^{2+}.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure représente la concentration molaire volumique $[Mg^{2+}]$ des ions magnésium (en centièmes de mole par litre) en fonction du temps t (en minutes).



Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0, 9] par $t \mapsto f(t)$ où $f(t)$ est la concentration molaire volumique $[Mg^{2+}]$ à l'instant t.
On note A, B, C, D les points de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant au tableau de valeurs.

t	1	2	5	8
$f(t)$	1,35	2,15	3,40	3,75

1. Reproduire la figure avec soin en prenant 2 cm comme unité sur chaque axe. Placer les points E, F, G, H de coordonnées respectives (3,5 ; 4,5), (0 ; 1), (0 ; 2), (2 ; 3,5).

2. Déterminer le coefficient directeur de chacune des droites (AB) et (CD).

3. On admet que les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A, B, C, D sont respectivement les droites (AE), (BF), (CG), (DH).

a) Tracer ces quatre droites.

b) Déterminer les nombres dérivés $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(5)$, $f'(8)$.

▶ **Un peu de chimie :** *en chimie, la vitesse moyenne de formation des ions Mg^{2+} entre les instants t_1 et t_2 est, par définition, le quotient $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$; c'est le coefficient directeur de la droite (M_1M_2) où M_1 et M_2 sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives t_1 et t_2.*
Vous avez calculé au 2. cette vitesse moyenne d'une part entre $t_1 = 1$ et $t_2 = 2$ et d'autre part, entre $t_1 = 5$ et $t_2 = 8$.
Le nombre dérivé $f'(t)$ est, par définition, la vitesse instantanée de formation des ions Mg^{2+} à l'instant t ; c'est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse t et d'ordonnée $f(t)$.
Par exemple, $f'(5)$ est la vitesse instantanée de formation des ions Mg^{2+} à l'instant $t = 5$.
Ces définitions et interprétations graphiques ne se limitent pas, en chimie, aux ions Mg^{2+}.

Calculer la dérivée de fonctions

En utilisant les règles de dérivation rappelées dans la rubrique ***Ce qu'il faut savoir*** de ce chapitre, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'ensemble donné où elle est définie et dérivable (exercices **5** à **31**).

▶ **Conseil :** *pour chacun des exercices, on peut vérifier le résultat avec un logiciel de calcul formel.*

5. + a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x - 2$.
b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x - 5$.

6. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$.
CORRIGÉ P. 336

7. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -16x^2 + 8x - 1$.

8. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{t^2}{3} + \dfrac{t}{4} - 2$.

9. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.
CORRIGÉ P. 336

10. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{1}{2}t^2$.

11. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}75x^3 - 0{,}01x^2 - 1$.

12. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(q) = -7q^3 + 0{,}01q^2 - 6q$.

13. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x + 1)(-2x + 1)$.
CORRIGÉ P. 336

14. + f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{7}{x}$.

15. + f définie sur $]-\infty, 0[$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.
CORRIGÉ P. 336

16. + f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

17. + f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -2x + 3 - \dfrac{1}{x}$.
CORRIGÉ P. 336

18. + f définie sur $]-\infty, -3[$ par $f(t) = \dfrac{-3}{2t+6}$.
CORRIGÉ P. 336

19. + f définie sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{3}{2x-1}$.

20. ++ f définie sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = 2x + 3 - \dfrac{3}{2x-1}$.

21. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-4}{x^2 - 3x + 4}$.
CORRIGÉ P. 336

▶ **Conseil :** *pour les exercices* **22** *à* **26**, *développer et réduire le numérateur de $f'(x)$.*

22. ++ f définie sur $]-\infty, 3[$ par $f(x) = \dfrac{3x-7}{-x+3}$.
CORRIGÉ P. 336

23. ++ f définie sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{4x+3}{2x-1}$.

24. ++ f définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-x^2+2x+3}{x-2}$.
CORRIGÉ P. 336

25. ++ f définie sur $]-1, 2[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^2-x-2}$.

26. ++ f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-2x+1}{3x^2-4x+1}$.

27. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin 2x$.
CORRIGÉ P. 336

28. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x$.

29. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 3x + \sin 3x$.

30. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

31. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos\left(3t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Justifier un résultat de dérivée donné

Justifier par un calcul détaillé l'expression de $f'(x)$ qui est donnée, obtenue par exemple avec un logiciel de calcul formel (exercices **32** à **38**).

32. + Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x + 25$,
$f'(x) = 3(x - 4)(x - 12)$.

33. + Pour tout t de $\mathbb{R}$,
$f(t) = -t^3 + 30t^2 - 153t$,
$f'(t) = 3(t - 3)(17 - t)$.

34. + Pour tout x de $[0, +\infty[$,
$f(x) = \dfrac{2x}{4x+3}$, $f'(x) = \dfrac{6}{(4x+3)^2}$.

35. + Pour tout t de $[0, +\infty[$,
$f(t) = \dfrac{4\,000}{0{,}5t+1}$, $f'(t) = \dfrac{-2\,000}{(0{,}5t+1)^2}$.

36. + Pour tout x de $]0, +\infty[$,
$f(x) = x + 60 + \dfrac{121}{x}$, $f'(x) = \dfrac{(x-11)(x+11)}{x^2}$.
CORRIGÉ P. 336

37. + Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $f'(x)=\dfrac{(-x+1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$.

38. + Pour tout x de $]1,+\infty[$,
$f(x)=\dfrac{x^2+x+7}{x-1}$, $f'(x)=\dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$.

Calculer un nombre dérivé

En utilisant les règles de dérivation, calculer le nombre dérivé de la fonction f en a, c'est-à-dire $f'(a)$ (exercices **39** à **43**).

39. + f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}x+2$, $a=3$.
CORRIGÉ P. 336

40. + f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=x^3-2x^2+x+1$, $a=-2$.

41. + f définie sur $]-4,+\infty[$ par
$f(x)=\dfrac{2x-3}{x+4}$, $a=0{,}5$.
Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} du résultat.

42. + f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=\dfrac{-x}{x^2+3}$, $a=1$.

43. ++ **Vitesse instantanée**
Sur un axe gradué en centimètres, l'abscisse d'un mobile est donnée en fonction du temps t, en secondes, par $x(t)=3t^2+2t+1$ où $0\leq t\leq 3$.

▶ **Un peu de physique :** *la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0 est le nombre dérivé en t_0 de la fonction $t\mapsto x(t)$.*

Quelle est la vitesse en cm.s^{-1} du mobile à l'instant $t=0$? $t=1$? $t=3$?

Problème de tangente

▶ **Rappel :** *une équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a est :*
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Écrire une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse a (exercices **44** à **48**).

44. + f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=2x^2-x-1$, $a=-1$.
CORRIGÉ P. 336

45. + $f:x\mapsto-3x^2+4x-1$, $a=-1$.

46. + $f:x\mapsto-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+2x$, $a=-2$.

47. + f définie sur $]-1,+\infty[$ par
$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $a=-\dfrac{1}{2}$.

48. + f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+1}$, $a=2$.

Équations trigonométriques

▶ **Rappel :**
- **Équation $\cos x=\cos a$.**
Les solutions de l'équation $\cos x=\cos a$ sont :
(1) $x=a+k2\pi$
(2) $x=-a+k2\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$).
- **Équation $\sin x=\sin a$.**
Les solutions de l'équation $\sin x=\sin a$ sont :
(1) $x=a+k2\pi$
(2) $x=\pi-a+k2\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$).

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante et représenter ses solutions par des points du cercle trigonométrique (exercices **49** à **53**).

49. + $\cos x=\cos\dfrac{5\pi}{6}$.
CORRIGÉ P. 336

50. + $\sin x=\sin\dfrac{\pi}{4}$.
CORRIGÉ P. 336

51. + a) $\cos x=\cos\dfrac{2\pi}{3}$.
b) $\sin x=\sin\dfrac{\pi}{3}$.

52. + $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}$.
CORRIGÉ P. 336

53. ++ a) $\cos 3x=\cos\dfrac{\pi}{3}$.
b) $\sin 3x=\sin\dfrac{5\pi}{6}$.
c) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}$.
d) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{5\pi}{4}$.

Exemples de recherche d'extremum

Avec prise d'initiatives : dans chacun des exercices **54** à **58**, on demande de déterminer un extremum à l'aide de la méthode de son choix (utilisation de la dérivation, d'une calculatrice, d'un tableur, d'un logiciel de calcul formel…).

Avec des fonctions polynômes (exercices 54 à 57)

54. +++ **Nouvelle antenne relais**

Suite à l'installation d'une nouvelle antenne relais dans leur ville, les habitants d'un quartier, résidant à une distance comprise entre 70 mètres et 160 mètres de cette antenne, demandent une étude sur l'exposition aux champs électromagnétiques. Ils font procéder à des mesures du champ électromagnétique généré par l'antenne.

On désigne par $f(x)$ le « champ électromagnétique », exprimé en millivolts par mètres (m.V.m^{-1}), mesuré en un point situé à la distance x de l'antenne, mesurée en mètres.

On admet que, pour tout x de [70, 160],

$f(x) = -0{,}25x^2 + 60x - 2\,775$.

1. Déterminer dans quel intervalle varie le champ électromagnétique pour les habitants de ce quartier.

2. Les spécialistes recommandent une exposition inférieure à 600 m.V.m^{-1}. Déterminer à quelles distances ce seuil est respecté.

55. +++ **Prolifération de micro-organismes**

On introduit une substance S dans un liquide contenant un certain type de micro-organismes afin d'en stopper la prolifération.

On suppose que le nombre (en millions) de micro-organismes présents au bout du temps t (en heures) écoulé depuis l'introduction de la substance S est donné par l'expression :

$f(t) = -t^2 + 6t + 7$, avec $0 \leq t \leq 7$.

1. Quel est le nombre de micro-organismes au bout d'une heure ? au bout d'une heure et trente minutes ?

2. Au bout de combien de temps la population est-elle maximale ? Quelle est cette population maximale ?

3. Déterminer durant combien de temps la population est supérieure ou égale à 12 millions.

56. +++ **Épidémie**

À la suite d'une épidémie dans une région, on a constaté que le nombre de personnes malades t jours après l'apparition des premiers cas est donné par :

$f(t) = 45\,t^2 - t^3$, pour t appartenant à l'intervalle [0, 45].

1. Déterminer le jour où le nombre de personnes malades est maximal durant cette période de 45 jours et préciser le nombre de personnes malades ce jour-là.

2. Déterminer la période pendant laquelle le nombre de personnes malades est supérieur ou égal à 10 000.

57. +++ **Évolution d'une épidémie**

Pendant une épidémie observée sur une période de onze jours, un institut de veille sanitaire a modélisé le nombre de personnes malades. La durée, écoulée à partir du début de la période, exprimée en jours, est notée t. Le nombre de cas en fonction de la durée t est donné en milliers, par la fonction f de la variable réelle t définie et dérivable sur l'intervalle [0, 11], dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée en annexe.

A. *Étude graphique*

Pour cette partie, on se référera à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

1. On considère que la situation est grave lorsque le nombre de cas est d'au moins 150 000 malades. Pendant combien de jours complets cela arrive-t-il ?

2. La droite (OA) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, où A est le point de coordonnées (10 ; 112,5). Déterminer $f'(0)$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Le nombre $f'(t)$ représente la vitesse d'évolution de la maladie, t jours après l'apparition des premiers cas.

a) Déterminer graphiquement le nombre maximal de malades sur la période des 11 jours observés et le moment où il est atteint.

Que peut-on dire alors de la vitesse d'évolution de la maladie ?

b) Déterminer graphiquement à quel moment de l'épidémie la maladie progresse le plus.

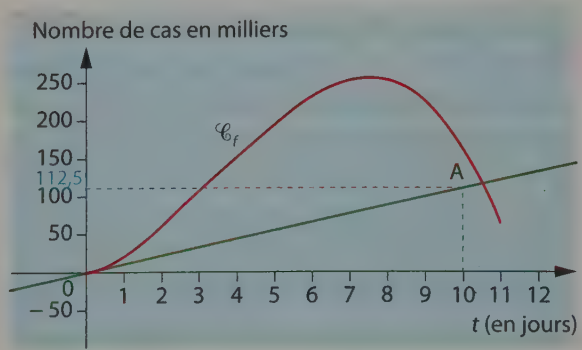
B. *Étude théorique*

La fonction f de la partie **A.** est définie sur [0, 11] par :

$$f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 + \frac{45}{4}t.$$

Retrouver par le calcul les résultats de la question **A.3.**

Annexe



Exercices

Avec une fonctions rationnelle (exercice 58)

58. +++ Problème de dopage

Un sportif a absorbé un produit dopant.

On note $f(t)$ le taux de produit dopant, en $\mu g.L^{-1}$, présent dans le sang de ce sportif en fonction du temps t, en heures, écoulé depuis l'absorption durant les douze heures qui suivent cette absorption. On admet que, pour tout t de $[0, 12]$, $f(t)=\dfrac{2t^2+10t+2}{t^2+1}$.

1. Déterminer par le calcul le taux de produit dopant présent dans le sang du sportif au bout de 2 heures et 30 minutes. *Arrondir à 10^{-1}.*

2. Au bout de combien de temps le taux de produit dopant dans le sang du sportif est-il maximal ?

3. Les règlements sportifs interdisent l'usage de ce produit dopant. Le taux maximum autorisé est de 3 µg/L.

Déterminer au bout de combien de temps le taux de produit dopant dans le sang de ce sportif redescend en dessous de 3 µg/L.

Dérivées des fonctions de la forme $x \mapsto u^n(x)$

En utilisant les règles de dérivation, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'ensemble donné où elle est définie et dérivable (exercices 59 à 67).

▶ **Conseil :** *pour chacun des exercices, on peut vérifier le résultat avec une calculatrice équipée d'un logiciel de calcul formel.*

59. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-2x + 3)^2$.

CORRIGÉ P. 336

60. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x^2 + 1)^2$.

CORRIGÉ P. 336

61. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)^2(2x + 5)$.

Mettre $f'(x)$ sous forme de produit de deux facteurs du premier degré.

CORRIGÉ P. 336

62. +

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)^2$.

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-3x + 7)^2$.

63. +

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-3x + 1)^3$.

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + x + 1)^2$.

64. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 3)^2(x - 1)$. Mettre $f'(x)$ sous forme de produit de deux facteurs du premier degré.

65. +

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin^2 2t$.

▶ *On peut se reporter à l'exercice résolu **1** du cours.*

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos^2 2t$.

CORRIGÉ P. 336

66. +

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x$.

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2 x$.

67. +

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\sin^2\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\cos^2\left(3t+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Dérivées successives

68. + Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=-\dfrac{1}{3}t^3-2t^2+t-1$.

Déterminer les dérivées successives f', f'', f''' de f.

69. + Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$. Déterminer les dérivées successives f', f'', f''' de f.

Primitives

Déterminer les primitives d'une fonction usuelle

En utilisant les résultats du cours, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I (exercices 70 à 87).

▶ **Conseil :** *pour chacun des exercices suivants, on peut vérifier le résultat avec un logiciel de calcul formel.*

70. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 4$.

CORRIGÉ P. 337

71. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

CORRIGÉ P. 337

72. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2x^2+x+\dfrac{1}{3}$.

CORRIGÉ P. 337

73. + f définie sur $I =]-\infty, 0[$ par $f(x)=6x^2-\dfrac{4}{x^2}$.

CORRIGÉ P. 337

74. ++ f définie sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

CORRIGÉ P. 337

75. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$.

76. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - \dfrac{1}{2}x + 2$.

▶ **Conseil :** *on peut se reporter à l'exercice résolu* **2** *du cours.*

77. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -5t^3 + 3t^2 + 8$.

78. + f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x + 3 - \dfrac{4}{x^2}$.

▶ **Conseil :** *on peut se reporter à l'exercice résolu* **3** *du cours.*

79. + f définie sur $\mathrm{I} =]-\infty, 0[$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$.

80. + f définie sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$.

▶ **Conseil :** *utiliser des exposants négatifs.*

81. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin 3t$.

CORRIGÉ P. 337

82. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos\left(2t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

CORRIGÉ P. 337

83. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -3\sin\left(3t + \dfrac{\pi}{12}\right)$.

84. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

85. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin\left(3t - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

86. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{8}\right)$.

87. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -4\sin\left(3t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Primitives de fonctions de la forme $u'u^n$

Mettre $f(x)$ sous la forme $k \times u'(x)[u(x)]^n$, où k est une constante réelle, et déterminer, à l'aide d'un résultat du cours, les primitives de f sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I (exercices **88** à **98**).

▶ **Conseil :** *pour chacun des exercices suivants, on peut vérifier le résultat avec un logiciel de calcul formel.*

88. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)^3$.

CORRIGÉ P. 337

89. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 3)$.

CORRIGÉ P. 337

90. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)^2$.

91. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(2x - 3)^3$.

92. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(x^2 + 1)^2$.

▶ **Conseil :** *pour les exercices* **93** *à* **96**, *on peut se reporter à l'exercice résolu* **3** *du cours.*

93. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x}{(x^2+1)^2}$.

CORRIGÉ P. 337

94. + f définie sur $]-\infty, 3[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{(x-3)^2}$.

95. + f définie sur $\mathrm{I} = \left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{2}{(3x-2)^2}$.

96. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

97. + f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x \sin^2 x$.

CORRIGÉ P. 337

98. ++ **a)** f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x \cos^2 x$.

b) f définie sur $\mathrm{I} = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Déterminer la primitive d'une fonction vérifiant une condition donnée

99. + Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

1. Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire la primitive F de f vérifiant la condition $F(0) = 0$.

CORRIGÉ P. 337

100. ++ **Trouver la primitive F de la fonction f vérifiant la condition donnée**

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-3x + 1)^2$ et $F(1) = 0$.

2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3\cos\left(3t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ et $F(0) = 0$.

3. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin\left(2t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ et $F(0) = 0$.

101. ++ Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ telle que $F(2) = 2$.

CORRIGÉ P. 338

102. ++ Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-8x}{(x-2)^2}$.

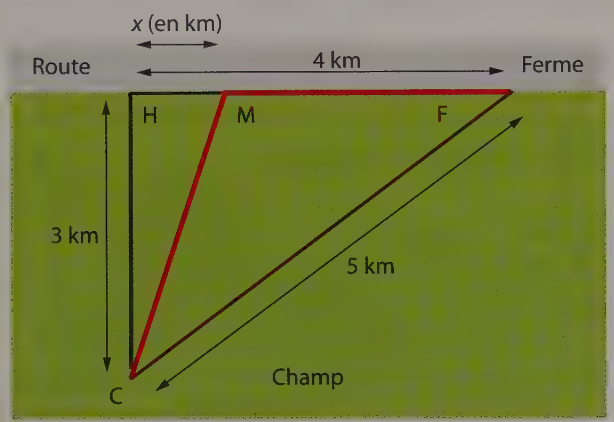
1. Vérifier que, pour tout réel x de $]2, +\infty[$,
$f(x)=2-\dfrac{8}{(x-2)^2}$.

2. En déduire la primitive F de f sur $]2, +\infty[$ telle que $F(3) = 1$.

Exemples d'utilisation de logiciels

103. ++++ **Économie de carburant avec GeoGebra (prolongement : tableur et Maxima)** TICE

Un agriculteur spécialisé dans l'agriculture biologique doit se rendre du point C de son champ à sa ferme F. Il se trouve à 3 kilomètres de la route qui mène à la ferme, et à 5 kilomètres de cette dernière, comme indiqué sur le schéma.



On considère que :
– les points H, M et F sont alignés sur le bord de la route ;
– CH = 3 ; CF = 5 ;
– la droite (CH) est perpendiculaire à la droite (HF).

On note x la distance HM. Le fermier cherche à économiser sa consommation de carburant. Il sait que sa consommation est :
– d'un litre de carburant par kilomètre parcouru sur la route ;
– de k litres de carburant par kilomètre parcouru à travers champs (le facteur k, compris entre 1 et 2, dépend de l'état du terrain : plus le terrain est accidenté plus k est grand).

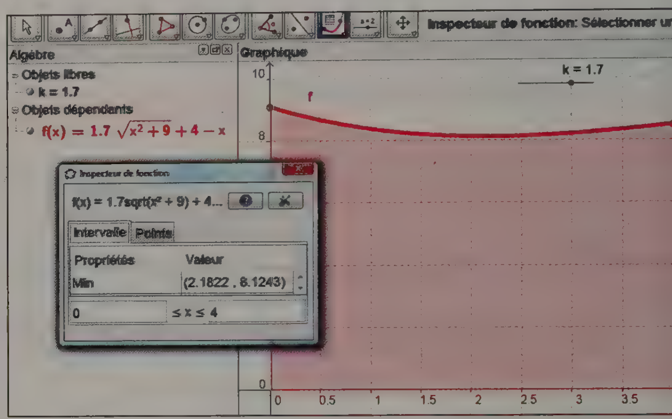
1. On suppose dans cette question que $k = 2$, c'est-à-dire que la consommation à travers champs est le double de celle sur la route.

a) Montrer que la fonction « consommation de carburant », notée f_2, est définie pour tout nombre réel x de $[0, 4]$ par : $f_2(x) = 2\sqrt{x^2+9}+4-x$.

b) Calculer $f_2(4)$ et interpréter cette valeur dans le cadre du problème.

2. On se place dans le cas général et on définit, pour tout réel k de $[1, 2]$, la fonction « consommation de carburant » par : pour tout x de $[0, 4]$, $f_k(x) = k\sqrt{x^2+9}+4-x$.

a) À l'aide de GeoGebra, créer un curseur permettant de réaliser les représentations graphiques des fonctions f_k.



b) Exprimer, en fonction de k, la consommation de carburant lorsque l'agriculteur coupe directement à travers champs pour rejoindre sa ferme.

c) Le fermier, qui a un grand sens pratique, pense que si k est inférieur à un certain seuil k_0, il n'est pas utile de rejoindre la route et que couper à travers champs n'est pas plus cher.
Observer avec GeoGebra, expliquer et conjecturer la valeur approchée arrondie à 0,1 de k_0.

d) Prolongement 1 : affiner la conjecture en utilisant un tableur.

e) Prolongement 2 : confirmer la valeur exacte de k_0 à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

CORRIGÉ P. 338

Exercices
Pour le baccalauréat

Les exercices pour le baccalauréat sont des exercices qui pourraient figurer dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat STL-Biotechnologies.

104. ++ Un QCM

Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé; aucune justification n'est demandée.

Dans chaque question, f est une fonction dérivable sur I et F est une primitive de f.

	f est définie sur I par :		Alors une primitive F de f est définie par :		
			a	b	c
1	$f(x) = -2x + 1$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -2$	$F(x) = -x^2 + x$	$F(x) = -x^2 + x + 1$
2	$f(x) = -x^2 - 2x + 1$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2$	$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$	$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$
3	$f(x) = x - \frac{1}{x^2}$	$I =]0, +\infty[$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$	$F(x) = 1 + \frac{2}{x^3}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$
4	$f(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2}$	$I = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$	$F(x) = \frac{1}{2x-1}$	$F(x) = -\frac{1}{2(2x-1)}$	$F(x) = \frac{1}{2(2x-1)}$
5	$f(t) = 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$	$I = \mathbb{R}$	$F(t) = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$	$F(t) = -\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$	$F(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$
6	$f(x) = \cos 2x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\sin 2x$	$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$	$F(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x$
7	$f(x) = \sin x + \sin 2x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \cos x + \cos 2x$	$F(x) = -\cos x - \cos 2x$	$F(x) = -\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$

CORRIGÉ P. 338

105. +++ Lecture graphique, détermination d'une fonction et primitive

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

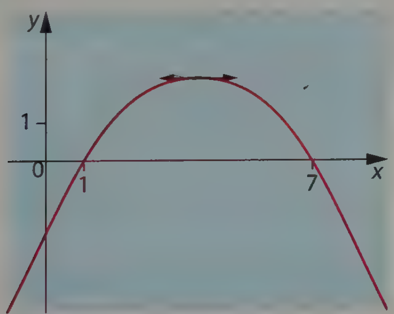


Figure 1

1. Lecture graphique

a) Lire sur le graphique les valeurs entières de $f(1)$, $f(3)$, et $f'(4)$.

b) Déterminer le signe de $f'(2)$ et celui de $f(2)$.

2. Détermination de la fonction

On admet que f est une fonction polynôme du second degré donc que, pour tout nombre réel x,

$f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels.

En utilisant les résultats de la première question, déterminer les nombres réels a, b et c.

3. Primitive

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Parmi les courbes représentatives des trois fonctions F_1, F_2 et F_3 données sur les figures 2, 3, 4, ci-dessous, une seule est la courbe représentative d'une primitive de la fonction f. Laquelle ? Expliquer le rejet des deux autres fonctions.

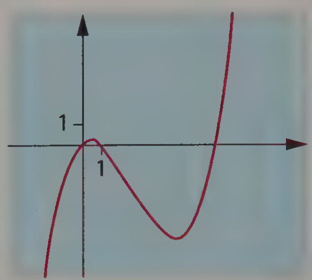


Figure 2

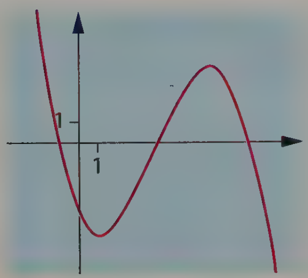


Figure 3

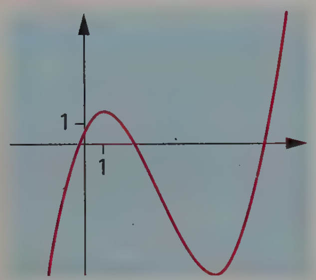


Figure 4

106. +++ Avec le tableur : valeur prédictive positive

TICE

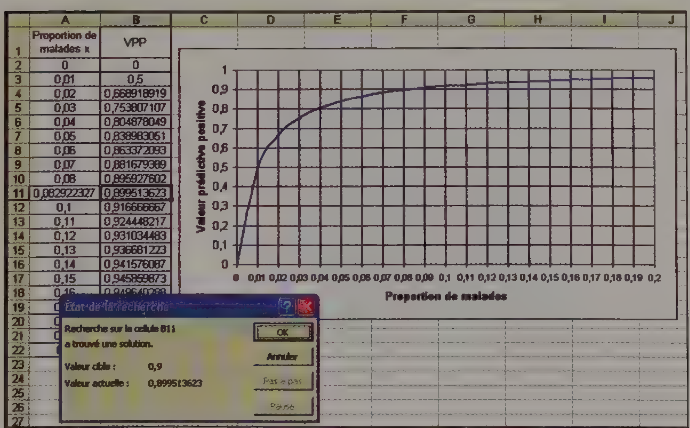
Dans une population donnée, la proportion de personnes atteintes de la grippe est notée x avec $0 \leq x \leq 1$.

On dispose d'un test de dépistage dont le fabricant affirme que la fiabilité est de 99 % (probabilité correspondant au fait d'avoir un test positif lorsqu'on a la grippe ou d'avoir un test négatif lorsqu'on n'a pas la grippe).

Dans ces conditions, la valeur prédictive positive du test, c'est-à-dire la probabilité d'avoir la grippe lorsque le test est positif, est donnée par la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$f(x) = \dfrac{99x}{98x+1}$ où x est la proportion de personnes atteintes par la grippe dans la population.

1. Pour tabuler et représenter graphiquement la fonction f sur le tableur, quelle formule a-t-on entrée en B2, puis recopiée vers le bas ?



	A	B
1	Proportion de malades x	VPP
2	0	0
3	0,01	0,5
4	0,02	0,668918919
5	0,03	0,753807107
6	0,04	0,804878049
7	0,05	0,838983051
8	0,06	0,863372093
9	0,07	0,881679389
10	0,08	0,895927602
11	0,082922327	0,899513623
12	0,1	0,916666667
13	0,11	0,924448217
14	0,12	0,931034483
15	0,13	0,936681223
16	0,14	0,941576087
17	0,15	0,945859873
18	0,16	0,9496402[illegible]

2. Quel calcul, apparaissant sur le tableur, justifie l'affirmation suivante : « si 1 % de la population est malade, un individu ayant un test positif n'a qu'une chance sur deux d'avoir la grippe » ?

3. On recherche la proportion x de malades dans la population, à partir de laquelle la valeur prédictive positive du test, c'est-à-dire $f(x)$, dépasse 90 %. L'utilisation de l'outil valeur cible du tableur fournit comme réponse en cellule A11, x ≈ 0,083.

Résoudre l'équation $\dfrac{99x}{98x+1} = 0{,}9$ et comparer la solution obtenue avec la réponse fournie par le tableur.

4. L'expression de la fonction dérivée de f sur $[0, 1]$ est $f'(x) = \dfrac{99}{(98x+1)^2}$.

Calculer $f'(0{,}01)$ et $f'(0{,}09)$ (arrondir les résultats à l'unité).

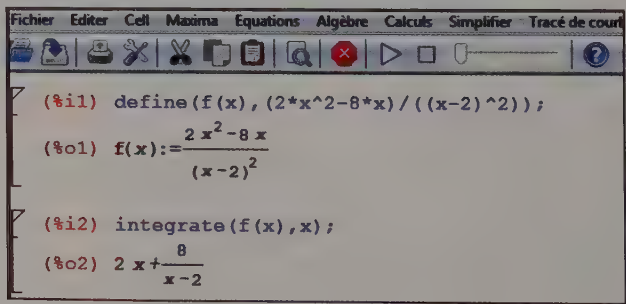
Quelle interprétation graphique peut-on donner ?

107. +++ Primitive avec Maxima

TICE

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x}{(x-2)^2}$.

On utilise un logiciel de calcul formel pour rechercher une primitive de f sur $]2, +\infty[$.



1. Vérifier que l'expression du dernier affichage fournit une primitive de f.

2. En déduire la primitive F de f sur $]2, +\infty[$ telle que $F(3) = 1$.

CHAPITRE 4

Fonctions logarithmes

EN CHIMIE, EN ACOUSTIQUE, EN INFORMATIQUE, DANS LE TRAITEMENT DE L'INFORMATION TRANSPORTÉE PAR UN SIGNAL, POUR L'INTENSITÉ DE TURBULENCE DU VENT... ON UTILISE DES FORMULES OÙ INTERVIENT UN LOGARITHME.

CAPACITÉS

- Connaître les variations, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien.
- Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.
- Résoudre une inéquation d'inconnue n, entier naturel, de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$ avec q et a deux réels strictement positifs.

ACTIVITÉS *d'approche*

ACTIVITÉ 1 Transformer un produit en une somme

Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction définie et dérivable sur $I =]0, +\infty[$, transformant un produit en une somme, c'est-à-dire telle que pour tout a de I, pour tout b de I, $f(ab) = f(a) + f(b)$. (1)

(Il existe au moins une fonction qui convient : la fonction nulle $x \mapsto 0$. Il en existe peut-être d'autres…)

1° En écrivant la relation (1) dans le cas particulier où $b = 1$, déterminer $f(1)$.

2° Soit a un nombre réel fixé quelconque dans I.

D'après la relation (1), pour tout x de I, $f(ax) = f(a) + f(x)$. (2)

Soit $g : \underset{I \to \mathbb{R}}{x \mapsto g(x) = f(ax)}$ et soit $h : \underset{I \to \mathbb{R}}{x \mapsto h(x) = f(a) + f(x)}$.

Calculer de façon indépendante $g'(x)$ et $h'(x)$ à l'aide de la fonction dérivée f' de f. Pour $g'(x)$ voir la remarque 2 du paragraphe **1A.** du chapitre 3. (On pourra commencer par traiter le cas particulier où $a = 2$ avant d'aborder le cas général où la valeur de a n'est pas donnée.)

a) Déduire de la relation (2) et de la question **a)** que, pour tout x de I, $f'(ax) = \frac{1}{a} f'(x)$. (3)

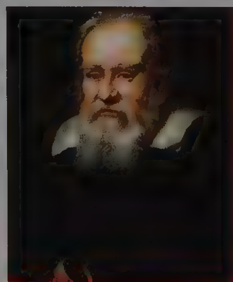
b) En écrivant la relation (3) dans le cas particulier où $x = 1$, démontrer que, pour tout $a > 0$, $f'(a) = \frac{k}{a}$ et préciser la valeur de k, constante indépendante de a.

Quelques mots d'histoire

Dans ce chapitre, nous allons introduire et étudier de nouvelles fonctions appelées **fonctions logarithmes**, la première étant la **fonction logarithme népérien** ainsi nommée en hommage à un mathématicien écossais, John Neper ou Napier (1550-1617). À cette époque, les calculs ne se faisaient qu'à la main, ce qui rendait les multiplications plus pénibles à effectuer que les additions. John Neper a découvert un procédé permettant d'obtenir le résultat d'une multiplication à l'aide d'une addition et de tables de nombres qu'il a inventés. Les **logarithmes** étaient nés.
Cette invention était particulièrement utile au moment où Galilée, physicien et astronome italien (1564-1642) créait une lunette astronomique beaucoup plus performante, grossissant 9 fois (en 1609), puis 20 fois (en 1610) sans déformer les objets : les mesures astronomiques effectuées avec ces nouvelles lunettes étaient beaucoup plus précises et conduisaient à des nombres comportant davantage de chiffres significatifs. L'utilisation de ces mesures a contribué à l'essor de la navigation maritime à cette époque.

Aujourd'hui en acoustique, en informatique, en chimie, pour l'intensité de turbulence du vent prise en compte sur les sites d'éoliennes et pour la propulsion des grands voiliers de compétition… on utilise des formules où intervient un logarithme.
C'est aussi le cas en informatique, dans le traitement de l'information transportée par un signal.

John Neper ou Napier (1550-1617)



Galileo Galilei dit Galilée (1564-1642)

1 Fonction logarithme népérien

A. Définition

Les fonctions $x \mapsto \frac{k}{x}$ et $a \mapsto \frac{k}{a}$ définies sur $]0, +\infty[$ sont les mêmes.

Dans l'activité d'approche 1, nous avons démontré que si une fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ transforme un produit en une somme, alors d'une part $f(1) = 0$ et, d'autre part, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{k}{x}$ où k est une constante.

Le passage de f' à f s'effectue en cherchant une primitive de f', par définition d'une primitive : voir le paragraphe 2 A. du chapitre 3.

Voir le paragraphe 2 C. du chapitre 3.

Or dans le tableau donnant les primitives des fonctions de référence, le cas de la fonction $x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$ n'est pas traité.

Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$ admet des primitives sur cet intervalle.

Voir les théorèmes du paragraphe 2 B. du chapitre 3.

Nous savons que toutes les primitives de cette fonction sur cet intervalle diffèrent d'une constante et qu'il existe une seule primitive prenant une valeur donnée pour une valeur fixée de la variable.

En particulier, il existe une seule primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 pour $x = 1$: cette primitive est, par définition, la **fonction logarithme népérien**.

DÉFINITION

La fonction ***logarithme népérien*** est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.

Notation

$$\ln : \begin{cases} x \mapsto \ln x \\ ]0, +\infty[\to \mathbb{R}. \end{cases}$$

$\ln x$ se lit « logarithme népérien de x » ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, « logarithme de x ».

Remarque

La fonction ln est une fonction nouvelle : ce n'est ni une fonction polynôme, ni une fonction rationnelle, ni une fonction circulaire, ... mais d'après sa définition :

La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout x de $]0, +\infty[$, $\ln' x = \frac{1}{x}$.

Votre calculatrice affiche un message d'erreur si vous cherchez la valeur de $\ln x$ avec x négatif.
Les calculatrices possédant une touche $\boxed{\ln}$ ne se sont généralisées qu'aux environs de 1970. Avant, les valeurs de $\ln x$ étaient lues sur des tables.
Votre calculatrice a aussi une touche $\boxed{\log}$ correspondant à une autre fonction logarithme. Voir le paragraphe **3A.** de ce chapitre.

Exemples de valeurs de ln x

$\ln 1 = 0$ par définition de la fonction ln.

Pour tout x de $]0, +\infty[$ **une valeur approchée de ln x est accessible par la touche $\boxed{\ln}$ d'une calculatrice.**

Nous obtenons ainsi :

$\ln 2 \approx 0{,}693\,147\,180\,6$, valeur arrondie à 10^{-10},

$\ln 3 \approx 1{,}098\,612\,289$, valeur arrondie à 10^{-9},

$\ln 4 \approx 1{,}386\,294\,361$, valeur arrondie à 10^{-9},

$\ln 6 \approx 1{,}791\,759\,469$, valeur arrondie à 10^{-9},

$\ln \frac{1}{2} \approx -0{,}693\,147\,180\,6$, valeur arrondie à 10^{-10}.

B. Relation fonctionnelle

Voir ci-dessus. $6 = 2 \times 3$. $4 = 2 \times 2$.

En observant les valeurs approchées de ln 2, ln 3 et ln 6, nous constatons que $\ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$ aux erreurs d'arrondis près. De même $\ln(2 \times 2) = \ln 2 + \ln 2$.

$a > 0$ et $b > 0$.

Ainsi dans deux cas particuliers nous constatons que le **logarithme d'un produit ab est la somme des logarithmes de a et de b.**

Démontrons ce résultat dans le cas général.

Logarithme d'un produit

Par exemple, $a = 3$; alors $g(x) = \ln 3x$.

Voir la remarque 2 du paragraphe **1A.** du chapitre 3.

Pour $g(x) = \ln(3x)$, $g'(x) = 3\frac{1}{3x} = \frac{1}{x}$.

Soit a un nombre réel fixé quelconque dans $]0, +\infty[$.

Soit g la fonction définie sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(ax)$.

D'après le théorème de dérivation de $x \mapsto f(ax + b)$, dans le cas où $f = \ln$ et $b = 0$, g est dérivable sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ et pour tout x de I, $g'(x) = a[\ln'(ax)]$.

Donc $g'(x) = a\frac{1}{ax}$ par définition de la fonction ln.

Donc $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \ln(ax)$ ont la même dérivée sur l'intervalle I ; donc la fonction $x \mapsto \ln(ax) - \ln x$, qui a une dérivée nulle, est constante sur I. Il existe donc un nombre réel C tel que, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\ln(ax) - \ln x = C$. Nous obtenons la valeur de la constante C en écrivant que l'égalité précédente est vraie en particulier pour $x = 1$: $\ln a - \ln 1 = C$, ce qui est équivalent à $C = \ln a$ puisque $\ln 1 = 0$.

Nous obtenons donc $\ln(ax) = \ln x + \ln a$, d'où le résultat :

THÉORÈME

Pour tous nombres réels **strictement positifs** a et b, $\mathbf{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$.

Avant l'apparition des calculatrices, on se servait de cette formule et de tables de logarithmes pour obtenir le résultat des multiplications de nombres écrits avec « beaucoup » de chiffres : on transformait ces multiplications en additions.

Nous allons tirer plusieurs conséquences de cette **propriété fondamentale de la fonction ln.**

Logarithme d'un inverse

En observant les valeurs approchées de ln 2 et $\ln \frac{1}{2}$, nous constatons que $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$: **le logarithme de l'inverse de 2 est l'opposé du logarithme de 2.**

Démontrons ce résultat dans le cas général.

$a > 0$ donc $\frac{1}{a} > 0$.

$a \times \frac{1}{a} = 1$.

En remplaçant b par $\frac{1}{a}$ dans le théorème précédent, nous obtenons : pour tout $a > 0$, $\ln 1 = \ln a + \ln \frac{1}{a}$.

Or $\ln 1 = 0$; donc $0 = \ln a + \ln \frac{1}{a}$.

THÉORÈME

Pour tout nombre réel **strictement positif** a, **ln** $\boldsymbol{\frac{1}{a} = -\ln a}$.

Logarithme d'un quotient

$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

Soit a et b des nombres réels strictement positifs.

$\ln \frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right)$, donc $\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b}$ d'après le théorème sur le logarithme d'un produit.

Donc $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ puisque $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$ d'après le théorème ci-dessus.

THÉORÈME

Pour tous nombres réels **strictement positifs** a et b, **ln** $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \ln a - \ln b}$.

Logarithme d'une puissance

$a^2 = a \times a$.

$a^3 = a^2 \times a$.

$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

$n < 0$ donc $-n > 0$.

Soit a un nombre réel strictement positif.

$\ln a^2 = \ln(a \times a) = \ln a + \ln a = 2\ln a$ d'après le théorème sur le logarithme d'un produit.

De même $\ln a^3 = \ln(a^2 \times a) = \ln a^2 + \ln a = 2 \ln a + \ln a = 3 \ln a$.

Et ainsi de suite : $\ln a^4 = 4 \ln a$, $\ln a^5 = 5 \ln a$…

Nous admettons que, pour tout nombre entier naturel n, $\ln a^n = n \ln a$.

Ce résultat est encore valable pour $n = 0$ puisque $a^0 = 1$, donc :

$\ln a^0 = \ln 1 = 0$ et $0 \ln a = 0$.

Montrons que ce résultat est encore vrai lorsque n est un nombre entier négatif.

En effet, nous avons dans ce cas, $\ln a^n = \ln \frac{1}{a^{-n}}$.

Or $\ln \frac{1}{a^{-n}} = -\ln a^{-n}$ d'après le résultat sur le logarithme d'un inverse.

Donc $\ln a^n = -\ln a^{-n}$ où $(-n)$ est un nombre entier naturel.

Donc $\ln a^n = -(-n) \ln a$ d'après ce qui vient d'être démontré lorsque l'exposant est positif.

Donc $\ln a^n = n \ln a$ dans le cas où n est un nombre négatif.

En définitive :

THÉORÈME

Pour tout nombre réel a **strictement positif**, pour tout nombre **entier relatif** n, $\boldsymbol{\ln a^n = n \ln a}$.

Observez avec votre calculatrice que $\ln 8 = 3 \ln 2$.

Logarithme d'une racine carrée

Soit a un nombre réel strictement positif.

$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$ donc $\ln(\sqrt{a}\times\sqrt{a})=\ln a$.

Or $\ln(\sqrt{a}\times\sqrt{a})=\ln(\sqrt{a})+\ln(\sqrt{a})$ d'après le théorème sur le logarithme d'un produit.

Donc $2\ln(\sqrt{a})=\ln a$.

En notant $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$, ce résultat s'écrit $\ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln a$.
Observez sur un exemple, avec votre calculatrice, que $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$.

THÉORÈME

Pour tout nombre réel a **strictement positif,** $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$.

C. Étude des variations et courbe représentative de la fonction logarithme népérien

Sens de variation, signe

Par définition de la fonction logarithme népérien, la fonction ln est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}>0$.

La dérivée est strictement positive sur cet intervalle.

Nous en déduisons que la fonction **ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.**

Son tableau de variation est donc :

x	0		1		$+\infty$
Variations de ln		↗	0	↗	

ln 1 = 0. La double barre traduit le fait que ln 0 n'est pas défini.

Nous en déduisons immédiatement le signe de $\ln(x)$ quand x varie dans $]0,+\infty[$:

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Pour tout x de $]1,+\infty[$, $\ln x>0$.
Pour tout x de $]0,1[$, $\ln x<0$.

Plus généralement on déduit du sens de variation de la fonction ln les équivalences suivantes :

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Pour tous nombres réels, a, b **strictement positifs** :
- $\ln a=\ln b$ si et seulement si $a=b$;
- $\ln a\leq\ln b$ si et seulement si $a\leq b$;
- $\ln a<\ln b$ si et seulement si $a<b$.

Ces résultats sont utiles en particulier pour résoudre certaines équations ou inéquations comportant des logarithmes népériens (voir les exercices corrigés).

Limite de ln x en $+\infty$

Observons, à l'aide d'une calculatrice, les valeurs prises par ln x pour des grandes valeurs de x :

Ce sont des valeurs approchées arrondies au centième.

Tableau 1

x	10	1 000	10^6	10^9
$\ln x$	2,30	6,91	13,82	20,72

La nouveauté est l'adjectif « lentement » car nous savons que ln est une fonction strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Nous constatons que ln x augmente « lentement » quand x augmente : pour $x = 1$ milliard, ln x est encore voisin de 20.

On démontre que :

p est un nombre entier naturel.

10^p étant choisi aussi grand que l'on veut, ln x est supérieur à 10^p dès que x est assez grand.

Cette propriété s'écrit :

CE QU'IL FAUT SAVOIR

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Nous préciserons le comportement de ln x pour les grandes valeurs de x à la fin de ce paragraphe **C.**.

Limite de ln *x* en 0

Ce sont des valeurs approchées arrondies au centième.

Observons, à l'aide d'une calculatrice, les valeurs prises par ln x pour des valeurs de x proches de 0 :

Tableau 2

x	0,1	0,001	10^{-6}	10^{-9}
$\ln x$	– 2,30	– 6,91	– 13,82	– 20,72

En comparant les contenus des tableaux 1 et 2, nous observons que :

- les valeurs de x sont inverses : $0{,}1 = \frac{1}{10}$; $0{,}001 = \frac{1}{1000}$; …
- les valeurs de ln x sont opposées.

Ce résultat est général car $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ pour tout $a > 0$. Nous en déduisons le résultat suivant dont l'interprétation graphique est donnée en remarque.

CE QU'IL FAUT SAVOIR

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty.$$

Remarque

La courbe représentative de la fonction ln admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

Voir la rubrique ***Ce qu'il faut savoir*** du chapitre 2.

Tableau de variation et courbe représentative

La définition et les résultats obtenus ci-dessus permettent d'établir le tableau de variation complet de la fonction ln.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln'(x) = \frac{1}{x}$			+		
Variations de ln	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Pour tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ on détermine les coordonnées d'autant de points que l'on veut avec une calculatrice (figure 1).

La courbe admet l'axe des ordonnées pour asymptote.

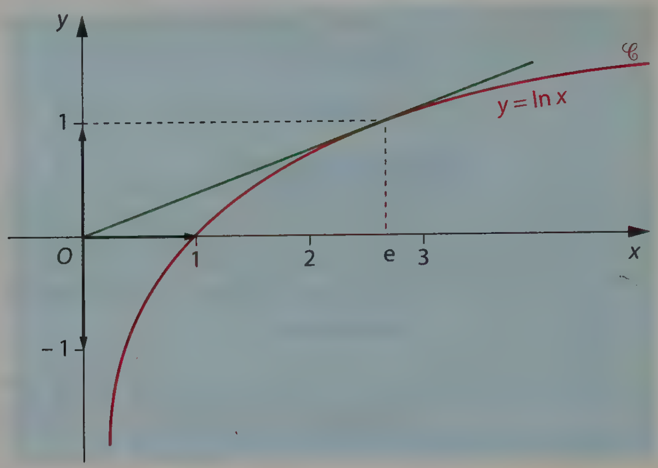


Figure 1

Nombre e

Nous observons graphiquement sur la figure 1 qu'il existe un point unique de la courbe $\mathscr{C}$ ayant pour ordonnée 1 ; son abscisse est voisine de 2,7.

Au-delà de cette observation graphique, l'existence d'une solution unique pour l'équation $\ln x = 1$ repose sur la variation de la fonction ln qui est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et qui prend chaque valeur réelle une fois et une seule quand x varie dans $]0, +\infty[$.

Il existe donc un seul nombre réel x tel que $\ln x = 1$.

La notation e a été adoptée en hommage au mathématicien Léonhard Euler (1707-1783).

DÉFINITION

e est le nombre réel défini par **ln e = 1.**

$e \approx 2{,}718\,28$ s'obtient sur une calculatrice avec la touche e^x dans le cas où $x = 1$.

Remarque 1

Observez en déplaçant une règle sur la figure 1 que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e semble passer par l'origine O.

Pour le démontrer, écrivons une équation de cette tangente :

$$y - \ln e = \frac{1}{e}(x - e), \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = \frac{1}{e}x \text{ car } \ln e = 1.$$

Ainsi pour $x = 0$, on a $y = 0$: la tangente considérée passe par O.

Voir la rubrique ***Ce qu'il faut savoir*** du chapitre 3.

Remarque 2

Sur la figure 1 nous pouvons observer qu'il existe un point unique de la courbe $\mathscr{C}$ ayant pour ordonnée – 1.

$\ln e = 1$ donc $\ln \frac{1}{e} = -1$ d'après le résultat sur le logarithme de l'inverse.

L'abscisse du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée – 1 est donc $\frac{1}{e} = e^{-1}$.

$\frac{1}{e} \approx 0{,}367\,88.$

De même $\ln e^2 = 2\ln e$ d'après le résultat sur le logarithme d'une puissance, $\ln e^2 = 2$ car $\ln e = 1$.

De même $\ln e^3 = 3$, $\ln e^{-2} = -2$, ..., et de façon générale :

$e^2 \approx 7{,}389\,06.$

$e^3 \approx 20{,}085\,54.$

$\frac{1}{e^2} = e^{-2} \approx 0{,}135\,34.$

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Pour tout nombre entier relatif n, $\ln e^n = n$.

$\sqrt{e} \approx 1{,}648\,72.$

$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}606\,53.$

De plus, $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}\ln e$, donc $\mathbf{\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}}$.

$\ln\frac{1}{\sqrt{e}} = -\ln\sqrt{e}$, donc $\mathbf{\ln\frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2}}$.

Limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$

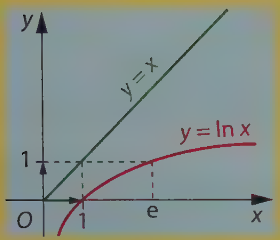


Figure 2

Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ après avoir constaté à l'aide d'un tableau de valeurs que $\ln x$ augmente « lentement » quand x devient de plus en plus grand.

Nous observons sur la figure 2 que la courbe représentative de la fonction ln « monte plus lentement » que la droite représentant la fonction $x \mapsto x$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes.

Pour comparer les deux nombres positifs $\ln x$ et x lorsque x devient de plus en plus grand, nous allons étudier leur quotient $\frac{\ln x}{x}$.

x	$100 = 10^2$	$1\,000 = 10^3$	10^6	10^9
$\frac{\ln x}{x}$	0,046	$6{,}91 \times 10^{-3}$	$1{,}38 \times 10^{-5}$	$2{,}07 \times 10^{-8}$

Voir le chapitre 2.

Il semble que, lorsque x devient grand, $\frac{\ln x}{x}$ se rapproche de 0 mais les théorèmes relatifs à la limite d'un quotient ne permettent pas de conclure.

Nous admettons ici le résultat suivant.

THÉORÈME

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Sur une copie, écrivez le résultat tel qu'il est encadré.

Ce résultat peut se retenir sous la forme imagée suivante :

« x l'emporte sur $\ln x$ en $+\infty$ ».

Remarque

Pour tout nombre entier naturel n tel que $n > 1$ et pour tout $x > 0$,

$$\frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}.$$

$x^n = x x^{n-1}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ car $n > 1$.

C'est le résultat encadré ci-dessus.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ d'après un résultat sur la limite d'un produit.

THÉORÈME

Pour tout nombre entier naturel non nul n,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

Pour $n = 1$, c'est le résultat précédent.

Cours

2 Fonction composée de la forme ln u

u est une fonction strictement positive.

A. Limites de ln u

Ces limites sont abordées pour traiter des situations issues des autres disciplines.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[$ par $f(x) = \ln(3x+5)$.

Pour calculer $f(x)$ nous pouvons calculer d'abord $u(x) = 3x+5$, puis calculer $f(x) = \ln(u(x))$. Nous savons que quand x tend vers $+\infty$, $u(x) = 3x+5$ a même limite que $3x$, donc que $u(x)$ tend vers $+\infty$.

Voir le paragraphe **3C.** du chapitre 2.

x	1 000	10^6	10^9
$u(x) = 3x+5$	3 005	$3\times10^6+5$	$3\times10^9+5$
$f(x) = \ln(u(x))$	8,008	14,914	21,822

Les valeurs de $f(x)$ sont arrondies au millième.

Nous observons sur le tableau ci-dessus que lorsque x prend des valeurs de plus en plus « grandes », $f(x) = \ln(u(x))$ augmente « lentement », comme $\ln x$.

Voir le paragraphe **1C.**.

Nous admettons le résultat suivant qui ressemble au théorème admis pour la limite d'une fonction de la forme u^n.

Voir le paragraphe **3F.** du chapitre 2.

THÉORÈME

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{X\to b} \ln X = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} \ln(u(x)) = c$.

EXERCICE résolu 1

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[$ par $f(x) = \ln(3x+5)$.

1° Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2° Déterminer $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{3}} f(x)$.

SOLUTION

MÉTHODE

Exprimer $f(x)$ sous la forme $\ln(u(x))$.

1° Pour tout x de $\left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[$, $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 3x+5$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.

La fonction polynôme u a même limite en $+\infty$ que sa fonction monôme de plus haut degré. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$.

Appliquer le théorème ci-dessus.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $f(x) = \ln(u(x))$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{3}} u(x)$.

2° $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{3}} u(x) = 0$ car $u\left(-\frac{5}{3}\right) = 0$.

Appliquer le théorème ci-dessus.

$\lim\limits_{x\to-\frac{5}{3}} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{3}} f(x) = -\infty$ car $f(x) = \ln(u(x))$.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 15

B. Dérivée de ln u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que, pour tout x de I, $u(x) > 0$.

Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$.

Voir le paragraphe 1A. du chapitre 3.

Nous admettons le résultat suivant qui ressemble au thèorème admis pour la dérivée d'une fonction de la forme u^n.

THÉORÈME

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction f définie sur I par $\boldsymbol{f(x) = \ln(u(x))}$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}}$.

EXERCICE résolu 2

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Déterminer $f'(x)$.

MÉTHODE

Exprimer $f(x)$ sous la forme $\ln(u(x))$.

Déterminer $u'(x)$.

Appliquer le théorème ci-dessus.

SOLUTION

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$,

donc $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 23

C. Primitives de $\dfrac{u'}{u}$ où $u > 0$

Voir le paragraphe 2D. du chapitre 3.

Nous admettons le théorème suivant qui ressemble au résultat admis pour les primitives d'une fonction de la forme $u'u^n$ où n est un entier relatif différent de – 1.

THÉORÈME

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout élément x de I, $u(x) > 0$.

Les primitives de la fonction f définie sur I par $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}}$ sont définies sur I par

$\boldsymbol{F(x) = \ln[u(x)] + C}$, où C est une constante réelle.

EXERCICE résolu 3

ÉNONCÉ

Déterminer les primitives de la fonction g définie sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $g(x)=3x+1+\frac{1}{2x+1}$.

MÉTHODE

Appliquer les résultats sur les primitives d'une somme et les primitives des fonctions usuelles.

Faire apparaître une forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)>0$.

Appliquer le théorème ci-dessus.

SOLUTION

Les primitives de la fonction g sont les fonctions G définies sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $G(x)=\frac{3}{2}x^2+x+C+F(x)$, où F est une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{2x+1}$.

$\frac{1}{2x+1}$ n'est pas exactement de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ car pour $u(x)=2x+1$, on a $u'(x)=2$.

Cependant $\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{2}\frac{2}{2x+1}$ avec $2x+1>0$ pour tout x de $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

Une primitive de $x\mapsto\frac{2}{2x+1}$ est $x\mapsto\ln(2x+1)$.

Donc une primitive de $x\mapsto\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{2}\frac{2}{2x+1}$ est $x\mapsto\frac{1}{2}\ln(2x+1)$.

En conclusion $G(x)=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C$.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 33

D. Résoudre une inéquation d'inconnue n (entier naturel) de la forme $q^n\geq a$ ou $q^n\leq a$

EXERCICE résolu 4

ÉNONCÉ

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0=1\,000$ et de raison 1,04.
Déterminer la plus petite valeur de n pour que $u_n\geq 2\,000$.

MÉTHODE

Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Utiliser les résultats : $a\leq b$ si et seulement si $\ln a\leq\ln b$ et $\ln a^n=n\ln a$.

SOLUTION

On sait que si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, pour tout entier n, $u_n=u_0q^n$.

Avec $u_0=1\,000$ et $q=1{,}04$, on obtient $u_n=1\,000(1{,}04)^n$.

Les inéquations suivantes sont équivalentes pour tout entier naturel n :

$u_n\geq 2\,000$; $1\,000(1{,}04)^n\geq 2\,000$; $(1{,}04)^n\geq 2$; $\ln[(1{,}04)^n]\geq\ln 2$; $n\ln(1{,}04)\geq\ln 2$; $n\geq\frac{\ln 2}{\ln(1{,}04)}$ car $\ln(1{,}04)>0$.

$\frac{\ln 2}{\ln(1{,}04)}\approx 17{,}67$.

Donc la plus petite valeur de n telle que $u_n\geq 2\,000$ est 18.

VOIR AUSSI LES EXERCICES CORRIGÉS 44 et 46

3 D'autres fonctions logarithmes

Voir les TP 2 et 4 et les exercices 51 à 56 de ce chapitre.

D'autres fonctions logarithmes sont à connaître pour leurs applications dans les sciences physiques et les sciences et techniques industrielles ou de laboratoire, notamment la fonction logarithme décimal et la fonction logarithme de base deux.

A. Fonction logarithme décimal

La notation normalisée (AFNOR 1981) est lg.

$\ln 10 \approx 2{,}30$.

DÉFINITION

La fonction ***logarithme décimal*** est la fonction, notée log, définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Exemples de valeurs de log x

10 joue pour la fonction log le même rôle que e pour la fonction ln.

$$\log 1 = \frac{\ln 1}{\ln 10} = 0, \quad \text{car} \quad \ln 1 = 0.$$

$$\log 10 = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1;$$

$$\log 100 = \frac{\ln 10^2}{\ln 10} = \frac{2 \ln 10}{\ln 10} = 2.$$

Plus généralement :

Pour tout nombre entier relatif n, $\log 10^n = n$.

Remarques

$\log(ab) = \log a + \log b$.

- La relation fonctionnelle de la fonction ln et ses conséquences sont encore valables pour la fonction log.
- Les variations de la fonction logarithme décimal sont les mêmes que celles de la fonction ln puisque ln 10 est positif.
- Ce sont les logarithmes décimaux que John Neper a créés.

Avant que ne se développent les calculatrices électroniques on utilisait des tables de logarithmes décimaux pour faire des calculs numériques. Il pouvait alors être intéressant de définir certaines notions à l'aide de la fonction logarithme décimal comme le pH d'une solution ou l'intensité d'un son.

Un peu d'histoire des outils de calcul

Jusqu'à la vulgarisation des calculatrices, entre 1970 et 1980, pour faire des calculs « compliqués » on utilisait des tables de logarithmes népériens, des tables de logarithmes décimaux, ou divers instruments de calcul utilisant les propriétés des fonctions logarithmes, comme la règle à calcul. (La fonction logarithme décimal est définie par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$; donc $\log(10) = 1$, ce qui rend certains calculs effectués « avec les tables » plus simples qu'avec la fonction logarithme népérien.)

Sur la photographie ci-contre, figurent, en dessous, une table de logarithme népérien du XVIII[e] siècle, et par dessus, une « règle à calcul » utilisée vers 1960 et la table de logarithmes décimaux que tous les lycéens de Terminale avaient dans leur cartable entre 1950 et 1970.

Les calculatrices ont beaucoup évolué ces quarante dernières années, de la calculatrice « quatre opérations » de 1970 aux calculatrices graphiques d'aujourd'hui, sans parler de celles (non exigibles en Terminale STL) équipées d'un logiciel de calcul formel qui donnent l'expression de $f'(x)$…

B. Fonction logarithme de base deux

DÉFINITION

La fonction logarithme de base deux est la fonction, notée $\log_2$, définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \log_2 x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$.

$\ln 2 \approx 0{,}69$.

Exemples de valeurs de $\log_2 x$

$\log_2 1 = \dfrac{\ln 1}{\ln 2} = 0$, car $\ln 1 = 0$.

$\log_2 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 2} = 1$.

$\log_2 4 = \dfrac{\ln 2^2}{\ln 2} = \dfrac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2$.

Plus généralement :

pour tout nombre entier relatif n, $\log_2 2^n = n$.

2 joue pour la fonction $\log_2$ le même rôle que e pour la fonction ln ou 10 pour la fonction log.

Remarques

- La relation fonctionnelle de la fonction ln et ses conséquences sont encore valables pour la fonction $\log_2$.
- Les variations de la fonction $\log_2$ sont les mêmes que celles de la fonction ln puisque ln 2 est positif.

$\log_2(ab) = \log_2 a + \log_2 b$.

- *En informatique, dans la théorie de l'information transportée par un signal, on utilise le logarithme de base deux pour traiter l'information contenue dans un bit (binary digit) qui peut prendre deux valeurs et deux seulement, codées 0 et 1. Un bit peut prendre $2^1 = 2$ valeurs. Deux bits peuvent prendre $2^2 = 4$ valeurs (00, 01, 10, 11). Trois bits peuvent prendre $2^3 = 8$ valeurs. Un octet vaut 8 bits et peut prendre $2^8 = 256$ valeurs. La relation $\log_2(2^n) = n$ permet de passer du nombre de valeurs possibles au nombre de bits nécessaires. Ainsi $\log_2(256) = 8$.*
- *En imagerie numérique, on utilise le logarithme de base deux pour exprimer la dynamique d'une image. Si les intensités lumineuses peuvent prendre n valeurs, la dynamique de l'image, exprimée en stops (un stop correspond à un bit) vaut $\log_2(n)$. Dans un fichier JPEG, le pixel le plus sombre a la valeur 0 et le pixel le plus clair a la valeur 255 soit 256 valeurs possibles. La dynamique d'un fichier JPEG est $\log_2(256) = 8$ stops. Un fichier RAW a en général une dynamique de 10 stops.*
- *En cinématographie, la notion correspondante est celle d'« Exposure latitude ». Un film négatif standard mesure 7 stops et un film négatif « Extended latitude » mesure 11 stops. Pour les écrans, la dynamique d'affichage correspond au taux de contraste. La technologie LCD mesure 9 stops et la technologie SED, 16 stops.*

Ce qu'il faut savoir

Définition

La **fonction logarithme népérien**, notée ln, est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.

Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels strictement positifs a, b, pour tout nombre entier relatif n,

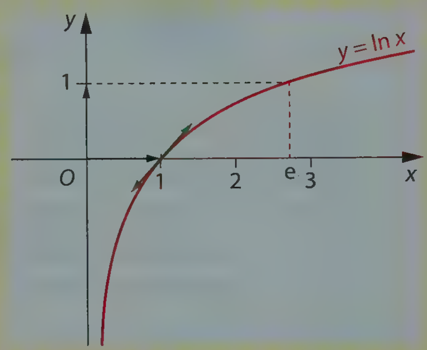
- $\ln ab = \ln a + \ln b$;
- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln a^n = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Limites

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

Variations – Courbe représentative

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+	
Variations de ln	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$



Le nombre e

- **e** est le nombre réel défini par : **ln e = 1** (e ≈ 2,718).
- Pour tout nombre entier relatif n : $\ln e^n = n$.

Dérivée de ln u

Soit u une fonction dérivable et *strictement positive* sur un intervalle I.

La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Primitives de $\frac{u'}{u}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout élément x de I, $u(x) > 0$.

Les primitives de la fonction f définie sur I par $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont définies sur I par :

$F(x) = \ln[u(x)] + C$ où C est une constante réelle.

Fonction logarithme décimal

La fonction **logarithme décimal** est la fonction notée log définie sur $]0, +\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Travaux pratiques TICE

RÉPONSES P. 338

TP 1 Utiliser une calculatrice pour étudier une fonction logarithme

LOGICIEL UTILISÉ
Calculatrice

Coût de production

Cet exercice vous guide dans l'utilisation d'une calculatrice pour procéder à l'étude d'une fonction logarithme et à la résolution approchée d'une équation.

Une société a conçu un certain type d'objet pour l'industrie ; elle étudie sa commercialisation. Elle aimerait, en particulier, ne pas dépasser un coût de production de 12,5 milliers d'euros.

Le coût de production de x centaines d'objets, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$C(x) = \ln(50x^2 + 112{,}5)$ avec $0 \leq x \leq 100$.

A. Tableau de valeurs

On souhaite compléter le tableau suivant.

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$C(x)$											

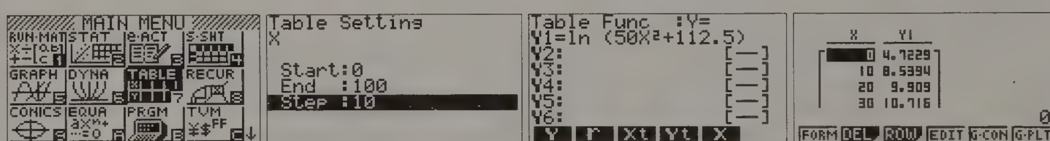
• Calculatrice de marque CASIO

Entrer dans le menu des tables en faisant MENU TABLE EXE.

Entrer en Y1 l'expression de la fonction C.

Pour régler la table, faire SET, puis entrer dans **Start** la première valeur de x, dans **End** la dernière valeur de x et dans **Step** le pas entre chaque valeur de x.

Faire TABL pour obtenir la table.

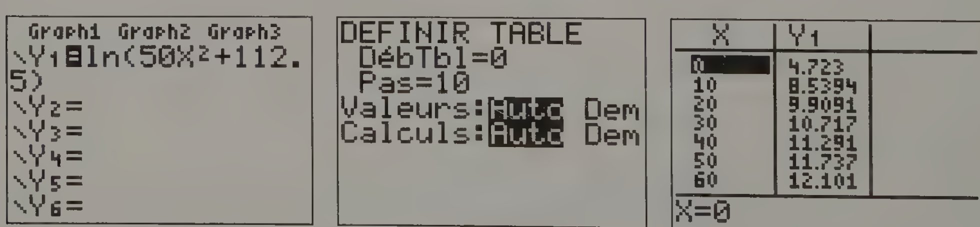


• Calculatrice de marque Texas Instruments

Pour éditer la fonction, faire f(x) ou Y= puis, à la ligne Y_1, entrer l'expression de C.

Pour régler la table, faire 2nde déf table ou 2nd TBLSET puis entrer dans **déb Tbl** ou **TblStart** la première valeur de x et dans **Pas** ou **ΔTbl** le pas entre chaque valeur de x.

Faire 2nde table ou 2nd TABLE pour obtenir la table.



1. À l'aide des résultats affichés par votre calculatrice, reproduire et compléter le tableau de valeurs (arrondir à 10^{-3}).

2. Pour quelles valeurs de x, figurant dans le tableau, le coût de production dépasse-t-il 12,5 milliers d'euros ?

B. Résolution graphique

On souhaite réaliser sur la calculatrice une représentation graphique de la fonction C sur l'intervalle [0, 100] ainsi que tracer la droite d'équation $y = 12{,}5$.

À l'aide d'un zoom, on précisera l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite.

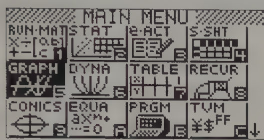
• Calculatrice de marque CASIO

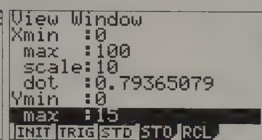
Venir dans le menu de graphiques en faisant MENU GRAPH EXE.

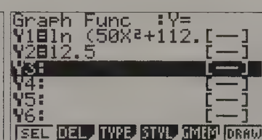
Pour régler la fenêtre, faire SHIFT V-Window puis entrer **Xmin** et **max** selon le domaine d'étude, **scale** correspond au pas de graduation de l'axe. Pour les choix de **Ymin** et **max**, on considère les valeurs apparues dans le tableau précédent.

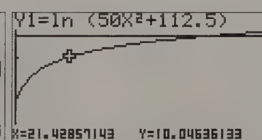
Dans l'écran d'accueil du menu graphique, ajouter Y2 = 12.5 puis faire DRAW pour obtenir le tracé.

Pour parcourir la courbe, faire SHIFT Trace puis ◀ ou ▶.

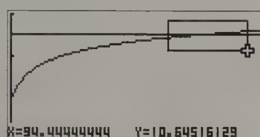


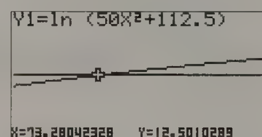






Pour zoomer, faire SHIFT ZOOM puis **BOX**, se déplacer par ◀ ou ▶ et valider les coins.



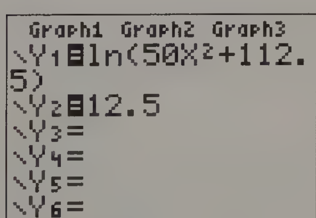


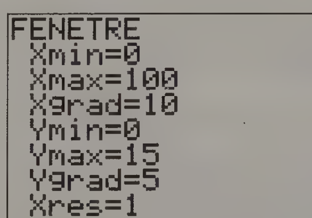
• Calculatrice de marque Texas Instruments

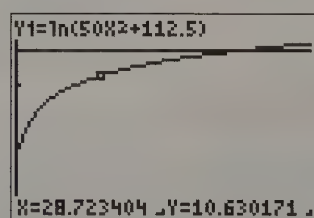
Faire f(x) ou Y= puis, à la ligne $\mathbf{Y_2}$, entrer 12.5.

Pour régler la fenêtre, faire fenêtre ou WINDOW puis entrer **Xmin** et **Xmax** selon le domaine d'étude, **Xgrad** ou **Xscl** correspond au pas de graduation de l'axe. Pour les choix de **Ymin** et **Ymax**, on considère les valeurs apparues dans le tableau précédent.

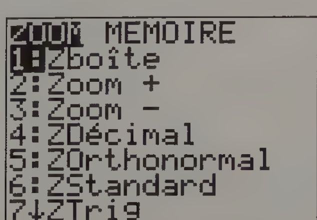
Faire graphe ou GRAPH pour le tracé et pour parcourir la courbe, faire trace ou TRACE et ◀ ou ▶.

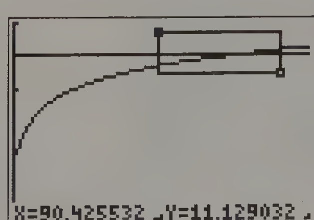


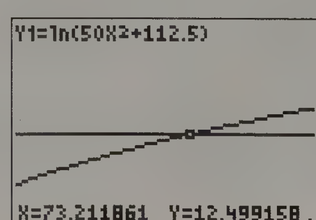




Pour zoomer, faire zoom ou ZOOM puis **1:Zboîte** ou **1:ZBox**, se déplacer par ◀ ou ▶ et valider les coins.







1. Quelles sont, après avoir effectué un zoom, les coordonnées approximatives du point d'intersection apparaissant à l'écran ?

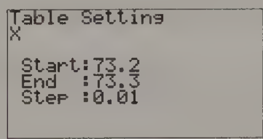
2. Donner une valeur approchée de la solution de l'équation $C(x) = 12{,}5$.

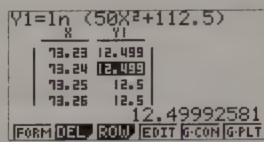
C. Résolution numérique approchée

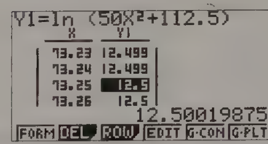
On souhaite, en précisant le tableau de valeurs de la question **A.1.**, approcher au mieux la solution de l'équation $C(x) = 12{,}5$.

• Calculatrice de marque CASIO

Dans le menu TABLE, modifier SET de façon à obtenir la table apparaissant sur les images d'écran ci-dessous.

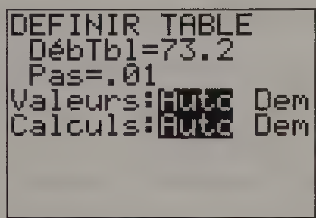


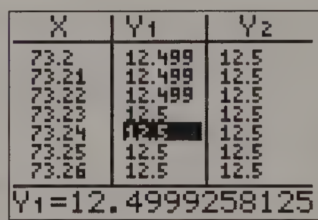


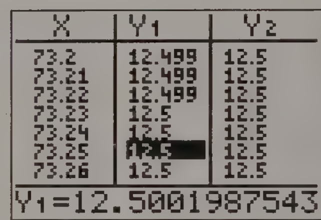


• Calculatrice de marque Texas Instruments

Modifier les réglages de 2nde déf table ou 2nd TBLSET, de façon à obtenir la table apparaissant sur les images d'écran ci-dessous.







1. Justifier, d'après ces tables, que $C(73{,}24) < 12{,}5$ et que $C(73{,}25) > 12{,}5$.

2. En déduire le nombre maximum d'objets que l'on peut fabriquer sans dépasser un coût total de 12 500 €.

TP 2 Exploiter la fonction logarithme de base 10 en chimie

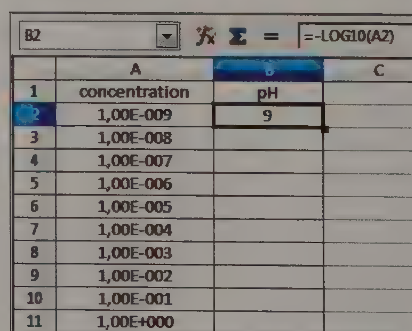
pH d'une solution

L'acidité d'une solution est mesurée par son pH défini par pH = – log x, où log désigne le logarithme décimal et x la concentration en ions hydronium (H_3O^+) exprimée en moles par litre.

LOGICIEL UTILISÉ
Tableur

A. Échelle logarithmique des pH

À l'aide d'un tableur, établir un tableau de valeurs des pH pour des concentrations en ions H_3O^+ allant de 10^{-9} mol/l à 1 mol/l avec un pas de 10. On pourra utiliser un format de cellule en notation scientifique et la fonction logarithme de base 10 notée LOG10.



	A	B	C
1	concentration	pH	
2	1,00E-009	9	
3	1,00E-008		
4	1,00E-007		
5	1,00E-006		
6	1,00E-005		
7	1,00E-004		
8	1,00E-003		
9	1,00E-002		
10	1,00E-001		
11	1,00E+000		

1. Que fait le pH lorsque la concentration en ions H_3O^+ est divisée par 10 ?

2. Que fait la concentration en ions H_3O^+ lorsque le pH est diminué de 2 unités ?

B. Fonction donnant le pH selon la concentration en ions H_3O^+

On désigne par f la fonction donnant le pH selon la concentration x en ions H_3O^+ exprimée en mol/l. On a donc $f(x) = -\log x$.

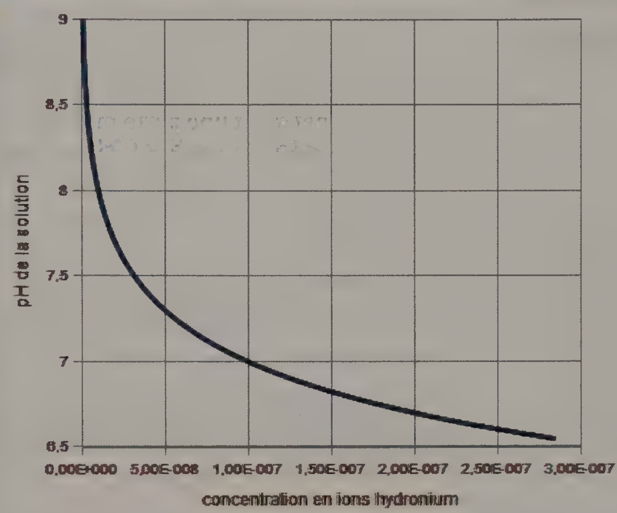
On étudie l'évolution du pH d'une solution dont la concentration en ions H_3O^+ augmente régulièrement de 20 % à partir de la concentration de 10^{-9} mol/l.

À l'aide du tableur, tabuler la fonction *f* pour *x* débutant à 10^{-9} puis augmentant de 20 % jusqu'à atteindre $2{,}8 \times 10^{-7}$.

Représenter la fonction *f* en choisissant comme type de graphique « nuage de points » ou « XY dispersion », selon le tableur utilisé.

B2 =-LOG10(A2)

	A	B
1	concentration	pH
2	1,00E-009	9
3	1,20E-009	8,921
4	1,44E-009	8,842
5	1,73E-009	8,762
6	2,07E-009	8,683
7	2,49E-009	8,604
8	2,99E-009	8,525
9	3,58E-009	8,446
10	4,30E-009	8,367
11	5,16E-009	8,287
12	6,19E-009	8,208
13	7,43E-009	8,129
14	8,92E-009	8,05
15	1,07E-008	7,971
16	1,28E-008	7,891
17	1,54E-008	7,812
18	1,85E-008	7,733
19	2,22E-008	7,654
20	2,66E-008	7,575
21	3,19E-008	7,496
22	3,83E-008	7,416
23	4,60E-008	7,337



1. On suppose que la concentration en ions H_3O^+ dans le sang est $3{,}83 \times 10^{-8}$ mol/l ; que vaut alors le pH du sang (arrondir à 10^{-1}) ?

2. En utilisant le graphique et les valeurs de la table, donner une valeur approchée arrondie à 10^{-8} de la concentration en ions H_3O^+ lorsqu'après un effort violent, le pH du sang vaut 7,2.

C. Fonction donnant la concentration en ions H_3O^+ selon le pH

Pour répondre plus facilement à une question telle que la précédente, mieux vaudrait considérer la concentration en ions H_3O^+ en fonction du pH.

On désigne par *g* la fonction donnant la concentration en ions H_3O^+ exprimée en mol/l en fonction du pH.

À l'aide du tableur, représenter la fonction *g* sur l'intervalle [6,55 ; 9] en prenant la colonne des pH en abscisses et la colonne des concentrations en ordonnées.

1. D'après le graphique, quel est le sens de variation de la fonction *g* sur l'intervalle [6,55 ; 9] ?

2. Comment évolue la concentration en ions H_3O^+ lorsque le pH augmente ?

▶ *Une expression algébrique de la fonction g (exponentielle de base 10) sera donnée au chapitre 5.*

TP 3 Exploiter la fonction logarithme de base 10 dans le secteur technologique

Ce TP permet d'évaluer des capacités mathématiques développées grâce aux TICE.

LOGICIEL UTILISÉ
GeoGebra

Perte de puissance du signal sur les fibres optiques

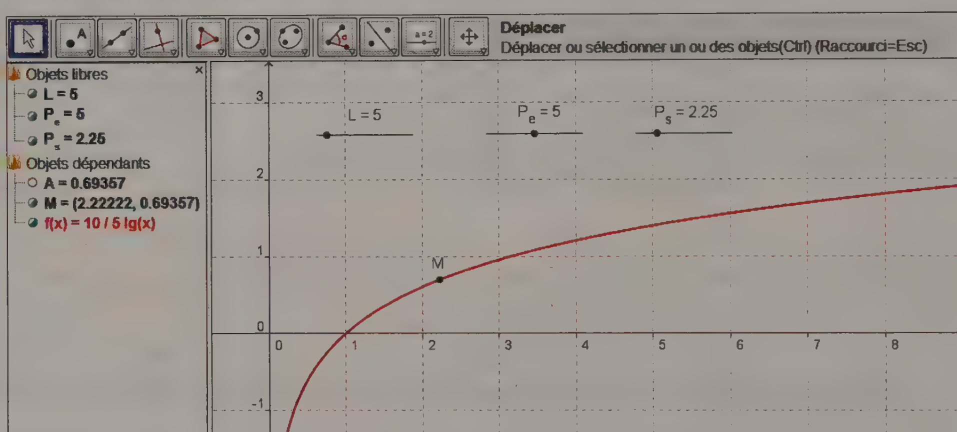
De nos jours, les autoroutes de l'information offrent la possibilité de transmettre des données, de la voix, des images etc. d'un bout à l'autre de la planète. Aujourd'hui, 80 % du trafic mondial longue distance se fait par fibres optiques. Les technologies de télécommunications par fibres optiques, en constante amélioration depuis une trentaine d'années, permettent en effet de transmettre des informations sur de très longues distances et à de très hauts débits.

Une fibre optique est jugée performante lorsque, sur une longueur donnée, la puissance du signal qu'elle transmet subit une perte minimale. Pour caractériser la perte de puissance dans une fibre optique, on utilise le coefficient d'atténuation, noté A, exprimé en décibels par kilomètre selon la formule suivante : $A = \frac{1}{L} \times 10 \times \log\left(\frac{P_e}{P_s}\right)$, où

L est la longueur de la fibre optique, en km ;

P_e est la puissance du signal lumineux à l'entrée de la fibre, en mW ;

P_s est la puissance du signal lumineux à la sortie de la fibre, en mW.



Créer un fichier GeoGebra comportant un curseur L de 0 à 50 avec un incrément de 0,1 ; un curseur P_e de 0 à 10 avec un incrément de 0,1 et un curseur P_s de 0 à 10 avec un incrément de 0,01.

Calculer la quantité A=(10/L)*lg(P_e/P_s), puis créer le point de coordonnées $\left(\frac{P_e}{P_s}, A\right)$ et tracer la courbe correspondant à f(x)=(10/L)*lg(x).

▶ *Remarque : sur GeoGebra, lg désigne le logarithme décimal.*

D. Détermination du coefficient d'atténuation A

On suppose dans cette partie que la longueur de fibre optique est $L = 5$ km et que la puissance du signal d'entrée est $P_e = 5$ mW.

1. a. Un technicien effectue une mesure de puissance lumineuse à la sortie d'une première fibre et obtient $P_s = 2{,}55$ mW. Déterminer le coefficient d'atténuation de cette fibre (arrondir à 10^{-2}).

b. Un technicien effectue une mesure de puissance lumineuse à la sortie d'une seconde fibre et obtient $P_s = 1{,}77$ mW. Déterminer le coefficient d'atténuation de cette fibre (arrondir à 10^{-2}).

2. a. Quel est le signe de A lorsque $P_s > 5$? Cette situation est-elle physiquement possible ?

b. Quel est le comportement de A lorsque P_s diminue ?

c. Le tableau ci-dessous est extrait du catalogue d'un fournisseur de fibres optiques :

Référence de la fibre optique	a	b	c
Coefficient d'atténuation A (dB/km)	1,50	0,90	0,25

Quelle est la référence de la fibre optique la plus performante ?

Appelez le professeur pour présenter votre démarche et vos réponses.

E. Détermination d'une longueur critique

On considère les trois types de fibres optiques référencées dans le tableau précédent.

Lorsque le signal lumineux transmis perd 90 % de sa puissance (c'est-à-dire que P_s ne vaut plus qu'un dixième de P_e), il nécessite une amplification.

Au bout de combien de kilomètres le signal transmis par chacune des fibres a, b et c doit-il être amplifié ?

(On pourra tracer sur le fichier GeoGebra les droites d'équations $y = 1{,}5$; $y = 0{,}9$ et $y = 0{,}25$ pour fournir une première réponse approximative, puis donner l'expression de L en fonction de A dans cette situation et effectuer les calculs.)

Appelez le professeur pour présenter votre démarche et vos réponses.

Exercices

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE	Exercices corrigés	Exercices non corrigés
Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture	1, 4, 6	2, 3, 5, 7
Déterminer des limites	8 à 12, 15	13, 14, 16 à 18
Calculer la dérivée de fonctions	19 à 23	24 à 29
Déterminer des primitives	30 à 35	36 à 41
Étudier des variations	67	42, 43 62 à 66 68
Résoudre des inéquations d'inconnue n de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$	44, 46, 69	45, 47 à 49 70 à 75
Utiliser un logarithme décimal ou un logarithme de base 2		51 à 54
TICE Utiliser un tableur	50, 55, 56	76, 77, 78

Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture

Résoudre dans I l'équation ou l'inéquation suivante (exercices 1 à 7).

Méthode : *Dans chaque exercice, mettre l'équation (ou l'inéquation) sous la forme ln a = ln b, équivalente à a = b (ou ln a ≤ ln b équivalente à a ≤ b). Pour cela, utiliser les résultats énoncés au paragraphe* **1B.** *du cours.*

1. +

a) $\ln(x+2) = 2\ln x$; $I =]0, +\infty[$.

b) $\ln(2x+3) + \ln 3 = 2\ln x$; $I =]0, +\infty[$.

c) $\ln x + \ln(x+2) = \ln(9x-12)$; $I =]\frac{4}{3}, +\infty[$.

d) $\ln(x-2) = 3$; $I =]2, +\infty[$.

▶ *Remplacer 3 par $\ln e^3$.*

CORRIGÉ P. 339

2. +

a) $\ln(x+4) = 2\ln(x+2)$; $I =]-2, +\infty[$.

b) $\ln(x+3) + \ln(x+1) = \ln(x+13)$; $I =]-1, +\infty[$.

c) $\ln(3x-1) - \ln x = \ln 2$; $I =]\frac{1}{3}, +\infty[$.

d) $\ln x = 1$; $I =]0, +\infty[$.

3. +

a) $\ln 2x = 3$; $I =]0, +\infty[$.

b) $\ln(5x-3) = 2$; $I =]\frac{3}{5}, +\infty[$.

▶ *Pour tout entier relatif n, $n = \ln e^n$.*

c) $\ln(x^2-4) = \ln 5 + 2\ln 3$; $I =]2, +\infty[$.

4. +

a) $\ln(x-1) + \ln(x+1) = 0$; $I =]1, +\infty[$.

b) $\ln\dfrac{x-1}{x+1} = 1$; $I =]1, +\infty[$.

▶ *Remarquer que $0 = \ln 1$ et $1 = \ln e$.*

5. +

$2\ln(2x-1) - \ln(x+5) = 0$; $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$.

6. +

a) $\ln(x-2) \leq 3$; $I =]2, +\infty[$.

b) $\ln(3x+1) - \ln(x+1) \geq \ln 2$; $I =]-\frac{1}{3}, +\infty[$.

CORRIGÉ P. 339

7. +

a) $\ln(x-2) \leq 0$; $I =]2, +\infty[$.

b) $\ln(x-3) \geq 1$; $I =]3, +\infty[$.

c) $\ln\dfrac{2x+1}{x+1} \leq 0$; $I =]-\dfrac{1}{2}, +\infty[$.

Déterminer des limites

Déterminer la limite en 0 et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$
(exercices **8** à **12**).

8. +

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

CORRIGÉ P. 339

9. +

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln x}{x}$.

▶ **Conseil :** *pour déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, écrire que $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$ et utiliser un théorème sur la limite d'un produit.*

CORRIGÉ P. 339

10. +

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$.

Méthode : *Pour déterminer la limite de f en $+\infty$, transformer l'écriture de f(x) en écrivant que, pour tout nombre réel x de $]0, +\infty[$,*

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right),$$

c'est-à-dire en mettant en facteur ce qui semble jouer le rôle le plus important : ici c'est x.

*On applique ensuite un résultat de la fin du paragraphe **1** du cours.*

CORRIGÉ P. 339

11. +

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - \ln x$.

Méthode : *Pour déterminer la limite de f en $+\infty$, transformer l'écriture de f(x) en écrivant que, pour tout nombre réel x de $]0, +\infty[$,*

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right),$$

c'est-à-dire en mettant en facteur ce qui semble jouer le rôle le plus important : ici c'est x^2.

*Utiliser ensuite un résultat de la fin du paragraphe **1** du cours.*

CORRIGÉ P. 340

12. +

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x^2}$.

Méthode : *Pour déterminer la limite de f en 0, transformer l'écriture de f(x) en écrivant que, pour tout nombre réel x de $]0, +\infty[$,*

$$f(x) = \frac{1}{x^2}(1 + \ln x).$$

Pour déterminer la limite de f en $+\infty$, transformer l'écriture de f(x) en écrivant que, pour tout nombre réel x de $]0, +\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}.$$

CORRIGÉ P. 340

13. ++

Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

a) $f(x) = x + \ln x$;

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}\ln x$.

▶ **Conseil :** *pour le* b), *procéder comme à l'exercice corrigé* **9**.

14. ++

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 3x - \ln x$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

2. a) Vérifier que, pour tout x de $]0, +\infty[$,

$$f(x) = x\left(3 - \frac{\ln x}{x}\right).$$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

15. ++ **Limite d'une fonction composée de la forme $\ln u$**

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x-1)$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

▶ **Conseil :** *se reporter à l'exercice résolu* **1** *du cours.*

CORRIGÉ P. 340

16. ++

Déterminer les limites en $-\dfrac{1}{2}$ et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]-\dfrac{1}{2}, +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x+1)$.

17. ++

Déterminer les limites en 1 et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \ln\dfrac{2x+1}{x-1}$.

18. ++ **Recherche d'asymptote**

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par
$f(x) = x^2 + 100 - 20\ln x$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

b) Que peut-on déduire du a) pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. a) Vérifier que, pour tout x de $]0, +\infty[$,

$$f(x) = x^2\left(1+\frac{100}{x^2}-20\frac{\ln x}{x^2}\right).$$

b) Déduire du a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Calculer la dérivée de fonctions

Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle donné où elle est définie et dérivable (exercices **19** à **29**).

► **Conseil :** *pour chacun des exercices **19** à **28**, on peut vérifier le résultat à l'aide d'un logiciel de calcul formel.*

19. +

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 2 - 2\ln x$.

CORRIGÉ P. 340

20. +

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.

CORRIGÉ P. 340

21. +

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

CORRIGÉ P. 340

22. +

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2$.

CORRIGÉ P. 340

23. +

f définie sur $]-\dfrac{3}{2}, +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x + 3)$.

CORRIGÉ P. 340

24. ++

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

25. ++

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+3\ln x}{x}$.

26. ++

f définie sur $]4, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x - 4)$.

27. ++

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

28. ++

f définie sur $]-2, 4[$ par $f(x)=\ln\dfrac{x+2}{4-x}$.

29. ++ **Avec un logiciel de calcul formel**

Justifier par un calcul détaillé l'expression de $f'(x)$, qui a été obtenue avec une calculatrice équipée d'un logiciel de calcul formel.

a) Pour tout x de $]-2, +\infty[$,

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8\ln(x + 2)$, $f'(x)=\dfrac{0{,}4x-2}{x+2}$.

b) Pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+1-\ln x$,

$f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$.

c) Pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$,

$f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

d) Pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) = (x + 1)\ln x - x$,

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$.

► **Les calculs de dérivées au baccalauréat**

Les calculatrices équipées d'un logiciel de calcul formel donnent directement f'(x). Ainsi, il n'est pas rare que dans les sujets d'examens on donne f'(x), comme dans l'exercice 29, pour ne pas avantager les détenteurs de ce type de calculatrices.

Déterminer des primitives

En utilisant les résultats du cours, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I (exercices **30** à **38**).

► **Conseil :** *pour chacun des exercices suivants, on peut vérifier le résultat avec un logiciel de calcul formel.*

30. +

f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{x}$.

CORRIGÉ P. 340

31. +

f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x)=3x+4-\dfrac{5}{x}$.

CORRIGÉ P. 340

32. +

f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$.

CORRIGÉ P. 340

33. ++

f définie sur $]-\dfrac{1}{2}, +\infty[$ par $f(x)=3x+4+\dfrac{1}{2x+1}$.

CORRIGÉ P. 340

34. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

CORRIGÉ P. 340

35. ++

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

CORRIGÉ P. [illegible]

36. +

f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-1}{x-1}$.

37. ++

f définie sur $]\dfrac{1}{2},+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-4}{2x-1}$.

Méthode : *Faire apparaître une expression de la forme* $\dfrac{u'}{u}$.

38. +

f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

39. ++

Soit f la fonction définie sur $]-\dfrac{1}{3},+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{3x+1}$.

Déterminer la primitive F de f qui s'annule pour $x = 5$.

40. ++

Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-25}{x^2+x-6}$.

1. Vérifier que, pour tout nombre réel x de $]2,+\infty[$,
$f(x)=3+\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x-2}$.

2. En déduire les primitives de f sur $]2,+\infty[$.

41. +++ **Les primitives de la fonction ln**

1. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.

2. En déduire les primitives de la fonction ln sur $]0,+\infty[$.

▶ **Conseil :** *remarquer que : $\ln x = (\ln x + 1) - 1$.*

Étude des variations

42. ++ **Étude d'une équation de la forme $f(x) = k$**

Soit f la fonction définie sur $[0,5\,;6]$ par

$$f(x) = 2x - 3 - 4\ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-après.

1. Montrer que la dérivée f' vérifie $f'(x)=\dfrac{2(x-2)}{x}$.

2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f.

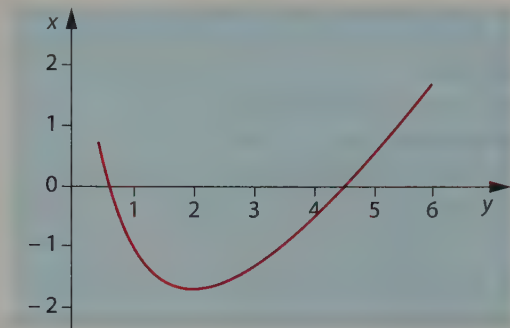
3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2. On la note T. Donner une équation de la droite T.

4. En utilisant le graphique ou le tableau de variation montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée x_0 dans l'intervalle $[2, 6]$.

Donner, à l'aide d'une calculatrice la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de x_0.

5. Déterminer une équation de la tangente T_1 à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Annexe 1



43. ++

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+2\dfrac{\ln x}{x}$.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$.

2. Déterminer le sens de variation de f.

3. a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $y = 1$ ont un point commun A dont on déterminera l'abscisse.

b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ en A.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T.

Résoudre une inéquation d'inconnue n, entier naturel, de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$

▶ *On peut se reporter à l'exercice résolu* **4** *du cours.*

44. ++ **Inéquations $q^n \geq a$ et $q^n \leq a$**

1. Déterminer le plus petit nombre entier positif n tel que $(1{,}045)^n \geq 2$.

Méthode : *Utiliser $a \leq b$ si et seulement si $\ln a \leq \ln b$.*

2. Déterminer le plus petit nombre entier positif n tel que $(0{,}9)^n \leq 0{,}5$.

CORRIGÉ P. [illegible]

45. ++

Déterminer le plus petit nombre entier positif n solution de l'inéquation suivante.

1. $(1{,}036)^n \geq 1{,}5$.
2. $(1{,}4)^n \geq 3$.
3. $(0{,}5)^n \leq 0{,}2$.
4. $(0{,}9)^n \leq 0{,}75$.

46. ++ Placement avec intérêts composés

Dans cet exercice, on donnera éventuellement des valeurs approchées arrondies au centime des résultats.

On place un capital $C_0 = 1\,000$ € à 4 % par an **avec intérêts composés**. Ce qui signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital, et que l'année suivante ils rapportent eux aussi des intérêts. C'est ce que les financiers appellent « l'effet cliquet ». On note C_n le capital obtenu, ou « **valeur acquise** », au bout de n années.

1. Calculer C_1, C_2, C_3.

2. a) Donner, pour tout entier n, l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.

b) En déduire que les nombres C_0, C_1, C_2, ..., C_n sont des termes successifs d'une suite géométrique de premier terme C_0 dont on précisera la raison.

c) Donner l'expression de C_n en fonction de n. Calculer C_{10}.

3. a) Déterminer le plus petit nombre entier positif n tel que $(1{,}04)^n \geq 2$.

b) Déduire du a) au bout de combien d'années le capital initial a doublé.

> **Méthode :** *Pour répondre à la question 3, utiliser la fonction logarithme népérien.*

CORRIGÉ P. 340

47. +++ Placement avec intérêts composés (bis)

Dans cet exercice, on donnera éventuellement des valeurs approchées des résultats arrondies à un euro.

On place 10 000 euros le 1er janvier 2009 au taux de 3,75 % l'an avec « intérêts composés », ce qui signifie que les intérêts obtenus à la fin de la première année s'ajoutent au capital pour produire des intérêts la seconde année et ainsi de suite. On note $C_0 = 10\,000$.

On note C_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Calculer C_1, C_2, C_3.

2. a) Donner pour tout entier n l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.

b) En déduire que les nombres C_1, C_2... C_n sont des termes successifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Donner l'expression de C_n en fonction de n.

3. Au bout de combien d'années, le capital initial aura-t-il doublé ?

48. +++ Dépréciation

Un centre de recherche en biotechnologie achète une machine neuve dont le prix est de 84 000 €. On estime qu'elle se déprécie de 12 % par an. La valeur V_n de la machine au bout de n années est donnée par $V_n = 84\,000 \times 0{,}88^n$.

1. Calculer la valeur de la machine au bout de 2 ans.

2. Au bout de combien d'années la valeur de la machine est-elle inférieure à 60 000 € ?

3. Au bout de combien d'années la machine a-t-elle perdu la moitié de sa valeur ?

49. +++ Laboratoire pharmaceutique

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament. Le test de contrôle de qualité de ce médicament porte sur deux points : sa masse et sa teneur en potassium. On s'intéresse au nombre de médicaments rejetés par ce laboratoire ces dernières années.

On sait qu'en 1990 le nombre de médicaments rejetés était de 18 100.

On constate qu'à partir de cette année-là, le nombre de médicaments rejetés a diminué régulièrement de 3 % chaque année, et on fait l'hypothèse que cette évolution se poursuivra jusqu'en 2015.

On note alors $u_0 = 18\,100$ et u_n le nombre de médicaments rejetés pendant l'année $(1990 + n)$.

Dans tout ce qui suit les résultats sont à arrondir à l'unité.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Quelle est la nature de la suite u ? En déduire son sens de variation.

3. a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

4. a) Résoudre l'inéquation

$18\,100 \times 0{,}97^n \leq 9\,000$.

b) En déduire l'année à partir de laquelle le nombre de médicaments rejetés cette année-là par l'entreprise sera inférieur à 9 000.

Exemple d'utilisation de logiciels

50. +++ Loi d'Arrhenius en cinétique chimique, avec tableur

TICE

Plus la température est élevée, plus la vitesse d'une réaction chimique augmente. La relation entre la température et la vitesse de réaction est donnée par la loi d'Arrhenius, chimiste suédois (1859-1927), qui peut s'exprimer sous la forme : $T = \dfrac{-E}{8{,}314 \times 10^{-3} \times \ln\left(\dfrac{k}{A}\right)}$,

où T est la température en Kelvin (K), k est le coefficient de vitesse, E est l'énergie d'activation pour la réaction en kilo Joule par mole, et A le facteur de fréquence.

On peut supposer que E et A dépendent de la réaction chimique considérée mais pas de la température.

On considère la réaction chimique :

$2NO_2(g) \rightarrow 2NO(g) + O_2(g)$

pour laquelle $A = 2{,}1 \times 10^9$ et $E = 111$ kJ mol^{-1}.

1. Déterminer, à l'aide du tableur, la température en Kelvin sachant que le coefficient de vitesse vaut $k = 1 \times 10^{-10}$.

2. On recherche le coefficient de vitesse k_0 de cette réaction pour une température de 275 Kelvin. Justifier, à l'aide du tableur, que l'on a : $1{,}1 \times 10^{-12} < k_0 < 1{,}2 \times 10^{-12}$.

CORRIGÉ P. 341

Fonction logarithme décimal ou de base 2

Exemples d'utilisation de la fonction logarithme décimal (ou fonction logarithme de base 10)

51. ++ **Pression acoustique**

Le niveau de pression acoustique est exprimée en décibels par $S = 20 \log \dfrac{p}{p_0}$,

où p_0 est la valeur minimale de la pression perçue par l'oreille humaine et p la valeur de la pression pour un son perçu.

$p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ bars pour un individu normal.

L'oreille humaine peut supporter sans dommage, au maximum, une pression p de 20 bars.

Calculer le niveau de pression S correspondant au bruit maximum (pour $p = 20$ bars).

52. ++ **L'intensité acoustique (ou intensité sonore)**

L'intensité acoustique (ou intensité sonore) est définie par $L = 10 \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ où I est l'intensité du son étudié et I_0 une intensité de référence.

I et I_0 sont exprimés en Watts par m^{-2} et L en décibels (dB). On donne $I_0 = 10^{-12}$.

> **Des notations en acoustique**
> - *La lettre « L », souvent utilisée pour l'intensité acoustique est la première lettre du mot anglais « level » (niveau).*
> - *Le « décibel » est une unité choisie en hommage au physicien américain Graham Bell (1847-1922), un des inventeurs du téléphone, en 1876.*

Reproduire et compléter le tableau suivant.

Valeur de L (en dB)	10	30	40	50	60	100	120
Valeur de I (en W/m^{-2})							1

> *Quelques exemples de niveaux d'intensité acoustique (en décibels) figurent après l'exercice* **72**.

53. ++ **En avant la musique**

On écoute dans une pièce de la musique diffusée par un haut-parleur. L'intensité du son diffusé est égale à 10^{-6} $W \cdot m^{-2}$.

1. Calculer le niveau d'intensité acoustique L_1 correspondant.

> *La définition de L figure au début de l'énoncé de l'exercice* **52**.

2. On ajoute un deuxième haut-parleur. L'intensité du son produit double.

a) Déterminer la nouvelle valeur L_2 du niveau d'intensité acoustique.

b) L_2 est-il le double de L_1 ?

54. ++ **Potentiel d'hydrogène (pH)**

> *En chimie, le « pH » (potentiel d'hydrogène) est défini par : $pH = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions H_3O^+, exprimée en $mol \cdot L^{-1}$, d'une solution aqueuse.*

1. La concentration en H_3O^+ d'une solution est $2{,}4 \times 10^{-10}$ mole par litre. Calculer le pH de cette solution. Arrondir à 10^{-2}.

2. Le pH d'une solution est 3. Établir que la concentration en H_3O^+ est 10^{-3}.

3. Démontrer que si la concentration d'une solution est divisée par 100, son pH augmente de 2.

Exemples d'utilisation de la fonction logarithme de base 2

55. +++ **Logarithme de base 2 et quantité d'information d'un message, avec le tableur** TICE

La quantité d'information correspondant à la réception d'un message est d'autant plus grande que ce message est difficile à deviner.

1. On considère les messages « pile » ou « face » reçus après lancer d'une pièce de monnaie.

On suppose que la pièce tombe sur pile avec une probabilité p, $0 < p < 1$, et sur face avec une probabilité $1 - p$.

Le contenu moyen en information, noté H, exprimé en bits, correspondant à la réalisation de cette expérience aléatoire est défini par : $H = -p \log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p)$.

a) Quel est le signe de H ? Justifier.

b) Pour quelle valeur de p, parmi les valeurs suivantes, le résultat de l'expérience aléatoire est-il le plus difficile à deviner ? le plus facile à deviner ?

$p = 0{,}5$; $p = 0{,}2$; $p = 0{,}99$; $p = 0{,}001$.

c) À l'aide d'un tableur, calculer H lorsque $p = 0{,}5$; $p = 0{,}2$; $p = 0{,}99$; $p = 0{,}001$.

On pourra présenter les calculs comme sur l'image d'écran suivante.

Sur le tableur $\log_2(x)$ s'obtient par =LN(x)/LN(2).

B3 =1-B2

	A	B	C
1	message	probabilité	information
2	pile	0,5	0,5
3	face	0,5	0,5
4		H =	1

2. Une source doit transmettre quatre messages M1, M2, M3 et M4 de probabilités respectives 0,5 ; 0,2 ; 0,2 et 0,1.

Calculer, à l'aide du tableur, le contenu moyen en information H de cette source (procéder comme à la question précédente et donner la valeur approchée de H arrondie à 10^{-3}).

3. Rendement d'un codage.

Pour un canal binaire (0 ou 1), on considère les deux codages suivants :

Codage A		
Message	Probabilité	Code
M1	0,5	00
M2	0,2	01
M3	0,2	10
M4	0,1	11

Codage B		
Message	Probabilité	Code
M1	0,5	0
M2	0,2	01
M3	0,2	110
M4	0,1	111

On définit le rendement d'un codage par le quotient $\dfrac{H}{\overline{n}}$, où $\overline{n}$ est la longueur moyenne des codes, pondérée par leur probabilité.

a) Calculer le rendement du codage A pour lequel $\overline{n} = 2$.

b) Calculer le rendement du codage B pour lequel :

$\overline{n} = 1 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}1$.

Un peu d'histoire...

Les premiers théorèmes sur l'information en théorie de la communication sont dus à **Claude Shannon** (1916-2001), ingénieur à la compagnie des téléphones Bell. Cette théorie est née de préoccupations techniques liées à la qualité de transmission des messages.

CORRIGÉ P. 341

56. ++++ Logarithme de base 2 et développement durable, avec le tableur

TICE

En écologie, pour caractériser la diversité des espèces, on peut utiliser l'indice de Shannon H défini par :

$$H = -f_1 \log_2(f_1) - f_2 \log_2(f_2) - \ldots - f_n \log_2(f_n),$$

où f_i est la fréquence observée de l'espèce i, pour n espèces observées, et où $\log_2$ désigne le logarithme de base 2.

On souhaite comparer la diversité des espèces de champignons observées sur deux parcelles de sapins de même superficie. La première parcelle est plantée de sapins de type *Abies pectinata*, la seconde de sapins de type *Abies alba*.

Le tableau de l'annexe 1 donne le nombre de champignons de chaque espèce observée sur chaque parcelle.

1. Représenter, à l'aide du tableur, les deux répartitions des espèces sur un diagramme à bâtons.

Sur quelle parcelle la diversité des espèces de champignons vous paraît-elle la plus grande ?

2. a) Calculer, à l'aide du tableur, l'indice de Shannon H pour chacune des parcelles.

On pourra présenter les calculs comme ci-dessous (voir l'annexe 2), où la formule :

=SI(D2=0;0;-D2*LN(D2)/LN(2))

entrée en cellule F2 est recopiée vers le bas.

b) Comparer, à l'aide des indices de Shannon, les diversités des deux parcelles.

3. L'indice de Shannon H varie de 0 (une seule espèce) à $\log_2(n)$ (les n espèces observées ont la même abondance).

On définit l'indice d'équitabilité E par :

$$E = \frac{H}{\log_2(n)}.$$

Cet indice est compris entre 0 et 1. Un indice d'équitabilité inférieur à 0,6 caractérise un environnement perturbé.

a) Calculer l'indice d'équitabilité pour chaque parcelle.

b) Peut-on considérer qu'au moins l'une des parcelles est perturbée ?

Annexe 1

Espèces de champignons	Parcelle *Abies pectinata*	Parcelle *Abies alba*
Agaricus semotus	8	5
Agaricus silvicola	0	10
Calvatia excipuliformis	10	12
Clitocybe cerussata	20	5
Clitocybe fragrans	0	6
Clitocybe nebularis	18	15
Galerina autumnalis	5	0
Geastrum sessile	12	0
Hygrophorus agathosmus	32	15
Lactarius deterrimus	0	14
Lycoperdon echinatum	8	0
Lycoperdon perlatum	5	15
Pseudoclitocybe cyathiformis	4	0
Ramaria abietina	33	20
Russula queletii	15	15
Rhodocybe gemina	44	5
Strobilurus esculentus	0	15

Annexe 2

F2 =SI(D2=0;0;-D2*LN(D2)/LN(2))

	A	B	C	D	E	F	G
1	Champignons	Parcelle AP	Parcelle AA	fréquences AP	fréquences AA	calcul H parcelle AP	calcul H parcelle AA
2	A Se	8	5	0,037	0,033	0,177	
3	A Si	0	10	0	0,066		
4	C E	10	12	0,047	0,079		
5	C C	20	5	0,093	0,033		
6	C F	0	6	0	0,039		
7	C N	18	15	0,084	0,099		
8	G A	5	0	0,023	0		
9	G S	12	0	0,056	0		
10	H A	32	15	0,15	0,099		
11	L D	0	14	0	0,092		
12	L E	8	0	0,037	0		
13	L P	5	15	0,023	0,099		
14	P C	4	0	0,019	0		
15	R A	33	20	0,154	0,132		
16	R Q	15	15	0,07	0,099		
17	R G	44	5	0,206	0,033		
18	S E	0	15	0	0,099		
19	total	214	152	1	1		

CORRIGÉ P. 341

Faites le point !

RÉPONSES P. 341

QCM *Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.*

QCM interactifs 57-58-59-60

57. ++ Relation fonctionnelle et équations

1 Soit x un nombre réel strictement positif.
Le nombre réel $\ln(2x+2) - \ln(x+1)$ est égal à :

a	$\ln(2)$	b	$\ln(x+1)$
c	$\dfrac{\ln(2x+2)}{\ln(x+1)}$	d	2.

2 Sur l'ensemble $]1, +\infty[$, l'équation $\ln(x-1) = 1$ admet comme solution :

a	1	b	$1 + e$
c	$e - 1$	d	2.

58. ++ Limites

Dans chaque question, f est une fonction définie sur $]0, +\infty[$.

		a	b	c
1	$f(x) = x + \ln x$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$
2	$f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
3	$f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

59. ++ Dérivées et primitives

A. *Dérivées*

Dans chaque question, f est une fonction définie et dérivable sur I et f' est sa fonction dérivée.

1 $f(x) = 2x - 1 - \ln x$; $I =]0, +\infty[$

a	$f'(x) = 2 - 1 - \dfrac{1}{x}$
b	$f'(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$
c	$f'(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$

2 $f(x) = \ln(-2x+1)$; $I =]-\infty, \frac{1}{2}[$

a	$f'(x) = \dfrac{1}{-2x+1}$
b	$f'(x) = \dfrac{-2}{-2x+1}$
c	$f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$

3 $f(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x}$; $I =]0, +\infty[$

a	$f'(x) = \dfrac{-2 + \ln x}{x^2}$	b	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	c	$f'(x) = \dfrac{-1 + \ln x}{x^2}$

B. *Primitives*

Dans chaque question, f est une fonction définie sur I et F une primitive de f sur I.

1 $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x}$; $I =]0, +\infty[$

a	$F(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2}$
b	$F(x) = x^2 + x + \ln x$
c	$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{1}{x^2}$

2 $f(x) = \dfrac{2}{2x+1}$; $I =]-\frac{1}{2}, +\infty[$

a	$F(x) = 2\ln(2x+1)$
b	$F(x) = \ln(2x+1)$
c	$F(x) = -\dfrac{4}{(2x+1)^2}$

3 $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$; $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$

a	$F(x) = \ln(2x-1)$	b	$F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(2x-1)$	c	$F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(-2x+1)$

60. ++ Applications de la fonction logarithme décimal

A. *En chimie*

En chimie, le « pH » (potentiel d'hydrogène) est défini par : $pH = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions H_3O^+, exprimée en $mol{\cdot}L^{-1}$, d'une solution aqueuse.

	a	b	c
La concentration en H_3O^+ d'une solution aqueuse est $1{,}8 \times 10^{-11}$ $mol{\cdot}L^{-1}$. La meilleure approximation du pH de cette solution est :	$-10{,}74$	10,75	10,74

B. *En acoustique*

Le *niveau d'intensité acoustique* est défini par $L = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ ou I est l'intensité du son étudié, exprimé en watts par m^{-2}, et I_0, est une *intensité acoustique de référence*. On choisit le plus souvent $I_0 = 10^{-12}$ Watts par m^{-2}, qui est le seuil d'audibilité. L **s'exprime en décibels** (dB).

		a	b	c
1	Quand l'intensité acoustique I est multipliée par 2, le niveau d'intensité acoustique est :	multiplié par 2	multiplié par 20	augmenté de 3 décibels
2	Sur un boulevard périphérique on a : $L = 70$ dB donc :	$I = 7I_0$	$I = 7\,000I_0$	$I = 10^7 I_0$

61. +++ Un QCM de baccalauréat

La fonction f est définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}, 5\right[$ par :
$f(x) = -x + 2 + \ln(2x+1)$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

		a	b	c
1	$\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point :	$A\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2} + \ln 2\right)$	$B(0, 2)$	$C\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \ln 2\right)$
2	$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) =$	$\dfrac{5}{2}$	$-\infty$	$+\infty$
3	L'équation $f(x) = 0$ admet dans $\left]-\dfrac{1}{2}, 5\right[$	0 solution	1 solution	2 solutions

Les exercices pour le baccalauréat sont des exercices qui pourraient figurer dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat STL-Biotechnologies.

Étude des variations, recherche de limites, courbe représentative, étude d'équations $f(x) = k$

62. +++ Fonction donnée à l'aide d'un tableau de variation

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ et dont le tableau de variation est :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	1

1. À l'aide du tableau, répondre aux questions suivantes :

a) Quelles sont les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0, +\infty[$?

b) Préciser le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$.

c) La fonction f admet-elle un extremum sur $]0, +\infty[$? Si oui, pour quelle valeur de x ?

d) Quel est le signe de f sur $]0, +\infty[$?

2. Par hypothèse, la fonction f est l'une des quatre fonctions suivantes qui sont définies sur $]0, +\infty[$:

$f_1 : x \mapsto -\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$; $\quad f_2 : x \mapsto -(\ln x)^2 - 1$;

$f_3 : x \mapsto 2 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$; $\quad f_4 : x \mapsto 1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$.

a) Calculer $f_1(1)$.

b) Déterminer le signe de $f_2(x)$ lorsque x varie dans $]0, +\infty[$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x)$.

d) Que peut-on conclure des résultats obtenus aux **a)** **b)** **c)** ?

63. +++ Lectures graphiques

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure représente une fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

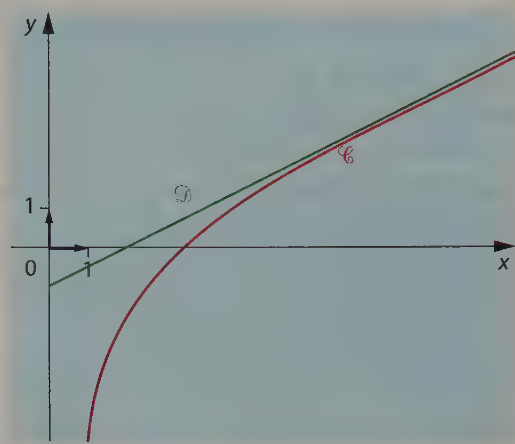
On précise que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à $\mathscr{C}$.

1. Déterminer graphiquement ce que semblent être :

a) Les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Le signe de la dérivée f' de f.

c) L'encadrement, par deux nombres entiers consécutifs, du nombre α solution de l'équation $f(x) = 0$.



2. On admet, dans cette question, que la courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{\ln x}{x} - \frac{4}{x}.$$

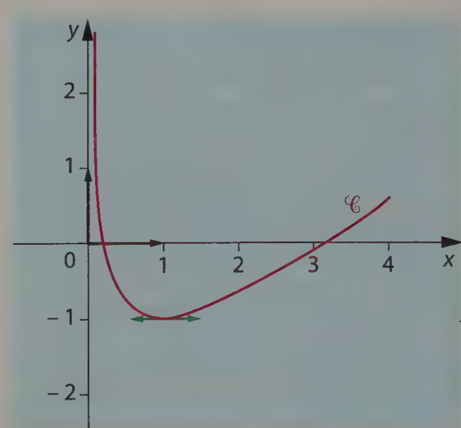
a) Montrer par le calcul que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) Déterminer par le calcul l'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$.

c) Déterminer par le calcul la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ lorsque x varie dans $]0, +\infty[$.

64. ++ Recherche de solutions approchées d'une équation

A. f est une fonction définie sur $]0, 4]$ dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 2 cm.



1. Donner à l'aide du graphique une valeur approchée des solutions dans $]0, 4]$ de l'équation $f(x) = 0$.

2. Déterminer graphiquement pour quelle valeur de x la dérivée f' de f s'annule.

B. On admet que f est définie sur $]0, 4]$ par

$$f(x) = x - 2 - \ln x.$$

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

b) Calculer la dérivée f' de f.

c) Déterminer le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $]0, 4]$.

d) Établir le tableau de variation de f.

2. À l'aide d'une calculatrice donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Comparer les résultats obtenus avec ceux trouvés au **A. 1**.

65. ++ Résolution d'une équation $f(x) = \lambda$

Soit f définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par

$f(x) = 4x - 2 - 3\ln(2x + 1)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 1 cm).

1. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x)$.

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. a) Étudier le sens de variation de f. (On vérifiera que, sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $f'(x)$ a le même signe que $(4x - 1)$.)

b) Dresser le tableau de variation de f.

3. a) Démontrer que, sur l'intervalle $[1, 2]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.

b) Donner un encadrement de cette solution avec une amplitude inférieure à 10^{-2}.

66. +++ Logarithme et acoustique

A. *Étude des variations d'une fonction*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5 ; 25]$ par : $f(x) = 8{,}68 \ln x + 93{,}28$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère défini au **3**.

1. a) Calculer $f'(x)$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,5 ; 25]$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,5 ; 25]$.

2. Reproduire et compléter le tableau de valeurs numériques ci-après, en faisant figurer les valeurs arrondies à l'entier le plus proche.

x	0,5	1	2	5	10	16	25
$f(x)$	88			108			122

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Pour le tracé, on prendra 1 cm pour 2 unités, en abscisses et en ordonnées. De plus, on graduera l'axe des ordonnées à partir de 86.

Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

B. *Application à l'acoustique*

Quand l'oreille d'une personne normale est soumise à une pression acoustique x, exprimée en bars, l'intensité sonore, exprimée en décibels, du bruit responsable de cette pression est donnée par :

$$f(x) = 8{,}68 \ln x + 93{,}28.$$

1. Déterminer l'intensité sonore, en décibels, correspondant à une pression acoustique de 14 bars :

a) graphiquement, en faisant apparaître les constructions utiles sur le graphique de la partie **A** ;

b) par le calcul.

2. Une personne normale ne peut supporter un bruit supérieur à 120 décibels. Déterminer la pression, en bars, que l'oreille de la personne subit si elle est soumise à une intensité sonore de 120 décibels :

a) graphiquement, en faisant apparaître les constructions utiles sur le graphique de la partie **A** ;

b) en résolvant par le calcul l'équation $f(x) = 120$.

67. +++ Étude des variations d'une fonction, tracé de sa courbe représentative, recherche de solutions approchées d'une équation

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées. On s'intéresse, dans ce problème, à la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A. *Étude d'une fonction auxiliaire*

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \ln x - x^2.$$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$.

B. *Étude de la fonction f*

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement cette limite.

b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) Justifier que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

d) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

2. a) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Établir le tableau de variation complet de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3. a) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe $\mathscr{C}$ tel que la tangente en ce point soit parallèle à l'asymptote $\mathscr{D}$.

b) Déterminer une équation de la droite T, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e. On rappelle que e est le nombre réel tel que ln e = 1.

4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, 1[$. On appelle B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α.

b) Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α.

5. Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, placer les points A et B puis tracer les droites $\mathscr{D}$, T et la courbe $\mathscr{C}$.

CORRIGÉ P. 341

68. +++ Avec une fonction auxiliaire, équation $f(x) = \lambda$

I. On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = 2\frac{\ln x}{x} + 1.$$

1. a) Calculer la limite de la fonction g en 0.

b) Calculer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Calculer $g'(x)$ et montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x^2}$.

3. Étudier le signe de $g'(x)$, suivant les valeurs du nombre réel x.

Donner le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (on indiquera la valeur exacte de $g(\mathrm{e})$).

4. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $]0, \mathrm{e}]$.

b) Déterminer la valeur du nombre réel x_0 arrondie au dixième.

c) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$, suivant les valeurs de x.

II. On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 + x$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Sur l'annexe, à rendre avec la copie, on a construit la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $]0, 3]$.

1. a) Calculer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.

3. a) Donner le tableau de variation de la fonction f.

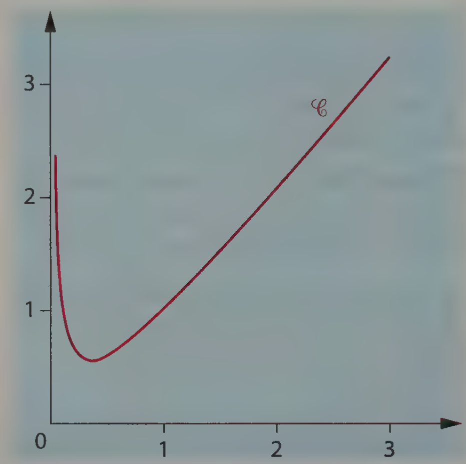
b) Calculer la valeur de $f(x_0)$ arrondie au dixième (on utilisera pour x_0 la valeur 0,7).

4. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

b) Étudier la position relative de la tangente T et de la courbe $\mathscr{C}$.

c) Construire la droite T sur la figure de l'annexe.

Annexe



Suite géométrique et résolution d'inéquations de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$

69. +++ Désintégration du carbone 14

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif : le carbone 14.

1. Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$, N_1 le nombre d'atome de carbone 14 un siècle après, N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles (k entier). On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps : environ 1,24 % par siècle.

a) Donner l'expression de N_1 en fonction de N_0, puis de N_{k+1} en fonction de N_k.

b) En déduire la nature de la suite (N_k) et l'expression de N_k en fonction de N_0 et k.

2. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre.

Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 40 % de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin.

Calculer l'âge de ces fragments. On arrondira le résultat au siècle près.

CORRIGÉ P. 342

70. ++ Production d'énergie éolienne

On se propose d'étudier l'évolution de la capacité mondiale de production d'énergie éolienne en mégawatts (MW).

On dispose des données suivantes : en 2008, cette capacité était égale à 120 791 MW.

On admet que cette capacité augmente de 20 % chaque année depuis 2008.

1. Déterminer les capacités mondiales pour 2009 et 2010 avec cette hypothèse.

2. On note u_n la capacité mondiale de production d'énergie éolienne l'année $(2008 + n)$. On a donc $u_0 = 120\,791$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

3. a) Déterminer le plus petit entier p tel que :

$$(1{,}2^p) \geq \frac{250\,000}{120\,791}.$$

b) En déduire, en le justifiant, à partir de quelle année on peut prévoir que la capacité mondiale de production d'énergie éolienne dépassera 250 000 MW.

71. +++ Désintégrons...

La désintégration de l'atome de radium donne de l'hélium et une émanation gazeuse, le radon, qui elle-même se désintègre avec le temps selon la formule :

$$m(t + 1) - m(t) = -0{,}165\, m(t)$$

où $m(t)$ désigne la masse du gaz au bout du t-ième jour.

1. Calculer $m(t + 1)$ en fonction de $m(t)$.

2. Calculer $m(t)$ en fonction de t et $m(0)$.

3. Au cours de quelle journée la masse d'un échantillon de radon atteindra-t-elle la moitié de sa valeur initiale ?

4. Même question qu'au **3.** avec le quart de sa valeur initiale.

▶ *Avec prise d'initiatives.*

72. +++ Isolation phonique

L'unité d'intensité du son utilisée dans cet exercice est le décibel (symbole dB). Une source sonore émet un son d'intensité 100 décibels ($u_0 = 100$).

On appelle u_n l'intensité du son mesurée après la traversée de n plaques d'isolation phonique, sachant que chaque plaque d'isolation absorbe 10 % de l'intensité du son qui lui parvient.

Par exemple $u_1 = u_0 - \dfrac{10}{100} u_0$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

En déduire la nature de la suite (u_n).

3. Donner l'expression de u_n en fonction de u_0 et de n.

4. Quelle intensité sonore obtient-on avec dix plaques d'isolation phonique ?

5. Déterminer à partir de quelle valeur de n l'intensité du son devient inférieure à 1 dB.

▶ *Un peu d'acoustique*

• *Avion au décollage :*	*130 dB ;*
Seuil de douleur :	***120 dB***
• *Concert :*	*105 dB ;*
Seuil de danger :	***90 dB***
• *Salle de classe :*	*65 dB ;*
• *Voix humaine normale :*	*45 dB ;*
• *Chuchotements :*	*25 dB.*

73. +++ Pression atmosphérique

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est 1 013 hectopascals.

Dans cet exercice, on admet que la pression atmosphérique diminue de 1,25 % à chaque élévation de 100 m.

Pour tout entier naturel n, on note P_n la pression, exprimée en hectopascal, à l'altitude $100n$, exprimée en mètres.

Soit (P_n) la suite numérique des valeurs prises par cette pression atmosphérique.

On a alors $P_0 = 1\,013$.

1. Calculer les pressions P_1 et P_2, arrondies à l'unité, aux altitudes 100 et 200.

2. a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.

b) En déduire la nature de la suite (P_n). Préciser sa raison et son premier terme.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$P_n = 1\,013 \times (0{,}987\,5)^n.$$

3. Calculer la pression atmosphérique, arrondie à l'unité, à l'altitude 3 200.

4. Calculer à partir de quelle altitude, à 100 près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascals.

74. +++ Conservation de denrée alimentaire

Cet exercice a pour but d'étudier l'évolution du nombre de bactéries au cours du temps dans une situation de nature expérimentale.

On dépose un morceau de viande sur un comptoir l'été à 14 h 00, la température avoisine les 35 °C. Ce morceau de viande contient 100 bactéries, et dans ces conditions, le nombre de bactéries double toutes les 15 minutes.

On note u_0 le nombre de bactéries à 14 h 00, u_1 le nombre de bactéries à 14 h 15, u_2 le nombre de bactéries à 14 h 30, et u_n le nombre de bactéries n quarts d'heure après 14 h 00, n étant un entier naturel.

1. Recopier et compléter le tableau suivant (on suppose que les conditions ne changent pas durant tout le temps de l'expérience) :

Heure	14 h 00	14 h 15	14 h 30	14 h 45	15 h 00
Rang : n	0	1	2	3	4
Nombre de bactéries u_n	100				

2. Si u_n est le nombre de bactéries à un moment déterminé, u_{n+1} correspond au nombre de bactéries 15 minutes plus tard.

Quelle est la relation entre u_n et u_{n+1} ?

3. Préciser la nature de la suite (u_n) définie précédemment et sa raison.

4. Exprimer u_n en fonction de n.

5. Calculer le nombre de bactéries à 17 h 00.

6. On estime qu'à partir de 150 000 bactéries présentes dans un aliment, celui-ci a atteint un niveau impropre à la consommation pour l'être humain.

Jusqu'à quelle heure, arrondie au quart d'heure, l'être humain peut-il consommer sans risque le morceau de viande ?

75. +++ Minerai de fer

L'entreprise Iron SA exploite un filón de minerai de fer depuis 1950.

La première année d'extraction l'entreprise a produit 20 000 tonnes de fer. Cependant depuis 1950 en raison des difficultés croissantes d'extraction et de l'appauvrissement du filon, les quantités extraites diminuent de 1 % par an.

On appelle T_n le nombre de tonnes extraites l'année $(1950 + n)$. On a donc $T_0 = 20\,000$.

Les résultats seront arrondis à la tonne.

1. Justifier que $T_1 = 19\,800$ puis calculer T_2 et T_3.

2. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.

3. Quelle est la nature de la suite (T_n) ? En déduire l'expression de T_n en fonction de n.

4. Quelle est la quantité extraite en 2010 ?

5. Montrer que la quantité totale extraite entre 1950 et l'année $(1950 + n)$ est : $S_n = 2\,000\,000 \times (1 - 0{,}99^{n+1})$.

6. En 1950, les géologues estimaient que ce filon recelait 1 000 000 de tonnes de métal. En quelle année théoriquement le filon sera-t-il épuisé ?

Utiliser un logiciel

76. +++ Test en laboratoire TICE

Un laboratoire pharmaceutique souhaite tester le temps de réaction d'un nouvel antibiotique contre le bacille de Koch responsable des tuberculoses. Pour cela, on dispose d'une culture de 10^{10} bactéries dans laquelle on introduit l'antibiotique. On remarque que le nombre de bactéries est divisé par quatre toutes les heures.

A. On a créé la feuille de calcul suivante donnant le nombre de bactéries en fonction du temps n en heures.

	A	B
1	Nombre d'heures n	Nombre de bactéries
2	0	10 000 000 000
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule B3, pour calculer le nombre de bactéries au bout d'une heure, de sorte qu'en recopiant cette formule vers le bas on puisse compléter les lignes suivantes ?

2. On a recopié la formule ci-dessus jusqu'en B18.

a) Quelle formule se trouve en B18 ?

b) Que représente concrètement la valeur calculée dans cette cellule ?

B. On note u_0 le nombre de bactéries au moment de l'introduction de l'antibiotique.

Soit (u_n), $n \in \mathbb{N}$, la suite représentant le nombre de bactéries, contenues dans la culture, n heures après l'introduction de l'antibiotique.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,25.

3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Calculer au bout de combien d'heures le nombre de bactéries deviendra inférieur à 100.

77. +++ Fréquence cardiaque et tableur TICE

Lors d'une expérience on a mesuré la fréquence cardiaque, en battements par minute, d'un coureur de 400 mètres. Cette fréquence cardiaque est modélisée par la formule :

$f(x) = 65 + 22{,}149 \times \ln(x + 1)$, où x représente la distance parcourue depuis le départ avec $0 \leq x \leq 400$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur [0, 400].

2. Sur une feuille de calcul, on a entré en cellule B2 la formule =65+22.149*LN(A2+1) (voir l'annexe).

Quelle est la formule contenue dans la cellule B3 ?

3. a) Lire la fréquence cardiaque du sportif au début de la course.

b) Calculer la fréquence cardiaque du sportif à mi-course (arrondir à l'unité).

4. On cherche au bout de combien de mètres la fréquence cardiaque du sportif est égale à 180 battements par minute.

a) Déterminer cette distance à l'aide du graphique.

b) Donner un encadrement de cette distance à l'aide de l'extrait ci-contre de la feuille de calcul, sachant que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0, 400].

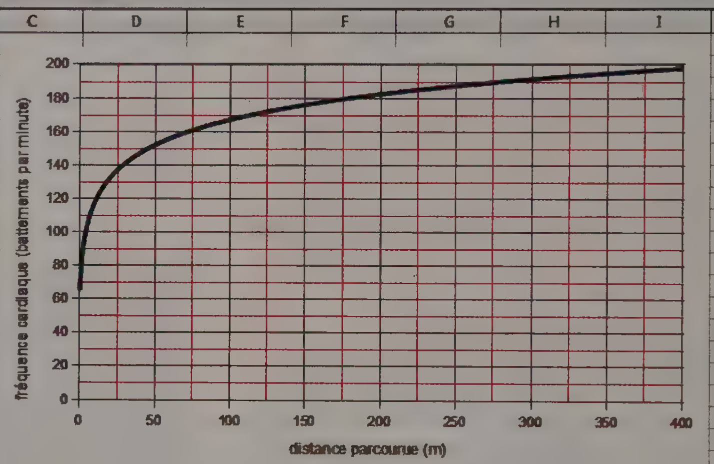
B181 | =65+22,149*LN(A181+1)

	A	B	C	D
179	177	179,771		
180	178	179,895		
181	179	180,019		
182	180	180,142		
183	181	180,264		
184	182	180,385		

Annexe de l'exercice 77

B2 | =65+22,149*LN(A2+1)

	A	B
1	x	f(x)
2	0	65
3	1	80,353
4	2	89,333
5	3	95,705
6	4	100,647
7	5	104,686
8	6	108,1
9	7	111,058
10	8	113,666
11	9	116
12	10	118,111
13	11	120,038
14	12	121,811
15	13	123,452
16	14	124,981
17	15	126,41
18	16	127,753
19	17	129,019
20	18	130,216



78. +++ Culture de bactéries

TICE

On étudie une culture de bactéries en milieu liquide. Cette culture comporte 6 000 bactéries au début de l'étude (c'est-à-dire à l'instant $t = 0$). On note le nombre de bactéries toutes les heures.

1. Le nombre de bactéries augmente de 10 % chaque heure.

Quelle formule peut-on entre en B3, puis recopier vers le bas, pour compléter la colonne B ?

2. Calculer le nombre de bactéries au bout d'une heure, de deux heures, de trois heures.

3. Pour tout entier naturel n, on désigne par u_n le nombre de bactéries au bout de n heures.

a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b) Exprimer pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

c) Déterminer au bout de combien d'heures le nombre de bactéries aura doublé.

	A	B
1	Temps (heures)	Nombre de bactéries
2	0	6 000
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

CHAPITRE 5

Fonctions exponentielles

LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e SERT DE MODÈLE MATHÉMATIQUE POUR ÉTUDIER DES ÉVOLUTIONS EN BIOTECHNOLOGIE, EN MÉDECINE, ET DES SITUATIONS DIVERSES EN SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES.

CAPACITÉS

- Connaître les variations, les limites et la représentation graphique de la fonction exponentielle.
- Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.
- Passer de $\ln x = a$ à $x = e^a$ et inversement.
- Passer de $\log x = a$ à $x = 10^a$ et inversement.
- Connaître et utiliser $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$.

ACTIVITÉS *d'approche*

ACTIVITÉ 1 — Trouver un lien géométrique entre les courbes représentatives de deux fonctions particulières

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1° Soit M un point quelconque du plan de coordonnées (x, y) et soit M′ le point de coordonnées (y, x) obtenues en permutant l'abscisse et l'ordonnée de M.

a) Démontrer que le milieu I de [MM′] est sur une droite fixe $\mathscr{D}$ indépendante de M.

b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{i}+\vec{j}$, quel que soit le point M.

c) En déduire quelle transformation géométrique associe à tout point $M(x, y)$ du plan le point $M'(y, x)$.

2° Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice les deux courbes suivantes :

a) la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la restriction f de la fonction $x \mapsto x^2$ à l'intervalle $[0, +\infty[$,

b) la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

3° a) Pour tout nombre positif a, quel est le nombre positif b tel que $b^2 = a$?

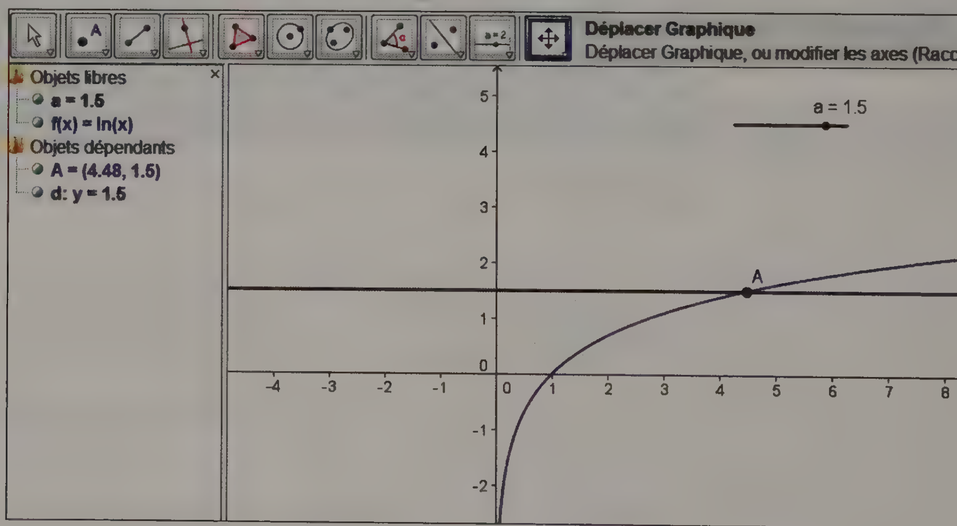
b) Utiliser le résultat de la question **1°c)** pour expliquer comment on passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}'$, et inversement.

ACTIVITÉ 2 — Découvrir le tracé de la fonction $x \mapsto \exp(x)$

LOGICIEL UTILISÉ
GeoGebra

Soit a un nombre réel. On considère l'équation $\ln b = a$, pour laquelle l'inconnue est b.

Dans un fichier GeoGebra, avec un repère orthonormal, créer un curseur a allant de -5 à 3 avec un incrément 0.1 puis saisir f(x)=ln(x) et d:y=a. Créer le point A, intersection de la droite d'équation $y = a$ et de la courbe représentative de la fonction ln.



1° Pour $a = 1{,}5$, que vaut, approximativement, la solution de l'équation $\ln b = a$? Comment lit-on cette solution sur le graphique ?

2° Pour $a = -2$, que vaut, approximativement, la solution de l'équation $\ln b = a$?

3° Entrer dans la barre de saisie b=x(A) ; créer le point B de coordonnées (a, b) puis le segment [AB].

Le nombre b est l'exponentielle de a et on note $b = \exp(a)$. Ainsi le point B se situe sur la courbe de la fonction exponentielle exp. Afficher la trace du point B et bouger le curseur.

a) Conjecturer la nature de la transformation géométrique permettant de passer de la courbe de la fonction logarithme népérien à la courbe de la fonction $x \mapsto \exp(x)$?

b) Vérifier cette conjecture à l'aide des outils de GeoGebra.

1 Fonction $x \mapsto \exp(x)$

A. Définition

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la fonction logarithme népérien ; nous avons vu en particulier que :

- **la fonction ln est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$,**
- **pour tout x de $]0, +\infty[$, $\ln' x = \frac{1}{x} > 0$,**
- **$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$,**
-

x	0		$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

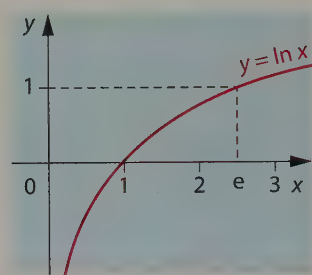


Figure 1

$\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.

Quand x varie dans l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction ln est strictement croissante et prend pour valeurs tous les nombres réels. En particulier il existe un nombre strictement positif unique tel que $\ln x = 0$: c'est $x = 1$.

De même il existe un nombre strictement positif unique tel que $\ln x = 1$: c'est $x = e$.

Plus généralement, a étant un nombre réel quelconque, il existe un nombre strictement positif unique b tel que $\ln b = a$.

Par définition ce nombre b est appelé exponentielle de a et noté $\exp(a)$.

b est strictement positif.

DÉFINITION

Pour tout nombre réel a, le réel $\exp(a)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue b : $\ln b = a$.

Exemples

$\exp(0) = 1$ car 1 est l'unique solution de l'équation $\ln b = 0$.

$\exp(1) = e$ car e est l'unique solution de l'équation $\ln b = 1$.

Nous avons $1 \overset{\ln}{\longmapsto} \ln 1 = 0$ et, en sens inverse, $1 = \exp(0) \longleftarrow\!\shortmid\ 0$.

De même $e \overset{\ln}{\longmapsto} \ln e = 1$ et, en sens inverse, $e = \exp(1) \longleftarrow\!\shortmid\ 1$.

Plus généralement nous avons $b \overset{\ln}{\longmapsto} \ln b = a$ et, en sens inverse, $b = \exp(a) \longleftarrow\!\shortmid\ a$.

Nous définissons ainsi une nouvelle fonction, appelée **fonction exponentielle**, notée **exp**, définie sur $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans $]0, +\infty[$.

La fonction ln définit « l'aller » ; la fonction exp définit « le retour ».

$]0, +\infty[\xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$ et en sens inverse $]0, +\infty[\xleftarrow{\exp} \mathbb{R}$.

Avec les notations usuelles en mathématiques, x (ou t) pour la variable et y pour la valeur prise par la fonction, la fonction exponentielle est définie de la façon suivante.

$x \overset{\exp}{\mapsto} y = \exp(x)$

$\mathbb{R} \to]0, +\infty[$

$x = \ln y \underset{\ln}{\leftarrow} y$

DÉFINITION

La fonction ***exponentielle***, notée ***exp***, est la fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre *strictement positif* unique y tel que $x = \ln y$.

$\exp : x \mapsto y = \exp(x)$ défini par $x = \ln y$

$\mathbb{R} \to]0, +\infty[$.

Nous déduisons immédiatement de cette définition que :

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Pour tout nombre réel x et tout nombre réel strictement positif y,
$y = \exp(x)$ si et seulement si $x = \ln y$.

$x \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} \exp x$

$x \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \ln x$

Remarques

- Pour tout nombre réel x, $\exp x > 0$.
- Pour tout nombre réel x, $\ln(\exp x) = x$.
- Pour tout nombre réel de $]0, +\infty[$, $\exp(\ln x) = x$.

B. Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels a et a', posons $\exp(a) = b$ et $\exp(a') = b'$.

Voir le paragraphe **A**.

Par définition de $\exp(a)$, nous avons $a = \ln b$ (égalité 1) et, de même, $a' = \ln b'$ (égalité 2).

Voir le chapitre 4.

Or nous savons que la fonction logarithme népérien transforme un produit en somme : $\ln(bb') = \ln b + \ln b'$.

Donc $\ln(bb') = a + a'$ d'après les égalités 1 et 2 ci-dessus.

Donc, d'après la définition de l'exponentielle d'un nombre réel, $bb' = \exp(a + a')$.

Voir la première ligne de la démonstration.

Or b et b' ont été définis par $b = \exp(a)$ et $b' = \exp(a')$.

Donc, en définitive : $\exp(a) \times \exp(a') = \exp(a + a')$.

THÉORÈME

L'exponentielle transforme une somme en produit.

Pour tous nombres réels a et a', $\exp(a + a') = \exp(a) \times \exp(a')$.

Remarque

Ce résultat est à rapprocher d'un résultat sur les puissances : $x^{n+n'} = x^n \times x^{n'}$.

C. Notation e^x

Voir le chapitre 4.

Nous savons que, pour tout nombre entier relatif n, $\ln(e^n) = n$.

Donc, en prenant l'exponentielle de chacun de ces nombres :

$\exp(\ln(e^n)) = \exp(n)$.

Voir la deuxième remarque du paragraphe **A.**.

Le théorème du paragraphe **B.** conduit à cette convention.

En définitive, comme $\exp(\ln(e^n)) = e^n$: pour tout nombre **entier relatif** n, $\exp(n) = e^n$. Or $\exp x$ est défini pour tout nombre **réel** x.

On convient de définir e^x lorsque x est un nombre réel en étendant l'égalité précédente aux nombres réels.

NOTATION

Pour tout nombre réel x, $\exp(x) = e^x$.

Avec cette notation, les résultats précédents deviennent :

À l'aide d'une calculatrice, découvrez $e^{1,32}$, $e^{-0,7}$.

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel y **strictement positif**, $y = e^x$ si et seulement si $x = \ln(y)$.
- Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$.
- Pour tout nombre réel x, $\ln(e^x) = x$.

Pour tout nombre réel **strictement positif** x, $e^{\ln(x)} = x$.

La relation fonctionnelle et ses conséquences s'écrivent :

Les propriétés énoncées ci-contre se retiennent en appliquant à la fonction exponentielle et aux exposants réels les règles de calcul habituelles sur les puissances. D'où l'intérêt de la notation e^x pour $\exp x$.

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Pour tous nombres réels a et b,

$e^{a+b} = e^a \times e^b$;

$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ et $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$;

- Pour tout nombre réel a et tout nombre entier relatif n, $(e^a)^n = e^{na}$.

D. Étude des variations, courbe représentative

Dérivée

Nous admettons le théorème suivant :

THÉORÈME

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée.

La fonction dérivée de $f : x \mapsto e^x$ est $f' : x \mapsto e^x$.

Sens de variation

Pour tout nombre réel x, $(\exp)'(x) = e^x > 0$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limites de e^x en $-\infty$ et en $+\infty$

Voir le paragraphe **A.**.

Nous savons que $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Nous admettons que :

Les bornes des intervalles de départ et d'arrivée « se correspondent » en quelque sorte.

THÉORÈME

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x) = e^x$		$+$	
$f(x) = e^x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative

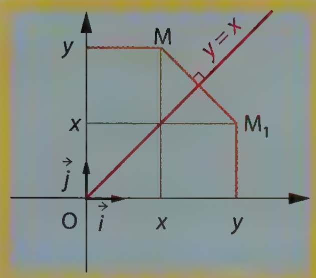


Figure 2

Le plan est muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Puisque $y = \exp x$ si et seulement si $x = \ln y$, au point $M(x, y)$ de la courbe représentative de la fonction exp peut être associé le point $M_1(y, x)$ de la courbe représentative de la fonction ln (figure 2).

M et M_1 se correspondent par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$.

Les courbes représentatives des fonctions exp et ln se déduisent l'une de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$.

Animation vidéo

Par exemple, observer que le point de coordonnées (0, 1) de la courbe représentative de exp est le symétrique du point de coordonnées (1, 0) de la courbe représentative de ln ($1 = e^0$ équivaut à $0 = \ln(1)$).

On peut faire la même remarque pour les points de coordonnées (1, e) et (e, 1) ($e = e^1$ équivaut à $1 = \ln e$).

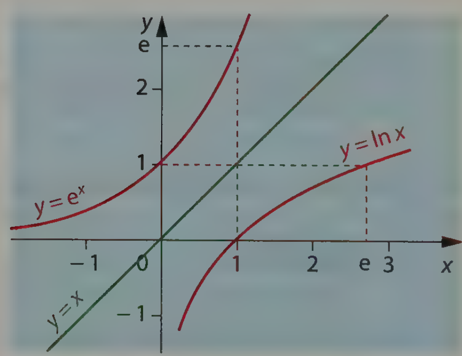


Figure 3

Nous avons vu que $\ln x$ augmente « lentement » quand x devient de plus en plus grand. Par symétrie, e^x augmente « rapidement » quand x devient de plus en plus grand.

Remarque

Puisque la courbe représentative de la fonction ln admet pour asymptote l'axe des ordonnées, la courbe représentative de la fonction exp admet pour asymptote l'axe des abscisses, ce qui est l'interprétation graphique de $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Limite de $\dfrac{e^x}{x}$ en $+\infty$

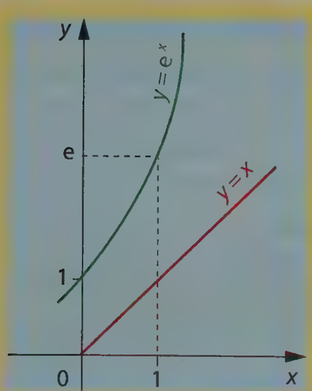


Figure 4

Nous observons sur la figure 4 que la courbe représentative de la fonction exp « monte plus rapidement » que la droite représentant la fonction $x \mapsto x$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes.

Pour comparer les deux nombres positifs e^x et x lorsque x devient de plus en plus grand, nous allons étudier leur quotient $\dfrac{e^x}{x}$.

x	10	100	200
$\dfrac{e^x}{x}$	2 203	$2{,}69 \times 10^{41}$	$3{,}61 \times 10^{84}$

Dans la vie courante « croissance exponentielle » est synonyme de croissance rapide.

Il semble que, lorsque x devient grand, $\dfrac{e^x}{x}$ devient de plus en plus grand mais les théorèmes relatifs à la limite d'un quotient ne permettent pas de conclure.

Nous admettons le résultat suivant :

THÉORÈME

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty .$$

Sur une copie écrivez le résultat tel qu'il est encadré.

Ce résultat peut se retenir sous la forme imagée suivante : « e^x l'emporte sur x en $+\infty$ ».

E. Comparaison des comportements en $+\infty$ de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien avec les fonctions puissances

Les fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x^n$, où n est un nombre entier naturel non nul, ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Pour comparer le comportement de ces fonctions, après observation à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur conduisant à émettre des conjectives, nous avons admis le théorème suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

Voir au chapitre 4 la fin du paragraphe **1**.

« Une fonction puissance l'emporte sur la fonction logarithme népérien en $+\infty$ ».

Observez avec une calculatrice ou un tableur le comportement de $\dfrac{e^x}{x^3}$ pour de grandes valeurs de x.

Nous admettons maintenant le résultat suivant qui confirme la croissance très rapide de la fonction exponentielle.

THÉORÈME

Pour tout nombre entier naturel n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Pour $n = 1$, c'est le résultat précédent.

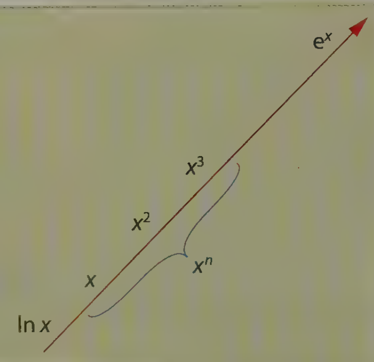
« La fonction exponentielle l'emporte sur une fonction puissance en $+\infty$ ».

Exemple

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{100}} = +\infty .$$

ON PEUT RETENIR QUE

Pour les grandes valeurs de x, les nombres $\ln x$, x, x^2, x^3, … , e^x se classent dans cet ordre du plus petit au plus grand.



EXERCICE résolu 1

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x^2$.

1° Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2\left(\dfrac{e^x}{x^2} - 1\right)$.

2° En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

MÉTHODE

Faire apparaître une forme $\dfrac{e^x}{x^n}$.

Appliquer le théorème ci-dessus.

Appliquer un théorème sur la limite d'un produit.

SOLUTION

1° Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2\left(\dfrac{e^x}{x^2} - 1\right) = \dfrac{x^2 e^x}{x^2} - x^2$,

$x^2\left(\dfrac{e^x}{x^2} - 1\right) = e^x - x^2 = f(x)$.

2° $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty$.

De $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty$,

on déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(\dfrac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty$ d'après un théorème sur la limite d'un produit.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 18

F. Fonction composée de la forme e^u

Ces limites sont abordées pour traiter des situations issues des autres disciplines.

Limites de e^u

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$. Pour calculer $f(x)$ nous pouvons calculer d'abord $u(x) = -2x$, puis calculer $f(x) = e^{u(x)}$.

Nous savons que $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$.

x	1	10	100
$u(x) = -2x$	-2	-20	-200
$f(x) = e^{u(x)}$	0,135	2×10^{-9}	$1,4 \times 10^{-87}$

Nous observons sur le tableau ci-dessus donnant des valeurs arrondies de $f(x)$ que lorsque x augmente, $f(x)$ semble se rapprocher de 0.

Nous admettons le résultat suivant qui ressemble aux théorèmes admis pour la limite d'une fonction de la forme u^n ou $\ln u$.

THÉORÈME

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} e^x = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = c$.

EXERCICE résolu 2

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$.

1° Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2° Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

MÉTHODE

Exprimer $f(x)$ sous la forme $e^{u(x)}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x)$.

Appliquer le théorème ci-dessus.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$.

Appliquer le théorème ci-dessus.

SOLUTION

1° Pour tout réel x, $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = -2x$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ car $f(x) = e^{u(x)}$.

2° $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car $f(x) = e^{u(x)}$.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 23

Dérivée de e^u

Nous admettons le théorème suivant qui ressemble aux théorèmes admis pour la dérivée d'une fonction de la forme u^n ou $\ln u$.

THÉORÈME

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et : $\boldsymbol{(e^u)' = u'e^u}$.

EXERCICE résolu 3

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$.

Déterminer $f'(x)$.

MÉTHODE

Exprimer $f(x)$ sous la forme $e^{u(x)}$.

Déterminer $u'(x)$.

Appliquer le théorème ci-dessus.

SOLUTION

Pour tout réel x, $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$.

Pour tout réel x, $u'(x) = 2x$.

Pour tout réel x, $f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$,

donc $f'(x) = 2x\, e^{x^2}$.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 32

Primitives de $u'e^u$

n est un entier relatif différent de – 1.

Nous admettons le théorème suivant qui ressemble aux résultats admis pour les primitives d'une fonction de la forme $u'u^n$ ou $\frac{u'}{u}$.

THÉORÈME

Si sur un intervalle I une fonction f est telle que $\boldsymbol{f(x) = u'(x)e^{u(x)}}$, alors les primitives F de f sur I sont définies par $\boldsymbol{F(x) = e^{u(x)} + C}$ où C est une constante réelle quelconque.

EXERCICE résolu 4

ÉNONCÉ

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$.

MÉTHODE

Faire apparaître une forme $u'(x)e^{u(x)}$.

Appliquer le théorème ci-dessus.

SOLUTION

e^{2x} n'est pas exactement de la forme $u'(x)e^{u(x)}$ car pour $u(x) = 2x$, on a $u'(x) = 2$.

Pour obtenir la forme cherchée, on écrit : $f(x) = \frac{1}{2}(2e^{2x})$.

Les primitives de f sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$ où C est une constante réelle quelconque.

VOIR AUSSI LES EXERCICES CORRIGÉS 42 à 44

2 Fonction exponentielle de base 10

A. Nombre 10^a

Définition

Dans le chapitre précédent, nous avons défini la fonction logarithme décimal ; nous avons remarqué que les variations de la fonction log sont les mêmes que celles de la fonction ln.

Quand x varie dans $]0, +\infty[$, la fonction log est strictement croissante et prend pour valeurs tous les nombres réels.

En particulier, il existe un nombre strictement positif unique tel que $\log x = 0$: c'est $x = 1$.

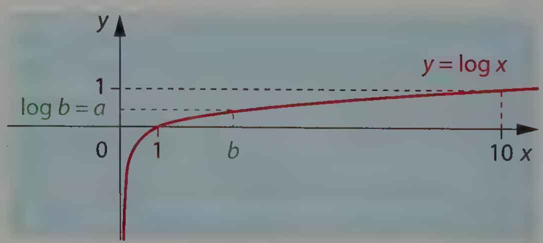


Figure 5

De même, il existe un nombre strictement positif unique tel que $\log x = 1$: c'est $x = 10$.

Plus généralement, a étant un nombre réel quelconque, il existe un nombre strictement positif unique b tel que $\log b = a$.

Par définition, ce nombre b est noté 10^a.

b est strictement positif.

DÉFINITION

Pour tout nombre réel a, le réel 10^a est l'unique solution de l'équation d'inconnue b : $\log b = a$.

exp(ln x) = x.

Remarque

Pour tout nombre **entier relatif** n, $\ln 10^n = n \ln 10$, donc, $\exp(\ln 10^n) = \exp(n \ln 10)$, $\exp(\ln 10^n) = 10^n$, donc $10^n = e^{n\ln 10}$.
On convient d'étendre l'égalité précédente aux nombres réels : pour tout nombre réel a, $10^a = e^{a\ln 10}$.

Exemple

Utilisez la touche $\boxed{\wedge}$ ou y^x.

Observez avec votre calculatrice que
$10^{-0,8} \approx 0,16$; $10^{1,5} \approx 31,62\ldots$

Propriétés

En utilisant la définition de 10^a et les relations fonctionnelles de exp et de ln, on démontre les propriétés suivantes :

Ces égalités ne nécessitent aucun effort de mémorisation car ce sont les mêmes qu'avec les nombres 10^n où n est un nombre entier mais ici a est un nombre réel.

$\mathbf{10^a > 0}$; $\mathbf{10^{a+b} = 10^a \times 10^b}$;

$\mathbf{10^{-a} = \dfrac{1}{10^a}}$; $\mathbf{\left(\dfrac{1}{10}\right)^a = \dfrac{1}{10^a}}$;

$\mathbf{10^{a-b} = \dfrac{10^a}{10^b}}$; $\mathbf{(10^a)^b = 10^{ab}}$;

$\mathbf{\ln 10^a = a \ln 10}$.

B. Définition

DÉFINITION

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto 10^x = e^{x\ln 10}$ est appelée **fonction exponentielle de base 10**.

C. Sens de variation

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto 10^x = e^{x\ln 10}$ est de la forme e^u, avec $u(x) = x \ln 10$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'e^u$ avec $u'(x) = \ln 10$ car ici $\ln 10$ est une constante, donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathbf{f'(x) = \ln 10\, e^{x\ln 10}}$.

$\ln 10 > 0$. On déduit les variations de f de celle de la fonction exponentielle (de base e).

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	+
Variations de $x \mapsto 10^x$	↗

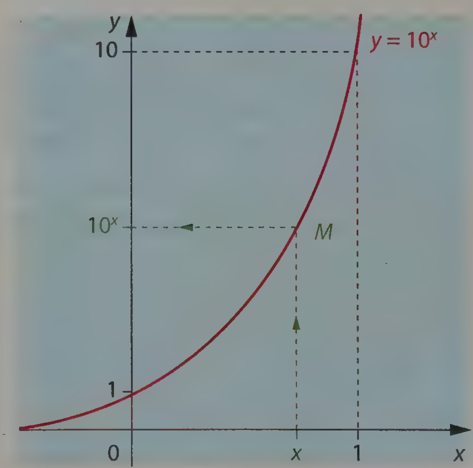


Figure 6

D. Courbe représentative

On obtient la courbe de la figure 6.

3 Fonctions puissances définies sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto x^{\alpha}$, avec α nombre réel strictement positif

Attention au cas où $n = 0$: 0^0 n'est pas défini et pour tout $x \neq 0$, $x^0 = 1$.

Nous connaissons les fonctions puissances suivantes :

- d'une part $x \mapsto x^n$, où n est un nombre entier naturel non nul, définies sur $\mathbb{R}$ (par exemple $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$) ;
- d'autre part $x \mapsto x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, où n est un nombre entier naturel non nul, définies sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ $\left(\text{par exemple } x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$.

Nous nous proposons d'introduire ici de nouvelles fonctions puissances : $x \mapsto x^{\alpha}$, où α est un nombre réel, définies sur $]0, +\infty[$.

A. Définition

Voir le paragraphe **2A.**.

Nous avons défini 10^a pour tout a de $\mathbb{R}$ par : $10^a = e^{a \ln 10}$.

DÉFINITION

Soit α un nombre réel strictement positif.
On appelle fonction « puissance α » la fonction f_{α} définie sur $]0, +\infty[$ par :
$\boldsymbol{f_{\alpha}(x) = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}}$.

Exemple

Dans le cas où $\alpha = \dfrac{1}{2}$, pour tout x de $]0, +\infty[$, $x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln x}$ par définition de x^{α}.

Donc $x^{\frac{1}{2}} = e^{\ln(\sqrt{x})}$ car $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln x$ (voir le chapitre 4 : **1B.**).

$\sqrt{x} \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \ln(\sqrt{x})$

Or $e^{\ln(\sqrt{x})} = \sqrt{x}$. Donc $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

La fonction « puissance $\dfrac{1}{2}$ » est la fonction racine carrée.

Sauf en 0 où seule la fonction racine carrée est définie.

B. Dérivée

On admet le résultat suivant.

Pour tout nombre réel α la fonction $\boldsymbol{f_{\alpha} : x \mapsto x^{\alpha}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\boldsymbol{f'_{\alpha}(x) = \alpha x^{\alpha - 1}}$.

La formule de dérivation de $x \mapsto x^n$ donnée en Première pour des exposants entiers naturels s'étend aux exposants réels.

C. Résoudre une équation de la forme $x^{\alpha} = k$ avec $k > 0$ et $\alpha > 0$

On utilise successivement :
- $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$;
- $\ln e^{x} = x$;
- si $\ln x = y$, $x = e^{y}$.

Exemple

On se propose de résoudre l'équation $x^{1,5} = 3$.

Par définition $x^{1,5} = e^{1,5\ln x}$, d'où les équations équivalentes :

$e^{1,5\ln x} = 3$; $\ln(e^{1,5\ln x}) = \ln 3$;

$1,5\ln x = \ln 3$; $\ln x = \dfrac{1}{1,5}\ln 3$;

$x = e^{\frac{1}{1,5}\ln 3} \approx 2,08$.

Ce qu'il faut savoir

Définition de la fonction $x \mapsto \exp(x)$

- La **fonction exponentielle**, notée exp, est la fonction qui a tout nombre réel x associe le nombre **strictement positif** unique y tel que $x = \ln(y)$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\exp : x \mapsto y = \exp(x)$ si et seulement si $x = \ln(y)$.

Notation e^{x}

- Pour tout nombre réel x, $\mathbf{\exp x = e^{x}}$.
- Pour tout nombre réel x, $\mathbf{\ln(e^{x}) = x}$.
- Pour tout nombre réel $a > 0$, $\mathbf{e^{\ln(a)} = a}$.

Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels a et b,
- $e^{a+b} = e^{a} \times e^{b}$;
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^{a}}$ et $e^{a-b} = \dfrac{e^{a}}{e^{b}}$;
- Pour tout nombre réel a et tout nombre entier relatif n, $(e^{a})^{n} = e^{na}$.

Dérivée

Si pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = e^{x}$ alors $f'(x) = e^{x}$.

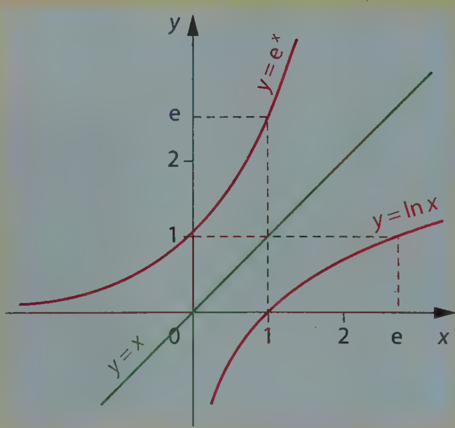
Limites en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$.

Tableau de variation et courbe représentative

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x) = e^{x}$		$+$	
$f(x) = e^{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout nombre réel x, $e^{x} > 0$.



Dérivée de e^u

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et : $(e^u)' = u'e^u$.

Primitives de $u'e^u$

Si sur un intervalle I une fonction f est telle que $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ alors les primitives F de f sur I sont définies par $F(x) = e^{u(x)} + C$ (C étant une constante réelle quelconque).

Autres limites

n est un entier naturel.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \; ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Fonction exponentielle de base 10

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$x \mapsto 10^x = e^{x \ln 10}$ est appelée **fonction exponentielle de base 10.**

Fonctions puissances

Soit α un nombre réel strictement positif.

On appelle fonction « **puissance α** » la fonction f_α définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

C'est pour que la pression par m^2 de section parallèle à la base soit la même sur toute la hauteur, qu'une fonction de la forme $x \mapsto ae^{bx}$ (où a et b sont des constantes) intervient dans le profil de la Tour Eiffel.

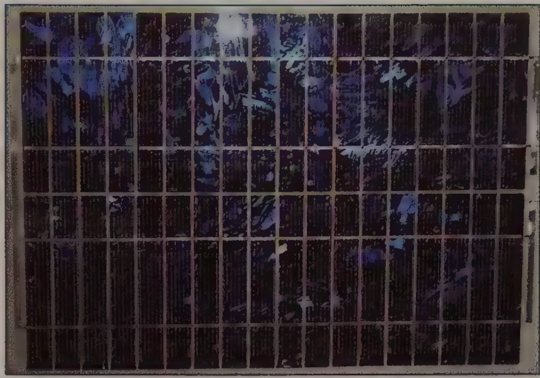
RÉPONSES P. 343

TP 1 Exploiter une fonction exponentielle en contexte technologique

Panneau photovoltaïque

LOGICIELS UTILISÉS
GeoGebra
Maxima

On étudie les caractéristiques d'un panneau voltaïque, pour lequel on a mesuré l'intensité du courant produit, selon la tension configurée, pour un rayonnement solaire de 1 000 W/m^2 à la température de 25 °C.



A. Modélisation de l'intensité selon la tension avec GeoGebra

On possède les mesures suivantes.

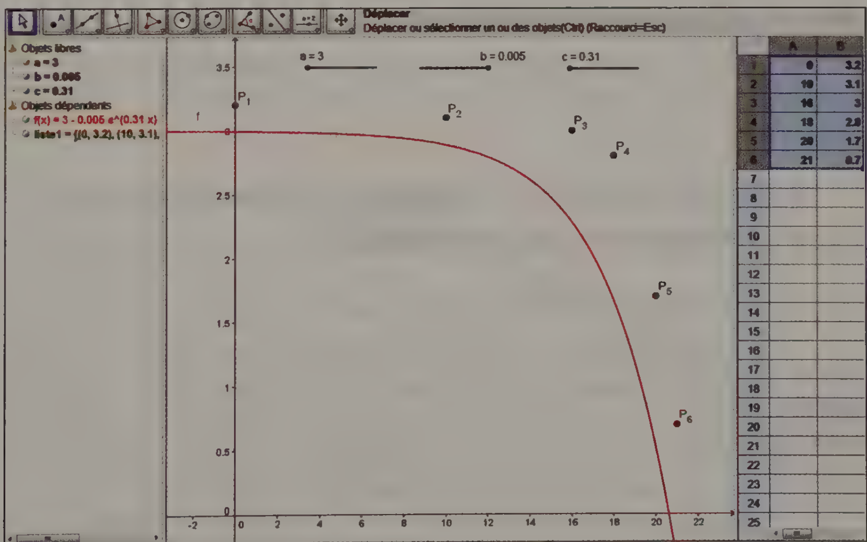
Tension x_i en volts	0	10	16	18	20	21
Intensité y_i en ampères	3,2	3,1	3	2,8	1,7	0,7

On cherche à modéliser l'intensité, exprimée en ampères, en fonction de la tension, exprimée en volts, par une fonction f du type $f(x) = a + b\,e^{cx}$, où a, b et c sont des nombres réels à déterminer.

À l'aide de GeoGebra, figurer les points P_i de cordonnées (x_i, y_i) (on peut pour cela afficher le tableur de GeoGebra, y entrer les coordonnées des points, puis, après sélection de la zone du tableur, faire un clic droit et « créer une liste de points »).

Créer un curseur a de 3 à 4 avec un incrément 0.1 ; un curseur b de 0 à 0.005 avec un incrément 0.001 et un curseur c de 0.31 à 0.32 avec un incrément 0.001.

Saisir f(x)= a+b*exp(c*x) pour obtenir une représentation graphique de la fonction f.



1. Quel est l'effet produit par le curseur a ?

2. Manipuler les curseurs de façon à ajuster « au mieux » les points P_i avec la courbe représentative de la fonction f. Quelles valeurs obtenez-vous pour les paramètres a, b et c ?

B. Recherche de la tension de puissance maximale avec Maxima

On modélise l'intensité, exprimée en ampères, en fonction de la tension x, exprimée en volts, par la fonction f définie par $f(x) = 3{,}202 - 0{,}002\,3\ \mathrm{e}^{0{,}314\,9x}$.

La puissance électrique produite, exprimée en watts, est alors donnée par $g(x) = xf(x)$.

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivant.

```
Fichier  Editer  Cell  Maxima  Equations  Algèbre  Calculs  Simplifier  Tracé de courbes  Numérique  Aide

(%i1) define(g(x),x*(3.202-0.0023*exp(0.3149*x)));
(%o1) g(x):=x(3.202-0.0023 %e^(0.3149 x))

(%i2) define(dg(x),diff(g(x),x));
(%o2) dg(x):=-7.2427000000000006 10^-4 x %e^(0.3149 x)-0.0023 %e^(0.3149 x)+3.202

(%i3) define(d2g(x),diff(dg(x),x));
(%o3) d2g(x):=-2.2807262300000004 10^-4 x %e^(0.3149 x)-0.00144854 %e^(0.3149 x)

(%i4) dg(0);
(%o4) 3.1997

(%i5) dg(22);
(%o5) -15.40112195391412

(%i6) dg(17);
(%o6) 0.11429465912855

(%i7) dg(17.1);
(%o7) -2.7803768687650887 10^-4
```

1. En utilisant l'expression fournie par la sortie n° 3, donner le signe de la dérivée seconde de la fonction g pour $x > 0$.

Que peut-on en déduire pour la fonction g' ?

2. Dresser le tableau de variation de la fonction g' sur l'intervalle $[0, 22]$.

3. Montrer que la fonction g' s'annule pour une valeur x_0 comprise entre 17 et 17,1.

4. Justifier que la tension de puissance maximale correspond, selon ce modèle, à la valeur x_0.

TP 2 Faire le lien entre suites géométriques et fonctions exponentielles

Interpolation de la suite $(1{,}3)^n$

LOGICIEL UTILISÉ
Tableur

On considère que le nombre de foyers équipés d'un nouveau bien de consommation augmente de 30 % chaque année, sur une période de 10 ans. Le nombre de foyers initialement équipés est donc multiplié par 1,3 la première année, par $1{,}3^2$ la deuxième année et par $1{,}3^{10}$ au bout de la dixième année. Si l'on souhaite estimer le nombre de foyers équipés au bout de 2 ans et trois mois par exemple, soit 2,25 années, il faut interpoler les termes $1{,}3^2$ et $1{,}3^3$ de la suite géométrique des puissances entières de 1,3.

A. Interpolation des termes de la suite selon un algorithme de dichotomie

1. Calculer et représenter sur une feuille de calcul les termes de la suite géométrique $(1{,}3^n)$ avec n entier entre 0 et 10.

2. Soit a, b, c trois termes consécutifs, strictement positifs, d'une suite géométrique. Justifier que l'on a $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$ et en déduire que le terme intermédiaire vaut $b = \sqrt{a \times c}$.

3. Utiliser l'expression précédente pour interpoler par « dichotomie », c'est-à-dire en coupant les abscisses en deux, les valeurs de la suite géométrique.

Ajouter sur le graphique les nouveaux points obtenus (pour cela, faire un clic droit sur le graphique, puis, selon le type de tableur, suivre « Sélectionner des données/Ajouter » ou « Données sources/Série/Ajouter » ou « Plages de données/Séries de données/Ajouter »).

Comment se positionnent les nouveaux points ?

4. Réitérer, comme précédemment, la dichotomie. Ajouter au graphique les nouveaux points obtenus.

Quel est le pas entre les abscisses des différents points actuellement calculés ?

5. Quelle est la réponse à la question posée en introduction : après 2,25 années par combien est multiplié le nombre initial de foyers équipés (arrondir à 10^{-3}) ?

B. Ajustement d'une courbe exponentielle

En répétant l'algorithme précédent, on obtiendrait des points de plus en plus serrés, prenant l'aspect de la courbe représentative d'une fonction. Pour obtenir le tracé de cette courbe, cliquer avec le bouton droit de la souris sur l'un des points de la suite géométrique initiale (par exemple le dernier point à droite) et ajouter une « courbe de tendance » de type exponentiel en demandant l'affichage de son équation.

1. Selon le tableur utilisé, l'équation affichée est $y = \mathrm{e}^{0{,}2624x}$ ou $y = 1{,}3^x$. En utilisant la formule $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$, expliquer ces deux possibilités.

2. Vérifier la réponse donnée à la question A.5., en calculant $1{,}3^{2{,}25}$.

TP 3 Modéliser en laboratoire à l'aide de fonctions exponentielle et puissance

LOGICIEL UTILISÉ

Tableur

Croissance d'une population de cellules tumorales (où les mathématiques sauvent des vies)

La plus petite tumeur détectable par palpation est constituée d'environ 10^9 cellules et les métastases ne sont détectables par imagerie médicale qu'à partir de 10^8 cellules environ. Un modèle mathématique de la population de cellules tumorales est, dans ces conditions, nécessaire pour affiner le diagnostic à partir des analyses réalisées en laboratoire (d'après D. Barbolosi *Repères-IREM* n° 83).

A. Modèle de croissance exponentielle

On considère une tumeur dont le nombre de cellules, doublant tous les 15 jours, est modélisé par la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.

1. Donner une interprétation de u_n.

2. Calculer, à l'aide d'un tableur, les valeurs de u_n pour n allant de 0 à 400.

3. Déterminer la première valeur de n pour laquelle $u_n > 10^9$.

À partir de combien de semaines, après l'apparition de la première cellule tumorale, la tumeur est-elle détectable par palpation ?

4. Représenter, à l'aide du tableur, les 33 premiers termes de la suite (u_n) en reliant les points par une courbe.

Cette courbe a pour équation $y = 2^x$ ou $y = \mathrm{e}^{x\ln 2}$. Pourquoi parle-t-on de croissance « exponentielle » ?

5. Un traitement chirurgical peut laisser un résidu indétectable de 10^3 cellules tumorales.

Résoudre l'équation $2^x = 10^6$ c'est-à-dire $\mathrm{e}^{x\ln 2} = 10^6$ et en déduire qu'il faut prévoir un examen 40 semaines après le traitement.

B. Modèle de croissance limitée

L'observation montre que la taille d'une tumeur ne croît pas indéfiniment mais se stabilise autour d'environ 10^{12} cellules. Un modèle mieux adapté consiste à considérer la suite (x_n) définie par $x_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = 2 \times x_n - 10^{12-12a} \times x_n^a$,

où a est un nombre réel de l'intervalle $[1 ; 1{,}1]$.

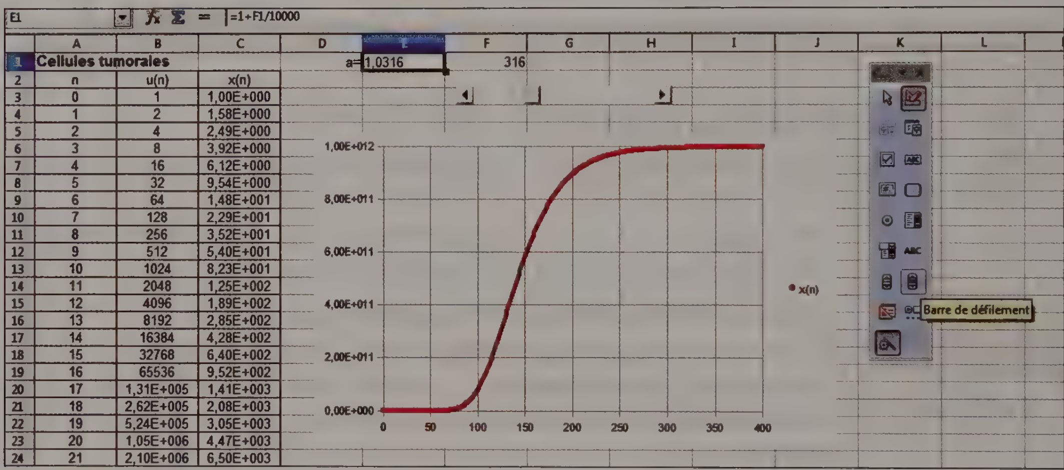
1. Créer un curseur pour le paramètre a selon la procédure suivante.

- OpenOffice Calc :

Afficher le menu de contrôles de formulaires en faisant Affichage/Barre d'outils/Contrôles de formulaires. Cliquer sur l'icône « Barre de défilement » de ce menu. Dessiner sur la feuille de calcul le rectangle du curseur à la souris. Par un clic droit sur le curseur obtenu, choisir Contrôle… puis entrer dans Général, max 1000 et dans Données, Cellule liée F1. Désactiver l'icône mode Conception de la barre d'outil. La valeur du paramètre a peut ensuite être définie en cellule E1 par =1+F1/10000.

- Excel :

Afficher l'onglet Développeur par Bouton Microsoft Office/Options Excel/Afficher l'onglet Développeur dans le ruban. Dans cet onglet, faire Insérer et choisir l'icône Barre de défilement. Dessiner sur la feuille de calcul le rectangle du curseur à la souris. Par un clic droit sur le curseur obtenu, choisir Format de contrôle… puis entrer Valeur maximale : 1000 et Cellule liée : F1. La valeur du paramètre a peut ensuite être définie en cellule E1 par =1+F1/10000.



	A	B	C
1	Cellules tumorales		
2	n	u(n)	x(n)
3	0	1	1,00E+000
4	1	2	1,58E+000
5	2	4	2,49E+000
6	3	8	3,92E+000
7	4	16	6,12E+000
8	5	32	9,54E+000
9	6	64	1,48E+001
10	7	128	2,29E+001
11	8	256	3,52E+001
12	9	512	5,40E+001
13	10	1024	8,23E+001
14	11	2048	1,25E+002
15	12	4096	1,89E+002
16	13	8192	2,85E+002
17	14	16384	4,28E+002
18	15	32768	6,40E+002
19	16	65536	9,52E+002
20	17	1,31E+005	1,41E+003
21	18	2,62E+005	2,08E+003
22	19	5,24E+005	3,05E+003
23	20	1,05E+006	4,47E+003
24	21	2,10E+006	6,50E+003

Calculer et représenter les termes x_n pour n allant de 0 à 400.

Quel est l'impact du paramètre a sur le graphique ?

2. Lors du diagnostic d'une tumeur, on prélève 1 mm^3 (10^6 cellules tumorales) que l'on met en culture. Au bout de quinze jours, le nombre de cellules a augmenté de 150 000.

a. Estimer la valeur de a en initialisant la suite (x_n) à $x_0 = 10^6$ et en modifiant le curseur pour ajuster la valeur de x_1 (mettre la cellule correspondante au format Nombre).

b. Retrouver cette valeur de a en résolvant l'équation : $10^6 + 150\,000 = 2 \times 10^6 - 10^{12-12a} \times 10^{6a}$.

(On pourra utiliser le logarithme décimal, qui vérifie, pour tout réel α, $\log(10^\alpha) = \alpha$.)

Donner la valeur approchée de a arrondie à 10^{-4}.

3. L'expression $10^{12-12a} \times x_n^a$ correspond au nombre de cellules se détachant de la tumeur durant la $(n+1)^e$ quinzaine. On considère qu'en moyenne une cellule sur 10 milliards, parmi celles se détachant, est susceptible de devenir une métastase. Ainsi, pour la n-ième quinzaine, le nombre moyen de métastase est $10^{2-12a} \times x_{n-1}^a$.

Réinitialiser la suite (x_n) à $x_0 = 1$, puis calculer en colonne D le nombre moyen de métastases pour chaque quinzaine et sommer le nombre moyen total de métastases en colonne E.

4. On effectue un diagnostic à environ 10^9 cellules tumorales, est-il probable qu'une métastase soit présente ?

5. Dans cette question, on suppose que $a = 1{,}015\,7$. On effectue un diagnostic à environ 10^9 cellules tumorales, est-il probable qu'une métastase soit présente ?

TP 4 Utiliser un tableur pour étudier une fonction exponentielle

Ce TP permet d'évaluer des capacités mathématiques développées grâce aux TICE.

Offre et demande

LOGICIEL UTILISÉ
Tableur

On considère un produit utilisé par les laboratoires de biotechnologies dont le prix unitaire, exprimé en euros, est noté x. L'objectif de ce TP est la recherche d'un prix d'équilibre entre l'offre et la demande de ce produit.

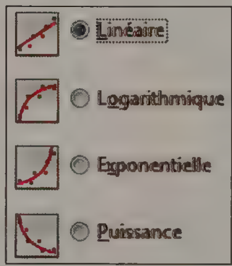
A. Étude de la demande

On note y la demande de ce produit, exprimée en centaines d'unités, c'est-à-dire la quantité que les consommateurs sont prêts à acheter au prix x.

Une étude statistique a fourni les résultats suivants :

Prix unitaire x_i (euros)	1,1	1,25	1,4	2	2,45	3
Demande y_i (centaines)	9,3	8,4	7,5	4,8	3,7	2,5

En ajustant, à l'aide du tableur, une « courbe de tendance » aux points de coordonnées (x_i, y_i), montrer que l'on peut modéliser la demande, exprimée en centaines d'unités, à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle $[1, 3]$ par : $f(x) = 20e^{-0,7x}$.



Appelez le professeur pour présenter votre démarche et vos réponses.

B. Recherche du prix d'équilibre

L'offre est la quantité de ce produit que les producteurs sont prêts à vendre au prix x. On suppose que l'offre, exprimée en centaines d'unités, peut-être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[1, 3]$ par : $g(x) = 0{,}15x + 2{,}35$.

1. Représenter à l'aide du tableur les fonctions f et g sur un même graphique (on prendra pour x un pas de 0,01).

2. Déterminer la valeur de x pour laquelle la demande est de 400 unités :
– graphiquement ;
– en résolvant l'équation $20e^{-0,7x} = 4$.

3. Le prix d'équilibre est celui pour lequel l'offre et la demande sont égales.
Déterminer graphiquement le prix d'équilibre, puis contrôler la réponse sur la feuille de calcul.

Appelez le professeur pour présenter votre démarche et vos réponses.

Exercices

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE	Exercices corrigés	Exercices non corrigés
Simplifier une expression avec une exponentielle	1, 2	3
Résoudre une équation, une inéquation	4, 6, 9, 15, 83	5, 7, 8, 10 à 14, 16, 84, 85
Déterminer des limites	17, 18, 23	19 à 22, 24 à 27
Calculer la dérivée de fonctions	29 à 32	33 à 39
Déterminer des primitives	40, 42 à 44	41, 45 à 49
Étudier les variations d'une fonction définie avec $x \mapsto e^x$	50	51, 73, 74, 76
Étudier des situations issues des autres disciplines au moyen de la fonction exponentielle de base e		52 à 57, 77 à 83
Utiliser une fonction exponentielle de base 10	58	59
Utiliser une fonction puissance		60
TICE Utiliser un tableur	61	66, 75
TICE Utiliser GeoGebra	65	63, 64, 67
TICE Utiliser Maxima		62, 63, 64
ALGO Scilab		67

Simplifier une expression avec une exponentielle

Simplifier l'écriture des expressions suivantes (exercices 1 à 3).

1. +

a) $\ln e^{-1}$;

b) $\ln e^2$;

c) $\ln \sqrt{e}$;

d) $\ln \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

CORRIGÉ P. 346

2. +

a) $e^{\ln 2}$;

b) $e^{-\ln 3}$;

c) $e^{2\ln 2}$.

CORRIGÉ P. 346

3. +

a) $e^{\ln 3}$;

b) $\ln \dfrac{1}{e}$;

c) $e^{\frac{1}{2}\ln 3}$;

d) $e^{1+\ln 2}$;

e) $e^{-\ln 2}$;

f) $e^{-2\ln 3}$.

Résoudre une équation, une inéquation, un système

4. +

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

a) $e^x = 3$;

b) $e^x + 1 = 0$.

CORRIGÉ P. 346

5. +

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

a) $e^x = 1$;

b) $e^x = 2$.

6. +

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 5x + 4 = 0$.

2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$.

> **Méthode :** *Remarquer qu'en posant $X = e^x$, l'équation du* **2** *s'écrit : $X^2 - 5X + 4 = 0$.*
> *En désignant par X_1 et X_2 les solutions de l'équation du second degré du* **1**, *résoudre chacune des équations $e^x = X_1$ et $e^x = X_2$.*

CORRIGÉ P. 346

7. +

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x - 2 = 0$.

2. En déduire la résolution de l'équation d'inconnue t : $e^{2t} + e^t - 2 = 0$.

> ▶ **Conseil :** *Procéder comme à l'exercice* **6**.

8. ++

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x - 15e^{-x} = 2$.

> ▶ **Indication :** *Poser $e^x = X$.*

9. +

Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation suivante.

a) $\ln x = 2$;

b) $\ln x = 3$;

c) $\ln(3x) = \dfrac{1}{2}$;

d) $\ln(4x) = 4$.

> ▶ **Rappel :** *Pour tout nombre réel positif a, $\ln a = b$ équivaut à $a = e^b$.*

CORRIGÉ P. 346

> **Méthode :** *Dans les exercices* **10** *et* **11**, *poser $\ln x = X$.*
> *Déterminer les solutions X_1 et X_2 de l'équation d'inconnue X.*
> *Résoudre ensuite les équations $\ln x = X_1$ et $\ln x = X_2$.*

10. +

$2(\ln x)^2 + \ln x - 1 = 0$.

11. +

$(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$.

12. ++

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2(\ln x)^2 + 3\ln x - 2 = 0$.

13. +++ La taille des crevettes

Trachypenaeus est le nom d'une crevette se développant dans les eaux chaudes de l'île de la Guadeloupe. Des relevés sur une longue durée ont permis d'établir que la taille $L(t)$ des crevettes *Trachypenaeus* exprimée en millimètre en fonction de l'âge t exprimé en semaines est donnée par : $L(t) = 87{,}5(1 - e^{-0{,}12t})$.

1. Calculer, avec ce modèle, la taille d'une crevette de trois ans.

2. Déterminer l'âge théorique d'une crevette de taille 80 mm.

14. +++ Le tri sélectif

Pour préserver l'environnement, les Français trient depuis de nombreuses années leurs déchets, en particulier le verre. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = 67 - \frac{300}{e^{0{,}18t} + 5}.$$

On admet que, pour une région, $f(t)$ représente le taux (exprimé en pourcentage) de recyclage du verre en fonction du temps t, exprimé en années, écoulé depuis 1992. Ainsi de $f(0) = 17$, on déduit, qu'en 1992, il y avait dans cette région 17 % du verre recyclé.

1. Calculer le taux de recyclage du verre dans cette région pour l'année 2012 (arrondir le résultat à 0,01 %).

2. Déterminer par le calcul l'année où le taux de recyclage du verre dans cette région sera de 63,84 %.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Selon le modèle précédent, le taux de recyclage du verre dans cette région sera-t-il un jour de 70 % ? Justifier votre réponse.

15. + Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante.

a) $e^x \geq 3$;

b) $e^x \geq -1$;

c) $e^{2x} \geq 5$.

> **Méthode :** *Mettre, lorsque c'est possible, chacune des inéquations précédentes sous la forme $e^a \geq e^b$ équivalente à $a \geq b$.*

CORRIGÉ P. 346

16. ++ Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

a) $e^x \geq 2$;

b) $2e^x - 1 \geq 0$.

Déterminer des limites

17. ++

Déterminer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} + e^x - 1$.

CORRIGÉ P. 346

18. ++

Déterminer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x$.

> ▶ *Se reporter à l'exercice résolu 1 du cours.*

CORRIGÉ P. 346

Exercices

19. ++

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - 3x$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. a) Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 3\right)$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

20. ++

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - e^x$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

▶ *Avec prise d'initiatives.*

21. ++

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$.

2. Déterminer la limite de f en 0.

▶ **Indication :** *Pour la limite en $+\infty$, on pourra mettre en facteur e^x au dénominateur (qui est le terme qui semble jouer le rôle le plus important pour les grandes valeurs de x, puis simplifier par e^x.*

22. +++

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1 - e^x}{2 + e^x}$

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

▶ *Avec prise d'initiatives .*

Limites de fonctions composées de la forme e^u (exercices **23** à **28**).

23. ++

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f(x) = 10 - 20e^{-0,2x}$

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

2. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{150}{1 + e^{1-x}}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu au a).

▶ *On peut se reporter à l'exercice résolu 2 du cours.*

CORRIGÉ P. 346

24. ++ **Recherche d'asymptote**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1 + e^{-0,1t+2}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{t \to -\infty} (-0,1t + 2)$.

b) En déduire $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t)$.

2. a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

b) Déduire du a) que la courbe $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote dont on donnera une équation.

25. ++

Déterminer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.   b) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

26. ++

Dans chacun des cas suivants, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

a) $f(x) = 2e^{0,01x}$;

b) $f(x) = -3e^{0,02x}$;

c) $f(x) = 10 + e^{-0,10x}$;

d) $f(x) = 20 - 10e^{-0,4x}$.

27. ++ **Interpréter graphiquement une limite**

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{100}{1 + e^{3-x}}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu au **1.**

28. +++ **Évolution d'une colonie de protozoaires**

Protozoaire : être vivant unicellulaire, classé traditionnellement dans le règne animal.

(dictionnaire Le Petit Robert)

On étudie l'évolution d'une colonie de protozoaires placés dans un milieu limité.

Le nombre $f(t)$ de protozoaires est donné en fonction du temps t, exprimé en heures par :

$f(t) = \dfrac{10^3}{1 + 4e^{-0,5t}}$, pour t appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$.

1. Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.

2. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

3. Que peut-on déduire du résultat du **2.** pour l'évolution à long terme de cette population ?

Calculer la dérivée de fonctions

Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle donné où elle est définie et dérivable (exercices **29** à **38**).

▶ **Conseil :** *pour chacun des exercices **29** à **38**, on peut vérifier le résultat à l'aide d'un logiciel de calcul formel.*

29. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

CORRIGÉ P. 346

30. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

CORRIGÉ P. 346

31. +

f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

CORRIGÉ P. 346

32. + **Dérivée de e^u**

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-e^{-x}$.

CORRIGÉ P. 346

33. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+1)e^x$.

34. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=e^t(e^t-2)$.

35. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

36. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-e^x+2e^{-x}$.

37. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=e^{\frac{1}{2}t+1}$.

38. ++ **La variable est t**

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=2e^{0,01t}$;

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=e^{-0,2t+1}$;

c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=10+0,02(-t+1)e^t$;

d) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=(-t+3)e^{-t}$;

e) f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{12}{1+10e^{-0,26t}}$;

f) f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=10(1,2)^t$.

▶ **Indication :** *Pour tout a de $]0,+\infty[$ et tout b de $\mathbb{R}$, $a^b=e^{b\ln a}$.*

39. ++ **Avec un logiciel de calcul formel**

Justifier par un calcul détaillé l'expression de $f'(x)$ qui a été obtenue avec une calculatrice équipée d'un logiciel de calcul formel.

a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$, $f'(x)=(1+x)e^x$;

b) pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=(2x+1)e^{-x}$, $f'(x)=(-2x+1)e^{-x}$;

c) pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$,
$f'(x)=(-x+1)(x+1)e^{-x}$.

▶ **Les calculs de dérivées au baccalauréat**

Les calculatrices équipées d'un logiciel de calcul formel donnent directement f'(x). Ainsi, il n'est pas rare que dans les sujets d'examens on donne f'(x), comme dans l'exercice **39**, *pour ne pas avantager les détenteurs de ce type de calculatrices.*

Déterminer des primitives

En utilisant les résultats du cours, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I (exercices **40** à **48**).

▶ **Conseil :** *pour chacun des exercices suivants, on peut vérifier le résultat à l'aide d'un logiciel de calcul formel.*

40. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{5}$.

CORRIGÉ P. 346

41. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=t+1+e^t$.

▶ **Conseil :** *pour chacun des exercices* **42** *à* **48**, *procéder comme dans l'exercice résolu 4 du cours.*

42. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x+3}$.

CORRIGÉ P. 346

43. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}$.

CORRIGÉ P. 347

44. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=5e^{0,05t}$.

CORRIGÉ P. 347

45. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-e^x+2e^{-x}$.

46. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}+e^x-1$.

47. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=e^{3t+2}$.

48. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{x^2+1}$.

49. +++ **La forme d'une primitive est donnée**

Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction
$F: x\mapsto(ax+b)e^x$
soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction
$f: x\mapsto(2x+1)e^x$.

▶ *Avec prise d'initiatives.*

Exercices

Étudier les variations d'une fonction

50. ++ **Avec une recherche d'asymptote**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x}{2} - 1$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 5 cm.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$.

c) Vérifier que, pour tout nombre réel x non nul,
$f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de f.

a) Déterminer $f'(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - \dfrac{1}{2} \geq 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ quand x varie dans $\mathbb{R}$.

c) Calculer la valeur exacte de $f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)$.

d) Établir le tableau de variation de f.

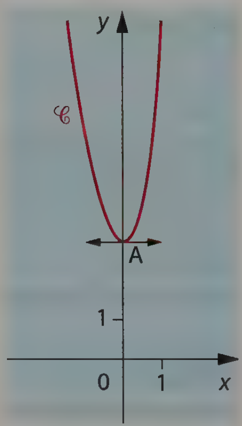
3. Construire la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

CORRIGÉ P. 347

51. +++ **La courbe représentative est donnée**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ae^{2x} + be^{-x}$ où a et b sont deux réels à déterminer. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0 est horizontale.



A. 1. Calculer l'expression $f'(x)$ en fonction des nombres réels a et b.

2. Lire sur le graphique $f(0)$ et $f'(0)$.

3. En déduire un système de 2 équations à 2 inconnues. Calculer les valeurs de a et de b.

B. On suppose que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + 2e^{-x}$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

5. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{3x} - 1 \geq 0$.

b) Montrer que $f'(x) = 2e^{-x}(e^{3x} - 1)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$.

d) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

Exemples d'étude de situations décrites au moyen de la fonction exponentielle de base e

52. +++ **Évolution d'une culture bactérienne**

On étudie l'évolution d'une culture bactérienne en fonction du temps. On estime que le nombre de bactéries en milliards par ml est donné, à chaque instant t (exprimé en heures) par la fonction f définie sur [0, 24] par :
$f(t) = (3t + 1)e^{-0,15t}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 cm pour une heure sur l'axe des abscisses et 2 cm pour un milliard par ml sur l'axe des ordonnées).

1. a) Montrer que la dérivée f' de f est telle que
$f'(t) = (2,85 - 0,45t)e^{-0,15t}$.

b) Étudier le signe de $f'(t)$. Dresser le tableau de variations de f.

2. a) Calculer $f(0)$. Donner les valeurs approchées arrondies à 10^{-2} de : $f(2), f(6), f(10), f(15), f(24)$.

b) Calculer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

c) Tracer T et $\mathscr{C}$ dans un repère donné.

3. À l'aide du graphique, et en faisant apparaître les constructions nécessaires, déterminer à une heure près les valeurs de t pour lesquelles il y a 5 milliards de bactéries par ml.

53. +++ **Radioactivité**

Un corps radioactif se désintègre en transformant une partie de ses noyaux suivant la loi $N(t) = N(0)e^{-kt}$ où $N(0)$ est le nombre de noyaux radioactifs au début de l'observation, $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t exprimé en heures, k une constante réelle.

1. Déterminer la constante k pour le thorium, sachant qu'avec $N(0) = 1\,000$, on a $N(1) = 937$. Arrondir à 10^{-3}.

2. La *période* d'un élément radioactif est le temps au bout duquel il reste la moitié de ses atomes. Calculer la période du thorium. Arrondir à la minute.

54. +++ **Ça chauffe !**

Lorsqu'un système de production de pâte à papier fonctionne, il dégage de la chaleur et réchauffe le local dans lequel il se trouve. Une étude de la température de ce local a été effectuée à partir de lois physiques.

A. *Étude d'une fonction*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par $f(t) = 22 - 4,5e^{1-0,5t}$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

B. *Étude de la température du local*

La fonction f permet de calculer la température du local $f(t)$, exprimée en degrés Celsius, en fonction du temps t, exprimé en heures, écoulé depuis la mise en route du système.

1. Calculer la température du local lorsque le système a fonctionné 1 heure et demie. Arrondir à 10^{-1}.

2. Calculer le temps, arrondi à la minute, au bout duquel le local atteint la température de 19 °C.

3. Donner une interprétation du résultat du **A.1.**.

55. +++ Fonction logistique et équipement des ménages

A. *Étude d'une fonction*

La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{1+4{,}9\,e^{-0{,}125t}}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1. a) On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}125t}=0$. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

b) Déduire du a) que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote D dont on donnera une équation.

2. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à 10^{-2}.

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$							

3. a) Calculer la dérivée de f et vérifier que
$$f'(t)=\frac{0{,}6125\,e^{-0{,}125t}}{(1+4{,}9\,e^{-0{,}125t})^2}.$$

b) Établir le tableau de variation de f.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.

5. a) Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 0{,}5$. Faire apparaître les traits utiles sur le graphique.

b) Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = 0{,}5$. Arrondir à l'unité.

B. *Application*

Une étude statistique a établi qu'à partir de l'année 1990, le pourcentage des ménages équipés d'un four à micro-ondes, dans un appartement, est donné approximativement par la formule : $f(t)=\dfrac{1}{1+4{,}9\,e^{-0{,}125t}}$ ou t désigne le nombre d'années écoulées depuis 1990.

Par exemple $f(0) \approx 0{,}17$; en 1990 il y avait 17 % des ménages équipés d'un four à micro-ondes.

1. Calculer le pourcentage des ménages ayant cet équipement en 2010. Arrondir à 10^{-2}.

2. Déduire de la partie **A.**, l'année à partir de laquelle 50 % des ménages ont été équipés d'un four à micro-ondes.

3. Donner une interprétation du résultat obtenu au **A.1.**a).

Les fonctions logistiques

- *On appelle fonctions logistiques des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\dfrac{A}{1+Be^{-Ct}}$, où A, B, C sont des constantes réelles positives.*
- *Ces fonctions sont utilisées en biologie, pour décrire l'évolution de certaines populations dans un environnement limité (elles furent proposées pour la première fois en 1837 par le biologiste et mathématicien belge Verhulst, pour décrire l'évolution d'une population à « croissance limitée »), en psychologie, en économie…*
- *Dans l'exercice* **55**, *A = 1, B = 4,9, C = 0,125.*
- *L'équipement des foyers en téléphones mobiles, en ordinateurs, en GPS… peut être décrit par une fonction logistique.*

56. +++ Fonction logistique et diminution d'une population

A. Soit la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$f(t)=\frac{440}{1-0{,}5\,e^{-2t}}.$$

1. On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-2t}=0$. En déduire $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

2. Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

B. Une étude sur le comportement d'organismes vivants placés dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence a conduit à admettre que le nombre d'individus à l'instant t, exprimé en heures, est $N(t) = f(t)$, où f est la fonction étudiée au **A**.

1. Déterminer le nombre d'individus à l'instant $t = 0$.

2. Déterminer au bout de combien de temps la population initiale aura diminué de moitié.

3. Interpréter le résultat obtenu au **A.1.**.

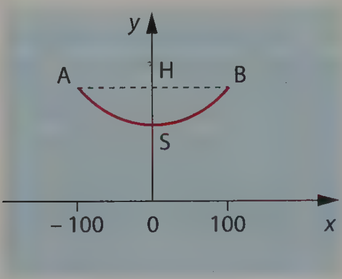
57. ++ Une chaînette

La ***chaînette*** *est la courbe suivant laquelle se tend un fil (ou un câble) homogène, pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes.*

On démontre en mécanique et on admet que, rapportée à un repère orthonormé convenable, la chaînette admet une équation de la forme : $y=\dfrac{e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}}{2\lambda}$ avec $\lambda > 0$.

Pensez aux lignes à haute tension de RTE (Réseau de transport d'électricité).

On laisse pendre un tel câble entre deux points situés à une même hauteur et distants de 200 mètres, comme le montre la figure.



On admet que, dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'arc AB est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-100, 100]$ par $f(x)=\dfrac{e^{0,01x}+e^{-0,01x}}{0,02}$.

▶ *La courbe est la chaînette obtenue pour $\lambda = 0,01$.*

La *flèche* prise par le câble est la distance SH de la figure.
Calculer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la *flèche* SH.

Fonctions exponentielles de base 10

Pour tout nombre réel strictement positif x : $\log x = b$ si et seulement si : $x = 10^b$.

58. + **Équation $\log x = b$**

Résoudre dans $]0, +\infty[$ chacune des équations suivantes d'inconnue x ou I.

a) $\log x = 1$.
b) $\log x = -2$.
c) $\log\left(\dfrac{x}{3}\right) = 2$.
d) $\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) = 50$.

CORRIGÉ P. 347

59. +

Résoudre dans $]0, +\infty[$ chacune des équations suivantes d'inconnue x.

a) $\log x = 2$.
b) $\log x = -1$.
c) $\log\left(\dfrac{x}{2}\right) = -2$.
d) $\log 2x = 3$.
e) $\log(0,4x) = 2$.

Fonctions puissances

60. ++ **Équation $x^\alpha = a$**

Déterminer le nombre réel x strictement positif qui est solution de l'équation suivante.
Donner la valeur exacte de la solution puis la valeur approchée arrondie à 10^{-4}.

a) $x^{0,3} = 1,04$.
b) $x^{0,4} = 1,10$.
c) $x^{5,2} = 1,50$.
d) $x^{1,2} = 1,045$.

▶ **Conseil :** *procéder comme dans l'exemple du paragraphe* **3.C** *du cours.*

Exemples d'utilisations de logiciels

61. ++++ **Loi d'Arrhenius en cinétique chimique, avec le tableur** TICE

La relation entre la température et la vitesse d'une réaction chimique est donnée par la loi d'Arrhenius qui peut s'exprimer sous la forme : $k = Ae^{-\frac{E}{8,314\times10^{-3}\times T}}$,
où T est la température en Kelvin (K),
k est le coefficient de vitesse,
E est l'énergie d'activation pour la réaction en kilo Joule par mol,
et A le facteur de fréquence.
On peut supposer que E et A dépendent de la réaction chimique considérée mais pas de la température.
On considère les quatre réactions chimiques suivantes et l'énergie d'activation correspondante :
$NO + Cl_2 \rightarrow NOCl + Cl$; $E = 85$ kJ.mol^{-1} ;
$C_4H_6 + C_2H_4 \rightarrow$ Cyclohexène ; $E = 115$ kJ.mol^{-1} ;
$2HI \rightarrow H_2 + I_2$; $E = 184$ kJ.mol^{-1} ;
Cyclobutane → 2 Éthylène ; $E = 262$ kJ.mol^{-1}.

1. À l'aide d'un tableur, tabuler les fonctions $T \mapsto e^{-\frac{E}{8,314\times10^{-3}\times T}}$, selon la présentation ci-dessous pour T allant de 273 K à 373 K (on entrera en B3 une formule susceptible d'être recopiée vers le bas, puis vers la droite).

	A	B	C	D	E
1	E=	85	115	184	262
2	T	f1(T)	f2(T)	f3(T)	f4(T)
3	273	5,44E-017	9,90E-023	6,21E-036	7,38E-051
4	274	6,24E-017	1,19E-022	8,35E-036	1,13E-050
5	275	7,15E-017	1,43E-022	1,12E-035	1,71E-050
6	276	8,18E-017	1,72E-022	1,50E-035	2,59E-050

2. Que peut-on dire de la vitesse de réaction lorsque la température augmente ?

3. Représenter les quatre courbes sur un même graphique. Quel est le problème ?

4. Modifier l'axe des ordonnées pour choisir une échelle logarithmique.
Quelle est l'influence de l'énergie d'activation sur le rapport $\dfrac{k}{A}$?

CORRIGÉ P. 347

62. +++ **Calcul formel avec Maxima** TICE

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Avec un logiciel de calcul formel, calculer $\dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$, en simplifiant l'expression obtenue. Vérifier, à l'aide du logiciel, que $\dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}=f(2x)$.

(Noter les résultats intermédiaires obtenus.)

63. ++++ Loi de Gumbel et prévision des catastrophes naturelles avec Maxima et GeoGebra

TICE

La loi de Gumbel (exponentielle d'exponentielle) permet de modéliser les valeurs extrêmes de phénomènes et joue ainsi un rôle dans la prévision de catastrophes naturelles telles que les crues ou les tremblements de terre. Dans ce modèle, on considère la fonction F, définie pour tout réel x par : $F(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}}$, avec $a \geq 0$ et $b>0$, correspondant à la probabilité que le phénomène ne dépasse pas la valeur x.

A. *Analyse de la fonction F*

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats ci-après.

1. La requête n° 3 (entrée %i3) se solde par un échec (sortie o%3 peu satisfaisante). Utiliser la requête n° 4 et la sortie o%4 pour donner la limite de F en $-\infty$.

2. Quelles sont les limites montrant la présence de deux asymptotes horizontales à la courbe représentative de la fonction F ? Préciser ces asymptotes.

3. En utilisant la sortie %o5, déterminer le signe de la dérivée de F et en déduire le sens de variation de la fonction F.

```
Fichier  Editer  Cell  Maxima  Equations  Algèbre  Calculs  Simplifier

(%i1) define(F(x),exp(-exp(-(x-a)/b)));
                          a-x
                          ---
                           b
                     - %e
(%o1) F(x):=%e

(%i2) limit(F(x),x,inf);
Is  b  positive or negative?p;
(%o2) 1

(%i3) limit(F(x),x,minf);
Is  b  positive or negative?p;
                            a
                       x/b+ -
                            b
                  - %e
(%o3) lim %e
      x->∞

(%i4) limit(exp(-exp(-x)),x,minf);
(%o4) 0

(%i5) diff(F(x),x);
                   a-x
                   ---
           a-x      b
           --- - %e
            b
        %e
(%o5) -----------------
              b
```

B. *Étude d'un exemple*

On considère les débits de crue de la rivière Mentue, située en Suisse, pour laquelle on possède les données suivantes (*source* : École polytechnique fédérale de Lausanne).

Débit annuel maximal x_i (m^3/s)	16,8	21,8	30,8	37,3	41,5	45,4	52,7
Fréquence d'observation f_i	0,1	0,26	0,54	0,74	0,86	0,94	0,98

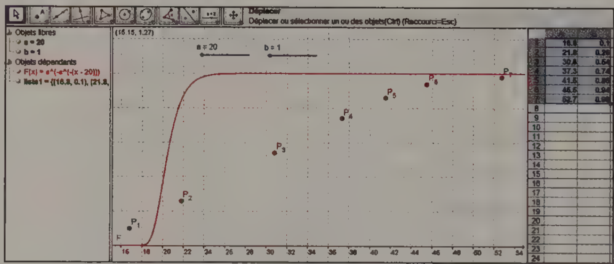
Lecture du tableau : pour 26 % des années observées, le débit annuel maximal est inférieur ou égal à 21,8 m^3/s.

On souhaite utiliser une loi de Gumbel pour faire de la prévision.

1. À l'aide de GeoGebra, figurer les points P_i de coordonnées (x_i, f_i) (on peut pour cela afficher le tableur de GeoGebra, y entrer les coordonnées des points, puis, après sélection de la zone du tableur, faire un clic droit et « créer une liste de points »).

Créer un curseur a de 20 à 40 avec un incrément 0.5 et un curseur b de 1 à 12 avec un incrément 0.5.

Saisir F(x)=exp(-exp(-(x-a)/b)) pour obtenir une représentation graphique de la fonction F.



Manipuler les curseurs de façon à ajuster « au mieux » les points P_i avec la courbe représentative de la fonction F. Quelles valeurs obtenez-vous pour les paramètres a et b ?

2. On souhaite quantifier la qualité de l'ajustement en calculant la somme des carrés des écarts verticaux entre les points P_i et les points correspondants de la courbe.

Calculer en colonne C les images par F des valeurs de la colonne A.

Calculer en colonne D les différences, au carré, entre les résultats des colonnes B et C.

Calculer la somme des valeurs de la colonne D.

Pour quelle position des curseurs cette dernière somme est-elle minimale ?

3. Pour la fonction F obtenue à la question précédente, donner une valeur approchée de l'antécédent par F de 0,8 :

– à l'aide d'une lecture graphique ;

– en résolvant l'équation $F(x)=0{,}8$.

On interprète le résultat précédent en prévoyant que le risque d'avoir, une année donnée, un débit maximal supérieur à la valeur obtenue est de 20 %, c'est-à-dire un cinquième. On dit aussi que ce débit maximal correspond à un temps de retour de 5 ans.

Un peu d'histoire

Statisticien allemand, Émil Julius Gumbel (1891-1966) est à l'origine de la théorie des valeurs extrêmes. Très engagé contre le nazisme et chassé de l'Université allemande, il gagne Paris en 1932, où il rencontre les mathématiciens Émile Borel et Maurice Fréchet, avant de rejoindre New York en 1940 où il met ses compétences au service du renseignement américain.

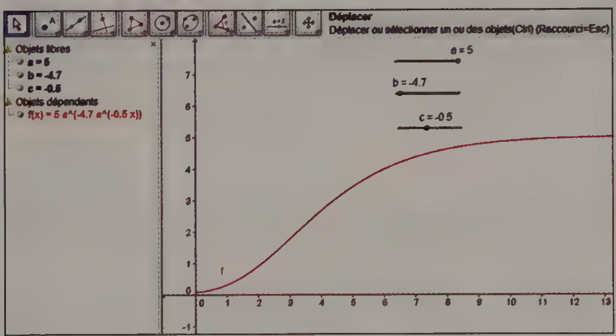
CORRIGÉ P. 348

64. ++++ **Modèle de Gompertz avec GeoGebra et Maxima** TICE

On considère la fonction f, exponentielle d'exponentielle, définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = a\,e^{be^{cx}}$ avec $a > 0$, $b < 0$ et $c \neq 0$.

Pour $c < 0$, cette fonction sert de modèle en biologie, pour décrire la croissance de certaines espèces, et en médecine, pour la croissance de tumeurs. Pour $c > 0$, la fonction f modélise en écologie l'extinction d'espèces animales.

1. Créer, à l'aide de GeoGebra, un curseur a de 0 à 5 avec un incrément 0,1 ; un curseur b de – 5 à 0 avec un incrément 0,1 et un curseur c de – 5 à 5 avec un incrément 0,1. Puis tracer une représentation graphique de la fonction f.

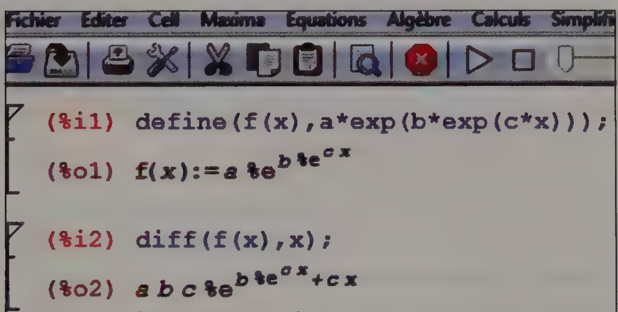


a) Conjecturer, d'après les graphiques, la limite de $f(x)$ en $+\infty$ (discuter selon le signe de c).

b) Justifier les conjectures en utilisant $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

c) Conjecturer, d'après les graphiques, le sens de variation de la fonction f.

2. Le logiciel de calcul formel Maxima fournit les résultats suivants.



a) En utilisant le résultat affiché en (%o2), justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $a \times b \times c$.

b) En déduire, selon le signe de c, le sens de variation de la fonction f.

Un peu d'histoire

Benjamin Gompertz (1779-1865) propose en 1825 la loi qui porte son nom décrivant, en démographie, l'évolution des populations limitées. La courbe de Gompertz joue aujourd'hui un rôle important dans le diagnostic de certaines tumeurs.

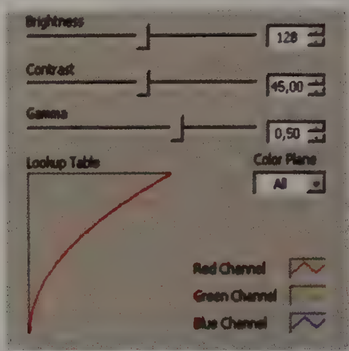
65. ++++ **Fonctions puissances et contraste des images numériques avec GeoGebra** TICE

On considère une image en 256 niveaux de gris. Le niveau d'intensité d'un pixel va de $i = 0$ (noir) à $i = 255$ (blanc). (Dans le système RVB, on peut considérer l'analogue pour chacune des couleurs rouge, vert, bleu.)

La fonction « gamma » (γ troisième lettre de l'alphabet grec) d'un logiciel de correction d'image permet d'augmenter le contraste dans les parties claires ou dans les parties sombres de l'image.

Elle est définie sur l'intervalle [0, 255] par

$$f(i) = 255 \times \left(\frac{i}{255}\right)^{\gamma} \text{ avec } \gamma > 0.$$



1. Avec GeoGebra, créer un curseur γ de 0 à 10 avec un incrément 0.1 puis saisir :

f(x)=Fonction[255*(x/255)^γ,0,255].

Quelle est l'allure de la courbe, selon que $\gamma < 1$ ou que $\gamma > 1$?

2. a) À l'aide de GeoGebra, donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-2}, de $f'(20)$ et de $f'(240)$ pour $\gamma = 0{,}3$ et pour $\gamma = 6{,}5$.

b) Justifier que, pour $\gamma = 0{,}3$, on augmente le contraste dans les parties claires de l'image et que, pour $\gamma = 6{,}5$, on augmente le contraste dans les parties sombres.

CORRIGÉ P. 349

66. +++ Profil du vent et développement durable avec le tableur

TICE

L'Ademe (Agence de l'environnement et de la maîtrise de l'énergie) et l'Arene (Agence régionale de l'environnement et des nouvelles énergies) ont établi un atlas du potentiel éolien en Île-de-France. Le « profil du vent » sur un site donné, est une fonction puissance donnant la vitesse moyenne annuelle v du vent (en mètres par seconde) selon la hauteur h par rapport au sol (en mètres) sous la forme : $v(h) = ah^k$, où a et k sont des constantes positives.

Le coefficient k permet une classification des sites : on n'aura pas le même coefficient pour une zone urbaine, rurale ou maritime.

Pour le site « Les Alluets-le-Roi », dans le département des Yvelines, on possède les mesures suivantes.

Hauteur de la mesure h_i (en mètres)	1	10	30	60	90
Vitesse moyenne annuelle du vent v_i (en mètres par seconde)	2,7	4,6	5,4	6	6,3

1. À l'aide du tableur, représenter les points de coordonnées (h_i, v_i) et afficher l'équation de la « courbe de tendance » de type « puissance ».

2. On considère que le profil du vent est donné par $v(h) = 2{,}79h^{0{,}19}$. Estimer la vitesse moyenne annuelle du vent sur ce site pour $h = 25$ m.

67. ++++ Approche avec GeoGebra et Scilab de la limite comparée à l'infini de $\ln x$ et x^α avec $0 < \alpha < 1$

ALGO

On s'intéresse à $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$.

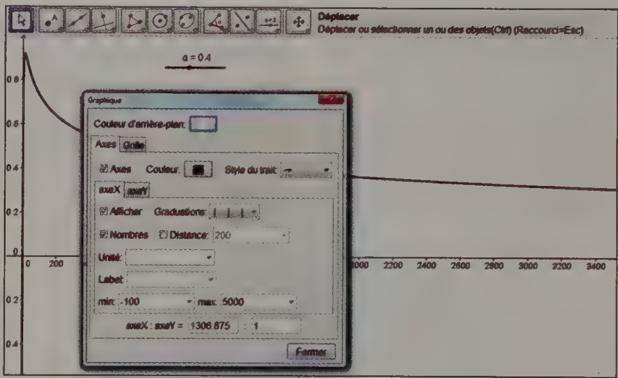
1. Peut-on exploiter l'affichage suivant, fourni par le logiciel de calcul formel Maxima ?

```
Fichier  Editer  Cell  Maxima  Equations  Algèbre  Calculs

(%i1) limit(ln(x)/x^0.1,x,inf);
                ln(x)
(%o1)   lim     -----
        x->∞    x^0.1

(%i2) limit(ln(x)/x^0.9,x,inf);
                ln(x)
(%o2)   lim     -----
        x->∞    x^0.9
```

2. Utiliser GeoGebra, pour conjecturer cette limite selon les valeurs de α, avec $0 < \alpha < 1$ (on pourra régler l'échelle du graphique par un clic droit et le choix Propriétés).



3. Pour renforcer les conjectures, l'algorithme suivant a été programmé sur Scilab.

```
a=input("a = ")
x=100000
while ln(x)/x^a > 0.01
    x=x+100000
end
disp(x)
```

a) À quelle condition sort-on de la boucle « while » ?

b) Implanter cet algorithme et l'exécuter pour $a = 0{,}5$; $a = 0{,}4$ et $a = 0{,}3$.

Les résultats confortent-ils les conjectures précédentes ?

Faites le point !

RÉPONSES p. 349

QCM *Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.*

QCM interactifs 68-69-70-71

68. ++ Relations fonctionnelles, équations, inéquations

1 $(e^x)^2 \times (e^{-x})^2$ est égal à :
- a $2\,e^{x^2}$
- b e^{4x}
- c 1

2 3 est solution de l'équation :
- a $e^{-x} = -3$
- b $e^{\ln x} = 3$
- c $\ln x = -\ln 3$

3 $\ln y = 0{,}03x + 3{,}44$ si et seulement si $y =$:
- a $3{,}44\,e^{0{,}03x}$
- b $e^{0{,}03x+3{,}44}$
- c $e^{0{,}03x} \times e^{3{,}44}$

4 L'inéquation $\ln x \geq 2$ a pour ensemble de solutions :
- a $[2e, +\infty[$
- b $]0, e^2]$
- c $[e^2, +\infty[$

69. ++ Limites

Dans chaque question, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1 $f(x) = e^x + x$
- a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- b $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- c $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

2 $f(x) = x - e^x$
- a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- b $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- c $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3 $f(t) = e^{2t+1}$
- a $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$
- b $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = +\infty$
- c $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = 0$

70. ++ Dérivées

Dans chaque question, f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est sa fonction dérivée.

1 $f(x) = 2x + 1 + e^{-x}$
- a $f'(x) = 2 + e^{-x}$
- b $f'(x) = 3 + e^{-x}$
- c $f'(x) = 2 - e^{-x}$

2 $f(x) = xe^{-x}$
- a $f'(x) = e^{-x}$
- b $f'(x) = -e^{-x}$
- c $f'(x) = (1 - x)\,e^{-x}$

3 $f(x) = e^{2x+1}$
- a $f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x+1}$
- b $f'(x) = 2e^{2x+1}$
- c $f'(x) = e^{2x+1}$

71. ++ Primitives

Dans chaque question, f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1 $f(x) = x - 3 + e^x$
- a $F(x) = 1 + e^x$
- b $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + e^x$
- c $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3 + e^x$

2 $f(x) = e^{2x+1}$
- a $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x+1}$
- b $F(x) = e^{2x+1}$
- c $F(x) = 2e^{2x+1}$

72. +++

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal et par f' la fonction dérivée de f. Le tableau de variation de la fonction f est donné ci-dessous.

x	0		ln2		$+\infty$
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	$2\ln 2 + 3$	↗	$+\infty$

1. Dans l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = e^2$ admet :

a) aucune solution ;

b) une unique solution ;

c) deux solutions.

2. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\ln(1{,}5)$ admet un coefficient directeur :

a) strictement positif ;

b) strictement négatif ;

c) nul.

3. $f(\ln 3)$ est égal à :

a) $\ln 6 + 2{,}5$;

b) $2\ln 3 + 2{,}5$;

c) $3\ln 3 + 2$.

4. La courbe $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation :

a) $y = 2x + 2$;

b) $y = 2x + 1$;

c) $x = 0$.

Les exercices pour le baccalauréat sont des exercices qui pourraient figurer dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat STL-Biotechnologies.

Étudier une fonction définie à l'aide de la fonction $x \mapsto e^x$

73. +++ **Détermination d'une fonction**

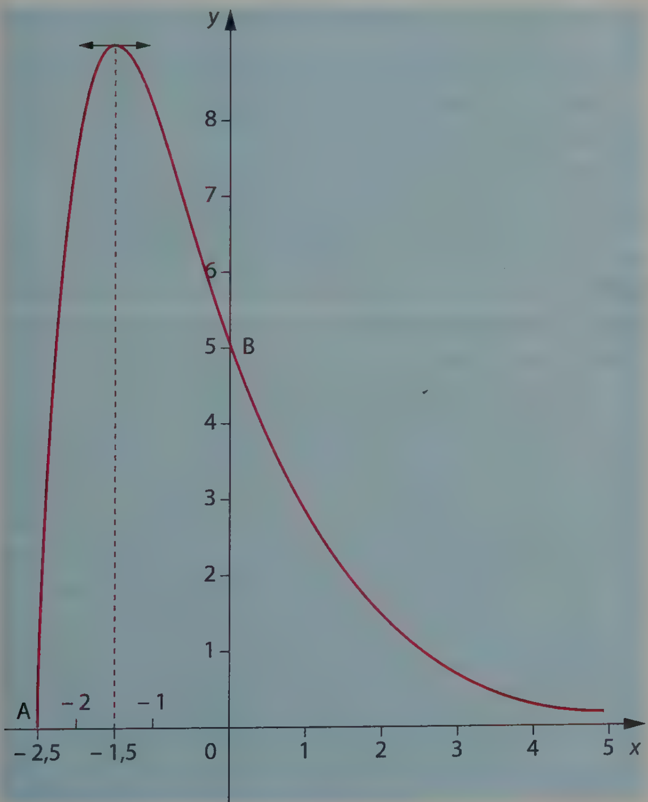
Le but de l'exercice est de modéliser le contour de la plaque représentée dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm (voir la figure).

On se propose de représenter ce contour par une fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5 ; 5]$ par $f(x) = (ax + b)e^{cx}$ où a, b et c sont trois nombres réels.

On précise que les points A$(-2,5 ; 0)$ et B$(0 ; 5)$ appartiennent à la courbe. De plus, la tangente à la courbe au point d'abscisse $-1,5$ est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Utiliser les données pour préciser $f(-2,5)$, $f(0)$ et $f'(-1,5)$.

2. **a)** En déduire le système que doivent vérifier les réels a, b et c.



b) Résoudre ce système et déterminer la fonction f cherchée.

74. +++ **Lecture graphique et étude des variations**

Le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé (unité 2 cm).

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty, +\infty[$ par : $f(x) = 2x + 2 - e^x$.

La droite $\mathscr{D}$ a pour équation : $y = 2x + 2$.

Le point A a pour coordonnées $(0, 1)$, le point B $(-1, 0)$.

On se propose dans ce problème :

– d'étudier graphiquement certaines propriétés de f,

– de justifier par le calcul l'étude des propriétés de f et le tracé de $\mathscr{C}$.

A. *Étude graphique*

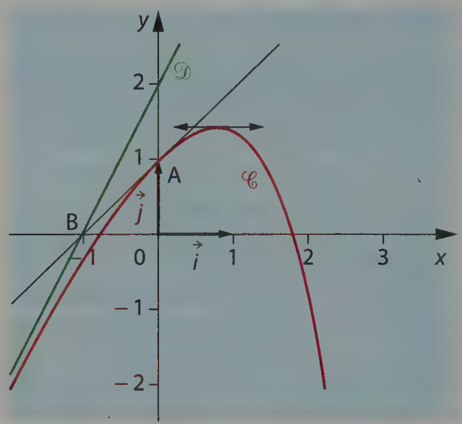
1. **a)** Préciser $f(0)$.

b) Déterminer une équation de la droite (AB).

c) La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A. Préciser $f'(0)$.

2. Justifier l'affirmation suivante : l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions α et β $(\alpha < \beta)$.

Par lecture graphique, donner un encadrement de chacune de ces solutions par deux entiers consécutifs.



B. *Étude de f*

1. **a)** Vérifier que, pour tout x non nul,

$f(x) = 2 + x\left(2 - \dfrac{e^x}{x}\right)$. Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ quand x tend vers $-\infty$.

d) Étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote.

2. a) Résoudre l'inéquation : $2 - e^{x} > 0$.

b) Calculer $f'(x)$.

c) Établir le tableau de variation de f.

(On calculera la valeur exacte du maximum.)

3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

4. On se propose de déterminer un encadrement de β d'amplitude 0,1.

Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant : (donner les valeurs approchées arrondies à 10^{-1})

x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$						

En déduire l'encadrement demandé.

Exemples d'utilisation de logiciels

75. +++ Taux d'équipement en téléviseurs avec le tableur

TICE

On étudie le taux d'équipement des foyers français en téléviseurs. On prend comme « année 0 », 1950 et on dispose des taux d'équipement des années 1958, 1962, 1974 et 1980. Ainsi en 1958, année de rang $x = 8$, le taux d'équipement était $T = 10$ % et en 1980, année de rang $x = 30$, $T = 94$ % (part des foyers possédant au moins un téléviseur).

On cherche à modéliser l'évolution du taux T en fonction du rang x de l'année à l'aide d'une fonction « logistique » f d'expression $f(x) = \dfrac{1}{1+ae^{-kx}}$ où a et k sont des réels positifs que l'on cherche à déterminer à l'aide d'un tableur.

1. Le tableur propose la possibilité d'un ajustement « exponentiel » des données par une courbe d'équation $y = ae^{-kx}$.

Si l'on pose $T = \dfrac{1}{1+ae^{-kx}}$, donner l'expression de ae^{-kx} en fonction de T.

2. L'ajustement exponentiel est réalisé sur le graphique suivant représentant les points dont les coordonnées figurent en colonnes B et D.

Quelle est la formule qui, entrée en D3, a été recopiée vers le bas jusqu'en D6 ?

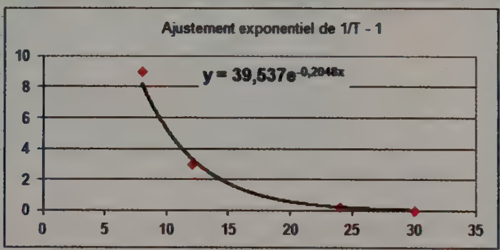
3. Le tableur fournit comme ajustement :

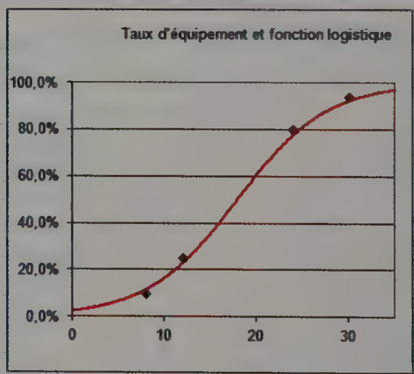
$\dfrac{1}{T} - 1 \approx 39{,}5\, e^{-0{,}205x}$.

La cellule B1 contient la valeur 39,5 et la cellule D1 contient la valeur 0,205.

E3 =B$1*EXP(-D$1*B3)

	A	B	C	D	E	F
1	a = 39,5		k= 0,205			
2	année	rang	T = taux d'équipement	(1 / T) - 1	a exp(-k*x)	modèle logistique
3	1958	8	10,0%	9	7,66221167	11,5%
4	1962	12	25,0%	3	3,374680563	22,9%
5	1974	24	80,0%	0,25	0,288315668	77,6%
6	1980	30	94,0%	0,06382979	0,08427253	92,2%





a) Quelle est, parmi les trois formules suivantes, celle qui, entrée en E3, a été recopiée vers le bas jusqu'en E6 :
=B$1*EXP(-D$1*B$3) ; =$B1*EXP(-$D1*B3) ;
=B$1*EXP(-D$1*B3) ?

b) Quelle formule peut-on entrer en F3, puis recopier vers le bas, pour obtenir les valeurs de T calculées selon le modèle logistique ?

4. Estimer, en utilisant la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+39{,}5e^{-0{,}205x}}$, le taux d'équipement en téléviseurs en 1970.

► *On peut se reporter à l'information suivant l'exercice* **55**.

76. +++ Avec un logiciel

TICE

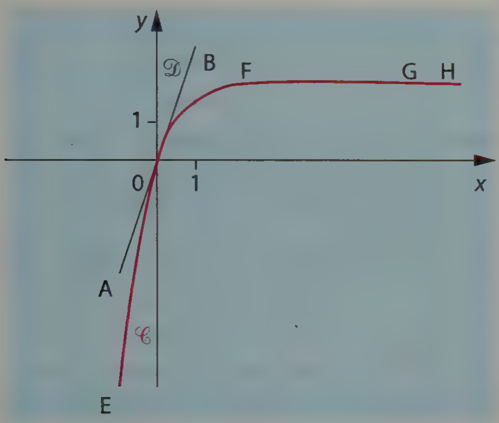
Ce problème a pour objet l'étude d'une fonction f et la comparaison de résultats lus sur la représentation graphique de cette fonction, obtenue à l'aide d'un logiciel, avec les résultats obtenus par calculs.

Partie A

Un élève a obtenu, à l'aide d'un logiciel, la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ dans un repère du plan d'origine O. Il a réglé la fenêtre d'affichage pour x appartenant à l'intervalle $[-1, 8]$ et pour y appartenant à l'intervalle $[-6, 3]$.

La courbe de f dans un repère du plan d'origine O s'appelle $\mathscr{C}$. Il a aussi tracé une droite $\mathscr{D}$ qu'il pense être la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point O.

Enfin, il a placé des points dont il pense qu'ils sont sur la droite $\mathscr{D}$ ou encore sur la courbe $\mathscr{C}$. Voir la courbe ci-après.



On décide dans cette première partie de se fier à ce graphique et au travail de cet élève. Pour répondre aux questions **1.** à **6.**, compléter la 3e colonne du tableau donné sur la feuille Annexe, à rendre avec la copie.

1. Lire sur ce graphique l'image du nombre -1 par la fonction f.

2. Lire sur ce graphique l'image du nombre 0 par la fonction f.

3. Donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$.

4. En déduire la valeur de $f'(0)$ où f' est la dérivée de f.

5. Quel est le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $[-1, 2]$?

6. L'élève dit que la fonction est constante sur l'intervalle $[7, 8]$. Si l'élève a raison, que peut-on en déduire pour $f'(x)$ lorsque x appartient à cet intervalle ?

Partie B

La fonction évoquée dans la partie A, est en fait la fonction définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x-2}{e^{x}}+2.$$

1. Calculer $f(0)$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

On rappelle que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty.$$

3. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

4. En observant que $[f(x)-2]$ est égal à $\frac{x-2}{e^x}$, étudier le signe de cette dernière quantité pour x appartenant à l'intervalle $[2, +\infty[$.

Interpréter graphiquement le résultat.

5. Calculer $f'(x)$. Étudier le signe de $f'(x)$.

6. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

7. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$, sous la forme $y = ax + b$, au point d'abscisse 0.

8. À partir des résultats des questions **1.** à **7.** de la partie B, on veut revenir sur les réponses données dans la partie A. Compléter la dernière colonne du tableau déjà utilisé en annexe, en écrivant « OUI » pour confirmer la réponse donnée en colonne 2 et « NON » pour infirmer cette réponse.

Annexe

Dans le tableau ci-dessous vous devez porter dans la troisième colonne, les réponses aux questions **1.**, **2.**, **3.**, **4.**, **5.** et **6.** de la partie *A* du problème. La dernière colonne de ce tableau sera remplie pour répondre à la question **8.** de la partie *B*.

Questions de la partie *A*	Lecture sur le graphique…	Réponses (Partie *A*)	Je confirme ou je ne confirme pas (Question 8 de la partie *B*)
Question 1	image de -1 par f		
Question 2	image de 0 par f		
Question 3	équation de la droite $\mathscr{D}$		
Question 4	valeur de $f'(0)$		
Question 5	signe de $f'(x)$ pour x dans l'intervalle $[-1, 2]$		
Question 6	$f'(x)$ avec x dans $[7, 8]$		

Exemples d'étude de situations issues des biotechnologies

77. +++ Taux d'alcoolémie

Lorsqu'une personne absorbe à jeun une certaine quantité d'alcool, on note $f(x)$ son taux d'alcoolémie (en grammes d'alcool par litre de sang) en fonction de x (le temps écoulé en heure depuis l'absorption). Dans cet exercice, on se propose d'étudier le taux d'alcoolémie d'une femme d'environ 65 kg ayant absorbé de l'alcool. Dans ce cas, la fonction f est définie sur $[0, 6]$ par :

$$f(x)=\frac{3x}{e^x}.$$

A. *Étude de fonction*

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Démontrer que, pour tout x de $[0, 6]$, $f'(x) = \dfrac{3-3x}{e^x}$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0,6]$.

3. Recopier et compléter le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6
$f(x)$					0,81					

4. Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. On prendra : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 10 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.

B. *Application*

1. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel ce taux est atteint.

2. Depuis le 15 septembre 1995, le taux maximum d'alcoolémie autorisé pour conduire un véhicule est 0,5 g/l.

a) Indiquer si la personne aura respecté la législation en conduisant sa voiture 3 heures après l'absorption d'alcool.

b) Cette femme a fini son dernier verre à 12 h 00. À l'aide du graphique, déterminer si elle peut prendre le volant à 13 h 00 sans enfreindre la loi. Si non, quelle heure devra-t-elle attendre avant de pouvoir partir ?

78. +++ Évolution de la température

A. *Étude d'une fonction*

On donne la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = 18 + 80\,e^{-0{,}03x}$.

On désigne sa courbe représentative par $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm pour 10 unités.

1. Calculer $f'(x)$, puis étudier son signe.

2. a) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}03x} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Que peut-on déduire de a) pour la courbe $\mathscr{C}$?

3. Établir le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

4. Trouver une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0, 120]$. Tracer également la droite asymptote et la tangente au point A.

B. *Application*

On admet que la fonction f représente l'évolution de la température (en degrés Celsius) d'un certain liquide, durant la phase de refroidissement, en fonction de la variable x (en minutes) pour x variant dans l'intervalle $[0, 120]$.

1. Déterminer à 1 minute près, la valeur de x pour laquelle la température du liquide est égale à 50 degrés. Vérifier sur le graphique en faisant apparaître les traits utiles.

2. Le technicien de laboratoire affirme que « la température a baissé de 50 % entre les instants $x_1 = 20$ et $x_2 = 60$ ». Justifier ou invalider cette affirmation.

79. +++ Évolution d'une population de rongeurs

On étudie l'évolution d'une population de rongeurs limitée par un prédateur, en fonction du temps t. On admet que la taille de la population, exprimée en centaines d'individus, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{3e^{0{,}5t}}{e^{0{,}5t}+2},$$

où t représente le temps écoulé depuis 2002, exprimé en années (donc $t = 0$ en 2002).

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a) Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.

b) Montrer que : $f(t) = 3 - \dfrac{6}{e^{0{,}5t}+2}$.

c) On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{0{,}5t} = 0$. En déduire $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

d) Que peut-on déduire du c) sur l'évolution à long terme de cette population ?

2. a) Montrer que la dérivée f' de la fonction f vérifie, sur $[0, +\infty[$:

$$f'(t) = \frac{3e^{0{,}5t}}{(e^{0{,}5t}+2)^2}$$

b) Étudier le signe de $f'(t)$, puis établir le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer en quelle année la population de rongeurs dépassera 250 individus.

80. +++ Évolution du taux d'un médicament dans le sang

A. *Étude d'une fonction*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 8]$ par :

$f(t) = 14 - t - 10e^{-0{,}8t}$.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Démontrer que, pour tout t de $[0, 8]$, $f'(t) = -1 + 8e^{-0{,}8t}$.

2. Résoudre dans $[0, 8]$ l'équation : $-1 + 8e^{-0{,}8t} = 0$.

Donner la valeur exacte t_0 de la solution puis la valeur approchée arrondie à 10^{-1} de t_0.

3. Résoudre sur l'intervalle $[0, 8]$ l'inéquation :

$-1 + 8e^{-0{,}8t} \geq 0$.

En déduire le signe de la dérivée de la fonction f sur cet intervalle et dresser son tableau de variation.

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir les résultats à 10^{-1})

t	0	1	2	2,6	3	4	5	6	7	8
$f(t)$						9,59				5,98

5. Dans un repère orthogonal, en prenant 2 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées, construire la tangente au point d'abscisse t_0 ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

B. *Application*

On injecte une substance médicamenteuse dans le sang d'une personne et on surveille le taux de cette substance pendant 8 heures.

On considère que le taux de cette substance (en mg.l^{-1}) en fonction du temps t (en heures) est modélisé par la fonction f définie dans la partie **A**.

1. À quel instant t ce taux est-il maximum ? Exprimer cet instant en heures et minutes en utilisant la valeur approchée obtenue dans la partie **A**.

Quelle est alors la valeur du taux maximum de cette substance dans le sang du patient ?

2. Pour les deux questions suivantes, on fera apparaître les traits de construction utiles et les résultats seront arrondis à la demi-heure près.

a) Déterminer graphiquement l'instant t où le taux redevient inférieur à 8,5 mg.l^{-1}.

b) On considère que cette substance est active lorsque le taux est supérieur à 7 mg.l^{-1}. Déterminer graphiquement la durée pendant laquelle cette substance est active.

81. +++ Culture bactérienne

On étudie l'évolution d'une culture bactérienne en fonction du temps. On estime que le nombre de bactéries en milliards par mL est donné, à chaque instant t (exprimé en heures) par la fonction f définie sur [0, 24] par :

$f(t) = (2t+1)e^{-0,1t}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (unité graphique 0,5 cm pour une heure sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour un milliard par mL sur l'axe des ordonnées).

1. a) Montrer que la dérivée f' de f est telle que : $f'(t) = (1{,}9 - 0{,}2t)e^{-0,1t}$.

b) Étudier le signe de $f'(t)$.

c) Calculer $f(0)$, $f(24)$, $f(9{,}5)$ à 10^{-2} près.

d) Dresser le tableau de variation de f.

2. a) Reproduire et compléter le tableau suivant (les résultats sont à arrondir à 10^{-2}).

t	0	2	4	6	8	10	12	16	20	24
$f(t)$	88									

Que représente $f(9{,}5)$ pour le phénomène étudié ?

b) Calculer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

c) Tracer T et $\mathscr{C}$ dans le repère donné.

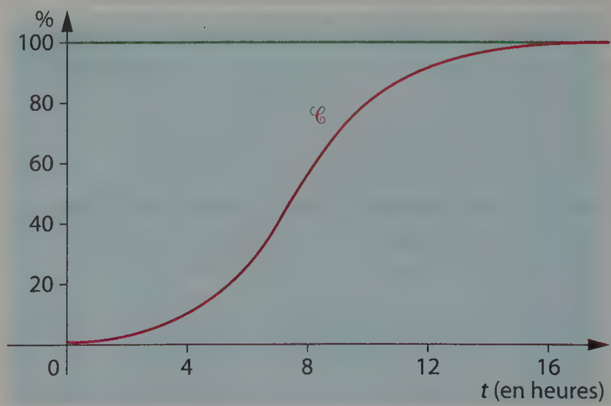
3. À l'aide du graphique, et en faisant apparaître les constructions nécessaires, déterminer à une heure près les valeurs de t pour lesquelles il y a 5 milliards de bactéries par mL.

82. +++ Fonction logistique

Vers 1840, le mathématicien belge Verhulst propose un modèle d'évolution d'une population de bactéries en culture. Il suppose que la population ne peut dépasser une certaine valeur maximale.

On note $f(t)$ le pourcentage de cette valeur maximale à l'instant t exprimé en heures. On suppose que $f(0) = 1$ et que pour une certaine population, f est définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{100}{1+99e^{-0,6t}}$.

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f.



A. *Les questions suivantes sont à résoudre par lecture graphique*

1. Donner le pourcentage du maximum de la population à la date $t = 10$.

2. Quelle est la limite de f en $+\infty$?

3. À l'instant t, à 0,1 près, la population atteint-elle 50 % de son maximum ?

4. Quel est le signe de $f'(t)$?

5. À quelle date la croissance de la population est-elle la plus rapide, à la date $t = 2$ ou à la date $t = 10$? Expliquer.

B. *Les questions suivantes sont à résoudre par le calcul*

1. Calculer à 0,1 % près le pourcentage de la population à la date $t = 10$.

2. On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,6t} = 0$. Quelle est la limite de f en $+\infty$? Que peut-on en déduire ?

3. À quel instant t la population atteint-elle 50 % de son maximum (arrondir à 10^{-2}) ?

4. Prouver que la dérivée de f est définie par :

$$f'(t) = \frac{5\,940e^{-0,6t}}{(1+99e^{-0,6t})^2}.$$

En déduire le signe de $f'(t)$.

5. Trouver une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 10 (le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine étant donnés à 0,1 près).

▶ *Voir la note accompagnant l'exercice* **55**.

83. +++ Diminution d'une population

A. Soit la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{440}{1-0,56e^{-2t}}$$

1. On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-2t} = 0$. En déduire $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

2. Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

3. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans le plan muni du repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On prendra comme unités : 5 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 sur l'axe des ordonnées.

A. Une étude sur le comportement d'organismes vivants placés dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence a conduit à admettre que le nombre d'individus à l'instant t, exprimé en heures, est $N(t) = f(t)$, où f est la fonction étudiée au **A.**

1. Déterminer le nombre d'individus à l'instant $t = 0$.

2. Déterminer au bout de combien de temps la population initiale aura diminué de moitié.

3. Donner une interprétation du résultat de **A.1.**

84. +++ Contamination des eaux de baignade

A. *Étude d'une fonction*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{79}{3}e^{-0,25t} - \frac{4}{3}e^{-t}.$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ où l'on prend comme unités 1 cm pour 2.

1. **a)** Démontrer que, pour tout t de $[0, +\infty[$,

$$f'(t) = \frac{1}{3}e^{-0,25t}\,(-19,75 + 4\,e^{-0,75t}).$$

b) Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'inéquation $-19,75 + 4\,e^{-0,75t} \leq 0$.

c) Déduire du **b)** le signe de $f'(t)$ lorsque t varie dans $[0, +\infty[$ et le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.

2. **a)** Compléter après l'avoir reproduit le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-1}.

t	0	5	10	15	20	25
$f(t)$				0,6		

b) Construire la courbe C.

3. Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 2,5$. Arrondir la solution à l'unité.

B. *Exploitation des résultats de la partie A*

Une contamination accidentelle d'un cours d'eau par un produit chimique s'est produite.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en semaines.

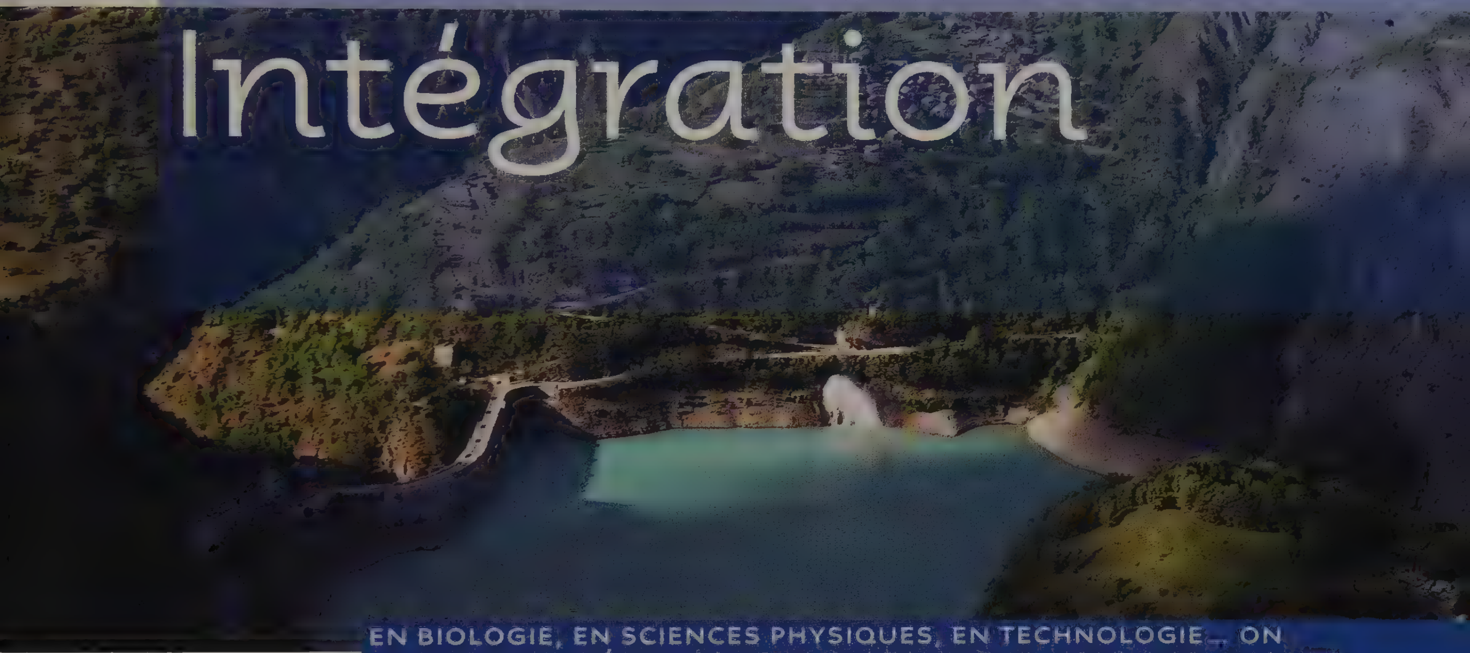
On admet que la concentration du produit dans l'eau, exprimée en milligrammes par litres, est $f(t)$, où f est la fonction définie au début de la partie A.

1. La baignade est sans danger lorsque la concentration du produit est inférieure à 2,5. Déterminer au bout de combien de semaines la baignade peut être autorisée.

2. On considère que la pêche peut être autorisée lorsque la concentration du produit est inférieure à 0,2. Peut-on autoriser la pêche au bout de 20 semaines ?

CHAPITRE 6

Intégration



EN BIOLOGIE, EN SCIENCES PHYSIQUES, EN TECHNOLOGIE… ON UTILISE DES INTÉGRALES POUR CALCULER DES AIRES, DES VALEURS MOYENNES DES QUANTITÉS D'ÉNERGIE DANS DES SITUATIONS TRÈS VARIÉES.

CAPACITÉS

- Calculer une intégrale.
- Déterminer l'aire du domaine défini comme l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$.

ACTIVITÉ 1 Mettre en évidence un lien entre une fonction et une aire définie avec sa représentation graphique

A. Fonction constante

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ l'unité de longueur étant le centimètre.

1° Tracer la représentation graphique de la fonction f définie sur [1, 4] par $f(x) = 2$ et calculer l'aire de la partie du plan limitée par cette représentation graphique, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 4$.

2° Déterminer une primitive F de f et calculer $F(4) - F(1)$.

3° Comparer les résultats numériques obtenus aux questions précédentes.

4° Reprendre les trois questions précédentes en remplaçant la fonction f par la fonction g définie sur [1, 4] par $g(x) = -1$.

B. Fonction affine

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ l'unité de longueur étant le centimètre.

1° Déterminer la fonction f, définie sur l'intervalle [1, 4], dont la courbe représentative est le segment de droite [AB] où A a pour coordonnées 1 et 1 et où B a pour abscisse 4 et pour ordonnée 2.

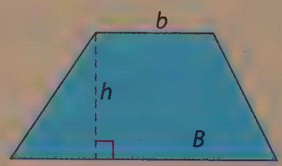
2° Calculer l'aire de la partie du plan ensemble des points M de coordonnées x et y telles que $1 \leq x \leq 4$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

3° Déterminer une primitive F de f et calculer $F(4) - F(1)$.

4° Comparer les résultats numériques obtenus aux questions **2°** et **3°**.

5° Quelle est la largeur CG du rectangle CDEG, où C(1, 0) et D(4, 0), dont l'aire est égale à celle obtenue au **2°** ?
Tracer ce rectangle, E et G ayant une ordonnée positive.

▶ ***Rappel** : L'aire d'un trapèze de bases b et B et de hauteur h est :* $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(b + B)h$



ACTIVITÉ 2

Observer avec GeoGebra et établir un lien entre aire et primitive

A. Aire sous une parabole

LOGICIEL UTILISÉ
GeoGebra

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ et représentée, dans un repère, par la parabole P.

Pour tout réel t, $t \geq 1$, on désigne par $F(t)$ l'aire de la surface limitée par la parabole P, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$, exprimée en unités d'aires (l'unité d'aire est celle du carré unité, représenté en vert sur l'image d'écran suivante).

Ouvrir un fichier GeoGebra. Représenter la fonction f, créer un curseur t allant de 1 à 10 avec un incrément de 0,1 puis afficher l'aire $F(t)$ en entrant dans la barre de saisie : F_t=Intégrale[f,1,t] .

1° **a)** Quelle est la valeur de $F(1)$? Quel est le signe de $F(t)$ pour tout $t > 1$?

b) Quel est le sens de variation de la fonction F sur l'intervalle $[1, +\infty[$?

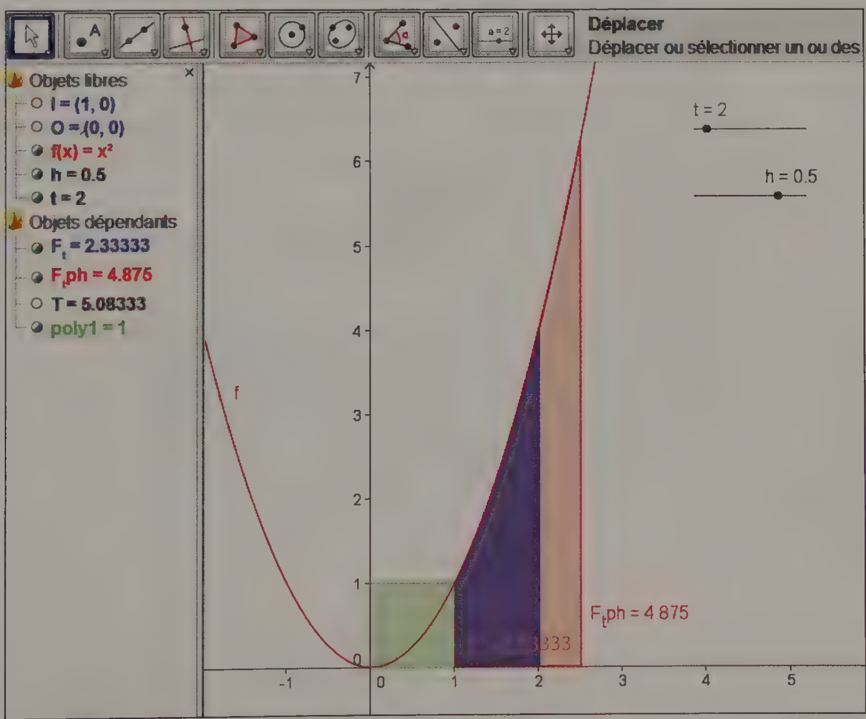
c) À l'aide du fichier GeoGebra, reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant. On indiquera les valeurs de $F(t)$ arrondies à 10^{-3}.

t	2	3	4	5	6	7	8
$F(t) \approx$		8,666 67					

2° On souhaite montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Pour cela, on s'intéresse au taux d'accroissement T de la fonction F entre deux valeurs t et $t + h$ de l'intervalle $[1, +\infty[$: $T = \dfrac{F(t+h) - F(t)}{h}$.

Sur le fichier GeoGebra, créer un curseur h allant de – 1 à 1 avec un incrément de 0,001 puis afficher l'aire $F(t + h)$ en entrant dans la barre de saisie : F_tph=Intégrale[f,1,t+h].

Calculer le taux d'accroissement en saisissant : T=(F_tph-F_t)/h.



a) À l'aide du fichier GeoGebra, reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant. On indiquera les valeurs de T arrondies à 10^{-3}.

valeur de t	$t=2$		$t=3$		$t=4$	
valeur de h	$-0{,}001$	$0{,}001$	$-0{,}001$	$0{,}001$	$-0{,}001$	$0{,}001$
taux d'accroissement de A sur $[t, t+h]$: $T \approx$						

b) Le nombre dérivé $F'(t)$ est la limite, lorsqu'elle existe, du taux d'accroissement T de la fonction F sur l'intervalle $[t, t+h]$ lorsque h tend vers 0.
En utilisant le tableau de la question précédente, conjecturer les valeurs de $F'(2)$, $F'(3)$ et $F'(4)$. Comparer vos conjectures à $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.

3° Dans cette question, on suppose $h > 0$.

a) À quelle aire correspond l'accroissement $F(t+h) - F(t)$?

b) Donner un encadrement de l'aire $F(t+h) - F(t)$ par les aires de deux rectangles et en déduire que, pour tout réel $t \geq 1$, $h \times t^2 \leq F(t+h) - F(t) \leq h \times (t+h)^2$.

c) En déduire que pour tout réel $t > 0$ et tout réel $h > 0$, $t^2 \leq \dfrac{F(t+h)-F(t)}{h} \leq (t+h)^2$.

d) Que vaut, pour tout réel $t \geq 1$, $\lim\limits_{h \to 0} (t+h)^2$?

4° Ce qui précède s'étend au cas $h < 0$ et $t + h \geq 1$ et permet de démontrer que pour tout réel $t \geq 1$, $F'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(t+h)-F(t)}{h} = t^2 = f(t)$.

Saisir dans GeoGebra g(x)=Intégrale[f]. Effacer la courbe représentative de g.

Montrer que, pour tout réel $t \geq 1$, $F(t) = g(t) - \dfrac{1}{3}$, où g est la fonction obtenue précédemment.

Contrôler cette réponse en saisissant g(t)-1/3 dans GeoGebra.

B. Aire sous une courbe exponentielle

On considère dans cette partie la fonction f définie pour tout réel positif x par $f(x) = 2e^{-2x}$ et on désigne, pour tout réel t, $t \geq 1$, par $F(t)$ l'aire de la surface limitée par courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$, exprimée en unités d'aires (ces fonctions interviennent en probabilité).

1° Saisir dans GeoGebra f(x)=Fonction[2*exp(-2*x),0,10] puis observer le graphique et la fenêtre algèbre.

2° Donner l'expression de la primitive de f sur $[1, +\infty[$ nulle en 1.

3° Vérifier la réponse précédente à l'aide de GeoGebra.

1 Intégrale d'une fonction continue sur [*a*, *b*]

A. Continuité d'une fonction

Rappel

Voir le paragraphe 1B. du chapitre 2.

Nous avons admis, au chapitre 2, le théorème suivant.

THÉORÈME

f est définie en *a*.

Soit f une fonction polynôme ou une fonction rationnelle ou la fonction racine carrée ou la fonction sinus ou la fonction cosinus.

Soit a un nombre réel appartenant à un intervalle sur lequel f est définie.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ce théorème signifie qu'avec ces fonctions, $f(x)$ prend des valeurs aussi proches de $f(a)$ que l'on veut dès que x est suffisamment proche de a.

Fonction « partie entière »

Cette définition « simplifiée » de la fonction partie entière E ne s'applique pas aux nombres négatifs.

À tout nombre réel de l'intervalle [1,5 ; 2,5], on associe le nombre entier écrit à gauche de la virgule dans l'écriture décimale de x.

Ce nombre entier est appelé *partie entière de x* et noté $E(x)$.

Ainsi $1{,}5 \overset{E}{\longmapsto} 1$; $\dfrac{5}{3} \overset{E}{\longmapsto} 1$ car $\dfrac{5}{3} = 1{,}666\ldots$

$\sqrt{3} \overset{E}{\longmapsto} 1$ car $\sqrt{3} \approx 1{,}732$; $1{,}999 \overset{E}{\longmapsto} 1$; $2 \overset{E}{\longmapsto} 2$; $2{,}5 \overset{E}{\longmapsto} 2$.

Nous observons que pour tout x de l'intervalle [1,5 ; 2[, $E(x) = 1$ et que pour tout x de l'intervalle [2 ; 2,5], $E(x) = 2$.

La représentation graphique de la fonction E est donc constituée de deux segments de droite, à l'exception de l'extrémité de droite du premier.

Sur la figure, on note avec un petit arc de cercle l'extrémité exclue du premier segment de droite : le point de coordonnées (2, 1) n'appartient pas à la représentation graphique de la fonction E.

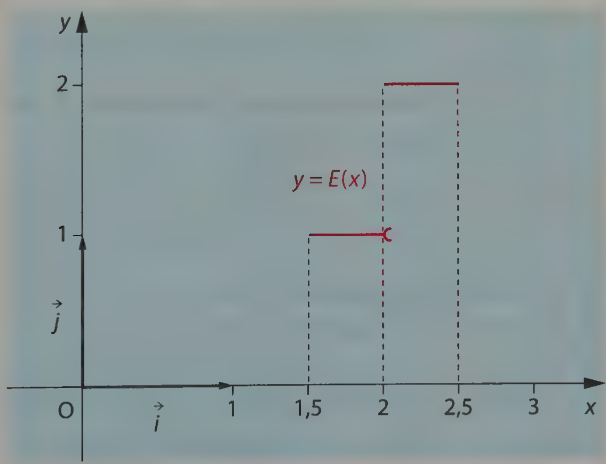


Figure 1

Quand x augmente de 1,5 à 2,5, le nombre $E(x)$ fait un saut de 1 à 2 lorsque x arrive à la valeur 2.

Le tracé de la représentation graphique de E sur l'intervalle [1,5 ; 2,5] n'est donc pas continu : il faut lever le crayon pour passer d'un segment de droite à l'autre.

Pour distinguer cette situation du cas des fonctions figurant dans le théorème ci-dessus, on introduit la notion de continuité d'une fonction.

Continuité d'une fonction

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un élément de I.

f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemples

Voir le théorème du rappel ci-dessus.

La fonction polynôme $x \mapsto x^2 + 3x - 1$, définie sur $\mathbb{R}$, est continue en 0.

La fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x}$, définie sur $]0, +\infty[$ est continue sur 1.

Contre-exemple

La fonction « partie entière » E définie ci-dessus n'est pas continue en 2.

DÉFINITION

Une fonction f **est continue sur un intervalle J** si et seulement si elle est continue en tout a de J.

Exemples

Toute fonction polynôme, toute fonction rationnelle, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus, la fonction logarithme népérien, la fonction exponentielle sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Contre-exemple

La fonction « partie entière » E définie ci-dessus n'est pas continue sur l'intervalle $[1{,}5 ; 2{,}5]$.

Cependant E est continue, par exemple, sur l'intervalle $[1{,}5 ; 2[$.

Remarque

Voir au chapitre 2 les tableaux du paragraphe **3**.

Les théorèmes sur la limite d'une somme, d'un produit, …, et les théorèmes sur la limite d'une fonction de la forme u^n, $\ln u$ ou e^u permettent d'étendre le champ des fonctions continues.

B. Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$

$f(x) \geq 0$ pour tout x de $[a, b]$.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Quadrilatère curviligne

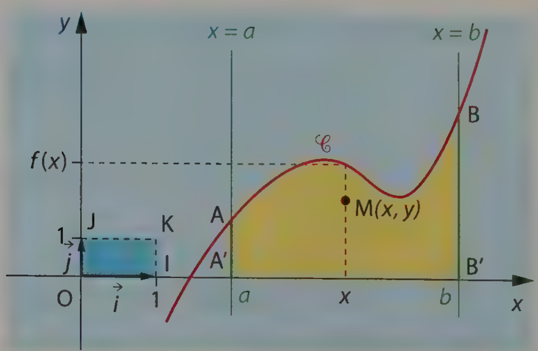


Figure 2

Sur la figure, la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est coloriée en jaune : c'est le *quadrilatère curviligne* ABB'A' dont le côté AB est un arc de courbe.

Observez-le sur la figure.

Ce quadrilatère curviligne est l'ensemble des points M(x, y) tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Son aire, appelée usuellement « aire sous la courbe », est un nombre positif, exprimé en unités d'aire, que nous allons chercher à calculer.

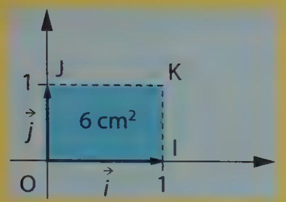


Figure 3

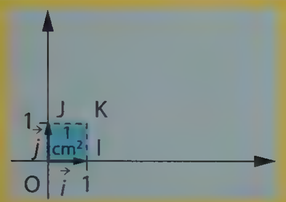


Figure 4

Unité d'aire

Sur la figure ci-dessus, l'unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ car $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant les vecteurs unitaires des deux axes de coordonnées, on a OI = 1 et OJ = 1, donc $\text{OI} \times \text{OJ} = 1$.

Si l'unité de longueur est 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées, l'aire du rectangle OIKJ est $3 \times 2 = 6$ cm², donc l'unité d'aire est 6 cm².

Dans le cas particulier où le repère est orthonormé et où l'unité de longueur sur chaque axe est le centimètre, OIKJ est un carré de côté 1 cm, donc d'aire 1 cm² : l'unité d'aire est alors le centimètre carré.

Dans toute la suite du cours, toutes les aires sont exprimées en unités d'aire.

Définition

DÉFINITION

L'**intégrale** d'une fonction f continue et positive sur $[a, b]$ est l'**aire** de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la représentation graphique de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

C'est « l'aire sous la courbe ».

NOTATION

L'**intégrale** d'une fonction f continue et positive sur $[a, b]$ est notée :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Lire « somme de a à b de f de x dx ».

Exemples

$\int_1^4 2\,\mathrm{d}x = 6.$

$\int_1^4 \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x = 4{,}5.$

Voir l'activité d'approche 1.

Remarques

- Nous avons déjà rencontré la notation dx à propos de la notation différentielle de la dérivée d'une fonction ($\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ au lieu de f') utilisée notamment en biologie ($v = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$), en électricité ($i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$) et en mécanique ($v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$).

Voir le paragraphe 1C. du chapitre 3.

- De même que pour une même fonction la variable peut être notée x ou t ou… ($f : x \mapsto f(x)$ ou $f : t \mapsto f(t)$ ou…), pour une intégrale on a :
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \ldots$

La variable est dite « muette ».

C. Calcul de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$

On admet le résultat suivant.

L'activité préparatoire 1 illustre ce théorème dans deux cas particuliers élémentaires.

THÉORÈME

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Voir au chapitre 3 le tableau des primitives des fonctions usuelles.

Remarque

Pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$ nous commençons par déterminer une primitive F de f avant de calculer $F(b) - F(a)$.

Nous notons ce calcul de la façon suivante : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemples

- $\int_{-1}^2 2x\,dx = [x^2]_{-1}^2 = 2^2 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$.
- $\int_1^e \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$ car $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$.
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\,dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1$ car $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos 0 = 1$.
- Dans le cas particulier où $b = a$, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ car $F(a) - F(a) = 0$.

EXERCICE résolu 1

ÉNONCÉ

Calculer l'intégrale $I = \int_0^2 e^{-3t+1}\,dt$.

MÉTHODE

Reconnaître la forme de $f(t)$.

Faire apparaître une forme $u'(t)\,e^{u(t)}$.

Déterminer une primitive F de f.

Calculer $F(b) - F(a)$.

SOLUTION

$f(t) = e^{-3t+1}$ est de la forme $e^{u(t)}$ dont la dérivée est $u'(t)\,e^{u(t)}$ avec $u'(t) = -3$.

$f(t) = -\frac{1}{3}(-3e^{-3t+1})$.

Une primitive F de f est donc définie par $F(t) = -\frac{1}{3}e^{-3t+1}$.

$I = \left[-\frac{1}{3}e^{-3t+1}\right]_0^2$; $I = -\frac{1}{3}e^{-5} - \left(-\frac{1}{3}e\right)$; $I = \frac{1}{3}(e - e^{-5})$; $I \approx 0{,}904$.

VOIR AUSSI LES EXERCICES CORRIGÉS 13, 14, 20, 28

2 Propriétés de l'intégrale

A. Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b]$.

$(F+G)' = F' + G' = f + g.$

$(kF)' = kF' = kf.$

Nous savons que si F et G sont des primitives de f et g, alors :
$F + G$ est une primitive de $f + g$,
kF est une primitive de kf, où k est une constante réelle.

En utilisant ces résultats et la définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$, on démontre le théorème suivant.

THÉORÈME

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b]$ et k une constante réelle positive.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

EXERCICE résolu 2

ÉNONCÉ

Calculer $I = \int_1^2 \left(6x + \frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x$.

MÉTHODE

Exploiter la linéarité de l'intégrale pour isoler des dérivées de fonctions de référence dans des intégrales.

Appliquer la définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

SOLUTION

$I = \int_1^2 \left(6x + \frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x,$

$I = \int_1^2 6x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x,$

$I = 3\int_1^2 2x\,\mathrm{d}x + 4\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$

$I = 3[x^2]_1^2 + 4[\ln x]_1^2,$

$I = 3(4-1) + 4(\ln 2 - \ln 1),$

$I = 9 + 4\ln 2.$

$I \approx 11{,}77.$

VOIR AUSSI LES EXERCICES CORRIGÉS 1 à 3, 17, 25, 32

B. Positivité

Voir le paragraphe 1B..

Nous avons vu que l'intégrale d'une fonction continue et **positive** sur $[a, b]$ est l'aire sous la courbe ; c'est donc un nombre **positif**.

THÉORÈME

Soit f une fonction continue sur [a, b].

Si, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

3 Calculs d'aires

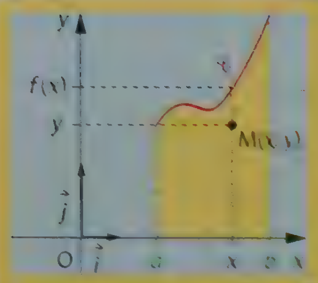


Figure 6

A. Aire d'un domaine limité par une courbe représentant une fonction continue positive

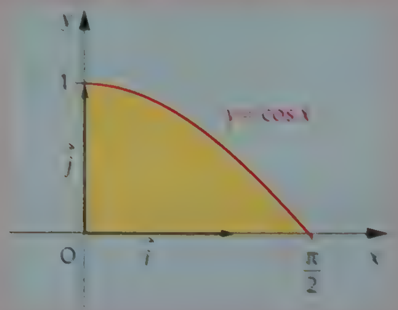
Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a, b]$, de représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal.

Nous avons vu au paragraphe **1B.** que **l'aire du domaine défini comme l'ensemble des points M(x, y) tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ est égale, en unité d'aire, à $\int_a^b f(x)\,dx$.**

EXERCICE résolu 3

ÉNONCÉ

Calculer l'aire de la partie du plan coloriée en jaune sur la figure.



MÉTHODE

S'assurer que f est positive sur $[a, b]$.

Appliquer le résultat ci-dessus

SOLUTION

La fonction $f : x \longmapsto \cos x$ est positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

L'aire de la partie du plan coloriée est $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ car $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $\sin 0 = 0$.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 49

B. Aire d'un domaine plan limité par deux courbes représentatives de fonctions positives

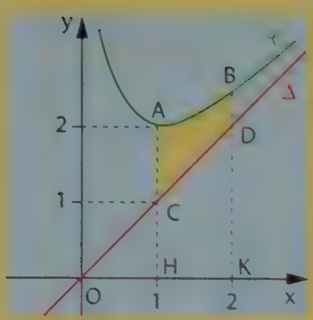


Figure 12

La droite Δ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ car, pour tout x de $]0, +\infty[$, $x < x + \frac{1}{x}$.

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$ unité : 1 cm sur chaque axe.

Sur la figure, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

La droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.

Calculons l'aire en cm² de la partie limitée par $\mathscr{C}$, Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

L'aire cherchée est celle de la partie du plan coloriée en jaune : c'est la différence entre l'aire du quadrilatère curviligne ABKH et l'aire du trapèze CDKH.

L'aire du quadrilatère curviligne ABKH est $\int_1^2 g(x)\,dx$ car $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[1, 2]$.

De même l'aire du quadrilatère CDKH est $\int_1^2 f(x)\,dx$ car $f(x) = x \geq 0$ pour tout x de $[1, 2]$.

L'aire cherchée $\mathscr{A}$ est donc $\int_1^2 g(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (g(x) - f(x))\,dx$ d'après la propriété de linéarité de l'intégrale.

Donc $\mathscr{A} = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} - x\right)dx,$

$$\mathscr{A} = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 \quad \text{car} \quad \ln 1 = 0.$$

L'unité d'aire étant le centimètre carré, $\mathscr{A} = \ln 2 \text{ cm}^2 \approx 0{,}7 \text{ cm}^2$.

Cas général

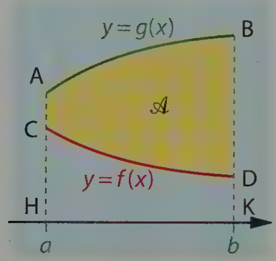
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un même intervalle $[a, b]$ telles que, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.

Nous allons déterminer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

C'est l'aire du domaine défini comme ensemble des points $M(x, y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$.

- Les fonctions f et g sont positives sur $[a, b]$, nous avons par exemple :



$\mathscr{A}$ est la différence des aires des quadrilatères curvilignes ABKH et CDKH :

$\mathscr{A} = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx.$

Nous constatons que : $\mathscr{A} = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$

THÉORÈME

L'aire du domaine plan défini comme ensemble des points $M(x, y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$, f et g étant deux fonctions continues et positives sur $[a, b]$ est :

$$\mathscr{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

Principaux résultats sur les primitives (rappels)

Les résultats suivants ont été énoncés aux chapitres 3, 4 et 5.

• Primitives des fonctions usuelles

Dans ce qui suit, C est une constante réelle quelconque.

f est définie par	Les primitives de f sont définies par	Intervalle de validité
$f(x)=a$	$F(x)=ax+C$	$]-\infty,+\infty[$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$	$]-\infty,+\infty[$
$f(x)=x^n$ $(n\neq-1)$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	• si $n>0:\mathbb{R}$ • si $n<0:]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+C$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln x+C$	$]0,+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C$	$]-\infty,+\infty[$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$	$]-\infty,+\infty[$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$	$]-\infty,+\infty[$

• Primitives des fonctions composées

Dans les formules suivantes, u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et C une constante réelle quelconque.

f est définie sur un intervalle I par	Les primitives F de f sont définies sur I par
$f(x)=u'(x)[u(x)]^n$ $n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\}$	$F(x)=\frac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1}+C$
$f(x)=\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$	$F(x)=-\frac{1}{u(x)}+C$
$f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)$ est strictement positif sur I.	$F(x)=\ln[u(x)]+C$
$f(x)=u'(x)e^{u(x)}$	$F(x)=e^{u(x)}+C$
Conséquence $f(x)=e^{kx}$ où k est constante réelle quelconque non nulle	$F(x)=\frac{1}{k}e^{kx}+C$

Intégrale d'une fonction continue et positive

• Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, et F une primitive de f sur $[a, b]$.

On appelle **intégrale de *a* à *b* de *f*** le nombre réel : $F(b) - F(a)$.

On note : $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$.

• On lit : « somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».

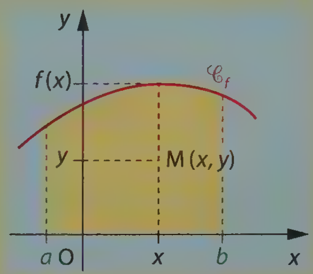
• On écrit aussi : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$.

Calculs d'aire

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a, b]$. L'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan, ensemble des points M de coordonnées x et y telles que :

$a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$,

est : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

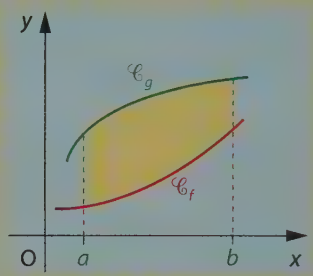


• **Aire limitée par deux courbes**

Soient f et g deux fonctions dérivables et positives sur $[a, b]$ telles que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.

L'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les courbes représentatives de f et g et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x$.



Travaux pratiques TICE

RÉPONSES P. 350

TP 1 Calculer une intégrale à l'aide d'un logiciel en situation technologique

LOGICIEL UTILISÉ
GeoGebra

Longueur d'une chaînette

La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes (pensez aux lignes à haute tension de RTE, Réseau de transport d'électricité).

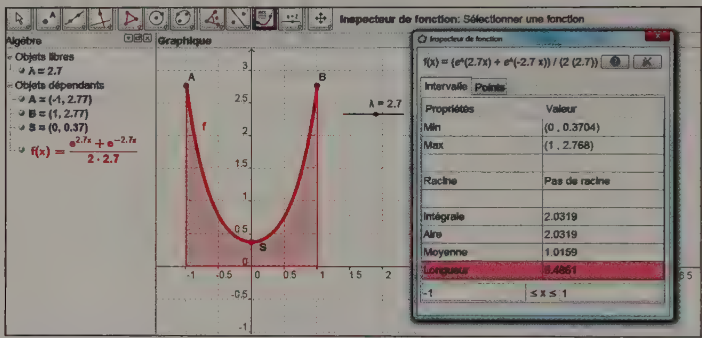
On admet que, rapportée à un repère orthonormé convenable, la chaînette a une équation de la forme :

$y = \dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}$ avec $\lambda > 0$.

Créer, avec GeoGebra, un curseur λ allant de 0 à 5 avec un incrément 0,1.

Tracer avec GeoGebra, dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $f(x) = \dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}$ avec $\lambda > 0$.

Placer les points A et B aux extrémités de la courbe ainsi que le point S d'abscisse 0 situé sur la courbe.



A. Détermination de la hauteur du point le plus bas

Déterminer la valeur de λ pour laquelle la longueur OS, où O est l'origine du repère, vaut 0,5 :
– en modifiant la position du curseur ;
– en effectuant un calcul.

B. Calcul de la longueur du fil

On admet que la longueur L de l'arc de courbe d'équation $y = f(x)$ compris entre les points d'abscisses -1 et 1 est égale à l'intégrale $L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$, où f' est la fonction dérivée de f.

Dans cette partie, on suppose que $\lambda = 2$.

1. Vérifier, à l'aide de GeoGebra, que, pour tout réel x de l'intervalle $[-1, 1]$, $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$.
(Saisir f'(x) et effacer la courbe en cliquant sur la puce devant l'expression de la dérivée figurant dans la fenêtre algèbre.)

2. Vérifier graphiquement que, pour tout réel x de l'intervalle $[-1, 1]$,
$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = 2 \times f(x)$.
(On pourra saisir g(x)=sqrt(1+(f'(x))²) puis h(x)=λ*f(x). On ne demande pas de démontrer le résultat.)

3. **a.** Déterminer une valeur approchée de l'intégrale L à l'aide de la fonction Intégrale de GeoGebra.

b. Calculer la valeur exacte de $L = \int_{-1}^{1} \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\,dx$.

4. Saisir dans GeoGebra Longueur[f,A,B] et vérifier que cette instruction fournit directement une valeur approchée de L.

▶ *Voir également l'exercice* **57** *de ce chapitre.*

TP 2 Exploiter une fonction définie par une intégrale dans une situation technologique

Ce TP peut permettre d'évaluer des capacités mathématiques développées grâce aux TICE.

LOGICIELS UTILISÉS
GeoGebra
Maxima

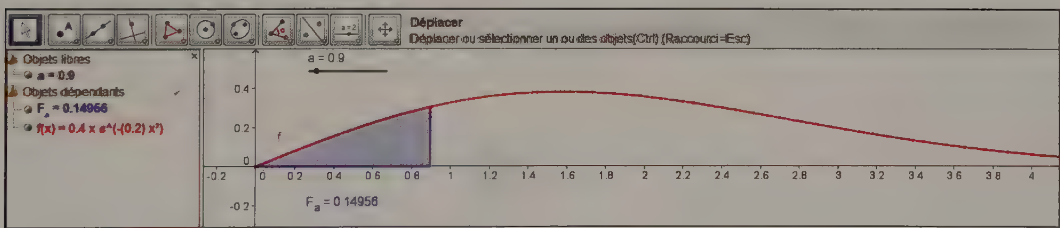
Anticiper les crues

Une étude statistique, fondée sur un historique des crues d'un fleuve permet à un bureau d'étude du domaine de l'équipement de faire des prévisions sur la hauteur maximale annuelle du fleuve, à l'aide du modèle probabiliste suivant.

Soit a un réel positif. La probabilité qu'une année donnée la hauteur maximale du fleuve soit inférieure à a mètres est $\int_0^a f(x)\,dx$ où f est la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = 0{,}4x e^{-0{,}2x^2}$.

C. Visualisation de la fonction $a \mapsto \int_0^a f(x)\,dx$ à l'aide de GeoGebra

À l'aide de GeoGebra, visualiser et calculer l'aire correspondant à $\int_0^a f(x)\,dx$ pour un curseur a allant de 0 à 10 avec un incrément de 0,1.



Utiliser le fichier GeoGebra, pour répondre sans calcul aux deux questions suivantes.

1. Les digues actuelles ne protègent l'agglomération que lorsque la hauteur maximale du fleuve est inférieure à 4 mètres. Déterminer, selon ce modèle, à 10^{-2} près, la probabilité qu'une année donnée, l'agglomération soit protégée de la crue.

2. Afin de réaliser des travaux pour améliorer la protection de l'agglomération, on s'interroge sur le fait de savoir si, selon ce modèle, en surélevant les digues actuelles de un mètre, la probabilité qu'une année prise au hasard, l'agglomération soit protégée est supérieure à 0,99. Donner votre avis.

Appelez le professeur pour présenter votre démarche et vos réponses.

D. Utilisation d'un logiciel de calcul formel

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'affichage suivant (log désigne dans ce logiciel le logarithme népérien habituellement noté ln).

```
(%i1) define(f(x),0.4*x*exp(-0.2*x^2));
                           2
                     -0.2 x
(%o1) f(x):=0.4 x %e

(%i2) define(F(a),integrate(f(x),x,0,a));
Is  a  positive, negative, or zero?p;
rat: replaced -0.2 by -1/5 = -0.2
rat: replaced -2.5 by -5/2 = -2.5
rat: replaced -0.2 by -1/5 = -0.2
rat: replaced -2.5 by -5/2 = -2.5
                      /         2 \
                      |        a  |
                      |      - -- |
                      |        5  |
                      | 5   5 %e  |
(%o2) F(a):=0.4      | - - ------ |
                      \ 2     2    /

(%i3) expand(F(a));
                      2
                     a
                   - --
                     5
(%o3) 1.0-1.0 %e

(%i4) solve([F(a)=0.99], [a]);
rat: replaced -0.99 by -99/100 = -0.99
rat: replaced 0.4 by 2/5 = 0.4
(%o4) [a=-sqrt(5) sqrt(log(100)), a=sqrt(5) sqrt(log(100))]
```

1. Utiliser, sans justification, cet affichage pour donner une expression simple de la fonction F définie pour tout nombre réel a de l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$F(a) = \int_0^a 0{,}4x\mathrm{e}^{-0{,}2x^2}\,\mathrm{d}x.$

2. Justifier que $a = \sqrt{5\ln(100)}$ est solution de l'équation $F(a) = 0{,}99$.

Appelez le professeur pour présenter vos réponses.

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE	Exercices corrigés	Exercices non corrigés
Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive	1, 2, 3, 11, 13, 14, 17, 20, 25, 28, 32, 40	4 à 10, 12, 15, 16, 18, 19, 21 à 24, 26, 27, 29 à 31, 33 à 37, 41 à 45, 55, 56, 57, 62, 63
Transformer l'écriture d'une fonction pour calculer une intégrale		38 et 39
Justifier un résultat obtenu avec un logiciel de calcul formel		46
Calculer une aire plane	47, 49, 66, 70	48, 50 à 54, 64, 65, 67 à 69, 71, 72
Utiliser le calcul intégral dans les autres disciplines		55, 56, 57, 73, 74
TICE Utiliser Geogebra	58	
TICE Utiliser Maxima	58, 75	

Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

En utilisant le tableau des primitives rappelé dans « ***Ce qu'il faut savoir*** », calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes (exercices **1** à **36**).

▶ **Conseil :** *pour chacun des exercices* **1** *à* **36***, on peut vérifier le résultat avec un logiciel de calcul formel.*

1. +

$I=\int_2^3 (x-2)\,\mathrm{d}x.$

CORRIGÉ P. 350

2. +

$I=\int_0^3 (2x^2-x+3)\,\mathrm{d}x.$

CORRIGÉ P. 350

3. +

$I=\int_0^1 (x^3+x^2+x)\,\mathrm{d}x.$

CORRIGÉ P. 350

4. +

$I=\int_3^4 \mathrm{d}x.$

5. +

$I=\int_{-1}^0 3\,\mathrm{d}x.$

6. +

$I=\int_3^4 (x-3)\,\mathrm{d}x.$

7. +

$I=\int_0^4 (2t+1)\,\mathrm{d}t.$

8. +

$I=\int_2^3 (x^2+x+1)\,\mathrm{d}x.$

9. +

$I=\int_2^3 (x^3+x^2+x+1)\,\mathrm{d}x.$

10. +

$I=\int_0^1 2t^3\,\mathrm{d}t.$

11. ++

$I=\int_1^2 (2x+1)(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x.$

CORRIGÉ P. 350

Exercices

12. +

$I=\int_1^2 (x+1)(x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x.$

13. +

$I=\int_0^1 (2x+1)^3\,\mathrm{d}x.$

CORRIGÉ P. 351

14. ++

$I=\int_1^2 \dfrac{1}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

CORRIGÉ P. 351

15. +

$I=\int_2^3 \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

16. +

$I=\int_1^2 \left(x+1+\dfrac{1}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x.$

17. +

$I=\int_1^3 \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$

CORRIGÉ P. 351

18. +

$I=\int_1^2 \left(x+1+\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x.$

19. +

$I=\int_0^2 \left(2x+1+\dfrac{3}{x+2}\right)\mathrm{d}x.$

20. ++

$I=\int_{\frac{3}{2}}^5 \dfrac{1}{2t-1}\,\mathrm{d}t.$

CORRIGÉ P. 351

21. ++

$I=\int_0^2 \left(2x+1+\dfrac{3}{2x+3}\right)\mathrm{d}x.$

22. +

$I=\int_1^2 \dfrac{2x+1}{x^2+x+5}\,\mathrm{d}x.$

23. +

$I=\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{1}{x}(\ln x)^2\,\mathrm{d}x.$

▶ **Indication :** $x\mapsto \dfrac{1}{x}(\ln x)^2$ *est de la forme* $u'(x)[u(x)]^n$.

24. +

$I=\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{1}{x}\ln x\,\mathrm{d}x.$

25. +

$I=\int_{-1}^1 (2\mathrm{e}^x+1)\,\mathrm{d}x.$

CORRIGÉ P. 351

26. +

$I=\int_{-\frac{1}{3}}^0 (1-\mathrm{e}^{3t})\,\mathrm{d}t.$

27. ++

$I=\int_{\ln 2}^{\ln 4} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

28. ++

a) $I=\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$; b) $J=\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t+1}\,\mathrm{d}t.$

CORRIGÉ P. 351

29. +

$I=\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x.$

30. ++

$I=\int_0^{\ln 2} \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

31. ++

$I=\int_{\ln 2}^{\ln 3} \dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t.$

32. +

$I=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x+2\cos 2x)\,\mathrm{d}x.$

CORRIGÉ P. 351

33. +

$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x\,\mathrm{d}x.$

34. +

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}x.$

35. ++

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,\mathrm{d}x.$

36. ++

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x.$

37. +++ **Résoudre une équation**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$x^2-x-2=0.$

2. Pour tout nombre réel a, on pose :

$I(a)=\int_0^a (\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x.$

Calculer $I(a)$ en fonction de a.

3. Calculer le réel a tel que $I(a)=2$.

Transformer l'écriture d'une fonction pour calculer une intégrale

38. +++ **Avec une fonction rationnelle**

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$f(x) = \dfrac{4x-2}{x^2-1}$.

1. Vérifier que, pour tout x de $]1, +\infty[$,

$f(x) = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$.

2. En déduire la valeur exacte de l'intégrale

$I = \displaystyle\int_2^5 \frac{4x-2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

39. +++

Soit f la fonction définie sur $I =]-1, +\infty[$ par :

$f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2+3x+2}$.

1. Vérifier que, pour tout nombre réel x de I,

$f(x) = \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$.

2. En déduire une primitive F de f sur I.

3. a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale

$J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$;

b) Donner la valeur arrondie au centième du nombre J.

Une primitive est donnée

Cette situation se rencontre lorsqu'on ne peut pas déterminer directement une primitive avec les résultats du cours de Terminale STL, par exemple lorsque $f(x)$ s'exprime à l'aide de $\ln x$.

40. ++ **Une primitive de $x \mapsto \ln x$**

1. Déterminer la dérivée F' de la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - \cancel{1}.$ x

2. En déduire le calcul de l'intégrale

$I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$.

CORRIGÉ P. 351

41. ++

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par :

$F(x) = \dfrac{x}{12}(x^2 + 6 - 6\ln x)$.

2. En déduire la valeur exacte de l'intégrale :

$I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

42. ++ **Avec la fonction ln**

1. Montrer que la fonction F définie sur $[-1, +\infty[$ par $F(x) = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)\ln(2x+3) - x$ est une primitive de la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x+3)$.

2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

43. ++

1. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \ln x$.

2. En déduire la valeur exacte de l'intégrale

$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \left(x \ln x + \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

44. ++ **Avec la fonction exponentielle**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (2t+1)\mathrm{e}^{-t}$.

1. Vérifier que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (-2t-3)\mathrm{e}^{-t}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

45. ++

Soit f et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = 6x^2 + x\mathrm{e}^x$ et $G(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$.

1. Déterminer la fonction dérivée G' de G.

2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Justifier un résultat obtenu avec un logiciel de calcul formel

46. ++

Justifier par un calcul détaillé la valeur exacte de l'intégrale I qui a été obtenue avec un logiciel de calcul formel.

a) $\displaystyle\int_2^3 (x-2)\,\mathrm{d}x = 0{,}5$;

b) $\displaystyle\int_0^3 (2t^2 - t + 3)\,\mathrm{d}t = 22{,}5$;

c) $\displaystyle\int_0^1 (x^3 + x^2 + x)\,\mathrm{d}x = \frac{13}{12}$;

d) $\displaystyle\int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = 4 + \ln 3$;

e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t = \ln 3$;

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 (2\mathrm{e}^x + 1)\,\mathrm{d}x = 2(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} + 1)$;

g) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 4} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 1$;

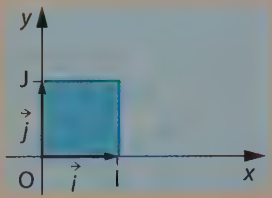
h) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{2t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e})$.

Calculer une aire plane

▶ Exemples d'unités d'aire

L'aire $\mathscr{A}$ considérée dans les résultats énoncés à la page 178 est exprimée en unités d'aire.

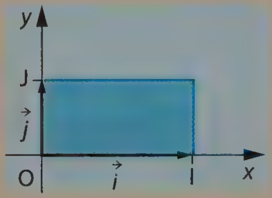
• Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ l'unité d'aire est l'aire du carré défini par les vecteurs unitaires $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ du repère.



Si sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées l'unité choisie est 1 cm, alors l'unité d'aire est 1 cm²; si l'unité choisie sur chaque axe de coordonnée est 2 cm, alors l'unité d'aire est 4 cm².

• Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ l'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs unitaires $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ du repère.

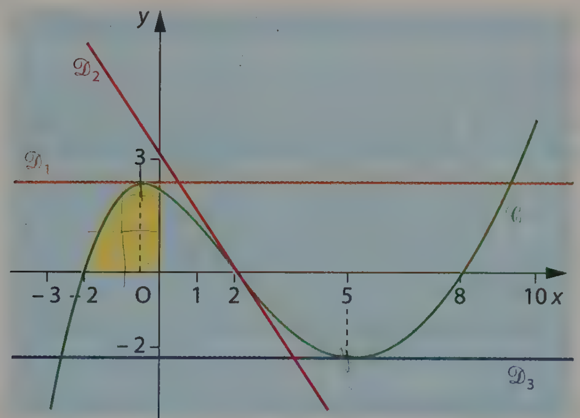
Si l'unité choisie sur l'axe des abscisses est 2 cm et si l'unité sur l'axe des ordonnées est 1 cm, alors l'unité d'aire est 2 cm².



47. +++ Lectures graphiques

On a dessiné ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3, 10]$. Cette courbe passe par les points de coordonnées $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(8, 0)$.

Les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ sont les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses $-\dfrac{1}{2}$, 2 et 5, $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_3$ étant parallèles à l'axe des abscisses. La droite $\mathscr{D}_2$ passe par le point de coordonnées $(0, 3)$.



1. Dans la suite, f' désigne la fonction dérivée de f.

Par lecture graphique et sans justification du résultat, donner :

a) la valeur de chacun des nombres suivants :

$f(2)$; $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; $f'(2)$; $f'(5)$;

b) l'ensemble des solutions de chacune des inéquations suivantes : $f(x) \leq 0$; $f'(x) \leq 0$.

2. On considère l'intégrale :

$A = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$

a) Donner une interprétation en termes d'aire de A.

b) Par lecture graphique, indiquer, parmi les propositions suivantes, celle qui est vraie. Expliquer la réponse :

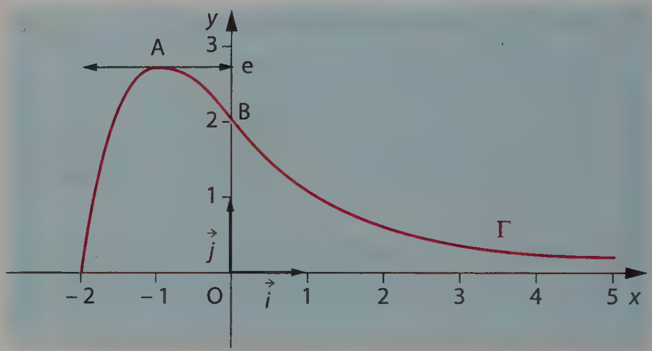
$-2 \leq A \leq 0$; $0 \leq A \leq 2$; $2 \leq A \leq 5$.

CORRIGÉ P. [illegible]

48. ++ On justifie l'encadrement d'une intégrale à l'aide d'un graphique

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, (unité graphique 1 cm), Γ est la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur $[-2, 5]$.

La courbe Γ passe par les points A et B de coordonnées respectives $(-1, e)$ et $(0, 2)$. Elle admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



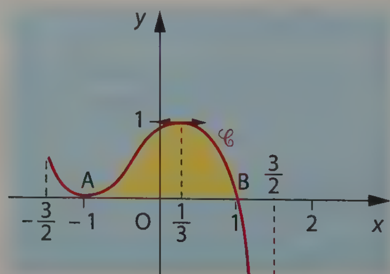
1. Indiquer le sens de variation de f sur $[-2, 5]$.

2. Justifier l'encadrement $2 \leq \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \leq 3$.

49. +++ Avec une fonction polynôme

Sur la figure ci-dessous, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$ par : $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 ~~3~~ cm).

On précise que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point B d'abscisse 1 et est tangente à l'axe des abscisses au point A d'abscisse -1.

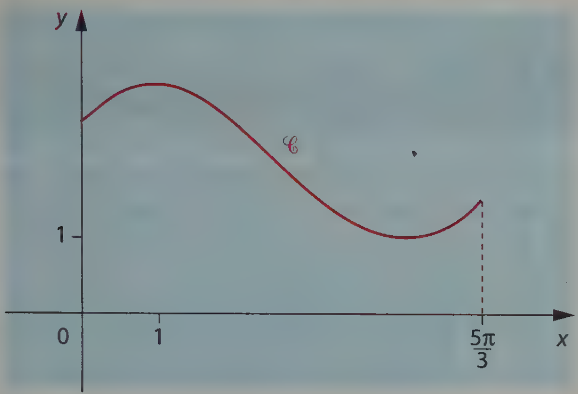


1. À l'aide de la figure, indiquer le signe de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

2. Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm² de la partie de plan colorié. Vérifier l'ordre de grandeur du résultat sur la figure.

CORRIGÉ P. 351

50. +++ Avec une fonction trigonométrique



La courbe 𝒞 est la courbe représentative, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique : 1 cm), de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{5\pi}{3}\right]$ par :

$f(x) = 2 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Déterminer l'aire en cm² de la partie du plan ensemble des points $M(x, y)$ avec $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

51. +++ Utiliser une calculatrice graphique TICE

1. À l'aide d'une calculatrice graphique, dessiner dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ (unité : 5 cm) la courbe représentative Γ de la fonction numérique f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin 2x$.

2. Calculer l'aire en cm² de la partie du plan limitée par l'arc Γ et l'axe des abscisses.

52. +++ Avec une fonction logarithme

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ par :

$f(x) = 2x(1 - \ln x) + 1$. La courbe représentative 𝒞 de f est donnée sur l'annexe dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ où l'unité est 2 cm.

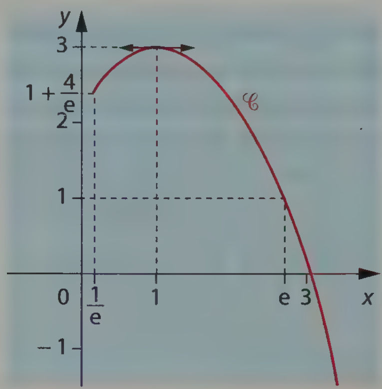
1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ par $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + x$.

Montrer que F est une primitive de f sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

2. a) Calculer l'aire exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe 𝒞, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

b) Exprimer cette aire en cm² puis en donner la valeur approchée arrondie à 10^{-1}.

Annexe

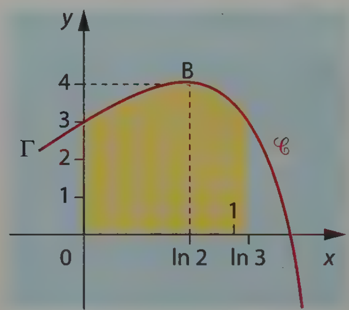


53. +++ Avec une fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = 4e^x - e^{2x} = e^x(4 - e^x)$.

On donne sa courbe représentative Γ dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : $\cancel{4}$ 2 cm sur l'axe des abscisses ; 1 cm sur l'axe des ordonnées).

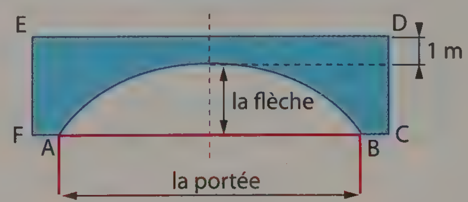


Montrer que l'aire du domaine colorié sur la figure est égale à 16 cm².

▶ *Avec prise d'initiatives.*

54. ++++ On fait le pont !

On considère une arche de pont parabolique de 24 mètres de portée et de 6 mètres de flèche.



Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Calculer la valeur approchée, en m², arrondie à 10^{-2}, de l'aire de la surface ABCDEF de l'arche sachant que BC = AF = 1 m.

Exemples de calcul d'autres grandeurs à l'aide du calcul intégral

55. ++ Développement durable : flux solaire

On considère une construction dans une zone de moyenne montagne équipée de 20 m^2 de vitrage sur une façade au sud. Dans ce cas, les vitrages laissent passer 60 % du flux solaire. On admet que le flux solaire obtenu à l'intérieur après 8 heures consécutives d'exposition au soleil, au mois de novembre, est, en joules × (jour^{-1}) :

$$E = 0{,}60 \times 20 \times \int_0^{28\,800} 600 \sin\left(\frac{\pi}{28\,800} t\right) dt.$$

Calculer E.

56. ++ Développement durable : stockage d'énergie

On considère une retenue d'eau qui peut être assimilée à un parallélépipède rectangle dont les dimensions en mètres sont : 1 000 × 1 000 × 100. On admet que l'énergie totale, en joules, stockée dans la retenue d'eau est :

$$E = \int_0^{100} 1\,000 \times 1\,000 \times 9{,}81\, h dh.$$

Calculer E.

57. +++ La longueur d'une chaînette

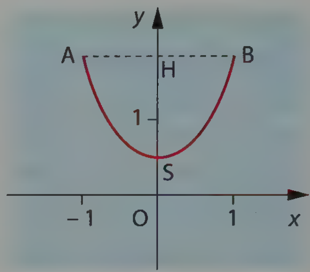
La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes.

On montre et on admet que, rapportée à un repère orthonormé convenable, la chaînette admet une équation de la forme :

$$y = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda} \text{ avec } \lambda > 0.$$

▶ *Pensez aux lignes à haute tension de RTE (Réseau de transport d'électricité).*

On laisse pendre un tel fil entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 mètres, comme le montre la figure.



On admet que, dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, l'arc AB est la courbe représentative de la fonction f définie sur [– 1, 1] par $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$.

▶ *La courbe est la chaînette obtenue pour $\lambda = 2$.*

1. *Détermination de la flèche*

La flèche prise par le fil est la distance SH de la figure.

Calculer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la flèche SH.

2. *Calcul de la longueur du fil*

On admet que la longueur L de l'arc de courbe d'équation $y = f(x)$ compris entre les points d'abscisses – 1 et 1 est égale à l'intégrale $L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$, où f' est la fonction dérivée de f.

a) Vérifier que, pour tout x de [– 1, 1],

$$1 + [f'(x)]^2 = \left[\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right]^2.$$

b) En déduire que $L = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2}$.

c) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la longueur L en mètres de ce fil.

▶ *Voir également l'exercice 57 du chapitre 5 et le TP1 du chapitre 6.*

Utiliser des logiciels

58. +++ Vitesses probables du vent avec GeoGebra et Maxima

TICE

On étudie dans cet exercice une fonction définie par une intégrale modélisant les probabilités de vitesse du vent dans le cadre d'implantation d'éoliennes.

Suite à une étude statistique, on suppose que, sur le site considéré, la probabilité qu'une journée donnée la vitesse du vent soit inférieure à a mètres par seconde est :

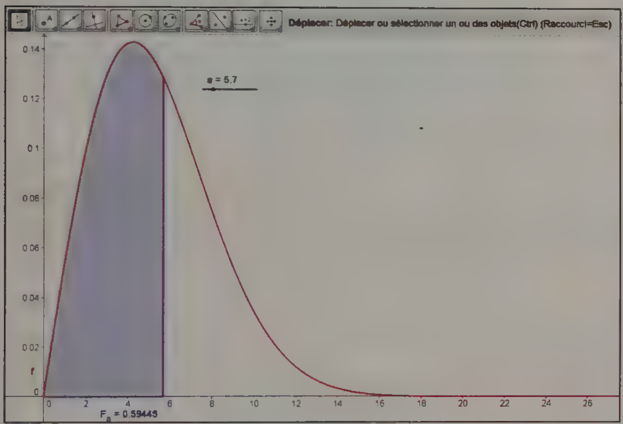
$$F(a) = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

où f est la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{18} x\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{36}}$$

1. *Utilisation de GeoGebra*

a) Représenter la fonction f à l'aide de GeoGebra. Créer un curseur a allant de 0 à 30 avec un incrément 0,1 puis représenter l'intégrale $F(a)$ (on pourra pour cela entrer F_a=Intégrale[f,0,a] dans la barre de saisie).



b) Utiliser le fichier GeoGebra, pour répondre aux trois questions suivantes :

– Quelle est la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse du vent soit inférieure à 4 m/s ? Arrondir à 10^{-3}.

– Quelle est la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse du vent soit inférieure à 14 m/s ? Arrondir à 10^{-3}.

– Quelle est la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse du vent soit comprise entre 4 m/s et 14 m/s ? Arrondir à 10^{-2}.

2. *Utilisation de Maxima*

Utiliser un logiciel de calcul formel pour répondre aux trois questions suivantes.

a) Déterminer une expression « simple » de $F(a)$ en fonction du nombre réel positif a.

b) Calculer la valeur exacte de $F(14) - F(4)$ et retrouver le résultat de la question **1.b)**.

c) Calculer $\lim\limits_{a \to +\infty} F(a)$. Le résultat est-il surprenant, en termes de probabilité ?

CORRIGÉ P. 351

Faites le point !

RÉPONSES P. 352

QCM *Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.*

QCM interactifs 59-60-61

59. ++

Dans chaque question, la fonction f dont on calcule la valeur exacte de l'intégrale sur un intervalle donné est continue sur cet intervalle.

1 $f(x)=x-3$
- a $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=8$
- b $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$
- c $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{19}{2}$

2 $f(x)=x^2+3x+2$
- a $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=25$
- b $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{67}{3}$
- c $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{74}{3}$

3 $f(x)=2x+1+\frac{3}{x+2}$
- a $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{21}{4}$
- b $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=6+3\ln 2$
- c $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=6+\ln 4$

4 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$
- a $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\mathrm{d}x=5$
- b $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$
- c $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\mathrm{d}x=\frac{29}{6}$

5 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$
- a $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2}{2}$
- b $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x=-1$
- c $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

6 $f(t)=\cos 2t$
- a $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{3}}{4}$
- b $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}$
- c $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)\mathrm{d}t=0$

60. +++

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(t)=-0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}$.

1. Une primitive de f est définie sur $[0,+\infty[$ par :

a) $F(t)=(t+5)\mathrm{e}^{-0,2t}$;

b) $F(t)=-\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-0,2t}$;

c) $F(t)=(-t+5)\mathrm{e}^{-0,2t}$.

2.

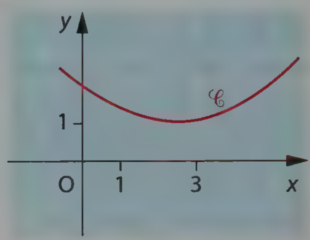
a) $\int_0^{10} f(t)\mathrm{d}t=5+15\mathrm{e}^{-2}$;

b) $\int_0^{10} f(t)\mathrm{d}t=15\mathrm{e}^{-2}$;

c) $\int_0^{10} f(t)\mathrm{d}t=-5+15\mathrm{e}^{-2}$.

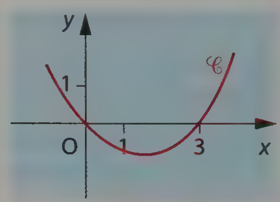
61. +++

1. Dans cette question $I=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ et $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f.



	a	b	c
Le nombre I appartient à	[0, 3]	[6, 7]	[3, 5]

2. Dans cette question $I=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ et $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f.

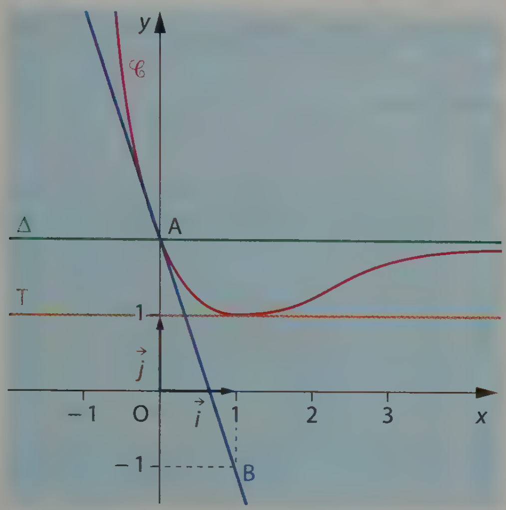


	a	b	c
Le nombre I appartient à	[0 ; 0,5]	[1, 2]	[0, 1]

Les exercices pour le baccalauréat sont des exercices qui pourraient figurer dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat STL-Biotechnologies.

Calculer une intégrale

62. +++ Éliminer des valeurs pour une intégrale



Le graphique ci-dessus est réalisé dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ On a tracé :

– la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$;

– la droite (AB) tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A ;

– la droite Δ d'équation $y = 2$;

– la droite T, parallèle à l'axe des abscisses, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Les points A et B ont respectivement pour coordonnées (0, 2) et (1, – 1).

1. Déterminer une équation de la droite (AB).

2. Sachant que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de la droite (AB). Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3. Lire sur le graphique les valeurs entières de $f(0)$ et $f'(1)$. Établir le tableau de variation de la fonction f.

4. On considère les quatre valeurs décimales suivantes :
$I_1 = 6{,}5$; $I_2 = -3{,}6$; $I_3 = 3{,}6$ et $I_4 = -6{,}5$.
L'une d'entre elles est la valeur décimale approchée arrondie à 10^{-1} de l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Laquelle ? Expliquer l'élimination des trois autres.

63. +++ Vrai-faux

Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

g est décroissante sur $]-\infty, -1]$, croissante sur $[-1, 3]$ et décroissante sur $[3, +\infty[$;

$g(-1) = 0$ et $g(3) = 2$;

$g(x)$ a pour limite 4 lorsque x tend vers $-\infty$;

$g(x)$ a pour limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

2. Reconnaître parmi les trois courbes ci-dessous la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé. Noter la référence de cette courbe sur la copie.

3. Indiquer si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux, et justifier la réponse à partir des hypothèses de l'énoncé ou à partir du graphique de la question **2.**

a) $g'(4) \leq 0$;

b) l'équation $g(x) = 2$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$;

c) la droite d'équation $x = 4$ est asymptote à la courbe représentative de g ;

d) $\int_{-1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x > 8$.

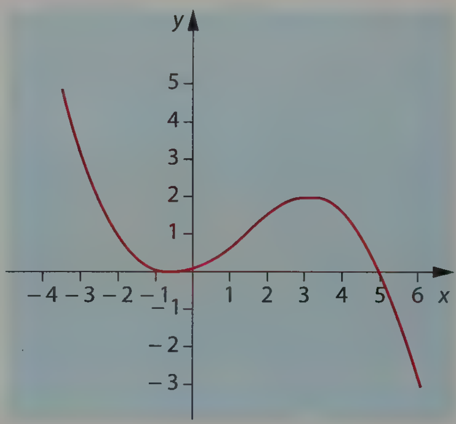


Figure 1

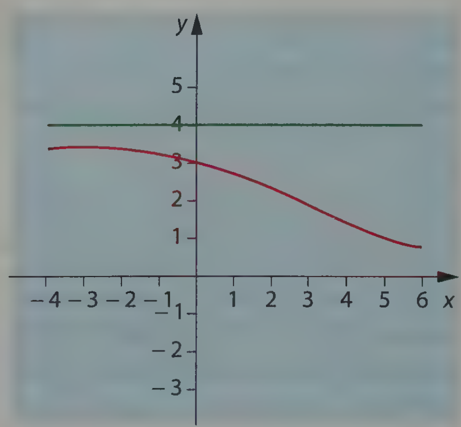


Figure 2

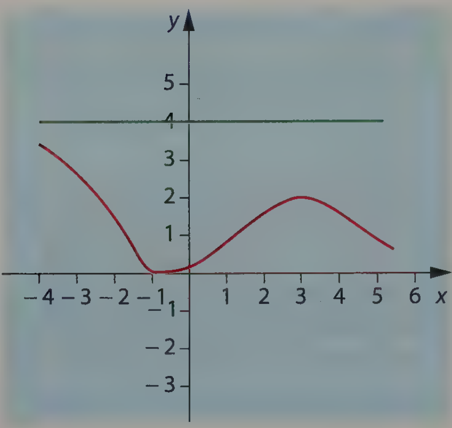
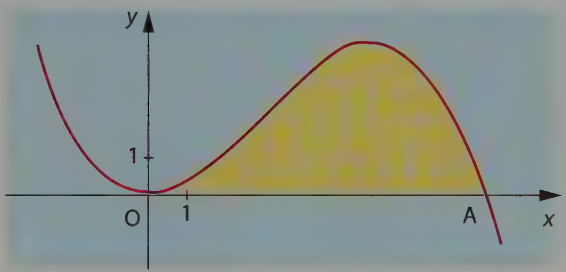


Figure 3

Calcul d'aire avec des fonctions polynômes

64. ++ **Avec une fonction polynôme**

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{x^3}{27} + \frac{x^2}{3}$ dont la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ (unité 1 cm) est donnée sur la figure.



1. Calculer les coordonnées de A, point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
Vérifier le résultat sur la figure.

2. Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 de la partie du plan coloriée sur la figure.
Vérifier l'ordre de grandeur du résultat en comptant les carreaux sur la figure.

65. +++ **Lectures graphiques et calcul d'aire**

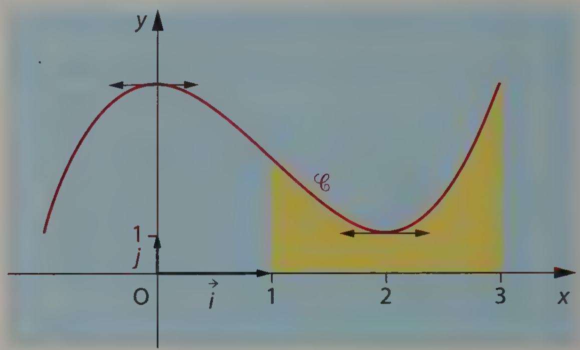
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure est la courbe représentative, dans un repère orthogonal (unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées) d'une fonction f définie sur $I = [-1, 3]$. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses, ainsi que celle au point d'abscisse 0.

1. À partir du graphique, construire le tableau de variation de f.

2. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$, $f(-1)$ et $f(1)$.

3. On admet que la fonction f est définie sur $[-1, 3]$ par
$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$,
où a, b, c sont des constantes réelles à déterminer.
À l'aide des résultats obtenus à la question **2.**, calculer la valeur des nombres réels a, b et c.

4. On admet par la suite, que pour tout x de I, on a
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.
Calculer la valeur exacte de l'aire de la partie du plan coloriée :
a) en unités d'aire ;
b) en cm^2.



Calcul d'aire avec des fonctions rationnelles

66. +++ **Avec une fonction rationnelle**

Soit f une fonction dont le tableau de variation incomplet est le suivant ; on désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variation de f	‖ $+\infty$	↘	2	↗	…

On admet que f est définie sur $]-1, +\infty[$ par :
$f(x) = ax + b + \frac{4}{x+1}$
où a et b sont des constantes réelles.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a.

2. En vous aidant des informations contenues dans le tableau de variation ci-dessus, montrer que l'on a $a = 1$ et $b = -1$.

3. Déterminer la limite manquante dans le tableau de variation fourni.

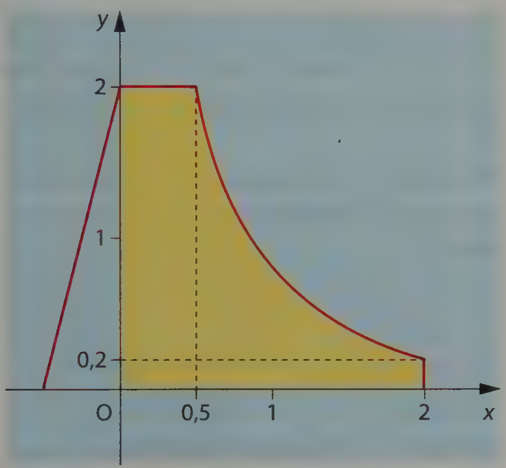
4. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet comme asymptote la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Déterminer la valeur exacte de l'intégrale :
$\int_1^2 [f(x)-(x-1)]\mathrm{d}x$ et interpréter le résultat en termes d'aire.

CORRIGÉ P. 352

67. +++ Recherche d'une fonction, calcul d'aire, application

Une entreprise veut réaliser les deux montants latéraux d'un toboggan. La courbe qui modélise le toboggan est définie comme une partie de la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f dans un repère orthonormé adapté.



A. *Détermination d'une fonction*

La partie utile de la courbe $\mathscr{C}$ qui modélise le toboggan est délimitée par les points de coordonnées (0,5 ; 2) et (2 ; 0,2) comme le suggère la figure ci-dessus.

La fonction f est définie, pour tout nombre réel x strictement positif, par $f(x) = a + \dfrac{b}{x}$, où a et b sont deux nombres réels. Déterminer a et b.

B. *Étude de fonction*

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle [0,5 ; 2] par $f(x) = -0{,}4 + \dfrac{1{,}2}{x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle [0,5 ; 2].

2. Étudier le sens de la variation de la fonction f sur l'intervalle [0,5 ; 2].

3. Déterminer une équation de la tangente T_1 à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0,5 et une équation de la tangente T_2 à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.

4. Tracer, dans le repère indiqué, les droites T_1 et T_2, ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

5. a) Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0,5 ; 2].

b) Montrer que l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0{,}5$ et $x = 2$ vaut $2{,}4 \ln 2 - 0{,}6$.

Avec la fonction logarithme

68. +++ Lectures graphiques, étude d'une fonction définie avec la fonction logarithme népérien, calcul d'une aire

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = 2x + 1 - x\ln x$.

Le plan est muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm. La courbe représentative Γ de f est donnée sur la figure. La droite (AB) est tangente à Γ au point A de coordonnées (1, 3).

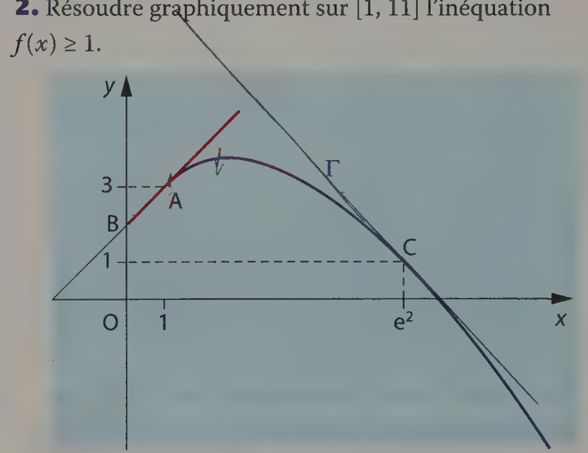
Le point B a pour coordonnées (0, 2).

Le point C, de coordonnées $(\mathrm{e}^2, 1)$ appartient à la courbe Γ.

A. *Étude graphique*

1. Déterminer graphiquement $f'(1)$.

2. Résoudre graphiquement sur [1, 11] l'inéquation $f(x) \geq 1$.



3. Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 1.

B. *Étude de* f

1. Vérifier que, pour tout x de $[1, +\infty[$,
$f(x) = x(2 - \ln x) + 1$.
En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. a) Démontrer que, pour tout x de $[1, +\infty[$,
$f'(x) = 1 - \ln x$.

b) Résoudre dans $[1, +\infty[$, l'inéquation $1 - \ln x \geq 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[1, +\infty[$.

c) Établir le tableau de variation de f.

C. *Recherche de points particuliers*

1. Déterminer une équation de la tangente à Γ au point C.

2. a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant, dans lequel on fera figurer des valeurs arrondies à 10^{-2}.

x	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5
$f(x)$						

b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la solution α de l'équation $f(x) = 0$.

D. *Calcul d'aire*

1. On donne la fonction G définie sur $]0, +\infty[$ par $G(x) = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{1}{2}\right)$. Montrer que G est une primitive de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x \ln x$.

2. Trouver une primitive F de f sur $]0, +\infty[$.

3. a) Calculer la valeur exacte en centimètres carrés de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

b) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} du résultat obtenu en **a**).

69. +++ Aire entre deux représentations graphiques

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm. On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, e]$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente, dans le plan, la fonction f. On appelle Δ la droite d'équation $y = x$.

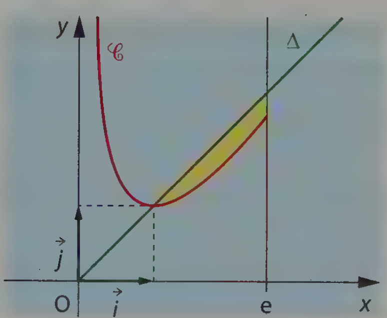
a) Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de $x - f(x)$ sur l'intervalle $]0, e]$.

b) En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.

2. a) Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g définie sur l'intervalle $]0, e]$ par $g(x) = (\ln x)^2$.

En déduire, sur cet intervalle, une primitive de la fonction qui, à x, associe $\dfrac{\ln x}{x}$.

b) Calculer, en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

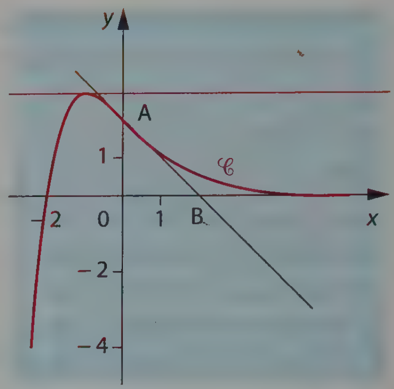


Avec la fonction exponentielle

70. +++

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de f, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée. Soient les points A(0, 2) et B(2, 0).



S est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse – 1. On précise qu'au point S, la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses du repère.

A. **1.** Lire les valeurs du réel $f(-2)$ et du nombre dérivé $f'(-1)$.

2. Déterminer une équation de la droite (AB).

3. La droite (AB) est tangente à $\mathscr{C}$ au point A.

En déduire $f'(0)$.

B. **1.** a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) En écrivant que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}$, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Vérifier que vous retrouvez le résultat de la partie *A*.

C. **1.** Montrer que, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-x - 3)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

On donnera d'abord la valeur exacte de cette aire, puis la valeur approchée arrondie à 0,01.

CORRIGÉ P. 353

71. +++ Étude d'un mouvement

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = 25(1 - e^{-2t})$.

On donne sur la feuille *annexe*, à remettre avec la copie, la représentation graphique Γ de la fonction f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

$f(t)$ représente la vitesse exprimée en mètres par seconde d'un mouvement.

Le but de l'exercice est de justifier et de compléter la représentation graphique de la fonction f donnée en annexe.

1. a) Par lecture graphique, déterminer la valeur arrondie au dixième de l'instant t_0 où la vitesse dépasse 20 m.s^{-1}.

b) Résoudre l'inéquation $f(t) > 20$. En déduire la valeur exacte de t_0.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner une interprétation graphique.

3. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point O, origine du repère.

Construire cette droite sur l'*annexe* à remettre avec la copie.

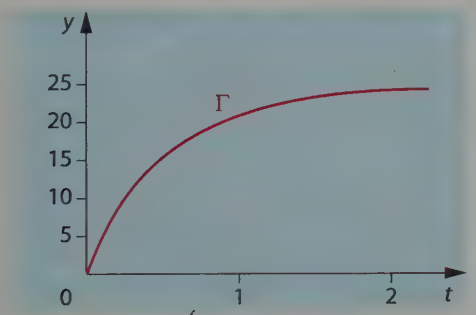
5. En utilisant le graphique donné en *annexe*, estimer l'aire en unités d'aire de la partie du plan comprise entre la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 1$ et $t = 2$.

6. a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

b) Calculer l'intégrale $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. En donner une interprétation graphique.

Annexe à remettre avec la copie

Courbe représentative de la fonction f.



72. +++

A. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{-x} + 1$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. a) Montrer que pour tout nombre réel x :

$$f(x) = 2\frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{3}{\mathrm{e}^x} + 1.$$

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ a une asymptote D dont on donnera une équation.

c) Démontrer que cette asymptote D coupe la courbe $\mathscr{C}$ au point B de coordonnées $(-1{,}5\ ;\ 1)$.

d) Étudier, en justifiant soigneusement, la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D.

3. Prouver que la dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel x par :

$f'(x) = (-2x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

5. Déterminer une équation de la droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A de coordonnées $(0, 4)$.

B. **1.** On rappelle que, sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

Déterminer le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point E d'abscisse $(-0, 5)$.

Tracer sur la feuille annexe la tangente Δ.

Compléter cette figure en représentant l'asymptote D et la tangente T.

Hachurer la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

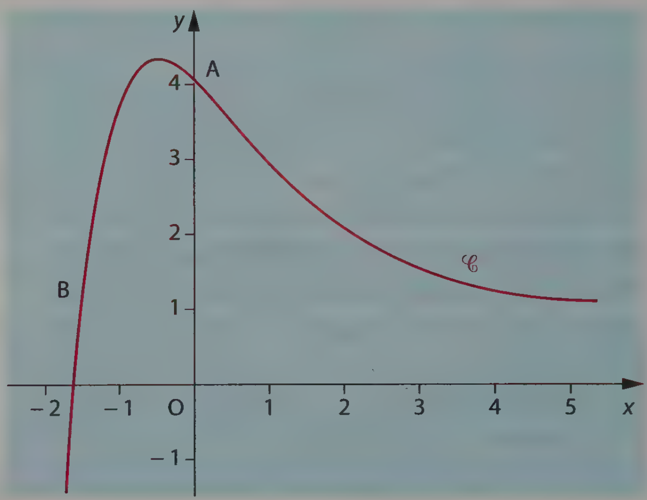
2. Montrer que la fonction F définie par :

$F(x) = (-2x-5)\mathrm{e}^{-x} + x$

est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 de la partie hachurée précédemment. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner la valeur approchée arrondie au centième.

Annexe du problème (à rendre avec la copie)



73. +++ Principe actif d'un médicament

On décide de mesurer en fonction du temps la quantité de *principe actif* d'un médicament présent dans le sang d'un groupe de patients en traitement dans un hôpital.

À l'instant t, exprimé en minutes, on note $q(t)$ la quantité exprimée en milligrammes de ce principe actif, contenue dans le sang d'un patient.

On admet que, pour tout t de $[0, 1\,440]$,

$$q(t) = 3 - 0{,}002\,t - 3\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}.$$

On rappelle que le temps t est exprimé en minutes.

1. a) Calculer $q'(t)$ pour tout t de $[0, 1\,440]$.

b) Résoudre dans $[0, 1\,440]$ l'inéquation $q'(t) \geq 0$.

c) En déduire le sens de variation de q sur $[0, 1\,440]$.

La fonction q admet un maximum pour $t = t_0$. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de t_0 et $q(t_0)$.

2. Calculer la quantité de principe actif restant dans le sang d'un patient 24 heures après l'injection du médicament. On arrondira le résultat à 10^{-2}.

3. Démontrer que :
$$\frac{1}{1\,440}\int_0^{1440} q(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1\,440}(2\,234{,}4 + 12\,\mathrm{e}^{-360}).$$

Cette intégrale est appelée valeur moyenne de la fonction q sur [0, 1 440] et représente la valeur moyenne de la quantité présente dans le sang pendant les 24 heures suivant l'injection.

74. +++ Une hotte pour les laboratoires

A. *Étude d'une fonction et calcul intégral*

Soit f la fonction définie sur [0, 15] par :
$f(t) = (4t+1)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.

Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 4 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
On admet que, pour tout nombre réel t de [0, 15],
$f'(t) = (3{,}5 - 2t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

Ce résultat, obtenu avec un logiciel de calcul formel, n'a pas à être démontré.

a) Étudier le signe de $f'(t)$ sur [0, 15].

b) Établir alors le tableau de variation de f.

2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

3. Soit F la fonction définie sur [0, 15] par :
$F(t) = (-18 - 8t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

a) Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur [0, 15].

b) On note $I = \int_0^{11} f(t)\,\mathrm{d}t$. Démontrer que $I = 18 - 106\mathrm{e}^{-5{,}5}$.

B. *Application de la partie A*

Dans une usine, on se propose de tester un nouveau modèle de hotte aspirante pour les laboratoires.

Avant de lancer la fabrication en série, on a réalisé l'expérience suivante avec un prototype : dans un local clos de volume 500 m^3, équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minutes.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche. Les mesures réalisées permettent d'admettre qu'au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte, avec $0 \leq t \leq 15$, le volume de dioxyde de carbone, exprimé en m^3, contenu dans le local est $f(t)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Déterminer le volume de dioxyde de carbone, en m^3, présent dans le local au moment de la mise en marche de la hotte aspirante.

2. L'atmosphère « ordinaire » contient 0,035 % de dioxyde de carbone, ce qui correspond pour le local où a été réalisée l'expérience à un volume de 0,175 m^3 de dioxyde de carbone.

À l'aide d'une lecture graphique sur la figure réalisée à la question **A.2.**, déterminer au bout de combien de temps de fonctionnement de la hotte aspirante l'atmosphère dans le local clos contenait un volume de dioxyde de carbone inférieur ou égal à 0,175 m^3.

3. On désigne par V_m le volume moyen de dioxyde de carbone présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante. On admet que $V_m = \frac{1}{11}\int_0^{11} f(t)\,\mathrm{d}t$. Donner la valeur exacte de V_m puis la valeur approchée de V_m arrondie à 10^{-1}.

75. +++ Verres photochromiques avec Maxima

TICE

Les verres photochromiques s'assombrissent ou s'éclaircissent en fonction de la luminosité.

Pour un verre minéral photochromique, le coefficient de transmission, exprimé en pourcentage, en fonction de la longueur d'onde x, en nm, est donné par :
$$f(x) = 90 - \frac{89}{1+\mathrm{e}^{\frac{x-416}{5}}}.$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer la quantité d'énergie I absorbée par le verre durant la transition sombre/clair :
$$I = \int_{380}^{550} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Donner la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à 10^{-2}.)

Avec le logiciel Maxima, on pourra utiliser les instructions suivantes, où les arguments en *italique* sont à remplacer selon le calcul désiré :

define(f(x),*expression*) permet de définir la fonction f de la variable x ;

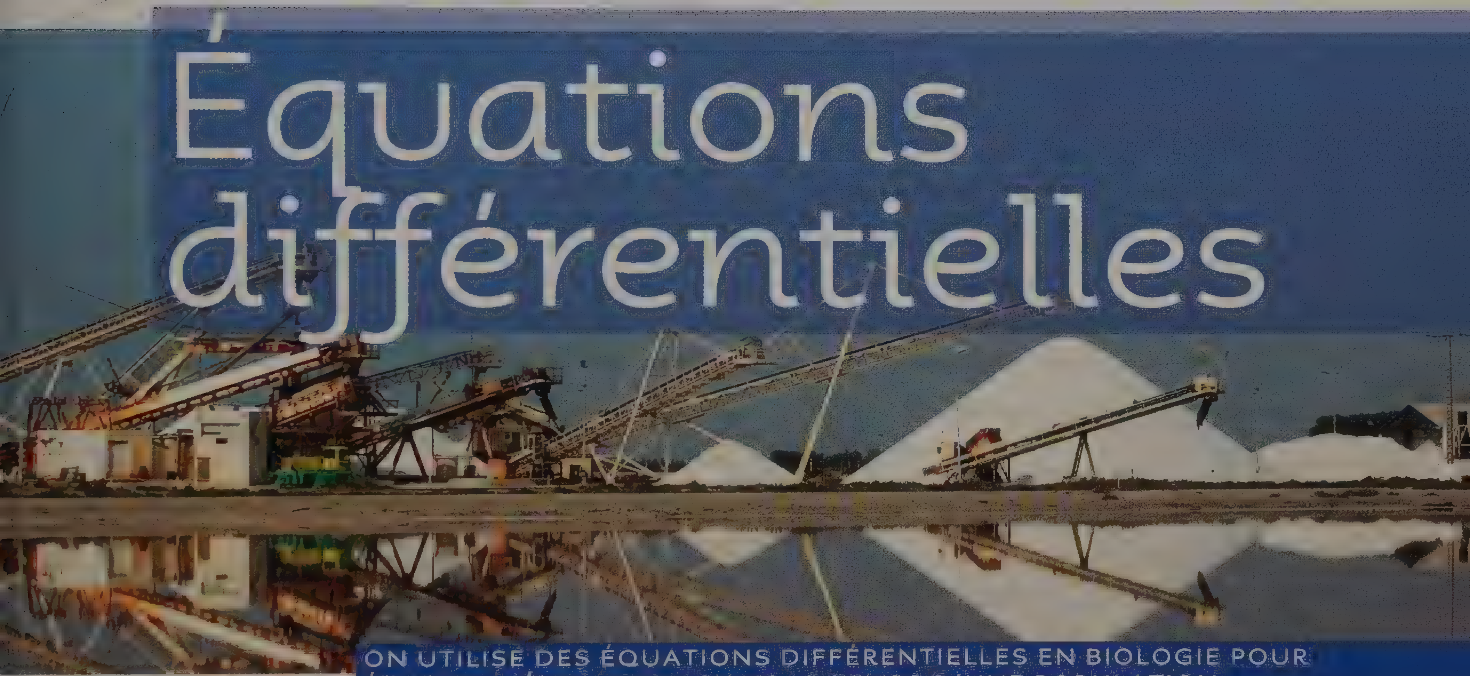
integrate(f(x),x,*borne inférieure*,*borne supérieure*) calcule une intégrale de la fonction f de la variable x.

Pour obtenir une valeur approchée, faire Numérique/To Float.

CORRIGÉ P. 353

CHAPITRE 7

Équations différentielles



ON UTILISE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES EN BIOLOGIE POUR ÉTUDIER L'ÉVOLUTION DANS LE TEMPS D'UNE POPULATION FORMÉE D'INDIVIDUS SUSCEPTIBLES DE SE REPRODUIRE, DE MOURIR..., ON EN UTILISE ÉGALEMENT EN PHYSIQUE, EN CHIMIE, EN TECHNOLOGIE...

CAPACITÉS

- Résoudre une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$ où a et b sont des nombres réels avec $a \neq 0$.
- Déterminer la solution satisfaisant une condition initiale donnée.

ACTIVITÉ 1

Désintégration d'un atome radioactif

Un corps radioactif est un corps dont les atomes se désintègrent spontanément.

On désigne par $m(t)$ la masse d'un échantillon d'un corps radioactif. m est donc une fonction de temps t. La vitesse de désintégration est $m'(t)$, où m' est la fonction dérivée de la fonction m.

L'unité de temps est choisie suivant l'élément chimique étudié (ce peut être l'heure, le jour, l'année…).

La **vitesse de désintégration** est proportionnelle à la masse de l'échantillon à l'instant considéré, il existe donc une constante réelle positive k telle que, pour tout t de $[0, +\infty[$, $m'(t) = -k \times m(t)$.

Cette égalité peut s'écrire : $m'(t) + km(t) = 0$.

$m'(t) = -km(t)$ est une équation liant la fonction inconnue m et sa dérivée m'.

Une telle équation est appelée **équation différentielle** ; traditionnellement, pour une équation différentielle, l'inconnue est notée y et sa dérivée y'.

Dans cette activité d'approche, pour alléger les calculs, on cherche des fonctions solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = 2y$, c'est-à-dire telles que, pour tout x réel, $f'(x) = 2f(x)$.

1° L'équation (E) a-t-elle pour solution une fonction constante ?

2° L'équation (E) a-t-elle pour solution une fonction polynôme de degré non nul ? (Pensez au degré de la fonction dérivée).

3° Démontrer que (E) a une solution unique de la forme $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ où a est une constante réelle à déterminer.

4° L'équation (E) a-t-elle de nouvelles solutions de la forme $f(x) = \mathrm{e}^{ax} + C$ où C est une constante réelle et où a est défini au **3°** ?

5° L'équation (E) a-t-elle de nouvelles solutions de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ où k est une constante réelle et où a est défini au **3°** ?
Il est à noter que nous ne savons pas si l'équation (E) a d'autres solutions que celles obtenues ci-dessus.

ACTIVITÉ 2

Approcher la notion d'équation différentielle par son aspect graphique

Injection d'une substance médicamenteuse

LOGICIEL UTILISÉ
GeoGebra

À l'instant $x = 0$, on injecte à un malade une substance médicamenteuse, qui est ensuite progressivement éliminée. On désigne par $y(x)$ la quantité de substance, en mg/L, présente à l'instant x, exprimé en heures. On suppose qu'à chaque instant x, la vitesse d'élimination $y'(x)$ est proportionnelle à la quantité de substance $y(x)$ restante dans le sang du malade. Cette hypothèse se traduit mathématiquement par l'équation différentielle (E_a) :

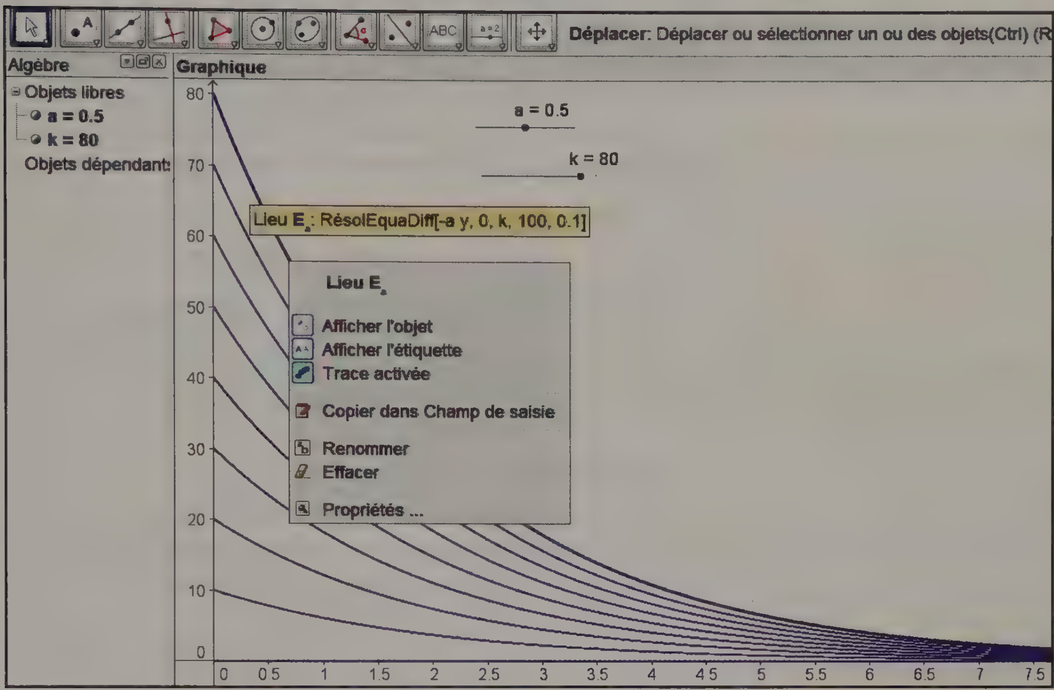
$$y'(x) = -a\,y(x),$$

où a est une constante strictement positive et où $x \mapsto y(x)$ est une fonction inconnue définie sur $[0, +\infty[$.

Sur un fichier GeoGebra, créer un curseur a allant de 0 à 1 avec un incrément 0,01 et un curseur k allant de 0 à 80 avec un incrément 10.

Entrer dans la barre de saisie l'expression : =RésolEquaDiff[-a*y,0,k,100,0.1].

On obtient un « lieu » qui est la représentation graphique d'une fonction solution de l'équation (E_a) sur l'intervalle [0, 100].



1° **a)** Fixer le curseur a à la valeur $a = 0{,}5$.
Par un clic droit, activer la « trace » du « lieu » tracé.
Modifier le curseur k. Chaque valeur de k fournit une solution à l'équation différentielle ($E_{0,5}$).
L'équation différentielle ($E_{0,5}$) possède une infinité de fonctions solutions définies sur $[0, +\infty[$.
À quoi correspond le curseur k, dans le contexte de cette activité ?

b) Fixer le curseur k à la valeur $k = 50$. Nettoyer la trace et modifier le curseur a. Chaque valeur de a fournit une équation différentielle (E_a) différente.
Quel est l'impact de a sur l'allure de la courbe représentant une solution de l'équation (E_a) ?

2° Supprimer la trace.
On considère la fonction f définie pour tout réel x positif par $f(x) = ke^{-ax}$.

a) Représenter la fonction f sur le fichier GeoGebra. Que constate-t-on ?

b) Démontrer que, pour tout réel x positif, on a $f'(-) = -a\,f(x)$.

3° On suppose que l'on a injecté 50 mg/L à l'instant $x = 0$ et qu'au bout d'une heure, il ne reste plus que 25 mg/L de substance médicamenteuse dans le sang du malade.

a) Ajuster le curseur k pour que la solution corresponde à la donnée « on a injecté 50 mg/L à l'instant $x = 0$ ». Par quel point A la courbe doit-elle passer pour que la solution corresponde à la donnée « au bout d'une heure, il ne reste plus que 25 mg/L de substance médicamenteuse dans le sang du malade » ?
Créer ce point sur le fichier GeoGebra et ajuster le curseur a pour que la solution tracée passe par ce point.

b) Montrer, par un calcul, que $a = \ln 2$.

Cours

1 Équation différentielle (E) : $y' + ay = 0$

a est un nombre réel, avec $a \neq 0$.

Exemples

• Dans le cas où $a = -2$, l'équation (E') devient $y' - 2y = 0$, c'est-à-dire $y' = 2y$.
Nous savons que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{2x}$, où k est une constante réelle, sont des solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$.

Voir l'activité d'approche 1.

• Dans le cas où $a = -1$, l'équation (E') devient $y' - y = 0$, c'est-à-dire $y' = y$.
Nous connaissons une solution de cette équation différentielle : la fonction exponentielle.
Par analogie avec le cas précédent, observons que les fonctions $x \mapsto ke^{x}$, où k est une constante réelle, ont pour dérivée $x \mapsto ke^{x}$ et sont donc des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

La dérivée de $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$.

$(kf)' = kf'$.

Cas général

Les résultats obtenus dans les deux exemples ci-dessus où $a = -2$ et $a = -1$ nous amènent, pour l'équation (E') : $y' + ay = 0$, c'est-à-dire $y' = -ay$, à considérer les fonctions $x \mapsto ke^{-ax}$ où k est une constante réelle.

Leurs dérivées sont $x \mapsto k(-a)e^{-ax} = -a(ke^{-ax})$.

$(e^u)' = u'e^u$.
Ici $u(x) = -ax$, donc $u'(x) = -a$.

Elles sont donc **des** solutions de l'équation (E') : $y' + ay = 0$.

On démontre que l'équation différentielle (E') n'a pas d'autres solutions : la démonstration, qui sera développée dans un cadre plus large en section de technicien supérieur, figure ici en exercice.

Voir l'exercice **12**

THÉORÈME

Les solutions de l'équation différentielle (E') : $y' + ay = 0$, c'est-à-dire $y' = -ay$, sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{-ax}$ où k est une constante réelle quelconque.

a est un nombre réel fixé non nul.

Attention au signe $-$.

L'activité d'approche 2 permet de visualiser la famille des courbes représentatives des solutions d'une telle équation différentielle et d'observer l'influence du paramètre a.

EXERCICE résolu 1 — Résoudre une équation $y' + ay = 0$

ÉNONCÉ

Résoudre l'équation différentielle $y' + 4y = 0$.

SOLUTION

MÉTHODE

Identifier la forme de l'équation différentielle.

L'équation différentielle $y' + 4y = 0$ est de la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 4$.

Appliquer le théorème ci-dessus.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{-4x}$ où k est une constante réelle quelconque.

VOIR AUSSI LES EXERCICES CORRIGÉS 1 et 2

2 Équation différentielle (E) : $y' + ay = b$

Solution particulière de $y' + ay = b$

Par exemple, pour l'équation $y' - 2y = 3$, où $a = -2$ et $b = 3$, la fonction $x \mapsto C$ est solution si et seulement si $-2C = 3$, c'est-à-dire $C = -\frac{3}{2}$.

Cherchons si l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b$ admet une fonction constante $x \mapsto C$ comme solution.

La fonction constante $x \mapsto C$ a pour dérivée la fonction nulle $x \mapsto 0$.

Donc la fonction $x \mapsto C$ est solution de $(E) : y' + ay = b$ si et seulement si $aC = b$, c'est-à-dire $C = \frac{b}{a}$.

PROPRIÉTÉ

La fonction **constante** $x \mapsto \frac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b$.

Solutions de $y' + ay = b$

Notons y_1 la fonction constante $x \mapsto \frac{b}{a}$. Comme c'est une solution particulière de l'équation différentielle (E), on a :

$$y_1' + ay_1 = b. \qquad (1)$$

y est solution de (E) si et seulement si $y' + ay = b$, c'est-à-dire $y' + ay = y_1' + ay_1$ d'après l'égalité (1).

Donc y est solution de (E) si et seulement si :
$y' - y_1' + a(y - y_1) = 0$,
$(y - y_1)' + a(y - y_1) = 0$ d'après la linéarité de la dérivation.

En posant $y - y_1 = Y$, c'est-à-dire $y = Y + y_1$, nous venons de démontrer que :

y est solution de (E) si et seulement si $y = Y + y_1$ où Y vérifie $Y' + aY = 0$, c'est-à-dire où Y est solution de l'équation différentielle homogène (E').

D'après le théorème du paragraphe **A.**, Y est de la forme $x \mapsto ke^{-ax}$ où k est une constante réelle quelconque.

Animation vidéo

THÉORÈME

Les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{-ax} + \frac{b}{a}$ où k est une constante réelle quelconque.

EXERCICE résolu 2

Résoudre une équation $y' + ay = b$

ÉNONCÉ

Résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = 5$.

MÉTHODE

Identifier la forme de l'équation différentielle.

Appliquer le théorème ci-dessus.

SOLUTION

L'équation différentielle $y' - 3y = 5$ est de la forme $y' + ay = b$ avec $a = -3$ et $b = 5$.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{3x} - \frac{5}{3}$ où k est une constante réelle quelconque.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 13

3 Existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée

Exemple

Cherchons les solutions f de l'équation différentielle $y' - 3y = 5$, si elles existent, telles que $f(0) = 1$.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{3x} - \frac{5}{3}$ où k est une constante réelle quelconque.

$f(0) = 1$ équivaut à $ke^0 - \frac{5}{3} = 1$, c'est-à-dire $k = 1 + \frac{5}{3}$, $k = \frac{8}{3}$.

Il existe donc une seule fonction solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$: la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{8}{3}e^{3x} - \frac{5}{3}$.

Voir l'exercice résolu **2**.

Cas général

Parmi les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$, cherchons celles, si elles existent, qui vérifient $f(x_0) = y_0$ où x_0 et y_0 sont des nombres réels donnés.

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{-ax} + \frac{b}{a}$.

La condition $f(x_0) = y_0$ équivaut à $ke^{-ax_0} + \frac{b}{a} = y_0$, c'est-à-dire $ke^{-ax_0} = y_0 - \frac{b}{a}$,

$k = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{ax_0}$ en multipliant les deux membres de l'égalité par e^{ax_0}.

Il existe donc une seule fonction solution de l'équation différentielle vérifiant la condition $f(x_0) = y_0$: la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{ax_0}e^{-ax} + \frac{b}{a}$,

$f(x) = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-a(x-x_0)} + \frac{b}{a}$.

L'égalité $f(x_0) = y_0$ est appelée condition initiale car dans beaucoup de problèmes où la variable est le temps, on donne la valeur de $f(0)$.

$e^{-ax_0} \times e^{ax_0} = e^0 = 1$.

Cette expression n'est pas à retenir.

THÉORÈME

L'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une solution f, et une seule, définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant la condition initiale donnée $f(x_0) = y_0$.

EXERCICE résolu 3

Injection d'un médicament

ÉNONCÉ

Lorsque de la pénicilline est injectée directement dans le sang, on considère que sa vitesse d'élimination est, à chaque instant, proportionnelle à la quantité de pénicilline présente dans le sang à cet instant.

Ainsi, la quantité de pénicilline $Q(t)$, exprimée en milligrammes, présente dans le sang à l'instant t ($t \geq 0$, exprimé en **heures**), est solution de l'équation différentielle (E) : $Q'(t) = -aQ(t)$, où a est un réel.

À l'instant $t = 0$, on injecte une dose de 5 mg de pénicilline.

1° Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$: $Q(t) = 5e^{-at}$.

2° Sachant qu'au bout de 2 heures, la quantité de pénicilline présente dans le sang a diminué de moitié, montrer que : $a = \dfrac{\ln 2}{2}$. Donner la valeur arrondie de a au centième.

MÉTHODE

Identifier la forme de l'équation différentielle.

Appliquer le théorème sur les solutions de l'équation différentielle.

Exploiter la condition $Q(0) = 5$.

Exploiter la condition $Q(2) = \dfrac{1}{2}Q(0)$.

Voir l'exercice résolu 4.

SOLUTION

1° L'équation différentielle (E) s'écrit : $Q'(t) + aQ(t) = 0$.

Elle est de la forme $y' + ay = 0$.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $t \mapsto ke^{-at}$, où k est une constante réelle quelconque.

$Q(0) = 5$ s'écrit : $ke^0 = 5$, d'où $k = 5$.

Pour tout réel $t \geq 0$, $Q(t) = 5e^{-at}$.

2° La condition $Q(2) = \dfrac{1}{2}Q(0)$ s'écrit : $5e^{-2a} = \dfrac{5}{2}$, $e^{-2a} = \dfrac{1}{2}$ et, en prenant le logarithme népérien de chaque membre, $-2a = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $-2a = -\ln 2$.

Donc $a = \dfrac{\ln 2}{2} \approx 0,35$.

VOIR AUSSI LES EXERCICES CORRIGÉS 1 et 2

Ce qu'il faut savoir

Équation différentielle : $y' + ay = 0$

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (c'est-à-dire $y' = -ay$) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \mapsto ke^{-ax}$, où k est une constante réelle quelconque.

Équation différentielle : $y' + ay = b$

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \mapsto ke^{-ax} + \dfrac{b}{a}$, où k est une constante réelle quelconque.

 RÉPONSES p. 353

TP 1 Résoudre, à l'aide d'un logiciel, une équation différentielle comprenant des paramètres

LOGICIEL UTILISÉ
GeoGebra

Posologie d'un médicament

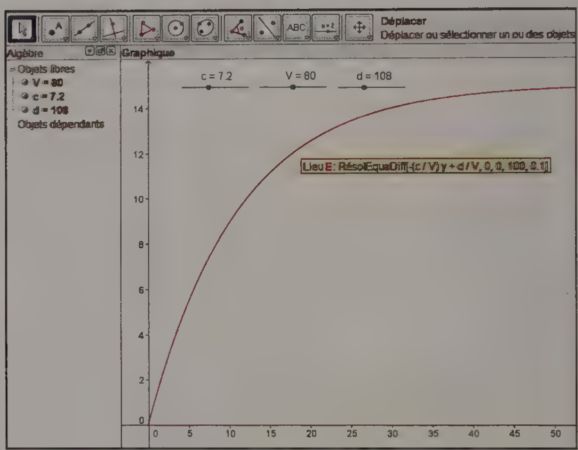
On injecte à un patient un médicament par perfusion. L'objectif est de régler le débit de la perfusion de façon à atteindre un « plateau » pour lequel l'efficacité du médicament est optimale (en deçà, le médicament est inefficace, au-delà, il est toxique).

On désigne par $f(t)$ la concentration, en mg/mL, du médicament dans le sang à l'instant t exprimé en heures. Une modélisation permet de considérer que f est solution, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, de l'équation différentielle (E) :

$$y' = -\frac{c}{V}y + \frac{d}{V},$$

où d est le débit de la perfusion, en mg/h, V le volume du système sanguin du patient, en L, et c la clairance du patient, en L/h, correspondant à sa capacité d'élimination. Les paramètres c et V sont inconnus et dépendent du patient ; le débit d est réglable.
(D'après D. Barbolosi *Repères IREM* n° 71.)

A. Résolution de l'équation différentielle et valeur limite



1. Sur un fichier GeoGebra, créer un curseur c allant de 4 à 12 avec un incrément 0,1, un curseur V allant de 60 à 100 avec un incrément 0,5 et un curseur d allant de 50 à 250 avec un incrément 1.

Représenter sur l'intervalle [0, 100] avec un pas de calcul 0,1, la solution f de l'équation différentielle (E) pour la condition initiale $f(0) = 0$, en entrant dans la barre de saisie :

E=RésolEquaDiff[-(c/V)*y+d/V,0,0,100,0.1]

Conjecturer la valeur limite de f en $+\infty$ (le « plateau ») lorsque les curseurs sont réglés à $c = 7{,}2$; $V = 80$ et $d = 108$.

2. L'équation (E) peut s'écrire : $y' + \frac{c}{V}y = \frac{d}{V}$.

a. Montrer que l'ensemble des solutions, définies sur $[0, +\infty[$, de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions $t \mapsto k\,\mathrm{e}^{-\frac{c}{V}t} + \frac{d}{c}$ où k est une constante réelle quelconque.

b. Déterminer la solution f de (E), définie sur $[0, +\infty[$ et vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

Vérifier votre réponse en faisant tracer une représentation graphique de f sur GeoGebra.

3. En déduire $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ et contrôler la conjecture faite à la question 1.

B. Estimation des paramètres d'un patient et ajustement du débit de la perfusion

On ignore les paramètres c et V du patient et l'objectif est de régler le débit d de la perfusion de façon à viser un plateau à 15 mg/mL.

1. On suppose, dans un premier temps, que $V = 80$ et on règle le débit à $d = 108$.

a. Modifier le curseur c. Quel est l'impact d'une augmentation de la clairance (le coefficient d'élimination) c ?

b. On effectue un prélèvement sanguin au bout de 6 heures et on mesure une concentration du médicament égale à 5,8 mg/mL. Placer sur le fichier le point A de coordonnées (6 ; 5,8).

Estimer c, d'abord graphiquement, puis à 0,1 près en affichant l'écart $\mathrm{e} = f(6) - 5{,}8$.

2. On souhaite, au temps $t = 12$, modifier le débit de la perfusion pour viser un plateau à 15 mg/mL, en prenant en compte l'analyse précédente.

Créer un nouveau curseur D allant de 50 à 250 avec un incrément 1.

Tracer, à l'aide de l'instruction RésolEquaDiff, une représentation de la solution g de l'équation différentielle $y' = -\frac{c}{V}y + \frac{D}{V}$, vérifiant la condition initiale $g(12) = f(12)$.

Déterminer, à une unité près, la valeur de D permettant d'obtenir, pour la courbe représentative de g, une asymptote d'équation $y = 15$.

3. On suppose maintenant que c et V sont tous deux inconnus, mais on dispose, pour un débit $d = 108$, de deux mesures donnant $f(6) = 5{,}8$ et $f(12) = 8{,}4$.

a. Donner une estimation de c et de V en affichant l'écart : $e_2 = (f(6) - 5{,}8)^2 + (f(12) - 8{,}4)^2$.

b. On suppose que l'on peut régler le débit D à l'instant $t = 15$. Donner une estimation de D permettant de viser le plateau de 15 mg/mL.

TP 2 Utiliser un logiciel de calcul formel pour étudier une équation différentielle

Sédimentation et traitement des eaux

LOGICIEL UTILISÉ
Maxima

Dans les processus de traitement des eaux, l'étape de décantation permet d'éliminer les particules de taille supérieure à une dizaine de micromètres. L'objet de ce TP est l'étude de l'évolution de la vitesse dans une eau à 10 °C d'une particule minérale, de forme sphérique, de 1 mm de rayon.
(D'après *Mathématiques et développement durable* IREM de Clermont-Ferrand).

On lâche, sans vitesse initiale, une sphère de sable de rayon 1 mm. Les lois de la physique permettent d'établir que la fonction v correspondant à la vitesse, en mètres par seconde, de la sphère au temps t, exprimé en secondes, est solution de l'équation différentielle (E) :

$0{,}003\,53\, y' + 0{,}007\,86\, y = 0{,}021\,56.$

1. a. Utiliser un logiciel de calcul formel pour résoudre l'équation différentielle (E).

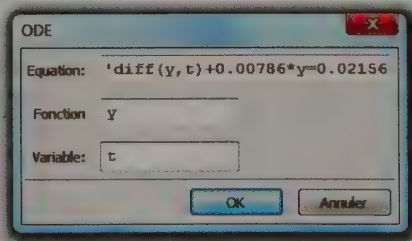
Avec Maxima, entrer la commande :

ode2(0.00353*'diff(y,t)+0.00786*y=0.02156,y,t)

ou utiliser le menu Equations/Résoudre une équation différentielle…

y' se traduit par 'diff(y,t),

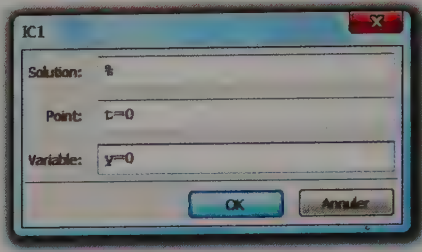
attention à ne pas oublier le ' devant diff.



b. Déterminer, à l'aide du logiciel, la solution particulière v, définie sur $[0, +\infty[$, de l'équation différentielle (E), vérifiant la condition initiale :

$v(0) = 0$.

Avec Maxima, on peut entrer l'instruction ic1(%,t=0,y=0), où % reprend le résultat précédemment obtenu, ou utiliser le menu Equations/Condition initiale(1).



c. Vérifier, à l'aide du logiciel, que $v(t)$ peut, en arrondissant les coefficients, s'écrire :

$$v(t) = 2{,}743(1 - \mathrm{e}^{-2{,}227t}).$$

Avec Maxima, l'instruction define(v(t),rhs(%)) permet d'attribuer à $v(t)$ le membre de droite d'une égalité venant d'être obtenue. L'instruction float(*quantité*) permet d'obtenir un affichage décimal approché d'une *quantité*.

2. Déterminer la vitesse limite de la particule.

Avec Maxima, l'instruction limit(v(t),t,inf) affiche $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$.

3. **a.** Soit T un réel positif. La hauteur $h(T)$, en mètres, parcourue par la particule durant l'intervalle de temps $[0, T]$ est donnée par $h(T) = \int_0^T v(t)\mathrm{d}t$.

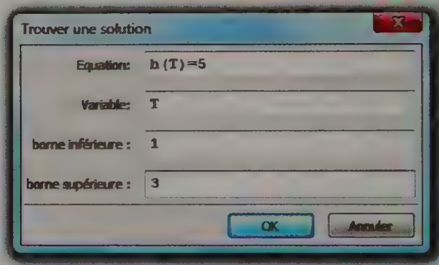
À l'aide du logiciel de calcul formel, expliciter, sous forme développée, l'expression de $h(T)$.

Avec Maxima, l'intégrale est obtenue par l'instruction integrate(v(t),t,0,T).

b. On souhaite déterminer la durée nécessaire à la particule pour atteindre le fond du bassin de décantation, situé à 5 m sous la surface de l'eau.

Effectuer une résolution numérique de l'équation $h(T) = 5$.

Avec Maxima, on peut compléter la boîte de dialogue ci-contre, obtenue par le menu Equations/Trouver une solution...



TP 3 Modéliser à l'aide d'une équation différentielle

Ce TP peut permettre d'évaluer des capacités mathématiques développées grâce aux TICE.

LOGICIEL UTILISÉ
Tableur

Étude d'un phénomène biologique

Une expérience portant sur l'étude de la croissance de bactéries *escherichia coli*, durant deux heures dans un milieu liquide minimum glucosé, donne le tableau suivant, où t est la durée exprimée en heures et $D(t)$ la densité de cellules en fonction de la durée.

t	0	0,1	0,3	0,57	0,6	0,7	0,9	1,2	1,47	1,72	1,95
$D(t)$	10,2	11,2	13,5	17,2	17,7	19,5	23,5	30,5	39	49,2	61

1. À l'aide d'un tableur, représenter le nuage de points correspondant au tableau ci-dessus.

Appelez le professeur pour vérifier votre graphique.

On cherche désormais une fonction qui approche la densité de population en fonction de la durée. La détermination d'une telle fonction passe par la détermination de quantités fixes.

2. Dans une telle situation, différentes hypothèses sont envisagées concernant l'accroissement de la densité ΔD. Est-elle proportionnelle :

– à l'accroissement de la durée Δt, ce qui signifie que $\dfrac{\Delta D}{\Delta t}$ est constant ?

– à D, ce qui signifie que $\dfrac{\Delta D}{D}$ est constant ?

– à D et Δt, ce qui signifie que $\dfrac{\Delta D}{\Delta t \times D}$ est constant ?

À l'aide d'un tableur, vérifier que la troisième hypothèse est la mieux adaptée aux données.

Appelez le professeur pour présenter votre démarche.

3. a. On suppose que $\dfrac{\Delta D}{\Delta t \times D} = 0{,}9$.

Expliquer pourquoi la relation $\dfrac{\Delta D}{\Delta t} = 0{,}9 \times D$ conduit à considérer que la densité peut être représentée par une fonction f solution de l'équation différentielle (E) : $y' - 0{,}9\, y = 0$.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

c. Compte-tenu des données dont on dispose, quelle formule peut-on proposer pour la fonction f sur l'intervalle $[0, 2]$?

d. Représenter, à l'aide du tableur, cette fonction f sur le même graphique que celui du nuage de points de la question 1.

Exercices

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE	Exercices corrigés	Exercices non corrigés
Résoudre une équation différentielle de la forme $y' + ay = 0$ (avec $a \neq 0$)	1, 2, 25	3 à 10, 26 à 36
Résoudre une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$)	13, 38	14 à 17, 37, 39 à 41
TICE Utiliser Geogebra	18	
TICE Utiliser Maxima	42	

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$

Déterminer la solution satisfaisant une condition donnée

Cas particulier : $b = 0$, équation différentielle $y' + ay = 0$ (exercices 1 à 12)

▶ *les solutions de l'équation différentielle : $y' + ay = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{-ax}$, où k est une constante réelle quelconque.*

1. ++ **Résolution et recherche d'une solution particulière**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = 0$ dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la dérivée de y.

2. Déterminer la solution f qui vérifie $f(0) = 1$.

CORRIGÉ P. 355

2. ++

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$, où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la dérivée de y.

▶ **Conseil :** *mettre (E) sous la forme $y' + ay = 0$.*

2. Déterminer la solution f vérifiant $f(\ln 4) = 1$.

CORRIGÉ P. 355

Résoudre l'équation différentielle suivante dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la dérivée de y (exercices 3 à 5).

3. +
$y' - 2y = 0.$

4. +
$y' = -\dfrac{y}{4}.$

5. +
$y' + y = 0.$

▶ *On peut se reporter à l'exercice résolu 1 du cours.*

Résoudre l'équation différentielle suivante dans laquelle x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et x' la dérivée de x (exercices 6 et 7).

6. +
$x' - 4x = 0.$

7. +
$\dfrac{1}{2}x' = x.$

8. ++ **Résolution et recherche d'une solution particulière**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - \dfrac{1}{3}y = 0$ dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la dérivée de y.

2. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f'(0) = \dfrac{1}{3}$.

9. +++

Soit l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$, où y désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de la variable réelle x et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation (E).

2. a) Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ passe par le point A (ln 9, 1).

b) Déterminer la dérivée de f et en déduire le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A.

3. Montrer que la fonction g définie dans $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ est une autre solution de (E).

10. +++

1. Résoudre l'équation différentielle $y'+2y=0$ dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la dérivée de y.

2. Déterminer la solution f dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ passe par le point $M\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

3. Calculer le nombre réel a tel que : $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=-2$.

11. +++ Développement durable : capteur solaire

Un ballon de stockage d'eau de 500 litres est chauffé par un capteur solaire d'aire 10 m^2 situé sur le toit d'une maison. On s'intéresse à une période d'exposition au soleil de 10 heures consécutives au mois de décembre, dans une région où la température extérieure est de 0 °C.

On désigne par $T(t)$ la température de l'eau dans le ballon à l'instant t exprimé en secondes.

On a $0 \leq t \leq 36\,000$.

On admet que la fonction T est solution de l'équation différentielle du premier ordre (E) :

$4\,185\times T'(t)=4{,}5\sin\left(\frac{\pi}{36\,000}t\right)$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution de (E) qui vérifient la condition initiale $T(0)=19$.

(Avant la période de chauffe, l'eau est à 19 °C.)

Arrondir à 10^{-1} la constante obtenue.

3. Déterminer la température de l'eau :

a) après 5 heures d'exposition au soleil ;

b) après 10 heures d'exposition au soleil.

12. ++++ Où l'on démontre un résultat du cours

Nous avons démontré dans le cours que les fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{-ax}$ sont **des** solutions de l'équation différentielle (E') : $y' + ay = 0$, où a est une constante réelle non nulle.

Montrons que l'équation (E') n'a pas d'autres solutions.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = f(x)\mathrm{e}^{ax}$.

1. a) Montrer que $f(x) = u(x)\mathrm{e}^{-ax}$ où u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $f'(x)$.

2. Montrer que si f est une solution de (E'), alors $u'(x) = 0$ pour tout x réel.

3. En déduire que les seules solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{-ax}$, où k est une constante réelle.

Exemples de résolution d'équations différentielles $y' + ay = b$ avec $b \neq 0$ (exercices 13 à 17)

▶ *Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ ($b \neq 0$) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto k\mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a}$, où k est une constante réelle quelconque.*

13. ++ Résolution et recherche d'une solution particulière

La modélisation d'un phénomène physique conduit à l'équation différentielle (E) : $2y'+y=\frac{1}{2}$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' est la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

▶ **Conseil :** *mettre d'abord l'équation (E) sous la forme $y' + ay = b$.*

2. Déterminer la solution φ de (E) vérifiant $\varphi(0) = 0$.

CORRIGÉ P. 355

14. + Résolution

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

a) $y' - 3y = 1$;

b) $y' + 2y = 2$;

c) $2y' - y = 3$.

▶ *On peut se reporter à l'exercice résolu 2 du cours.*

15. ++ Résolution et recherche d'une solution particulière

Soit (E) l'équation différentielle : $2x' + x = 2$, où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et x' sa fonction dérivée.

1. Résoudre l'équation (E).

2. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $x(0) = 1$.

▶ *On peut se reporter à l'exercice résolu 3 du cours.*

16. +++ Deux équations différentielles

On considère les équations différentielles

$(E_1) : y'-2y=2$ et $(E_2) : y'-y=1$

dans lesquelles y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la dérivée de y.

1. Résoudre les équations différentielles (E_1) et (E_2).

2. a) Déterminer la solution particulière f_1 de (E_1) telle que $f_1(0) = 4$.

b) Déterminer la solution particulière f_2 de (E_2) telle que $f_2(0) = 1$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.

17. ++ **Trois équations différentielles issues de situations de transfert d'énergie**

Dans chacun des cas suivants, y(ou T) est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et y' (ou T') est la fonction dérivée de y (ou de T). Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale donnée.

a) $y' + 3{,}2 \times 10^{-7}y = 6{,}56 \times 10^{-6}$;

$f(0) = 50$.

b) $625T' + 1{,}5T = 7{,}5$;

$T(0) = 400$.

c) $y' = -(y - 18)$;

$f(0) = 100$.

Exemples d'utilisation de logiciels

18. +++ **Fibre optique avec GeoGebra** TICE

1. Étude d'une équation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ y' = -0{,}2\, y$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' la dérivée de y.

La réalisation d'un fichier GeoGebra permet de visualiser la famille des courbes représentatives des solutions de l'équation différentielle (E).

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 10.

On désigne par f la fonction définie sur $[0, +\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) et vérifiant la condition initiale : $f(0) = a$.

Sur un fichier GeoGebra, créer un curseur a allant de 0 à 10 avec un incrément 0,1.

Tracer une représentation de la fonction f sur l'intervalle [0, 30] avec un pas de calcul 0,01 en entrant dans la barre de saisie RésolEquaDiff[-0.2*y,0,a,30,0.01].

Par un clic droite sur la courbe, activer la trace et créer des couleurs dynamiques en faisant Avancé/Couleurs dynamiques Rouge : 0 ; Vert : a et Bleu : 2a.

Balayer les valeurs de a puis visualiser les courbes obtenues. À quoi correspond, graphiquement, la condition initiale $f(0) = a$?

2. Application à la puissance des fibres optiques

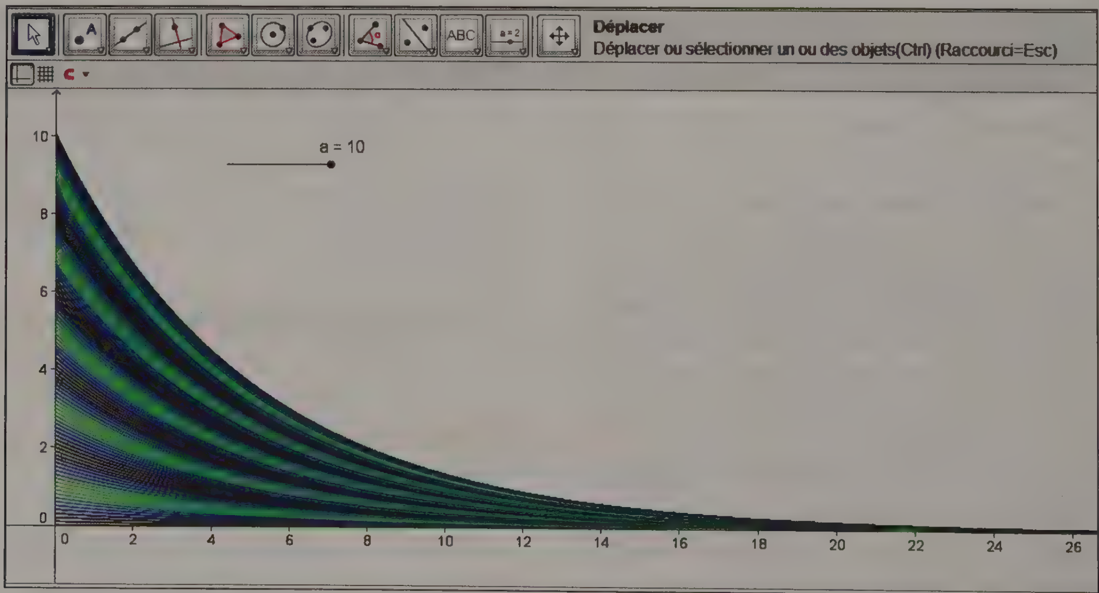
Dans cette partie, les puissances sont exprimées en mW et les longueurs en km.

Pour un signal d'entrée de puissance a fixée, la puissance lumineuse à la sortie d'une fibre optique dépend de sa longueur x. On considère une fibre optique pour laquelle la perte relative de puissance lumineuse est de 20%. On peut modéliser la puissance $f(x)$ de sortie en fonction de la longueur x comme la solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E) précédente vérifiant la condition initiale $f(0) = a$.

a) On suppose que $a = 5$, déterminer l'expression de $f(x)$. Vérifier votre réponse en saisissant l'expression trouvée dans GeoGebra.

b) Déterminer la longueur de fibre à partir de laquelle la puissance du signal de sortie sera inférieure à 1 mW. Contrôler votre réponse à l'aide de GeoGebra.

CORRIGÉ P. 355



RÉPONSES P. 355

QCM

Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.

QCM interactifs 19 à 24

▶ *Dans ce qui suit, k est une constante réelle quelconque.*

19. + **Équation homogène $y' + ay = 0$**

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont définies par :

a) $f(x) = ke^{x}$;

b) $f(x) = ke^{\frac{1}{2}x}$;

c) $f(x) = ke^{2x}$.

20. + **Solution satisfaisant à une condition initiale**

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

Parmi les solutions de cette équation, on considère la solution particulière f telle que $f(0) = 3$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, f est définie par :

a) $f(x) = 3e^{-2x}$;

b) $f(x) = 3e^{2x}$;

c) $f(x) = -3e^{-2x}$.

21. ++ **Équation de la forme $y' + ay = b$ $(b \neq 0)$**

On considère l'équation différentielle $(E) : 2y' - y = 1$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont définies par :

a) $x \mapsto ke^{2x} - 1$;

b) $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} + 1$;

c) $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} - 1$.

22. ++ **Solution satisfaisant à une condition initiale**

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 4$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

La solution de (E) satisfaisant à la condition initiale $f(0) = 3$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $x \mapsto e^{-2x} + 3$;

b) $x \mapsto e^{2x} + 2$;

c) $x \mapsto e^{-2x} + 2$.

23. +++ **Refroidissement d'un corps**

La vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et l'air ambiant. En désignant par $\theta(t)$ la température du corps à l'instant t exprimé en secondes, on admet que la fonction $t \mapsto \theta(t)$ est solution de l'équation différentielle (E) :

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \theta_1),$$

où k est une constante strictement positive et θ_1 la température de l'air ambiant.

1. Dans ce qui suit, C est une constante quelconque. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

a) $t \mapsto C\,e^{-kt} + \frac{\theta_1}{k}$;

b) $t \mapsto C\,e^{-kt}$;

c) $t \mapsto C\,e^{-kt} + \theta_1$.

2. La solution de l'équation différentielle (E) satisfaisant à la condition $\theta(0) = \theta_0$ est :

a) $t \mapsto \theta_0\,e^{-kt} + \theta_1$;

b) $t \mapsto (\theta_1 - \theta_0)\,e^{-kt} + \theta_1$;

c) $t \mapsto (\theta_0 - \theta_1)\,e^{-kt} + \theta_1$.

3. On suppose que $\theta_1 = 20$ °C et que $\theta_0 = 70$ °C.

Au bout de 5 minutes, θ vaut 60 °C. La valeur de k, arrondie à 10^{-5}, est :

a) $7{,}43 \times 10^{-3}$;

b) $-7{,}43 \times 10^{-3}$;

c) $-7{,}4 \times 10^{-4}$.

24. +++

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 710y = 710$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. La solution f de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur 0 pour $t = 0$ est définie sur $[0, +\infty[$ par :

a) $f(t) = 710 + e^{-710t}$;

b) $f(t) = 1 + e^{-710t}$;

c) $f(t) = 1 - e^{-710t}$.

2. f étant la fonction de **1.**, on désigne par α le nombre réel tel que $f(\alpha) = 0{,}5$.

La valeur approchée arrondie à 10^{-5} de α est :

a) $\alpha \approx 0{,}000\,89$;

b) $\alpha \approx 0{,}000\,02$;

c) $\alpha \approx 0{,}000\,98$.

Les exercices pour le baccalauréat sont des exercices qui pourraient figurer dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat STL-Biotechnologies.

Avec l'équation différentielle du premier ordre $y' + ay = 0$ $(a \neq 0)$

25. +++ **Équation de la forme $y'+ay=0$, lectures graphiques**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'-2y=0$.

2. On note f la solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E), vérifiant $f(0)=1$ et g la solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E), vérifiant $g(0)=2$.

a) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x)=e^{2x}$.

b) Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

3. Sur l'annexe, à rendre avec la copie, figurent les courbes représentatives $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soit Δ la droite d'équation $y = 2$.

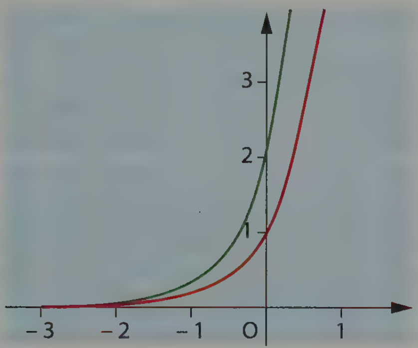
Cette droite coupe respectivement les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ aux points A et B.

a) Tracer la droite Δ et placer les points A et B.

b) Déterminer le coefficient directeur de la droite T tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$ et celui de la droite T' tangente en B à la courbe $\mathscr{C}'$.

c) Quelle remarque peut-on faire sur les deux tangentes T et T' ?

Annexe (à rendre avec la copie)



CORRIGÉ P. 356

26. +++ **Résolution d'une équation différentielle et calcul d'aire**

1. a) Résoudre l'équation différentielle (E) :
$4y'+3y=0$ dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la dérivée de y.

b) Déterminer la fonction f, solution de (E), telle que $f'(0)=-6$.

2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I=[0, 4]$ par :

$$g(x)=8e^{\frac{-3}{4}x}.$$

a) Étudier les variations de la fonction g sur I et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

b) Déterminer la valeur exacte de l'aire A en cm² de la partie du plan ensemble des points M de coordonnées x et y telles que : $0 \leq x \leq 4$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
Donner la valeur approchée de A arrondie au mm².

Exemples de situations issues des sciences physiques et chimiques (exercices 27 à 31)

27. +++ **Problème de température**

1. On considère l'équation différentielle
(E) $y'+2\times10^{-4}y=0$ où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$.

a) Résoudre cette équation différentielle.

b) Déterminer la solution f qui vérifie la condition initiale $f(0)=-80$.

2. On chauffe un liquide dans une cuve. On note $g(t)$ sa température en degrés Celsius à l'instant t, exprimé en secondes. La fonction g est définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t)=f(t)+100$, où f est la solution déterminée au **1.b**).

a) Exprimer $g(t)$ en fonction de t.

b) Calculer $g(0)$, la température du liquide à l'instant $t = 0$.

c) Au bout de combien de temps la température atteint-elle 85 °C ? Donner la réponse en heures, minutes et secondes.

28. +++ **Pollution**

Après des violents orages, des eaux de ruissellement contenant 4 % de pesticides se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade.

Le système d'évacuation du bassin permet d'y maintenir un volume constant de 30 000 litres.

On admet que le volume de pesticides en litres dans ce bassin est une fonction du temps définie par $g(t) = f(t) + 1\,200$, t étant le temps en minutes et f étant une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 5 \times 10^{-3}y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

En déduire l'expression de $g(t)$.

2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le volume des pesticides dans l'eau est nul.

Déterminer la fonction g satisfaisant à cette condition.

3. Le corps médical considère que des affections cutanées peuvent survenir dès que le taux de pesticides dans le bassin atteint 2 %.

Au bout de combien de minutes ce taux est-il atteint ? (On donnera d'abord le résultat exact puis la valeur approchée arrondie à une minute.)

29. +++ Suite géométrique et équation différentielle

L'iode 131 est un produit radioactif. Tout échantillon d'iode 131 a sa masse qui diminue régulièrement par désintégration.

1. Dans un premier livre de physique, on lit que la masse de tout échantillon d'iode 131 diminue de 8,3 % chaque jour. On dispose d'un échantillon de masse initiale $M_0 = 100$ g.

a) Calculer, arrondie au dixième, la masse M_1 de l'échantillon au bout d'une journée puis sa masse M_2 au bout de deux jours.

b) On note M_n la masse de l'échantillon au bout de n jours. Démontrer que la suite (M_n) est une suite géométrique.

c) Calculer la masse M_{10} de l'échantillon au bout de 10 jours, arrondie au dixième.

2. Dans un second livre de physique, on lit que la masse de tout échantillon d'iode 131 est une fonction du temps, $M : t \mapsto M(t)$ qui est solution de l'équation différentielle :

$$M'(t) = \lambda \cdot M(t) \quad (E)$$

où t est le temps exprimé en jours et λ une constante réelle.

a) Résoudre l'équation (E).

b) Sachant que lorsque $t = 0$, la masse de l'échantillon est de 100 g, exprimer $M(t)$ en fonction de t et de λ.

c) Calculer $M(1)$ en fonction de λ. Pour quelle valeur de λ a-t-on $M(1) = 91{,}7$?

On donnera la valeur approchée de λ arrondie au dix millième.

30. +++ Désintégration du carbone 14

A. Les êtres vivants contiennent du carbone 14 radioactif (constamment renouvelé) qui se maintient à la valeur de 15,3 unités.

À leur mort, ce carbone 14 n'est plus renouvelé : il se désintègre à une vitesse proportionnelle, à tout instant, au carbone 14 encore présent dans l'organisme.

On montre que le coefficient de proportionnalité est voisin de 0,123.

Ainsi, la radioactivité du carbone 14 présent dans un organisme à l'instant t après sa mort (t exprimé en milliers d'années), notée $f(t)$, vérifie les deux conditions :

$f'(t) = -0{,}123\,f(t)$ et $f(0) = 15{,}3$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$f'(t) + 0{,}123\,f(t) = 0$.

2. Déterminer la solution qui satisfait à la condition $f(0) = 15{,}3$.

B. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$f(t) = 15{,}3\mathrm{e}^{-0{,}123t}$.

1. a) Calculer la limite de f quand t tend vers $+\infty$.

b) En déduire l'existence d'une asymptote (que l'on précisera) à $\mathscr{C}$ courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

2. a) Pour tout nombre t positif, calculer $f'(t)$, où f' désigne la dérivée de f.

b) Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire les variations de f sur $[0, +\infty[$.

3. Construire $\mathscr{C}$ en prenant :

- 2 cm pour 5 milliers d'années en abscisses,
- 1 cm pour 1 unité en ordonnées.

(On placera les points d'abscisses : 0 ; 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 et 30.)

C. On considère que la fonction f donnée dans la partie **B.** donne la radioactivité du carbone 14 dans un organisme après sa mort, en fonction de t (en milliers d'années).

1. On trouve dans une grotte des débris d'os présentant une radioactivité égale à 10,2 unités. Estimer l'âge de ces débris à l'aide d'une lecture graphique.

2. Lorsque la radioactivité devient inférieure à 1 % de sa valeur initiale, le calcul de $f(t)$ est entaché de trop d'incertitude pour permettre de dater raisonnablement à l'aide du carbone 14. Trouver à partir de quel âge, un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

3. Donner une interprétation du résultat obtenu au **B.1.a)**.

31. De la chimie

Dans cet exercice, on étudie l'hydrolyse d'un ester en fonction du temps.

A. Résolution d'une équation différentielle

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = -0{,}61y$, où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et y' la dérivée de y.

2. Déterminer la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 1{,}5$.

B. *Étude d'une fonction*

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$f(t) = 1{,}5e^{-0{,}61t}$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour 1 heure en abscisse, 10 cm pour 1 unité en ordonnée.

1. a) Calculer $f'(t)$, où f' désigne la dérivée de f et étudier son signe sur $[0, +\infty[$.

b) Établir le tableau de variations de f.

2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$. (On placera les points d'abscisses 0 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.)

C. *Application*

On admet que $f(t)$ représente la concentration d'un ester, en moles par litre, en fonction du temps t, exprimé en heures.

1. En faisant apparaître les constructions utiles, déterminer graphiquement :

a) la concentration de l'ester au bout de 1 h 30 ;

b) au bout de combien de temps la concentration de l'ester devient inférieure à 0,3 mole par litre.

2. Retrouver le résultat du **1.b)** par le calcul. (On donnera la valeur approchée par excès du résultat en heures et minutes.)

Exemples de situations issues des biotechnologies (exercices 32 et 36)

32. ++ Production industrielle de pénicilline

Lors de la production industrielle de pénicilline G par la moisissure *Penicilium chrysogenum*, l'évolution de la biomasse de moisissure dans le fermenteur est suivie par des déterminations de masse sèche.

On admet que la quantité X de biomasse, en grammes par litre, sur un intervalle de temps donné est solution de l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = kX$, où k est une constante réelle strictement positive, et où t est le temps exprimé en heures.

1. Résoudre cette équation différentielle.

2. Exprimer X en fonction de t, sachant que :

$X(0) = 2{,}7$ et $X(20) = 24$.

33. +++ Croissance d'une population

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle $y' = 0{,}12y$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation différentielle où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et y' la dérivée de y.

2. Déterminer la fonction f solution de cette équation différentielle prenant la valeur 3,5 pour la valeur 0 de la variable.

B. *Application*

Dans un milieu donné, on appelle N le nombre de cellules d'une population en développement. N varie en fonction du temps t selon la relation $N = f(t) = 3{,}5e^{0{,}12t}$, où N est exprimé en millions de cellules et t en heures.

Calculer l'instant t (arrondi au centième) où le milieu donné contiendra une population de 6 millions de cellules.

34. +++ Culture bactérienne en milieu liquide

Dans cet exercice, on étudie l'évolution d'une culture bactérienne en milieu liquide. On suppose que le nombre $N(t)$ de bactéries par millilitre à l'instant t vérifie l'équation différentielle suivante (E) : $N'(t) = -0{,}04N(t)$ où t est exprimé en heures.

1. Déterminer les solutions de cette équation différentielle.

2. Déterminer la solution particulière f de (E) vérifiant la condition $N(0) = 10^4$.

3. Déterminer t pour que le nombre de bactéries de la culture soit inférieur ou égal à 8 000.

35. +++ Culture cellulaire

A. On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' = \left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)y.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la fonction f solution de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 5$.

B. On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$F(t) = 5e^{\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)t}$.

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée sur le document en annexe **que vous devrez rendre avec votre copie**.

1. On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 0$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

2. Soit F' la fonction dérivée de F.

a) Calculer $F'(t)$ pour tout t de l'intervalle $[0, +\infty[$.

b) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. La tracer dans le repère en annexe.

3. Vérifier que, pour tout t de l'intervalle $[0, +\infty[$,

$$F(t+3) = \frac{1}{2}F(t) \qquad (1)$$

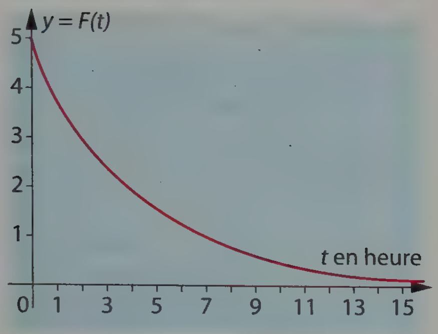
C. Le nombre de cellules, exprimé en millions, d'une culture cellulaire soumise à une expérimentation est modélisé, en fonction du temps, par la fonction F.

1. Comment interpréter l'égalité (1) de la question **B.3.** ?

2. Déterminer l'instant t (en heures et minutes) où le nombre de cellules n'est plus que de 750 000.

3. Retrouver graphiquement le résultat en faisant apparaître les tracés utiles.

Annexe



36. +++ **Suite géométrique et équation différentielle**

A. On s'intéresse, lors d'une expérience, à la croissance d'une population de bactéries dont le nombre triple toutes les heures. À l'instant $t = 0$, la population est de 10 germes.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Temps (h)	0	1	2	6	9
Nombre de germes	10				

2. On appelle : u_0 le nombre de germes à l'instant $t = 0$, u_1 le nombre de germes à l'instant $t = 1$, u_n le nombre de germes à l'instant $t = n$.

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

b) En déduire la nature de la suite de terme général (u_n) et donner ses caractéristiques.

c) Écrire u_n en fonction de n.

d) Calculer à partir de quelle heure la population de bactéries atteindra au moins un million de germes.

B. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $f(t) = 10e^{(\ln 3)t}$.

1. a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

b) Étudier le signe de $f'(t)$ puis en déduire le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$.

2. a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à l'unité.

t	0	1	2	3	4	5
$f(t)$						

b) Tracer dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f. On prendra pour unités graphiques : 2 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 unités sur l'axe des ordonnées.

C. Dans l'étude faite précédemment, la variation de la population bactérienne est modélisée par la solution g définie sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y' = (\ln 3)y$ qui vérifie la condition initiale $g(0) = 10$.

a) Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie **B** est égale à g.

b) Déterminer graphiquement, en faisant apparaître les constructions utiles, l'intervalle de temps pendant lequel la densité bactérienne est inférieure ou égale à 500.

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$ (avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$)

37. +++ **Eau douce et eau de mer**

Un réservoir contient 1 000 litres d'eau douce dont la salinité est de $0{,}12\ \text{g}\cdot\text{L}^{-1}$.

À la suite d'un accident regrettable, de l'eau de mer pénètre dans ce réservoir à raison de 10 litres par minute.

On note s la salinité de l'eau du réservoir ; s est une fonction du temps t (exprimé en minutes), définie et dérivable sur $[0, +\infty[$.

On admet que s est solution de l'équation différentielle

$$(E) : s'(t) + 0{,}01\, s(t) = 0{,}39.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Considérant qu'à l'instant $t = 0$ où débute l'incident la salinité de l'eau du réservoir était de $0{,}12\ \text{g}\cdot\text{L}^{-1}$, montrer que l'on a : $s(t) = 39 - 38{,}88\, e^{-0{,}01t}$.

3. Déduire du résultat précédent la salinité de l'eau du réservoir 60 minutes après le début de l'incident. Arrondir à 10^{-2}.

4. De combien de temps le service de surveillance dispose-t-il pour arrêter l'arrivée de l'eau salée si, pour réduire les conséquences de l'incident, la salinité doit rester inférieure à $3{,}9\ \text{g}\cdot\text{L}^{-1}$?

38. +++ Pollution (suite)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}01y = 24$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution v de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $v(0) = 0$.

B. *Étude d'une fonction*

Soit v la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$v(t) = 2\,400(1 - e^{-0{,}01t}).$$

1. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$.

2. On désigne par v' la fonction dérivée de la fonction v. Calculer $v'(t)$ pour tout t de $[0, +\infty[$.

3. Déduire de ce qui précède le sens de variation de la fonction v sur $[0, +\infty[$.

4. Résoudre sur $[0, +\infty[$ l'équation $v(t) = 1\,200$.

Donner la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée arrondie à 10^{-1}.

C. *Application des résultats de la partie B*

Un réservoir contient 60 m^3 d'eau destinée à abreuver du bétail.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en heures.

À l'instant $t = 0$, se déverse dans le réservoir une eau polluée par une substance M.

Un système de trop plein permet de conserver à tout instant à partir de l'instant $t = 0$ un volume de 60 m^3 dans le réservoir.

On admet, qu'à l'instant t (exprimé en heures), le volume, exprimé en litres, de substance polluante M présente dans le réservoir est $v(t)$, où v est la fonction définie dans la partie B.

1. La santé du bétail est menacée lorsque le volume de substance M dans le réservoir atteint 2 % du volume total du réservoir. Déduire d'un résultat obtenu à la partie *B*. la valeur de t à partir de laquelle la santé du bétail est menacée par la présence dans le réservoir de substance M.

2. Le volume de substance M dans le réservoir peut-il dépasser 4 % du volume du réservoir ? Justifier la réponse à l'aide d'un résultat de la partie *B*.

CORRIGÉ P. 356

39. +++ Tasse de thé : équation différentielle et calcul intégral

Dans cet exercice on s'intéresse à l'évolution de la température d'une tasse de thé.

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

A. *Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle (E) :

$y' + 0{,}05y = 1{,}05$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur 100 pour $t = 0$.

B. *Étude d'une fonction et calcul intégral*

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = 79e^{-0{,}05t} + 21.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe $\mathscr{C}$ est donnée en annexe, à rendre avec la copie.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

b) Déduire du **a)** que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

Tracer la droite Δ sur la figure de l'*annexe*.

2. Résoudre par le calcul dans $[0, +\infty[$ l'équation $f(t) = 21{,}1$.

Donner la valeur exacte de la solution, puis sa valeur approchée arrondie à 10^{-1}.

3. a) On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(t)$ pour tout t de $[0, +\infty[$.

b) Établir le tableau de variation de f.

4. Démontrer que la valeur moyenne V_m de la fonction f sur $[0, 120]$ est : $V_m = 21 + \dfrac{79}{6}(1 - e^{-6})$.

C. *Exploitation des résultats des parties A et B*

Du thé est mis à infuser dans une tasse placée dans une pièce où la température ambiante, supposée constante, est de 21 °C.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minutes.

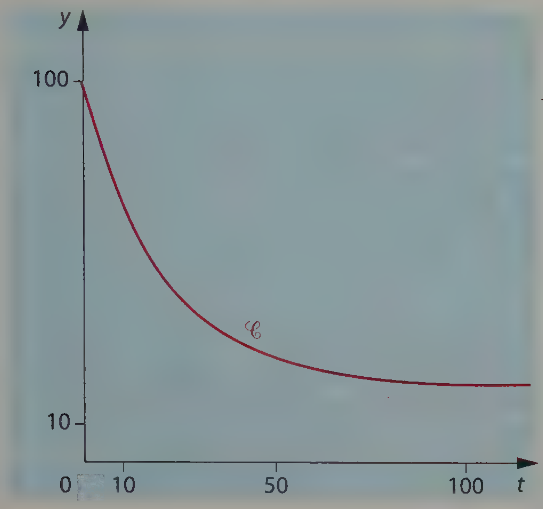
On admet que la température du thé exprimée en degrés Celsius est $f(t)$, où f est la fonction définie au début de la partie *B*.

1. En utilisant le résultat de la question *B.***2.**, donner, à la minute près, l'instant au-delà duquel la température du thé est inférieure à 21,1 °C.

2. Déterminer graphiquement, à la minute près, l'instant où la température du thé est de 60 °C.

On fera apparaître les constructions utiles sur la figure.

Annexe à rendre avec la copie.



40. +++ Pour économiser l'énergie

Dans une pièce, la température est de 22 °C à 23 h quand on éteint le chauffage. Nous allons étudier l'évolution de la température dans cette pièce au cours de la nuit.

Nous supposons que la température extérieure est constante, toujours égale à $T_{ext} = 10$ °C.

Soit t le temps écoulé depuis 23 h, exprimé en heures. La température dans le bureau est une fonction f de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle [0, 8]. Elle est solution de l'équation différentielle : $Cy' + \lambda y = \lambda T_{ext}$, où C est la capacité thermique globale de la pièce et λ la conductivité thermique globale du mur donnant sur l'extérieur.

On admet que l'équation s'écrit alors :

$$(E)\quad y' + 0{,}15y = 1{,}5.$$

1. a) Résoudre l'équation différentielle (E).

b) Déterminer la fonction f solution de l'équation (E), qui vérifie la condition initiale : $f(0) = 22$.

2. On admet dans la suite que f est la fonction définie sur [0, 8] par : $f(t) = 10 + 12e^{-0,15t}$.

a) Étudier les variations de la fonction f sur [0, 8].

b) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. On prendra comme unités graphiques 2 cm pour 1 h en abscisse et 1 cm pour 1 °C en ordonnée.

c) Au bout de combien de temps la température devient-elle inférieure à 16 °C ? En déterminer la valeur exacte à l'aide d'une inéquation. Quelle heure sera-t-il (arrondir à l'heure près) ?

3. À chaque instant t, le flux de chaleur vers l'extérieur est donné, en MJh^{-1} (mégajoule par heure), par la fonction j définie sur [0, 8] par : $j(t) = \lambda(f(t) - T_{ext}) = 2{,}88e^{-0,15t}$.

L'énergie dissipée à l'extérieur entre 23 h et 7 h, exprimée en MJ, s'obtient en calculant : $E_d = \int_0^8 j(t)\,dt$.

a) Calculer la valeur exacte E_d.

b) En donner une valeur approchée à 0,1 MJ près par défaut.

41. +++ La vitesse d'une bille

À l'instant $t = 0$, une bille est lâchée à la surface d'une colonne de liquide.

On note $v(t)$ la vitesse instantanée de cette bille, exprimée en m.s^{-1}, à un instant t donné.

On admet que la fonction v est définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 140y = 5{,}88$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Parmi les fonctions solutions obtenues au **1.**, démontrer que celle, notée v, qui s'annule pour $t = 0$, est définie par : $v(t) = 0{,}042(1 - e^{-140t})$.

3. *Deux utilisations de l'expression trouvée de $v(t)$.*

a) Démontrer, en étudiant la limite de $v(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, que la vitesse de la bille admet une valeur limite notée ℓ dont on donnera la valeur numérique.

b) À quel instant t la bille atteint-elle 95 % de sa vitesse limite ?

Utiliser des logiciels

42. +++ Dynamique des populations avec Maxima

TICE

On étudie l'évolution d'une population de paramécies (*paramecium aurelia*), organismes unicellulaires, dans un milieu de culture clos. Soit $N(t)$ le nombre de paramécies à l'instant t, exprimé en jours. On peut considérer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{N(t)}$, définie pour tout réel t de l'intervalle $[0, +\infty[$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$y' + 0{,}75y = 0{,}001\,5$,

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' la dérivée de y.

On désigne par a la population à l'instant $t = 0$. On a donc $N(0) = a$, avec $a > 0$.

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants, où (%i1) indique l'entrée n° 1 et (%o1) la sortie n° 1.

Dans cet exercice, on peut utiliser ces résultats **sans justification**.

```
(%i1) ode2('diff(y,t)+0.75*y=0.0015,y,t);
rat: replaced -0.0015 by -3/2000 = -0.0015
rat: replaced 0.75 by 3/4 = 0.75
rat: replaced -0.0015 by -3/2000 = -0.0015
rat: replaced 0.75 by 3/4 = 0.75
rat: replaced -0.0015 by -3/2000 = -0.0015
rat: replaced 0.75 by 3/4 = 0.75
```

(%o1) $y=\%e^{-\frac{3\,t}{4}}\left(\dfrac{\%e^{\frac{3\,t}{4}}}{500}+\%c\right)$

```
(%i2) expand(%);
```

(%o2) $y=\%c\,\%e^{-\frac{3\,t}{4}}+\dfrac{1}{500}$

```
(%i3) ic1(%, t=0, y=1/a);
```

(%o3) $y=\dfrac{\%e^{-\frac{3\,t}{4}}\left(a\,\%e^{\frac{3\,t}{4}}-a+500\right)}{500\,a}$

```
(%i4) define(N(t),1/rhs(%));
```

(%o4) $N(t):=\dfrac{500\,a\,\%e^{\frac{3\,t}{4}}}{a\,\%e^{\frac{3\,t}{4}}-a+500}$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

2. À quoi correspond l'entrée (%i3) ?

3. La sortie (%o4) donne une expression de $N(t)$. Montrer que l'on peut aussi écrire :

$$N(t)=\frac{500}{1+\left(\dfrac{500}{a}-1\right)e^{-\frac{3t}{4}}}.$$

4. Utiliser l'expression précédente pour déterminer la limite de $N(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Que signifie le résultat pour la population de paramécies ?

CORRIGÉ P. 356

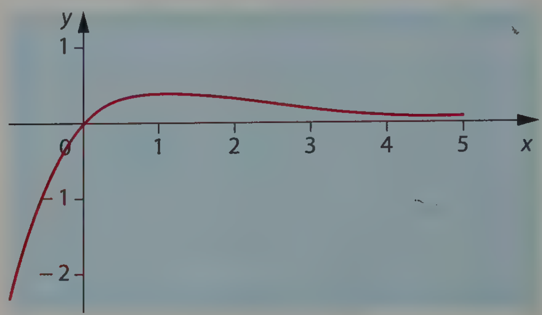
Un QCM pour le baccalauréat

43. +++

L'exercice suivant est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chaque proposition, choisir l'unique bonne réponse, sachant qu'une bonne réponse rapporte un point et que l'absence de réponse ou une réponse fausse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Aucune justification n'est demandée.

A. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.
La courbe représentative de f est tracée dans le repère ci-dessous :



1. Pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à :

a) $-e^{-x}$; b) e^{-x} ; c) $(1-x)e^{-x}$.

2. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation :

a) $y = x$; b) $y = 2x$; c) $y = -x$.

3. Une primitive F de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$;

b) $F(x)=-(1+x)e^{-x}$;

c) $F(x)=-xe^{-x}$.

4. La valeur de $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ est :

a) négative ; b) inférieure à 1 ; c) supérieure à 3.

B. Dans ce qui suit, C est une constante quelconque.
L'équation différentielle (E) : $2y' + y = 1$ a pour ensemble de solutions :

a) $x\mapsto C\,e^{-2x}-1$; b) $x\mapsto C\,e^{-\frac{1}{2}x}+1$; c) $x\mapsto C\,e^{-\frac{1}{2}x}-1$.

C. Soit $X(t)$ le nombre de bactéries présentes dans un milieu donné à l'instant t (exprimé en heures). On admet que la fonction X est solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' - (\ln 2)y = 0$.

1. L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

a) $X(t) = C\,e^{-(\ln 2)t}$;

b) $X(t) = -2t + C$;

c) $X(t) = C\,e^{(\ln 2)t}$.

2. À l'instant $t = 0$, il y a 10^4 bactéries. La fonction X cherchée est définie sur $[0, +\infty[$ par :

a) $X(t) = 10^4\,e^{-(\ln 2)t}$;

b) $X(t) = -2t + 10^4$;

c) $X(t) = 10^4\,e^{(\ln 2)t}$.

3. On peut estimer la population de bactéries, arrondie à la centaine, au bout de 2 heures 30 minutes à :

a) 56 600 ; b) 23 000 ; c) 49 200.

CHAPITRE 8

Statistique à deux variables

DANS CE CHAPITRE ON PROPOSE D'UTILISER LES SÉRIES STATISTIQUES À DEUX VARIABLES POUR ÉTABLIR DES PRÉVISIONS DANS LE DOMAINE DES BIOTECHNOLOGIES, DE LA SANTÉ, DE LA DÉMOGRAPHIE, DE L'ÉCONOMIE...

CAPACITÉS

- Représenter graphiquement un nuage de points et déterminer le point moyen.
- Trouver un ajustement affine selon la méthode des moindres carrés.
- Utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler.

Cours

1 Tableaux de données, nuages de points

Ce lien n'est pas nécessairement une relation de cause à effet. Ainsi on observe que la vente des crèmes solaires est liée à celle des crèmes glacées sans qu'aucune des deux soit la cause ou la conséquence de l'autre ; toutes deux sont des conséquences d'un autre phénomène : l'ensoleillement.

On observe que, dans certains cas, il semble exister un lien entre les deux caractères d'une **série statistique à deux variables**, par exemple entre le poids et la taille d'un nouveau-né, entre les maxima de tension artérielle et l'âge d'une population, entre la consommation et la vitesse d'une voiture…

Il est alors intéressant d'étudier simultanément deux caractères d'une même population. Nous pouvons alors présenter les résultats sous forme de tableaux ou de graphique.

A. Tableaux de données

Exemple 1

Le tableau suivant donne, dans une population féminine, la moyenne de la tension artérielle maximale en fonction de l'âge.

Âge en années : x_i	36	42	48	54	60	66
Tension maximale : y_i	11,8	13,2	14	14,4	15,5	15,1

Exemple 2

Pour un certain type de véhicules sanitaires, roulant en palier (ou en descente), on a relevé les consommations moyennes et les vitesses correspondantes suivantes :

Vitesse en km/h : x_i	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Consommation en ℓ/100 km : y_i	16,5	11,5	9,0	7,5	6,8	6,6	7,0	7,5	9,0

B. Nuages de points

Le plan étant muni d'un repère, nous pouvons associer au couple (x_i, y_i) de la série statistique double, le point M_i de coordonnées x_i et y_i.

L'ensemble des points M_i obtenus constitue le **nuage de points représentant la série statistique**.

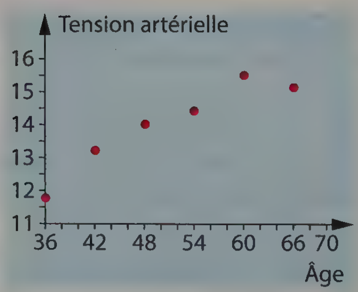


Figure 1

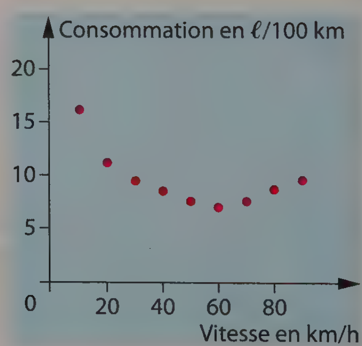


Figure 2

Dans les exemples 1 et 2, nous obtenons les nuages des figures 1 et 2. Le nuage étant dessiné, on peut essayer de trouver une fonction f telle que la courbe d'équation $y = f(x)$ « passe le plus près possible » des points du nuage.

C'est le **problème de l'ajustement**.

Dans l'exemple 1 (figure 1), on peut penser qu'en première approximation, une droite $\mathscr{D}$ peut être tracée au voisinage de ces six points. On dit alors que l'on a un **ajustement affine**.

Une fonction **affine** est définie par $f(x) = ax + b$ et a pour représentation graphique une droite. Une **parabole** est la courbe représentative d'une fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dans l'exemple 2 (figure 2), un ajustement affine ne convient pas ; on peut penser à « approcher » le nuage par une parabole.

On peut trouver des nuages dont les points sont dispersés de façon quelconque, notamment lorsqu'il n'existe aucun lien entre x_i et y_i : par exemple, x_i est la taille de y_i le nombre de frères et sœurs, d'un groupe d'individus.

C. Point moyen

Lorsqu'on pense pouvoir réaliser un ajustement affine d'un nuage, il peut sembler intéressant, avant de tracer la droite, de placer le point dont l'abscisse est la moyenne $\overline{x}$ des abscisses x_i et l'ordonnée, la moyenne $\overline{y}$ des ordonnées y_i.

DÉFINITION

On appelle **point moyen** d'un nuage de n points M_i de coordonnées (x_i, y_i) le point G de coordonnées : $x_G = \overline{x}$ et $y_G = \overline{y}$.

Exemple

Vérifier que, dans l'exemple 1 ci-dessus, le point moyen G a pour coordonnées : (51, 14).

2 Ajustement affine par une méthode graphique

On reprend le nuage de points de l'exemple 1. On se propose, à partir des tensions artérielles obtenues d'estimer les tensions artérielles pour d'autres âges.

Un moyen d'y parvenir est de tracer « au jugé » une droite $\mathscr{D}$ passant le plus près possible des points du nuage et d'admettre que les tensions y_i et les âges x_i sont liés par l'équation de $y = ax + b$ de $\mathscr{D}$.

On peut utiliser une règle transparente et la disposer suivant la direction constatée, en s'efforçant de répartir de façon équilibrée les points de part et d'autre comme sur la figure suivante.

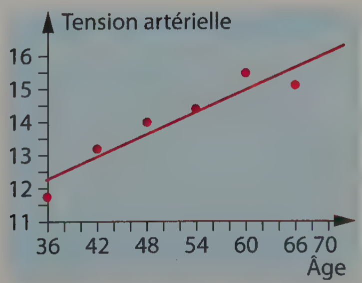


Figure 3

Exemple

Expliquer pourquoi on peut estimer la moyenne de la tension artérielle maximale pour une personne de 70 ans à 16,1.

Remarque

Aucun calcul n'est nécessaire.

La méthode graphique ci-dessus a l'avantage de sa simplicité apparente et de sa rapidité ; en revanche chaque utilisateur de cette méthode peut tracer une droite différente, ce qui peut poser le problème du choix entre plusieurs propositions.
Pour surmonter cette difficulté, sans introduire de longs calculs à la main, d'autres méthodes ont été mises en œuvre avant l'apparition d'outils de calcul performants.
Avec les calculatrices et les tableurs-grapheurs actuels, les calculs nécessaires à la mise en œuvre d'une méthode débouchant sur la meilleure droite possible suivant certains critères sont programmés : il suffit d'entrer les valeurs numériques des données pour obtenir une équation et le tracé de cette droite dans le repère choisi. **C'est là méthode retenue par le programme de Terminale STL – Biotechnologies.**

3 Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

Une entreprise fabriquant du matériel pour les laboratoires s'intéresse au lien entre ses dépenses publicitaires et son chiffre d'affaires : elle recueille les données suivantes, exprimées en millions d'euros, portant sur cinq périodes où les dépenses publicitaires sont notées $d_1, d_2, \ldots, d_5$ et les chiffres d'affaires $c_1, c_2, \ldots, c_5$.

i est un nombre entier tel que $1 \leq i \leq 5$.

Dépenses publicitaires : d_i	0,5	2,0	2,9	4,5	5,6
Chiffres d'affaires : c_i	35	37	75	92	90

$M_1(0,5\ ;\ 35)$
$M_2(2\ ;\ 37)$
…
$M_5(5,6\ ;\ 90)$

Reprenons ces données par cinq points M_i dans un repère où les dépenses publicitaires sont en abscisse et les chiffres d'affaires en ordonnée (figure 4) : $x_i = d_i$ et $y_i = c_i$.

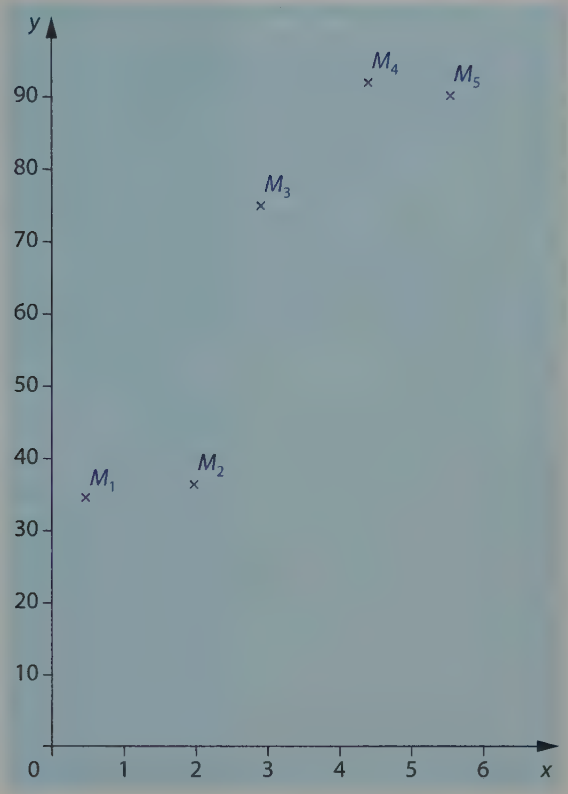


Figure 4

Ce nuage de cinq points semble suffisamment allongé pour justifier un ajustement affine et le problème est de déterminer quelle droite est susceptible de remplacer « au mieux » ce nuage de points.

Pour trouver cette droite, nous allons indiquer les critères utilisés en nous appuyant, dans cette première approche, sur des observations graphiques et numériques.

Première condition

$\bar{x} = \dfrac{0,5+2+2,9+4,5+5,6}{5}$,
de même pour $\bar{y}$.

Les coordonnées du point moyen G du nuage de cinq points M_i sont $\bar{x} = 3,1$ et $\bar{y} = 65,8$.

La figure 5 complète la figure 4 avec le point G et deux droites $\mathscr{D}$ et Δ passant par G : la droite $\mathscr{D}$ semble passer « au plus près » du nuage de points, ce qui n'est pas le cas de la droite Δ.

Remarque

Δ est la lettre grecque majuscule « delta ». Les points M_i semblent répartis de façon équilibrée au-dessus et au-dessous de la droite $\mathscr{D}$. Nous allons préciser comment la droite $\mathscr{D}$ a été obtenue.

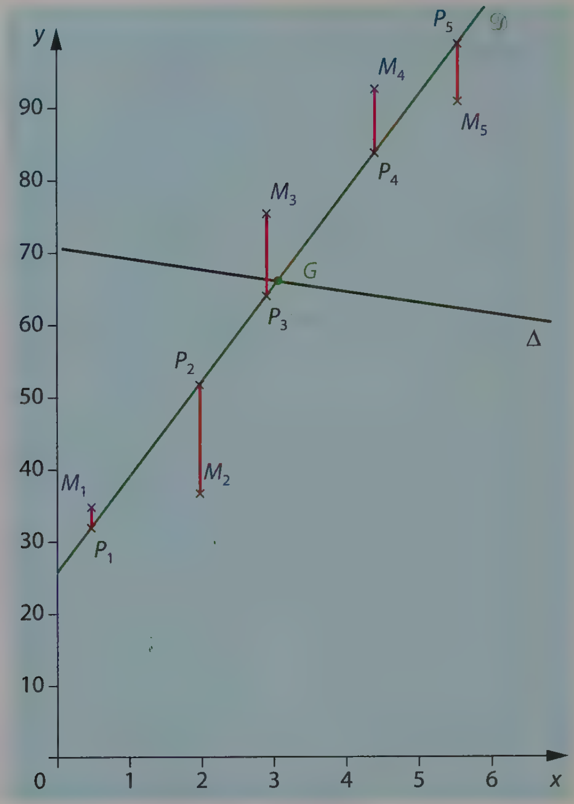


Figure 5

> Les cinq segments M_iP_i matérialisant ces écarts (sans leur signe) sont représentés sur la figure 5.

Pour mesurer l'écart entre chaque point M_i du nuage et la droite $\mathcal{D}$, nous avons privilégié l'axe des ordonnées : en notant P_i le point de même abscisse que M_i et situé sur la droite $\mathcal{D}$, cet écart est mesuré par la différence des ordonnées de M_i et P_i, c'est-à-dire $y_{M_i} - y_{P_i}$.

Cet écart est positif pour M_1, M_3 et M_4 qui sont situés au-dessus de la droite $\mathcal{D}$; il est négatif pour M_2 et M_5 situés au-dessous de $\mathcal{D}$.

> Faites-le !

Sur la figure 5, mesurons, en mm, chacun de ces cinq écarts et faisons leur somme en tenant compte du signe de chacun.

> Pour conclure, il faut tenir compte de la précision des mesures.

Que constatons-nous ?

Reprenons les mêmes mesures et le même calcul en remplaçant la droite $\mathcal{D}$ par la droite Δ.

> Attention : les points P_i ont changé !

Que constatons-nous ?

Nous pouvons multiplier les exemples en utilisant un tableur-grapheur.

Nous observons ainsi, dans des cas particuliers, une propriété générale que nous admettons ici.

CONCLUSION

Étant donné un nuage de points $M_i(x_i, y_i)$, une droite est telle que la somme des écarts $y_{M_i} - y_{P_i}$ est nulle si et seulement si cette droite passe par le point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$ du nuage.

> $y_i = y_{M_i}$
> P_i est défini ci-dessus (figure 5). Le cas particulier de la droite passant par G et parallèle à l'axe des ordonnées est exclu.

Remarques

• Il y a donc une infinité de droites satisfaisant à la condition : la somme des écarts $y_{M_i} - y_{p_i}$, est nulle.

• Cette conclusion est à rapprocher du résultat obtenu en première en introduisant des indicateurs de dispersion pour les séries statistiques à une variable :
$(x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + \ldots + (x_n - \overline{x}) = 0.$

• Pour distinguer parmi les droites passant par G celle qui paraît la « mieux » située par rapport au nuage de points, nous allons ajouter une seconde condition qui correspond au point de vue adopté en première pour introduire la variance et l'écart type : on considère la somme des **carrés** des écarts dont tous les termes sont positifs.

Dans les deux cas une somme est nulle par compensation entre des écarts positifs et des écarts négatifs.

Un carré est toujours positif.

Seconde condition

Cherchons, parmi les droites passant par G, celles pour lesquelles la somme des carrés des écarts $(y_{M_i} - y_{p_i})^2 = P_iM_i^2$ est minimum.

Nous pouvons commencer par observer que, pour la droite $\mathscr{D}$ de la figure 5, la somme $P_1M_1^2 + P_2M_2^2 + \ldots + P_5M_5^2$ est plus petite que la somme analogue pour la droite Δ.

Nous pouvons ensuite, à l'aide d'un tableur-grapheur, effectuer une recherche numérique illustrée graphiquement en multipliant les exemples de droites passant par G et en calculant dans chaque cas $P_1M_1^2 + P_2M_2^2 + \ldots + P_5M_5^2$.

On démontre le résultat suivant que nous admettons.

Nous ne savons pas *a priori* si une telle droite est unique.

Faites-le !
Les points P_i ne sont pas les mêmes pour $\mathscr{D}$ et pour Δ.

THÉORÈME

Étant donné un nuage de n points M_i, il existe une droite unique passant par le point moyen G du nuage telle que la somme des carrés des écarts (ou **résidus**) $P_1M_1^2 + P_2M_2^2 + \ldots + P_mM_m^2$ soit minimale.

DÉFINITION

Cette droite s'appelle la **droite de régression de y en x**.

Les points P_i sont définis ci-dessus (figure 5).
Ces écarts sont aussi appelés **résidus**.
La propriété de cette droite explique le nom de la méthode « **des moindres carrés** ».

Exemple

La droite d de la figure 5 est la droite de régression de y en x du nuage des cinq points M_i.

• **Équation de la droite de régression de y en x**
La droite de régression de y en x d'un nuage de points a une équation $y = ax + b$ où les valeurs des coefficients a et b sont obtenues à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

• **Exemple d'exploitation d'une droite de régression**
À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, on obtient pour la droite $\mathscr{D}$ de la figure 5 les valeurs suivantes arrondies au millième : $a = 12{,}768$ et $b = 26{,}219$.
La droite $\mathscr{D}$ a donc pour équation : $y = 12{,}768x + 26{,}219$.

Or, pour la droite de régression $\mathscr{D}$ de y en x, nous avons porté les dépenses publicitaires d en abscisse et les chiffres d'affaires c en ordonnée.

Donc $c = 12{,}768d + 26{,}219$.

Cette relation nous permet d'estimer, par exemple, le montant du chiffre d'affaires associé à des dépenses publicitaires $d = 3{,}5$ où d et c sont exprimés en millions d'euros.

Voir le TP1 pour les calculatrices et la fiche technique tableur à la fin du TP3.

La formule donnant le coefficient directeur a de la droite de régression $\mathscr{D}$ est introduite en section de technicien supérieur.

Voir le début du paragraphe 3 : $x_i = d_i$ et $y_i = c_i$.

Il s'agit d'une estimation numérique liée à la fonction affine $x \mapsto 12{,}768x + 26{,}219$ dont la représentation graphique est la droite $\mathscr{D}$.

Il s'agit alors d'une estimation graphique liée à la représentation graphique $\mathcal{D}$ de cette même fonction affine.

Dans ce cas l'estimation est obtenue par **extrapolation** en supposant que la tendance observée se poursuit pour des chiffres d'affaires plus élevés.

$c = 12{,}768 \times 3{,}5 + 26{,}219$.
$c \approx 70{,}907$.
Graphiquement nous pouvons observer sur la figure 5 que le point de la droite $\mathcal{D}$ dont l'abscisse est 3,5 a une ordonnée voisine de 70,9.
De même nous pouvons estimer le montant des dépenses publicitaires associées au chiffre d'affaires $c = 7$, soit par le calcul, soit graphiquement en prolongeant le segment de droite de la figure 5.

Il existe de même une « droite de régression de x en y »

Remarques

• **Séries chronologiques**
Le nombre de malades atteints d'une pathologie rare, dans un département, pendant 9 trimestres consécutifs, est donné dans le tableau suivant.

Rang du trimestre : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de malades : y_i	270	265	255	273	285	295	318	320	320

Une telle série statistique, où l'une des variables est le temps est une **série chronologique**.
Si l'une des deux variables est le temps, on peut chercher à mettre en évidence une évolution.
On peut traiter comme des séries statistiques à deux variables les **séries chronologiques** qui concernent un seul caractère dont les valeurs sont relevés à des dates différentes (températures, effectifs d'une population…).
Dans ce cas x_i peut être le rang d'un trimestre, d'une année…

• En terminale STL-Biotechnologies la forme allongée d'un nuage de points suffit pour envisager un ajustement affine.

RÉPONSES P. 357

TP 1 Trouver un ajustement affine à l'aide de la calculatrice

LOGICIEL UTILISÉ

Calculatrice

Demande de matériel de laboratoire

On se propose d'ajuster le nuage de points (x_i, y_i) suivant.

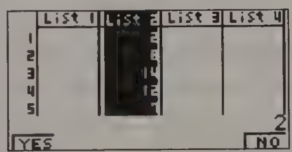
Une enquête du service commercial d'un fabriquant de matériel pour le laboratoire a permis de connaître l'évolution de la demande y_i d'unités d'un certain matériel, selon le prix x_i auquel il est proposé :

Prix TTC en euros : x_i	Demande mensuelle : y_i
80	540
100	452
120	335
140	188
160	120
180	68
200	18

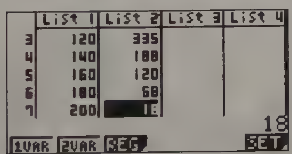
1. Procédure d'ajustement affine sur une calculatrice.

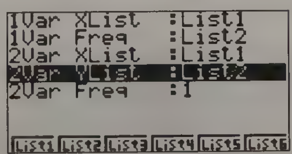
Calculatrice de marque CASIO

On entre dans le menu de statistique en faisant MENU STAT EXE puis on procède à l'**effacement** éventuel des données présentes dans les listes en se plaçant dans une colonne puis en faisant DEL A YES EXE (appuyer sur F6 en cas d'icône caché).



Ensuite, on **entre les valeurs** x_i en colonne List 1 et les valeurs y_i en colonne List 2.





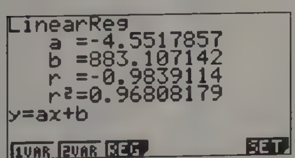
Le **réglage des listes** s'effectue par CALC SET puis :

2Var X List : List 1

2Var Y List : List 2

2 Var Freq : 1   EXE.

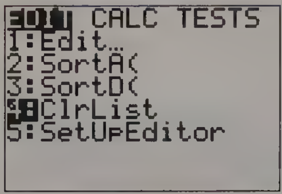
L'affichage des **résultats** de la « régression linéaire » (ajustement affine), se fait par REG X.

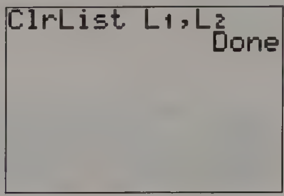


Vous devez obtenir un affichage semblable à celui montré ci-dessus.

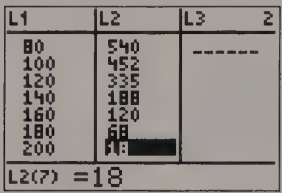
Calculatrice de marque Texas Instruments (instructions en français en bleu) :

On entre dans le menu de statistique en appuyant sur la touche STAT ou stats puis on procède à l'**effacement** éventuel des données présentes dans les listes en faisant EDIT 4:ClrList ENTER L_1, L_2 ou 4:EffListe entrer L_1, L_2 (on obtient L_1 et L_2 au clavier par la touche 2nd ou 2nd).

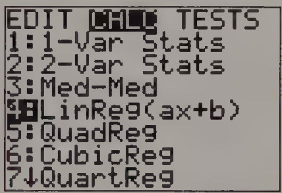


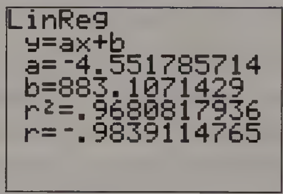


Pour **saisir les données**, on fait STAT EDIT 1: Edit ENTER ou 1:Edite entrer puis on entre les valeurs x_i en colonne L_1 et les valeurs y_i en colonne L_2.



L'affichage des **résultats** de la « régression linéaire » (ajustement affine), se fait par STAT CALC 4:LinReg(ax+b) ENTER L_1, L_2 ou stats CALC 4 :RegLin(ax+b) entrer L_1, L_2.





Vous devez obtenir un affichage semblable à celui montré ci-dessus.

2. Utiliser les résultats affichés par votre calculatrice pour donner une expression du type $y = ax + b$ de la demande mensuelle en fonction du prix. On donnera des valeurs approchées des coefficients a et b arrondies à 10^{-2}.

3. Utiliser le résultat de la question précédente pour évaluer la demande lorsque le prix proposé est 130 €.

TP 2

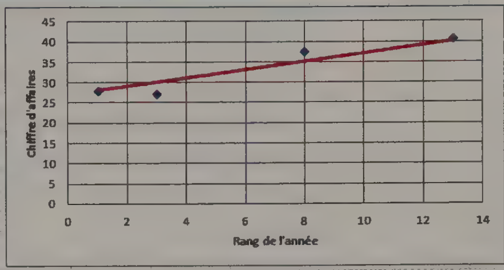
Observer, à l'aide du tableur, le caractère minimal de la somme des carrés des écarts

LOGICIEL UTILISÉ
Tableur

Chiffre d'affaires d'un grand laboratoire

Ouvrir le fichier « **moindres_carres.xls** » ou « **moindres_carres.ods** », donnant le chiffre d'affaires, en milliards d'euros, d'un grand laboratoire.

	A	B	C	D	E	F
1	Année	Rang de l'année	Chiffre d'affaires en milliards d'euros	y = ax + b	Ecarts verticaux	Ecarts au carré
2	2000	1	28	28,125	-0,125	0,015625
3	2002	3	27,2	30,125	-2,925	8,555625
4	2007	8	37,6	35,125	2,475	6,125625
5	2012	13	40,7	40,125	0,575	0,330625
6					Somme	15,0275
7	Moyennes	6,25	33,375			
8	a =	1				
9	b =	27,125				
10						
11						
12						



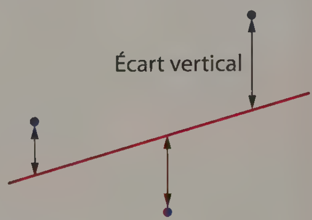
On recherche une droite d'équation $y = ax + b$, passant par le point moyen et ajustant « au mieux » le nuage des quatre années données.

A. Principe des « moindres carrés »

1. Dans quelles cellules sont calculées les coordonnées $(\overline{x} ; \overline{y})$ du point moyen ?

2. Puisque la droite passe par le point moyen, on a $b = \overline{y} - a\overline{x}$. Expliquer la formule entrée en B9.

3. La colonne E contient les écarts verticaux entre les points du nuage et les points correspondants de la droite. La colonne F contient les carrés de ces écarts.



Pourquoi la somme des écarts contenus en colonne E ne permet-elle pas de savoir si la droite est proche des points du nuage et quel est l'avantage de considérer la somme des écarts au carré ?

4. Modifier en B8 la première décimale du coefficient directeur a de la droite (prendre 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ...) de sorte à obtenir en F6 une somme des écarts au carré minimale (observer en même temps la droite sur le graphique). Quel est, à 10^{-1} près, le coefficient a optimal ?

B. Comparaison avec l'ajustement du tableur

Le tableur peut afficher directement la droite d'ajustement obtenue selon le principe précédent des « moindres carrés ». Sur le graphique, cliquer sur un point du nuage situé à l'écart de la droite à l'aide du bouton droit de la souris et choisir « Courbe de tendance... » Dans la boîte de dialogue, choisir « Linéaire » et cocher « Afficher l'équation ».

1. Quelle est l'équation de la droite d'ajustement donnée par le tableur ?

2. Comparer au résultat obtenu à la question **A.4.**

TP 3 Ajuster un grand nombre de données

LOGICIELS UTILISÉS
GeoGebra
Tableur

Capacité de production éolienne

Ouvrir le fichier « **prod_eolienne.xls** » ou « **prod_eolienne.ods** » fournissant la capacité de production éolienne de 76 pays de 2001 à 2010 (Source : EWEA).

A. Étude de la capacité de production française

1. Sélectionner les données de la France (ou utiliser le filtre « Pays »), puis représenter le nuage de points correspondant.

Pourquoi un ajustement affine a-t-il ici peu de sens ?

2. Montrer, à l'aide du tableur, qu'en ne retenant que les années de 2005 à 2010 (rangs 5 à 10), on peut ajuster la production française par la droite d'équation $y = 839x - 4\,114$.

3. En supposant que cette tendance se maintienne, estimer la production française en 2012 (rang $x = 12$).

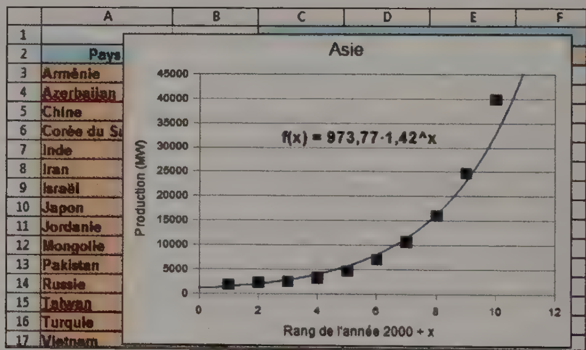
B. Comparaison de l'Europe et de l'Asie

• À l'aide du filtre, sélectionner les données des pays d'Europe, les copier, puis les coller sur une nouvelle feuille.

1. Calculer, pour chaque année, la production totale des pays européens.

2. Effectuer un ajustement affine de la production en Europe de 2001 à 2010 (afficher l'équation).

3. À l'aide de l'équation $y = 6\,815x + 3\,391$, estimer la production européenne en 2012 (rang $x = 12$).



• À l'aide du filtre, copier les données des pays d'Asie, puis les coller sur une nouvelle feuille.

4. Calculer, pour chaque année, la production totale des pays asiatiques.

5. Un ajustement affine de la production en Asie de 2001 à 2010 est-il justifié ?

6. Le tableur permet d'ajuster le nuage à l'aide d'une « courbe de tendance exponentielle ». En utilisant la formule $973{,}77 \times 1{,}42 \,^\wedge\, x$ (le symbole ^ indique la puissance), estimer la production asiatique en 2012 (rang $x = 12$).

Fiche technique tableur

Calculs statistiques à deux variables

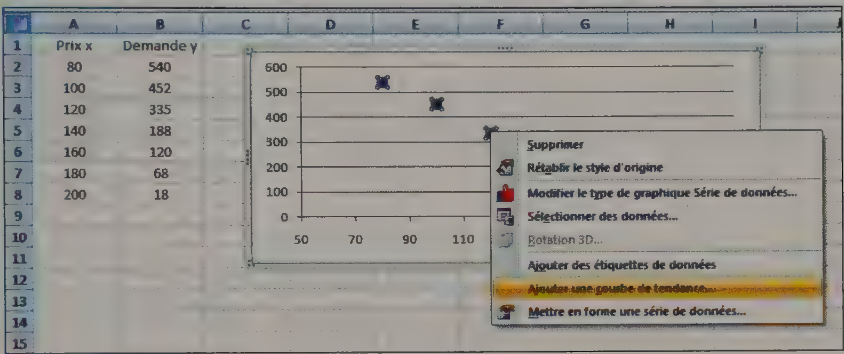
Ajustement graphique

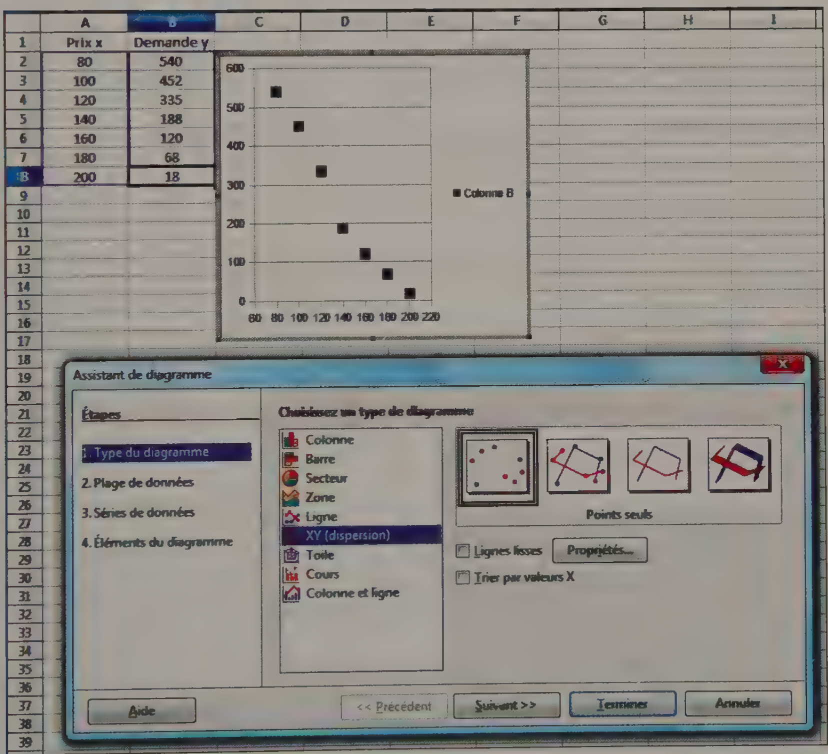
Pour représenter le nuage de points, on **sélectionne** la plage de cellules contenant les données statistiques (x_i, y_i) puis :

– avec **Excel 2003**, on clique sur l'icône de l'**Assistant graphique** et on choisit **Nuage de points**, premier sous-type ;

– avec **Excel 2007**, on choisit **Insertion/Nuage de points** ;

– avec **OpenOffice Calc**, on clique sur l'icône **Diagramme** puis on choisit **XY (dispersion)**.





Pour obtenir une droite d'ajustement selon les moindres carrés, on clique avec le bouton droit sur l'un des points du nuage et on choisit (clic gauche) **Ajouter une courbe de tendance...** avec Excel ou **Insérer une courbe de tendance...** avec Calc.

Dans la boîte de dialogue, on sélectionne **Linéaire** et on coche la case **Afficher l'équation sur le graphique**.

Fonctions d'ajustement linéaire

Le tableur est pourvu de fonctions réalisant un ajustement affine sans nécessiter un graphique.

DROITEREG

Cette fonction calcule les coefficients a et b de l'équation $y = ax + b$ selon la méthode des moindres carrés.

Il s'agit d'une « fonction matricielle » dont la validation est particulière et ne s'effectue pas simplement par la touche ENTREE. Il faut d'abord ***sélectionner*** deux cellules vides côte à côte puis écrire la formule et enfin valider en enfonçant les deux touches CTRL et ⇧ (majuscule) puis en faisant ENTREE.

La syntaxe est =DROITEREG(plage des y donnés ; plage des x donnés ; VRAI ; FAUX) .

Des accolades { et } s'ajouteront après validation pour montrer qu'il s'agit d'une fonction matricielle. Les valeurs de a et b s'affichent dans les deux cellules prévues à cet effet.

Si l'on veut éviter l'usage d'une « fonction matricielle », on peut obtenir a et b par les deux fonctions suivantes.

PENTE

Cette fonction fournit le coefficient directeur a de la droite d'ajustement de y en x selon les moindres carrés.

La syntaxe est =PENTE(plage des y donnés ; plage des x donnés).

Dans l'exemple précédent, =PENTE(B2:B8;A2:A8) affiche la valeur – 4,55178571.

ORDONNEE.ORIGINE

Cette fonction fournit l'ordonnée à l'origine b de la droite d'ajustement de y en x selon les moindres carrés.

La syntaxe est =ORDONNEE.ORIGINE(plage des y donnés ; plage des x donnés).

Dans l'exemple précédent, =ORDONNEE.ORIGINE(B2:B8;A2:A8) affiche la valeur 883,107143.

PREVISION

Cette fonction calcule la valeur de y correspondant à une valeur x donnée selon l'équation $y = ax + b$ de la droite d'ajustement de y en x selon la méthode des moindres carrés.

La syntaxe est =PREVISION(valeur de x ; plage des y connus ; plage des x connus).

Dans l'exemple précédent, =PREVISION(130;B2:B8;A2:A8) affiche le résultat 291,375.

TENDANCE

Cette fonction a le même rôle que la précédente lorsque la valeur de x pour laquelle on souhaite évaluer y est contenue dans une cellule.

Par exemple =TENDANCE(B2:B8;A2:A8;A14) affiche 291,375 lorsque la valeur 130 de x est contenue en cellule A14.

TP 4 Exploiter un ajustement affine pertinent

Ce TP peut permettre d'évaluer des capacités mathématiques développées grâce aux TICE.

LOGICIEL UTILISÉ
Tableur

Âge, taille et poids : ajustement affine

A. Étude d'un échantillon

On dispose des données suivantes concernant un échantillon de 20 hommes : âges t_i en années, tailles x_i en mètres, poids y_i en kg (en physique, on parle de masses).

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Âge : t_i	22	26	33	35	38	40	42	42	43	44	45	48	49	50	51	53	56	61	64	75
Taille : x_i	1,82	1,71	1,72	1,75	1,77	1,97	1,94	1,76	1,68	1,98	1,79	1,82	1,8	1,87	1,72	1,65	1,9	1,81	1,75	1,68
Poids : y_i	75	66	64,4	74,2	70,5	93,2	90,4	71,5	59,8	95,2	73,1	74,2	71	82,8	75,4	68,7	75,1	73	82,6	64

On peut trouver ces données sur le fichier « **lorentz.xls** » ou « **lorentz.ods** » .

On souhaite examiner de quelle manière le poids est lié à l'âge et à la taille.

1. Représenter avec un tableur les nuages des points $M_i(t_i, y_i)$ et $N_i(x_i, y_i)$.

2. D'après l'aspect de ces deux nuages, peut-on considérer que, sur cet échantillon, le poids est lié à l'âge ? Que le poids est lié à la taille ?

Appelez le professeur pour présenter votre démarche et votre réponse.

3. Effectuer un ajustement affine du nuage de points $N_i(x_i, y_i)$ à l'aide du tableur. Donner une équation de la droite obtenue.

4. Selon la tendance observée sur cet échantillon, estimer le poids d'un homme mesurant 1,85 m.

B. Formule de Lorentz

La formule de Lorentz donne le poids moyen selon la taille :

$$\text{poids} = 100 \times \left(\text{taille} - 1 - \frac{\text{taille} - 1{,}5}{a}\right).$$

(Taille en mètres ; poids en kg ; $a = 4$ pour un homme ; $a = 2{,}5$ pour une femme.)

1. Que fournit la formule pour un homme de 1,85 m ? Une femme de 1,73 m ?

2. Cette formule a-t-elle un sens appliquée à un petit garçon de 80 cm ?

3. Montrer que, dans les cas des hommes, la formule de Lorentz peut s'écrire sous la forme $y = 75x - 62{,}5$ où x désigne la taille en m et y le poids en kg.

4. Calculer y pour $x = 1{,}85$ et comparer au résultat de la question **A.4.**.

Appelez le professeur pour présenter votre démarche et votre réponse.

Exercices

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE	Exercices corrigés	Exercices non corrigés
Représenter graphiquement un nuage de points Déterminer le point moyen du nuage	6, 15	3, 5, 7, 8, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 27
Trouver un ajustement affine par la méthode des moindres carrés	2, 4, 6, 15, 18, 26	1, 5, 7, 8, 12, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27
Utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler	2, 4, 6, 15, 18, 26	3, 5, 7, 8, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27
Réaliser un ajustement affine après un changement de variable	18, 26	8, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 27
TICE Utiliser un tableur	10	9

Représenter graphiquement un nuage de points
Trouver un ajustement affine par la méthode des moindres carrés
Utiliser un ajustement affine

1. + **Retrouver à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur l'équation de la droite d'ajustement qui est donnée**

Dans chacun des cas suivants, on donne une série statistique double à l'aide d'un tableau. On demande de retrouver à chaque fois, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, l'équation, qui est donnée, de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés.

▶ **Conseil :** *Pour l'utilisation de la calculatrice, on peut se reporter au TP1 de ce chapitre.*

a)

x	0	1	2	3	4
y	7,204	6,23	5,429	4,357	3,555

Une équation de la droite d'ajustement de y en x, sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont arrondis à 10^{-2} est : $y = -0{,}92x + 7{,}19$.

b)

x	1	2	3	4	5	6
y	25,33	24,43	18,17	15,06	10,76	5,52

Une équation de la droite d'ajustement de y en x, sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont arrondis à 10^{-2} est : $y = -4{,}09x + 30{,}86$.

c)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,609	2,015	2,219	2,398	2,907	3,114	3,434	3,761

Une équation de la droite d'ajustement de y en x, sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont arrondis à 10^{-3} est : $y = 0{,}302x + 1{,}324$.

2. ++ **Déterminer un ajustement affine pour extrapoler**

Le tableau suivant donne l'évolution des ventes de lait, en hectolitres, dans une région, pendant cinq années consécutives.

Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5
Volume des ventes en hectolitres : y_i	114 671	114 772	114 394	115 621	116 321

1. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = ax + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-1}.

2. À l'aide de l'équation précédente, estimer le volume des ventes l'année de rang 6. Arrondir à l'unité.

CORRIGÉ P. 358

3. ++ **Représenter un nuage de points et extrapoler**

Le tableau suivant représente l'évolution du chiffre d'affaires d'un petit laboratoire de biologie médicale pendant dix années consécutives.

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre d'affaires : y_i (en milliers d'euros)	110	130	154	180	191	210	240	245	270	295

1. Construire le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal. En abscisses, on prendra 2 cm pour une année. En ordonnées, on prendra 1 cm pour 20 000 €.

2. Déterminer, en pourcentage, l'augmentation du chiffre d'affaires entre les années de rang 0 et de rang 9 (on arrondira à 1 % près par excès).

3. Soit G le point moyen du nuage. Calculer les coordonnées du point G.

4. La répartition des points du nuage montre qu'il est judicieux de procéder à un ajustement affine.

On prend la droite Δ d'équation $y = 20x + 112{,}5$ comme droite d'ajustement affine du nuage.

Vérifier que G appartient à la droite Δ et tracer cette droite sur le graphique.

5. En admettant que l'évolution continue au même rythme et en utilisant l'ajustement affine, quel chiffre d'affaires peut-on attendre pour l'année de rang 12 ?

4. ++ Pour préserver l'environnement

Dans cette partie, on s'intéresse aux dépenses engendrées par la gestion des déchets dans un pays de l'Union européenne.

Le tableau ci-dessous présente les données pendant six années consécutives.

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6
Dépense : y_i (en millions d'euros)	9 432	9 926	10 233	10 462	11 411	12 304	12 833

Le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) pour i variant de 0 à 6, est donné en annexe.

1. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de y en x (arrondir les coefficients au millième).

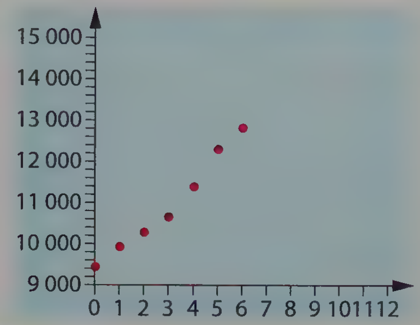
2. On décide d'ajuster le nuage avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 575{,}3x + 9\,214$.

a) Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique figurant sur l'annexe.

b) En utilisant cet ajustement affine, estimer la dépense engendrée par la gestion des déchets l'année de rang 10.

3. Au cours de quelle année, la dépense atteindra-t-elle 14 milliards d'euros ?

Annexe



CORRIGÉ P. 358

5. ++ Le nuage de points est donné (bis)

Le tableau ci-dessous donne la dépense médicale en soins hospitaliers, dans un pays de l'Union européenne, en milliards d'euros.

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Rang x_i	0	1	2	3	4	5
Dépense en soins hospitaliers en milliards d'euros y_i	47,6	52,7	54,8	58	64,3	67,1

Le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) avec $0 \leq i \leq 5$ est représenté ci-dessous, où la graduation en ordonnée débute à 40 milliards.

1. Déterminer les coordonnées, arrondies au dixième, du point moyen G.

Placer le point G sur le graphique.

2. On souhaite réaliser un ajustement affine.

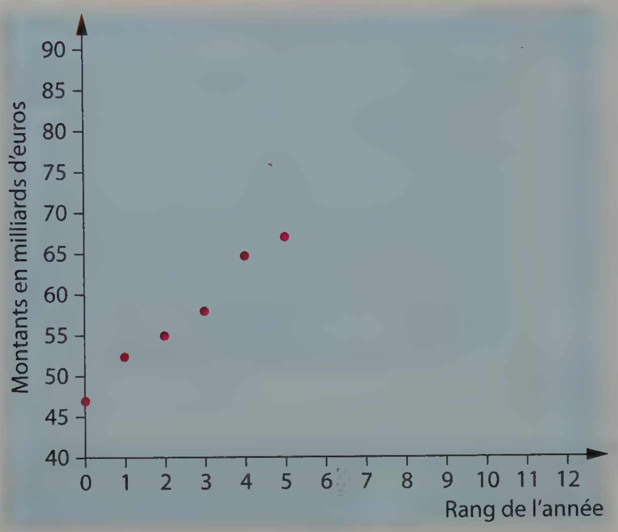
À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, déterminer une équation de la droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés. (Arrondir les coefficients à 10^{-2}).

À partir des calculs ci-dessus, on décide de réaliser un ajustement affine à l'aide de la droite $\mathcal{D}$ d'équation :

$y = 3{,}9x + 47{,}7$.

3. Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique.

4. En supposant que le modèle reste valable dans les trois années suivantes, prévoir la dépense en soins hospitaliers en 2015. Indiquer la méthode utilisée.



6. ++ Le site internet du laboratoire de recherches

Le tableau suivant donne le bilan des visites par des professionnels du site d'un laboratoire de recherches en biotechnologies.

Mois	Rand du mois : x_i	Nombre de visites : y_i
Janvier	1	130
Février	2	150
Mars	3	160
Avril	4	170
Mai	5	190
Juin	6	200
Juillet	7	220
Août	8	230
Septembre	9	250
Octobre	10	250
Novembre	11	270
Décembre	12	300

1. On considère la série statistique (x_i, y_i) donnée par le tableau ci-dessus.

Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) dans un repère orthogonal sur une feuille de papier millimétré à rendre avec la copie. On prendra pour unités graphiques : 1 cm pour un mois en abscisse, 1 cm pour 10 visites en ordonnée. L'axe des ordonnées sera gradué à partir de 100.

2. Calculer les coordonnées du point moyen G.

Placer le point G dans le repère précédent.

3. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au dixième.

Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans le repère précédent.

4. En supposant que le modèle précédent reste valide l'année suivante, donner par le calcul le mois au cours duquel le nombre de visiteurs dépasse 350.

CORRIGÉ P. 358

7. +++ Épidémie de grippe

Dans un lycée il y a 1 280 élèves.

Dès l'apparition des premiers symptômes de l'épidémie, l'infirmière du lycée relève pendant 8 jours le nombre d'élèves malades. Le tableau ci-dessous indique les résultats observés.

Numéro du jour	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'élèves grippés	2	5	9	14	17	23	27	31

1. Construire dans un repère orthogonal le nuage de points associés à cette série statistique. On prendra les unités suivantes : en abscisse, 2 cm pour 1 jour ; en ordonnée, 1 cm pour 2 élèves.

2. Calculer les coordonnées du point G du nuage et le placer sur le graphique.

3. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés sous la forme $y = ax + b$. Arrondir les coefficients a et b à 10^{-2}.

4. En utilisant cet ajustement, estimer à partir de combien de jours au moins 5 % des élèves du lycée seront atteints par la grippe.

Se ramener à un ajustement affine après un changement de variable

8. +++ On utilise la fonction logarithme népérien

On observe l'évolution d'une culture microbienne.

A. On note x le nombre de microbes à l'instant t, où t est exprimé en heures. Les mesures obtenues figurent dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'heures : t_i	2	3	4	5	6	8
Nombre de microbes exprimé en milliers : x_i	0,9	1,5	2,5	4	6,7	18

Construire le nuage de points de coordonnées (t_i, x_i) dans un repère orthonormé en prenant pour unité graphique 2 cm. Peut-on envisager un ajustement affine ? Justifier la réponse.

B. Le nuage de points $M_i(t_i, x_i)$ obtenu ne permet pas d'effectuer un ajustement affine satisfaisant. On pose alors $y = \ln x$.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous (arrondir les résultats à 10^{-2}).

Nombre d'heures : t_i	2	3	4	5	6	8
$y_i = \ln x_i$			0,92		1,90	

2. Construire le nuage de points N_i de coordonnées (t_i, y_i) dans un repère orthonormé en prenant comme unité graphique : 2 cm.

3. Calculer les coordonnés du point G de ce nuage (arrondir les coordonnés de G à 10^{-2}) et placer ce point G sur le graphique précédent.

4. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement affine D de la forme $y = ax + b$. Arrondir les coefficients a et b à 10^{-2}.

5. En utilisant le graphique, déterminer le temps nécessaire pour que la population atteigne 11 milliers d'individus *(on expliquera la démarche utilisée et on laissera les traits de construction apparents)*.

6. Déterminer par le calcul le nombre x de microbes présents dans le milieu de culture au bout de 10 heures *(arrondir au millier)*.

Utiliser un logiciel

9. +++ **Vitesse et sécurité routière avec le tableur** TICE

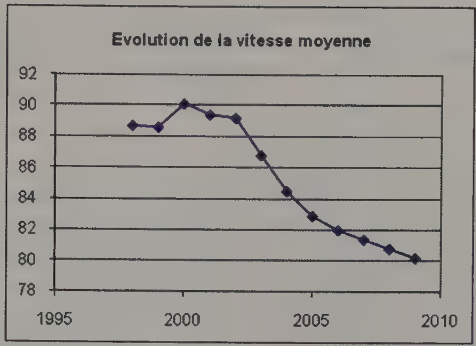
Le tableau suivant fournit la vitesse moyenne en km/h des véhicules légers et le nombre de morts sur les routes françaises de 1998 à 2009 (Source : ww.securite-routiere.fr).

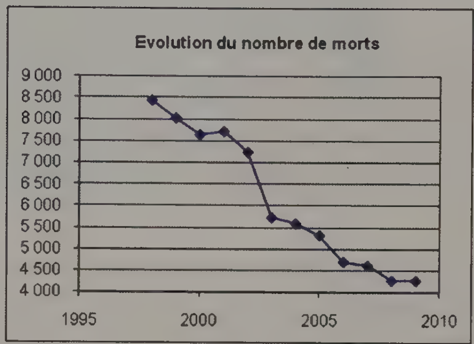
Année	Vitesse moyenne des VL : x_i	Nombre de morts : y_i
1998	88,7	8 437
1999	88,6	8 029
2000	90,1	7 643
2001	89,4	7 720
2002	89,2	7 242
2003	86,8	5 731
2004	84,5	5 593
2005	82,9	5 318
2006	82	4 709
2007	81,4	4 620
2008	80,8	4 275
2009	80,2	4 273

On peut obtenir ces données sur le fichier « vitesse_securite.xls » ou « vitesse_securite.ods ».

1. Comparer les graphiques ci-dessous, illustrant l'évolution de la vitesse moyenne et du nombre de morts.

Quelle hypothèse peut-on en déduire entre la vitesse moyenne et le nombre de morts ?





2. a) Représenter avec un tableur le nuage de points $M_i (x_i, y_i)$ correspondant à la série statistique des vitesses moyennes des véhicules légers et du nombre de morts.

b) L'examen du nuage de points précédent confirme-t-il l'hypothèse faite au **1.** ?

Peut-on envisager un ajustement affine du nombre de morts en fonction de la vitesse moyenne ?

3. a) À l'aide du tableur, donner une équation d'une droite d'ajustement du nuage de points $M_i (x_i, y_i)$.

b) Estimer le nombre de vies qui pourraient être sauvées par rapport aux 4 273 morts de 2009, si la vitesse moyenne baissait à 78 km/h.

▶ *Les accidents de la route sont la première cause de mortalité chez les jeunes de 10 à 24 ans dans le monde. L'accident type auquel les jeunes sont confrontés est une perte de contrôle dans un virage à cause de la vitesse.*

10. +++ **Ça chauffe ! avec le tableur** TICE

Ouvrir le fichier « **temp_globale.xls** » ou « **temp_globale.ods** » du CD-Rom qui fournit, de 1880 à 2009, la différence en °C de la température moyenne annuelle globale sur Terre par rapport à la moyenne de la période 1951-1980 (Source : Goddard Institute for Space Studies – NASA).

1. Effectuer un ajustement affine du nuage de points. Quelle est l'équation affichée par le tableur ?

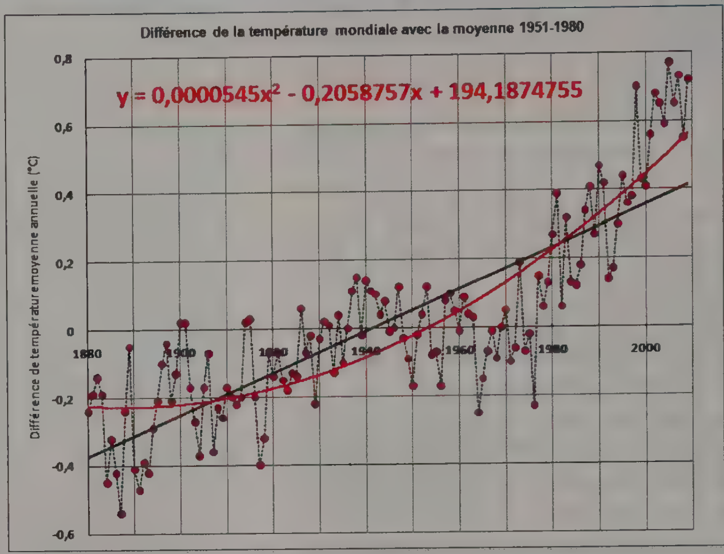
2. Le tableur Excel fournit un ajustement par une parabole d'équation :

$y = 0{,}000\,054\,5x^2 - 0{,}205\,88x + 194{,}19.$

Température globale mondiale

Source : Goddard Institute for Space Studies - NASA

Année	Différence de la moyenne annuelle
1880	-0,24
1881	-0,19
1882	-0,14
1883	-0,19
1884	-0,45
1885	-0,32
1886	-0,42
1887	-0,54
1888	-0,24
1889	-0,05
1890	-0,41
1891	-0,47
1892	-0,39
1893	-0,42
1894	-0,29
1895	-0,21
1896	-0,1
1897	-0,04
1898	-0,21
1899	-0,13
1900	0,02
1901	0,02
1902	-0,17
1903	-0,27
1904	-0,37
1905	-0,17
1906	-0,07



(Avec Excel, choisir « Polynomiale Ordre 2, avec OpenOffice, tracer la parabole à l'aide de sa formule.)

Quel est, de l'ajustement affine ou de l'ajustement parabolique, celui qui semble préférable ?

3. Donner une estimation de l'écart de la température globale en 2040 par rapport à la période 1951-1980 :

– en utilisant l'ajustement affine ;

– en utilisant l'ajustement parabolique.

CORRIGÉ P. 358

▶ Un peu d'écologie

Le réchauffement de la planète est une inquiétude majeure. Il est responsable, entre autres, de la fonte de la calotte glaciaire et du recul des glaciers.

Ce réchauffement est principalement dû à ce qu'on appelle l'effet de serre. Le principe de l'effet de serre est simple. Un certain nombre de gaz réfléchissent ou « gardent » une partie de la chaleur émise par la Terre : la vapeur d'eau, le dioxyde de carbone (CO_2), le méthane, le protoxyde d'azote, les gaz CFC et l'ozone.

À l'origine, l'effet de serre est une bonne chose : si l'atmosphère ne contenait aucun gaz à effet de serre, la température moyenne de la Terre serait inférieure d'environ 33 °C à ce qu'elle est… La vie ne serait pas possible…

En brûlant de grandes quantités de combustibles fossiles (pétrole, gaz, charbon) l'homme a fait augmenter la quantité de gaz à effet de serre dans l'atmosphère, en particulier celle du CO_2. La présence accrue de ces gaz dans l'atmosphère entraîne une hausse de la température de la Terre. Cet effet de serre additif est dit « anthropique ». Actuellement, les scientifiques ne savent pas chiffrer les parts respectives de l'homme et de la nature dans l'effet de serre.

Cette photographie, qui montre le recul glaciaire, a été prise à environ 1 000 km du pôle Nord, dans l'archipel norvégien du Svalbard.

Faites le point !

QCM

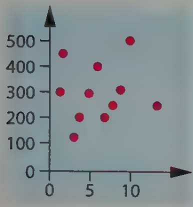
Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.

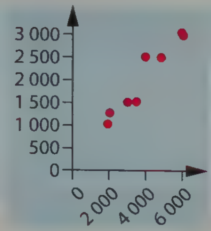
QCM interactifs 11 à 13

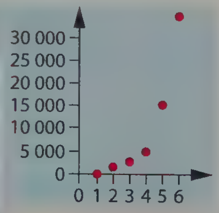
11. ++ Nuage de points, point moyen, ajustement affine

1. Parmi les trois nuages de points suivants, indiquer celui pour lequel un ajustement affine semble judicieux.

a) fig. 1 b) fig. 2 c) fig. 3

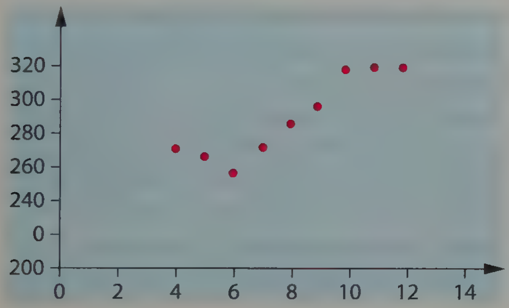






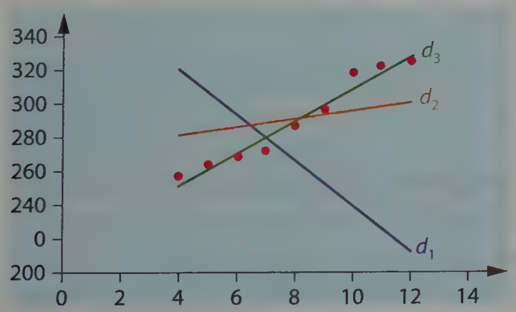
2. Le point moyen du nuage ci-dessous est le point G de coordonnées :

a) G(12, 290) b) G(5, 260) c) G(8, 290)



3. Parmi les trois droites suivantes, quelle est celle qui réalise le meilleur ajustement affine du nuage suivant ?

a) La droite d_1 b) La droite d_2 c) La droite d_3



12. ++ La taille des bébés

Le tableau suivant donne, pour une population d'enfants de 0 à 24 mois, la taille moyenne (en cm) en fonction de l'âge (en mois).

Âge (en mois) : x_i	0	3	6	12	18	24
Taille (en cm) : y_i	49	59	66	75	80	85

		a	b	c
1	Les coordonnées du point moyen du nuage de points correspondant sont :	(10,5 ; 69)	(11,5 ; 70,25)	(11,25 ; 70,5)
2	On admet qu'une droite d'ajustement du nuage de points correspondant a pour équation : $y = 1{,}47x + 53{,}5$. La meilleure approximation de la taille d'un enfant de 25 mois est :	85 cm	90 cm	95 cm
3	On prend la même droite d'ajustement qu'au 2. La meilleure approximation de l'âge d'un enfant mesurant 77 cm est :	15 mois	16 mois	17 mois

13. +++

1. Un laboratoire décide de changer, d'ici deux ou trois ans, le véhicule utilitaire acheté en 2006.

Souhaitant connaître le prix auquel il pourra le revendre, il consulte l'Argus afin de connaître la cote de son véhicule et obtient le tableau suivant :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Cote en euros : y_i	16 000	13 500	11 200	9 000	7 400	5 900

On précise que la cote est la valeur de revente du véhicule en fonction de l'année choisie pour la revente ; par exemple, en 2009, la valeur de son véhicule était 11 200 €.

Pour estimer la cote du véhicule en 2014, il procède à un ajustement affine par la méthode des moindres carrés à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

Après avoir arrondi les valeurs approchées à la centaine d'euros la plus proche, une équation de la droite de régression de y en x est :

a) $y = -2\,100x + 17\,600$

b) $y = -2\,000x + 17\,600$

c) $y = -2\,100x + 17\,000$.

2. L'estimation du prix du véhicule en 2014, selon le modèle précédent, est alors :

a) 1 600 € b) 800 € c) 200 €.

3. En moyenne, sur la période 2007-2012, ce véhicule a perdu par an, à 100 € près :

a) 1 000 € b) 2 000 € c) 3 000 €.

Exercices
Pour le baccalauréat

Les exercices pour le baccalauréat sont des exercices qui pourraient figurer dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat STL-Biotechnologies.

14. +++ La tension en fonction de l'âge

Le tableau suivant donne la moyenne y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge x d'une population donnée.

Âge : x	36	42	48	54	60	66
Tension : y	12	13,5	13,6	14,3	15,4	15

1. Représenter graphiquement le nuage de point $M(x, y)$ dans un repère orthogonal. Prendre pour unités graphiques, 0,5 cm pour 1 an en abscisse et 3 cm en ordonnée pour l'unité de tension artérielle, les axes tracés se coupent au point I de coordonnées (30, 10).

2. a) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = ax + b$ et la représenter. (Les coefficients a et b sont à arrondir à 10^{-3}).

b) Une personne de 70 ans a une tension de 16,1. Quelle serait sa tension théorique en utilisant la droite de régression ? Comparer avec la tension réelle.

15. +++ Nombre de postes à la clinique

Le tableau ci-dessous donne, pour onze cliniques, le nombre de postes de personnel non médical et le nombre de lits correspondant.

Nombre de lits : x_i	122	177	77	135	109	88	185	128	120	196	100
Nombre de postes : y_i	205	249	114	178	127	122	242	170	164	188	172

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) dans le plan rapporté à un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques : 1 cm pour 20 lits en abscisse et 1 cm pour 50 postes en ordonnée.

2. Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés sous la forme $y = ax + b$. Les coefficients a et b sont à arrondir à 10^{-1}. Tracer cette droite dans le repère précédent.

3. Une clinique possède 35 lits.

a) En utilisant les résultats obtenus au **2.**, déterminer combien devrait-elle embaucher de personnel occupant un poste non médical à temps plein.

b) En réalité, cette clinique dispose de 60 postes.

Calculer la différence entre le nombre de postes réels et le nombre de postes théoriques obtenu précédemment. Quel pourcentage cette différence représente-t-elle par rapport à la situation théorique ?

CORRIGÉ P. 358

16. +++ Les temps sont durs...

Hélène est salariée du même laboratoire depuis maintenant quinze ans. Elle regarde l'évolution de son salaire qui dépend de la variation des cotisations, des changements d'échelons et des augmentations occasionnelles. Elle observe les résultats suivants sur les huit dernières années.

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Salaire mensuel moyen : y_i (en €)	1 650	1 725	1 740	1 750	1 825	1 850	1 950	1 960

1. Tracer le nuage de points associé à cette série statistique dans un repère d'unités graphiques :

1 cm pour une année sur l'axe des abscisses,

2 cm pour 100 € sur l'axe des ordonnées (graduer l'axe des ordonnées à partir de 1 600 €).

2. a) Déterminer les coordonnées du point moyen G et le placer dans le repère précédent.

b) Avec la calculatrice, déterminer une équation de la droite Δ d'ajustement de y en x de ce nuage de points par la méthode des moindres carrés : les coefficients de l'équation sont à arrondir à l'unité.

c) Tracer la droite Δ dans le repère de la question 1.

3. On considère que cette droite permet un ajustement de la série statistique valable jusqu'en 2020.

a) Estimer, à l'aide du graphique, le salaire mensuel moyen d'Hélène en 2015 *en laissant apparents sur le graphique les traits de rappel* (arrondir à la dizaine d'euros).

b) Son salaire atteindra-t-il 2 400 € avant 2020 ? Justifier la réponse.

Exemples d'ajustement affine après un changement de variable

17. +++ Population d'une ville moyenne

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'une ville moyenne au cours des 5 dernières années.

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Nombre d'habitants (en milliers) : z_i	58	59,04	59,88	60,55	61,1
$y_i = z_i - 58$	0	1,04	1,88	2,55	3,1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques : 2,5 cm pour une unité en abscisse et 2,5 cm pour 1 millier d'habitants en ordonnée.

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i).

2. a) Déterminer, avec une calculatrice, une équation de la droite Δ, droite de régression de y en x. On donnera une équation de la forme $y = ax + b$ dans laquelle a et b seront arrondis à 10^{-3}.

b) Construire la droite Δ.

3. Calculer une estimation de la population de cette ville pour l'année de rang 6.

18. +++ Propagation de la grippe

Craignant une propagation de grippe infectieuse, un service de santé d'une ville de 50 000 habitants a relevé le nombre de consultations hebdomadaires concernant cette grippe dans cette ville pendant 7 semaines.

Ces semaines ont été numérotées de 1 à 7.

On a noté x_i les rangs successifs des semaines et y_i le nombre de consultations correspondant :

Rang de la semaine : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de consultations : y_i	540	720	980	1 320	1 800	2 420	3 300

1. Tracer le nuage de points sur une feuille de papier millimétré, on prendra 2 cm pour une unité en x et 1 cm pour 200 en y. Un modèle d'ajustement affine a été rejeté par le service de santé. Pourquoi ?

2. On décide de poser $z_i = \ln y_i$. Reproduire et compléter le tableau suivant sur votre copie en arrondissant les z_i à 10^{-2}. Il n'est pas demandé de tracer le nuage de points correspondant.

Rang de la semaine : x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y$							

3. Trouver à la calculatrice l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés reliant z et x (les coefficients obtenus par la calculatrice sont à arrondir à 10^{-1}), puis déduire y en fonction de x (on donnera le résultat sous la forme $y = e^{ax+b}$, a et b étant deux réels).

4. En utilisant ce modèle, trouver par le calcul :

a) Une estimation du nombre de consultations à la $10^{\text{-ième}}$ semaine (arrondir à l'unité).

b) La semaine à partir de laquelle le nombre de consultations dépassera le quart de la population.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En observant les valeurs données par le modèle introduit à la question **2.** grâce à un tableau obtenu à l'aide d'une calculatrice, expliquer si ce modèle reste valable sur le long terme.

CORRIGÉ P. 359

19. +++ Incident nucléaire

Suite à un incident nucléaire, on a consigné dans le tableau suivant, heure par heure, les résultats fournis par un appareil de mesure de la radioactivité. Les N_i, sont des nombres entiers représentant le nombre de particules recueillies par l'appareil pendant une seconde.

t_i en heure	0	1	2	3	4	5	6
N_i	170	102	63	39	24	16	9

1. On pose $z_i = \ln(N_i - 2)$pour tout i variant de 0 à 6 (où ln désigne le logarithme népérien).

Donner les valeurs de z_i arrondies au millième le plus proche.

Représenter le nuage (t_i, z_i) dans un repère orthogonal (unités graphiques : 3 cm pour une heure en abscisse, 4 cm pour une unité en ordonnée).

2. Donner une équation de la droite de régression de z en t (les coefficients sont à arrondir à 10^{-3}).

3. Donner l'expression de N en fonction de t déduite de cet ajustement.

4. En supposant que l'expression obtenue en **3.** reste valable, déterminer à partir de quel relevé on obtiendra une valeur de N inférieure ou égale à 3.

Comparaison d'ajustements

20. +++ Recul d'un glacier

Pour étudier le recul d'un grand glacier alpin au fil des années, une première mesure a été effectuée en 1900 : ce glacier mesurait alors 25,6 km.

Des relevés ont ensuite été effectués tous les 20 ans : le recul du glacier est mesuré par rapport à la position où se trouvait initialement le pied du glacier en 1900.

Les mesures successives ont été relevées dans le tableau ci-dessous.

On note t la durée, en années, écoulée depuis 1900, et r le recul correspondant, mesuré en kilomètres.

Année de mesure :	1900	1920	1940	1960	1980	2000
Durée t écoulée (depuis 1900) :	0	20	40	60	80	100
Recul r (en km) :	0	0,3	0,6	1	1,6	2,3

Par exemple, en 1940 ($t = 40$), le recul du glacier par rapport à 1900 a été de 0,6 km : la longueur du glacier était donc de $25{,}6 - 0{,}6 = 25$ km.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3}.

A. *Ajustement affine*

1. Tracer le nuage de points dans le repère donné en annexe (durée t en abscisse, distance r en ordonnée).

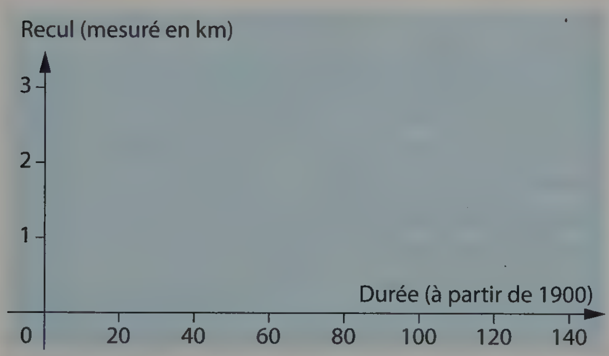
2. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de r en fonction de t, puis tracer cette droite dans le repère précédent.

3. À partir du modèle affine obtenu précédemment, estimer par le calcul :

a) Le recul, puis la longueur du glacier en 2011.

b) L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).

Annexe



B. *Ajustement exponentiel*

Le résultat du **3.**b) de la partie **A.** étant peu en accord avec la plupart des autres études, les glaciologues considèrent un autre modèle : le modèle exponentiel.

On pose $y = \ln r$. On rappelle que $\ln r$ désigne le logarithme népérien du recul r.

1. Recopier, puis compléter le tableau suivant sur votre copie (pour permettre le calcul de y, la durée 0 de l'année 1900 a été exclue du tableau).

Durée t (à partir de 1900) :	20	40	60	80	100
$y = \ln r$:					

2. a) À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de y en fonction de t.

b) Déduire que $r(t) = e^{0{,}025t - 1{,}599}$.

3. En utilisant le modèle obtenu précédemment, estimer par le calcul :

a) Le recul, puis la longueur du glacier en 2011.

b) L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).

21. +++ Progression d'une épidémie

Pour étudier la progression d'une épidémie de grippe, une enquête est faite auprès d'un échantillon de 1 000 personnes ; le tableau ci-dessous donne le nombre $N(t)$ d'individus ayant été contaminés, à la date t, exprimée en jours.

t	1	2	5	10	15	20
$N(t)$:	88	172	306	420	485	500

On considère qu'après 20 jours l'épidémie est terminée, c'est-à-dire que le nombre total de personnes ayant été contaminées ne varie plus.

1. a) Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, placer les points de coordonnées $(t, N(t))$ (unités graphiques : 0,5 cm pour 1 jour en abscisse, 1 cm pour 50 individus en ordonnée).

b) Déterminer une équation de la droite de régression de N en t et la tracer. Les coefficients sont à arrondir à l'unité.

c) Déduire de l'ajustement précédent une estimation du nombre d'individus contaminés au bout d'une semaine.

2. On considère la fonction définie sur [0, 40] par :

$f(t) = 500(1 - e^{-0{,}2t})$.

a) Recopier et compléter le tableau suivant (les résultats sont à arrondir à l'unité).

t	1	2	5	10	15	20	30	40
$f(t)$:								

b) Tracer la courbe représentative de f dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ précédent.

c) Déterminer graphiquement quelle est, de la droite de la première question ou de la courbe précédente, celle qui ajuste le mieux le nuage et l'utiliser pour indiquer la date à laquelle le quart de la population étudiée a déjà été atteint.

22. +++ Croissance d'une population

On étudie la croissance d'une population de crustacés planctoniques dans un environnement limité.

On note x le nombre des individus de cette population à l'instant t exprimé en jours. Les résultats obtenus sont dans le tableau suivant :

t_i (en jours)	0	2	4	6	8	10	12	14
x_i (effectif)	15	59	199	448	631	697	715	719

1. Dans un repère orthogonal représenter le nuage des huit points de coordonnées (t_i, x_i). On prendra comme unités graphiques 1 cm pour 1 jour en abscisses et 1 cm pour 50 individus en ordonnées. Un ajustement affine de ce nuage paraît-il justifié ?

Dans la suite de l'exercice, toutes les valeurs sont à arrondir à 10^{-2}.

2. On pose $y = \ln\left(\dfrac{x}{720 - x}\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

a) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t_i	0	2	4	6	8	10	12	14
y_i	– 3,85							

b) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage des points de coordonnées (t_i, y_i).

c) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de la forme $y = at + b$. Les coefficients a et b sont à arrondir à 10^{-2}.

3. On admet, dans cette fonction, que t et y sont reliés par la relation : $y = 0{,}75t - 4{,}08$.

a) Montrer alors que $x = \dfrac{720}{1 + e^{-0{,}75t - 4{,}08}}$ ce qui détermine x comme fonction de t sur $[0, +\infty[$.

b) Sur le graphique de la question **1.**, quel phénomène semble apparaître lorsque t devient suffisamment grand ?

c) On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}75t - 4{,}08} = 0$. En déduire $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$.

Ce résultat est-il cohérent avec la réalité expérimentale ?

Ajustement affine et suite géométrique

23. +++ **Avec le tableur** TICE

Un laboratoire a acheté un équipement en 2007 pour une valeur de 50 000 € et a noté la valeur de cette machine sur le marché de l'occasion jusqu'en 2012.

Les résultats sont notés dans le tableau suivant :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Valeur de la machine (en €) : y_i	50 000	42 000	36 000	32 000	26 500	22 000

A. 1. Représenter le nuage de points (x_i, y_i) dans un repère orthogonal.

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients à l'unité).

Pour l'étude qui suit, on retient comme ajustement affine la droite Δ d'équation $y = -5\,440x + 48\,400$.

3. Tracer la droite Δ sur le graphique.

4. En supposant que ce modèle reste valable pour les cinq années à venir, prévoir une estimation de la valeur de cet équipement en 2014, puis en 2017.

5. Commenter le dernier résultat.

B. Le service comptable de cette entreprise remarque que pendant les années 2007 à 2012 la machine s'est dépréciée d'environ 15 % par an. Il suppose alors qu'à partir de 2012 la baisse annuelle sera de 15 %. Il pose $v_0 = 22\,000$ et note (v_n) la suite donnant la valeur estimée, selon ce modèle, de l'équipement au bout de n années de fonctionnement à partir de 2012.

Ainsi, v_1 est la valeur estimée de l'équipement en 2013.

1. a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; déterminer sa raison.

b) Montrer que, pour tout entier n,

$v_n = 22\,000 \times (0{,}85)^n$.

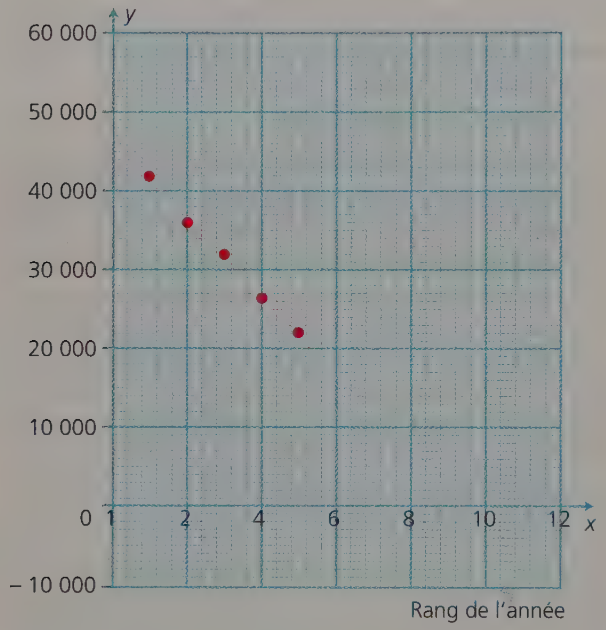
2. Le tableau suivant est un extrait d'une feuille de calculs. Il donne la valeur estimée v_n de l'équipement pour les années 2012 à 2018. Le format de la colonne D est un format numérique à zéro décimale.

	A	B	C	D
1	Année	Valeur réelle de la machine	Rang de l'année à partir de 2012	Valeur estimée de la machine
2	2007	50 000		
3	2008	42 000		
4	2009	36 000		
5	2010	32 000		
6	2011	26 500		
7	2012	22 000	0	22 000
8	2013		1	18 700
9	2014		2	15 895
10	2015		3	13 511
11	2016		4	11 484
12	2017		5	9 762
13	2018		6	8 297

Donner une formule qui, entrée dans la cellule D8, permet, par recopie vers le bas, d'obtenir la plage de cellules D8:D13.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Selon ce modèle, à partir de quelle année la machine aura-t-elle une valeur inférieure à 5 000 € ?



Ajustement affine et équation différentielle

24. +++ Perfusion lente

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Pour un examen cardiovasculaire, on effectue une perfusion lente à débit constant d'une solution marquée par un indicateur radioactif.

A. *Étude expérimentale*

On relève l'évolution de la concentration au niveau du ventricule droit et on obtient les résultats suivants :

i	1	2	3	4	5	6	7
t_i : temps en minutes	0	2	4	6	8	10	12
c_i : concentration en microgrammes par cm^3	0	54	84	100	109	114	117

Dans cette partie, les résultats sont à arrondir à 10^{-2}.

1. On pose $z_i = \ln(120 - c_i)$, ln désigne le logarithme népérien. Donner les valeurs de z_i pour i variant de 1 à 7.

2. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de z en t.

3. Donner une expression de la concentration c en fonction de t déduite de cet ajustement.

4. Utiliser l'ajustement précédent pour déterminer au bout de combien de temps $c = 118$.

B. *Résolution d'une équation différentielle*

On admet que la fonction c est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}3y = 36$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la fonction solution c qui vérifie $c(0) = 0$.

3. On note $I = \dfrac{1}{10}\displaystyle\int_2^{12} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que $I = 120 + 40\mathrm{e}^{-3,6} - 40\mathrm{e}^{-0,6}$.

I est la valeur moyenne de la concentration quand $2 \leq t \leq 12$.

CORRIGÉ P. 359

25. +++ Réimplantation d'écrevisses

Dans cet exercice, les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

A. On procède à une réimplantation d'écrevisses. On lâche 100 individus et on relève tous les six mois l'effectif n de la colonie d'écrevisses en fonction du temps écoulé t (exprimé en mois). On obtient ainsi huit effectifs n_i (i variant de 1 à 8) :

Temps t_i (en mois)	0	6	12	18	24	30	36	42
Effectifs n_i	100	160	350	900	2 500	7 500	22 000	64 000

1. On pose $y = \ln(3n - 200)$ où ln représente la fonction logarithme népérien. Calculer les valeurs $y_i = \ln(3n_i - 200)$ pour i variant de 1 à 8. Arrondir à 10^{-3}.

2. Représenter le nuage de points $M_i(t_i, y_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 3 cm pour 6 mois sur l'axe des abscisses, 1 cm par unité sur l'axe des ordonnées).

3. Donner une équation de la droite de régression de y en t sous la forme $y = at + b$. Arrondir a et b à 10^{-2}. En déduire l'expression de n en fonction de t associée à cet ajustement.

4. Utiliser l'ajustement précédent pour déterminer l'effectif au bout de 40 mois.

B. Dans cette partie, on considère que la fonction donnant le nombre d'individus en fonction du temps t (exprimé en mois) est représentée par une solution de l'équation différentielle (E) : $X' - 0{,}18X = -12$.

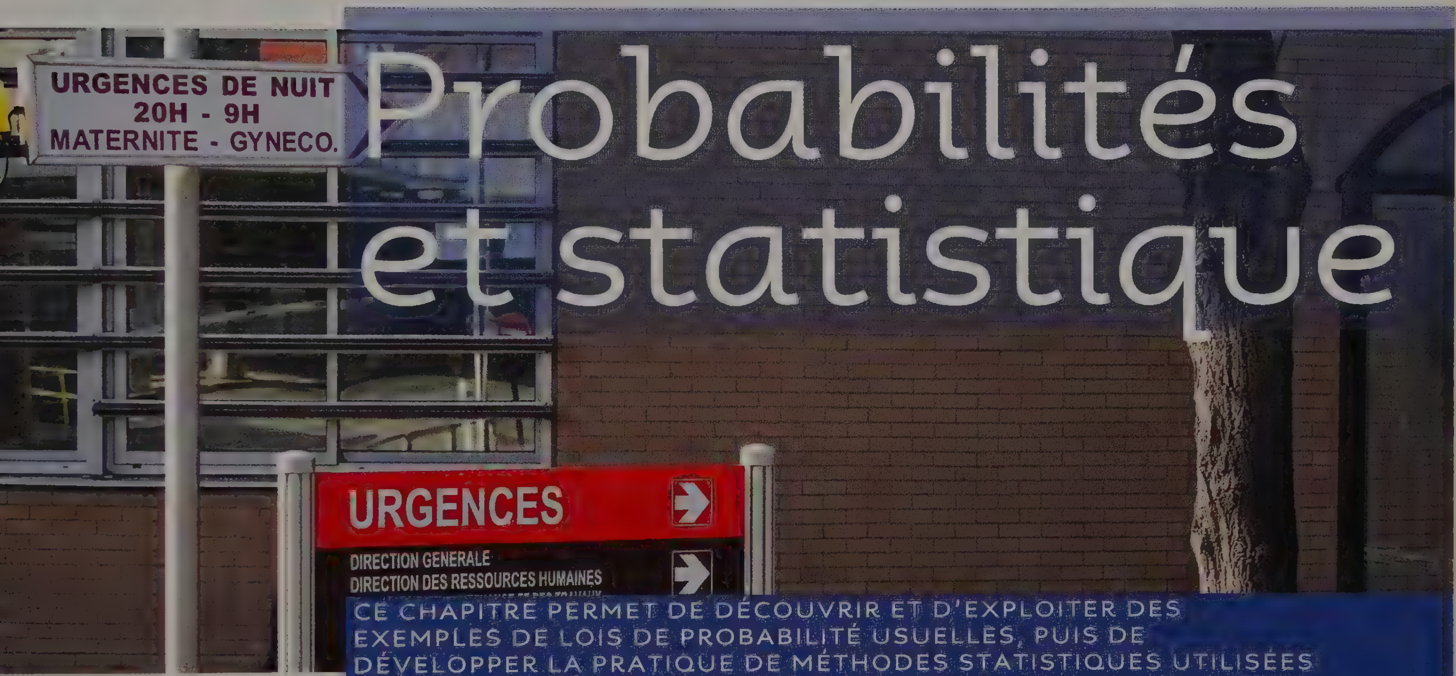
1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $X(0) = 100$.

3. Déterminer au bout de combien de mois la population aura dépassé 50 000 individus.

CHAPITRE 9

Probabilités et statistique



CE CHAPITRE PERMET DE DÉCOUVRIR ET D'EXPLOITER DES EXEMPLES DE LOIS DE PROBABILITÉ USUELLES, PUIS DE DÉVELOPPER LA PRATIQUE DE MÉTHODES STATISTIQUES UTILISÉES EN BIOTECHNOLOGIE, EN MÉDECINE, DANS LES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES ET TECHNOLOGIQUES NOTAMMENT POUR LE CONTRÔLE DE QUALITÉ.

CAPACITÉS

- Concevoir et exploiter une simulation pour une loi uniforme.
- Calculer une probabilité avec une loi exponentielle.
- Interpréter l'espérance avec une loi exponentielle.
- Utiliser une calculatrice ou un tableur avec une loi normale.
- Déterminer la loi normale approximant une loi binomiale.
- Connaître et exploiter l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % d'une fréquence.
- Estimer une proportion inconnue avec un niveau de confiance de 95 %.
- Juger de l'égalité de deux proportions.

ACTIVITÉ 1

Introduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de loi uniforme avec le tableur

Moyenne et écart type du générateur aléatoire

Le générateur de nombres aléatoires du tableur =ALEA() a pour fonction de produire « au hasard » un nombre entre 0 et 1. L'expression « au hasard » signifie que tout nombre décimal entre 0 et 1, ici affiché avec 9 décimales, a théoriquement autant de « chances » d'apparaître qu'un autre.

On s'intéresse ici à la moyenne et à l'écart type des résultats produits par le générateur ALEA().

D2 =ECARTYPEP(A1:A5000)

	A	B	C	D
1	0,467102051		moyenne	0,493493921
2	0,512023926		écart type	0,289804878
3	0,417968750			
4	0,101135254			
5	0,779724121			

A. Simulations

1° Sur une feuille de tableur, produire 5 000 valeurs du générateur ALEA() puis calculer la moyenne et l'écart type de ces 5 000 valeurs (attention, pour l'écart type, on doit utiliser la fonction =ECARTYPEP(*plage*) avec un « P » à la fin).

2° En faisant plusieurs fois F9, donner une estimation (arrondir à 10^{-2}) de la moyenne et de l'écart type du générateur ALEA() sur un très grand nombre de valeurs.

B. Calculs théoriques

Les estimations précédentes correspondent à l'espérance et à l'écart type d'une variable aléatoire X de loi « uniforme » sur l'intervalle [0, 1] que le générateur ALEA() simule.

1° Espérance

a) La valeur de l'espérance $E(X)$ était prévisible. Pourquoi ?

b) La moyenne de 5 000 valeurs est obtenue selon la formule $\overline{x} = \sum x_i \times \frac{1}{n}$, où le symbole Σ signifie que l'on fait la somme des 5 000 valeurs x_i produites par ALEA et où $n = 5\,000$, chaque valeur ayant le même « poids » $\frac{1}{5\,000}$.

Le calcul de l'espérance se fait sur un nombre infini de valeurs. Pour cela, x_i est remplacé par x et $\sum \ldots \times \frac{1}{n}$ est remplacé par $\int_0^1 \ldots \, dx$. Calculer l'intégrale $\int_0^1 x \, dx$.

2° Variance et écart type

L'écart type est la racine carrée de la variance.

Pour 5 000 valeurs, la variance est donnée par la formule $V = \sum x_i^2 \times \frac{1}{n} - \overline{x}^2$.

Pour un nombre infini de valeurs, on aura : $V(X) = \int_0^1 x^2 dx - (E(X))^2$.

a) Calculer l'intégrale $\int_0^1 x^2 \, dx$.

b) En déduire $V(X)$ puis $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Comparer avec l'estimation donnée d'après les simulations.

ACTIVITÉ 2

Passer d'histogrammes de fréquences à une loi à densité avec GeoGebra

Temps de fonctionnement

On considère un matériel pour les laboratoires dont le temps de fonctionnement, exprimé en semestres, est modélisé par une variable aléatoire T prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

A. Simulation des temps de fonctionnement et histogrammes des fréquences

On utilise le tableur de GeoGebra pour simuler 5 000 temps de fonctionnement, c'est-à-dire 5 000 réalisations de la variable aléatoire T. On suppose qu'un temps de fonctionnement est simulé par l'instruction -ln(random())/0.07.

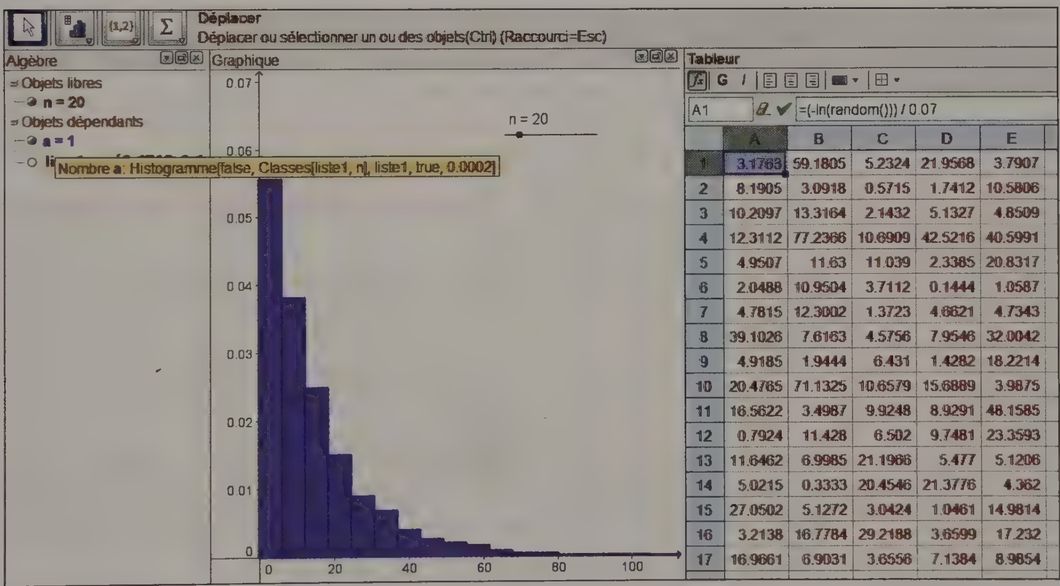
Entrer cette instruction en cellule A1 puis recopier vers le bas jusqu'à la ligne 1 000 et vers la droite jusqu'à la colonne E.

Sélectionner les 5 000 données, puis, par un clic droit, créer une liste (la liste est nommée liste1).

Pour visualiser les données, on les regroupe en n classes. Créer un curseur n allant de 5 à 30 avec un incrément 1.

On crée ensuite un histogramme « normalisé » c'est-à-dire tel que l'aire de chaque rectangle est égale à la fréquence de la classe correspondante.

Pour cela, entrer dans la barre de saisie l'expression :
Histogramme[false,Classes[liste1,n],liste1,true,1/5000].



1° Régler le curseur à $n = 20$ et appuyer plusieurs fois sur F9 pour observer plusieurs échantillons de taille 5 000. Quelle est la classe la plus fréquente ?

2° Soit t un réel positif. On s'intéresse à l'événement : « le temps de fonctionnement est inférieur ou égal à t », que l'on peut noter « $T \leq t$ ».
Créer un curseur t allant de 0 à 150.
Entrer dans la barre de saisie Fréquence=NbSi[x<=t,liste1]/5000.

a) En faisant plusieurs fois F9, donner une estimation de la probabilité $P(T \leq 15)$.

b) En faisant plusieurs fois F9, estimer, à l'unité, la valeur t_0 pour laquelle $P(T \leq t_0) = 0{,}5$. Cette valeur t_0 est le temps de fonctionnement médian, exprimé en semestres.

3° Augmenter le curseur n jusqu'à $n = 100$ et faire plusieurs fois F9. De quel type est le « profil » de l'histogramme ?

B. Courbe de densité et calculs d'aires

On introduit la courbe de densité représentant la fonction f définie pour tout réel x positif par $f(x) = 0{,}07\ \mathrm{e}^{-0{,}07x}$.

1° Saisir f=Fonction[0.07*exp(-0.07*x),0,150]. Faire plusieurs fois F9. Que constate-t-on ?

2° **a)** Pour tout réel t positif, calculer $F(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) En déduire $F(15)$ et comparer avec l'estimation de $P(T \leq 15)$ effectuée à la question **A.2°a**.

c) Calculer une valeur approchée de $F(t)$ à l'aide de GeoGebra. Donner une interprétation graphique de $F(t)$.

d) Résoudre l'équation $F(t) = 0{,}5$ et comparer avec l'estimation effectuée à la question **A.2°b**.

e) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$. Donner une interprétation graphique du résultat.

ACTIVITÉ 3 Introduire la loi « normale » avec GeoGebra

Vers la courbe de Gauss

La courbe de Gauss, ou courbe « en cloche », apparaît dans de nombreuses situations. Cette activité permet d'expérimenter, par simulation avec GeoGebra, une telle situation.

A. Somme de 12 nombres tirés au hasard entre 0 et 1

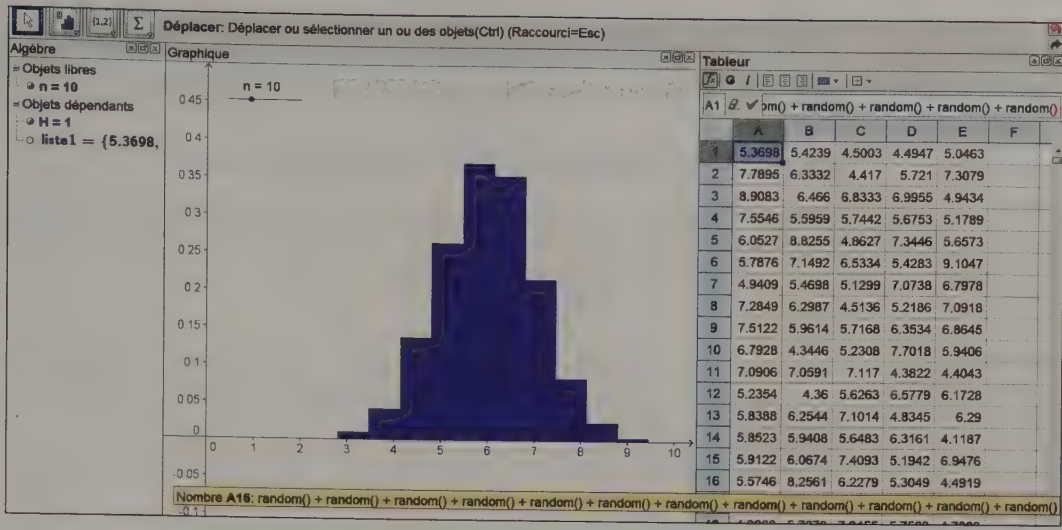
On s'intéresse à la répartition des résultats de la somme de 12 nombres, chacun de ces nombres étant tiré au hasard entre 0 et 1, c'est-à-dire selon une loi uniforme.

• Avec le tableur de GeoGebra, entrer en cellule A1 l'instruction :
=random()+random()+random()+random()+random()+random()+random()+random()+random()+random()+random()+random().

Recopier vers le bas jusqu'à la ligne 1 000 puis vers la droite jusqu'à la colonne E, pour obtenir 5 000 réalisations.

• Sélectionner les 5 000 valeurs obtenues, puis, par un clic droit, créer une liste (la liste est nommée liste1).

• Pour visualiser les données, on les regroupe en n classes. Créer un curseur n allant de 5 à 30. Créer ensuite un histogramme « normalisé » c'est-à-dire tel que l'aire de chaque rectangle est égale à la fréquence de la classe correspondante en entrant dans la barre de saisie l'expression : Histogramme[false,Classes[liste1,n],liste1,true,1/5000].



1° Régler le curseur à $n = 5$ et appuyer plusieurs fois sur F9 pour observer plusieurs échantillons de taille 5 000.

a) La répartition des valeurs entre les classes paraît-elle uniforme ?

b) Autour de quelle valeur entière observe-t-on la classe la plus fréquente ?

c) Reprendre les deux questions précédentes en réglant le curseur à $n = 11$.

2° Augmenter le curseur n jusqu'à $n = 30$ et faire plusieurs fois F9. Décrire le « profil » de l'histogramme.

B. Courbe de Gauss

La courbe de Gauss est celle d'une fonction de densité f d'une loi de probabilité dite « normale ».

On sait que la loi uniforme sur l'intervalle [0, 1] correspond à une espérance de 0,5 et à une variance de $\frac{1}{12}$. On admet qu'en répétant à l'identique la même expérience consistant à tirer un nombre au hasard entre 0 et 1, la somme des 12 nombres conduit à des valeurs de moyenne $12 \times 0{,}5 = 6$ et de variance $12 \times \frac{1}{12} = 1$.

• Saisir sur GeoGebra l'instruction : f=Normale[6,1,x].

1° Avec le curseur réglé à $n = 30$, faire plusieurs fois F9. Qu'observe-t-on ?

2° Donner, d'après la fenêtre « algèbre » de GeoGebra, l'expression analytique de la fonction de densité f.

Cette activité illustre le fait que lorsqu'un phénomène aléatoire est la somme d'un nombre, assez important, de phénomènes aléatoires indépendants de même loi (quelle que soit cette loi), il suit une loi normale. C'est une raison pour laquelle la loi normale est assez fréquemment rencontrée (d'où son nom).

ACTIVITÉ 4

Introduire la notion d'intervalle de fluctuation asymptotique avec le tableur

Un intervalle de fluctuation « asymptotique » !

On lance n fois ($n \geq 100$) une pièce de monnaie supposée équilibrée et on s'intéresse à la probabilité d'observer, après ces n lancers, une fréquence de « pile » appartenant à l'intervalle $I_n = \left[0{,}5 - \frac{0{,}98}{\sqrt{n}} ; 0{,}5 + \frac{0{,}98}{\sqrt{n}}\right]$.

Soit X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de « pile » après n lancers et $F_n = \frac{X_n}{n}$ la variable aléatoire associée à la fréquence de « pile ».

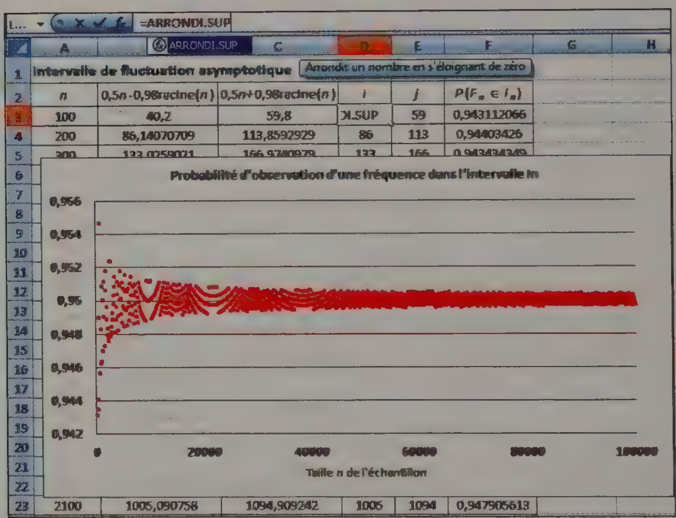
1° Montrer que X_n suit la loi binomiale de paramètres n et 0,5.

2° **a)** Montrer que, pour tout entier n strictement positif :
$P(F_n \in I_n) = P(X_n \leq 0{,}5n + 0{,}98\sqrt{n}) - P(X_n < 0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n})$.

b) Reproduire et compléter le tableau suivant, en déterminant, à partir de $0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n}$ et $0{,}5n + 0{,}98\sqrt{n}$, les entiers i et j permettant, à l'aide de la loi binomiale, le calcul de :
$P(F_n \in I_n) = P(X_n \leq j) - P(X_n \leq i)$. (Arrondir les résultats approchés à 10^{-3}.)

n	$0{,}5n - 0{,}98\sqrt{n}$	$0{,}5n + 0{,}98\sqrt{n}$	i	j	$P(F_n \in I_n)$
100	40,2	59,8	40	59	0,943
1 000					
2 500					

3° On a obtenu, sur tableur, la feuille de calcul suivante.



a) D'après l'aide du tableur, la fonction ARRONDI.SUP(x;nb) arrondit x « en s'éloignant de zéro » avec nb chiffres après la virgule.
Que fournit l'instruction =ARRONDI.SUP(x;0)-1 lorsque $x = 469{,}01$ et lorsque $x = 1\,201$?

b) En utilisant le graphique, conjecturer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} P(F_n \in I_n)$.

On dit que I_n est un intervalle de fluctuation « asymptotique » au seuil de 95% de F_n. L'intérêt de cet intervalle de fluctuation, par rapport à celui, non asymptotique, introduit en Première, est d'avoir une expression analytique explicite de l'intervalle.

ACTIVITÉ 5

Introduire graphiquement la notion d'intervalle de confiance avec GeoGebra

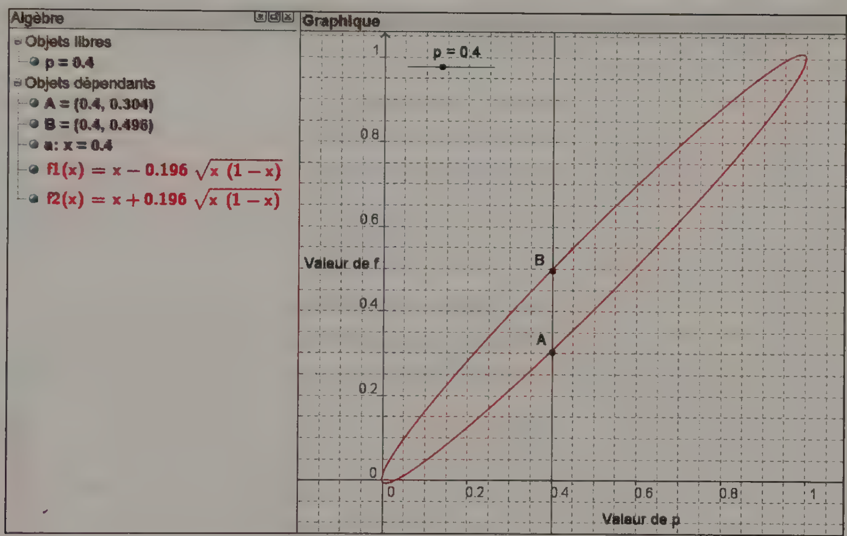
À la recherche d'un intervalle « de confiance »

On considère une urne contenant des boules rouges et des boules bleues. On note p la proportion des boules rouges dans l'urne. On désigne par F la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 boules, avec remise, dans l'urne, associe la fréquence f des boules rouges obtenue sur l'échantillon.

1° Supposons que p soit connu, que $100\,p \geq 5$ et $100(1-p) \geq 5$. Dans ce cas, un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de F est donné par :
$[p - 0{,}196\sqrt{p(1-p)}\ ;\ p + 0{,}196\sqrt{p(1-p)}]$ (c'est-à-dire que, théoriquement, environ 95% des échantillons fournissent une fréquence f comprise dans cet intervalle).

a) À l'aide de GeoGebra, créer un curseur p de 0 à 1 avec un incrément de 0,01 et tracer les courbes C_1 et C_2 représentant les fonctions définies pour x dans l'intervalle [0, 1] par :
$x \mapsto x - 0{,}196\sqrt{x(1-x)}$ et $x \mapsto x + 0{,}196\sqrt{x(1-x)}$.

Créer les points d'intersection de C_1 et C_2 avec la droite d'équation $x = p$.



b) Utiliser le fichier GeoGebra (arrondir à 3 décimales l'affichage) pour obtenir un intervalle de fluctuation asymptotique de F à 95 % lorsque $p = 0{,}4$; $p = 0{,}71$; $p = 0{,}02$. Que se passe-t-il dans le dernier cas ?

2° Supposons maintenant que l'on ignore la valeur de p (on ne connaît pas la proportion des boules rouges dans l'urne). On possède cependant la fréquence $f = 0{,}6$ des boules rouges après un prélèvement au hasard et avec remise de 100 boules. La recherche d'un intervalle « de confiance » à 95% pour p consiste en un changement de point de vue.
Utiliser le fichier GeoGebra pour obtenir les abscisses x_1 et x_2 (avec $x_1 \leq x_2$) des points d'intersection des courbes C_1 et C_2 avec la droite d'équation $y = 0{,}6$.

L'intervalle $[x_1, x_2]$ est un « intervalle de confiance » de p à 95 % de confiance.

3° On suppose que, pour une autre composition de l'urne (autre valeur de p inconnue), on observe une fréquence $f = 0{,}55$ de boules rouges après un prélèvement au hasard et avec remise de 100 boules. Donner, à l'aide de GeoGebra, un « intervalle de confiance » de p à 95 % de confiance.

Cours

1 Exemples de lois à densité

A. Loi uniforme sur [a, b]

Générateur de « nombres aléatoires »

L'adjectif anglais *random* signifie aléatoire, c'est-à-dire dépendant du hasard. Le mot aléa vient du latin *alea* qui signifie « coup de dés », tandis que le mot hasard vient de l'arabe *azzahr* signifiant « jeu de dés ».

L'instruction Ran#, NbrAléat ou rand suivant le modèle de calculatrice ou ALEA( ) pour un tableur permet d'obtenir des nombres pseudo-aléatoires, c'est-à-dire une suite de nombres décimaux de l'intervalle [0, 1] qui s'approchent statistiquement de ce qui peut être considéré comme résultat du seul hasard, la notion de hasard étant très difficile à définir d'un point de vue théorique.

L'idéal serait de créer une suite de nombres compris entre 0 et 1, chacun ayant la même chance d'apparaître.

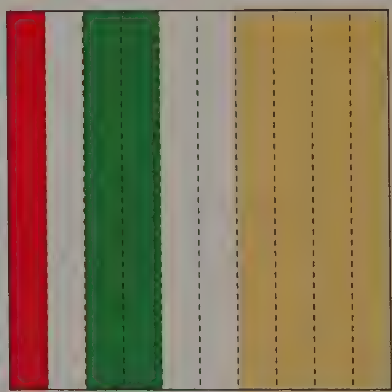
Nous savons, avec le lancer d'un dé bien équilibré, qu'il est possible d'obtenir les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 de façon équiprobable, la probabilité d'obtenir chacun étant $\frac{1}{6}$.

De manière plus générale, le prélèvement au hasard d'une boule dans une urne contenant n boules indiscernables au toucher correspond à une équiprobabilité, la probabilité d'obtenir chaque boule étant $\frac{1}{n}$.

Mais ici l'intervalle [0, 1] a une infinité d'éléments et attribuer une probabilité non nulle, même très petite, à l'obtention de chaque nombre de l'intervalle [0, 1] est en contradiction avec la définition d'une probabilité car $P(\Omega) = 1$.

On est donc amené à choisir un autre modèle pour définir des probabilités d'événements lorsque l'univers Ω des possibles a une infinité d'éléments.

Considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer une fléchette sur une cible carrée en considérant que la fléchette atteint la cible à chaque lancer et que tous les points de la cible ont, en théorie, la même chance d'être atteints.



La probabilité que la fléchette atteigne la cible est $P(\Omega) = 1$ et on peut supposer que la probabilité que la fléchette atteigne une partie de la cible est proportionnelle à l'aire de cette partie.

Divisons la cible en dix bandes rectangulaires de mêmes dimensions (voir la figure).

Alors la probabilité que la fléchette atteigne un point du rectangle rouge est $P(R) = \frac{1}{10}$ et, de même, pour la partie verte $P(V) = \frac{2}{10}$, pour la partie jaune $P(J) = \frac{4}{10}$ et pour l'ensemble des parties blanches $P(B) = \frac{3}{10}$.

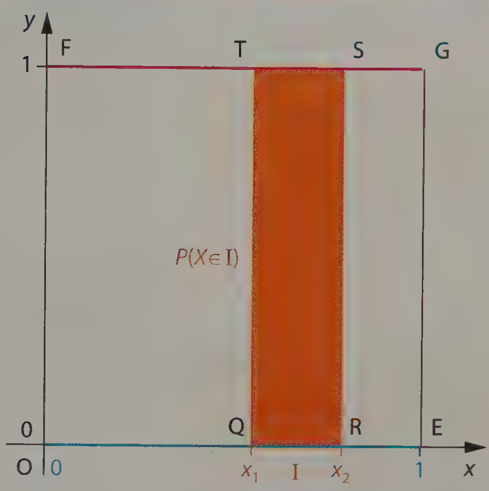
Loi uniforme sur [0, 1]

Revenons à l'intervalle [0, 1] représenté par le segment [OE] dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OE}}, \overrightarrow{\mathrm{OF}})$, sur la première figure de la page suivante.

Par analogie avec l'exemple ci-dessous de la cible, traçons le carré OEGF d'aire 1.

À tout intervalle $I = [x_1, x_2]$ inclus dans [0, 1], associons le rectangle QRST qui est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in I$ et $0 \leq y \leq 1$.

Nous pouvons alors considérer que la probabilité d'obtenir au hasard un nombre de l'intervalle [0, 1] appartenant à $I = [x_1, x_2]$ est l'aire du rectangle QRST, c'est-à-dire :
$QR \times QT = (x_2 - x_1) \times 1 = x_2 - x_1$.



Cette probabilité ne change pas si $I =]x_1, x_2[$, $[x_1, x_2[$ ou $]x_1, x_2]$ puisque nous avons vu que la probabilité d'obtenir exactement x_1 ou x_2 est nulle.

$x_2 - x_1$ est l'amplitude de l'intervalle $[x_1, x_2]$

L'intervalle [0, 1] a une infinité d'éléments.

DÉFINITION

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur [0, 1]** si et seulement si, pour tout intervalle I inclus dans [0, 1], la probabilité de l'événement « $X \in I$ » est l'aire de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in I$ et $0 \leq y \leq 1$.

$X \in I$ se lit « X prend une valeur dans I ».

Exemple

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [0, 1].

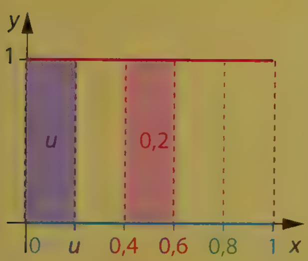
$P(U \in [0{,}4 ; 0{,}6]) = 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}2$.

$P(U = 0{,}8) = P(U \in [0{,}8 ; 0{,}8]) = 0$.

Pour tout nombre réel u de l'intervalle [0, 1],

$P(U \in [0, u]) = u - 0$, donc $P(U \leq u) = u$.

En particulier $P(U \leq 1) = 1$.

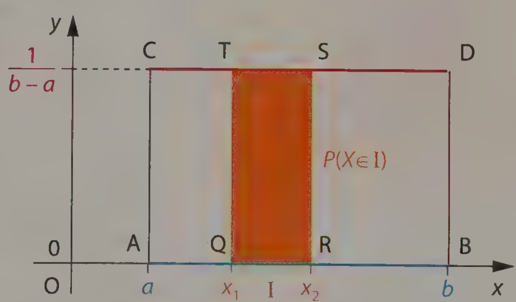


Remarque

Jusqu'à une date récente, tous les générateurs de « nombres aléatoires » reposaient sur le même modèle : la loi uniforme sur [0, 1].

Loi uniforme sur [a, b]

La définition précédente peut être généralisée à un intervalle $[a, b]$ quelconque en remplaçant le carré OEGF d'aire 1 par le rectangle ABDC d'aire 1 : $AB = b - a$ et $AB \times AC = 1$, donc $AC = \dfrac{1}{b-a}$.



La probabilité d'obtenir un nombre de l'intervalle $[a, b]$ appartenant à un intervalle $I = [x_1, x_2]$ inclus dans $[a, b]$ est l'aire du rectangle QRST, c'est-à-dire :

$$QR \times QT = (x_2 - x_1)\frac{1}{b-a} = \frac{x_2 - x_1}{b-a}.$$

Même résultat avec $I =]x_1, x_2[$ ou $[x_1, x_2[$ ou $]x_1, x_2]$.

Cours

La représentation graphique de la fonction constante f est le segment de droite [CD].

DÉFINITION

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur $[a, b]$** si et seulement si, pour tout intervalle I inclus dans $[a, b]$, la probabilité de l'événement « $X \in \mathrm{I}$ » est l'aire du domaine $\{M(x, y)\,;\, x \in \mathrm{I} \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où $f : x \mapsto \dfrac{1}{b-a}$ est la **fonction de densité** de la loi uniforme sur $[a, b]$.

D'après le calcul de QR × QT ci-dessus, nous obtenons le résultat suivant.

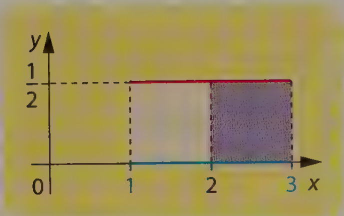
Même résultat avec $]x_1, x_2[$, $[x_1, x_2[$ ou $]x_1, x_2]$.

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi uniforme sur $[a, b]$**. Pour tout intervalle $[x_1, x_2]$ inclus dans $[a, b]$,

$$P(X \in [x_1, x_2]) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$$

La probabilité que X prenne une valeur dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ est le quotient des longueurs des intervalles $[x_1, x_2]$ et $[a, b]$.



Exemple

Pour une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur [1, 3], la fonction de densité est définie sur [1, 3] par $f(x) = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$.

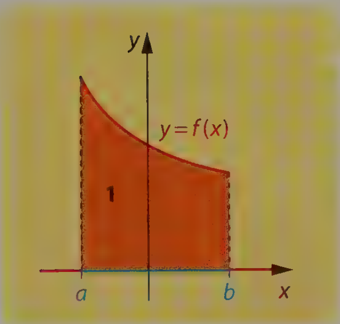
$P(X \in [1, 2]) = \dfrac{2-1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$: c'est l'aire du domaine jaune clair.

$P(X \in [2, 3]) = \dfrac{3-2}{3-1} = \dfrac{1}{2}$: c'est l'aire du domaine violet.

$P(X \in [1{,}99\,;\,2{,}01]) = \dfrac{2{,}01-1{,}99}{3-1} = \dfrac{0{,}02}{2} = 0{,}01.$

$P(X = 2) = 0.$

$P(X \in [1, 3]) = \dfrac{3-1}{3-1} = \dfrac{2}{2} = 1.$



Remarque

De façon plus générale, pour une variable aléatoire à densité sur $[a, b]$, la **fonction de densité** f vérifie les trois conditions :
- f est positive : pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \geq 0$;
- f est continue sur $[a, b]$, sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
- $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. (L'aire sous la courbe est $P(\Omega) = 1$).

On peut étendre la définition de f à $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = 0$ pour tout x n'appartenant pas à $[a, b]$.

Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$

L'activité d'approche **1** a permis, dans le cas d'une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur [0, 1], d'introduire comme expression de l'espérance de X :

$E(X) = \int_0^1 x\,dx.$

Comme la fonction de densité f de la loi uniforme sur [0, 1] est définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-0} = 1$, nous pouvons écrire que $E(X) = \int_0^1 x\,f(x)\,dx$.

Plus généralement, pour une variable aléatoire à densité sur $[a, b]$, on définit $E(X)$ de la façon suivante.

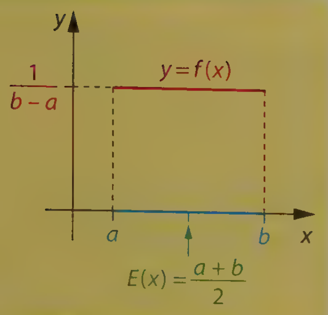
Cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(X = x_i)$ d'une variable aléatoire discrète X prenant n valeurs $x_1, \ldots, x_n$.

DÉFINITION

L'**espérance** d'une variable aléatoire X à densité sur $[a, b]$ est $\boldsymbol{E(X) = \int_a^b x\,f(x)\,dx}$ où f est la fonction de densité.

Si X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, alors $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ pour tout x de $[a, b]$.

Donc $E(X)=\displaystyle\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx$,



$$E(X)=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right),$$

$$E(X)=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

PROPRIÉTÉ

L'**espérance** d'une variable aléatoire X qui suit la **loi uniforme sur $[a, b]$** est $\boldsymbol{E(X)=\dfrac{a+b}{2}}$.

Ce résultat peut être interprété de la façon suivante : lorsqu'une expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ est répétée un très grand nombre de fois, la moyenne des valeurs prises par X devient voisine de $\dfrac{a+b}{2}$ qui est le centre de l'intervalle $[a, b]$.

La valeur prises à gauche et à droite du centre $\dfrac{a+b}{2}$ de l'intervalle $[a, b]$ s'équilibrent à long terme.

Variance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$

L'activité d'approche 1 a aussi permis, dans le cas d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [0, 1], d'introduire comme expression de la variance de X :

$V(X)=\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx-(E(X))^2$, qui peut aussi s'écrire $V(X)=\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,dx-(E(X))^2$ puisque la fonction de densité f de X est définie par $f(x)=1$.

Notez l'analogie avec la démarche conduisant à la définition de $E(X)$.

Plus généralement, pour une variable aléatoire à densité sur $[a, b]$, on définit $V(X)$ de la façon suivante.

DÉFINITIONS

La **variance** d'une variable aléatoire X à densité sur $[a, b]$ est $\boldsymbol{V(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-(E(X))^2}$ où f est la fonction de densité.

L'**écart type** est $\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$

Si X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, alors $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ pour tout x de $[a, b]$.

$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$.

Donc $V(X)=\displaystyle\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,

$$V(X)=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b-\frac{(a+b)^2}{4},$$

$b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)$.

$$V(X)=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)-\frac{(a+b)^2}{4},$$

$$V(X)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4},$$

$$V(X)=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12},$$

$$V(X)=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

PROPRIÉTÉ

La **variance** d'une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$ est $\boldsymbol{V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}}$.

EXERCICE résolu 1

Étude d'une situation relevant de la loi uniforme

ÉNONCÉ

Sur une autoroute, deux postes consécutifs de téléphone de secours A et B sont distants de 5 km.

On note X la variable aléatoire qui, à tout véhicule tombant en panne entre A et B, associe la distance en km parcourue depuis le poste A.

On considère que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 5]$.

1° Donner la fonction de densité f de la variable aléatoire X.

2° Calculer les probabilités $P(X \in [0, 1])$ et $P(X \in [3, 5])$.

3° a) Calculer l'espérance $E(X)$.

b) Donner une interprétation de $E(X)$ dans le contexte de l'énoncé.

4° Calculer la variante $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

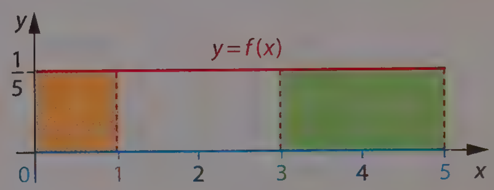
MÉTHODE

SOLUTION

Utiliser la définition de la loi uniforme sur $[a, b]$.

1° La fonction de densité de X est la fonction f définie sur $[0, 5]$ par $f(x) = \dfrac{1}{5}$.

2°



Utiliser la définition de la loi uniforme sur $[a, b]$.

$P(X \in [0, 1]) = (1 - 0) \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}$.

$P(X \in [3, 5]) = (5 - 3) \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{5}$.

Utiliser la définition de $E(X)$.

3° a) $E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx$, donc ici $E(X) = \int_0^5 \dfrac{x}{5}\,dx$, $E(X) = \left[\dfrac{x^2}{10}\right]_0^5 = \dfrac{25}{10} = 2{,}5$.

Appliquer la formule donnant $E(X)$.

On peut aussi appliquer directement la formule $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Ici $E(X) = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$.

b) Pour un très grand nombre de véhicules tombant en panne entre A et B, la distance moyenne parcourue depuis le poste A est voisine de 2,5 km.

Utiliser la définition de $V(X)$.

4° $V(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - [E(x)]^2$, donc ici

$V(X) = \int_0^5 \dfrac{x^2}{5}\,dx - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2$, donc $V(X) = \left[\dfrac{x^3}{15}\right]_0^5 - \dfrac{25}{4}$,

$V(X) = \dfrac{125}{15} - \dfrac{25}{4} = 25\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right)$,

$V(X) = \dfrac{25}{12} \approx 2{,}083\,3$.

Appliquer la formule donnant $V(X)$.

On peut aussi appliquer directement la formule $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Ici, $V(X) = \dfrac{25}{12} \approx 2{,}083\,3$.

Utiliser la définition de $\sigma(X)$.

Par définition $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, donc ici $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{25}{12}}$, $\sigma(X) = \dfrac{5}{2\sqrt{3}} \approx 1{,}44$.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 1

B. Loi exponentielle

L'activité d'approche **2** sur la durée de fonctionnement d'un matériel non soumis à un phénomène d'usure et le **TP2** sur la radioactivité conduisent à étudier des variables aléatoires à densité, prenant leurs valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty]$, dont la fonction de densité est d'un type particulier.

DÉFINITION

La **loi exponentielle de paramètre** λ, où $\lambda > 0$, est la loi à densité dont la fonction de densité est définie sur $[0, +\infty[$ par :
$\boldsymbol{f(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$.

La variable est ici notée t car elle correspond très souvent à un instant.

Exemple

$(e^u)' = u'e^u$.
Pour tout x réel, $e^x > 0$.

Voir, au chapitre 5, la limite de e^u.

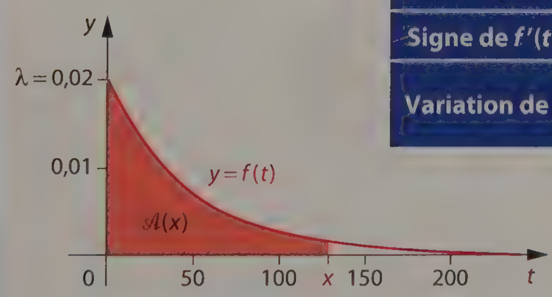
Dans le cas particulier où $\lambda = 0{,}02$ on a $f(t) = 0{,}02\, e^{-0{,}02t}$ pour tout t positif.

$f'(t) = -(0{,}02)^2\, e^{-0{,}02t} < 0$.

$f(0) = 0{,}02$ car $e^0 = 1$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}02t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}02t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$: la courbe représentative de f a pour asymptote l'axe des abscisses.

t	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$
Variation de f	$0{,}02 \searrow 0$



L'aire de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées, la courbe et la droite verticale d'équation $t = x$, où $x > 0$, est :

$\mathscr{A}(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donc ici $\mathscr{A}(x) = \int_0^x 0{,}02\, e^{-0{,}02t}\,dt$.

$\mathscr{A}(x) = [-e^{-0{,}02t}]_0^x$, donc $\mathscr{A}(x) = -e^{-0{,}02x} - (-e^0)$, $\mathscr{A}(x) = 1 - e^{-0{,}02x}$.

Nous venons de démontrer ci-dessus que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}02x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathscr{A}(x) = 1$.

L'aire sous la courbe représentative de la fonction f est égale à 1 unité d'aire, alors que c'est l'aire d'une partie du plan illimitée à droite.

Remarque

Les propriétés obtenues dans le cas particulier où $\lambda = 0{,}02$ restent valables dans le cas général où $\lambda > 0$. Ainsi nous observons que la fonction f satisfait aux trois conditions caractérisant une fonction de densité, mais ici celle-ci est définie sur $[0, +\infty[$ et non sur $[a, b]$.

Voir la remarque au paragraphe **A.** (page 254)

Calcul de probabilités

On étend à l'intervalle $[0, +\infty[$ les définitions et résultats concernant les variables aléatoires à densité sur $[a, b]$.

Une probabilité reste l'aire d'une partie de plan située sous la courbe de la fonction de densité.

À RETENIR

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tout $[x_1, x_2]$ inclus dans $[0, +\infty[$, $\boldsymbol{P(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda e^{-\lambda t} dt}$.

En particulier, pour tout $x \geq 0$, $\boldsymbol{P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt}$.

$\lambda > 0$.

Ici $x_1 = 0$ et $x_2 = x$ et $P(X \leq x) = \mathcal{A}(x)$.

Exemple

Reprenons le cas où $\lambda = 0{,}02$.

La probabilité que X prenne une valeur comprise entre 20 et 50 est $P(X \in [20, 50]) = \int_{20}^{50} 0{,}02 e^{-0{,}02t} \, dt$, donc $P(X \in [20, 50]) = e^{-0{,}4} - e^{-1} \approx 0{,}302$.

La probabilité que X prenne une valeur inférieure ou égale à 100 est $P(X \leq 100) = \int_0^{100} 0{,}02\, e^{-0{,}02t} dt$, donc $P(X \leq 100) = 1 - e^{-2} \approx 0{,}865$.

Voir l'exemple ci-dessus.

Les calculs d'intégrale sont effectués à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur. La démonstration détaillée est rédigée ci-dessus pour le calcul de l'aire $\mathcal{A}(x)$.

Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle

DÉFINITION

L'**espérance** d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle est $\boldsymbol{E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t\, f(t)\, dt}$, où f est la fonction de densité.

Comme $f(t) = \lambda e^{-dt}$, on a $E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} \, dt$.

Soit G la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $G(t) = -te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$.

$G'(t) = -e^{-\lambda t} - t(-\lambda)e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}(-\lambda)e^{-\lambda t}$,

$G'(t) = -e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}$,

$G'(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

$(uv)' = u'v + uv'$ et $(e^u)' = u'e^u$.

Donc G est une primitive de la fonction $t \mapsto \lambda t e^{-\lambda t}$.

$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = G(x) - G(0)$.

Or $G(0) = -\frac{1}{\lambda}$ par définition de G.

Donc $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} \, dt = -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$.

En section de technicien supérieur une méthode d'intégration sera introduite, permettant d'obtenir la valeur de l'intégrale $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} \, dt$ sans donner, comme ici, la fonction G.

Cherchons la limite en $+\infty$ des deux premiers termes de cette somme.

$-xe^{-\lambda x} = -\frac{x}{e^{\lambda x}} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}}$;

$\lim_{x \to +\infty} \lambda x = +\infty$ car $\lambda > 0$ et $\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ car l'inverse $\frac{e^X}{X}$ a pour limite $+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} = 0$.

Nous avons déjà démontré que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} = 0$.

$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt$ est donc la somme de la constante $\frac{1}{\lambda}$ et de deux termes qui ont pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$.

En conclusion, $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$, donc $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

PROPRIÉTÉ

L'**espérance** d'une variable aléatoire X qui suit la **loi exponentielle de paramètre** λ est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Ce résultat peut être interprété de la façon suivante : lorsqu'une expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ est répétée un très grand nombre de fois, la moyenne des valeurs prises par X devient voisine de $\frac{1}{\lambda}$.

Exemple

Pour une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}02$, l'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{0{,}02}$, donc $E(X) = 50$.

Vous pouvez observer sur la figure du début du paragraphe **B.** que $E(X) = 50$ est l'abscisse du point où la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 et d'ordonnée $\lambda = 0{,}02$ coupe l'axe des abscisses.

Remarque

Avec un tableur ou une calculatrice on peut simuler une loi exponentielle à partir de la loi uniforme sur $]0, 1]$; ceci peut notamment permettre de conforter l'interprétation ci-dessus de l'espérance $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Ce résultat reste vrai dans le cas général où $\lambda > 0$: démontrez le !

La justification de la méthode de la transformation inverse mise en œuvre dans l'exercice **29**, en remarquant que si U suit cette loi uniforme il en est de même de $1 - U$, n'est pas au programme de terminale STI2D-STL.

EXERCICE résolu 2

Étude d'une situation relevant de la loi exponentielle

ÉNONCÉ

On note T la variable aléatoire qui, à tout composant électronique d'un certain type, prélevé au hasard dans un stock, associe sa durée de fonctionnement (en heure) avant une défaillance.

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,000 5.

1° Donner la fonction de densité.

2° Calculer les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-3}) :

A : la durée de bon fonctionnement du composant prélevé est inférieure à 1 000 heures ;

B : le composant prélevé fonctionne encore au bout de 500 heures ;

C : la durée de bon fonctionnement du composant prélevé est comprise entre 500 h et 1 000 h.

3° a) Déterminer l'espérance $E(T)$.

b) Donner une interprétation de $E(T)$ dans le contexte de l'énoncé.

MÉTHODE

Utiliser la définition de la loi exponentielle.

Utiliser un résultat sur la loi exponentielle.

Introduire l'événement contraire.

Utiliser un résultat sur la loi exponentielle.

Utiliser $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$.

Utiliser un résultat sur la loi exponentielle.

Appliquer la formule donnant $E(T)$.

SOLUTION

1° Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 0{,}000\,5\mathrm{e}^{-0{,}000\,5t}$.

2° $P(A) = P(T \leq 1\,000)$, donc $P(A) = \int_0^{1000} 0{,}000\,5\mathrm{e}^{-0{,}000\,5t}\,\mathrm{d}t$

$P(A) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}393$, les calculs étant effectués avec un tableur ou une calculatrice.

L'événement contraire de B est $\overline{B}$: la durée de bon fonctionnement du composant est inférieure à 500 heures.

Donc $P(\overline{B}) = \int_0^{500} 0{,}000\,5\mathrm{e}^{-0{,}000\,5t}\,\mathrm{d}t$,

$P(\overline{B}) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}25} \approx 0{,}221$.

Comme $P(B) = 1 - P(\overline{B})$, on a $P(B) = \mathrm{e}^{-0{,}25}$, $P(B) \approx 0{,}779$.

C est l'événement $T \in [500, 1\,000]$ dont la probabilité est :

$P(500 \leq T \leq 1000) = \int_{500}^{1000} 0{,}000\,5\mathrm{e}^{-0{,}0005t}\,\mathrm{d}t$,

$P(C) = \mathrm{e}^{-0{,}25} - \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}172$.

3° a) $E(T) = \frac{1}{\lambda}$, donc ici $E(T) = \frac{1}{0{,}000\,5} = 2\,000$.

b) Pour un très grand nombre de composants prélevés, la moyenne de leur temps de bon fonctionnement est voisine de 2 000 heures.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 6

Dans cet exercice, on étudie la fiabilité d'un dispositif (ici un composant électronique).

AFNOR : Association Française pour la NORmalisation.

Pour l'AFNOR, la **fiabilité** est « la caractéristique d'un dispositif qui s'exprime par la probabilité pour ce dispositif d'accomplir une fonction requise, dans des conditions données, pendant une période donnée ».

Le nombre $E(T)$ est noté habituellement MTBF ; Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement.

À l'origine, MTBF est le sigle de *Mean Time Between Failures*, qui se traduit par « temps moyen entre (deux) défaillances ».

De même, en maintenabilité, on introduit la Moyenne des Temps Techniques de Réparation, notée MTTR, dont l'origine est *Mean Time To Repair* : temps moyen pour réparer.

C. Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

L'activité d'approche **3** nous a permis d'observer, sur un exemple, que l'addition de phénomènes aléatoires indépendants et de même loi uniforme conduit à une nouvelle loi, appelée loi normale car son champ d'intervention est très vaste.

Une loi normale intervient dans la modélisation de **phénomènes aléatoires possédant de nombreuses causes indépendantes dont les effets s'ajoutent, sans que l'un d'eux soit dominant**.

Compte tenu de la complexité des processus industriels ou de laboratoire et des phénomènes économiques et sociaux, la loi normale apparaît dans de nombreux secteurs, y compris pour les calculs d'erreurs.

On dit aussi loi de Laplace-Gauss : Pierre Simon de Laplace est un mathématicien français (1749-1827) ; Carl Friedrich Gauss est un mathématicien allemand (1777-1855) qui a introduit cette loi pour des calculs d'erreurs.

DÉFINITION

La **loi normale** $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ **d'espérance ou de moyenne** μ **et d'écart type** σ est la loi à densité dont la fonction de densité est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Exemple

$\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

La loi normale centrée réduite est la loi $\mathcal{N}(0\,,1)$.

Sa fonction de densité est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Pour tout t réel, $f(-t) = f(t)$: la fonction f est paire et sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

Ici $u(t) = -\frac{t^2}{2}$.

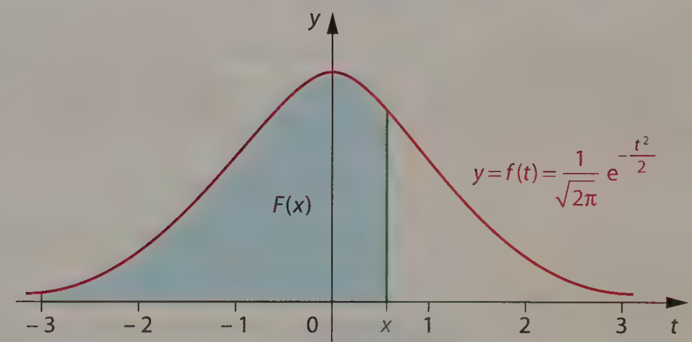
Pour tout x, on a $\mathrm{e}^x > 0$.

$f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{2t}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$, donc $f'(t)=-\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ a le signe de $-t$.

$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0,4$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{t^2}{2}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x=0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$.

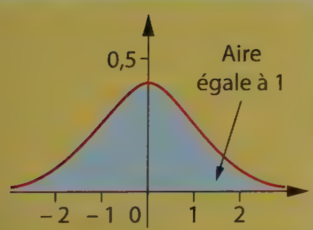
t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$
Variation de f	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ↘	0



Cette courbe est appelée « courbe en cloche ».

Pour la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ on ne connaît pas l'expression algébrique de ses primitives et il en est de même pour la fonction de densité f.

Nous admettons ici que l'aire de la partie du plan limitée par la courbe et l'axe des abscisses, illimitée à gauche et à droite, est égale à 1 unité d'aire.



L'aire $F(x)$ de la partie de plan limitée par la courbe, l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $t = x$ et illimitée à gauche est notée $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

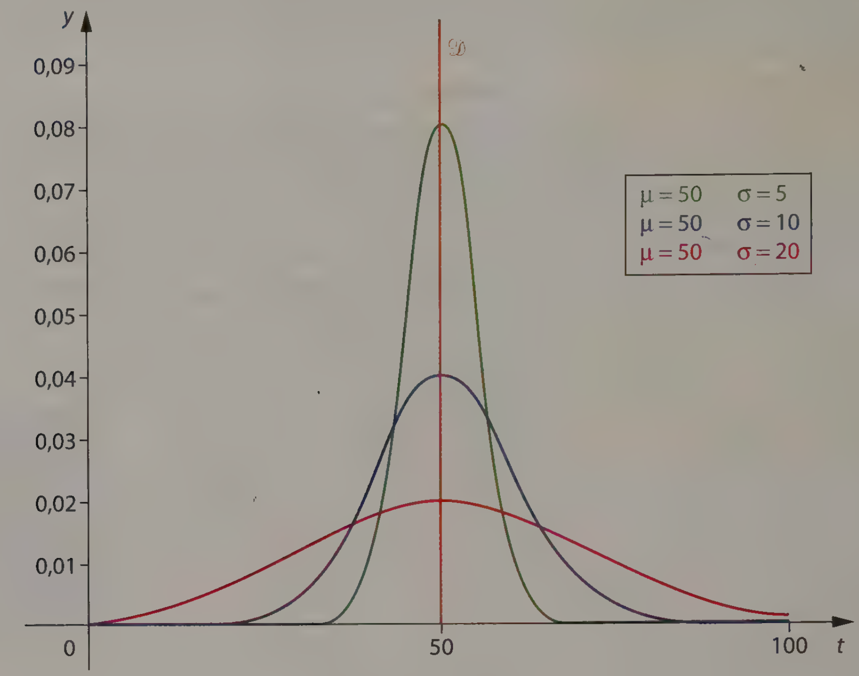
Pour chaque valeur fixée de x, la valeur numérique de $F(x)$ peut être obtenue à l'aide d'un tableur par l'instruction =LOI.NORMALE.STANDARD(x) qui donne, par exemple, $F(1{,}96) \approx 0{,}975$.

Cette instruction n'est valable que pour la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque

Dans le cas général où μ et σ sont des nombres réels quelconques, avec $\sigma > 0$, la courbe représentative de la fonction de densité définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$ admet la droite verticale $\mathcal{D}$ d'équation $t = \mu$ comme axe de symétrie.

L'aire de la partie du plan limitée par la courbe et l'axe des abscisses, illimitée à gauche et à droite reste égale à 1 unité d'aire.
Pour une même valeur de μ, l'allure de la courbe est plus ou moins resserrée ou étalée suivant que σ est plus ou moins petit.



C'est le cas en particulier lorsque X mesure un prix, une longueur, une masse ou une fréquence.

Ces observations graphiques permettent d'expliquer qu'une loi normale peut concerner une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans une partie seulement de $\mathbb{R}$, par exemple $[0, +\infty[$, $[30, 70]$ ou même $[0, 1]$.

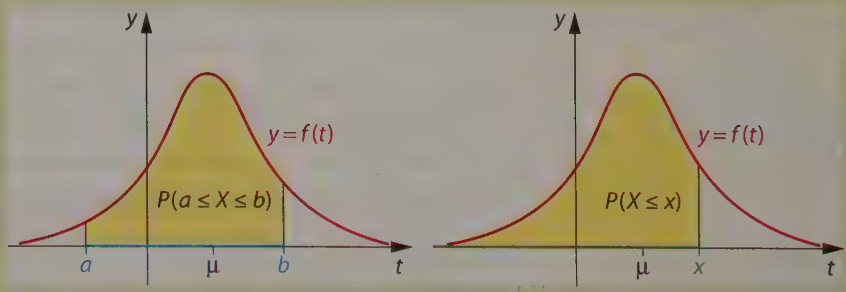
Calcul de probabilités

Une probabilité reste l'aire d'une partie de plan située sous la courbe de la fonction de densité.

On étend à $\mathbb{R}$ les définitions et résultats concernant les variables aléatoires à densité sur $[a, b]$ ou $[0, +\infty[$.

À RETENIR

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de fonction de densité f.



$P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b)$.

Les valeurs numériques de a, b et x étant données, on obtient les valeurs numériques de $P(a \leq X \leq b)$ ou $P(X \leq x)$ en utilisant une calculatrice ou un tableur et en remarquant, si nécessaire, que $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$.

Cette égalité se lit sur les figures ci-dessus.

Le **TP3** explique comment obtenir ces probabilités avec une calculatrice.

On obtient $P(X < x)$ par l'égalité : $P(X < x) = P(X \leq x)$ car $P(X = x) = 0$.

Avec un tableur la probabilité $P(X \leq x)$ est obtenue en entrant les valeurs de x, μ et σ dans l'instruction =LOI.NORMALE(x;μ;σ;1) ou =LOI.NORMALE (x;μ;σ;VRAI).

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(10\,;15)$.

$P(X \leq 10) = 0{,}5$ et $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 0{,}5$. Ces deux résultats étaient prévisibles car, comme $\mu = 10$, la droite verticale d'équation $t = 10$ est axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction de densité et l'aire totale sous cette courbe est égale à 1.

$P(7 \leq X \leq 13) \approx 0{,}95$; donc ici $P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)] \approx 0{,}95$.

$P(8{,}5 \leq X \leq 11{,}5) \approx 0{,}68$; donc ici $P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma)] \approx 0{,}68$.

$P(5{,}5 \leq X \leq 14{,}5) \approx 0{,}9973$; donc ici $P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)] \approx 0{,}997$.

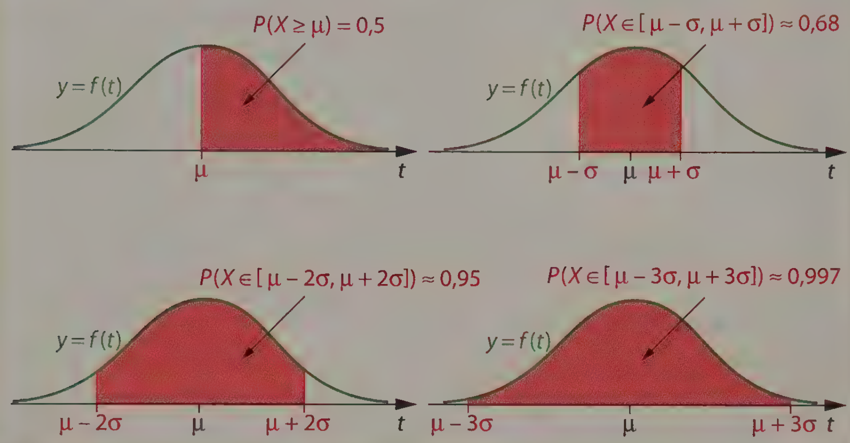
$X > 10$ est l'événement contraire de $X \leq 10$.

Remarquez que :
$[7, 13] = [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
$[8{,}5\,;11{,}5] = [\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
$[5{,}5\,;14{,}5] = [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$.

Nous admettons que ces résultats concernant ces intervalles restent vrais pour une loi normale, quelles que soient les valeurs de l'espérance μ et de l'écart type σ.

À RETENIR

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.



Pour plus de précision, remplacer 2 par 1,96.

Remarque

Avec un tableur ou une calculatrice on peut simuler une loi normale à partir de la loi uniforme sur [0, 1].
L'exercice corrigé 32 propose un algorithme à ce sujet en s'appuyant sur la **méthode de convolution**. Celle-ci peut être améliorée par la **transformation de Box-Muller** ou la **méthode ziggourat** qui est une **méthode de rejet** particulière.

La justification de ces méthodes n'est pas au programme de terminale STI2D-STL.

Le **TP4** fournit un exemple de mise en œuvre de la méthode du rejet.

EXERCICE résolu 3 Étude d'une situation relevant de la loi normale

ÉNONCÉ

Le cahier des charges de l'usinage d'une tige prévoit pour sa longueur, en cm, l'intervalle de tolérance [4,40 ; 4,80].

Le service qualité constate qu'un premier lot de tiges fabriquées correspond à une distribution normale de moyenne 4,52 cm et d'écart type 0,21 cm.

1° Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit acceptable. Arrondir à 10^{-3}.

2° Après avoir procédé à un réglage, un second lot correspondant à une distribution normale de moyenne 4,70 cm et d'écart type 0,15 cm est usiné. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce second lot soit acceptable. Arrondir à 10^{-3}.

3° a) Quel lot a sa moyenne la plus proche du centre de l'intervalle de tolérance ?

b) Sur quel paramètre l'effet du réglage a été le plus bénéfique ?

MÉTHODE

Définir une variable aléatoire et donner sa loi.

Utiliser un tableur ou une calculatrice pour calculer une probabilité..

Interpréter des résultats dans le contexte de l'énoncé.

SOLUTION

1° Soit X la variable aléatoire qui à toute tige prélevée au hasard dans le premier lot associe sa longueur en cm.

X suit la loi normale $\mathcal{N}(4{,}52\,;0{,}21)$.

La probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit acceptable est $P(X \in [4{,}40\,;4{,}80]) \approx 0{,}625$.

2° Analogue avec la variable aléatoire Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(4{,}70\,;0{,}15)$.

$P(Y \in [4{,}40\,;4{,}80]) \approx 0{,}725$.

3° a) $4{,}60 - 4{,}52 = 0{,}08$ et $4{,}70 - 4{,}60 = 0{,}10$.

C'est le premier lot qui a sa moyenne la plus proche du centre de l'intervalle de tolérance.

b) Le réglage a eu pour effet de diminuer l'écart type, c'est-à-dire la dispersion autour de la moyenne, ce qui a amélioré la conformité de la production au cahier des charges.

VOIR AUSSI LES EXERCICES CORRIGÉS 9, 10, 18

D. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Pour la loi binomiale introduite en Première, un exercice résolu permet de rappeler la démarche attendue.

EXERCICE résolu 4 — Étude d'une situation relevant de la loi binomiale

ÉNONCÉ

Une statistique portant sur l'ensemble des candidats des séries STI2D et STL du baccalauréat montre que 10 % choisissent une épreuve facultative A, 30 % une épreuve facultative B et 60 % une épreuve facultative C.

On prélève au hasard les fiches de 30 candidats, l'effectif total étant suffisamment important pour que l'on puisse considérer ce prélèvement effectué avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 30 fiches, associe le nombre de candidats ayant choisi l'épreuve A.

Dans ce qui suit, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

1° Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2° a) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun candidat ne choisisse l'épreuve facultative A.

b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, exactement un candidat choisisse l'épreuve facultative A.

3° Déduire de la question **2°** :

a) la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un candidat choisisse l'épreuve facultative A ;

b) la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins un candidat choisisse l'épreuve facultative A.

MÉTHODE

Mettre en évidence une épreuve de Bernoulli.

Mettre en évidence un schéma de Bernoulli.

En déduire l'existence de la loi binomiale.

Pour l'usage de la calculatrice se reporter au **TP1** de ce chapitre.

On peut aussi obtenir directement $P(X \leq 1)$ avec la calculatrice.

SOLUTION

1° • Chaque épreuve élémentaire, le tirage d'une fiche au hasard, peut déboucher sur deux résultats et deux seulement :

0,1 — Le candidat choisit l'épreuve facultative A.

0,9 — Le candidat ne choisit pas cette épreuve.

C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}1$.

• Chaque prélèvement de 30 fiches est constitué par la répétition 30 fois, de façon identique et indépendante, de l'épreuve élémentaire, puisque le prélèvement est associé à un tirage avec remise. (C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}1$.)

• Donc la variable aléatoire X qui associe à ces tirages le nombre de candidats choisissant l'épreuve facultative A suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}1$.

2° a) Avec la calculatrice on obtient, en arrondissant à 10^{-2}, $P(X = 0) \approx 0{,}04$.

b) De même, on obtient : $P(X = 1) \approx 0{,}14$.

Avec un tableur le calcul de $P(X = k)$ est réalisé avec l'instruction =LOI.BINOMIALE(k;n;p;0) ou =LOI.BINOMIALE(k;n;p;FAUX).

3° a) On cherche $P(X \leq 1) = P\{(X = 0) \cup (X = 1)\}$.

Les deux événements sont incompatibles, donc $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$.

D'où : $P(X \leq 1) \approx 0{,}04 + 0{,}14$; $P(X \leq 1) \approx 0{,}18$.

On sait que, pour tout événement A, $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Avec un tableur le calcul de $P(X \leq k)$ est réalisé avec l'instruction =LOI.BINOMIALE(k;n;p;1) ou =LOI.BINOMIALE(k;n;p;VRAI).

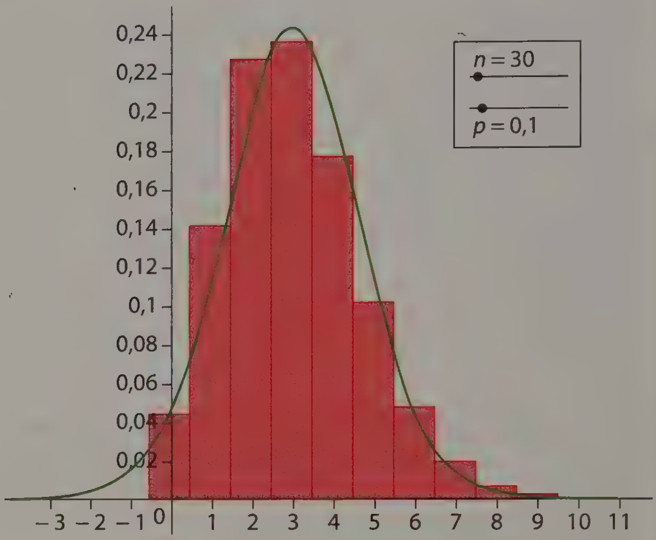
b) On cherche $P(X \geq 1)$. Les deux événements $(X \geq 1)$ et $(X = 0)$ sont contraires.

Donc $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$; $P(X \geq 1) \approx 0{,}96$.

VOIR AUSSI LES EXERCICES CORRIGÉS 21 et 44

La classe d'un entier k est représentée par un rectangle de largeur le segment d'extrémités $k - 0{,}5$ et $k + 0{,}5$.

Prolongeons l'étude de cette statistique en traçant avec un logiciel l'histogramme de la loi binomiale $\mathcal{B}(30 ; 0{,}1)$ associée au choix de l'épreuve facultative A, les classes de probabilité quasi nulle n'étant pas dessinées.



Rappelons les propriétés suivantes d'une loi binomiale.

PROPRIÉTÉ

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est $\boldsymbol{E(X) = np}$.

L'espérance $E(X)$ peut être interprétée comme tendance à long terme de la valeur moyenne observée $\overline{x}$ dans le cas d'un grand nombre de réalisations du schéma de Bernoulli associé à la variable aléatoire X.

PROPRIÉTÉ

La **variance** d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est $\boldsymbol{V(X) = np(1-p)}$.

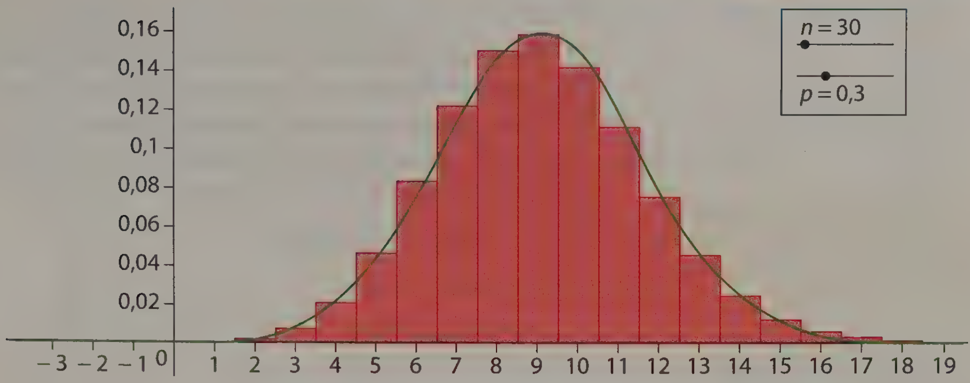
Son **écart type** est $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$.

Ici $n = 30$ et $p = 0{,}1$; donc $E(X) = 3$ et $\sigma(X) = \sqrt{2{,}7} \approx 1{,}643$.

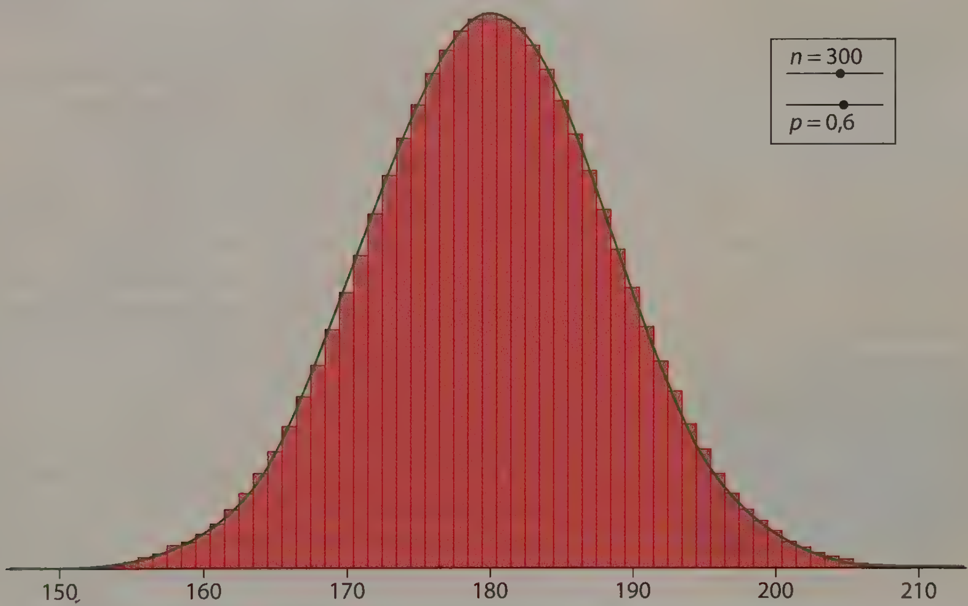
Dans le même repère figure la courbe en cloche représentative de la fonction de densité associée à la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de même espérance $\mu = 3$ et de même écart type $\sigma = \sqrt{2{,}7}$.

Les deux figures suivantes représentent de même :

- L'histogramme de la loi binomiale $\mathcal{B}(30 ; 0{,}3)$ correspondant à un prélèvement des fiches de 30 candidats pour l'épreuve facultative B et la courbe en cloche de la loi normale de même espérance $30 \times 0{,}3 = 9$ et de même écart type $\sqrt{6{,}3} \approx 2{,}510$.



- L'histogramme de la loi binomiale $\mathcal{B}(300\,;\,0{,}6)$ correspondant à un prélèvement des fiches de 300 candidats pour l'épreuve facultative C et la courbe en cloche de la loi normale de même espérance $300 \times 0{,}6 = 180$ et de même écart type $\sqrt{72} \approx 8{,}485$.



Nous observons sur la dernière figure une très bonne coïncidence des deux représentations graphiques, ce qui est encore à peu près le cas pour la deuxième figure.

En revanche l'histogramme de la première figure est trop dissymétrique pour se superposer correctement à une courbe en cloche.

Plus généralement nous admettons le résultat suivant.

Ce résultat a été publié en 1718 par de Moivre en Angleterre puis, de façon indépendante, en 1812, par Laplace. Les conditions d'approximation d'une loi binomiale par une loi normale *n'ont pas à être mémorisées.* **La seule capacité exigible est de savoir que lorsqu'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, les paramètres de cette loi sont donnés par $\mu = np$, et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, c'est-à-dire que l'espérance mathématique et l'écart type sont conservés.**

PROPRIÉTÉ

Si n est « *grand* » et si p n'est « ni *trop voisin* de 0 ni *trop voisin* de 1 », alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ admet pour approximation la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de **même espérance** et de **même écart type** :

$$\mu = np \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

Les conditions d'approximation ne sont pas précisées ici car elles peuvent être différentes d'un secteur professionnel à l'autre en fonction de contraintes spécifiques.

Exemple

Reprenons la situation de la dernière figure : la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(300 ; 0{,}6)$ admet pour approximation la variable aléatoire Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(180, \sqrt{72})$ de même espérance et de même écart type.

À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice nous obtenons :

$P(X \in [172, 185]) \approx 0{,}552$

$P(Y \in [172, 185]) \approx 0{,}549$

$P(X \leq 190) \approx 0{,}892$

$P(Y \leq 190) \approx 0{,}880.$

Conformément au programme de terminale STI2D-STL, on n'envisage pas ici une correction de continuité.

2 Échantillonnage et prise de décision

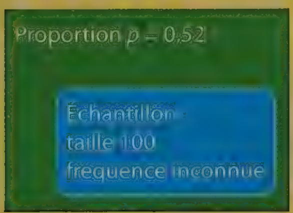
Il s'agit de poursuivre, avec de nouveaux outils, l'étude abordée en Première.

A. Intervalle de fluctuation asymptotique, à environ 95 %, d'une fréquence avec la loi normale

Exemple : sondage « au sortir des urnes »

En France, pour les élections législatives et présidentielles, on effectue depuis plusieurs dizaines d'années des sondages « au sortir des urnes » : il s'agit d'interroger un échantillon d'électeurs juste après qu'ils ont voté. L'intérêt est, par une batterie de questions ne se limitant pas au vote émis, de pouvoir analyser les votes suivant l'âge, le sexe, la profession, …, en considérant que chaque personne sondée dit la vérité.

Les sondages avant le vote ne sont qu'une photographie à un moment donné, chacun pouvant ensuite changer d'avis avant de voter.



Population des votants

On suppose que le candidat A est élu par 52 % des votants. Chaque fois qu'un échantillon de 100 votants est choisi au hasard pour un tel sondage, il est illusoire de penser qu'exactement 52 % d'entre eux déclarent qu'ils ont voté pour A. En réalité cette fréquence exprimée en pourcentage va fluctuer autour de 52 %. Cette fréquence peut-elle être égale à 45 % ? 40 % ? 60 % ? 70 % ?

Tout est possible, mais plus ou moins probable.

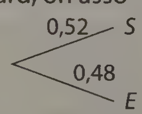
On peut même obtenir 0 % ou 100 % mais il est extrêmement peu probable que, sur 100 votants pris au hasard, aucun n'ait voté pour A ou que tous aient voté pour A.

La loi binomiale va nous aider à préciser les choses.

Considérons l'expérience aléatoire : à tout votant interrogé au hasard, on associe son vote :

– soit pour A, considéré ici comme un succès S,

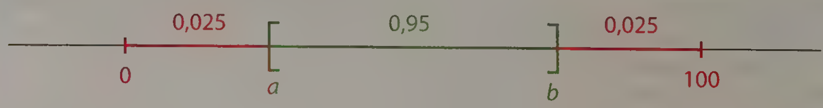
– soit un autre vote, considéré ici comme un échec E.



Il s'agit d'une expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}52$. On répète 100 fois cette expérience aléatoire et on appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de succès ainsi obtenus. En supposant que les 100 épreuves de Bernoulli sont indépendantes, nous savons que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}52$.

Répéter 100 fois cette expérience revient à interroger un échantillon de 100 votants pris au hasard.

L'idéal serait de trouver un intervalle $[a, b]$ tel que X prenne une valeur dans cet intervalle avec la probabilité 0,95 ; les 0,05 restant se partageant de façon égale à gauche et à droite de cet intervalle.



Par exemple X ne prend aucune valeur entre 50 et 51.

Mais comme X prend des valeurs entières, on ne peut pas, sauf exception, trouver un tel intervalle $[a, b]$ avec cette variable aléatoire.

Voir la fin de la partie **1**.

Cependant, si les conditions d'approximation d'une loi binomiale par une loi normale sont réunies, alors nous pouvons remplacer la variable aléatoire X par la variable aléatoire Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ d'espérance $\mu = np = 52$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{24,96} \approx 5$.

Or pour une loi normale nous savons que :

$P(Y \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \approx 0,95$

qui s'écrit avec une meilleure précision

Voir le paragraphe **1C**.

$P(Y \in [\mu - 1,96\sigma, \mu + 1,96\sigma]) \approx 0,95$.

Ici $\mu - 1,96\sigma \approx 42,2$ et $\mu + 1,96\sigma \approx 61,8$.

On passe des effectifs aux fréquences en divisant les effectifs par l'effectif total 100 de l'échantillon des votants :

$$P\left(\frac{Y}{100} \in [0,422 \,;\, 0,618]\right) \approx 0,95.$$

Ainsi la probabilité d'avoir, dans un échantillon de 100 votants pris au hasard, la fréquence des votants pour le candidat A comprise entre 0,422 ou 42,2 % et 0,618 ou 61,8 % est très proche de 0,95.

L'activité d'approche **4** permet, sur un exemple, d'observer l'aspect asymptotique de cet intervalle de fluctuation d'une fréquence.

L'intervalle [0,422 ; 0,618] est appelé **intervalle de fluctuation asymptotique, à environ 95 %**, de la fréquence des votants pour le candidat A dans un échantillon de taille 100 prélevé au hasard.

Cas général

Dans le cas général le même raisonnement conduit à :

$P(Y \in [\mu - 1,96\sigma, \mu + 1,96\sigma]) \approx 0,95$

c'est-à-dire, en divisant par l'effectif n de l'échantillon pour passer des effectifs aux fréquences :

$$P\left(\frac{Y}{n} \in \left[\frac{\mu - 1,96\sigma}{n}, \frac{\mu + 1,96\sigma}{n}\right]\right) \approx 0,95.$$

Or $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Donc $\dfrac{\mu - 1,96\sigma}{n} = \dfrac{np - 1,96\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n}$,

$$\frac{\mu - 1,96\sigma}{n} = p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

et de même $\dfrac{\mu + 1,96\sigma}{n} = p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$.

On peut alors définir un intervalle de fluctuation asymptotique.

DÉFINITION

L'intervalle de fluctuation asymptotique à environ 95 % d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est

$$\left[\boldsymbol{p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right]$$

où p est la proportion connue dans la population.

Remarque

L'intervalle $\left[p-1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,,\,p+1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$ n'est un intervalle de fluctuation asymptotique que si les conditions d'approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi normale sont réunies.
Dans le cas contraire, nous disposons de l'intervalle de fluctuation défini en Première de la façon suivante.

DÉFINITION

L'intervalle de fluctuation à environ 95 % d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n, d'une variable aléatoire X de loi binomiale, est l'intervalle $\left[\dfrac{a}{n}, \dfrac{b}{n}\right]$ défini par :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

k	$P(X \leq k)$
41	0,0177
42	0,0286
…	…
61	0,9719
62	0,9827

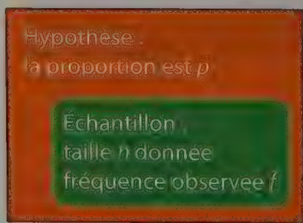
Dans l'exemple ci-dessus où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}52$ l'extrait ci-contre de la table des probabilités cumulées $P(X \leq k)$ permet d'obtenir $a = 42$ et $b = 62$.
L'intervalle de fluctuation à environ 95 % de la fréquence des votants pour le candidat A dans un échantillon de taille 100 prélevé au hasard est [0,42 ; 0,62].
Nous pouvons observer que l'intervalle de fluctuation [0,42 ; 0,62] obtenu avec la loi binomiale est très proche de l'intervalle de fluctuation asymptotique [0,422 ; 0,618] obtenu avec la loi normale.
D'une manière générale **ces deux intervalles sont proches dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.**

Dans l'exemple $n = 100$, $np = 52$ et $n(1-p) = 48$.

B. Prise de décision à l'aide d'un intervalle de fluctuation asymptotique

Nous adoptons ici le même point de vue qu'en Première en remplaçant l'intervalle de fluctuation $\left[\dfrac{a}{n}, \dfrac{b}{n}\right]$ par l'intervalle de fluctuation asymptotique.

Considérons une population pour laquelle on fait l'hypothèse suivante : la proportion d'un certain caractère est p.



Population

Par exemple la population est constituée de pièces usinées et le caractère est la conformité au cahier des charges.
$p = \dfrac{4}{5}$ signifie que quatre cinquièmes des pièces sont bonnes.

Pour juger de cette hypothèse, on y prélève, au hasard et avec remise, un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f du caractère.

On utilise alors la règle de décision suivante :

Un seuil correspond ici à une marge d'erreur acceptée, celle de rejeter l'hypothèse alors qu'elle est vraie.

RÈGLE DE DÉCISION

Au seuil de 5 %, si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique $\left[p-1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p+1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$ on accepte l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population ; sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p.

EXERCICE résolu 5 Sondage avant une élection

ÉNONCÉ

Un mois avant l'élection où il se présente, le candidat A affirme que 55 % des électeurs veulent voter pour lui. Son adversaire B commande immédiatement un sondage portant modestement sur 100 personnes prises au hasard parmi les électeurs.

Le résultat de ce sondage donne 47 de votes favorables au candidat A.

Peut-on considérer au seuil de 5 % que l'affirmation du candidat A est vraie ?

MÉTHODE

Énoncer l'hypothèse faite sur la proportion étudiée dans la population.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique.

Appliquer la règle de décision au cas de l'échantillon considéré.

SOLUTION

On fait l'hypothèse : l'affirmation est vraie, c'est-à-dire la proportion des électeurs qui veulent voter pour lui est $p=0{,}55$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des votes favorables au candidat A sur un échantillon de taille $n=100$ est :

$$\left[p-1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p+1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]=[0{,}452\,5\,;0{,}647\,5].$$

La fréquence observée des votes favorables au candidat A dans l'échantillon est $f=0{,}47$.

Elle appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique.

On accepte donc l'affirmation du candidat A : 55 % des électeurs veulent voter pour lui.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 60

3 Estimation

A. Intervalle de confiance d'une proportion

La pression artérielle diastolique d'une personne est la pression artérielle lorsque son cœur est au repos.

Exemple

Dans une clinique importante, on prélève au hasard un échantillon de 100 personnes parmi la population des malades et on mesure la pression artérielle diastolique (P.A.D.) de chacune de ces 100 personnes.

On constate que 24 personnes ont une P.A.D. strictement inférieure à 8, ce qui correspond à une fréquence $f = \frac{24}{100} = 0,24$.

À combien peut-on estimer la proportion p de personnes dont la P.A.D. est strictement inférieure à 8 parmi la population constituée de l'ensemble des malades de la clinique ?

C'est le problème inverse de l'échantillonnage (voir la partie **2**).

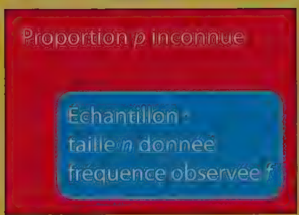
Nous cherchons une information sur une population d'effectif relativement important **à partir de l'étude d'un échantillon** de quelques dizaines d'unités.

Population

Deux types de réponses peuvent être données à ce problème :

Par exemple, proposer $p = f$.

- Proposer un nombre comme proportion p dans la population : c'est l'**estimation ponctuelle**, très simple à mettre en œuvre mais très sensible aux fluctuations d'échantillonnage.
- Proposer un intervalle associé à un niveau de confiance : c'est ce choix qui va être précisé ici.



Population

DÉFINITION

L'intervalle $\left[\boldsymbol{f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}}, \boldsymbol{f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}}\right]$, où f est une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n, est un **intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %**, pour la proportion correspondante p dans la population.

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus où $f = 0,24$ et $n = 100$, l'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, pour la proportion des malades de la clinique ayant une P.A.D. strictement inférieure à 8 est [0,156 ; 0,324].

Remarque

1. Cet intervalle de confiance pour la proportion p de la population a pour centre la fréquence f de l'échantillon qui sert à la définir.
On peut aussi définir un autre intervalle de confiance de p avec le même niveau de confiance, très proche du précédent, à l'aide de graphiques constitués d'arcs d'ellipses : son centre n'est plus la fréquence f de l'échantillon utilisé.

Voir l'activité d'approche **5**.

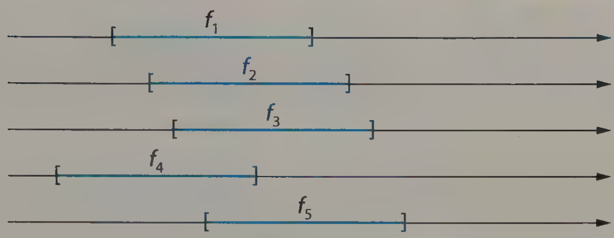
Une ellipse est une courbe utilisée pour le tracé de certaines voûtes, par exemple celles des anciennes stations du métro parisien.

2. Avec d'autres échantillons de même effectif, on obtiendrait de nouveaux intervalles de confiance de cette proportion p avec le même coefficient de confiance ; en voici, par exemple, quelques-uns :

Tous ces intervalles ont des amplitudes très voisines :

$2\times1{,}96\sqrt{\dfrac{f_1(1-f_1)}{n}}$;

$2\times1{,}96\sqrt{\dfrac{f_2(1-f_2)}{n}}$.



Voir le **TP6**.

Si on prélève un très grand nombre de tels échantillons (on peut simuler de tels prélèvements sur calculatrice ou ordinateur), environ 95 pour 100 d'entre eux contiennent la proportion inconnue p de la population.
En fait, on n'en prélève qu'un seul et on ne peut savoir si celui-ci contient ou non le nombre p, mais **la méthode mise en œuvre permet d'obtenir un intervalle contenant p dans 95 cas sur 100.**

Voir l'exercice **33**.

3. Dans les domaines de l'industrie et du laboratoire on utilise aussi des intervalles de confiance pour des **moyennes** de populations : ceux-ci sont définis de façon analogue.

B. Comparaison de deux proportions à l'aide d'intervalles de confiance

Exemple

Dans trois villes voisines, on s'intéresse au temps passé en moyenne, par jour, devant un écran par les jeunes de 15 à 20 ans, pendant leur temps de loisir.

Dans chaque ville on constitue un échantillon de taille 500 considéré comme prélevé au hasard et avec remise ; on observe ainsi que le temps est supérieur à 4 heures pour 210 jeunes de la ville A, 160 jeunes de la ville B et 170 jeunes de la ville C.

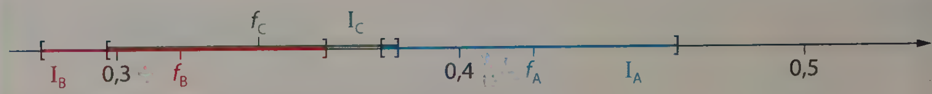
Nous pouvons calculer, pour chaque échantillon, la fréquence des jeunes pour lesquels ce temps est supérieur à 4 heures :

$f_A = \dfrac{210}{500} = 0{,}42 \quad f_B = \dfrac{160}{500} = 0{,}32 \quad f_C = \dfrac{170}{500} = 0{,}34.$

Voir le paragraphe A.

Nous pouvons alors déterminer un intervalle de confiance, avec un niveau de confiance de 95 %, pour la proportion inconnue du même caractère dans chaque ville :

$\mathrm{I}_A \approx [0{,}377 ; 0{,}463]$; $\mathrm{I}_B \approx [0{,}279 ; 0{,}361]$; $\mathrm{I}_C \approx [0{,}298 ; 0{,}382]$.



I_A et I_B n'ont pas d'élément commun.

Nous constatons que les intervalles I_A et I_B sont disjoints.

On considère alors que **la différence des fréquences observées f_A et f_B est significative et on juge que les deux proportions p_A et p_B sont différentes (avec un petit risque d'erreur)**.

Pour une population, la fréquence varie d'un échantillon à l'autre de même taille.

Cela veut dire que l'écart entre les fréquences observées f_A et f_B est trop grand pour être considéré comme le résultat de la seule fluctuation d'échantillonnage au sein d'une population : les proportions p_A et p_B sont différentes.

À l'opposé, les intervalles I_B et I_C ont une partie commune importante ; l'écart entre f_B et f_C a donc de fortes chances d'être le résultat de la seule fluctuation d'échantillonnage.

La différence des fréquences observées f_B et f_C n'est pas significative et on juge que les deux proportions p_B et p_C sont égales (avec un petit risque d'erreur).

Pour les intervalles I_A et I_C qui ne sont pas disjoints, on peut conclure comme pour les intervalles I_B et I_C.

Cependant, compte tenu de la taille très réduite de leur intersection, il peut être utile d'effectuer une nouvelle prise d'échantillons dans les villes A et C avant de conclure définitivement.

Cas général

Population A   Population B

On note I_A l'intervalle de confiance $\left[f_A - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f_A(1-f_A)}{n}}, f_A + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f_A(1-f_A)}{n}}\right]$, au niveau de confiance 95 % pour la proportion p_A dans la population A et on définit de même I_B pour la population B.

À RETENIR

La différence entre les deux fréquences observées f_A et f_B est considérée comme significative quand les intervalles de confiance à 95 % I_A et I_B sont disjoints.

On juge alors que les deux proportions p_A et p_B sont différentes (avec un petit risque d'erreur).

Dans le cas contraire, on juge que les deux proportions p_A et p_B sont égales (avec un petit risque d'erreur).

I_A et I_B **disjoints** signifie qu'ils n'ont pas d'élément commun :

$I_A \cap I_B = \varnothing$.

EXERCICE résolu 6 — Campagne publicitaire

ÉNONCÉ

Une importante société de vente au détail de matériel informatique veut juger de l'impact d'une campagne publicitaire menée dans les médias pour une tablette numérique particulière.

Dans un échantillon, considéré comme prélevé au hasard et avec remise, de 200 ventes de tablettes effectuées avant la campagne publicitaire, on observe que 44 ventes concernent cette tablette.

Dans un nouvel échantillon de même taille et prélevé dans les mêmes conditions après la campagne publicitaire, on observe que 66 ventes concernent cette tablette.

1° Déterminer un intervalle de confiance, avec un niveau de confiance de 95 %, pour la proportion des ventes de cette tablette avant la campagne publicitaire.

2° Même question après la campagne publicitaire.

3° La différence entre les deux fréquences observées avant et après la campagne publicitaire est-elle significative ?

4° Le responsable de la campagne publicitaire affirme : « Les deux échantillons montrent que les ventes de cette tablette ont augmenté de 50 % ; donc la campagne publicitaire a été très efficace ». Qu'en pensez-vous ?

MÉTHODE

Utiliser la définition d'un intervalle de confiance.

Utiliser la définition d'un intervalle de confiance.

Utiliser la définition d'une différence significative de fréquences observées.

SOLUTION

1° L'intervalle de confiance, avec un niveau de confiance 95 %, pour la proportion p_A des ventes de cette tablette avant la campagne publicitaire est :

$$\mathrm{I}_A=\left[f_A-1{,}96\sqrt{\frac{f_A(1-f_A)}{n}}, f_A+1{,}96\sqrt{\frac{f_A(1-f_A)}{n}}\right] \quad \text{où } f_A=\frac{44}{200} \text{ et } n=200.$$

$\mathrm{I}_A=[0{,}163 ; 0{,}277]$.

2° De même $f_B=\frac{66}{200}$, $n=200$ et $\mathrm{I}_B=[0{,}265 ; 0{,}395]$.

3° Les deux intervalles $\mathrm{I}_A=[0{,}163 ; 0{,}277]$ et $\mathrm{I}_B=[0{,}265 ; 0{,}395]$ ne sont pas disjoints car $\mathrm{I}_A \cap \mathrm{I}_B=[0{,}265 ; 0{,}277]$.

Au seuil de 5 %, la différence entre les deux fréquences observées f_A et f_B avant et après la campagne publicitaire n'est donc pas significative.

4° $\frac{f_B-f_A}{f_A}=\frac{0{,}33-0{,}22}{0{,}22}=0{,}5=50\,\%$.

Le responsable de la campagne a raison d'affirmer que **pour les deux échantillons** les ventes de cette tablette ont augmenté de 50 %.

Cependant, comme la différence entre f_A et f_B n'est pas significative, on juge que les deux proportions p_A et p_B sont égales (avec un petit risque d'erreur).

Le responsable de la campagne publicitaire ne peut donc pas affirmer, **sur la seule base de ces deux échantillons**, que la campagne publicitaire a été très efficace.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 63

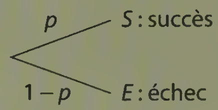
Ce qu'il faut savoir

Probabilités d'événements A, B

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **Événement contraire :** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. En particulier $P(\varnothing) = 0$.
- **Si** $A \cap B = \varnothing$ (événements **disjoints** ou **incompatibles**), alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli de paramètre** p (nombre réel compris entre 0 et 1) est une épreuve aléatoire comportant deux issues :



Loi binomiale

- La **loi binomiale de paramètres** n **et** p, notée $\mathcal{B}(n, p)$, est la loi de la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans la répétition, de façon identique et indépendante, de n épreuves Bernoulli de paramètre p.
- **En STI2D-STL, on utilise une calculatrice ou un logiciel pour calculer directement $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$.**
- L'**espérance** de X est : $E(X) = np$.
- La **variance** de X est : $V(X) = np(1 - p)$.
- L'**écart type** de X est : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Loi uniforme sur [a, b]

- La **fonction de densité** f est définie sur $[a, b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.
- Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$.

Pour tout $[x_1, x_2]$ inclus dans $[a, b]$, $P(X \in [x_1, x_2]) = \dfrac{x_2 - x_1}{b-a}$.

- L'**espérance** de X est $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.
- La **variance** de X est $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Loi exponentielle

- La **fonction de densité** f est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ où $\lambda > 0$.
- Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

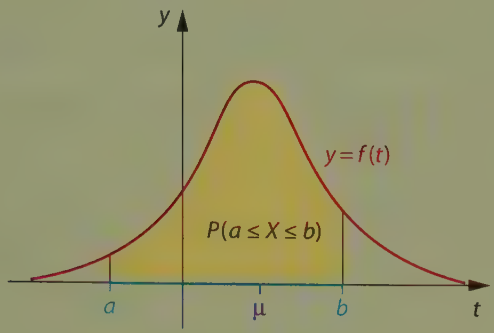
Pour tout $[x_1, x_2]$ inclus dans $[0, +\infty[$, $P(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda e^{-\lambda t}\, dt$.

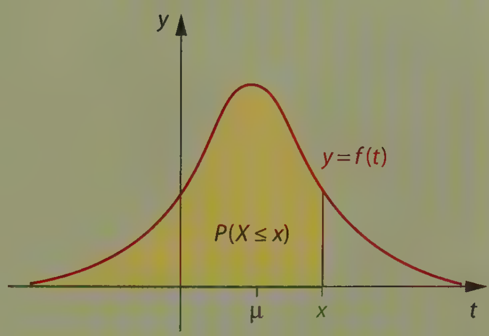
En particulier, pour tout $x \geq 0$, $P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt$.

- L'**espérance** de X est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Loi normale

- Soit X une variable aléatoire suivant la **loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$** de fonction de densité f.





Les valeurs numériques de a, b et x étant données, on obtient les valeurs numériques de $P(a \leq X \leq b)$ ou $P(X \leq x)$ en utilisant une calculatrice ou un tableur et en remarquant, si nécessaire, que $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$.

- Si la variable aléatoire suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$,

$P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) \approx 0{,}68$;

$P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \approx 0{,}95$;

$P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) \approx 0{,}997$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Si n est « **grand** » et si p n'est « ni **trop voisin** de 0 ni **trop voisin** de 1 », alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ admet pour approximation la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de **même espérance** et de **même écart type** :

$\boldsymbol{\mu = np}$ et $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{np(1-p)}}$.

Intervalle de fluctuation, à environ 95 %, d'une fréquence avec une loi binomiale

L'**intervalle de fluctuation à 95 %** d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n, d'une variable aléatoire X de loi binomiale, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$ défini par :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

Intervalle de fluctuation asymptotique à environ 95 % d'une fréquence avec la loi normale

L'**intervalle de fluctuation asymptotique à environ 95 %** d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est $\left[\boldsymbol{p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right]$ où p est la proportion connue dans la population.

Prise de décision à l'aide d'un intervalle de fluctuation lié à la loi binomiale ou d'un intervalle de fluctuation asymptotique lié à la loi normale

Méthode :

- Repérer dans l'énoncé l'hypothèse faite sur une proportion ou une fréquence dans la population.
- Chercher l'intervalle de fluctuation correspondant, à environ 95 %, de la fréquence des échantillons aléatoires de taille n.
- Énoncer la règle de décision :
si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation considéré au seuil de 95 %, on accepte l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population ; sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p.
- Appliquer la règle de décision.

Intervalle de confiance d'une proportion

L'intervalle $\left[f-1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}, f+1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right]$, où f est une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n, est un **intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %**, pour la proportion p dans la population.

Comparaison de deux proportions à l'aide d'intervalles de confiance

La différence entre les deux fréquences observées f_A et f_B est considérée comme significative quand les intervalles de confiance à 95 % I_A et I_B sont disjoints.

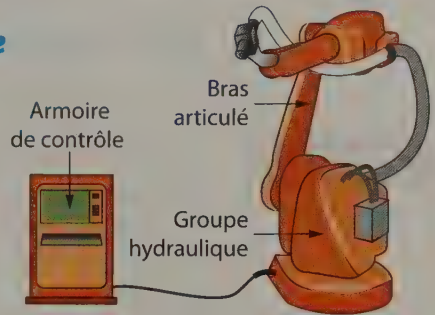
On juge alors que les deux proportions p_A et p_B sont différentes (avec un petit risque d'erreur).

Dans le cas contraire, on juge que les deux proportions p_A et p_B sont égales (avec un petit risque d'erreur).

TP 1 Calculer des probabilités dans le cadre de la loi binomiale avec une calculatrice

LOGICIEL UTILISÉ
Calculatrices

Défaillances des robots de peinture



Les ateliers de peinture d'un grand constructeur automobile fonctionnent à l'aide de robots permettant de positionner les pistolets autour de la carrosserie.

Les pannes mécaniques sur le bras articulé de ces robots, assez fréquentes, sont souvent sans gravité. Elles sont généralement dues à l'encrassage par la peinture, à du jeu ou à un blocage dans les articulations mécaniques.

Les ateliers de peinture comptent 100 robots équipés de bras articulés identiques dont les pannes mécaniques surviennent de façon indépendante. Pour chaque bras articulé, la probabilité, qu'une semaine choisie au hasard, ce type de panne se produise est 0,05.

Une semaine étant choisie au hasard, on réalise, pour chacun des 100 robots, la même expérience aléatoire consistant à observer si son bras connaît une défaillance mécanique.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute semaine, associe le nombre de robots dont le bras a connu une panne mécanique.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale, dont on déterminera les paramètres.

2. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire X ? Interpréter le résultat.

3. La plupart des modèles de calculatrices permettent d'obtenir, pour tout entier k compris entre 0 et 100, les probabilités $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$. Utiliser une telle calculatrice pour déterminer les valeurs approchées arrondies à 10^{-3} des probabilités suivantes :

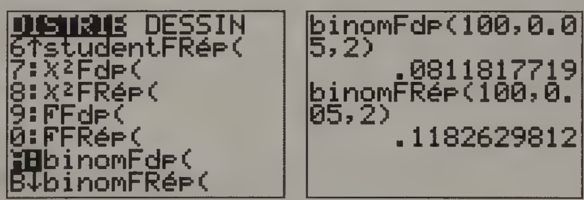
a. $P(X = 2)$;

b. $P(X \leq 2)$;

c. $P(E)$ où E est l'événement : « en une semaine, strictement plus de 10 robots ont connu une panne mécanique sur leur bras articulé ».

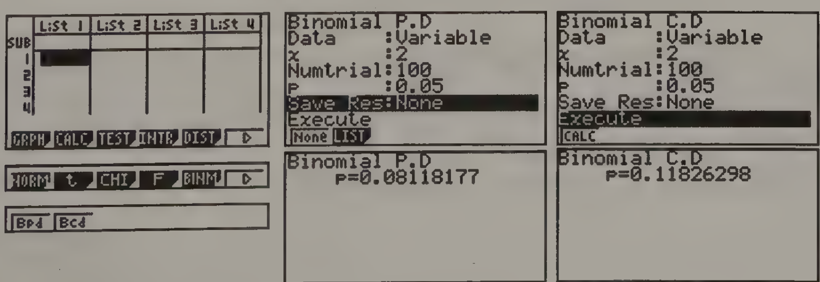
Procédure sur une calculatrice TI

On accède au menu « distribution » par 2nde / Distrib (ou DISTR).
Pour calculer $P(X = k)$, on utilise l'instruction binomFdp ou binompdf.
Pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise l'instruction binomFRép.



Procédure à suivre sur une calculatrice CASIO

On se place dans le Menu STAT.
On accède à la loi binomiale par DIST / BINM.
Pour calculer $P(X = k)$, on utilise l'instruction Bpd.
Pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise l'instruction Bcd.



TP 2 Montrer que la loi exponentielle répond à l'observation d'un taux de désintégration constant

LOGICIEL UTILISÉ
Maxima

Désintégration radioactive

Dans son ouvrage *Le hasard*, Émile Borel rapporte les expériences de Marie Curie sur la désintégration nucléaire et, en particulier, l'invariance remarquable du taux de désintégration dans le temps : « Je citerai notamment une expérience très complète faite par M^me^ Curie, avec l'aide de ses préparateurs, et non encore publiée au moment où j'écris ces lignes. Cette expérience a porté sur 10 000 émissions et l'étude numérique, faite avec le plus grand soin par M^me^ Curie, concorde admirablement avec les prévisions théoriques. Cette concordance est la preuve expérimentale la plus complète de l'invariance de la radioactivité ».

On considère une matière radioactive et on note T la variable aléatoire qui à tout atome radioactif pris au hasard associe le temps d'attente avant sa désintégration.

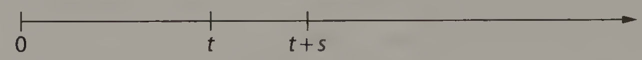
On suppose que T est une variable aléatoire continue de densité f, définie sur $]0, +\infty[$.

On désigne par F la primitive de f définie sur $[0, +\infty[$ par $F(t) = \int_0^t f(x)dx = P(T \leq t)$.

1. Montrer que $F(0) = 0$.

Émile Borel affirme : « en un temps donné, une substance radioactive déterminée se trouve perdre, en vertu du phénomène de la radioactivité, une proportion rigoureusement déterminée de son poids ».

Soit $t > 0$ et $s \geq 0$. On considère l'intervalle de temps $[t, t+s]$.



La proportion de masse théoriquement perdue par la substance pendant l'intervalle de temps $[t, t+s]$ est égale au rapport de la proportion (théorique) d'atomes se désintégrant durant l'intervalle de temps $[t, t+s]$ à la proportion (théorique) d'atomes non désintégrés au temps t.

a. Justifier que la proportion de masse théoriquement perdue par la substance pendant l'intervalle de temps $[t, t+s]$ peut s'exprimer par le quotient : $\dfrac{P(t \leq T \leq t+s)}{P(T > t)}$.

b. Montrer que ce rapport peut s'écrire $\dfrac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)}$.

2. On désigne par « taux moyen de désintégration par unité de temps entre t et $t+s$ » la quantité $\dfrac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)} \times \dfrac{1}{s}$ et par « taux instantané de désintégration au temps t » la limite

$h(t) = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)} \times \dfrac{1}{s}$. Montrer que $h(t) = \dfrac{F'(t)}{1 - F(t)}$.

3. Émile Borel affirme que la désintégration radioactive se « distingue » par son invariance, c'est-à-dire que, pour tout réel positif t, $h(t) = h$ où h est un nombre réel strictement positif (mesuré lors des expérimentations).

On a donc, pour tout réel positif t, $\dfrac{F'(t)}{1 - F(t)} = h$.

En exploitant l'image d'écran suivante, fournie par un logiciel de calcul formel :

a. donner l'ensemble des fonctions F solutions de l'équation $\dfrac{F'(t)}{1 - F(t)} = h$;

b. donner l'expression de $f(t)$.

```
(%i1) ode2('diff(F,t)/(1-F)=h, F, t);
(%o1) F=%e^(-h t)(%e^(h t)+%c)

(%i2) expand(%);
(%o2) F=%c %e^(-h t)+1

(%i3) ic1(%, t=0, F=0);
(%o3) F=%e^(-h t)(%e^(h t)-1)

(%i4) expand(%);
(%o4) F=1-%e^(-h t)

(%i5) diff(1-exp(-h*t),t,1);
(%o5) h %e^(-h t)
```

4. Quelle est la loi de la variable aléatoire T ?

Quelques mots d'histoire

Pierre Curie (1859-1906) épousa en 1895 une étudiante d'origine polonaise, Marie Sklodowska (1867-1934). Leur collaboration aboutit à la découverte du polonium et du radium, ce qui leur valut de recevoir en 1903, en commun avec Henri Becquerel, le prix Nobel de physique. Marie Curie, restée veuve, isola le radium pur et en détermina la masse atomique. Elle reçut, à ce titre, le prix Nobel de chimie en 1911.

Émile Borel (1871-1956) est un mathématicien et un homme politique français. Dès 1905, Émile Borel s'intéresse au calcul des probabilités. Ses responsabilités à la défense nationale pendant la Première guerre mondiale l'amènent à s'intéresser aux mathématiques appliquées. Il est le premier à s'intéresser, dès les années 1920, à la théorie des jeux. Il est aussi l'auteur de nombreux ouvrages de culture générale scientifique et de vulgarisation.

TP 3 Utiliser la calculatrice pour obtenir des probabilités selon la loi normale

Plage de normalité dans un laboratoire d'analyses biologiques

LOGICIEL UTILISÉ
Calculatrices

Sur le compte rendu d'analyse de sang d'un laboratoire d'analyses biologiques, on peut lire la « plage de normalité » suivante, concernant le taux de cholestérol total :

« Taux de cholestérol total (g/L) N : 1,30 – 2,30 ».

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à un adulte pris au hasard dans la population son taux de cholestérol total, exprimé en g/L. On admet que X suit la loi normale de moyenne 1,8 et d'écart type 0,25.

À l'aide de votre calculatrice, déterminer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}).

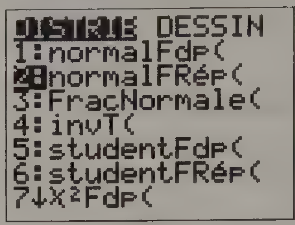
1. $P(1{,}3 \leq X \leq 2{,}3)$.

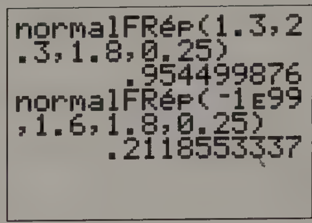
2. $P(X \leq 1{,}6)$.

3. $P(X \geq 2{,}4)$.

Procédure sur une calculatrice TI

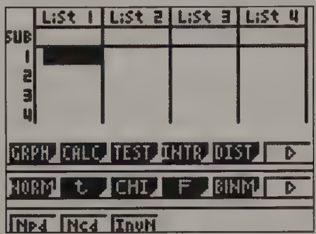
On accède au menu « distribution » par 2nde / Distrib (ou DISTR). Pour calculer $P(a \leq X \leq b)$, on utilise normalFRép ou normalcdf. Si l'une des bornes a ou b est absente, on la remplace par –1E99 ou 1E99.

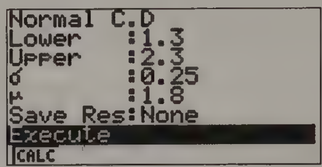


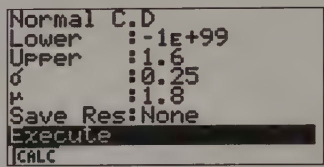


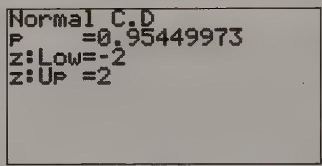
Procédure sur une calculatrice CASIO

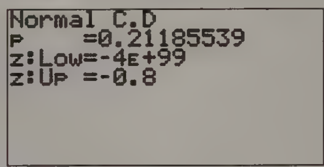
On se place dans le Menu STAT.
On accède à la loi normale par DIST / NORM.
Pour calculer $P(a \leq X \leq b)$, on utilise Ncd.
Si l'une des bornes a ou b est absente, on la remplace par –1E99 ou 1E99.











TP 4 Analyser et compléter un algorithme de simulation

LOGICIELS UTILISÉS
Scilab ou Algobox

Simulation de la loi normale par la méthode du rejet

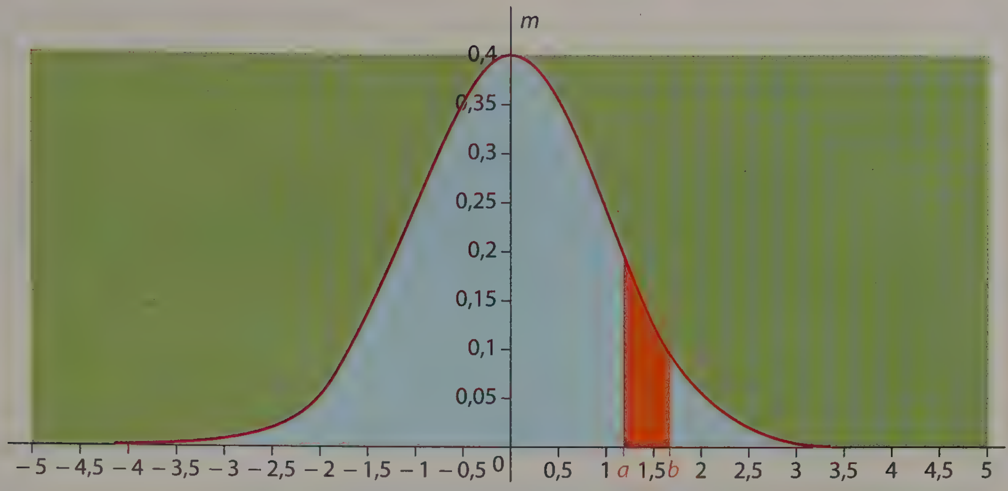
On cherche à simuler des réalisations d'une variable aléatoire Z de loi normale centrée réduite, de densité f définie, pour tout réel x, par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. La fonction f est représentée ci-après.

Dans ce TP, on suppose que le générateur de nombres aléatoires de l'ordinateur simule parfaitement une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle [0, 1].

1. a. Donner la valeur m du maximum de $f(x)$.

b. Quelle est la probabilité que Z prenne ses valeurs en dehors de l'intervalle [– 5, 5] ?

c. Que vaut, approximativement, l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = – 5$ et $x = 5$, exprimée en unités d'aires ?



2. On considère l'algorithme ci-dessous (en langages Scilab et Algobox).

```
m=1/sqrt(2*%pi)
function y=f(x)
    y=m*exp(-x*x/2)
endfunction
x=-5+10*rand()
y=m*rand()
while y>f(x)
    x=-5+10*rand()
    y=m*rand()
end
disp(x)
```

```
VARIABLES
  m EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  m PREND_LA_VALEUR 1/sqrt(2*Math.PI)
  x PREND_LA_VALEUR -5+10*random()
  y PREND_LA_VALEUR m*random()
  TANT_QUE (y>F1(x)) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    x PREND_LA_VALEUR -5+10*random()
    y PREND_LA_VALEUR m*random()
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER x
FIN_ALGORITHME
```

```
Fonction numérique utilisée :
F1(x)=(1/sqrt(2*Math.PI))*exp(-x*x/2)
```

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire X dont x, dans l'algorithme ci-dessus, est une réalisation ?

b. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y dont y, dans l'algorithme ci-dessus, est une réalisation ?

c. Donner une interprétation graphique d'une réalisation (x, y) des deux variables aléatoires précédentes.

d. Interpréter graphiquement la condition de « rejet » figurant dans la boucle « tant que ».

e. Quelle est la probabilité de « rejet », c'est-à-dire que la condition de la boucle soit satisfaite ?

f. Soit a et b deux nombres de l'intervalle $[-5, 5]$ avec $a \leq b$. Quelle est la probabilité qu'une valeur x acceptée (c'est-à-dire sortant de la boucle « tant que ») soit comprise dans l'intervalle $[a, b]$?

Que peut-on en déduire ?

3. Implanter l'algorithme sur un ordinateur.

4. Modifier l'algorithme de sorte qu'il génère 10 000 valeurs. Implanter ce nouvel algorithme et, selon les possibilités du logiciel, afficher un histogramme et comparer avec la représentation graphique de f.

Remarque :

Avec Scilab, on peut créer un vecteur X avec X=zeros(1,10000) et tracer un histogramme à l'aide des instructions classes=linspace(−5,5,21) et histplot(classes,X).

Quelques mots d'histoire

La méthode de simulation d'une variable aléatoire dite « du rejet » considérée ici a été développée par John Von Neumann (1903-1957). Son intérêt est de pouvoir s'adapter à un grand nombre de densités de probabilité.

TP 5 Explorer des données statistiques en grand nombre et modéliser par une loi à densité

Des lois à densité dans la nature ?

LOGICIEL UTILISÉ
Tableur

Le fichier « 9_donnees_Pearson_Aso_OldF » (au format Excel ou OpenOffice) fournit des données statistiques concernant des phénomènes naturels « continus » (taille des êtres humains, temps d'attente d'une éruption volcanique, durée entre éruptions d'un geyser). L'objet de ce TP est, pour chacun de ces ensembles de données, de :

– calculer certains indicateurs statistiques : minimum, maximum, moyenne et écart type ;

– regrouper en classes et représenter un histogramme normalisé des fréquences de chaque classe (l'aire de chaque rectangle égale la fréquence de la classe correspondante, pour cela sa hauteur égale la fréquence divisée par l'amplitude de la classe) ;

– d'après le « profil » de l'histogramme, envisager un modèle en superposant le tracé d'une fonction de densité figurant au programme de terminale (on peut utiliser les fonctions =LOI.EXPONENTIELLE(*x*;1/*moyenne*;FAUX) ou =LOI.NORMALE(*x*;*moyen ne*;*écart-type*;FAUX) du tableur ;

– exploiter, le cas échéant, le modèle mis en place.

A. Données de Karl Pearson des tailles père-fils à la fin du XIXe siècle

Le statisticien britannique Karl Pearson (1857-1936), dans le cadre de recherches sur l'hérédité, a établi un fichier de 1 078 couples de mesures de la taille du père et du fils (adulte). La feuille 1 fournit ces données, exprimées en mètres.

1. Regrouper les tailles des pères en classes d'amplitude 0,01 mètre. Peut-on ajuster à l'histogramme normalisé des fréquences, correspondant à ces classes, une loi à densité figurant au programme de terminale ?

2. Même question pour les tailles des fils.

3. La taille moyenne d'un homme d'âge compris entre 20 et 29 ans est actuellement, en France, de 1,77 m. En utilisant le modèle de la question précédente estimer la probabilité qu'un jeune homme anglais de ces âges ait une taille supérieure ou égale à 1,77 m à la fin du XIXe siècle.

B. Éruptions du volcan Aso

Le volcan Aso, situé sur l'île de Kyushu au Japon, est l'un des plus actifs au monde. On possède les statistiques de ses éruptions, régulièrement tenues depuis le XIIIe siècle. La feuille 2 fournit les années d'éruptions jusqu'au XIXe siècle (à partir du XXe siècle, les données, d'une autre nature, ne sont pas comparables). On s'intéresse au temps d'attente, exprimé en années, entre deux éruptions.

1. Regrouper les temps d'attentes en classes d'amplitude 5 années. Peut-on ajuster à l'histogramme normalisé des fréquences, correspondant à ces classes, une loi à densité figurant au programme de terminale ?

2. On note T la variable aléatoire qui, à chaque éruption prise au hasard, associe le temps d'attente de la prochaine éruption.

Calculer, en utilisant la loi proposée à la question précédente, la probabilité $P(T \geq 56)$.

Un temps de repos tel que celui qu'a connu le volcan entre 1709 et 1765 doit-il, selon ce modèle, être considéré comme exceptionnel ?

C. Éruptions du geyser Old Faithful

Le geyser Old Faithful est situé dans le parc Yellowstone aux États-Unis. Son nom signifie « vieux fidèle » en raison de la régularité de ses éruptions. Les données statistiques permettent d'étudier cette « fidélité ». La feuille 3 fournit la durée entre le début de chaque éruption, exprimée en minutes, pour les 5 699 éruptions de l'année 2010, ainsi que la durée moyenne journalière entre éruptions pour chacun des 365 jours de l'année.

1. Regrouper les 5 699 durées entre éruptions en classes d'amplitude 4 minutes. Peut-on ajuster à l'histogramme normalisé des fréquences, correspondant à ces classes, une loi à densité figurant au programme de terminale ?

2. Regrouper les 365 durées moyennes journalières entre éruptions en classes d'amplitude une minute. Peut-on ajuster à l'histogramme normalisé des fréquences, correspondant à ces classes, une loi à densité figurant au programme de terminale ?

TP 6 Expérimenter par simulation la notion de « confiance »

Peut-on croire un sondage ?

LOGICIEL UTILISÉ
Tableur

On assimile un sondage d'opinion de 1 000 personnes à un échantillon aléatoire prélevé avec remise dans une population où la proportion inconnue de personnes en faveur d'un candidat est p. On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon ainsi prélevé, fait correspondre le nombre de personnes en faveur du candidat. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres 1 000 et p inconnu.

1. a. On pose $F = \dfrac{X}{1000}$. À quoi correspond la variable aléatoire F ?

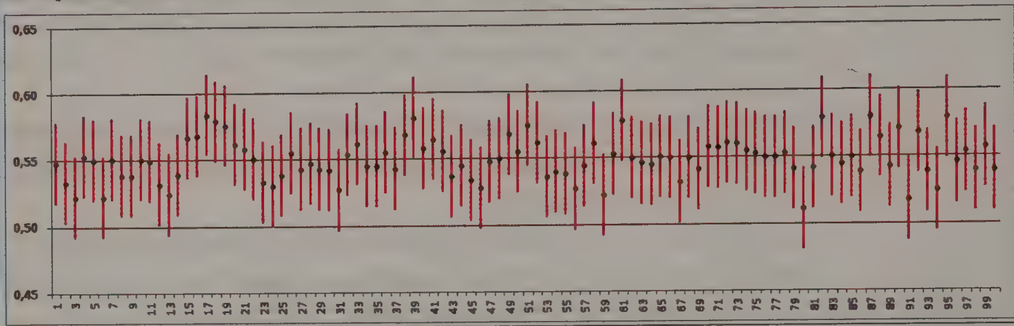
b. On suppose que sur un échantillon, on observe la valeur f de la variable aléatoire F. Donner l'expression d'un intervalle de confiance de p au niveau de confiance de 95 %.

2. Le fichier « 9_sondages » (au format Excel ou OpenOffice) simule des sondages aléatoires de taille 1 000 le jour de l'élection de Barack Obama en 2008, c'est-à-dire avec une fréquence d'opinions favorables égale à $p = 0{,}55$ dans la population.

Pour chaque sondage simulé, fournissant une fréquence d'opinions favorables *f*, est représenté « l'intervalle de confiance » au niveau de confiance de 95 %.

B6 =SI(ET(0,55>=B3;0,55<=B4);1;0)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
1	Intervalles de confiance pour des sondages de taille 1 000 simulés le jour de l'élection de B. Obama en 2008												
2		Sondage 1	Sondage 2	Sondage 3	Sondage 4	Sondage 5	Sondage 6	Sondage 7	Sondage 8	Sondage 9	Sondage 10	Sondage 11	Son
3	Borne inférieure de l'intervalle de confiance	0,517	0,502	0,491	0,522	0,519	0,491	0,520	0,507	0,507	0,520	0,518	0
4	Borne supérieure de l'intervalle de confiance	0,579	0,564	0,553	0,584	0,581	0,553	0,582	0,569	0,569	0,582	0,580	0
5	Fréquence obtenue sur le sondage de taille 1 000	0,548	0,533	0,522	0,553	0,55	0,522	0,551	0,538	0,538	0,551	0,549	0
6	p est-il dans l'IC ?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
7	Pourcentage d'intervalles de confiance contenant p :				96	%							



a. La fréquence obtenue par Barack Obama le jour de l'élection de 2008 est-elle toujours comprise dans l'intervalle de confiance ? Expliquer la formule =SI(ET(0,55>=B3;0,55<=B4);1;0) entrée en cellule B6.

b. En faisant plusieurs simulations, estimer approximativement le pourcentage d'intervalles de confiance contenant le résultat de l'élection.

c. Deux intervalles de confiance peuvent-ils être disjoints ?

Exercices

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE	Exercices corrigés	Exercices non corrigés
Utiliser une loi uniforme sur un intervalle	1	2, 3, 34
Utiliser une loi exponentielle	6	4, 5, 7, 8 35 à 38
Utiliser une loi normale	9, 10, 18	11 à 17, 19 39 à 44
Représenter un schéma de Bernouilli	20	21
Utiliser une loi binomiale	22, 45	23 et 24 46 et 47
Approximer une loi binomiale par une loi normale	25	26 et 27 48 à 51
Déterminer et exploiter un intervalle de fluctuation à environ 95 % d'une fréquence avec une loi binomiale	52	53, 54
Déterminer et exploiter un intervalle de fluctuation **asymptotique** d'une fréquence	55	56 à 58
Prendre une décision à l'aide d'un intervalle de fluctuation d'une fréquence lié à la loi binomiale	59	60
Prendre une décision à l'aide d'un intervalle de fluctuation **asymptotique** d'une fréquence	61	62, 63
Déterminer et exploiter un intervalle de confiance d'une proportion	64	65, 66, 67
Juger de l'égalité de deux proportions	68	69, 70, 71
TICE Utiliser le Tableur	28, 29, 30	33
ALGO Utiliser le Tableur	32	
TICE Utiliser GeoGebra		31

Utiliser une loi uniforme sur un intervalle

1. ++ **Loi uniforme sur [– 2, 8]**

U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-2, 8]$.

1. Donner la fonction de densité de U.

2. Déterminer les probabilités suivantes :

$P(U \in [0, 3])$, $P(-1 \leq U \leq 4)$, $P(|U| \leq 1)$, $P(U \leq 5)$, $P(U = 2)$.

3. a) Déterminer l'espérance $E(U)$.

b) Donner une interprétation de $E(U)$.

4. Déterminer la variance $V(U)$.

▶ *Voir aussi l'exercice résolu 1 du cours.*

CORRIGÉ P. 363

2. ++ **Loi uniforme sur [0, 4]**

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 4]$.

1. Donner la fonction de densité de X.

2. Déterminer les probabilités suivantes :

$P(X \in [1, 3])$; $P(X \leq 2{,}5)$; $P(0{,}2 \leq X \leq 3{,}5)$; $P(X \leq 1)$; $P(X = 1)$; $P(X > 1)$.

3. a) Déterminer l'espérance $E(X)$.

b) Donner une interprétation de $E(X)$.

4. Déterminer la variance $V(X)$.

3. +++ Erreur d'arrondi

1. Soit x un nombre réel et soit y la valeur de x arrondie à l'unité.

On rappelle que l'erreur d'arrondi est alors $e = x - y$.

Déterminer y et e pour chacune des valeurs suivantes de x : $x = 4{,}23$; $x = 3{,}6$; $x = 4{,}004$; $x = 3{,}999$; $x = 4{,}499$; $x = 3{,}5$.

2. On note X la variable aléatoire qui, à tout nombre réel tiré au hasard, associe sa valeur arrondie à l'unité.

On admet que X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-0{,}5\ ;0{,}5[$.

a) Donner la fonction de densité de X.

b) Déterminer les probabilités suivantes :

$P(X = 0)$, $P(X < 0)$, $P(X > 0)$, $P(X \in [-0{,}25\ ;\ 0{,}25])$, $P(|X| \leq 0{,}1)$, $P(|X| \leq 0{,}01)$.

c) Déterminer l'espérance $E(X)$.

Donner une interprétation de $E(X)$ et en déduire que la valeur de $E(X)$ était prévisible.

d) Déterminer la variance $V(X)$.

Loi exponentielle

► On peut se reporter à l'exercice résolu **2** du cours.

4. ++ Calculs de probabilités

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,05.

1. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}) :

$P(X \in [25, 35])$, $P(X \leq 20)$ et $P(X > 40)$.

2. Déterminer l'espérance $E(X)$ et donner une interprétation du résultat.

5. ++ Calculs de probabilités

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.

1. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}) :

$P(X \in [1, 3])$, $P(X \leq 6)$ et $P(X > 4)$.

2. Déterminer l'espérance $E(X)$ et en donner une interprétation.

6. ++ Événement de probabilité donnée

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre de paramètre 0,002.

Déterminer le nombre réel x tel que $P(X \leq x) = 0{,}3$. Arrondir à 10^{-2}.

CORRIGÉ p. 363

7. ++ Événement de probabilité donnée

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,1.

Déterminer le nombre réel x tel que $P(X \leq x) = 0{,}4$. Arrondir à 10^{-3}.

8. ++++ Interprétation graphique de l'espérance

1. *Cas particulier*

a) Donner la fonction de densité f_2 de la loi exponentielle de paramètre 2.

b) Représenter sur l'écran d'une calculatrice ou d'un ordinateur la représentation graphique C_2 de f_2 ainsi que sa tangente T_2 en son point d'abscisse 0.

c) Calculer $f_2(0)$ et le nombre dérivé $f_2'(0)$.

d) Déterminer une équation de T_2 et en déduire l'abscisse du point où T_2 coupe l'axe des abscisses.

2. *Cas général*

Reprendre les questions **a)**, **c)** et **d)** en remplaçant 2 par λ, où $\lambda > 0$.

En déduire une interprétation graphique de l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Loi normale

Tous les calculs de probabilités sont à effectuer à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

9. + Retrouver un résultat donné

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20, 5)$.

a) Retrouver avec la calculatrice les valeurs approchées arrondies à 10^{-3} : $P(X \leq 28) \approx 0{,}945$ et $P(X \leq 12) \approx 0{,}055$.

b) En déduire une valeur approchée de $P(12 \leq X \leq 28)$.

CORRIGÉ p. 363

► Voir aussi l'exercice résolu **3** du cours.

10. + Calcul de probabilités

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(10, 2)$.

Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}).

1. $P(X \leq 8)$ et $P(X > 8)$.

2. $P(9 \leq X \leq 12)$ et $P(7 \leq X \leq 14)$.

CORRIGÉ p. 363

11. + Calcul de probabilités

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(100, 12)$.

Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-2}).

1. $P(X \leq 80)$ et $P(X > 80)$.

2. $P(90 \leq X \leq 120)$ et $P(70 \leq X \leq 110)$.

12. + Calcul de probabilités

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(8{,}5\ ;1{,}2)$.

Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}).

1. $P(X \leq 7{,}5)$ et $P(X > 7{,}5)$.

2. $P(9 \leq X \leq 10)$ et $P(7 \leq X \leq 8)$.

13. ++ Calcul de probabilités et interprétation

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20, 5)$.

1. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}).

a) $P(X \leq 28)$ et $P(X > 28)$.
b) $P(X \leq 12)$ et $P(X > 12)$.
c) $P(18 \leq X \leq 22)$ et $P(19 \leq X \leq 21)$.

2. Quelle propriété de la courbe en cloche représentative de la fonction de densité de X permet d'expliquer les liens entre les résultats des questions **1.** a) et b) ?

On pourra représenter rapidement l'allure de cette courbe en cloche et hachurer les parties du plan dont les aires sont égales aux probabilités calculées dans ces questions.

14. ++ Calcul de probabilités et interprétation

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ où $\mu = 24$ et $\sigma = 6$.

1. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-2}).
a) $P(X \leq 30)$; b) $P(X > 30)$; c) $P(X \leq 21)$;
d) $P(18 \leq X \leq 30)$; e) $P(16{,}5 \leq X \leq 31{,}5)$.

2. Quelle propriété de la loi normale permettait de prévoir le résultat de la question **1.** d) ?

On pourra exprimer les nombres 18 et 30 en fonction de μ et σ.

15. ++ Calcul de probabilités et interprétation

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ où $\mu = 15$ et $\sigma = 3$.

1. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3})
a) $P(X \leq 16)$; b) $P(X > 20)$; c) $P(X \leq 15)$;
d) $P(9 \leq X \leq 21)$; e) $P(6 \leq X \leq 24)$.

2. Quelle propriété de la loi normale permettait de prévoir les résultats des questions **1.** d) et e) ?

On pourra exprimer les nombres 9 et 21 en fonction de μ et σ ; de même pour 6 et 24.

16. + Gestion d'une flotte de véhicules

Une entreprise de transport de produits sanguins a un parc total de 150 véhicules. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque véhicule tiré au hasard dans le parc, associe la distance qu'il a parcourue dans une journée. (Les distances sont mesurées en kilomètres.) On admet que cette variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart type 14.

Déterminer la probabilité qu'un véhicule parcoure un jour donné une distance comprise entre 110 et 130 kilomètres. Arrondir à 10^{-2}.

17. + Coût de sinistres

Dans un groupe d'assurances on s'intéresse au coût d'une certaine catégorie de sinistres survenus pendant une année.

On considère la variable aléatoire C qui, à chaque sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de cette catégorie, associe son coût en euros.

On suppose que C suit la loi normale de moyenne 1 200 et d'écart type 200.

Calculer la probabilité qu'un sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de ce type coûte entre 1 000 et 1 500 euros.

18. ++ Bouchons cylindriques

Une machine fabrique plusieurs milliers de bouchons cylindriques par jour.

On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque journée associe son diamètre exprimé en millimètres, suit la loi normale de moyenne $m = 22$ et d'écart type $\sigma = 0{,}025$.

Les bouchons sont acceptables si leur diamètre appartient à l'intervalle $[21{,}95 ; 22{,}05]$.

1. Déterminer la probabilité qu'un bouchon pris au hasard dans la production soit acceptable. Arrondir à 10^{-2}.

2. Pouvait-on prévoir le résultat ?

CORRIGÉ P. 363

19. ++ Remplissage de bouteilles d'eau

Une entreprise produit des bouteilles d'eau minérale de 1,5 litre. Une bouteille d'eau sortant de la chaîne de remplissage est considérée conforme si elle contient entre 149,6 cl d'eau et 150,4 cl d'eau.

On note C la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe son contenu en centilitres.

On suppose que C suit la loi normale de moyenne 150 et d'écart type 0,2.

1. Déterminer la probabilité qu'une bouteille soit conforme. Arrondir à 10^{-2}.

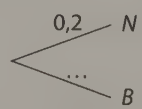
2. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Représenter un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré (Rappels de 1STI2D-STL)

20. ++ Schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}2$

Une urne contient 2 boules noires et 8 boules blanches. On prélève une boule au hasard dans l'urne. Toutes les boules ont la même probabilité d'être prélevées. On désigne par N l'événement : « la boule prélevée est noire » et par B l'événement : « la boule prélevée est blanche ».

1. Compléter l'arbre de probabilité suivant correspondant à cette épreuve de Bernoulli.



2. a) Trois prélèvements dans l'urne sont successivement réalisés en remettant à chaque fois la boule dans l'urne avant d'effectuer le prélèvement suivant. Représenter cette épreuve par un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité de l'événement E : « obtenir trois boules noires ».

c) On désigne par F l'événement : « obtenir exactement deux boules noires ».

Démontrer que $P(F) = 0{,}096$.

CORRIGÉ P. 363

21. +++ **Contrôle de qualité**

Des pièces d'un certain type sont fabriquées en grandes séries. On prélève au hasard une pièce d'un lot dans lequel 97 % des pièces sont conformes au cahier des charges. On remet la pièce dans le lot et on effectue un deuxième prélèvement d'une pièce. On répète une troisième fois l'expérience. On a réalisé trois prélèvements d'une pièce avec remise. Calculer la probabilité de l'événement C : « les trois pièces prélevées sont conformes au cahier des charges ».

▶ **Conseil :** *construire un arbre pondéré.*

Loi binomiale (Rappels de 1re STI2D-STL)

22. + Sachant que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, calculer :

a) pour $n = 6$ et $p = 0{,}4$

$P(X = 3)$, $P(X = 0)$, $P(X \leq 2)$.

b) pour $n = 6$ et $p = 0{,}6$

$P(X = 6)$, $P(X \leq 2)$, $P(X > 1)$.

Arrondir à 10^{-3}.

Méthode : *En STI2D-STL, on utilise une calculatrice, ou un logiciel pour calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$ (Voir le* **TP1***).*

23. + **Espérance**

Quelle est l'espérance de la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}2$?

24. ++ **Espérance et variance**

Tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Une urne contient dix boules dont trois rouges.

On tire huit boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. Cela constitue un prélèvement.

On suppose l'équiprobabilité des tirages.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement ainsi défini, associe le nombre de boules rouges obtenues.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

2. Calculer $P(X \leq 5)$.

3. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Que représente $E(X)$?

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

25. +++ **Comparaison de probabilités**

Dans cet exercice, chaque probabilité est à arrondir à 10^{-2}.

1. X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50 ; 0{,}7)$.

a) Calculer $P(X \leq 40)$ et $P(X \leq 29)$.

b) En déduire $P(30 \leq X \leq 40)$.

2. On décide d'approcher la loi de X par une loi normale.

a) Déterminer les paramètres μ et σ de cette loi normale. Arrondir σ à 10^{-2}.

b) Y étant une variable aléatoire suivant cette loi normale, calculer $P(30 \leq Y \leq 40)$.

c) Comparer les résultats obtenus aux questions **1.** b) et **2.** b).

CORRIGÉ P. 364

▶ *Voir aussi l'exercice résolu* **4** *du cours.*

26. ++ **Comparaison de probabilités**

Dans cet exercice, chaque probabilité est à arrondir à 10^{-2}.

1. X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(80 ; 0{,}4)$.

a) Calculer $P(X \leq 38)$ et $P(X \leq 26)$.

b) En déduire $P(27 \leq X \leq 38)$.

2. On décide d'approcher la loi de X par une loi normale.

a) Déterminer les paramètres μ et σ de cette loi normale. Arrondir σ à 10^{-2}.

b) Y étant une variable aléatoire suivant cette loi normale, calculer $P(27 \leq Y \leq 38)$.

c) Comparer les résultats obtenus aux questions **1.** b) et **2.** b).

27. ++++ **Correction de continuité**

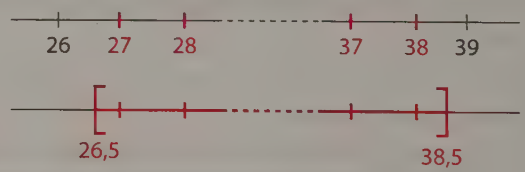
« ***La correction de continuité n'est pas un attendu*** » **du programme.**

1. Reprendre la question **1.** de l'exercice **26** en arrondissant chaque probabilité à 10^{-4}.

2. Reprendre la question **2.** de cet exercice en arrondissant chaque probabilité à 10^{-4}.

3. Entre les valeurs 26 et 27, la variable aléatoire X ne prend aucune valeur, tandis que la variable aléatoire Y peut prendre toutes les valeurs de cet intervalle et $P(Y \in]26, 27[) \approx 0{,}0415$.

Il en est de même entre les valeurs 38 et 39.



Aussi lorsqu'on remplace la variable aléatoire X par la variable aléatoire Y, il peut être préférable de remplacer l'intervalle $[27 ; 38]$ par l'intervalle $[26{,}5 ; 38{,}5]$: c'est la **correction de continuité**.

a) Calculer $P(26{,}5 \leq Y \leq 38{,}5)$; arrondir à 10^{-4}.

b) Comparer les résultats obtenus aux questions **1.** b), **2.** b), **3.** a).

Utiliser un logiciel

28. +++ **Tremblements de terre avec le tableur** TICE

Le fichier « 9_tremblements_de_terre » (au format Excel ou OpenOffice) fournit le nombre de jours qui séparent deux tremblements de terre graves sur la surface de la terre entre 1902 et 1979. Un tremblement de terre est grave si sa magnitude est au moins égale à 7,5 sur l'échelle de Richter ou s'il a causé la mort d'au moins 1 000 personnes. Il y a eu 63 tremblements de terre graves durant cette période, donc 62 valeurs du temps d'attente jusqu'au suivant.

1. Pour cette série de données :

– calculer le minimum, le maximum, la moyenne et l'écart type ;

– regrouper en classes d'amplitude 100 et représenter un histogramme normalisé des fréquences de chaque classe (l'aire de chaque rectangle égale la fréquence de la classe correspondante, pour cela sa hauteur égale la fréquence divisée par l'amplitude de la classe) ;

– d'après le « profil » de l'histogramme, envisager un modèle exponentiel en superposant le tracé d'une fonction de densité adaptée (on peut utiliser : =LOI.EXPONENTIELLE(x;1/*moyenne*;FAUX)).

2. On suppose que la variable aléatoire T correspondant au temps d'attente, exprimé en jours, entre deux tremblements de terre graves à la surface du globe suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}002\,3$. Calculer la probabilité que ce temps d'attente dépasse 365 jours.

CORRIGÉ P. 364

29. ++++ **Simuler une loi exponentielle avec la calculatrice ou le tableur** TICE

1. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$.

a) Comment peut-on simuler, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, une série de réalisations de la variable aléatoire X ?

b) Soit a un réel de l'intervalle $]0, 1]$, calculer $P(X \geq a)$.

2. Soit T la variable aléatoire définie par $T = -\dfrac{1}{\lambda}\ln X$ où λ est un réel strictement positif.

Montrer que les valeurs prises par la variable aléatoire T appartiennent à l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Soit t un réel de l'intervalle $[0, +\infty[$, montrer que $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

4. Déduire de la question précédente la fonction de densité f de la variable aléatoire T (on pourra montrer que, pour $t \geq 0, f(t) = \dfrac{d}{dt}P(T \leq t)$.

Quelle est la loi de T ?

5. Comment peut-on simuler, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, une série de réalisations d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}005$?

Effectuer une simulation d'une telle série de 10 valeurs.

CORRIGÉ P. 364

30. ++++ **Exploitation d'instructions du tableur** TICE

On désigne par Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Soit F la fonction définie sur $]-\infty, +\infty[$ par $F(x) = P(Z \leq x)$.

1. La fonction F correspond à l'instruction =LOI.NORMALE.STANDARD(x) du tableur. Représenter la fonction F à l'aide du tableur.

2. On admet que tout nombre p de l'intervalle $]0, 1[$ admet un antécédent unique par F, noté $F^{-1}(p)$.

a) Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $F^{-1}(0{,}1)$; $F^{-1}(0{,}5)$; $F^{-1}(0{,}95)$.

b) Préciser les valeurs précédentes en utilisant la fonction : =LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(p) du tableur.

3. On simule la réalisation d'une variable aléatoire X par l'instruction :

=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA()).

a) Simuler 1 000 réalisations de la variable aléatoire X.

b) Regrouper les 1 000 réalisations de X en classes d'amplitude 0,5 et représenter l'histogramme normalisé des fréquences de chaque classe (l'aire de chaque rectangle égale la fréquence de la classe correspondante, pour cela sa hauteur égale la fréquence divisée par l'amplitude de la classe).

Superposer à cet histogramme la représentation graphique de la fonction de densité de la variable aléatoire Z.

Que constate-t-on ?

CORRIGÉ P. 365

31. ++++ **Comparaison des lois binomiales et normales avec GeoGebra** TICE

On souhaite comparer graphiquement, à l'aide de GeoGebra, la loi binomiale de paramètres n et p avec la loi normale de même moyenne et de même écart type.

1. Créer un curseur n allant de 5 à 1 000 avec un incrément de 1 et un curseur p allant de 0 à 1 avec un incrément 0,1.

Calculer, avec GeoGebra, la moyenne m et l'écart type s de la loi normale à comparer avec la loi binomiale de paramètres n et p.

2. Représenter par un histogramme la distribution binomiale en saisissant l'instruction :

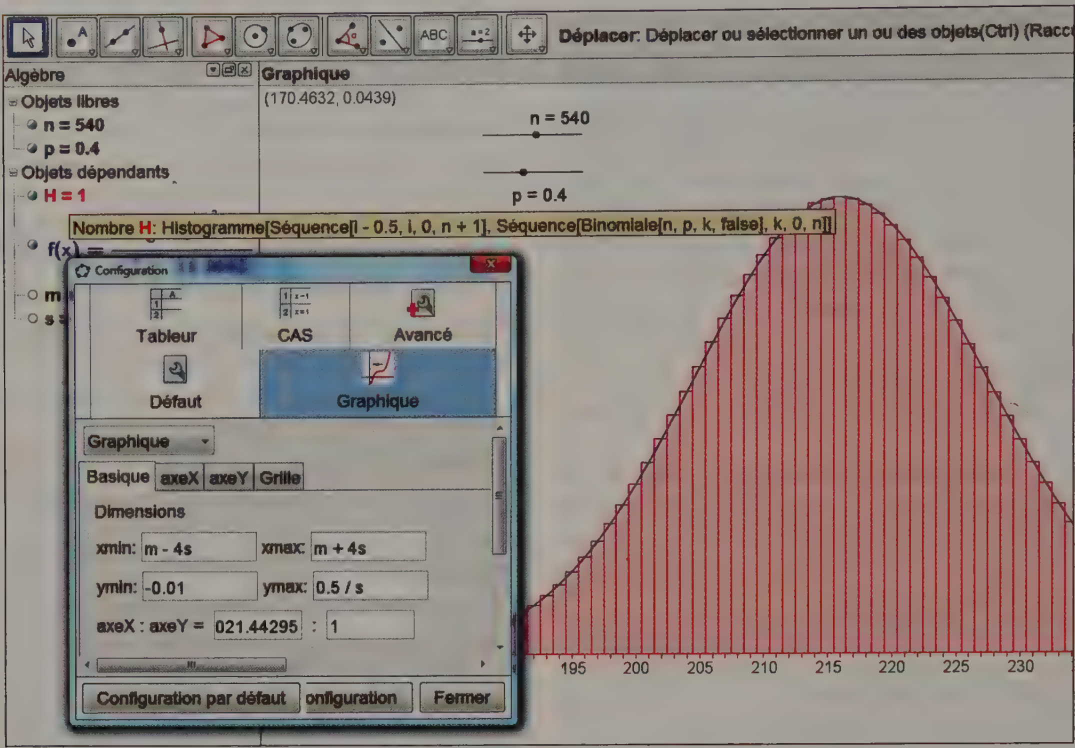
H=Histogramme[Séquence[i-0.5,i,0,n+1],
Séquence[Binomiale[n,p,k,false],k,0,n]]

Tracer la fonction de densité de la loi normale de paramètres m et s en saisissant :

$f(x)$=Normale[m,s,x]

Régler l'échelle graphique à xmin : m-4s ; xmax : m+4s ; ymin : -0.01 et ymax : 0.5/s

Justifier le réglage de l'échelle des abscisses.



3. Indiquer, pour chacun des couples (n, p) suivants ceux pour lesquels ont peut considérer que les deux distributions sont « proches » :
(5 ; 0,2) ; (20 ; 0,9) ; (30 ; 0,9) ; (30 ; 0,4) ; (1 000 ; 0,1) et (1 000 ; 0,6).

4. On considère que l'on peut approcher la loi binomiale de paramètres n et p par la loi normale correspondante lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$.
Ces conditions sont-elles compatibles avec vos observations précédentes ?

32. ++++ Simulation à l'aide du tableur

ALGO

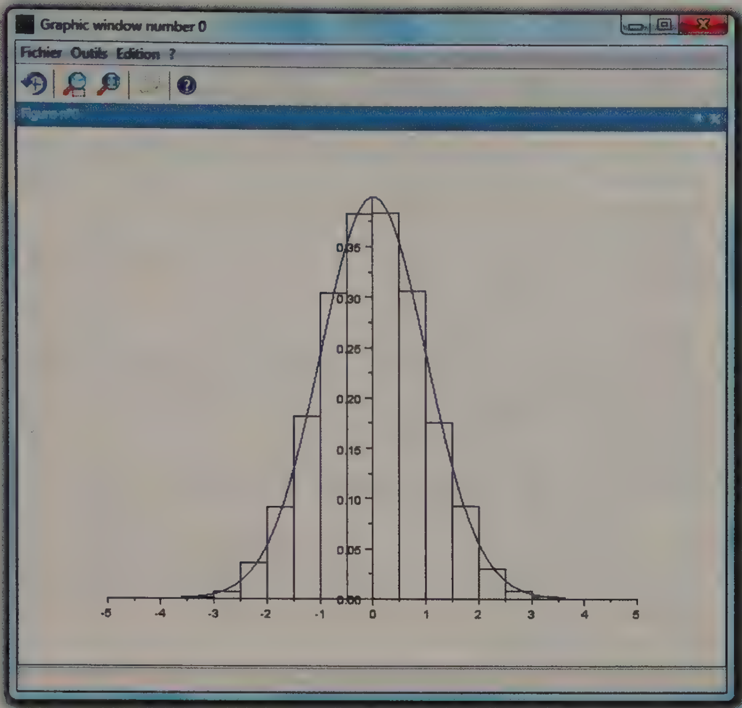
1. On considère l'algorithme suivant, simulant une réalisation d'une variable aléatoire et dans lequel la fonction « random » désigne un générateur de nombres aléatoires simulant la loi uniforme sur l'intervalle [0, 1].

```
Affecter à x la valeur random
Pour k allant de 1 à 11
  Affecter à x la valeur x + random
FinPour
Afficher x – 6
```

a) Combien de fois cet algorithme fait-il appel à la fonction random ?
b) Définir, en une phrase, le contenu de la variable x à la fin de l'algorithme.
c) Quelle est la moyenne des valeurs prises par la fonction random, sur un très grand nombre d'appels à cette fonction ? Quelle est la moyenne des valeurs affichées par l'algorithme, sur un très grand nombre de réalisations de celui-ci ?
d) On admet que la fonction random fournit des résultats avec une variance égale à $\dfrac{1}{12}$ et que, dans le programme précédent cette variance s'ajoute à chaque addition d'une valeur de random. Quelle est la variance des valeurs affichées par l'algorithme, sur un très grand nombre de réalisations de celui-ci ?

2. Modifier l'algorithme précédent pour qu'il affiche une liste $X(i)$ de 10 000 simulations.

3. L'implantation de l'algorithme sur ordinateur a conduit à l'affichage suivant où est tracée la fonction de densité de la loi normale centrée réduite et où les 10 000 simulations sont représentées dans un histogramme normalisé de fréquences.
Que constate-t-on ?



CORRIGÉ P. 365

33. +++ Intervalle de confiance d'une moyenne avec le tableur

TICE

Une entreprise fabrique des pièces d'un certain type pour l'imagerie médicale. Soit X la variable aléatoire qui, à toute pièce de ce type prélevée dans la production de la journée, associe le diamètre de la pièce, exprimé en centimètres. On suppose que X suit la loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart type 0,084.

On prélève au hasard un échantillon de 60 pièces dans cette production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note $\overline{x}$ la moyenne des diamètres, en cm, des pièces de l'échantillon.

On montre qu'un intervalle de confiance de la moyenne inconnue μ au niveau de confiance de 95 % est fourni par :

$$\left[\overline{x}-1{,}96\times\frac{0{,}084}{\sqrt{60}}, \overline{x}+1{,}96\times\frac{0{,}084}{\sqrt{60}}\right].$$

1. On souhaite vérifier cette formule, en effectuant une simulation sur tableur.

On suppose pour cette simulation que μ = 4,02 entrée en cellule B (valeur modifiable).

La mesure du diamètre d'une pièce prélevée est simulée par la formule :

=LOI.NORMALE.INVERSE(ALEA();$B$1;0,084)

On simule ainsi 100 échantillons de taille 60.

B3 fx =LOI.NORMALE.INVERSE(ALEA();$B$1;0,084)

	A	B	C	D	E	F
1	μ = 4,02					
2	pièce n°	échantillon 1	échantillon 2	échantillon 3	échantillon 4	échantillon 5
3	1	3,982	3,945	3,846	4,074	3,927
4	2	3,933	4,028	3,908	4,001	4,023
5	3	4,181	4,018	3,973	4,005	3,929
6	4	4,040	4,056	3,986	3,936	4,053
7	5	4,141	4,004	4,066	4,027	3,895
8	6	4,152	3,923	3,866	4,296	4,060
9	7	4,135	4,055	4,035	3,815	4,109
10	8	4,101	3,989	4,093	4,086	4,096

B66 f_x =SI(ET($B$1>=B64;$B$1<=B65);1;0)

	A	B	C	D	E	F
60	58	3,905	4,083	3,898	4,201	4,188
61	59	4,029	4,060	3,890	4,205	4,010
62	60	3,917	3,937	4,150	3,890	4,000
63	moyenne échantillon	4,021	3,997	4,009	4,030	4,018
64	borne inférieure IC	4,000	3,976	3,988	4,009	3,997
65	borne isupérieure IC	4,043	4,019	4,030	4,051	4,039
66	µ est-il dans l'IC ?	1	0	1	1	1
67	µ est dans	96	% des intervalles de confiance.			

a) Quelle formule, entrée en cellule B64, permet-elle de calculer la borne inférieure de l'intervalle de confiance ?

b) Expliquer la formule =SI(ET($B$1>=B64;$B$1<=B65);1;0) entrée en B66.

c) Que permet de vérifier l'affichage en cellule B67 ?

2. Sur l'échantillon réellement prélevé, on constate que $\overline{x} = 4{,}012$ cm.

a) Donner un intervalle de confiance de la moyenne inconnue µ des pièces de la production au niveau de confiance de 95 %. (Arrondir les bornes à 10^{-3}.)

b) On considère l'affirmation suivante : « la moyenne µ est obligatoirement entre 3,991 et 4,033 ». Peut-on déduire de ce qui précède que cette affirmation est vraie ?

Les exercices pour le baccalauréat sont des exercices qui pourraient figurer dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat STL-Biotechnologies.

Loi uniforme sur un intervalle

34. +++ **L'attente au téléphone**

Le standard téléphonique d'un centre d'urgence limite la durée d'attente en transférant le plus vite possible les appels sur d'autres postes.

On s'intéresse aux appels dont la durée d'attente est comprise entre 10 secondes et 1 minute.

On note T la variable aléatoire qui, à un tel appel pris au hasard, associe la durée de l'attente. On admet que T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[10, 60]$.

1. Donner la fonction de densité de T.

2. Déterminer les probabilités suivantes :

$P(A)$ où A est l'événement « la durée de l'attente pour un tel appel pris au hasard est inférieure à 20 secondes »,

$P(B)$ où B est l'événement « la durée de l'attente pour un tel appel pris au hasard supérieure à 40 secondes »,

$P(C)$ où C est l'événement « la durée de l'attente pour un tel appel pris au hasard est comprise entre 20 et 40 secondes ».

3. a) Déterminer l'espérance $E(T)$.

b) Donner une interprétation de $E(T)$.

4. Déterminer la variance $V(T)$.

Loi exponentielle

35. +++ **Durée de vie de lampes**

T est la variable aléatoire qui, à toute lampe d'un certain type prélevée au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en heures) avant la rupture du filament.

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,000 4.

1. Donner la fonction de densité de T.

2. Calculer les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-2}) :

A : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est comprise entre 2 000 h et 2 800 h »,

B : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est inférieure à 3 000 h »,

C : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est supérieure à 2 500 h »,

D : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est égale à 2 800 h ».

3. Déterminer l'espérance $E(T)$ et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

36. +++ **Temps de bon fonctionnement d'une machine**

T est la variable aléatoire qui, à toute machine à embouteiller d'un certain type prélevée au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en jours) avant une défaillance.

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,005.

1. Donner la fonction de densité de T.

2. Calculer les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-3}) :

A : « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est comprise entre 150 et 250 jours »,

B : « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est inférieure à 275 jours »,

C : « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est supérieure à 200 jours »,

D : « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est égale à 220 jours ».

3. Déterminer l'espérance $E(T)$ et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

37. +++ **Durée de vie de tubes fluorescents**

T est la variable aléatoire qui, à tout tube d'un certain type prélevé au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en heures).

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,001 5.

1. Donner la fonction de densité de T.

2. Calculer les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-2}) :

A : « la durée de bon fonctionnement du tube prélevé est comprise entre 600 h et 700 h »,

B : « la durée de bon fonctionnement du tube prélevé est inférieure à 800 h »,

C : « le tube prélevé fonctionne encore après 750 h »,

D : « le tube prélevé arrête de fonctionner à l'instant 670 h ».

3. Déterminer l'espérance $E(T)$ et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

38. +++ **Claudius le jardinier**

1. Claudius le jardinier a installé 10 bornes lumineuses pour baliser une allée du jardin. Chaque borne est équipée d'une ampoule halogène de 35 watts. On admet que ces ampoules fonctionnent indépendamment les unes des autres et que la variable T qui, à une ampoule quelconque, associe sa durée de vie t exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$.

a) Quelle est la durée de vie moyenne d'une ampoule ?

b) Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'une ampoule donnée fonctionne encore après 20 000 heures d'utilisation ?

2. Désireux de faire des économies, Claudius se rend dans un magasin spécialisé et achète 10 ampoules de nouvelle génération, fabriquées à partir de leds et ayant une puissance très faible de 1 watt. On peut lire sur l'étiquette du *blister* contenant une de ces ampoules que sa durée de vie moyenne est de 80 000 heures. On admet que ces ampoules fonctionnent indépendamment les unes des autres et que la variable aléatoire W qui, à une ampoule quelconque, associe sa durée de vie t exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre μ.

a) Calculer la valeur exacte de μ.

b) Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-4}, qu'une ampoule de ce type fonctionne encore 20 000 heures après sa mise en service ?

Loi normale

39. +++ **Des matelas adaptés à l'utilisateur**

Une fabrique de matelas lance un nouveau produit : le matelas adapté au poids de l'utilisateur. Pour cela, elle utilise des mousses de densités différentes.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à un individu tiré au hasard dans un échantillon d'utilisateurs potentiels, associe son poids en kilogrammes.

On admet que X suit la loi normale de moyenne $m = 82$ kg et d'écart type $\sigma = 8{,}5$ kg.

L'entreprise conseille le matelas A pour un poids inférieur à 75 kg, le matelas B pour un poids compris entre 75 kg et 85 kg et le matelas C au-delà de 85 kg.

Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « l'individu tiré au hasard est un utilisateur potentiel du matelas A » ;

E_2 : « l'individu tiré au hasard est un utilisateur potentiel du matelas B » ;

E_3 : « l'individu tiré au hasard est un utilisateur potentiel du matelas C ».

40. +++ **La taille des hommes**

On note X la variable aléatoire qui à chaque homme prélevé au hasard dans les étudiants d'un campus associe sa taille en centimètres. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 178 et d'écart type 10.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants (arrondir à 10^{-3}) :

A : « un homme prélevé au hasard parmi les étudiants a une taille supérieure à 180 » ;

B : « un homme prélevé au hasard parmi les étudiants a une taille supérieure à 190 » ;

C : « un homme prélevé au hasard parmi les étudiants a une taille inférieure ou égale à 150 » ;

D : « un homme prélevé au hasard parmi les étudiants a une taille comprise entre 160 et 185 ».

41. +++ **Les factures**

À la fin d'un autre mois, on s'intéresse au montant de l'ensemble des factures éditées pendant ce mois par un grand garage.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois, associe son montant en euros. On suppose que la variable Y suit la loi normale de moyenne 840 et d'écart type 400.

Les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

1. Calculer $P(Y \leq 1\,500)$.

2. Calculer la probabilité qu'une facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois ait un montant supérieur à 300 euros.

3. Pour les factures dont le montant est supérieur ou égal à 600 euros et inférieur ou égal à 1 500 euros, le garage propose le paiement en trois fois sans frais.

Calculer la probabilité qu'une facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois puisse être réglée en trois fois sans frais.

42. +++ **Industrie textile**

Une usine produit des bobines de fil pour l'industrie textile.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute bobine tirée au hasard dans la production d'une journée, associe la longueur, exprimée en mètres, du fil de cette bobine. On admet que X suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart type 0,2.

On prélève au hasard une bobine dans la production d'une journée.

Tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « la longueur du fil de la bobine est inférieure à 50,19 m » ;

B : « la longueur du fil de la bobine est supérieure à 50,16 m » ;

C : « la longueur du fil de la bobine est comprise entre 50,16 m et 50,19 m ».

43. +++ Masse d'une pièce

Un atelier d'assemblage de matériel informatique s'approvisionne en pièces d'un certain modèle.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot important, associe sa masse en grammes.

On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 500 et d'écart type 4.

Les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

1. Calculer $P(Y \leq 210)$.

2. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard ait une masse supérieure à 495 grammes.

3. Une pièce de ce modèle est acceptable pour la masse lorsque celle-ci appartient à l'intervalle [490, 510]. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard soit acceptable pour la masse.

44. +++ Flotteurs

On s'intéresse au contrôle de la qualité de la fabrication d'un modèle de flotteur.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque flotteur prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe sa masse exprimée en grammes.

On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type 1,58.

Les résultats sont à arrondir à 10^{-2}.

1. Calculer la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production d'une journée ait une masse inférieure ou égale à 27 grammes.

2. Calculer la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production d'une journée ait une masse supérieure ou égale à 24,5 grammes.

3. Calculer la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production d'une journée ait une masse comprise entre 24,5 grammes et 27 grammes.

Loi binomiale

Les exercices **45** à **47** portent sur le programme de la classe de 1STI2D-STL.

45. ++ Dans une pharmacie

Dans cet exercice on s'intéresse aux factures comptabilisées chaque mois dans une grande pharmacie.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

À la fin d'un mois donné, on considère une liasse importante de factures. On note E l'événement : « une facture prélevée au hasard dans la liasse de factures est erronée ».

On suppose que $P(E) = 0{,}03$.

On prélève au hasard 20 factures dans la liasse pour vérification. La liasse contient assez de factures pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 factures. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de factures erronées de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'aucune facture de ce prélèvement ne soit erronée.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux factures soient erronées.

▶ Voir aussi l'exercice résolu **4** du cours.

CORRIGÉ P. 366

46. ++ Pour protéger l'environnement

On s'intéresse ici à la fabrication dans une usine d'un grand groupe de l'industrie automobile d'un certain modèle de véhicules à « moteur hybride ».

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Dans cette question, on s'intéresse à un stock important de véhicules sortis des chaînes de montage de l'usine.

On appelle « véhicule défectueux » un véhicule possédant au moins un défaut. Il y a « beaucoup » de défauts possibles à la sortie d'une chaîne de montage.

On note E l'événement : « un véhicule prélevé au hasard dans le stock est défectueux ».

On suppose que $P(E) = 0{,}2$.

On prélève au hasard 20 véhicules dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 véhicules.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de véhicules défectueux de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'un seul véhicule de ce prélèvement soit défectueux.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un véhicule soit défectueux.

> ▶ **Contrôle de qualité dans l'industrie automobile :** *une probabilité de 0,2 peut paraître excessive (quand on fabrique des vis, par exemple, le pourcentage de pièces défectueuses ne dépasse pas 2 %). Il faut savoir que dans l'industrie automobile, à la sortie d'une chaîne de montage, le pourcentage de véhicules présentant au moins un défaut (et il y a beaucoup de défauts possibles !) peut atteindre, jusqu'à … 40 % !*

47. +++ Des barres en métal

Les résultats sont à arrondir à 10^{-2}.

Dans une usine, une machine produit des barres de métal.

Dans la production de la machine, 8 % des barres sont non conformes. On prélève un lot de 30 barres extraites au hasard dans la production de la machine. Le nombre de barres produites est suffisamment important pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 barres.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 30 barres associe le nombre de barres de ce lot qui sont non conformes.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et donner ses paramètres. Justifier.

2. Calculer la probabilité qu'aucune barre de ce lot ne soit mise au rebut.

3. Calculer la probabilité que dans un tel lot, au moins 90 % des barres ne soient pas mises au rebut.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

48. +++ Le courrier d'une entreprise

Dans cette activité chaque probabilité demandée est à arrondir à 10^{-4}.

Une enquête permet d'estimer que la probabilité qu'une lettre, prélevée au hasard dans le courrier d'une entreprise, parvienne à son destinataire en France, le lendemain, est 0,7.

Dans la suite, on ne considère que les lettres à destination de la France.

À l'agence de Marne-la-Vallée d'une grande entreprise, on admet que l'on expédie 100 lettres par jour. On note X la variable aléatoire qui, à un jour tiré au hasard, associe le nombre de lettres qui parviendront à leur destinataire le lendemain. On suppose que les acheminements de ces lettres sont indépendants.

1. *Loi binomiale*

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer l'espérance mathématique de X, puis la valeur arrondie à 10^{-1} de l'écart type de X.

c) Calculer la probabilité que 60 lettres exactement, sur les 100 expédiées un jour tiré au hasard parviennent à leur destinataire le lendemain.

2. *Approximation d'une loi binomiale par une loi normale*

On décide d'approcher la loi de la variable discrète X par la loi normale de paramètres μ et σ.

a) Donner les valeurs de μ et σ.

b) On note Y une variable aléatoire suivant cette loi normale.

En utilisant cette approximation calculer la probabilité qu'au moins 80 des 100 lettres, expédiées un jour tiré au hasard, parviennent à leur destinataire le lendemain, c'est-à-dire $P(Y \geq 80)$.

c) Calculer de même la probabilité que le nombre de lettres, sur les 100 expédiées un jour choisi au hasard, parvenant à leur destinataire le lendemain, soit compris entre 55 et 85.

d) Comparer ce dernier résultat à la valeur $P(55 \leq X \leq 85) \approx 0{,}999\,3$ obtenue avec la loi binomiale définie au **1.**.

49. +++ Pile ou face

On jette 100 fois de suite des pièces de monnaie bien équilibrées en notant chaque fois le résultat, ce qui constitue une partie.

Tous les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3}.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le nombre de « face » obtenu.

a) Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable X est une loi binomiale ; préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre de "face" est strictement supérieur à 45 ».

2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale.

a) Déterminer les paramètres μ et σ de cette loi normale.

b) On considère une variable aléatoire Y suivant cette loi normale. En utilisant cette approximation calculer la probabilité de l'événement « Le nombre de "face" est compris entre 30 et 60 ».

c) Comparer ce résultat avec la valeur $P(30 \leq X \leq 60) \approx 0{,}982$ obtenue avec la loi binomiale définie au **1.**.

50. +++ **Vente d'appareils photographiques**

Dans ce qui suit, sauf mention contraire, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Un revendeur de matériel photographique désire s'implanter dans une galerie marchande.

Il estime qu'il pourra vendre 40 appareils photographiques numériques par jour et que les ventes sont deux à deux indépendantes.

Une étude lui a montré que, parmi les différentes marques d'appareils disponibles, la marque A réalise 38,6 % du marché.

1. On note X la variable aléatoire qui, à un jour tiré au hasard dans les jours d'ouverture de l'année, associe le nombre d'appareils de marque A vendus ce jour-là.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité que, sur 40 appareils vendus par jour, 20 soient de la marque A.

c) Calculer l'espérance mathématique de X. Calculer l'écart type de X. Arrondir à l'unité.

2. On décide d'approcher la loi de la variable discrète X par une loi normale de moyenne m et d'écart type σ.

a) Justifier que $m = 15{,}44$ et $\sigma = 3$.

b) Déterminer la probabilité de l'événement « un jour donné, 20 au moins des appareils vendus sont de marque A ».

c) Déterminer la probabilité de l'événement : « un jour donné, le nombre d'appareils de type A vendus est compris entre 15 et 25, bornes incluses ».

51. +++ **Jeu de dés**

On jette un dé non truqué, la partie est gagnée si on obtient un 5 ou un 6. On joue 50 parties de suite.

Dans cet exercice les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. *Loi binomiale*

On considère la variable aléatoire X qui associe le nombre de parties gagnées au cours d'une suite de 50 parties.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité de l'événement E : « on gagne 20 parties ».

3. Calculer la probabilité de l'événement F : « on gagne 20 ou 21 parties ».

B. *Approximation d'une loi binomiale par une loi normale*

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne $\mu = \dfrac{50}{3}$ et d'écart type $\sigma = \dfrac{10}{3}$.

On note Y une variable aléatoire suivant cette loi normale.

1. Justifier le choix des valeurs de μ et de σ.

2. Calculer $P(Y \leq 21)$ et $P(Y < 9)$.

3. En déduire une valeur approchée de la probabilité de l'événement : « le nombre de parties gagnées est compris entre 9 et 21 ».

4. Comparer ce résultat à la valeur $P(9 \leq X \leq 21) \approx 0{,}92$ obtenue avec la loi binomiale définie dans la partie A.

Intervalle de fluctuation à environ 95 % d'une fréquence avec une loi binomiale (rappel)

52. +++ **Contrôle de qualité : poutres pour la construction**

Une usine fabrique en très grande série des poutres pour la construction.

On accepte les poutres dont la longueur, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle [590, 620] et on admet que la probabilité qu'une poutre soit acceptée est 0,88. On prélève au hasard un échantillon de 50 poutres dans l'entrepôt. Le stock de l'entrepôt est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 poutres. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement ainsi défini de 50 poutres, associe le nombre de poutres acceptées.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

2. À l'aide de la table de probabilités cumulées, déterminer :

a) le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$;

b) le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

$\mathscr{B}(50\,;0{,}88)$	
k	$P(X \leq k)$
38	0,0135
39	0,0325
40	0,0708
41	0,1392
...	...
46	0,8655
47	0,9487
48	0,9869
49	0,9983
50	1,0000

3. En déduire un intervalle de fluctuation, à environ 95 %, de la fréquence des poutres acceptées dans un lot aléatoire de 50 poutres prélevé comme indiqué ci-dessus.

4. Si on prélève au hasard un tel échantillon de 50 poutres, la fréquence des poutres acceptées :

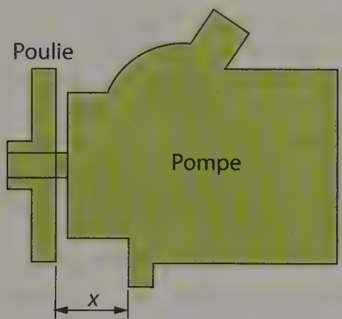
a) appartient-elle toujours à cet intervalle de fluctuation ?

b) peut-elle être égale à 0,6 ?

CORRIGÉ P. 366

53. +++ Emmanchement d'une poulie

Un atelier est chargé de l'assemblage d'un moteur. Dans cet exercice on s'intéresse au contrôle de qualité de l'emmanchement d'une poulie sur une pompe de direction assistée. Cet emmanchement est contrôlé par la mesure, en millimètres, de la cote x apparaissant sur la figure ci-dessous.



L'installation de la poulie est considérée non conforme lorsque la cote x n'appartient pas à l'intervalle $[39{,}85 ; 40{,}15]$.

Dans la production du jour, 15 % des ensembles pompe-poulie ont des cotes x n'appartenant pas à cet intervalle.

On prélève au hasard 30 ensembles pompe-poulie dans cette production. La production est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 30 ensembles pompe-poulie, associe le nombre de ceux dont la cote x n'appartient pas à l'intervalle $[39{,}85 ; 40{,}15]$.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. À l'aide de la table de probabilités cumulées, déterminer :

a) le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$;

b) le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

$\mathcal{B}(30 ; 0{,}15)$	
k	$P(X \leq k)$
0	0,0076
1	0,0480
2	0,1514
3	0,3217
4	0,5245
5	0,7106
6	0,8474
7	0,9302
8	0,9722
9	0,9903

3. En déduire un intervalle de fluctuation, à environ 95 %, du pourcentage des ensembles pompe-poulie ayant des cotes x n'appartenant pas à l'intervalle $[39{,}85 ; 40{,}15]$ dans un échantillon aléatoire de 30 ensembles prélevés comme indiqué ci-dessus. Arrondir la borne de gauche de cet intervalle à 0,1 %.

4. Si on prélève au hasard un tel échantillon de 30 ensembles pompe-poulie, le pourcentage étudié peut-il être :

a) égal à 40 % ?

b) inférieur à 2,5 % ?

54. +++ Dopage

Des statistiques ont permis d'admettre qu'en période de compétition, la probabilité pour un sportif contrôlé au hasard, d'être déclaré positif au contrôle antidopage est égale à 0,05.

On tire au hasard un échantillon de 50 sportifs et on admet que ce tirage peut être considéré comme effectué avec remise.

Soit X la variable aléatoire qui à un tel prélèvement associe le nombre de sportifs contrôlés positifs dans cet échantillon.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

2. Déterminer un intervalle de fluctuation, à environ 95 %, du pourcentage de sportifs contrôlés positifs dans un échantillon aléatoire de 50 sportifs prélevés comme ci-dessus.

$\mathcal{B}(50 ; 0{,}05)$	
k	$P(X \leq k)$
0	0,0769
1	0,2794
2	0,5405
3	0,7604
4	0,8964
5	0,9622
6	0,9882
7	0,9968

3. On double maintenant la taille des échantillons et on appelle Y la variable aléatoire, définie comme X, pour des échantillons aléatoires de 100 sportifs.

a) Indiquer, sans explication, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y.

b) Reprendre la question **2.** en remplaçant 50 par 100.

$\mathcal{B}(100 ; 0{,}05)$	
k	$P(X \leq k)$
0	0,0059
1	0,0371
2	0,1183
...	...
7	0,8720
8	0,9369
9	0,9718
10	0,9885

4. Comparer les deux intervalles de fluctuation ainsi obtenus.

Intervalle de fluctuation asymptotique

55. +++ Contrôle de qualité : poutres pour la construction

On reprend le contexte de l'exercice corrigé **52**.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres n et p de cette loi.

2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ approximant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suivie par la variable aléatoire X.

Déterminer les paramètres μ et σ. Arrondir à 10^{-2}.

3. Comparer les probabilités $P(X \leq 48) \approx 0{,}987$ et $P(Y \leq 48)$.

4. a) Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des poutres acceptées dans un lot aléatoire de 50 poutres prélevées comme indiquées.

b) Indiquer si les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont satisfaites.

c) Comparer cet intervalle de fluctuation asymptotique à l'intervalle [0,78 ; 0,96] qui est l'intervalle de fluctuation à environ 95 %, obtenu à partir de la loi binomiale suivie par X.

5. Si on prélève au hasard un tel échantillon de 50 poutres, la fréquence des poutres acceptées :

a) appartient-elle toujours à l'intervalle de fluctuation [0,78 ; 0,96] obtenu avec la loi binomiale ?

b) appartient-elle toujours à l'intervalle de fluctuation asymptotique obtenu à la question **4.** a) ?

CORRIGÉ P. 366

56. +++ Emmanchement d'une poulie

On reprend le début de l'énoncé de l'exercice **53**, mais on prélève maintenant 50 (au lieu de 30) ensembles pompe-poulie dans la production.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres n et p de cette loi.

2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ approximant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suivie par la variable aléatoire X.

Déterminer les paramères μ et σ. Arrondir à 10^{-2}.

3. Comparer les probabilités $P(X \leq 8) \approx 0{,}97$ et $P(Y \leq 8)$.

4. a) Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % du pourcentage des ensembles pompe-poulie ayant des cotes x n'appartenant pas à l'intervalle [39,85 ; 40,15] dans un lot aléatoire de 50 ensemble prélevés comme indiqué.

b) Indiquer si les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont satisfaites.

c) Comparer cet intervalle de fluctuation asymptotique à l'intervalle [3,3 % ; 30 %] qui est l'intervalle de fluctuation, à environ 95 %, obtenu à partir de la loi binomiale suivie par X.

5. Si on prélève au hasard un tel échantillon de 50 ensembles pompe-poulie, le pourcentage étudié peut-il être :

a) égal à 40 % ?

b) inférieur à 2 % ?

57. +++ Dopage

On reprend le contexte de la question **3.** de l'énoncé de l'exercice **54**.

1. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ approximant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suivie par la variable aléatoire Y.

Déterminer les paramères μ et σ. Arrondir à 10^{-2}.

2. Comparer les probabilités $P(Y \leq 7) \approx 0{,}87$ et $P(Z \leq 7)$.

3. a) Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % du pourcentage de sportifs contrôlés positifs dans cet échantillon.

b) Indiquer si les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n\,(1-p) \geq 5$ sont satisfaites.

c) Comparer cet intervalle de fluctuation asymptotique à l'intervalle [4 % ; 10 %] qui est l'intervalle de fluctuation, à environ 95 %, obtenu à partir de la loi binomiale suivie par Y.

4. Si on prélève au hasard un tel échantillon de 100 sportifs, le pourcentage de sportifs contrôlés positifs dans cet échantillon :

a) appartient-il toujours à l'intervalle de fluctuation [4 % ; 10 %] obtenu avec la loi binomiale ?

b) appartient-il toujours à l'intervalle de fluctuation asymptotique obtenu à la question **4.** a) ?

c) peut-il être égal à 15 % ?

58. +++ Dosage de calcium sérique

Un laboratoire d'analyse considère qu'un dosage de calcium sérique doit être refait pour vérification lorsque la concentration observée en mgL^{-1} n'appartient pas à l'intervalle [95, 100]. Pour l'ensemble des très nombreux dosages de calcium sérique* effectués par ce laboratoire, la probabilité qu'un dosage prélevé au hasard doive être refait est 0,05.

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de taille 40 dans cette population.

Soit X la variable aléatoire qui à un tel prélèvement associe le nombre de dosages qui doivent être refaits.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres n et p de cette loi.

2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ approximant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suivie par la variable aléatoire X.

Déterminer les paramères μ et σ. Arrondir à 10^{-2}.

3. Comparer les probabilités $P(X \leq 4) \approx 0{,}95$ et $P(Y \leq 4)$.

4. a) Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des dosages qui doivent être refaits dans un échantillon aléatoire de 40 dosages prélevés comme indiqué.

b) Indiquer si les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont satisfaites.

c) Comparer cet intervalle de fluctuation asymptotique à l'intervalle [0 ; 0,125] qui est l'intervalle de fluctuation, à environ 95 %, obtenu à partir de la loi binomiale suivie par X.

5. Expliquer pourquoi ces intervalles de fluctuation ne sont pas bilatéraux.

* *sérique* : relatif au sérum humain.

Prendre une décision

Prise de décision à l'aide d'un intervalle de fluctuation lié à la loi binomiale (rappel) (exercices 59 et 60).

59. +++ Tour opérator

Une agence de voyages propose, dans un de ses circuits très fréquenté, une excursion sous forme d'option supplémentaire. Le responsable de l'agence affirme qu'un quart de ses clients prennent cette option. Or, en choisissant au hasard et avec remise un échantillon de 60 clients, son adjoint observe qu'un tiers des clients a pris cette option. L'objectif de cet exercice est de déterminer si, au seuil de 5 %, l'affirmation du responsable de l'agence peut être acceptée.

On fait l'hypothèse que la proportion de clients prenant l'option est 0,25.

On appelle X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement au hasard et avec remise de 60 clients, associe le nombre des clients de ce prélèvement qui ont pris l'option.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale et déterminer ses paramètres.

2. À l'aide de la table de probabilités cumulées, déterminer :

a) le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$;

b) le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

$\mathcal{B}(60 ; 0{,}25)$	
k	$P(X \leq k)$
7	0,0088
8	0,0212
9	0,0452
10	0,0859
...	...
19	0,9075
20	0,9459
21	0,9702
22	0,9846
23	0,9925

3. En déduire un intervalle de fluctuation, à environ 95 %, de la proportion de clients ayant pris l'option dans un échantillon de 60 clients prélevés comme indiqué ci-dessus.

4. Énoncer la règle de décision permettant d'accepter ou de refuser, au seuil de 5 %, l'affirmation du responsable de l'agence.

5. Appliquer la règle de décision au cas de l'échantillon prélevé par son adjoint.

CORRIGÉ P. 366

60. +++ Taux de calcium dans l'eau

Dans cet exercice on s'intéresse aux taux de calcium de l'eau d'une grande quantité de bouteilles devant être livrées à une chaîne d'hypermarchés.

On rappelle que lorsque le taux de calcium dépasse 6,5 mg par litre dans une bouteille, l'eau de cette bouteille est dite calcaire.

Le service de contrôle de qualité de l'entreprise commercialisant cette eau de source affirme que la fréquence des bouteilles avec de l'eau calcaire est 0,08.

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 60 bouteilles dans cette livraison : la fréquence des bouteilles avec de l'eau calcaire est 0,15.

L'objectif de l'exercice est de déterminer si, au seuil de 5 %, l'affirmation du service de contrôle de qualité est valable pour la livraison. On fait l'hypothèse que la fréquence des bouteilles avec de l'eau calcaire dans la livraison est 0,08.

Soit X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 60 bouteilles prélevées au hasard et avec remise dans la livraison, associe le nombre de bouteilles avec de l'eau calcaire.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

2. À l'aide de la table de probabilités cumulées, déterminer :

a) le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$;

b) le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

$\mathcal{B}(60\ ;\ 0{,}08)$	
k	$P(X \leq k)$
0	0,0067
1	0,0418
2	0,1317
3	0,2829
...	...
7	0,8956
8	0,9518
9	0,9800
10	0,9975

3. En déduire un intervalle de fluctuation, à environ 95 %, de la fréquence des bouteilles avec de l'eau calcaire dans un échantillon de 60 bouteilles prélevé dans la livraison comme indiqué ci-dessus.

4. Énoncer la règle de décision permettant d'accepter ou de refuser, au seuil de 5 %, l'hypothèse faite.

5. Appliquer la règle de décision au cas de l'échantillon prélevé dans la livraison.

▶ **Remarque :** *en général, lorsqu'on est très près d'une des bornes de l'intervalle, on refait un prélèvement d'échantillon.*

Prise de décision à l'aide d'un intervalle de fluctuation lié à la loi binomiale ou d'un intervalle de fluctuation asymptotique lié à la loi normale (exercices 61 à 63).

61. +++ Tour opérator

On reprend le contexte de l'exercice 59.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres n et p de cette loi.

2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ approximant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suivie par la variable aléatoire X.

Déterminer les paramètres μ et σ. Arrondir à 10^{-2}.

3. Comparer les probabilités $P(X \leq 21) \approx 0{,}97$ et $P(Y \leq 21)$.

4. a) Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des clients ayant pris l'option dans un échantillon de 60 clients prélevés comme indiqué.

b) Indiquer si les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n\,(1-p) \geq 5$ sont satisfaites.

c) Comparer cet intervalle de fluctuation asymptotique à l'intervalle [0,15 ; 0,0,37] qui est l'intervalle de fluctuation, à environ 95 %, obtenu à partir de la loi binomiale suivie par X.

5. Énoncer la nouvelle règle de décision permettant d'accepter ou de refuser, à l'aide de l'intervalle de fluctuation asymptotique obtenu à la question **4.** a), l'affirmation du responsable de l'agence.

6. Appliquer cette règle de décision au cas de l'échantillon prélevé par son adjoint.

CORRIGÉ P. 366

▶ *Voir aussi l'exercice résolu 4 du cours.*

62. +++ Faces de lunettes

Une entreprise fabrique des faces de lunettes d'un certain type en grande série.

Une face de lunettes est conforme si sa longueur, en millimètres, est comprise entre 129 et 131.

La responsable de la production affirme : « nous fabriquons 8 % de faces de lunettes non conformes ».

Or le dernier contrôle de qualité effectué montre que 14 % des 64 faces de lunettes prélevées au hasard et avec remise dans la production ne sont pas conformes.

L'objectif de l'exercice est de déterminer si, au seuil de 5 %, l'affirmation du responsable peut être maintenue après ce contrôle.

On fait l'hypothèse que le pourcentage de faces de lunettes non conformes dans la production est 8 % et on appelle X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement au hasard et avec remise de 64 faces de lunettes dans la production, associe le nombre de pièces non conformes.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres n et p de cette loi.

2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ approximant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suivie par la variable aléatoire X.
Déterminer les paramètres μ et σ. Arrondir à 10^{-2}.

3. Comparer les probabilités $P(X \leq 9) \approx 0{,}97$ et $P(Y \leq 9)$.

4. a) Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % du pourcentage de faces de lunettes non conformes dans un échantillon de 64 pièces prélevées comme indiqué.
b) Indiquer si les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont satisfaites.
c) Comparer cet intervalle de fluctuation asymptotique à l'intervalle [1,6 % ; 15,6 %] qui est l'intervalle de fluctuation, à environ 95 %, obtenu à partir de la loi binomiale suivie par X.

5. Énoncer la règle de décision permettant d'accepter ou de refuser, à l'aide de l'intervalle de fluctuation asymptotique obtenu à la question **4. a)**, l'affirmation du responsable de l'agence.

6. Appliquer cette règle de décision au cas de l'échantillon prélevé pour un contrôle de qualité.

63. +++ Taux de calcium dans l'eau

On reprend le contexte de l'énoncé de l'exercice **60**.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres n et p de cette loi.

2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ approximant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ suivie par la variable aléatoire X.
Déterminer les paramètres μ et σ. Arrondir à 10^{-2}.

3. Comparer les probabilités $P(X \leq 25) \approx 0{,}97$ et $P(Y \leq 25)$.

4. a) Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des bouteilles avec de l'eau calcaire dans un échantillon de 60 bouteilles prélevées comme indiqué.
b) Indiquer si les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont satisfaites.
c) Comparer cet intervalle de fluctuation asymptotique à l'intervalle [0,017 ; 0,15] qui est l'intervalle de fluctuation, à environ 95 %, obtenu à partir de la loi binomiale suivie par X.

5. Énoncer la nouvelle règle de décision permettant d'accepter ou de refuser, au seuil 5 %, à l'aide de l'intervalle de fluctuation asymptotique obtenu à la question **4. a)**, l'hypothèse faite.

6. Appliquer cette règle de décision au cas de l'échantillon prélevé dans la livraison.

Intervalle de confiance

64. +++ Sondage électoral

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A. Un candidat A à une élection fait effectuer un sondage dans sa circonscription comportant 85 842 électeurs : sur 1 068 personnes interrogées, 550 déclarent vouloir voter pour ce candidat.
On suppose que cet échantillon peut être assimilé à un échantillon prélevé au hasard et avec remise dans la population des électeurs de la circonscription.
On appelle p la proportion inconnue, exprimée en pourcentage, des électeurs de la circonscription voulant voter pour le candidat.
1. Déterminer un intervalle de confiance de p avec le niveau de confiance 0,95.
2. Au vu du résultat de ce sondage, le candidat a-t-il raison de penser que si les élections avaient eu lieu au moment où le sondage a été réalisé et si les réponses au sondage étaient sincères, il aurait été élu au premier tour ?

B. Quel est le nombre minimal n de personnes à interroger par un institut de sondage pour que, avec 52 % d'intentions de vote pour un candidat B dans un échantillon de taille n, l'intervalle de confiance avec le niveau de confiance 95 % du pourcentage inconnu p d'électeurs de la circonscription voulant voter pour B ne comporte que des pourcentages supérieurs à 50 % ?

CORRIGÉ P. 367

▶ Voir aussi l'exercice résolu 6 du cours.

65. +++ Enquête de satisfaction

Une entreprise organise une enquête de satisfaction auprès de ses clients. On appelle p la proportion de clients satisfaits.

Un sondage auprès d'un échantillon aléatoire de 100 clients a montré que 85 d'entre eux étaient satisfaits.

1. Calculer la fréquence f des clients satisfaits dans cet échantillon.

2. Donner une estimation de p par un intervalle de confiance avec le niveau de confiance 95 %.

Arrondir les bornes à 10^{-2}.

3. Avec cet intervalle de confiance, est-il possible que les trois quarts des clients soient satisfaits de l'entreprise ?

66. ++++ Contrôle de satisfaction

Dans une entreprise fabriquant du matériel pour les laboratoires, pour apprécier la qualité de la production, le contrôleur cherche à évaluer le pourcentage p d'articles non commercialisables. Pour cela il prélève au hasard des échantillons de taille n. Cette taille étant petite devant celle de la production totale, on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.

1. Le contrôleur prélève un échantillon de 125 articles et constate que 10 ne sont pas commercialisables.

a) Déterminer le pourcentage f d'articles non commercialisables de cet échantillon.

b) Déterminer une estimation de p, par intervalle de confiance centré en f, avec le niveau de confiance 95 %.

2. Quelle doit être la taille n (n est un nombre entier) de l'échantillon prélevé pour que, avec le niveau de confiance 95 %, l'intervalle de confiance soit [6 %, 10 %], en supposant que f conserve la même valeur ?

67. ++++ Dosage et qualité

On a contrôlé le dosage d'un produit dans un mélange à la sortie d'une chaîne de conditionnement. Pour un échantillon de 100 lots (tirés au hasard et avec remise) de 5 kilogrammes de mélange analysés, on a obtenu les résultats suivants où P_i représente la masse du produit exprimée en grammes et n_i l'effectif correspondant.

P_i	n_i
[141, 143]	1
[143, 145]	5
[145, 147]	6
[147, 149]	21
[149, 151]	32
[151, 153]	22
[153, 155]	7
[155, 157]	4
[157, 159]	1
[159, 161]	1

Un lot de 5 kilogrammes de mélange est dit de « qualité supérieure » s'il contient entre 147 grammes et 155 grammes de produit.

1. Déterminer pour cet échantillon de taille $n = 100$ le pourcentage f de lots de qualité supérieure.

2. Soit p le pourcentage inconnu de lots de qualité supérieure dans l'ensemble des lots sortants de la chaîne de conditionnement. Déterminer une estimation de p par un intervalle de confiance centré en f, avec le niveau de confiance 95 %.

3. Quelle doit être la taille n (n est un nombre entier) de l'échantillon prélevé pour que, avec le niveau de confiance 95 %, l'intervalle de confiance soit [14 %, 22 %], en supposant que f conserve la même valeur ?

Juger de l'égalité de deux proportions

68. +++ Améliorer la qualité

Une entreprise propose en grande quantité un certain produit pour lequel le pourcentage p de produit de qualité supérieure est inconnu, le reste étant de qualité ordinaire.

Une étude portant sur un échantillon de 200 unités de ce produit montre que 60 sont de qualité supérieure.

On suppose que cet échantillon peut être considéré comme prélevé au hasard et avec remise dans la population des unités de ce produit proposées par cette entreprise.

1. Déterminer un intervalle de confiance, avec un niveau de confiance de 95 %, de la proportion p exprimée en pourcentage d'unités de qualité supérieure.

2. En vue d'améliorer la qualité du produit, on procède à certaines modifications.

Soit p' le nouveau pourcentage d'unités de qualité supérieure ainsi obtenues.

Sur un échantillon de taille 200, on observe que 80 unités sont de qualité supérieure.

On fait la même hypothèse que ci-dessus sur cet échantillon.

Déterminer un intervalle de confiance, avec un niveau de confiance 95 %, de la proportion p' exprimée en pourcentage d'unités de qualité supérieure.

3. En déduire si, au seuil de 5 %, le pourcentage d'unités de qualité supérieure peut être jugé inchangé.

CORRIGÉ P. 367

69. +++ Lancement d'un produit

Une entreprise s'interroge sur le lancement d'un produit nouveau auprès d'une population fixée. Au moment où un pourcentage inconnu p de cette population est favorable à cette nouveauté, un premier sondage effectué sur un échantillon de 200 personnes donne 25 % de réponses favorables. Un mois plus tard, alors que le pourcentage inconnu de la population favorable à ce produit est devenu

p', un second sondage effectué auprès de 200 personnes donne 33 % de réponses favorables.

1. Déterminer un intervalle de confiance, avec un niveau de confiance de 95 % de la proportion p exprimée en pourcentage.

2. Même question pour p'.

3. En déduire si, au seuil de 5 %, le pourcentage de cette population favorable à ce produit nouveau peut être jugé inchangé.

70. +++ Durée de vie

Deux entreprises A et B fabriquent des ampoules électriques d'un même modèle.

Un échantillon de 150 ampoules de l'entreprise A a donné 51 ampoules de durée de vie inférieure à 3 000 heures.

Un échantillon de même taille de l'entreprise B a donné 33 ampoules de durée de vie inférieure à 3 000 heures.

Les deux échantillons sont supposés prélevés au hasard et avec remise dans la production de chaque entreprise.

1. Déterminer un intervalle de confiance, avec un niveau de confiance de 95 %, de la proportion p d'ampoules de durée de vie inférieure à 3 000 heures dans la production de l'entreprise A.

2. Même question pour la proportion analogue p' dans l'entreprise B.

3. En déduire si, au seuil de 5 %, la proportion d'ampoules de durée de vie inférieure à 3 000 heures peut être jugée identique dans les deux entreprises.

71. +++ Choix de téléviseur

Un groupe de la grande distribution importe d'un pays asiatique pour ses hypermarchés deux nouveaux modèles de téléviseur : modèle (1) et modèle (2). Une enquête préalable, réalisée auprès de 400 ménages de la population S des ménages des « quartiers sud » de la ville V, indique qu'entre les deux modèles de téléviseurs, 63 % préfèrent le modèle (1). La même enquête, réalisée auprès de 400 ménages de la population N des ménages des « quartiers nord » de la ville, indique que 73 % préfèrent le modèle (1).

Les deux échantillons sont supposés prélevés au hasard et avec remise dans chaque population.

1. Déterminer un intervalle de confiance, avec un niveau de confiance de 95 % de la proportion p, exprimée en pourcentage, des ménages des « quartiers sud » préférant le modèle (1).

2. Même question pour la proportion analogue p' dans les « quartiers nord ».

3. En déduire si, au seuil de 5 %, la proportion de ménages préférant le modèle (1) peut être jugée identique dans les deux quartiers.

Des QCM pour le baccalauréat

72. +++

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est exacte. Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. On notera sur la copie le numéro de la question suivie de la lettre correspondant à la réponse choisie.

Dans cet exercice, les nombres proposés comme réponses sont des valeurs exactes ou des valeurs approchées arrondies. Tous les échantillons considérés sont prélevés au hasard et avec remise.

A. *Loi binomiale*

La variable aléatoire X suit le loi binomiale $\mathcal{B}(30 ; 0{,}04)$.

		a	b	c	d
1	La probabilité $P(X = 1)$ est égale à :	0	0,37	0,12	0,012
2	La probabilité $P(X \leq 1)$ est égale à :	0,68	1	0,24	0,66
3	L'espérance $E(X)$ est égale à :	1,2	0,12	2,1	30
4	L'écart type $\sigma(X)$ est égal à :	0,95	1,07	1,15	0,75

B. *Loi exponentielle*

La variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre 0,05.

		a	b	c	d
1	La fonction de densité f de T est définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) =$	$e^{0{,}05t}$	$-e^{-0{,}05t}$	$0{,}05\,e^{-0{,}05t}$	$-0{,}05\,e^{0{,}05t}$
2	La probabilité $P(T \leq 25)$ est égale à :	0,71	0,47	0,53	0,25
3	La probabilité $P(15 \leq T \leq 30)$ est égale à :	0,25	0,53	0,47	0,71
4	L'espérance $E(T)$ est égale à :	0,05	20	5	– 0,05

C. *Approximation d'une loi binomiale par une loi normale*

La variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(80 ; 0{,}2)$ admet pour approximation la variable aléatoire Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

		a	b	c	d
1	μ est égal à :	80	0,2	16	40
2	σ est égal à :	80	0,2	3,6	12,8

D. *Intervalle de confiance*

Dans un échantillon de taille 75 prélevé dans une population, on observe que 42 éléments ont une certaine propriété.

On appelle p la proportion des éléments de la population possédant cette propriété.

	a	b	c	d
1 La fréquence de cette propriété dans l'échantillon est :	0,46	0,42	0,56	0,75
2 L'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, pour la proportion p est :	[0,45 ; 0,67]	[0,50 ; 0,62]	[0,48 ; 0,64]	[0,52 ; 0,60]

73. +++

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est exacte. Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. On notera sur la copie le numéro de la question suivie de la lettre correspondant à la réponse choisie.

Dans cet exercice, les nombres proposés comme réponses sont des valeurs exactes ou des valeurs approchées arrondies. Tous les échantillons considérés sont prélevés au hasard et avec remise.

A. *Loi uniforme*

La variable aléatoire U suit la loi uniforme sur l'intervalle [1, 9].

	a	b	c	d
1 La fonction de densité f de U est définie sur l'intervalle [1, 9] par $f(t) =$	1/9	1	9	1/8
2 La probabilité $P(4 \leq U \leq 6)$ est égale à :	0,25	0,30	0,20	0,35
3 L'espérance $E(U)$ est égale à :	2	3	4	5
4 La variance $V(U)$ est égale à :	0,33	5,33	3	2,24

B. *Loi normale*

La variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}(30 ; 2)$.

	a	b	c	d
1 La probabilité $P(Y \leq 35)$ est égale à :	0,993	0,994	0,995	0,996
2 La probabilité $P(30 \leq Y \leq 32)$ est égale à :	0,340	0,341	0,342	0,343
3 La probabilité $P(26 \leq Y \leq 34)$ est égale à :	0,95	0,94	0,93	0,92
4 L'espérance $E(Y)$ est égale à :	2	30	60	120

C. *Intervalle de fluctuation asymptotique et prise de décision*

On fait l'hypothèse qu'une proportion $p = 0,65$ d'éléments d'une population a une propriété particulière.

	a	b	c	d
1 L'intervalle de fluctuation asymptotique, à environ 95 %, de la fréquence de cette propriété dans un échantillon de taille 100 est :	[0,55 ; 0,75]	[0,59 ; 0,71]	[0,50 ; 0,80]	[0,60 ; 0,70]
2 Si dans un échantillon de taille 100, on observe que 58 éléments ont cette propriété, alors :	On accepte l'hypothèse $p = 0,55$		On rejette l'hypothèse $p = 0,55$	
3 Si dans un échantillon de taille 100, on observe que 68 éléments ont cette propriété, alors :	On accepte l'hypothèse $p = 0,55$		On rejette l'hypothèse $p = 0,55$	
4 Si dans un échantillon de taille 100, on observe que 72 éléments ont cette propriété, alors :	On accepte l'hypothèse $p = 0,55$		On rejette l'hypothèse $p = 0,55$	

Épreuves d'entraînement au baccalauréat

Nature du sujet

Le sujet comporte de trois à cinq exercices indépendants les uns des autres, notés chacun sur 3 à 10 points.

Les 8 épreuves d'entraînement

- Il s'agit de 8 épreuves pour s'entraîner à l'épreuve de mathématiques en quatre heures du baccalauréat **STL-Biotechnologies**.
- Les exercices proposés recouvrent tout le programme et notamment les nouveautés en **algorithmique, utilisation de logiciels et probabilités**.
- Des réponses figurent à la fin de l'ouvrage. Elles permettent de chercher les épreuves en autonomie, pour **s'entraîner** ou **réviser l'examen**.
- **L'index thématique** suivant permet d'utiliser ces épreuves pendant l'année.

D'autres exercices de baccalauréat

Près de **150 autres exercices de baccalauréat**, dont un grand nombre avec des **corrigés détaillés** sont répartis dans les 9 chapitres.

RÉPONSES P. 367

Épreuves de baccalauréat

INDEX THÉMATIQUE

	Épreuve	1	2	3	4	5	6	7	8
Suites géométriques		E_1	E_3	E_1		E_1	E_3	E_1	E_2
Avec la fonction ln			E_4	E_4	E_3		E_4	E_1	E_5
Avec la fonction exponentielle		E_3			E_4	E_5		E_4	
Intégration		E_3	E_4	E_1	E_4	E_3	E_1		E_5
Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$							E_1	E_3	E_1
Statistique à deux variables			E_1		E_1				
Probabilités	Loi uniforme	E_2							
	Loi exponentielle	E_2		E_2					E_4
	Loi binomiale		E_2		E_2	E_2		E_2	
	Loi normale	E_2	E_2		E_2	E_2	E_2	E_2	
	Approximation d'une loi binomiale par une loi normale	E_2	E_2		E_2			E_2	
	Intervalle de fluctuation	E_2				E_2		E_2	
	Prendre une décision	E_2				E_2			
	Intervalle de confiance	E_2							E_3
Utiliser un logiciel				E_3	E_3	E_3	E_3	E_3	E_4
Algorithmique			E_3						
Avec un QCM		E_2			E_4	E_1		E_4	E_2

E_1 signifie : Exercice 1…

Épreuve 1

• **Exercice 1** (5 points)

Programme abordé :

• *Suites géométriques*

En traversant une plaque de verre teinté, un rayon lumineux perd 23 % de son intensité lumineuse.

1. Soit I_0 l'intensité d'un rayon à son entrée dans la plaque de verre et I_1 son intensité à sa sortie.

Exprimer I_1 en fonction de I_0.

2. On superpose n plaques de verre identiques : on note I_n l'intensité du rayon à la sortie de la $n^{\text{ième}}$ plaque.

a) Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}.

b) Quelle est la nature de la suite (I_n) ? Préciser le premier terme et la raison ; en déduire l'expression de I_n en fonction de I_0.

3. Quelle est l'intensité initiale I_0 d'un rayon lumineux dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15 ?

4. Calculer le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. Interpréter le résultat obtenu.

• **Exercice 2** (7 points)

Programme abordé :

• *Probabilités*

Questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des quatre questions, une seule des réponses a, b, c, d est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Notation : une bonne réponse rapporte 0,5 point.
Une mauvaise réponse ou absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.

Dans cet exercice, les nombres proposés comme réponses sont des valeurs exactes ou des valeurs approchées arrondies. Tous les échantillons considérés sont prélevés au hasard et avec remise.

RÉPONSES P. 368

A. Loi binomiale

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0{,}05)$.

	a	b	c	d
1 La probabilité $P(X = 1)$ est égale à :	0	0,37	0,38	0,62
2 La probabilité $P(X \leq 1)$ est égale à :	1	0,74	0,26	0,5

B. Loi uniforme

La variable aléatoire U suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2, 7]$.

	a	b	c	d
1 La fonction de densité f de U est définie sur l'intervalle $[2, 7]$ par $f(t) =$	1/7	1/5	1/2	2/7
2 La probabilité $P(3 \leq U \leq 5)$ est égale à :	0,2	0,3	0,4	0,5

C. Loi exponentielle

La variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre 0,04.

	a	b	c	d
1 La fonction de densité f de T est définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) =$	$e^{0,04t}$	$-e^{-0,04t}$	$0{,}04e^{0,04t}$	$0{,}04e^{-0,04t}$
2 La probabilité $P(T \leq 20)$ est égale à :	0,47	0,80	0,33	0,55

D. Loi normale

La variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}(40 ; 2{,}5)$.

	a	b	c	d
1 La probabilité $P(Y \leq 45)$ est égale à :	0,976	0,977	0,978	0,979
2 La probabilité $P(40 \leq Y \leq 42)$ est égale à :	0,287	0,288	0,289	0,290

E. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

La variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100 ; 0{,}4)$ admet pour approximation la variable aléatoire Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

	a	b	c	d
1 μ est égal à :	40	4	100	0,4
2 σ est égal à :	24	4,9	100	0,4

F. Intervalle de fluctuation asymptotique et prise de décision

On fait l'hypothèse qu'une proportion $p = 0{,}55$ d'éléments d'une population a une propriété particulière.

	a	b	c	d
1 L'intervalle de fluctuation asymptotique, à environ 95 %, de la fréquence de cette propriété dans un échantillon de taille 100 est :	[0,45 ; 0,65]	[0,53 ; 0,57]	[0,51 ; 0,59]	[0,50 ; 0,60]
2 Si dans un échantillon de taille 100, on observe que 62 éléments ont cette propriété, alors :	On accepte l'hypothèse $p = 0{,}55$		On rejette l'hypothèse $p = 0{,}55$	

G. Intervalle de confiance

Dans un échantillon de taille 50 prélevé dans une population, on observe que 40 éléments ont une certaine propriété.

On appelle p la proportion des éléments de la population possédant cette propriété.

	a	b	c	d
1 La fréquence de cette propriété dans l'échantillon est :	0,4	0,8	0,5	0,6
2 L'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, pour la proportion p est :	[0,74 ; 0,86]	[0,71 ; 0,89]	[0,77 ; 0,83]	[0,69 ; 0,91]

- **Exercice 3** (8 points)

Programme abordé :

- *Étude d'une fonction définie avec la fonction exponentielle*
- *Calcul d'aire*

Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe $\mathscr{C}$ tracée sur l'annexe ci-jointe est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en O et au point A de coordonnées $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

On admet que les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et 3 sont parallèles à l'axe des abscisses.

La droite Δ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point O et passe par le point B de coordonnées $(-1, 3)$.

A. Exploitation graphique de la courbe $\mathscr{C}$

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$.

2. Donner le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$.

3. Donner les valeurs $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'(3)$.

4. Donner une équation de la tangente Δ. En déduire $f'(0)$.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$.

B. Étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$f(x) = (2x^2 - 3x)e^{-x}$.

1. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = (-2x^2 + 7x - 3)e^{-x}$.

RÉPONSES P. 368

2. Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

C. Calcul d'aire

1. Calculer $f(2)$. Montrer que la fonction f est positive sur l'intervalle $[2, 3]$.

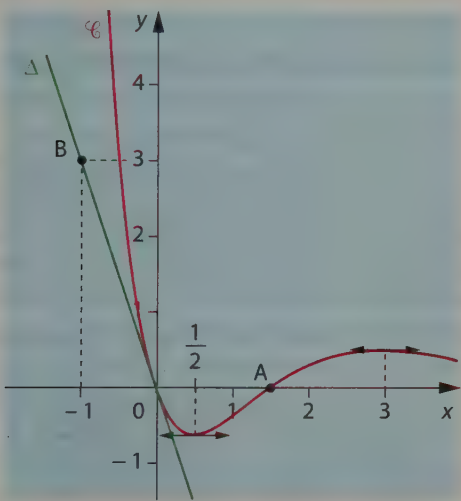
2. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x^2 - x - 1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

3. Soit $\mathcal{D}$ la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

a) Sur l'annexe, hachurer $\mathcal{D}$.

b) Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de $\mathcal{D}$, puis donner la valeur approchée arrondie au centième de l'aire de $\mathcal{D}$.

Annexe



Épreuve 2

• **Exercice 1** (6 points)

Programme abordé :

• *Statistique à deux variables*

Le tableau suivant donne les concentrations plasmatiques (en µg/ml) en fonction du temps (en minutes) chez un sujet ayant reçu par voie intraveineuse une dose de 1 mg/kg d'un médicament.

Temps (min) : t_i	0	10	20	30	40	50	60
Concentration (µg/ml) : c_i	18,2	14,9	12,2	11,0	9	8,2	5,5

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

t_i	0	10	20	30	40	50	60
$y_i = \ln c_i$							

Dans cette question, les valeurs numériques seront arrondies au dixième.

2. Tracer dans le repère orthogonal le nuage de points $M_i(t_i, y_i)$. On prendra : en abscisses 1 cm pour 5 minutes, en ordonnées 5 cm pour 1 unité. Un ajustement affine paraît-il justifié ?

3. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Placer le point G sur la figure.

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en t obtenue par la méthode des moindres carrés.

Donner la réponse sous la forme $y = at + b$. Arrondir a et b à 10^{-2}.

5. Dans cette question on utilisera l'ajustement affine d'équation $y = -0{,}02t + 2{,}9$. Calculer :

a) le temps nécessaire pour atteindre une concentration plasmatique de 4 µg/ml (*arrondir le résultat à la minute*).

b) la concentration plasmatique au bout de 1 h 10 min (*on arrondira le résultat à 10^{-1}*).

• **Exercice 2** (4 points)

Programme abordé :

• *Loi binomiale*
• *Approximation d'une loi binomiale par une loi normale*

Dans le cadre d'accords sur la formation professionnelle, une grande entreprise a proposé à ses personnels un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de conception industrielle.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

1. On note E l'événement : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage ».

On suppose que $P(E) = 0{,}3$.

On tire au hasard le nom de 150 personnes de cette entreprise et on suppose l'effectif suffisamment important pour pouvoir assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 150 noms, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.

Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 5,6.

a) Justifier les paramètres de cette loi normale.

b) On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 5,6.

Calculer la probabilité qu'au plus 40 personnes parmi les 150 dont le nom a été tiré au hasard, aient suivi le stage.

RÉPONSES P. 368

• **Exercice 3** (3 points)

Programme abordé :

- *Algorithmique*
- *Suite géométrique*

On considère l'algorithme suivant.

Initialisation
u prend la valeur 1 000
n prend la valeur 1
Traitement
Tant que $n < 5$
u prend la valeur $u + 50$
n prend la valeur $n + 1$
Écrire u
FinTantQue

1. Faire fonctionner cet algorithme « à la main ». Quels résultats obtient-on ?

2. On place un capital de 1 000 € sur un livret à 3 % d'intérêts par an, avec intérêts composés, pendant 4 ans.
Modifier l'algorithme précédent pour qu'il affiche les sommes obtenues, capital et intérêts compris, à la fin de chacune des 4 années.

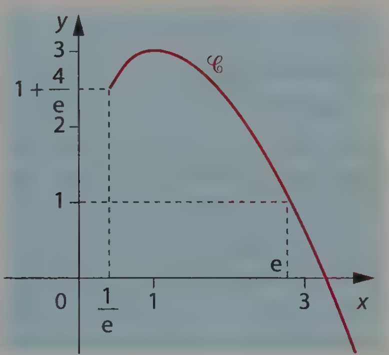
3. On se propose de déterminer au bout de combien d'années la somme obtenue dépassera 2 000 €. Écrire un algorithme qui permette de le déterminer.

• **Exercice 4** (7 points)

Programme abordé :

- *Étude d'une fonction définie avec la fonction logarithme népérien*
- *Calcul d'aire*

A. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm) on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[$ construite ci-dessous.



La tangente au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.
Il n'y a pas d'autre point où la tangente est horizontale.

1. Lire $f(1)$; $f(\mathrm{e})$; $f'(1)$.

2. Lire le sens de variation de f. Établir son tableau de variation.

3. Donner, à l'aide du graphique, une valeur approchée arrondie à 0,5 de la solution α de l'équation $f(x) = 0$.
En déduire, selon les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

4. Colorier l'ensemble délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
Donner, en unités d'aire, une valeur approchée à une unité près, de l'aire de cet ensemble.

B. On admet que, pour tout x de $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[$,
$f(x) = 2x(1 - \ln x) + 1$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Démontrer que, pour tout x de $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[$, $f'(x)$ a même signe que $-\ln x$.

3. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[$ par

$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^2\ln x + x$.

Montrer que F est une primitive de f sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[$.

4. Calculer l'aire exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
Exprimer cette aire en cm^2 puis en donner la valeur approchée arrondie à 0,1 (en cm^2).

Épreuve 3

• **Exercice 1** (4 points)

Programme abordé :

- *Suite géométrique*

On injecte dans le sang d'un malade une dose d'un médicament M. On note c_0 la concentration (en milligrammes par litre noté mg/L) du médicament injecté, on donne $c_0 = 4$.
On suppose que ce médicament se répartit instantanément dans le sang et qu'il est ensuite éliminé progressivement.
Le but de l'exercice est d'étudier la concentration du médicament M en fonction du temps.
On note c_n la concentration en mg/L du médicament M dans le sang au bout de n heures (n entier naturel).

1. On constate qu'une heure après l'injection, la concentration du médicament M dans le sang a diminué de 30 %
Calculer c_1.

2. On constate que la concentration du médicament M continue de diminuer de 30 % chaque heure.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 0{,}7\,c_n$.
En déduire la nature de la suite (c_n).

b) Donner l'expression de c_n en fonction de n.

RÉPONSES P. 368

c) Calculer c_{10} (le résultat sera arrondi au centième).

3. On estime que le médicament M est totalement éliminé lorsque c_n est inférieure à 0,05. Après combien d'heures peut-on considérer que le médicament a été éliminé ?

• **Exercice 2** (4 points)

Programme abordé :

• *Loi exponentielle*

T est la variable aléatoire qui, à toute lampe utilisée dans les blocs opératoires prélevée au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en heures) avant la rupture du filament.

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,000 5.

1. Donner la fonction de densité de T.

2. Calculer les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-2}) :

A : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est comprise entre 2 000 h et 2 800 h »,

B : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est inférieure à 3 000 h »,

C : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est supérieure à 2 500 h »,

D : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est égale à 2 800 h ».

3. Déterminer l'espérance $E(T)$ et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

• **Exercice 3** (3 points)

Programme abordé :

• *Calculs de limites*

• *Utiliser un logiciel de calcul formel*

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -x - \dfrac{4}{x}$.

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants, qui ne sont pas à démontrer.

```
Fichier  Editer  Cell  Maxima  Equations  Algèbre  Calcu

(%i1) define(f(x),-x-4/x);
(%o1) f(x):=-x-4/x

(%i2) limit(f(x),x,0,plus);
(%o2) -∞

(%i3) limit(f(x),x,inf);
(%o3) -∞

(%i4) limit(f(x)-(-x),x,inf);
(%o4) 0

(%i5) f(x)-(-x);
(%o5) -4/x
```

1. a) Expliquer l'argument « plus » apparaissant dans l'instruction limit(f(x), x, 0, plus).

b) Que vaut $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f admet une asymptote, dont on donnera une équation.

2. Que vaut $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$?

3. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[f(x)-(-x)\right]$.

b) Quelle interprétation graphique peut-on donner du résultat précédent, en considérant la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x$?

4. En étudiant le signe de $f(x) - (-x)$, donner la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

• **Exercice 4** (9 points)

Programme abordé :

• *Étude d'une fonction définie à l'aide de la fonction logarithme népérien*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, 10]$ par : $f(x) = \ln x + ax + b$,

où a et b désignent deux nombres réels, et on note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0, 10]$.

On sait que le tableau de variation de f sur $]0, 10]$ est le suivant :

x	0		2		10
Signe de $f'(x)$	‖	+	0	−	
Variation de f	‖ $-\infty$	↗	$-2+\ln 2$	↘	$-6+\ln 10$

RÉPONSES P. 369

A. **1.** Déduire du tableau de variation le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0, 10]$.

2. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b pour tout réel x de l'intervalle $]0, 10]$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À l'aide de données numériques du tableau de variation, calculer a et b.

B. On admet que, pour tout réel x appartenant à $]0, 10]$, $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x - 1$.

On considère la fonction g définie sur $]0, 10]$ par : $g(x) = (\ln x)^2 - x - 2\ln x$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est fournie dans l'*Annexe à rendre avec la copie.*

1. a) Déterminer la limite de g en 0.

b) Interpréter graphiquement le résultat précédent.

2. a) Montrer que pour tout x de $]0, 10]$, $g'(x) = 2f(x)$.

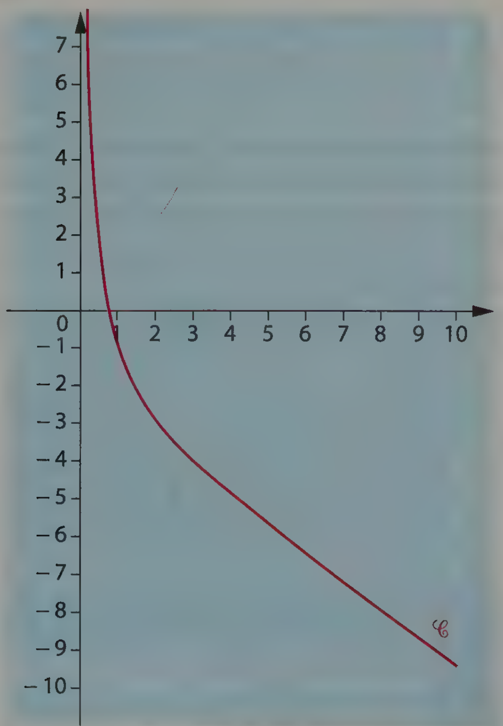
b) Déterminer les variations de la fonction g sur $]0, 10]$.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

4. a) Montrer à l'aide du tableau de variation de g que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle $[0,1 ; 10]$.

b) Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α d'amplitude 0,01.

Annexe



Épreuve 4

• **Exercice 1** (5 points)

Programme abordé :

• *Statistique à deux variables*

Deux étudiants ont pesé la masse d'une culture de levure de boulangerie (*saccharomyces cerevisiae*) et ont noté la mesure m_i de cette masse aux instants t_i.

L'expérience a duré 8 heures. Ils ont obtenu les résultats suivants :

t_i (en heures)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
m_i (en grammes)	0,60	0,69	0,75	0,88	0,99	1,06	1,21	1,43	1,57

Les deux étudiants cherchent à modéliser la croissance de cette levure, c'est-à-dire à exprimer l'évolution de m en fonction de t, au moyen d'une fonction dont la courbe est « voisine » du nuage de points obtenu expérimentalement. **On ne demande pas de construire ce nuage de points.**

Dans toute la suite les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

L'un des étudiants pense à un ajustement affine, mais comme le résultat ne lui semble pas satisfaisant, il décide d'utiliser un changement de variable.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant dans lequel $\ln m_i$ désigne le logarithme népérien de m_i.

t_i (en heures)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i = \ln m_i$	− 0,51								

2. Représenter le nuage de points M_i de coordonnées (t_i, y_i) dans un repère orthogonal. Unités graphiques : 2 cm pour 1 heure en abscisses, 1 cm pour 0,1 en ordonnées.

3. a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en t obtenue par la méthode des moindres carrés. On donnera la réponse sous la forme $y = at + b$, en arrondissant les coefficients a et b à 10^{-3}.

b) Construire la droite $\mathscr{D}$.

Pour les questions 4, 5, 6, on prend pour équation de la droite $\mathscr{D}$: $y = 0,12t - 0,51$.

4. En déduire l'expression de m en fonction de t. Montrer qu'elle peut s'écrire :

$m(t) = 0,6e^{0,12t}$ (1)

5. Déterminer à quel instant, selon ce modèle (1), la masse m de levure aura atteint trois grammes. On donnera le résultat en heures et minutes.

6. Quelqu'un affirme que, selon ce modèle, la masse de levure augmente chaque heure d'une même quantité. Est-ce exact ? On justifiera la réponse.

RÉPONSES P. 369

Exercice 2 (5 points)

Programme abordé :

- *Loi binomiale*
- *Approximation d'une loi binomiale par une loi normale*

Dans une entreprise fabriquant des lentilles de contact on prélève au hasard un échantillon de 50 lentilles dans la production. On considère ce prélèvement comme un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de ce type, associe le nombre de lentilles de cet échantillon qui présentent un défaut.

On admet que la probabilité qu'une lentille présente un défaut, même mineur, est $p = 0,3$.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.

2. Déterminer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X. Arrondir à 10^{-2}.

3. Calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, entre 10 et 15 lentilles (bornes comprises) qui présentent un défaut ; arrondir à 10^{-2}.

4. a) On considère que la loi de probabilité de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi normale de moyenne 15 et d'écart type 3,06.

Justifier le choix de ces paramètres.

b) On note Y une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(15\,;3,06)$. Calculer $P(10 \leq Y \leq 15)$; arrondir à 10^{-2}.

c) Comparer les résultats obtenus aux questions **3.** et **4. b)**.

• **Exercice 3** (6 points)

Programme abordé :

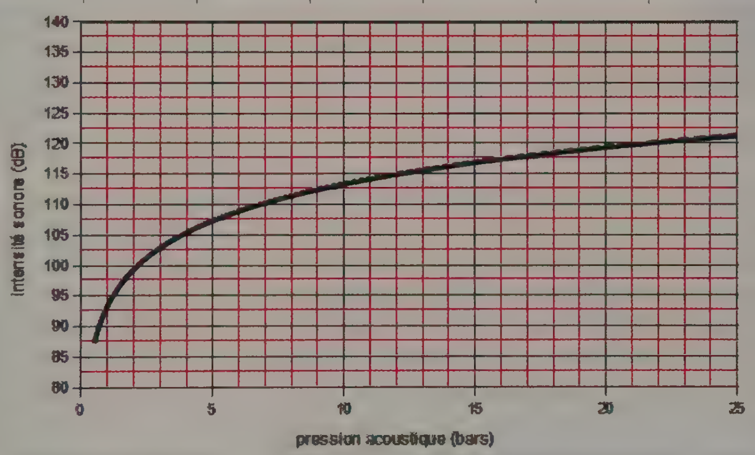
- *Exemple d'utilisation du tableur*
- *Exemple d'utilisation de la fonction logarithme népérien*

Quand l'oreille d'une personne normale est soumise à une pression acoustique x, exprimée en bars, l'intensité sonore, exprimée en décibels, du bruit responsable de cette pression est modélisée par :

$f(x) = 8,68 \ln x + 93,28$ pour x appartenant à l'intervalle $[0,5\,;25]$. Cette fonction a été tabulée et représentée sur la feuille de calcul suivante.

B2 =8,68*LN(A2)+93,28

	A	B
1	x	f(x)
2	0,5	87,263
3	0,6	88,846
4	0,7	90,184
5	0,8	91,343
6	0,9	92,365
7	1	93,28
8	1,1	94,107
9	1,2	94,863
10	1,3	95,557
11	1,4	96,201
12	1,5	96,799
13	1,6	97,36
14	1,7	97,886
15	1,8	98,382
16	1,9	98,851
17	2	99,297
18	2,1	99,72
19	2,2	100,124
20	2,3	100,51
21	2,4	100,879



1. On a entré en B2 la formule =8,68*LN(A2)+93,28 qui a été recopiée vers le bas. Quelle est la formule contenue dans la cellule B3 ?

2. Déterminer l'intensité sonore, en décibels, correspondant à une pression acoustique de 16 bars :

a) à l'aide du graphique de l'image d'écran ;

b) par le calcul.

3. a) Calculer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\,;25]$.

b) Donner le signe de cette dérivée sur l'intervalle $[0,5\,;25]$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\,;25]$.

4. Une personne normale ne peut supporter un bruit supérieur à 120 décibels.

a) Déterminer, à l'aide du graphique de l'image d'écran, la pression, en bars, que l'oreille de la personne subit si elle est soumise à une intensité sonore de 120 décibels.

b) Donner un encadrement d'amplitude 0,1 bar de cette pression à l'aide de l'extrait ci-dessous de la feuille de calcul, sachant que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5\,;25]$.

B215 =8,68*LN(A215)+93,28

	A	B	C	D
214	21,7	119,991		
215	21,8	120,031		
216	21,9	120,071		

RÉPONSES P. 369

• **Exercice 4** (4 points)

Programme abordé :

• *Étude d'une fonction définie avec la fonction exponentielle*
• *Calcul intégral*

Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{-2x+1}$.

On note f' sa fonction dérivée.

a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-2}$.

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-2x+1}$.

c) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -2e^{-2x+1}$.

2. On donne le tableau de variation d'une fonction g définie et continue sur l'intervalle $[-5, 12]$.

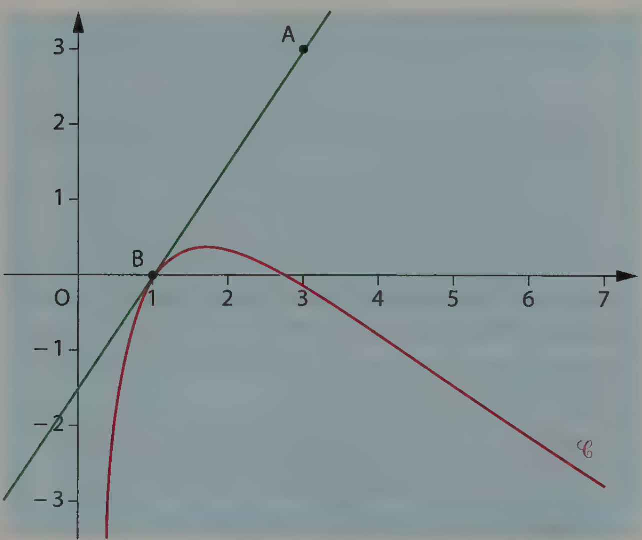
x	-5	2	8	12
Variation de g	-3 ↘	-8 ↗	1 ↘	0

a) $\int_{-5}^{2} g(x)\mathrm{d}x = 7$.

b) L'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[-5, 12]$.

c) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[-5, 8]$, $g(x) < 0$.

3. La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$. La droite (AB), tracée sur le graphique, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 1.

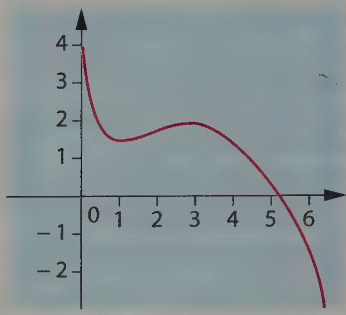


On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

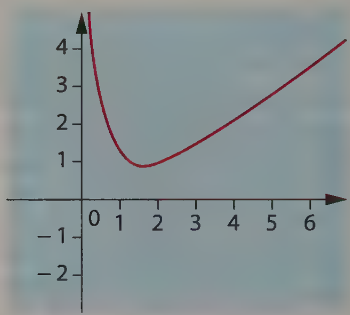
a) $h'(1) = 0$. b) $h'(1) = 1{,}5$. c) $h'(1) = -\frac{2}{3}$.

4. Une seule des trois courbes ci-après est la représentation graphique d'une primitive de la fonction h (introduite à la question 3.) sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Préciser laquelle.

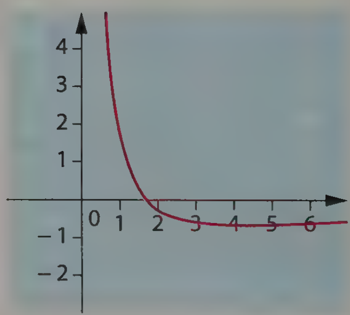
a)



b)



c)



Épreuve 5

• **Exercice 1** (5 points)

Programme abordé :

• *Suites géométriques*

On injecte à un patient une dose de 4 ml d'un médicament. La quantité de médicament présente dans le sang diminue chaque heure de 10 %.

On note v_n la quantité de médicament, en ml, restant dans le sang du patient n heures après l'injection.

On a donc $v_0 = 4$.

RÉPONSES p. 369

1. **a)** Calculer v_1, v_2, v_3.

b) Donner, pour tout nombre entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.

c) Déduire du **b)** la nature et les caractéristiques de la suite (v_n).

d) Donner, pour tout nombre entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

e) Déterminer la quantité de médicament présente dans le sang du patient au bout de 10 heures. Arrondir à 10^{-2}.

f) Au bout de combien d'heures la quantité de médicament présente dans le sang du patient aura-t-elle diminué de 75 % par rapport à la quantité injectée ?

2. Quelle formule peut-on entrer en C2, puis recopier vers la droite, pour obtenir, à chaque heure, la quantité de médicament (en ml) présente dans le sang ?

	A	B	C	D	E	F	G
1	Temps (heures)	0	1	2	4	4	5
2	Quantité de médicament (ml)	4					

a) =0,9*B2 **b)** =0,1*B2

c) =0,9*$B$2 **d)** =0,1*$B$2

- **Exercice 2** (6 points)

Programme abordé :

- *Loi binomiale*
- *Approximation d'une loi binomiale par une loi normale*
- *Intervalle de fluctuation asymptotique*
- *Prendre une décision*

Dans un groupe d'assurance on s'intéresse aux sinistres susceptibles de survenir, une année donnée, aux véhicules de la flotte d'une importante entreprise de transport de produits sanguins.

Au cours des années précédentes, environ 9 % de ces véhicules avaient eu un sinistre.

Or, à la fin de cette année, on observe un pourcentage de 17 % de véhicules ayant eu un sinistre dans un échantillon de 100 véhicules prélevé au hasard.

L'objectif de l'exercice est de déterminer si cette augmentation est significative ou si elle est due au hasard du prélèvement de l'échantillon.

On fait l'hypothèse que, cette année encore, 9 % des véhicules de la flotte de l'entreprise de transport ont eu un sinistre.

On note X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement au hasard et considéré comme effectué avec remise de 100 véhicules de la flotte, associe le nombre de véhicules ayant eu un sinistre cette année.

1. Exprimer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres n et p de cette loi.

2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne 9 et d'écart type 2,86.
Justifier les paramètres de cette loi.

3. On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 9 et d'écart type 2,86.
Comparer les probabilités $P(X \leq 14) \approx 0,97$ et $P(Y \leq 14)$.

4. **a)** Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique, à 95 %, du pourcentage de véhicules ayant eu un sinistre dans un échantillon de taille 100 prélevé comme indiqué.

b) Indiquer si les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont satisfaites.

c) Comparer cet intervalle de fluctuation asymptotique à l'intervalle [3 % ; 15 %] qui est l'intervalle de fluctuation, à environ 95 %, obtenu à partir de la loi binomiale suivie par X.

5. Énoncer la règle de décision permettant d'accepter ou de refuser, à l'aide de l'intervalle de fluctuation asymptotique obtenu à la question **4. a)**, l'hypothèse faite.

6. Appliquer cette règle de décision au cas de l'échantillon prélevé.

7. Après vérification, on constate que le pourcentage étudié de véhicules de l'échantillon prélevé est en réalité de 11 %.
Appliquer dans ce cas la règle de décision.

- **Exercice 3** (3 points)

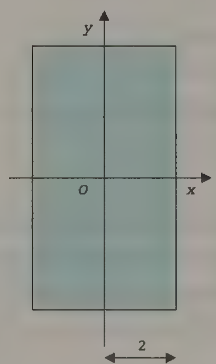
Programme abordé :

- *Utilisation d'un logiciel de calcul formel*

On considère un cylindre métallique plein de 2 cm de rayon dégageant de la chaleur.

On suppose que, par rapport au repère de la figure ci-dessous, la température se répartit de manière uniforme dans la direction de l'axe des ordonnées, et que la température T, en degrés Celsius, d'un point du cylindre d'abscisse x, avec x dans l'intervalle $[0, 2]$ est donnée par : $T(x) = A - \dfrac{205}{m}x^2$, où A correspond à la température au centre du cylindre et m correspond à un réel positif décrivant la conduction thermique du matériau.

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants.



RÉPONSES P. 369

(%i1) `define(T(x),A-(205/m)*x^2);`

(%o1) $T(x):=A-\dfrac{205\,x^2}{m}$

(%i2) `integrate(T(x),x,0,2);`

(%o2) $\dfrac{6\,m\,A-1640}{3\,m}$

(%i3) `%/2;`

(%o3) $\dfrac{6\,m\,A-1640}{6\,m}$

(%i4) `expand(%);`

(%o4) $A-\dfrac{820}{3\,m}$

(%i5) `define(f(m),%);`

(%o5) $f(m):=A-\dfrac{820}{3\,m}$

(%i6) `diff(f(m),m);`

(%o6) $\dfrac{820}{3\,m^2}$

(%i7) `limit(f(m),m,inf);`

(%o7) A

1. *On appelle valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ l'intégrale :* $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

À l'aide des résultats affichés par le logiciel, donner la valeur moyenne de la température dans le cylindre en fonction de A et de m.

2. Quelle valeur moyenne ne pourra-t-on pas dépasser dans le cylindre en modifiant le paramètre m ? (Argumentez votre réponse en utilisant, sans les justifier, des résultats affichés par le logiciel.)

- **Exercice 4** (6 points)

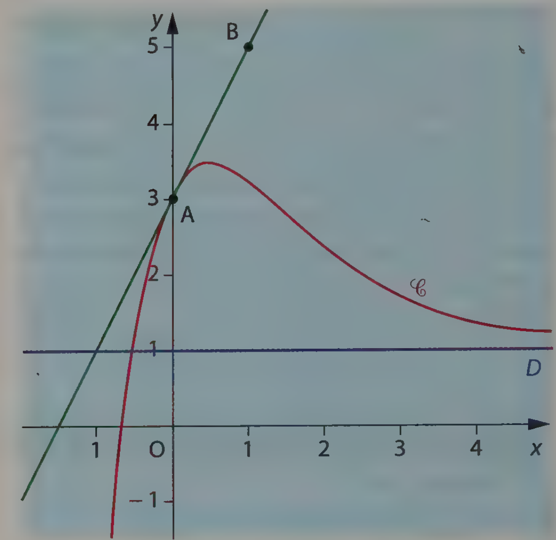
Programme abordé :

- *Étude d'une fonction définie avec la fonction exponentielle*
- *Calcul d'aire*

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note f' la fonction dérivée de f. La tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A(0, 3) passe par le point (1, 5).

La droite D d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.



1. En utilisant les données et le graphique, préciser :

a) La valeur du nombre réel $f(0)$ et la valeur du nombre réel $f'(0)$.

b) La limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Déterminer une équation de tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

3. Préciser un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

4. On admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x, par une expression de la forme $f(x)=1+\dfrac{ax+b}{e^x}$, où a et b sont des nombres réels.

a) Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, de b et de x.

b) À l'aide des résultats de la question **1.** a), démontrer que l'on a, pour tout réel x :

$f(x)=1+\dfrac{4x+2}{e^x}$.

5. Soit F la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $F(x)=x+\dfrac{-4x-6}{e^x}$.

On admet que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Déterminer la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Ce résultat est-il cohérent avec l'encadrement obtenu à la question **3.** ?

RÉPONSES p. 369

Épreuve 6

• **Exercice 1** (4 points)

Programme abordé :

• *Équation différentielle de la forme $y' + ay = b$*

1. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = -0{,}046y$, où y est une fonction de la variable réelle t dérivable sur $\mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Une contamination accidentelle des aliments dans un élevage de porcs a provoqué une intoxication aiguë chez les animaux. On étudie alors l'élimination de la toxine incriminée chez un porc prélevé dans le cheptel. On sait que la concentration de la toxine dans le sang varie en fonction du temps t suivant la relation : $f(t) = Ce^{-0{,}046t}$, où $f(t)$ est la concentration exprimée en mg/L, à l'instant t exprimé en jours.

a) Sachant que cinq jours après l'intoxication la concentration est de 23,8 µg/L, déterminer la constante C (on arrondira le résultat à l'unité).

b) Déterminer alors la concentration initiale de la toxine dans le sang de l'animal.

3. Dans cette question, on admet que, pour tout t de $[0, +\infty[$, $f(t) = 30e^{-0{,}46t}$.

a) Déterminer par le calcul la concentration mesurée une semaine après l'intoxication. Arrondir le résultat à l'unité.

b) *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère que la toxine n'est plus dangereuse pour le porc lorsque sa concentration atteint 10 % de la valeur initiale.

Déterminer le nombre de jours nécessaires pour annoncer que le porc est hors de danger.

• **Exercice 2** (4 points)

Programme abordé :

• *Loi normale*

Une entreprise fabrique en grande quantité des rouleaux de papier peint. Leur largeur est exprimée en centimètres.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Un rouleau de papier peint est considéré comme « acceptable » pour la largeur lorsque celle-ci appartient à l'intervalle [52,95 ; 53,05].

On note X la variable aléatoire qui, à chaque rouleau prélevé au hasard dans la production d'une journée d'une machine, associe sa largeur.

1. Après un réglage de la machine, on admet que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 53 et d'écart type 0,04.

Calculer la probabilité p_1 de l'événement E : « un rouleau prélevé au hasard dans la production d'une journée de la machine est acceptable pour la largeur ».

2. Le résultat obtenu au **1.** n'est pas jugé satisfaisant.

On procède à un nouveau réglage de la machine et la variable aléatoire X suit alors la loi normale de moyenne 53 et d'écart type 0,02.

Calculer la nouvelle probabilité p_2 de l'événement E défini au **1.**.

3. Pour quelle nouvelle valeur de l'écart type σ de la variable aléatoire X dont la moyenne reste égale à 53, l'événement E a-t-il pour probabilité $p_3 = 0{,}95$?

• **Exercice 3** (4 points)

Programme abordé :

• *Suites géométriques*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Dans cet exercice, pour chacune des questions, 4 réponses sont proposées, une seule est correcte.

Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque réponse incorrecte retire 0,25 point, une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est 0.

1. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1{,}0225$; alors u_5, arrondi à l'unité, est égal à :

a) 111 ; b) 112 ;
c) 1 117 ; d) 1 118.

2. On reprend la suite (u_n) du **1.**.

$S_5 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$, arrondi à l'unité, est égal à :

a) 5 230 ; b) 5 231 ;
c) 6 347 ; d) 6 348.

3. On estime que le nombre de patients présentant une certaine pathologie va diminuer de 5 % par an. Aujourd'hui, il y a 7 500 cas par an. Dans 10 ans il y aura :

a) 3 750 cas ; b) 4 266 cas ;
c) 4 491 cas ; d) 4 727 cas.

4. La feuille de calcul ci-dessous est utilisée pour calculer les premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme 400 et de raison 0,9.

5. Quelle formule, à recopier vers la droite, peut-on entrer dans la cellule C3 ?

RÉPONSES P. 370

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	4	4	5	6	7	8	9	10
2	$u(n)$	400										

a) =$B$2*0,9 ; **b)** =B2^0,9 ;

c) =400*0,9 ; **d)** =B2*0,9.

• **Exercice 4** (9 points)

Programme abordé :

• *Étude d'une fonction définie à l'aide de la fonction logarithme népérien*
• *Calcul d'aire*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

On désigne par Γ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

A. Étude de la fonction f.

1. *Dans cette question, on ne demande pas de justification mais des conjectures obtenues avec l'aide de la calculatrice.*

Sur l'écran de la calculatrice, faire apparaître la courbe Γ.

a) Faire un schéma reproduisant l'écran obtenu en précisant la fenêtre utilisée.

b) À partir de la lecture de l'écran, conjecturer le tableau de variation de la fonction f.

2. *Le but de cette question est de prouver les renseignements conjecturés figurant dans le tableau de variation de la question précédente.*

a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $-\ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b) $f(x)$ peut s'écrire $f(x)=\dfrac{1}{x}(1+\ln x)$.

Utiliser cette écriture pour déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

c) $f(x)$ peut s'écrire $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$.

Utiliser cette écriture pour déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

d) Que peut-on déduire du résultat obtenu au **c)** pour la courbe Γ ?

e) Déduire de ce qui précède le tableau de variation de f.

B. Étude de points particuliers

On considère la partie de la courbe Γ figurant sur l'***annexe à rendre avec la copie***.

A est le point d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des abscisses et B le point de Γ d'abscisse $e^{-0,5}$.

1. Justifier que l'abscisse du point A est égale à e^{-1}.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte pour l'évaluation.*

Tracer la droite (OB) sur le graphique de la feuille ***annexe, à rendre avec la copie***.

Cette droite semble tangente à la courbe Γ au point B. Qu'en est-il ? Justifier la réponse.

C. Calcul d'aire

On désigne par Δ la partie du plan limitée par l'arc de courbe AB, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = e^{-0,5}$.

1. Hachurer Δ sur la feuille annexe.

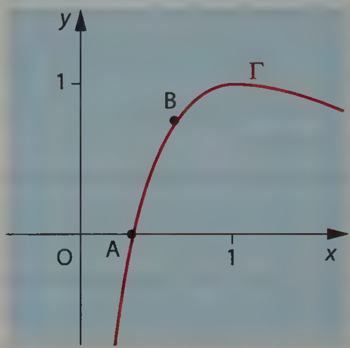
2. Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$F(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x.$

a) Vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b) En déduire l'aire de Δ en unités d'aire.

Annexe



Épreuve 7

• **Exercice 1** (4 points)

Programme abordé :

• *Suites géométriques*

Le but de cet exercice est l'étude de la désintégration du carbone 14, corps radioactif, et de son utilisation pour la datation des fossiles ou des squelettes.

A. Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$.

Soit N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après.

Soit N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles, k entier naturel.

On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps, d'environ 1,24 % par siècle.

1. Justifier que la suite (N_k) est une suite géométrique de raison 0,9876.

2. Exprimer N_k en fonction de N_0 et de l'entier k.

B. Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui s'y désintègre très lentement, ce qui fait que le taux de carbone 14 dans l'atmos-

RÉPONSES P. 370

phère de la terre est constant. Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère ; à leur mort, l'assimilation en carbone 14 cesse et celui-ci se désintègre dans les conditions vues dans la partie A..

Dans ce qui suit, on pourra utiliser des propriétés de la fonction logarithme népérien.

1. Un squelette d'homme préhistorique contient 5 % du carbone 14 initial. Justifier que l'on peut estimer son âge à 24 000 ans.

2. On admet que l'on peut ainsi estimer l'âge des fossiles qui contiennent au moins 1 % du carbone 14 initial. Déterminer l'âge maximum que l'on peut calculer.

• Exercice 2 (6 points)

Programme abordé :

- *Loi binomiale*
- *Approximation d'une loi binomiale par une loi normale*
- *Intervalle de fluctuation asymptotique*

On contrôle le dosage d'un produit dans un mélange à la sortie d'une chaîne de conditionnement. Un lot de 5 kilogrammes de mélange est dit de « qualité supérieure » s'il contient entre 147 grammes et 155 grammes de ce produit.

Le pourcentage de lots de qualité supérieure sortant de la chaîne de conditionnement est de 18 %.

On note X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille $n = 100$ prélevé au hasard et avec remise dans l'ensemble des lots sortant de la chaîne de conditionnement, associe le nombre de lots de qualité supérieure de l'échantillon.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres n et p de cette loi.

2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne 18 et d'écart type 3,84.

Justifier les paramètres de cette loi normale.

3. On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 18 et d'écart type 3,84. Comparer les probabilités $P(X \leq 24) \approx 0{,}95$ et $P(Y \leq 24)$.

4. **a)** Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique, à 95 %, du pourcentage de lots de qualité supérieure dans un échantillon aléatoire de 100 lots prélevés comme indiqué.

b) Indiquer si les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont satisfaites.

c) Comparer cet intervalle de fluctuation asymptotique à l'intervalle [11 % ; 26 %] qui est l'intervalle de fluctuation, à environ 95 %, obtenu à partir de la loi binomiale suivie par X.

5. Si on prélève au hasard un tel échantillon de 100 lots, le pourcentage étudié peut-il être :

a) égal à 8 % ?

b) supérieur à 50 % ?

• Exercice 3 (5 points)

Programme abordé :

- *Utilisation d'un logiciel de calcul formel*
- *Équation différentielle de la forme $y' + ay = b$*

On étudie le refroidissement d'une pièce en aluminium venant d'être fabriquée.

On désigne par $f(t)$ la température de la pièce, exprimée en degrés Celsius, à l'instant t, exprimé en heures.

On admet que la fonction f est solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E) :

$y' + 2y = 20$,

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' la dérivée de y.

À l'instant $t = 0$, la température de la pièce est de 410 °C. On a donc $f(0) = 410$.

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants, où (%i1) indique l'entrée n° 1 et (%o1) la sortie n° 1.

Dans cet exercice, on peut utiliser ces résultats **sans justification.**

(%i1) `ode2('diff(y,t)+2*y=20, y, t);`
(%o1) $y=\%e^{-2t}(10\,\%e^{2t}+\%c)$

(%i2) `expand(%);`
(%o2) $y=\%c\,\%e^{-2t}+10$

(%i3) `ic1(%, t=0, y=410);`
(%o3) $y=\%e^{-2t}(10\,\%e^{2t}+400)$

(%i4) `expand(%);`
(%o4) $y=400\,\%e^{-2t}+10$

(%i5) `define(f(t),400*exp(-2*t)+10);`
(%o5) $f(t):=400\,\%e^{-2t}+10$

(%i6) `diff(f(t),t);`
(%o6) $-800\,\%e^{-2t}$

(%i7) `limit(f(t),t,inf);`
(%o7) 10

(%i8) `solve([f(t)=40], [t]);`
(%o8) $\left[t=\log\left(-\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\right), t=\log\left(\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\right)\right]$

(%i9) `find_root(f(t)=40, t, 0, 5);`
(%o9) 1.295133582722913

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

2. Donner, pour tout réel t de l'intervalle $[0, +\infty[$, une expression de $f(t)$.

3. Justifier, à l'aide de l'affichage du logiciel, que la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

RÉPONSES P. 370

4. En utilisant les informations affichées, dresser le tableau de variation de la fonction f.

5. **a)** Le logiciel résout l'équation $f(t) = 40$ dans l'ensemble des nombres complexes. Il désigne par « log » le logarithme népérien.

L'une des deux solutions affichées à la sortie (%o8) n'a pas de signification, laquelle ?

b) Résoudre « à la main » l'équation : $400e^{-2t} + 10 = 40$ puis comparer avec l'affichage de la sortie (%o8).

c) On estime que l'opérateur peut saisir la pièce fabriquée à mains nues lorsque la température de celle-ci est inférieure ou égale à 40 °C.

Déterminer la valeur du temps à partir de laquelle l'opérateur peut saisir la pièce dans les conditions précédentes. arrondir la réponse à la minute.

• **Exercice 4** (5 points)

Programme abordé :

• *Fonction définie à l'aide de la fonction logarithme népérien*
• *Fonction exponentielle*

Pour chacune des cinq questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et recopiez la réponse que vous jugez convenir, sans justifier votre choix. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.

1. Pour tout $x > 0$, $\ln(2x)$ est égal à :

a) $\ln 2 + \ln x$; **b)** $2\ln x$; **c)** $\ln x^2$.

2. L'équation $e^{2x+1} = \dfrac{1}{e^x}$ admet pour solution :

a) -1 ; **b)** 0 ; **c)** $-\dfrac{1}{3}$.

3. Parmi les propositions suivantes, quelle est celle qui permet d'affirmer que la courbe représentative de la fonction exponentielle admet pour asymptote la droite d'équation $y = 0$?

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

4. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - 3x + 4$. Dans un repère, une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a) $y = -x + 2$; **b)** $y = x + 2$; **c)** $y = -x - 2$.

5. Parmi les propositions suivantes, quelle est celle qui permet d'affirmer qu'une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (x+1)e^x$ est la fonction $g : x \mapsto xe^x$? :

a) pour tout x réel $f'(x) = g(x)$;

b) pour tout x réel $g'(x) = f(x)$;

c) pour tout x réel $g(x) = f'(x) + k$, k réel quelconque.

Épreuve 8

• **Exercice 1** (3 points)

Programme abordé :

• *Équation différentielle de la forme $y' + ay = b$*

À la suite de violents orages, des eaux de ruissellement polluées à 4 % par des triazines (des pesticides très utilisés), se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade.

Un système d'évacuation permet de maintenir dans ce bassin un volume constant de 30 000 litres d'eau.

On admet que le volume de triazines dans l'eau du bassin à l'instant t ($t \geq 0$) est solution de l'équation différentielle (E) :

$y' + 5 \cdot 10^{-3}y = 6$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le volume de triazines dans l'eau du bassin est nul.

Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle (E), satisfaisant à cette condition.

3. Les baigneurs peuvent souffrir d'affections cutanées dès que le taux de triazines dans l'eau du bassin atteint 2 %.

Déterminer l'instant auquel ce taux est atteint.

• **Exercice 2** (4 points)

Programme abordé :

• *Suite géométrique*
• *Utilisation du tableur*

Un laboratoire souhaite tester le temps de réaction d'un nouvel antibiotique contre le bacille de Koch responsable des tuberculoses. Pour cela, on dispose d'une culture de 10^{10} bactéries dans laquelle on introduit l'antibiotique. On remarque que le nombre de bactéries est divisé par quatre toutes les heures.

A. On a créé la feuille de calcul suivante donnant le nombre de bactéries en fonction du temps n en heures.

	A	B
1	Nombre d'heures n	Nombre de bactéries
2	0	10^{10}
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule B3, pour calculer le nombre de bactéries au bout d'une heure, de

RÉPONSES P. 371

sorte qu'en recopiant cette formule vers le bas on puisse compléter les lignes suivantes ?

2. On a recopié la formule ci-dessus jusqu'en B18.

a) Quelle formule se trouve en B18 ?

b) Que représente concrètement la valeur calculée dans cette cellule ?

B. On note u_0 le nombre de bactéries au moment de l'introduction de l'antibiotique.

Soit (u_n) la suite représentant le nombre de bactéries, contenues dans la culture, n heures après l'introduction de l'antibiotique.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. En déduire la nature de la suite (u_n).

3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Calculer au bout de combien d'heures le nombre de bactéries deviendra inférieur à 100.

• **Exercice 3** (3 points)

Programme abordé :

• *Intervalle de confiance*

Le fonctionnement d'une photocopieuse se dégradant, on décide de faire un prélèvement aléatoire de 100 copies parmi toutes celles réalisées en une journée par cette nouvelle machine, afin d'estimer la proportion p de copies défectueuses de la journée.

Ce prélèvement, qui peut être assimilé à un tirage avec remise, contient 12 copies défectueuses.

1. Quelle est la fréquence f de copies défectueuses dans ce prélèvement ?

2. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 95 %.

3. On considère l'affirmation suivante : « la proportion p appartient obligatoirement à l'intervalle de confiance obtenu à la question précédente ».

Cette affirmation est-elle vraie ? On ne demande pas de justifier la réponse.

• **Exercice 4** (5 points)

Programme abordé :

• *Utilisation d'un logiciel de calcul formel*
• *Loi exponentielle*

On s'intéresse à la modélisation du trafic Internet au terminal informatique d'une grande société. On admet que la variable aléatoire T correspondant au temps, en secondes, séparant l'arrivée de deux paquets de données à ce terminal suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 710$.

Pour tout nombre réel t positif, on note :

$F(t) = 1 - e^{-710t}$,

la probabilité que le temps séparant l'arrivée de deux paquets de données soit inférieur à t secondes.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de F dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ où 10 cm correspond à 0,01 unité sur l'axe des abscisses et à une unité sur l'axe des ordonnées.

1. Utiliser l'affichage suivant, fourni par un logiciel de calcul formel, pour justifier le sens de variation de la fonction F sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

```
(%i1) define(F(t),1-exp(-710*t));
(%o1) F(t):=1-%e^(-710 t)

(%i2) diff(F(t),t);
(%o2) 710 %e^(-710 t)

(%i3) limit(F(t),t,inf);
(%o3) 1
```

2. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ de l'affichage fourni par la sortie n° 3 du logiciel de calcul formel ?

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (on fera en sorte que figurent les abscisses de 0 à 0,01).

4. a) Résoudre sur $[0, +\infty[$ l'équation $F(t) = 0{,}5$.

Donner la valeur exacte de la solution, puis arrondie à 10^{-5}.

b) Retrouver sur le graphique le résultat précédent.

(On fera apparaître les traits nécessaires.)

Cette valeur est le temps médian en secondes entre deux paquets de données.

5. Pour tout nombre réel t positif, on note

$I(t) = 710 \times \int_0^t x e^{-710x}\,dx$.

```
(%i4) integrate(710*x*exp(-710*x),x,0,t);
Is  t  positive, negative, or zero?p;
(%o4) 710 (1/504100 - ((710 t+1) %e^(-710 t))/504100)

(%i5) limit(%,t,inf);
(%o5) 1/710
```

Utiliser l'affichage précédent pour fournir une valeur arrondie à 10^{-5} de $\lim_{t \to +\infty} I(t)$.

Cette valeur est le temps moyen en secondes entre deux paquets de données.

• **Exercice 5** (6 points)

Programme abordé :

• *Étude d'une fonction définie à l'aide de la fonction logarithme népérien*

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

RÉPONSES P. 371

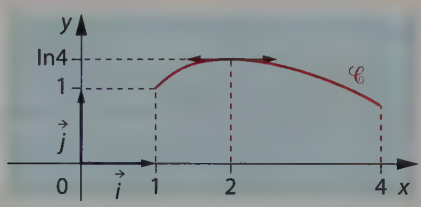
A. *Identification d'une fonction f à partir de sa courbe représentative.*

f est une fonction définie sur $[1, 4]$ par :

$$f(x) = a\ln x + bx + c,$$

où a, b, c sont des constantes réelles à déterminer. ($\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.)

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f sur $[1, 4]$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, avec, comme unité de longueur, 3 cm sur chaque axe.



1. f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[1, 4]$.

2. Justifier graphiquement que a, b et c vérifient le système :

$$\begin{cases} b+c=1 \\ \dfrac{a}{2}+b=0 \\ a\ln 2+2b+c=\ln 4. \end{cases}$$

3. En déduire les valeurs de a, b et c.

B. *Étude de la fonction g définie sur* $[1, 4]$ *par :*

$g(x) = 2\ln x - x + 2$.

1. g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.

a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $[1, 4]$.

b) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $[1, 4]$.

c) Établir le tableau de variation de g sur $[1, 4]$.

2. Vérifier que la fonction $h : x \mapsto (x\ln x - x)$ est une primitive de la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$; en déduire une primitive G de g sur $[1, 4]$.

3. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$; (on remarquera que les fonctions f et g sont identiques ; on donnera pour l'aire la valeur exacte, et la valeur approchée arrondie à 10^{-2}).

CHAPITRE 1

Travaux pratiques TICE

TP1 Évolution d'une population de bactéries

A. 1. Une augmentation de 13 % correspond à une multiplication par 1,13.

3. La suite (u_n) est géométrique de raison 1,13. Puisque la raison q de la suite est telle que $q > 1$, la limite de (u_n) est $+\infty$.

4. La population de bactéries dépasse 100 000 au bout de $n = 48$ heures.

B. 1. On entre en C17 la formule = B$17*0,85^(A17-15).

2. La suite $(0{,}85^n)$ a pour limite 0. On en déduit que la suite (v_n) a pour limite 0.

3. Les bactéries sont toutes mortes à partir de $n = 62$ heures.

TP2 Désintégration du radon

A. 1. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}835$. Elle est décroissante de limite nulle.

2. a. La variable n correspond au jour. La variable u correspond à la masse de radon correspondante.

b. La condition d'arrêt est $u \leq 10^{-1}$.

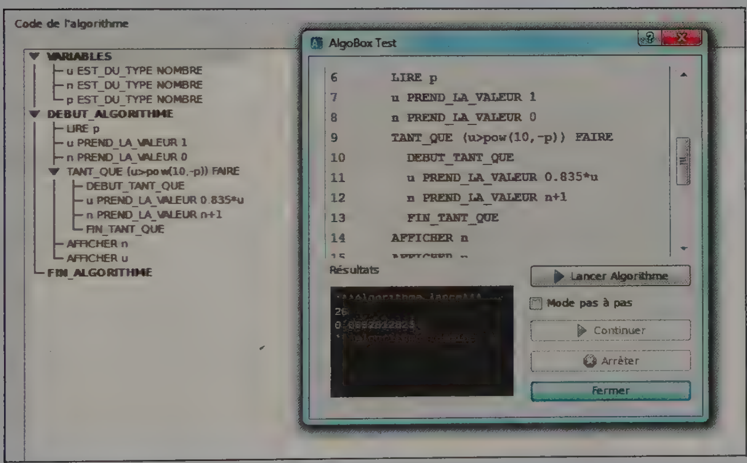
3. La masse de radon est inférieure à 10^{-1} à partir du 13ᵉ jour, où elle vaut environ 0,096.

B. 1.

```
PROGRAM:RADON
:Input P
:1→U
:0→N
:While U>10^-P
:0.835*U→U
:N+1→N
:End
```

```
PROGRAM:RADON
:1→U
:0→N
:While U>10^-P
:0.835*U→U
:N+1→N
:End
:Disp N,U
```

```
prgmRADON
?2
                26
     .0092012825
             Fait
```




```
p=input("p = ")
u=1
n=0
while u>10^-p
    u=0.835*u
    n=n+1
end
afficher([n,u])
```

2. La masse de radon est inférieure à 10^{-2} à partir de $n = 26$ jours.
La masse de radon est inférieure à 10^{-4} à partir de $n = 52$ jours.
La masse de radon est inférieure à 10^{-6} à partir de $n = 77$ jours.

Exercices corrigés

1. 1. $u_1 = \frac{1}{2}u_0$; $u_1 = \frac{1}{2} \times 16$; $u_1 = 8$.

$u_2 = \frac{1}{2}u_1$; $u_2 = 4 \cdot u_3 = \frac{1}{2}u_2$; $u_3 = 2$.

$u_4 = \frac{1}{2}(2)$; $u_4 = 1$.

2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q = \frac{1}{2}$.

Donc, pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n$, $u_n = 16(0{,}5)^n$.

3. $u_{10} = 16(0{,}5)^{10}$; $u_{10} \approx 0{,}016$.

4. Dans un repère orthogonal, on place les points de coordonnées (0,16) ; (1,8) , (2,4) ; (3,2) ; (4,1)…

5. $S_{10} = u_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}}$, $S_{10} = 16 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}}$, $S_{10} \approx 31{,}984$.

4. Pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n$,
donc $u_{10} = (1\,000)(1{,}022\,5)^{10} \approx 1\,249{,}20$.

$S_{10} = 1000 \times \dfrac{1-(1{,}02)^{11}}{1-(1{,}02)}$, $S_{10} \approx 12\,168{,}72$.

9. **1.** $u_2 = 2u_1$; $u_2 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$

$u_3 = 2u_2$; $u_3 = 2(1) = 2.$
$u_4 = 2u_3$; $u_4 = 2(2) = 4.$

2. Le cours donne la formule : $u_n = u_1 q^{n-1}$, avec $u_1 = \frac{1}{2}$ et $q = 2$, on obtient, pour tout entier non nul n, $u_n = \frac{1}{2}2^{n-1}$.

3. $u_{11} = \frac{1}{2}2^{10}$, $u_{11} = 512.$

$S_{11} = u_1 \times \frac{1-2^{11}}{1-2}$, $S_{11} = \frac{1}{2} \times \frac{(1-2^{11})}{-1}$, $S_{11} = 1\,023{,}5.$

4. Dans un repère orthogonal, on place les points de coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}\right)$; (2,1) ; (3,2) ; (4,4) ; (5,8)…

12. **1.**

Temps	0	1	2	6	9
Nombre de germes	10	30	90	7 290	196 830

2. **a)** $u_{n+1} = 3u_n$.
b) (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 3.
c) $u_n = 10(3^n)$.
d) $u_{12} = 5\,314\,410$; $u_{13} = 15\,943\,230$.
e) Au bout de 13 heures.

15. **1.** **a)** $V_1 = V_0 - \frac{20}{100}V_0$; $V_1 = V_0(1 - 0{,}2)$; $V_1 = 0{,}8V_0$;
$V_1 = 0{,}8 \times 12\,000$; $V_1 = 9\,600$.

b) Pour tout entier n : $V_{n+1} = V_n - \frac{20}{100}V_n$; $V_{n+1} = V_n(1 - 0{,}2)$; $V_{n+1} = 0{,}8V_n$.
(V_n) est donc la suite géométrique de premier terme $V_0 = 12\,000$ et de raison 0,8.
c) Pour tout entier n, $V_n = 12\,000(0{,}8)^n$.
d) $V_5 = 12\,000(0{,}8)^5 \approx 3\,932$ (en arrondissant à l'unité)
V_5 était la valeur de revente en 2010.
2. **a)** Pour tout entier n, $P_{n+1} = 1{,}02P_n$.
Donc (P_n) est une suite géométrique de premier terme $P_0 = 12\,000$ et de raison 1,02.
b) Pour tout entier n, $P_n = 12\,000(1{,}02)^n$.
c) $P_5 = 12\,000(1{,}02)^5 \approx 13\,249$.
P_5 représente le prix de l'équipement en 2010.
3. Le laboratoire a dû débourser :
13 249 – 3 932 = 9 317 euros.

17. **1.** $p_1 = p_0 + \frac{5}{100}p_0$, $p_1 = p_0\left(1 + \frac{5}{100}\right)$,

$p_1 = p_0(1 + 0{,}05)$, $p_1 = 1{,}05p_0$; avec $p_0 = 2\,000$ on obtient $p_1 = 2\,100$. On établit de même que : $p_2 = 1{,}05p_1$, $p_2 = 2\,205$.
De même, $p_3 = 1{,}05p_2$, $p_3 = 2\,315{,}25 \approx 2\,315$.
2. En procédant pour p_{n+1} et p_n comme pour p_1 et p_0 on obtient, pour tout entier n, $p_{n+1} = 1{,}05p_n$.
(p_n) est donc suite géométrique de premier terme $p_0 = 2\,000$ et de raison 1,05.
3. On obtient donc, pour tout entier n, $p_n = p_0(1{,}05)^n$ c'est-à-dire $p_n = 2\,000(1{,}05)^n$.
4. $2\,017 = 2\,010 + 7$.
On cherche donc : $S = p_0 + p_1 + \ldots + p_7$.

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

$S = 2\,000 \times \frac{1-(1{,}05)^8}{1-(1{,}05)}$. $S \approx 19\,098$.

24. **1.** $C_1 = 6\,210$; $C_2 = 6\,427{,}35$; $C_3 \approx 6\,652{,}31$.
2. **a)** Pour tout nombre entier n, $C_{n+1} = C_n + 0{,}035C_n = 1{,}035C_n$.
$C_{n+1} = 1{,}035C_n$.
b) Les nombres C_0, …, C_n sont des termes successifs d'une suite géométrique de premier terme C_0 et de raison 1,035.
c) Pour tout entier n, $C_n = 6\,000\,(1{,}035)^n$.
$C_{20} \approx 11\,938{,}73$; $C_{21} \approx 12\,356{,}59$.
3. Le capital initial a doublé au bout de 21 ans.

25. On note c_0 le capital cherché.
$c_0(1{,}029)^{10} = 100\,000$. $c_0 \approx 75\,136$ euros.

28. **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

31. **1.** $y_0 = 400 - 20 = 380$; $y_{10} = 291{,}7 - 20 = 271{,}7$.
2. $y_{n+1} = \theta(n+1) - 20 = \theta(n) - k\,\theta(n) + 20k - 20$
$= (1-k)(\theta(n) - 20) = (1-k)y_n$.
3. $k = 0{,}033$.

D4 =C3-C4

	A	B	C	D	E
1	k=	0,033			
2	n	y(n)	Θ(n)	a(n)	a(n+1)/a(n)
3	0	380,00	400,00		
4	1	367,46	387,46	12,54	
5	2	355,34	375,34	12,12	0,97
6	3	343,62	363,62	11,72	0,97
7	4	332,28	352,28	11,34	0,97
8	5	321,32	341,32	10,96	0,97
9	6	310,72	330,72	10,6	0,97
10	7	300,47	320,47	10,25	0,97
11	8	290,56	310,56	9,91	0,97
12	9	280,97	300,97	9,59	0,97
13	10	271,70	291,70	9,27	0,97
14	11	262,74	282,74	8,96	0,97

4. $n = 47$.
5. **a)** Le quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est constant.
b) $a_n = (\theta(n) - 20) - (\theta(n+1) - 20) = y_n - y_{n+1} = ky_n$.
La suite (a_n) est donc, comme la suite (y_n), géométrique de raison $(1 - k)$.
c) $n = 77$.

32. **Capacité de production éolienne**
1. Pour la production européenne, les points sont pratiquement alignés. l'augmentation de la production asiatique est plus rapide.
2. On peut entrer en C5 la formule =C4-B4 .
3. On peut entrer en C20 la formule =(C19-B19)/B19 .

4. Selon ces modèles, la production asiatique dépasse la production européenne pour $n = 2$, c'est-à-dire en 2012.

J6 =J5*1,55

	G	H	I	J
1				
2				
3		2010 + n	Un	Vn
4		0	75 293	39 769
5		1	84 210	61 642
6		2	93 127	95 545
7		3	102 044	148 095
8		4	110 961	229 547

33. Isolation phonique

1. On obtient $u_{10} \approx 34{,}87$ dB.

2. Le tableur donne $n = 44$ plaques.

B46 =B45-0,1*B45

	A	B	C
43	41	1,33	
44	42	1,2	
45	43	1,08	
46	44	0,97	
47	45	0,87	
48	46	0,79	

34. Demi-vie d'un élément radioactif

A. 1. $u_{n+1} = 0{,}917\, u_n$.

2. $u_n = 10^7 \times 0{,}917^n$.

3. $u_n \leq 0{,}5 \times 10^7$ lorsque $0{,}917^n \leq 0{,}5$.

4. $n = 8$.

B. 1. Programme Scilab :

```
q=input("q = ")
n=0
while q^n>0.5
    n=n+1
end
disp(n)
```

2. $n = 8$.

3. Affichage Scilab :

```
-->exec('C:\User
q =   0.917

    8.

-->exec('C:\User
q =   0.99067

    74.

-->exec('C:\User
q =   0.99964

    1926.
```

35. Maladie bovine

1. a) La suite (a_n) est géométrique de raison 0,9.

b) Le taux d'augmentation de la maladie le deuxième mois est 13,5 % et est 12,15 % le troisième mois.

2. On a $u_1 = 1{,}15 \times 5\,000 = 5\,750$.

3. On obtient l'affichage suivant.

```
2.    13.5      6526.25

3.    12.15      7319.189375

4.    10.935      8119.5427331563

5.    9.8415      8918.6275312398

6.    8.85735      9708.5815868781

7.    7.971615      10482.512332945

8.    7.1744535      11234.575305904

9.    6.45700815      11959.992749024

10.    5.811307335      12655.024684913
```

Le dernier affichage indique que le dixième mois il y a environ 12 655 animaux malades et que le taux d'augmentation du nombre d'animaux malades (par rapport au neuvième mois) est environ 5,8 %.

4. Exemple d'algorithme en langage Scilab :

```
a(1)=15
a(2)=13.5
u(1)=5750
u(2)=6526.25
n=1
while u(n+1)-u(n)>100
    n=n+1
    a(n+1)=0.9*a(n)
    u(n+1)=(1+a(n+1)/100)*u(n)
end
afficher(n)
```

Mise en œuvre : on obtient $n = 33$.

36.

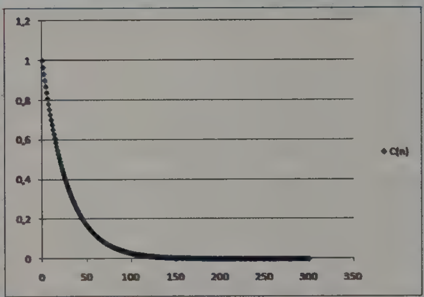
1. a) $C_{n+1} = 0{,}965\, C_n$.

b) Suite géométrique de raison 0,965.

2. a) et **b)**

B3 =B2*0,965

	A	B
1	n	C(n)
2	0	1
3	1	0,965
4	2	0,931225
5	3	0,89863213
6	4	0,86718
7	5	0,8368287
8	6	0,8075397
9	7	0,77927581
10	8	0,75200115
11	9	0,72568111
12	10	0,70028227
13	11	0,67577239
14	12	0,65212036
15	13	0,62929615
16	14	0,60727078
17	15	0,58601631
18	16	0,56550673
19	17	0,54571303
20	18	0,52661308
21	19	0,50818162
22	20	0,49039526
23	21	0,47323143



3. a) $19 < t < 20$.

b) $C_{30} \approx 0{,}34$.

c) $C_{49} < 0{,}17 < C_{50}$

d) La demi-vie est comprise entre 19 et 20 minutes.

Faites le point

QCM

38.

1. Réponse c).

2. Réponse b).

3. Réponse b).

4. Réponse c).

39.

1. Réponse c).

2. Réponse a).

40.

Réponse a).

41.

1. Réponse a).

2. Réponse a).

42.

1. Réponse c).

2. Réponse b).

43.

1. Réponse c). **2.** Réponse d).

Exercices pour le baccalauréat

48. Algorithme à trous

1.

```
Saisir C
Saisir i
Saisir n
Pour k allant de 1 à n – 1
    C prend la valeur C × (1 + i)
FinPour
Afficher C
```

2. a) Après deux années de placement, $C = 10\,000 \times 1{,}03 \times 1{,}03 = 10\,609$ €.

b) Tableau indiquant des valeurs successives des variables k et C.

k	C
1	10 300
2	10 609

50.

1. Faux. **2.** Faux. **3.** Vrai. **4.** Faux. **5.** Faux.

(C'est : B2*1,02).

CHAPITRE 2

Travaux pratiques TICE

TP1 Comportement asymptotique d'une fonction

A. 1. Lorsque le spot situé sur la courbe se rapproche de la « sortie » en haut de l'écran, x se rapproche de la valeur 1,5. On peut conjecturer une asymptote verticale d'équation $x = 1{,}5$.

2. Lorsque le spot situé sur la courbe se rapproche de la « sortie » à droite de l'écran, y se rapproche de la valeur 0,5. On peut conjecturer une asymptote horizontale d'équation $y = 0{,}5$.

B. 1. a. Le message d'erreur correspond à une valeur de x pour lequel le calcul de $f(x)$ n'est pas possible (division par 0).

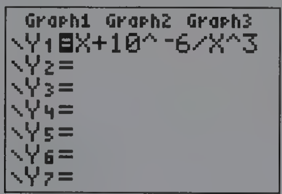
b. Lorsque x est proche de 1,5, y devient grand. On peut conjecturer $\lim\limits_{x \to 1{,}5} f(x) = +\infty$.

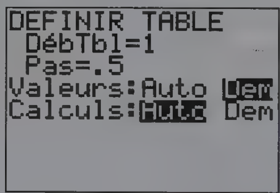
2. Lorsque x devient grand, y se rapproche de 0,5. On peut conjecturer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0{,}5$.

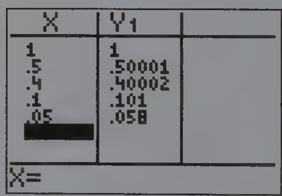
TP2 Les limites de la calculatrice

A. 1. a. D'après le graphique de la calculatrice, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

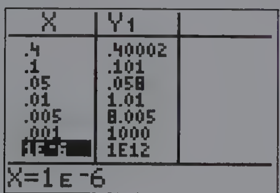
b. D'après le premier tableau de valeurs, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

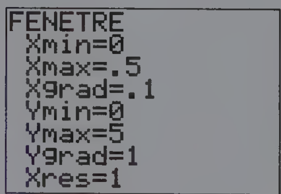


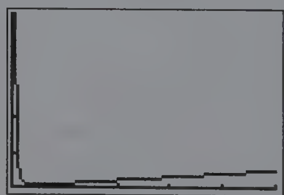




c) D'après le second tableau de valeurs, on conjecture que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Cette nouvelle conjecture est confirmée en modifiant la fenêtre graphique.







2. a. On a $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$.

b. On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 10^{-6} \times \dfrac{1}{x^3} = +\infty$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x + 10^{-6} \times \dfrac{1}{x^3} = +\infty$.

B. 1. a. Comme le graphique s'interrompt à proximité de $x = 0$, on ne peut pas conjecturer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

b. D'après le tableau de valeurs, on conjecture $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

X	Y_1
2	1124
1	101
.5	100
.1	100
.05	0
.01	0
.001	0

X=.001

2. a. On a $(50 + x^{10})^2 = 2\,500 + 100\,x^{10} + x^{20}$.

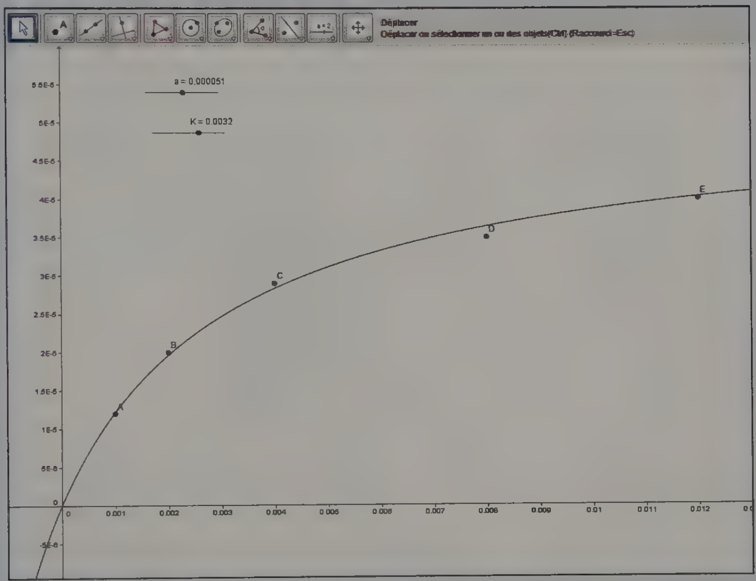
On en déduit que, pour $x > 0$, $g(x) = \dfrac{(50+x^{10})^2 - 2500}{x^{10}} = \dfrac{100x^{10} + x^{20}}{x^{10}} = 100 + x^{10}$.

b. On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0}(100 + x^{10}) = 100$.

La conjecture effectuée à l'aide du tableau de valeurs est fausse.

TP3 Asymptote et cinétique chimique

A. 1. On obtient approximativement $a = 0{,}000\,051$ et $K = 0{,}003\,2$.



2. Le curseur a « monte » la courbe (augmente la limite à l'infini). Le curseur K diminue la pente au début de la courbe (coefficient directeur de la tangente à l'origine).

3. a. La courbe admet comme asymptote à l'infini la droite d'équation $y = a$.

b. La vitesse de réaction « limite » est a.

4. Pour avoir une bonne adaptation de l'enzyme au substrat, il faut que K soit faible.

B. 1. b. $a = \dfrac{1}{19\,526} \approx 5{,}1.10^{-5}$. $K = 5{,}1.10^{-5} \times 63{,}196 \approx 3{,}2.10^{-3}$.

On retrouve ce que l'on a obtenu, de façon plus approximative, avec GeoGebra.

2. On obtient $n = 38$.

B57 =0,000051*A57/(0,0032+A57)

	A	B	C	D	E
55	3,60E-002	4,68E-005	1,09E-007		
56	3,70E-002	4,69E-005	1,04E-007		
57	3,80E-002	4,70E-005	9,85E-008		
58	3,90E-002	4,71E-005	9,39E-008		
59	4,00E-002	4,72E-005	8,95E-008		
60	4,10E-002	4,73E-005	8,55E-008		
61	4,20E-002	4,74E-005	8,17E-008		
62	4,30E-002	4,75E-005	7,82E-008		

Exercices corrigés

▶ *Dans les exercices* **1** *et* **2**, *on utilise les résultats sur les limites des fonctions de référence et les théorèmes sur la limite d'un produit.*

1. a) • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$.

b) • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{2}x^3 = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{2}x^3 = -\infty$.

c) • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^4 = -\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^4 = -\infty$.

d) • $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{x} = 0$.

• x appartenant $]-\infty, 0[$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x} = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to0} -\dfrac{2}{x} = +\infty$.

e) • Pour tout x de $]0, +\infty[$, $x^2 > 0$, d'où $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

D'où $\lim\limits_{x\to0} -6\times\dfrac{1}{x^2} = -\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} -6\times\dfrac{1}{x^2} = 0$.

2. a) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0) = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$,

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to0} -\dfrac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

3. $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1) = 6$;

$\lim\limits_{x\to3} f(x) = f(3) = 6$.

4. $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1) = \dfrac{1}{2}$;

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0) = -1$;

$\lim\limits_{x\to0,5} f(x) = f(0,5) = -4$.

5. **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$.

Aucun théorème sur la limite d'une somme ne permet de conclure dans ce cas.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

6. a) • $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^2+4x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^2) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^2) = -\infty$.

b) • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$.

c) • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$.

8. **1.** $f(0) = 1$; $f(1) = -1$; $f'(2) = 0$.

Le coefficient directeur d'une droite parallèle à l'axe des abscisses est 0.

2. • $f(0) = 1$ se traduit par : $a0 + b0 + c = 1$; $c = 1$.

• $f(1) = -1$ se traduit par : $a + b + c = -1$.

$c = 1$ donc $a + b + 1 = -1$; $a + b = -2$.

• $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$; donc $f'(2) = 0$ se traduit par :

$12a + 4b = 0$; $4(3a + b) = 0$; $3a + b = 0$.

• On résout le système :

$$\begin{cases} a+b=-2 & (1) \\ 3a+b=0 & (2) \end{cases}$$

(2) – (1) donne : $2a = 2$, $a = 1$; d'où $1 + b = -2$

$b = -3$; $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

3. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

4.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

9. **1.** a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$.

Aucun théorème sur la limite d'un produit ne permet de conclure directement dans ce cas.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x}{x}\right) = 3$.

10. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x^2}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (3x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{2x}{3x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{2}{3x}\right) = 0$.

11. **1.** a) $\lim\limits_{x\to3} x - 3 = 0$.

Pour tout nombre réel x de $]3, +\infty[$, $x - 3 > 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$ dans le cas où $x > 3$.

b) $\lim\limits_{x\to3} (-x+2) = -1$.

c) $\lim\limits_{x\to3} f(x) = -\infty$.

2. a) Les racines de $3x^2 - 2x - 1$ sont 1 et $-\dfrac{1}{3}$; d'où, pour tout nombre réel x,

$3x^2 - 2x - 1 = 3(x-1)\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$,

$3x^2 - 2x - 1 = (x - 1)(3x + 1)$.

▶ *Si x_1 et x_2 sont racines du polynôme $ax^2 + bx + c$, alors pour tout nombre réel x,*

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

b)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to 1} x-1=0$. Or, pour tout $x<1$, $x-1<0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ dans le cas où $x<1$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2x+1}{3x+1}=-\dfrac{1}{4}$.

De $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2x+1}{3x+1}=-\dfrac{1}{4}$

et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ dans le cas où $x<1$,

on déduit que $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$.

12. a) Pour tout nombre réel x de $]1,+\infty[$,

$f(x)=-4x\times\dfrac{1}{x-1}$.

De $\lim\limits_{x\to 1}(-4x)=-4$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$

lorsque $x>1$ (puisque sur $]1,+\infty[$, $x-1>0$), on déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$.

b) Pour tout nombre réel x de $]1,+\infty[$,

$f(x)=\dfrac{1}{x-1}\times\dfrac{2x-1}{x+1}$.

De $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ lorsque $x>1$ (puisque $\lim\limits_{x\to 1} x-1=0$ et sur $]1,+\infty[$, $x-1>0$) et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

on déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$.

Méthode : *dans chaque cas, on a isolé le facteur qui annule le dénominateur.*

13. • Pour tout nombre réel x de I, $f(x)=(x+1)\times\dfrac{1}{3x-1}$.

De $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}(x+1)=\dfrac{4}{3}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{1}{3x-1}=+\infty$ lorsque $x>\dfrac{1}{3}$

(car $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} 3x-1=0$ et, pour tout $x>\dfrac{1}{3}$, $x-\dfrac{1}{3}>0$, c'est-à-dire $3x-1>0$),

on déduit que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} f(x)=+\infty$

▶ *On isole le terme qui s'annule au dénominateur.*

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$.

15. • Pour tout nombre réel x de I,

$f(x)=\dfrac{1}{x+2}\times\dfrac{x+3}{x-2}$.

De $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{x+2}=+\infty$ lorsque $x>-2$ (puisque $x+2>0$ pour tout $x>-2$)

et $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+3}{x-2}=-\dfrac{1}{4}$,

on déduit que $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=-\infty$.

• Pour tout nombre réel x de I,

$f(x)=\dfrac{1}{x-2}\times\dfrac{x+3}{x+2}$.

De $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$ lorsque $x<2$ (puisque $\lim\limits_{x\to 2} x-2=0$ et pour tout $x<2$, $x-2<0$)

et $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{5}{4}$,

on déduit que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$.

20. • De $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$ lorsque $x>3$ (puisque $\lim\limits_{x\to 3} x-3=0$ et $x-3>0$ pour tout $x>3$)

et $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)=7$,

on déduit que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$.

• De $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-3}=0$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)=1$,

on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

24. **1.** a) De $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}(x+1)=\dfrac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{1}{2x-3}=+\infty$

(puisque $2x-3>0$ sur $\left]\dfrac{3}{2},+\infty\right[$),

on déduit que : $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}(x+1)\times\dfrac{1}{2x-3}=+\infty$.

b) De $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=+\infty$, on déduit que la droite Δ_1 d'équation

$x=\dfrac{3}{2}$ est asymptote verticale.

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

b) De $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$, on déduit que la droite Δ_2 d'équation

$y=\dfrac{1}{2}$ est une asymptote horizontale en $+\infty$.

25. a) On procède comme à l'exercice corrigé 24

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=+\infty$.

b) Les racines de x^2-x-2 sont 2 et -1 donc, pour tout nombre réel x de $]2,+\infty[$

$f(x)=\dfrac{3x^2+x+1}{(x-2)(x+1)}$.

▶ *Voir le rappel de l'exercice* ***11***.

$f(x)=\dfrac{1}{x-2}\times\dfrac{3x^2+x+1}{x+1}$.

De $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$ lorsque $x > 2$ (puisque $\lim\limits_{x\to 2} x-2=0$ et pour tout $x > 2$, $x - 2 > 0$)

et $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2+x+1}{x+1} = 5$,

on déduit que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}$.

On démontre aussi que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$; la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale de la courbe $\mathscr{C}$.

27. 1. De $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2}{x+1} = +\infty$ lorsque $x > -1$ (puisque sur $]-1, +\infty[$, $x + 1 > 0$) et $\lim\limits_{x\to -1} (x+3) = 2$,

on déduit que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}$.

2. De $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+3) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$,

on déduit que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x)-(x+3)] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$.

En appliquant une définition du cours, on en déduit que la droite d'équation $y = x + 3$ est une asymptote de la courbe $\mathscr{C}$.

28. 1. Pour tout nombre réel x de $]1, +\infty[$:

$$x+4+\frac{5}{x-1} = \frac{(x+4)(x-1)+5}{x-1} = \frac{x^2+4x-x-4+5}{x-1}; = \frac{x^2+3x+1}{x-1}.$$

2. Puisque $f(x) = x+4+\dfrac{5}{x-1}$ et que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5}{x-1} = 0$, la droite d'équation $y = x + 4$ est une asymptote de la courbe $\mathscr{C}$.

3. Pour tout nombre réel x de $]1, +\infty[$

$f(x)-(x+4) = \dfrac{5}{x-1}$ donc $f(x) - (x + 4) \geq 0$.

La courbe $\mathscr{C}$ est donc au-dessus de son asymptote.

4. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale.

34. 1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

2.

x	0		1		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	2	↘	1

49. Algorithme de seuil avec la calculatrice, AlgoBox ou Scilab

1. $\lim\limits_{Q\to +\infty} \left(10+\dfrac{8\,719}{4\,185\times Q}\right) = 10$.

2. a) La condition de la boucle est $\dfrac{8\,719}{4\,185\times Q} > 0{,}1$.

b) On sort de la boucle dès que Q vérifie $\dfrac{8\,719}{4\,185\times Q} \leq 0{,}1$.

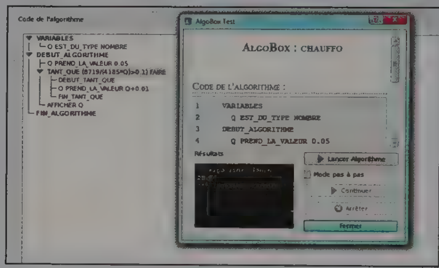
c) L'algorithme recherche le plus petit débit Q, à 10^{-2} près, à partir duquel la température de sortie T est inférieure ou égale à 10,1 °C.

3. Programme calculatrice :

```
PROGRAM:CHAUFFO
:0.05→Q
:While 8719/(418
5*Q)>0.1
:Q+0.01→Q
:End
:Disp Q
```

```
prgmCHAUFFO
          20.84
           Fait
```

Programme AlgoBox :



Programme Scilab :

```
Q=0.05
while 8719/(4185*Q)>0.1
    Q=Q+0.01
end
afficher(Q)
```

```
20.84
```

Faites le point

QCM

50. 1. Réponse c. **2.** Réponse b.

51. 1. Réponse a. **2.** Réponse b.
3. Réponse b.

52. 1. Réponse b. **2.** Réponse c.
3. Réponse c.

53. Réponse b.

Exercices pour le baccalauréat

56. 1. a) Sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, $2x + 1 > 0$, donc $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2x+1} = +\infty$,

d'où $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$.

b) La droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ est asymptote verticale.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{2x+1}=0$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

3. a) Pour tout x de $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, $f(x)=2x-3+\dfrac{9}{2x+1}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{2x+1}=0$, d'où la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=2x-3$ est asymptote oblique de $\mathscr{C}$.

b) La position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$ est donnée par le signe de $f(x)-(2x-3)=\dfrac{9}{2x+1}$.

Pour tout x de $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, $\dfrac{9}{2x+1}>0$. D'où la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

4. a) Pour tout x de $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, $f'(x)=2-\dfrac{9\times2}{(2x+1)^2}$,

$f'(x)=2\left[1-\dfrac{9}{(2x+1)^2}\right]$, $f'(x)=2\dfrac{(2x+1)^2-3^2}{(2x+1)^2}$,

$f'(x)=2\dfrac{(2x-2)(2x+4)}{(2x+1)^2}$, $f'(x)=\dfrac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}$.

b)

x	$-\dfrac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

5. Pour tout x de $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, $f(x)>0$.

6. • Quand x varie dans l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2},1\right]$, f est strictement décroissante en prenant toutes les valeurs de l'intervalle $[2,+\infty[$. Or 10 appartient à l'intervalle $[2,+\infty[$, il existe donc un nombre unique x_1 de $\left]-\dfrac{1}{2},1\right]$ tel que $f(x_1)=10$.
• De même, il existe un nombre unique x_2 de $[1,+\infty[$ tel que $f(x_2)=10$.

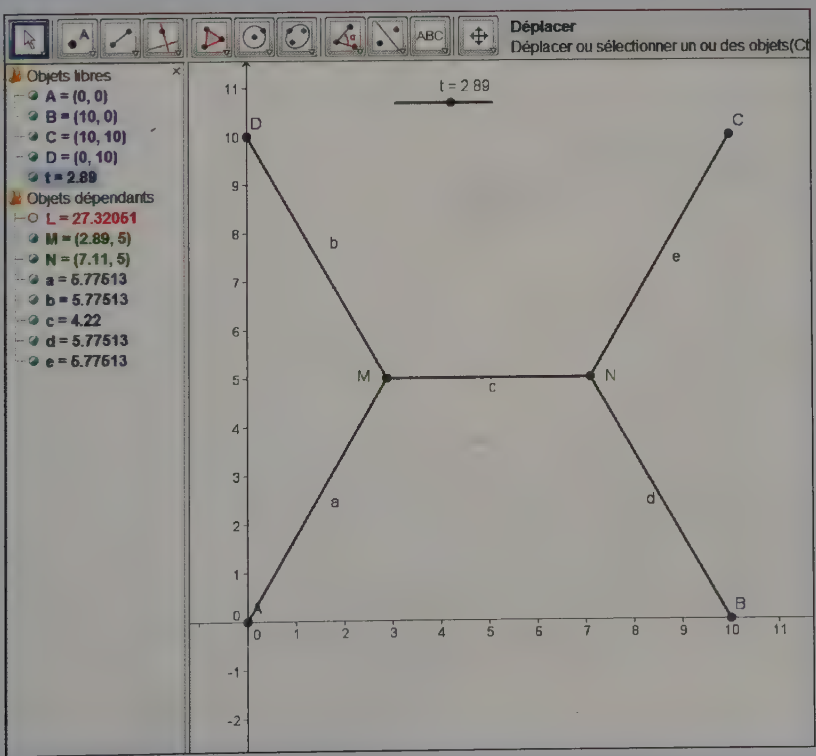
59. 1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux ($f(x)\leq1$).
4. Faux (elle est parallèle à la droite d'équation $y=0$).
5. Faux. ($\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$).
6. Vrai (l'axe des abscisses).

CHAPITRE 3

Travaux pratiques TICE

TP1 **Réseau minimal**

A. On obtient $t\approx2{,}89$.



B. 1. a. En notant P le point de coordonnées (0,5), l'énoncé de Pythagore, appliqué au triangle rectangle APM donne $AM^2 = AP^2 + PM^2$ d'où $AM^2 = 25 + t^2$.

Donc $AM = \sqrt{t^2+25}$.

b. Le réseau comporte quatre segments de longueur $\sqrt{t^2+25}$ et le segment [MN] de longueur $MN = 10 - 2 \times t$.

La longueur totale du réseau est donc $4\sqrt{t^2+25}+10-2t$.

2. a. La sortie n° 2 affiche la dérivée de f.

b. L'entrée n° 3 demande de résoudre l'équation $f'(t) = 0$. On sait que la valeur de t pour laquelle le minimum est atteint est solution de cette équation.

c. La sortie n° 3 ne fournit pas la solution attendue. Le logiciel est en échec.

d. Si $\sqrt{t^2+25}-2t = 0$ alors $t^2 + 25 = 4t^2$.

e. On a $\dfrac{5}{\sqrt{3}} \approx 2{,}89$.

TP2 Minimisation par un algorithme de descente

A. 1. On a $4 < \alpha < 5$.

2. a. On obtient $f'(x) = 4x^3 - 33x^2 + 82x - 61$.

b. On en déduit que α est racine de l'équation $4x^3 - 33x^2 + 82x - 61 = 0$.

3. a. Le coefficient directeur de la tangente en A est – 5, celui de la tangente en B est 24.

b. C'est au point B que, en valeur absolue, la « pente est la plus grande ».

B. 1. On obtient le tableau suivant :

	a	b	df(a)	df(b)	test while	c	df(c)>0 ?
Itération 1	4	5	– 5	24	VRAI	4,99	VRAI
Itération 2	4	4,99					

2. La condition max(abs(df(a)),abs(df(b)))>10^-9 signifie qu'en valeur absolue le coefficient directeur des tangentes aux points d'abscisses a et b doit être supérieur à 10^{-9} (autrement dit la courbe ne doit pas être « trop plate »).

La condition df(a)<=0 signifie que le coefficient directeur de la tangente en a doit être négatif (autrement dit, on est « à gauche » du minimum).

La condition df(b)>=0 signifie que signifie que le coefficient directeur de la tangente en b doit être positif (autrement dit, on est « à droite » du minimum).

3. La condition -df(a)>=df(b) vérifie si, en valeur absolue, la « pente » au point d'abscisse a est « plus forte » que la « pente » au point d'abscisse b.

4. Le rôle des lignes 13 à 15 est de déterminer les nouvelles valeurs de a et de b pour la prochaine itération.

C. 1. Exécution du programme pour $a = 4$ et $b = 5$.

```
-->exec('C:\Users\
a = 4
b = 5

 minimum pour x valant 4.3263454633578

-->exec('C:\Users\
a = 0
b = 5

 minimum pour x valant 1.3927479811269

-->exec('C:\Users\
a = 2
b = 4
```

2. Exécution du programme pour $a = 0$ et $b = 5$.

La valeur affichée correspond à un minimum local.

3. Exécution du programme pour $a = 2$ et $b = 4$.

Il n'y a pas d'affichage car il n'y a pas de minimum local dans l'intervalle]2, 4[.

4. La fonction f admet un maximum en $x = \alpha$ lorsque la fonction $-f$ admet un minimum en $x = \alpha$.

TP3 Chariot pour découpage laser

A. 1. On a $v(x) = ax + b$ puisque c'est une primitive de $x \mapsto a$. Comme $v(0) = 0$, on a $b = 0$. Comme $v(2) = 10$, on a $a = 5$.

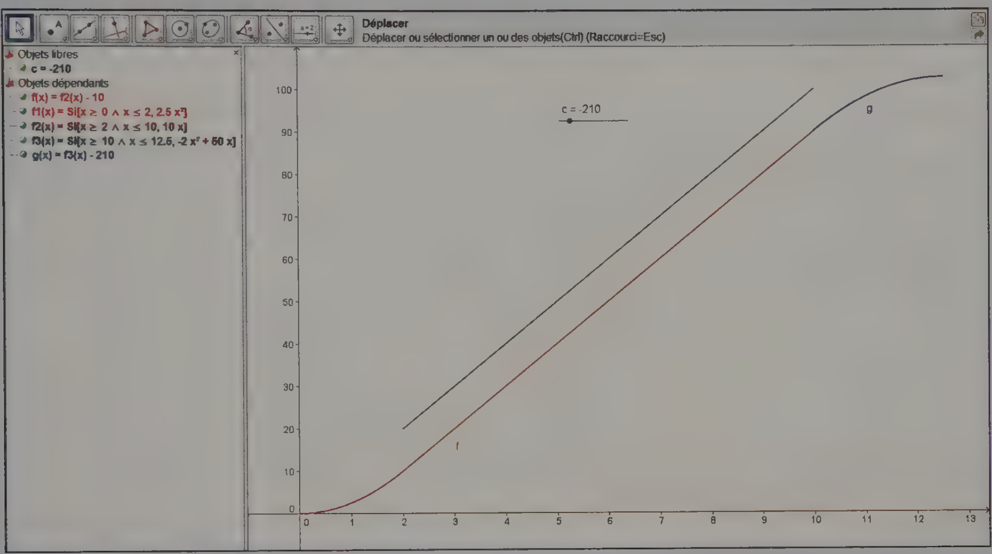
2. On a $v(x) = ax + b$ puisque c'est une primitive de $x \mapsto a$. Comme $v(10) = 10$ et $v(12{,}5) = 0$, on a $\begin{cases} 10a+b=10 \\ 12{,}5a+b=0 \end{cases}$.
On en déduit $a = -4$ et $b = 50$.

B. 1. L'expression de la fonction de la distance parcourue selon le temps sur l'intervalle [0, 2] est $f_1(x) = 2{,}5x^2$.

2. a) La discontinuité de la fonction donnant la distance parcourue ne convient pas. La primitive calculée par GeoGebra n'est pas la bonne.

b) Pour se « raccrocher » à l'arc de courbe précédent, il faut saisir f2(x)-10.
La primitive qui convient est $x \mapsto 10x - 10$.

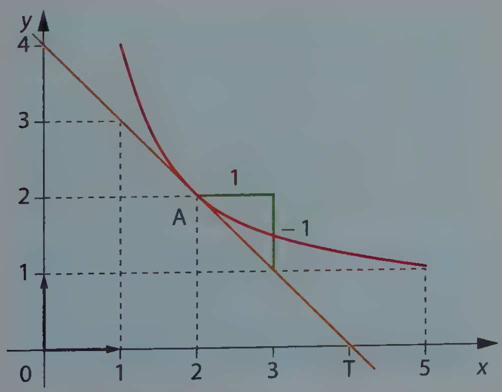
3. La position du curseur qui convient (c'est-à-dire qui permet de respecter la condition initiale sur cet intervalle de temps) est $c = -210$.



On en déduit que la distance parcourue selon le temps sur l'intervalle [10 ; 12,5] a pour expression $x \mapsto -2x^2 + 50x - 210$.

Exercices corrigés

1. 1. T a pour coefficient directeur $f'(2) = -1$.



Rappelons les formules utilisées pour calculer les dérivées

	$f(x)$	$f'(x)$
①	k	0
②	x	1
③	$mx + p$	m
④	x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}
⑤	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
⑥	$\cos x$	$-\sin x$
⑦	$\sin x$	$\cos x$
⑧	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\omega \cos(\omega t + \varphi)$
⑨	$\cos(\omega t + \varphi)$	$-\omega \sin(\omega t + \varphi)$

	Opérations
⑩	$(u+v)' = u' + v'$
⑪	$(ku)' = ku'$
⑫	$(uv)' = u'v + uv'$
⑬	$(u^2)' = 2u'u$
⑭	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
⑮	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

6. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3(2x) + 4$.
(On a utilisé : ⑩, ⑫, ⑪, ④, ③).

9. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3$.
(On a utilisé : ④, ⑪, ⑩, ③).

13. Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec
$u(x) = 4x + 1$, donc $u'(x) = 4$
et $v(x) = -2x + 1$, donc $v'(x) = -2$.
D'après ⑫,
$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,
$f'(x) = 4(-2x + 1) + (4x + 1)(-2)$,
$f'(x) = -16x + 2$.

15. Pour tout x de $]-\infty, 0[$, $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$.
(On a utilisé : ④, ⑩, ⑤).

17. Pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = -2 - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$;
$f'(x) = -2 + \dfrac{1}{x^2}$.
(On a utilisé ③, ⑩, ⑤, ⑪).

18. Pour tout t de $]-\infty, -3[$, $f(t) = -3 \times \dfrac{1}{2t+6}$, on peut poser $f(t) = -3 \times \dfrac{1}{v(t)}$, avec $v(t) = 2t + 6$, donc $v'(t) = 2$.
En appliquant ⑪ et ⑭ on obtient :
$f'(t) = -3 \times \left(\dfrac{-2}{(2t+6)^2}\right)$, $f'(t) = \dfrac{6}{(2t+6)^2}$.

21. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -4 \times \dfrac{1}{x^2 - 3x + 4}$.
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 3x + 4}$ est de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$
avec $v(x) = x^2 - 3x + 4$ et $v'(x) = 2x - 3$.
On a $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$, d'où, pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f'(x) = -4 \times \dfrac{-(2x-3)}{(x^2 - 3x + 4)^2}$; $f'(x) = \dfrac{4(2x-3)}{(x^2 - 3x + 4)^2}$.

22. Pour tout x de $]-\infty, 3[$, on peut poser $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = 3x - 7$, donc $u'(x) = 3$, et $v(x) = -x + 3$, donc $v'(x) = -1$.
Pour tout x de $]-\infty, 3[$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$,
$f'(x) = \dfrac{3(-x+3) - (3x-7)(-1)}{(-x+3)^2}$, $f'(x) = \dfrac{2}{(-x+3)^2}$.

24. En procédant comme au **22** (en utilisant ⑮) on obtient : pour tout x de $]2, +\infty[$,
$f'(x) = \dfrac{(-2x+2)(x-2) - (-x^2 + 2x + 3)(1)}{(x-2)^2}$,
$f'(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 7}{(x-2)^2}$.

27. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \cos 2x$.
(On a utilisé : ⑧).

36. Pour tout x de $]0, +\infty[$,
$f'(x) = 1 + 121\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{121}{x^2}$, $f'(x) = \dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{121}{x^2} = \dfrac{x^2 - 11^2}{x^2}$,
$f'(x) = \dfrac{(x-11)(x+11)}{x^2}$.
$(a^2 - b^2 = (a - b(a + b))$.

39. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(2x) - \dfrac{1}{2}$;
$f'(x) = x - \dfrac{1}{2}$. D'où $f'(3) = 3 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$.

44.

▶ **Rappel :** *une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est : y = f '(a)(x – a) + f(a).*

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 est :
$y - f(-1) = f'(-1)[x - (-1)]$, $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2(2x) - 1$, $f'(x) = 4x - 1$.
Donc $f'(-1) = -4 - 1$, $f'(-1) = -5$.
D'autre part $f(-1) = 2(-1)^2 - (-1) - 1$, $f(-1) = 2$.
D'où l'équation :
$y - 2 = -5(x + 1)$, $y = -5x - 5 + 2$, $y = -5x - 3$.

49. Les solutions sont :
(1) $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$
(2) $x = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

50. Les solutions sont :
(1) $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$
(2) $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

52. Les solutions sont :
(1) $2x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$
(2) $2x + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$
(1) $2x = k2\pi$
(2) $2x = -\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = k2\pi$ soit : (2) $2x = -\dfrac{2\pi}{6} + k2\pi$
(1) $x = k\pi$
(2) $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

▶ *Pour tout nombre entier relatif non nul, n, si $f(x) = [u(x)]^n$, alors $f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$.*

59. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2(-2)(-2x + 3)$,
$f'(x) = -4(-2x + 3)$.

60. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2(-2x)(-x^2 + 1)$,
$f'(x) = -4x(-x^2 + 1)$.

61. On peut poser : $f(x) = u(x) \times v(x)$, avec $u(x) = (x - 2)^2$, donc $u'(x) = 2(1)(x - 2) = 2(x - 2)$, et $v(x) = 2x + 5$, donc $v'(x) = 2$.
$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2(x - 2)(2x + 5) + (x - 2)^2(2)$,
$f'(x) = 2(x - 2)[(2x + 5) + (x - 2)] = 2(x - 2)(3x + 3)$.

65. a) Pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t) = [u(t)]^2$ avec $u(t) = \sin 2t$, donc $u'(t) = 2\cos 2t$.

D'où : $f'(t) = 2u'(t)u(t) = 2(2\cos 2t)\sin 2t$,
$f'(t) = 4\cos 2t \sin 2t$.

b) Pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t) = [u(t)]^2$ avec $u(t) = \cos 2t$, donc $u'(t) = -2\sin 2t$.

D'où $f'(t) = 2u'(t)u(t) = 2(-2\sin 2t)\cos 2t$,
$f'(t) = -4\sin 2t \cos 2t$.

▶ *Dans les exercices **70** à **97**, C est une constante quelconque.*

▶ *Dans les exercices **70** à **72**, on utilise en particulier le résultat : si $f(x) = x^n$, avec n appartenant à $\mathbb{N}$, les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$ par :*

$$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C.$$

70. Les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x)=3\left(\frac{1}{2}x^2\right)-4x+C,\quad F(x)=\frac{3}{2}x^2-4x+C.$$

71. Les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x)=2\left(\frac{1}{3}x^3\right)-3\left(\frac{1}{2}x^2\right)+x+C.$$

$$F(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C.$$

72. Les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x)=\frac{1}{4}x^4-2\left(\frac{1}{3}x^3\right)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+C,$$

$$F(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+C.$$

73. Les primitives de f sont définies sur $]-\infty, 0[$ par

$$F(x)=6\left(\frac{1}{3}x^3\right)+4\left(\frac{1}{x}\right)+C.\quad F(x)=2x^3+\frac{4}{x}+C.$$

74. Les primitives de f sont définies sur $]0, +\infty[$ par

$$F(x)=x^3-5\left(\frac{x^2}{2}\right)+x+\frac{1}{x}+C\ ;$$

$$F(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2+x+\frac{1}{x}+C.$$

81.

▶ *Les primitives de $t \mapsto \sin(\omega t+\varphi)$ sont définies par :*

$$t\mapsto -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi).$$

Les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(t)=-\frac{1}{3}\cos 3t+C.$$

82. Les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(t)=\frac{1}{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)+C.$$

88.

▶ *Les primitives de $x\mapsto u'(x)[u(x)]^n$ (n entier relatif non nul) sont définies par : $x\mapsto \frac{1}{n+1}[u'(x)]^{n+1}+C$.*

$f(x)$ ressemble à $u'(x)[u(x)]^3$, avec $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$.
On est donc conduit à écrire, pour tout nombre réel x,

$$f(x)=\frac{1}{2}[2\times(2x-1)^3].$$

▶ *Dans les crochets, on a exactement : $u'(x)[u(x)]^3$.*

Les primitives de $x\mapsto u'(x)[u(x)]^3$ sont définies par

$$x\mapsto\frac{1}{4}[u(x)]^4+C.$$

Les primitives de f sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}(2x-1)^4+C,\quad F(x)=\frac{1}{8}(2x-1)^4+C.$$

89. $f(x)$ ressemble à $u'(x)\times u(x)$ avec
$u(x) = x^2 + 2x + 3$ et $u'(x) = 2x + 2$.
On est donc conduit à écrire, pour tout nombre réel x,

$$f(x)=\frac{1}{2}[(2x+2)(x^2+2x+3)].$$

Les primitives de $x\mapsto u'(x)\times u(x)$ sont définies par

$$x\mapsto\frac{1}{2}[u(x)]^2+C.$$

Les primitives de f sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(x^2+2x+3)^2+C,\quad F(x)=\frac{1}{4}(x^2+2x+3)^2+C.$$

93. $f(x)$ ressemble à $\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$.
On est donc conduit à écrire, pour tout nombre réel x,

$$f(x)=\frac{3}{2}\left[\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right].$$

▶ *Dans les crochets, on a exactement : $\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$.*

Les primitives de $x\mapsto\dfrac{u(x)}{[u(x)]^2}$ sont définies par :

$$x\mapsto-\frac{1}{u(x)}+C.$$

Les primitives de f sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{x^2+1}+C.$$

97. $f(x)$ est de la forme $u'(x)[u(x)]^2$ avec $u(x) = \sin x$ et $u'(x) = \cos x$.
Les primitives de $x\mapsto u'(x)[u(x)]^n$ sont définies par

$$x\mapsto\frac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1}+C.$$

Donc les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\frac{1}{2+1}[\sin x]^{2+1}+C=\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$$

99. 1. Les primitives de $t\mapsto\cos(\omega t+\varphi)$ sont définies par $t\mapsto\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$.

Donc, les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(t)=2\left[\frac{1}{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)\right]+C=\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+C.$$

2. $F(0) = 0$ se traduit par :

$$\sin\frac{\pi}{3}+C=0.$$

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad\text{d'où } C=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$F(t)=\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

101. F est définie sur $]1, +\infty[$ par $F(x) = -\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + C$.

▶ *On utilise* $f = \dfrac{u'}{u^2}$, $F = -\dfrac{1}{u}$.

$F(2) = 2$ équivaut à $-1 + \dfrac{1}{3} + C = 2$.

D'où $C = \dfrac{8}{3}$ et $F(x) = -\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{8}{3}$.

103. Économie de carburant

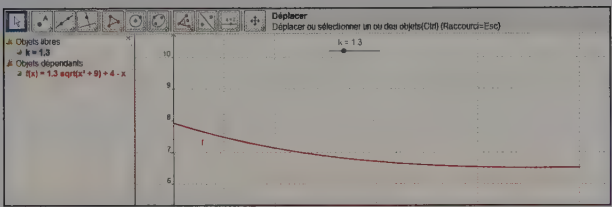
1. a) On a $MF = 4 - x$ et, d'après le théorème de Pythagore, $CM = \sqrt{x^2 + 3^2}$.

b) $f_2(4) = 2\sqrt{25} + 4 - 4 = 10$. Si l'agriculteur coupe à travers champs et fait directement le trajet CF, il consomme 10 litres d'essence.

2. b) $f_k(4) = 5k$.

c) On recherche le seuil k_0 en dessous duquel le minimum de f_k est obtenu pour $x = 4$.

On observe $k_0 \approx 1{,}3$ (ou $k_0 \approx 1{,}2$).



d) Avec un tableur, on peut conjecturer $1{,}2 \leq k_0 < 1{,}3$ puis $1{,}25 \leq k_0 < 1{,}251$.

B2 =$E$1*RACINE(A2*A2+9)+4-A2

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)		k=	1,2
2	0	7,6		5k =	6
3	0,01	7,59002		MIN	6
4	0,02	7,58008			

E3 =MIN(B2:B402)

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)		k=	1,3
2	0	7,9		5k =	6,5
3	0,01	7,89002167		MIN	6,4919873
4	0,02	7,88008667			

E3 =MIN(B2:B402)

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)		k=	1,25
2	0	7,75		5k =	6,25
3	0,01	7,74002083		MIN	6,25
4	0,02	7,73008333			

E3 =MIN(B2:B402)

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)		k=	1,251
2	0	7,753		5k =	6,255
3	0,01	7,74302085		MIN	6,2549965
4	0,02	7,7330834			

e) Un logiciel de calcul formel permet d'avoir confirmation de $k_0 = \dfrac{5}{4}$, en suivant par exemple la procédure ci-dessous.

```
(%i1) define(f(x),k*sqrt(x^2+9)+4-x);
(%o1) f(x):=k sqrt(x^2+9)-x+4
(%i2) diff(f(x),x);
(%o2) k x / sqrt(x^2+9) - 1
(%i3) factor(%);
(%o3) (sqrt(x^2+9) - k x) / sqrt(x^2+9)
(%i4) solve(%=0,x);
(%o4) [x = sqrt(x^2+9) / k]
(%i5) solve([x^2+9=k^2*x^2], [x]);
(%o5) [x=-3 sqrt(1/(k^2-1)), x=3 sqrt(1/(k^2-1))]
(%i7) solve(3*sqrt(1/(k^2-1))=4,k);
(%o7) [k=-5/4, k=5/4]
```

Réponses des QCM

104.

1. Réponse b) ou c).
2. Réponse c).
3. Réponse a).
4. Réponse c).
5. Réponse b).
6. Réponse b).
7. Réponse c).

CHAPITRE 4

Travaux pratiques TICE

TP1 A. 1. On obtient le tableau de valeurs suivant (à 10^{-3} près).

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$C(x)$	4,723	8,539	9,909	10,717	11,291	11,737	12,101	12,409	12,676	12,912	12,123

2. Le coût de production dépasse 12,5 milliers d'euros pour les valeurs de x suivantes du tableau : 80 et 90.

B. 1. Sur le graphique, les coordonnées approximatives du point d'intersection sont : $x \approx 73{,}2$ et $y \approx 12{,}5$.

2. Une valeur approchée de la solution de l'équation $C(x) = 12{,}5$ est $x = 73{,}31$.

C. 1. On lit dans la table $C(73{,}24) \approx 12{,}49993$ et $C(73{,}25) \approx 12{,}50002$.

2. Le nombre maximum d'objets que l'on peut fabriquer pour un coût inférieur à 12 500 € est donc 73,24 centaines d'objets, c'est-à-dire 7 324 objets.

TP2 A. 1. Lorsque la concentration en ions H_3O^+ est divisée par 10, le pH augmente d'une unité.

2. Lorsque le pH est diminué de 2 unités, la concentration en ions H_3O^+ est multipliée par 100.

B. 1. Pour $x = 3{,}83 \times 10^{-8}$ mol/l, le pH vaut $f(3{,}83 \times 10^{-8}) \approx 7{,}4$.

2. Lorsque le pH vaut 7,2 la concentration en ions H_3O^+ vaut environ 6×10^{-8} mol/l.

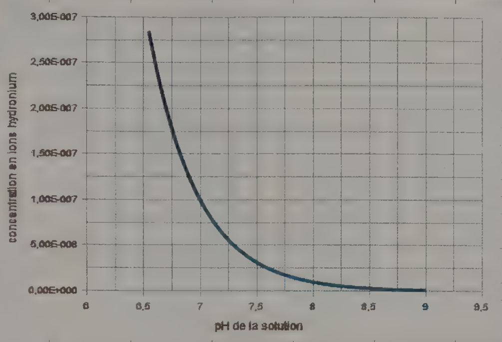
B3 =-LOG10(A3)

	A	B	C
1	concentration	pH	
2	1,00E-009	9	
3	1,00E-008	8	
4	1,00E-007	7	
5	1,00E-006	6	
6	1,00E-005	5	
7	1,00E-004	4	
8	1,00E-003	3	
9	1,00E-002	2	
10	1,00E-001	1	
11	1,00E+000	0	

C. Représentation graphique de la fonction g :

B2 =-LOG10(A2)

	A	B
1	concentration	pH
2	1,00E-009	9
3	1,20E-009	8,921
4	1,44E-009	8,842
5	1,73E-009	8,762
6	2,07E-009	8,683
7	2,49E-009	8,604
8	2,99E-009	8,525
9	3,58E-009	8,446
10	4,30E-009	8,367
11	5,16E-009	8,287
12	6,19E-009	8,208
13	7,43E-009	8,129
14	8,92E-009	8,05
15	1,07E-008	7,971
16	1,28E-008	7,891
17	1,54E-008	7,812
18	1,85E-008	7,733
19	2,22E-008	7,654
20	2,66E-008	7,575
21	3,19E-008	7,496
22	3,83E-008	7,416



1. D'après le graphique, la fonction g est décroissante sur [6,55 ; 9].

2. Lorsque le pH augmente, la concentration en ions H_3O^+ diminue.

Exercices corrigés

1. a) Les équations suivantes sont équivalentes dans I :
$\ln(x+2) = 2\ln x$; $\ln(x+2) = \ln x^2$; $x + 2 = x^2$;
$x^2 - x - 2 = 0$; $x = -1$ ou $x = 2$.
$x > 0$, donc 2 est la seule solution qui convient.

b) $\ln(2x+3) + \ln 3 = 2\ln x$; $\ln 3(2x+3) = \ln x^2$;
$6x + 9 = x^2$; $x^2 - 6x - 9 = 0$; $x = 3 - 3\sqrt{2}$ ou $x = 3 + 3\sqrt{2}$.
$x > 0$, donc $3 + 3\sqrt{2}$ est la seule solution qui convient.

c) Procéder comme au **a)** et au **b)**. Les solutions sont 3 et 4.

d) $\ln(x-2) = 3\ln e$; $\ln(x-2) = \ln e^3$; $x - 2 = e^3$;
$x = 2 + e^3$.

4. a) Les équations suivantes sont équivalentes dans I.
$\ln(x-1)(x+1) = \ln 1$; $x^2 - 1 = 1$; $x^2 - 2 = 0$; $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$.
$x > 1$, donc $\sqrt{2}$ est la seule solution qui convient.

b) $\ln\dfrac{x-1}{x+1} = \ln e$; $\dfrac{x-1}{x+1} = e$; $x = \dfrac{1+e}{1-e} < 0$ pas de solution.

6. a) Les inéquations suivantes sont équivalentes dans I.
$\ln(x-2) \leq 3$; $\ln(x-2) \leq 3\ln e$; $\ln(x-2) \leq \ln e^3$;
$x - 2 \leq e^3$; $x \leq 2 + e^3$.
On a $I =]2, +\infty[$, donc $x > 2$, d'où $2 < x \leq 2 + e^3$.
L'ensemble des solutions est : $]2 ; 2 + e^3]$.

b) Les inéquations suivantes sont équivalentes dans I.
$\ln\dfrac{3x+1}{x+1} \geq \ln 2$; $\dfrac{3x+1}{x+1} \geq 2$; $\dfrac{3x+1}{x+1} - 2 \geq 0$; $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$.
Sur $\left]-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$, $x > -1$, donc $x + 1 > 0$.
L'inéquation est donc équivalente, à $x - 1 \geq 0$; $x \geq 1$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $[1, +\infty[$.

8. • De $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$,
on déduit que : $\lim\limits_{x\to 0}(x + \ln x) = -\infty$.
(Utiliser un théorème sur la limite d'une somme).
• De $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$,
on déduit que : $\lim\limits_{x\to +\infty}(x + \ln x) = +\infty$.

9. • $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x}\ln x$.
De $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ (puisque $x > 0$) et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$,
on déduit que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \times \ln x = -\infty$.
De $\lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$,
on déduit que : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x + 1 + \dfrac{\ln x}{x}\right) = -\infty$.
• On sait que : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
D'où $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(x+1) = +\infty$.

10. • De $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, on déduit que : $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x) = +\infty$.
D'où $\lim\limits_{x\to 0}(x - \ln x) = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
• Pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.

De $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, on déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$.

De $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$,

on déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$.

11. • De $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x)=+\infty$,

on déduit que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

• On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$.

De $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=1$, on déduit que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

12. • De $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, on déduit que : $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln x)=-\infty$.

De $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln x)=-\infty$, on déduit que :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\times(1+\ln x)=-\infty$.

• On a vu à l'exercice **11.** que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=0$.

15. 1. De $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$,

on déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-1)=+\infty$.

2. De $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty$,

on déduit que : $\lim\limits_{x\to 1}\ln(x-1)=-\infty$.

19. Pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=1-\dfrac{2}{x}$.

20. Pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=1\ln x+x\times\dfrac{1}{x}$;

$f'(x)=1+\ln x$.

(On utilise : $f=uv$, $f'=u'v+uv'$.)

21. Pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x\left(\dfrac{1}{x}\right)-(1)\ln x}{x^2}$;

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

(On utilise : $f=\dfrac{u}{v}$, $f'=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$.)

22. Pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=2\times\left(\dfrac{1}{x}\right)\times\ln x$;

(on utilise : $f=u^2$, $f'=2u'u$.)

$f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$.

23. Pour tout x de $\left]\dfrac{3}{2},+\infty\right[$, $f'(x)=\dfrac{2}{2x+3}$.

(On utilise : $f=\ln u$, $f'=\dfrac{u'}{u}$.)

30. Une primitive de f est définie sur $]0,+\infty[$ par :
$F(x)=2\ln x$.

31. Une primitive de f est définie sur $]0,+\infty[$ par :
$F(x)=\dfrac{3}{2}x^2+4x-5\ln x$.

32. $f(x)$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de f sur $[1,+\infty[$ est donc définie par
$F(x)=\ln(x+3)$.

33. $x\mapsto\dfrac{1}{2x+1}$ ressemble à $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

avec $u(x)=2x+1$ donc $u'(x)=2$.

Pour tout nombre réel x de $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$,

$f(x)=3x+4+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{2x+1}$.

Une primitive de f est donc définie sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$,

par : $F(x)=3\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)+4x+\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)$,

$F(x)=\dfrac{3}{2}x^2+4x+\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)$.

34. $f(x)$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

avec $u(x)=x^2-x+1$ et $u'(x)=2x-1$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc définie par
$F(x)=\ln(x^2-x+1)$.

35. $f(x)$ ressemble à $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

avec $u(x)=1+x^2$ et $u'(x)=2x$.

Pour tout nombre réel x, on écrit donc $f(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc définie par
$F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

44. 1. Les inéquations suivantes sont équivalentes :
$(1{,}045)^n\geq 2$; $\ln(1{,}045)^n\geq\ln 2$; $n\ln(1{,}045)\geq\ln 2$;

$n\geq\dfrac{\ln 2}{\ln(1{,}045)}\approx 15{,}7$.

On prend : $n=16$.

2. Les inéquations suivantes sont équivalentes :
$(0{,}9)^n\leq 0{,}5$; $\ln(0{,}9)^n\leq\ln(0{,}5)$; $n\ln(0{,}9)\leq\ln(0{,}5)$;
$0{,}9<1$ donc $\ln 0{,}9<0$, d'où l'inéquation précédente s'écrit : $n\geq\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}9)}\approx 6{,}58$.

On prend $n=7$.

46. 1. $C_1=1000+1000\times\dfrac{4}{100}=1000(1+0{,}4)$,

$C_1=1\,000\times 1{,}04=1\,040$.

De même, $C_2=C_1\times 1{,}04$, $C_2=1\,081{,}6$.

$C_3=C_2\times 1{,}04$, $C_3\approx 1\,124{,}86$.

2. a) Pour tout entier n, $C_{n+1}=C_n+\dfrac{4}{100}C_n$.

$C_{n+1}=C_n(1+0{,}04)$, $C_{n+1}=1{,}04C_n$.

b) La suite (C_n) est la suite géométrique de premier terme $C_0=1\,000$ et de raison $1{,}04$.

c) Pour tout entier n, $C_n=C_0(1{,}04)^n$,

$C_{n+1}=1\,000(1{,}04)^n$ $C_{10}\approx 1\,480{,}24$ euros.

3. a) Les inéquations suivantes sont équivalentes :

$(1{,}04)^n \geq 2$; $n\ln(1{,}04) \geq \ln 2$; $n \geq \dfrac{\ln 2}{\ln(1{,}04)} \approx 17{,}67$.

On prend $n = 18$.

b) Au bout de 18 ans.

50. Loi d'Arrhenius en cinétique chimique

1. Pour $k = 1 \times 10^{-10}$, on obtient $T \approx 300$ K.

D2 =-C2/(0,008314*LN(A2/B2))

	A	B	C	D
1	k	A	E	T
2	1,00E-010	2,10E+009	111	300,082
3				

2. Pour $k = 1{,}1 \times 10^{-12}$, on obtient $T \approx 274{,}9$ K et pour $k = 1{,}2 \times 10^{-12}$, on obtient $T \approx 277{,}9$ K.

D3 =-C3/(0,008314*LN(A3/B3))

	A	B	C	D
1	k	A	E	T
2	1,00E-010	2,10E+009	111	300,082
3	1,10E-012	2,10E+009	112	274,918
4	1,20E-012	2,10E+009	113	277,866

55. 1. a) On a $0 < p < 1$ et $0 < 1 - p < 1$ donc, d'après les propriétés de fonction logarithme de base 2, $\log_2(p) < 0$ et $\log_2(1 - p) < 0$. On en déduit que $H > 0$.

b) Le résultat de l'expérience aléatoire est le plus difficile à deviner lorsque $p = 0{,}5$ et est le plus facile à deviner lorsque $p = 0{,}001$ (dans ce cas, on a très souvent « face »).

c) En modifiant le contenu de la cellule B2 du tableur (qui contient la valeur de p), on obtient :

p	0,5	0,2	0,99	0,001
$H \approx$	1	0,722	0,081	0,011

2. Le contenu moyen en information de cette source est $H \approx 1{,}761$ bits.

D9 =-C9*LN(C9)/LN(2)

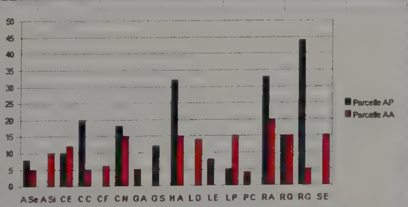
	A	B	C	D
7				
8	message	code	probabilité	information
9	M1	0	0,5	0,5
10	M2	1	0,2	0,464
11	M3	10	0,2	0,464
12	M4	11	0,1	0,332
13			H =	1,761
14				

3. a) Le rendement du codage A est $\dfrac{H}{2} \approx 0{,}88$ (ou 88 %).

b) Le rendement du codage B est $\dfrac{H}{1{,}8} \approx 0{,}978$ (ou 97,8 %).

56. 1. On obtient le diagramme ci-dessous.

	A	B	C
1	Champignons	Parcelle AP	Parcelle AA
2	A Se	8	5
3	A Si	0	10
4	C E	10	12
5	C C	20	5
6	C F	0	6
7	C N	[illegible]	15
8	G A	5	0
9	G S	12	0
10	H A	32	15
11	L D	0	14
12	L E	8	0
13	L P	5	15
14	P C	4	0
15	R A	33	20
16	R Q	15	15
17	R G	[illegible]	5
18	S E	0	15
19	total	214	152



La diversité des espèces de champignons paraît plus grande sur la parcelle AA (Abies alba) dont la répartition des espèces observées est plus égale.

2. a) À l'aide du tableur, on obtient :
pour la parcelle AP (Abies pectinata) $H \approx 3{,}338$;
pour la parcelle AA (Abies alba) $H \approx 3{,}568$.

F19 =SOMME(F2:F18)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Champignons	Parcelle AP	Parcelle AA	fréquences AP	fréquences AA	calcul H parcelle AP	calcul H parcelle AA
2	A Se	8	5	0,037	0,033	0,177	0,162
3	A Si	0	10	0	0,066	0	0,258
4	C E	10	12	0,047	0,079	0,207	0,289
5	C C	20	5	0,093	0,033	0,32	0,162
6	C F	0	6	0	0,039	0	0,184
7	C N	18	15	0,084	0,099	0,3	0,33
8	G A	5	0	0,023	0	0,127	0
9	G S	12	0	0,056	0	0,233	0
10	H A	32	15	0,15	0,099	0,41	0,33
11	L D	[illegible]	14	[illegible]	0,092	0	0,317
12	L E	8	0	0,037	0	0,177	0
13	L P	5	15	0,023	0,099	0,127	0,33
14	P C	4	0	0,019	0	0,107	0
15	R A	33	20	0,154	0,132	0,416	0,385
16	R Q	15	15	0,07	0,099	0,269	0,33
17	R G	44	5	0,206	0,033	0,469	0,162
18	S E	0	15	0	0,099	0	0,33
19	total	214	152	1	1	3,338	3,568
20					Equitabilité	0,902	0,964
21							

b) La diversité la plus grande, correspond à la parcelle AA (Abies alba), pour laquelle l'indice de Shannon est le plus grand.

3. a) Sur les deux parcelles, on a observé $n = 13$ espèces.

Les indices d'équitabilité $E = \dfrac{H}{\log_2(13)}$ valent environ 0,902 et 0,964.

b) Dans les deux cas, $E > 0{,}6$. Les parcelles ne sont pas considérées comme perturbées quant à la diversité des espèces de champignons.

Faites le point

QCM

57.

1. Réponse a). **2.** Réponse b).

58.

1. Réponse c). **2.** Réponse b). **3.** Réponse a).

59.

A. 1. Réponse c). **2.** Réponse b). **3.** Réponse a).

B. 1. Réponse b). **2.** Réponse b). **3.** Réponse b).

60.

A. Réponse c).

B. 1. Réponse c). **2.** Réponse c).

61.

1. Réponse a). **2.** Réponse b). **3.** Réponse c).

Exercices pour le baccalauréat

67. A. 1. Pour tout x de $]0, +\infty[$, $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - 2x$.

Pour tout x de $]0, +\infty[$, $g'(x) < 0$.

g est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

2. $g(1) = 0$ d'où le tableau de variation de g :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		−	−2	−	
Variation de g		↘	0	↘	

D'où le signe de $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

B. 1. a) De $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$, car $x>0$, et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$,

on déduit que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\times\ln x\right)=-\infty$.

D'où $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{x}-x+2\right)=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

c) Pour tout réel, $x>0$, $f(x)-(-x+2)=\frac{\ln x}{x}$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. Donc la droite d'équation $y=-x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

d) La position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ est donnée par le signe de $f(x)-(-x+2)=\frac{\ln x}{x}$.

• Lorsque $x<1$, $\ln x<0$, $\frac{\ln x}{x}<0$,

d'où $f(x)-(-x+2)<0$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de $\mathscr{D}$.

• Lorsque $x>1$, $f(x)-(-x+2)>0$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$.

2. a) Pour tout x de $]0,+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)(x)-(1)\ln x}{x^2}-1\,;$$

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-1\,;\ f'(x)=\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}.$$

b) $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.

D'où le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variation de f	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

3. a) Le coefficient directeur de la tangente au point A est -1.

On résout $f'(x)=-1$ qui équivaut à :

$\frac{g(x)}{x^2}=-1$; $g(x)=-x^2$; $1-\ln x=0$; $\ln x=1$; $x=\mathrm{e}$.

Les coordonnées de A sont $(\mathrm{e}, f(\mathrm{e}))$, $\left(\mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}+2\right)$.

b) L'équation de T est :

$y=f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e})+f(\mathrm{e})$;

$f'(\mathrm{e})=-1$ et $f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}+2$.

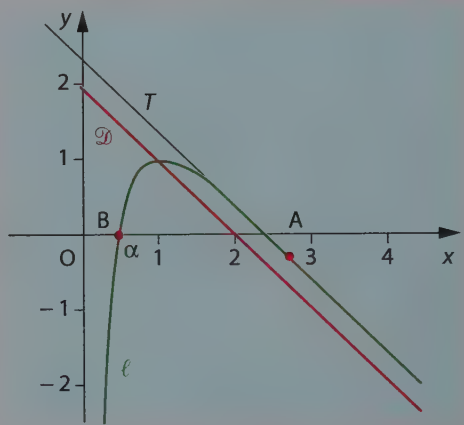
D'où l'équation :

$y=-(x-\mathrm{e})+\frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}+2$; $y=-x+\frac{1}{\mathrm{e}}+2$.

4. a) Du tableau de variation, on déduit que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points dont un seul a une abscisse dans l'intervalle $]0, 1[$.

b) Avec la calculatrice, on obtient $0{,}48<\alpha<0{,}49$.

5.



69.

1. a) $N_1=N_0-\frac{1{,}24}{100}N_0$, donc $N_1=0{,}987\,6\,N_0$.

De même $N_{k+1}=0{,}987\,6\,N_k$.

b) La suite (N_k) est une suite géométrique de premier terme N_0 et de raison $0{,}987\,6$.

$N_k=N_0\,(0{,}987\,6)^k$.

2. $N_k=\frac{40}{100}N_0$ est équivalent à $N_0\,(0{,}987\,6)^k=0{,}4\,N_0$;

$(0{,}987\,6)^k=0{,}4$; $\ln(0{,}987\,6)^k=\ln 0{,}4$;

$k\ln 0{,}987\,6=\ln 0{,}4$; $k=\frac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}987\,6}\approx 73$.

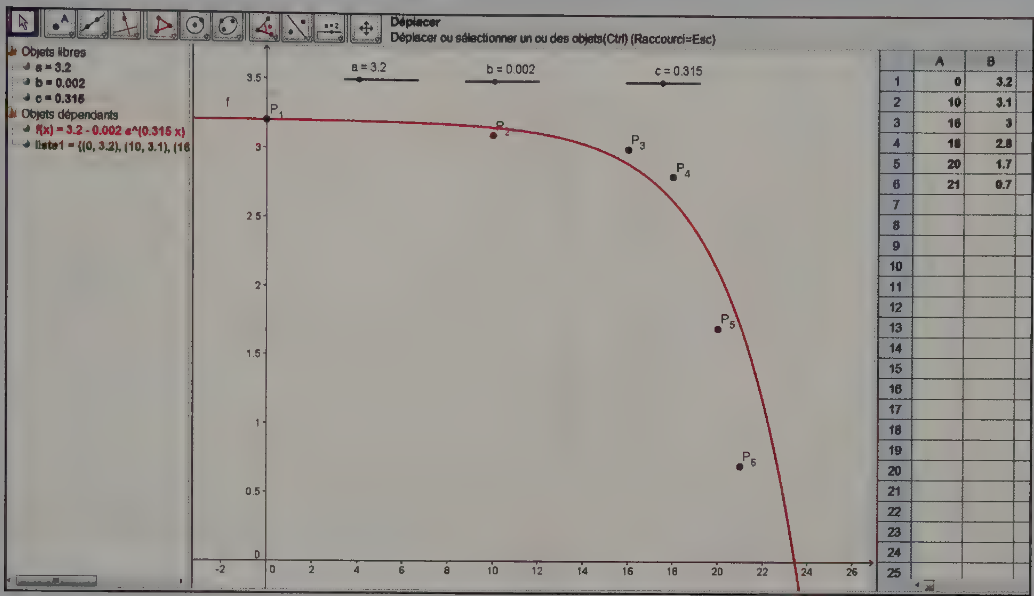
Ces fragments d'os datent d'environ 73 siècles.

Travaux pratiques TICE

TP1 **Panneau photovoltaïque**

A. 1. Le curseur a correspond à une translation verticale de la courbe.

2. On obtient une courbe assez satisfaisante pour $a \approx 3{,}2$; $b \approx 0{,}002$ et $c \approx 0{,}315$.



B. 1. D'après l'expression en sortie n° 3, la fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, pour tout $x > 0$, $g''(x) < 0$.

On en déduit que la fonction g' est strictement décroissante sur [0, 22].

2. On peut dresser le tableau de variation suivant.

x	0	x_0	22
$g''(x)$		–	
$g'(x)$	$\approx 3{,}2$ ↘	0 ↘	$\approx -15{,}4$

3. D'après le tableau de variation précédent, la fonction g' s'annule pour une valeur x_0 de l'intervalle [0, 22].

D'après le logiciel de calcul formel, $g'(17) \approx 0{,}1$ et $g'(17{,}1) \approx -2{,}8$.

On en déduit $17 < x_0 < 17{,}1$.

4. On peut dresser le tableau de variation suivant.

x	0		x_0		22
$g'(x)$		+	0	–	
$g(x)$		↗	$g(x_0)$	↘	

D'après ce modèle, la tension x_0 fournit la puissance $g(x_0)$ maximale.

TP2 Interpolation de la suite $(1{,}3^n)$

A. 2. Si q est la raison de la suite géométrique, on a $q = \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$.

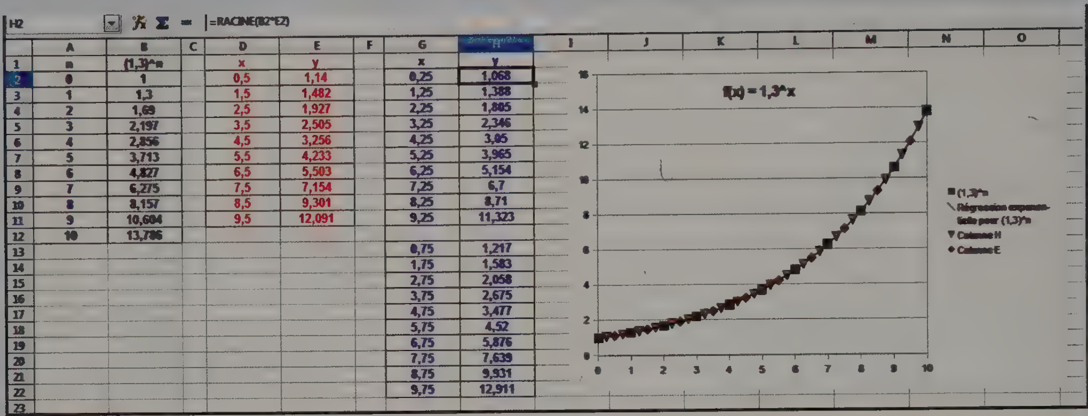
On en déduit que $b^2 = a \times c$ d'où $b = \sqrt{a \times c}$.

3. Les nouveaux points s'inscrivent « harmonieusement » entre les précédents.

4. Le pas entre les abscisses est de 0,25.

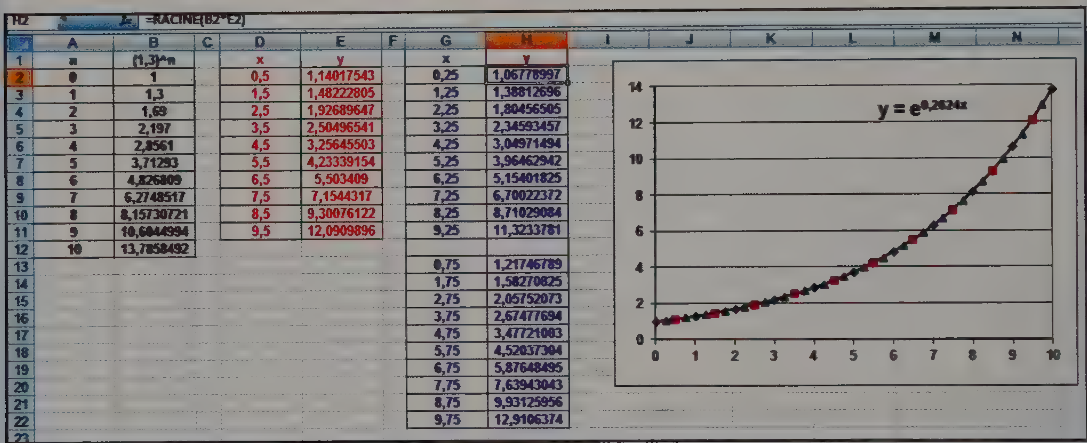
5. 1,805.

B. Les images d'écran suivantes montrent la réalisation du TP sur le tableur OpenOffice Calc et sur le tableur Excel.



H2 =RACINE(B2*E2)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	(1,3)^n		x	y		x	y
2	0	1		0,5	1,14		0,25	1,068
3	1	1,3		1,5	1,482		1,25	1,388
4	2	1,69		2,5	1,927		2,25	1,805
5	3	2,197		3,5	2,505		3,25	2,346
6	4	2,856		4,5	3,256		4,25	3,05
7	5	3,713		5,5	4,233		5,25	3,965
8	6	4,827		6,5	5,503		6,25	5,154
9	7	6,275		7,5	7,154		7,25	6,7
10	8	8,157		8,5	9,301		8,25	8,71
11	9	10,604		9,5	12,091		9,25	11,323
12	10	13,786						
13							0,75	1,217
14							1,75	1,583
15							2,75	2,058
16							3,75	2,675
17							4,75	3,477
18							5,75	4,52
19							6,75	5,876
20							7,75	7,639
21							8,75	9,931
22							9,75	12,911
23								



H2 =RACINE(B2*E2)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	(1,3)^n		x	y		x	y
2	0	1		0,5	1,14017543		0,25	1,06778997
3	1	1,3		1,5	1,48222805		1,25	1,38812696
4	2	1,69		2,5	1,92689647		2,25	1,80456505
5	3	2,197		3,5	2,50496541		3,25	2,34593457
6	4	2,8561		4,5	3,25645503		4,25	3,04971494
7	5	3,71293		5,5	4,23339154		5,25	3,96462942
8	6	4,826809		6,5	5,503409		6,25	5,15401825
9	7	6,2748517		7,5	7,1544317		7,25	6,70022372
10	8	8,15730721		8,5	9,30076122		8,25	8,71029084
11	9	10,6044994		9,5	12,0909896		9,25	11,3233781
12	10	13,7858492						
13							0,75	1,21746789
14							1,75	1,58270825
15							2,75	2,05752073
16							3,75	2,67477694
17							4,75	3,47721003
18							5,75	4,52037304
19							6,75	5,87648495
20							7,75	7,63943043
21							8,75	9,93125956
22							9,75	12,9106374
23								

1. On a $1{,}3^x = e^{x\ln(1{,}3)}$ et $\ln(1{,}3) \approx 0{,}2624$.

2. On obtient $1{,}3^{2{,}25} \approx 1{,}8046$.

TP3 Croissance d'une population de cellules tumorales

A. 1. u_n est le nombre de cellules tumorales après n quinzaines de jours.

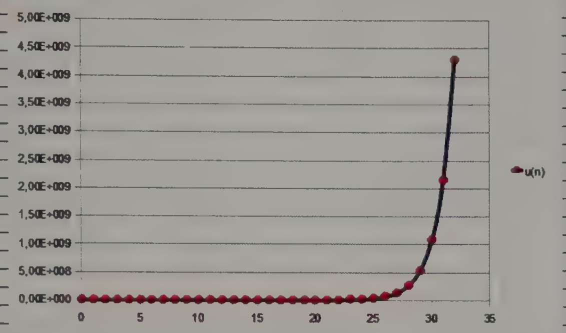
2. Voir l'image d'écran suivante.

3. On lit $n = 30$. La tumeur est détectable par palpation à partir de 60 semaines.

4. On obtient le graphique ci-dessous.

B33 =2*B32

	A	B
1	Cellules tumorales	
2	n	u(n)
3	0	1
4	1	2
5	2	4
6	3	8
7	4	16
8	5	32
9	6	64
10	7	128
11	8	256
12	9	512
13	10	1024
14	11	2048
15	12	4096
16	13	8192
17	14	16384
18	15	32768
19	16	65536
20	17	1,31E+005
21	18	2,62E+005
22	19	5,24E+005
23	20	1,05E+006
24	21	2,10E+006
25	22	4,19E+006
26	23	8,39E+006
27	24	1,68E+007
28	25	3,36E+007
29	26	6,71E+007
30	27	1,34E+008
31	28	2,68E+008
32	29	5,37E+008
33	30	1,07E+009
34	31	2,15E+009



On a $2^x = e^{x\ln(2)}$, exponentielle de base 2, raison pour laquelle on parle de croissance exponentielle.

5. On peut écrire que $2^x = e^{x\ln(2)} = 10^6$ lorsque $x\ln(2) = \ln(10^6)$, c'est-à-dire $x = \dfrac{\ln(10^6)}{\ln(2)} \approx 19{,}9$. S'il demeure 10^3 cellules tumorales, après environ 20 quinzaines de jours, le nombre de cellules aura été multiplié par 10^6 et sera proche de 10^9 et donc détectable. On peut ainsi prévoir un examen après 40 semaines.

B. 1. Plus a est grand, plus la croissance du nombre de cellules est rapide vers la valeur limite 10^{12}.

2. a) On peut estimer la valeur de a à $a \approx 1{,}011\,8$.

C4 =2*C3-10^(12-12*$E$1)*C3^$E$1

	A	B	C	D	E	F
1	Cellules tumorales				a= 1,0118	118
2	n	u(n)	x(n)			
3	0	1	1 000 000,00			
4	1	2	1 150 428,37			
5	2	4	1 321 867,94			

b) On résout l'équation $150\,000 = 10^6 - 10^{12-6a}$ c'est-à-dire $10^{12-6a} = 10^6 - 150\,000$.

En prenant le logarithme décimal, on obtient :

$12 - 6a = \log(10^6 - 150\,000)$ d'où $a = \dfrac{12 - \log(10^6 - 150\,000)}{6} \approx 1{,}011\,8$.

3. et **4.** Pour $a = 1{,}011\,8$, le nombre de cellules tumorales dépasse le seuil de 10^9 pour $n = 138$. Le nombre moyen de métastases est alors 1,06. Il est probable qu'une métastase est présente.

D141 =10^(2-12*$E$1)*C140^$E$1

	A	B	C	D	E
139	136	8,71E+040	8,80E+008	0,075	0,891
140	137	1,74E+041	9,50E+008	0,081	0,972
141	138	3,48E+041	1,02E+009	0,087	1,06
142	139	6,97E+041	1,10E+009	0,094	1,154

5. Pour $a = 1{,}015\,7$, le nombre de cellules tumorales dépasse le seuil de 10^9 pour $n = 109$. *Le nombre moyen de métastases est alors 0,799. Il est probable qu'aucune métastase n'est présente.*

E112 =D112+E111

	A	B	C	D	E
111	108	3,25E+032	9,46E+008	0,077	0,715
112	109	6,49E+032	1,04E+009	0,085	0,799
113	110	1,30E+033	1,15E+009	0,094	0,893

Exercices corrigés

1. a) $\ln e^{-1} = -1$. b) $\ln e^2 = 2$.

c) $\ln\sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}}$, $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$.

d) $\ln\frac{1}{\sqrt{e}} = \ln\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$, $\ln\frac{1}{\sqrt{e}} = \ln e^{-\frac{1}{2}}$, $\ln\frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2}$.

2. a) $e^{\ln 2} = 2$. b) $e^{-\ln 3} = e^{\ln\frac{1}{3}}$, $e^{-\ln 3} = \frac{1}{3}$.

c) $e^{2\ln 2} = e^{\ln 2^2}$, $e^{2\ln 2} = e^{\ln 4}$, $e^{2\ln 2} = 4$.

4. a) $e^x = 3$ équivaut à $x = \ln 3$.

b) $e^x + 1 = 0$ équivaut à : $e^x = -1$, équation qui n'admet pas de solution car, pour tout x réel, $e^x > 0$.

6. **1.** Les solutions de l'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$ sont : 1 et 4.

2. L'équation $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$ peut s'écrire $(e^x)^2 - 5e^x + 4 = 0$.

x est solution de l'équation proposée si et seulement si $X = e^x$ est solution de l'équation :

$X^2 - 5X + 4 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si :

$e^x = 1$ ou $e^x = 4$;

$x = 0$ ou $x = \ln 4$.

9. a) $\ln x = 2$ équivaut à : $x = e^2$.

b) $\ln x = 3$ équivaut à : $x = e^3$.

c) $\ln 3x = \frac{1}{2}$ équivaut à : $3x = e^{\frac{1}{2}}$; $x = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}}$.

d) $\ln 4x = 4$ équivaut à : $4x = e^4$; $x = \frac{1}{4}e^4$.

15. a) $e^x \geq 3$ équivaut à $x \geq \ln 3$ puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

D'où l'ensemble des solutions : $[\ln 3, +\infty[$.

b) Tout nombre réel est solution de l'inéquation $e^x \geq -1$ car, pour tout x réel, on a $e^x > 0$.

c) $e^{2x} \geq 5$ équivaut à $2x \geq \ln 5$, puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

D'où l'ensemble des solutions $\left[\frac{1}{2}\ln 5, +\infty\right[$.

17. a) • De $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x)^2 = +\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$.

• D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{2x} + e^x - 1) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) • De $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on déduit que : $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x)^2 = 0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$.

• D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{2x} + e^x) = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{2x} + e^x - 1) = -1$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

18. a) • $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

On ne peut donc pas conclure directement pour $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x)$.

On met x en facteur pour faire apparaître $\frac{e^x}{x}$ dont on connaît la limite en $+\infty$.

$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$.

De $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$, on déduit que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - x) = +\infty$.

23. **1.** a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-0{,}2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$,

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{-0{,}2x}) = 0$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 10$.

b) La courbe admet la droite d'équation $y = 10$ comme asymptote.

▶ *Voir un résultat de la page 61.*

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - x) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{1-x}) = 0$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 150$.

b) La courbe représentative de g admet la droite d'équation $y = 150$ comme asymptote.

29. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $f'(x) = 1e^x + xe^x$.

▶ *On utilise $(uv)' = \ldots$*

$f'(x) = e^x + xe^x$.

30. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x,

$f'(x) = \frac{e^x(1) - xe^x}{(e^x)^2}$.

▶ *On utilise $\left(\frac{u}{v}\right)' = \ldots$*

$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}}$, $f'(x) = \frac{1 - x}{e^x}$.

31. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$f'(x) = \frac{(e^x - 1)e^x - (e^x + 1)e^x}{(e^x - 1)^2}$,

$f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$.

32. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2 - (-e^{-x})$;

▶ *On utilise $(e^u)' = u'e^u$.*

$f'(x) = 2 + e^{-x}$.

40. F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{e^x}{5} + C$.

42. $f(x)$ ressemble à $u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = 2x + 3$ et $u'(x) = 2$; on écrit donc, pour tout nombre réel x,

$f(x) = \frac{1}{2}(2e^{2x+3})$.

D'où les primitives F de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par
$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$.

43. Pour tout nombre réel x,
$f(x)=e^{-x}=-(-e^{-x})$;
d'où les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par
$F(x)=-e^{-x}+C$.

44. $f(t)$ ressemble à $u'(t)e^{u(t)}$ avec $u(t)=0{,}05\,t$ et $u'(t)=0{,}05$; on écrit donc, pour tout nombre réel t, $f(t)=100(0{,}05\,e^{0{,}05t})$.
D'où les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par
$F(t)=100\,e^{0{,}05t}+C$.

50. 1. a) De $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{2}-1\right)=+\infty$,
on déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{x}{2}-1+e^x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

Donc la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-\frac{x}{2}-1$ est asymptote oblique de $\mathscr{C}$.

c) Pour tout x non nul, $x\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)=\frac{xe^x}{x}-\frac{1}{2}x-1$,

$x\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)=e^x-\frac{x}{2}-1$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}$

$\left(\text{puisque } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\right)$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

De $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)=+\infty$,
on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=e^x-\frac{1}{2}$.

b) Les inéquations suivantes sont équivalentes dans $\mathbb{R}$:
$f'(x)\geq 0$; $e^x-\frac{1}{2}\geq 0$; $e^x\geq\frac{1}{2}$; $x\geq\ln\frac{1}{2}$.

Lorsque $x>\ln\frac{1}{2}$, $f'(x)>0$; lorsque $x<\ln\frac{1}{2}$, $f'(x)<0$.

$f'\left(\ln\frac{1}{2}\right)=0$.

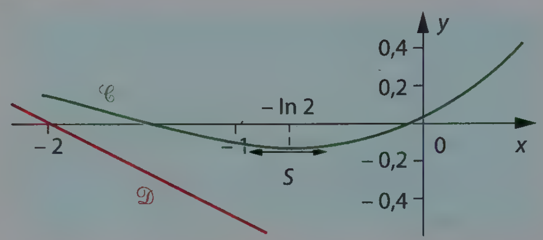
c) $f\left(\ln\frac{1}{2}\right)=e^{\ln 1/2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-1$,

(Pour tout $a>0$, $e^{\ln a}=a$), $f\left(\ln\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$.

d)

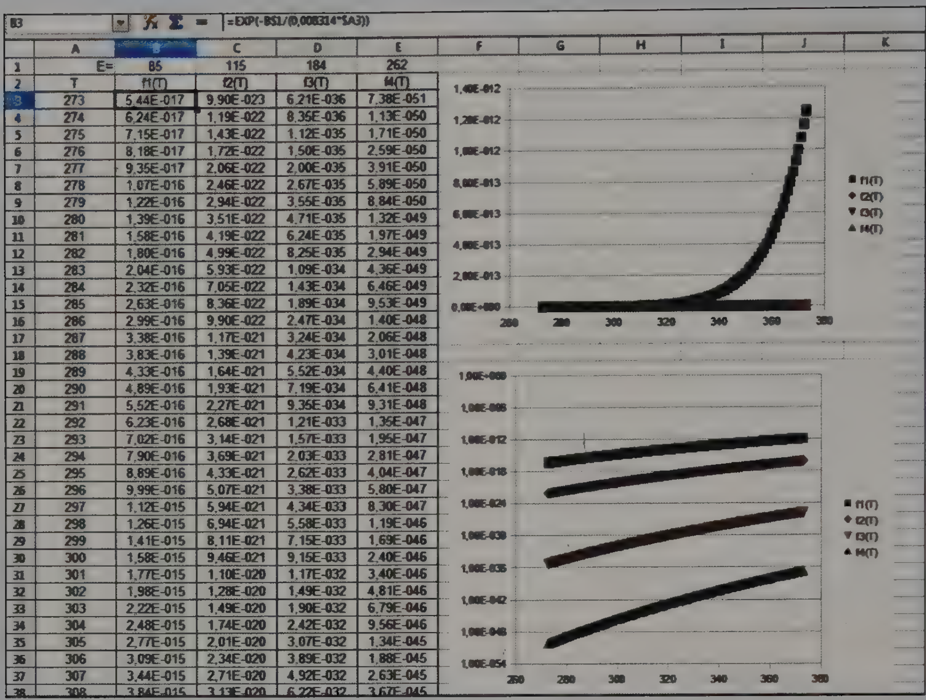
x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$	↗	$+\infty$

3.



58. a) Les équations suivantes sont équivalentes dans $]0,+\infty[$. $\log x=1$; $x=10^1$; $x=10$.
b) Les équations suivantes sont équivalentes dans $]0,+\infty[$ $\log x=-2$; $x=10^{-2}$; $x=0{,}01$.
c) Les équations suivantes sont équivalentes dans $]0,+\infty[$. $\log\left(\frac{x}{3}\right)=2$; $\frac{x}{3}=10^2$; $x=3\times10^{-2}$; $x=300$.
d) Les équations suivantes sont équivalentes dans $]0,+\infty[$. $\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)=50$; $\frac{I}{10^{-12}}=10^{50}$; $I=10^{50}\times10^{-12}$; $I=10^{38}$.

61. Loi d'Arrhenius en cinétique chimique avec le tableur
1. On peut entrer en B3 la formule :
=EXP(-B$1/(0,008314*$A3)).
On obtient la feuille de calcul ci-dessous.
2. Lorsque la température T augmente, le coefficient de vitesse k augmente.
3. Sur un graphique à échelles « standard » (arithmétique), on ne parvient pas à distinguer les quatre courbes.
4. Le graphique obtenu montre que lorsque E augmente, le rapport $\frac{k}{A}$ diminue (très fortement).



	A	B	C	D	E
1	E=	85	115	184	262
2	T	f1(T)	f2(T)	f3(T)	f4(T)
3	273	5,44E-017	9,90E-023	6,21E-036	7,38E-051
4	274	6,24E-017	1,19E-022	8,35E-036	1,13E-050
5	275	7,15E-017	1,43E-022	1,12E-035	1,71E-050
6	276	8,18E-017	1,72E-022	1,50E-035	2,59E-050
7	277	9,35E-017	2,06E-022	2,00E-035	3,91E-050
8	278	1,07E-016	2,46E-022	2,67E-035	5,89E-050
9	279	1,22E-016	2,94E-022	3,55E-035	8,84E-050
10	280	1,39E-016	3,51E-022	4,71E-035	1,32E-049
11	281	1,58E-016	4,19E-022	6,24E-035	1,97E-049
12	282	1,80E-016	4,99E-022	8,25E-035	2,94E-049
13	283	2,04E-016	5,93E-022	1,09E-034	4,36E-049
14	284	2,32E-016	7,05E-022	1,43E-034	6,46E-049
15	285	2,63E-016	8,36E-022	1,89E-034	9,53E-049
16	286	2,99E-016	9,90E-022	2,47E-034	1,40E-048
17	287	3,38E-016	1,17E-021	3,24E-034	2,06E-048
18	288	3,83E-016	1,39E-021	4,23E-034	3,01E-048
19	289	4,33E-016	1,64E-021	5,52E-034	4,40E-048
20	290	4,89E-016	1,93E-021	7,19E-034	6,41E-048
21	291	5,52E-016	2,27E-021	9,35E-034	9,31E-048
22	292	6,23E-016	2,68E-021	1,21E-033	1,35E-047
23	293	7,02E-016	3,14E-021	1,57E-033	1,95E-047
24	294	7,90E-016	3,69E-021	2,03E-033	2,81E-047
25	295	8,89E-016	4,33E-021	2,62E-033	4,04E-047
26	296	9,99E-016	5,07E-021	3,38E-033	5,80E-047
27	297	1,12E-015	5,94E-021	4,34E-033	8,30E-047
28	298	1,26E-015	6,94E-021	5,58E-033	1,19E-046
29	299	1,41E-015	8,11E-021	7,15E-033	1,69E-046
30	300	1,58E-015	9,46E-021	9,15E-033	2,40E-046
31	301	1,77E-015	1,10E-020	1,17E-032	3,40E-046
32	302	1,98E-015	1,28E-020	1,49E-032	4,81E-046
33	303	2,22E-015	1,49E-020	1,90E-032	6,79E-046
34	304	2,48E-015	1,74E-020	2,42E-032	9,56E-046
35	305	2,77E-015	2,01E-020	3,07E-032	1,34E-045
36	306	3,09E-015	2,34E-020	3,89E-032	1,88E-045
37	307	3,44E-015	2,71E-020	4,92E-032	2,63E-045
38	308	3,84E-015	3,13E-020	6,22E-032	3,67E-045

63. Loi de Gumbel et prévision des catastrophes naturelles

A. 1. Puisque $b > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-a}{b} = -\infty$. La sortie 4 indique que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}} = 0$.

2. Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, on en déduit que la courbe représentative de la fonction F admet la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) comme asymptote en $-\infty$.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, on en déduit que la courbe représentative de la fonction F admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote en $+\infty$.

3. Les valeurs prises par la fonction exponentielle étant toujours positives, on déduit de la sortie n° 5 que, pour tout réel x, $F'(x) > 0$.

La fonction F est donc croissante sur $]-\infty, +\infty[$.

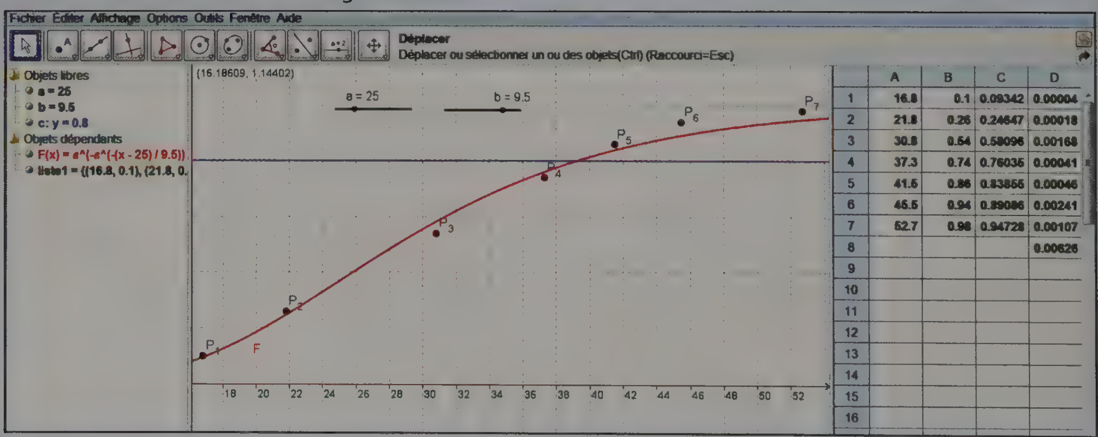
B. 1. Il semble, « à l'œil », que l'on puisse prendre $a \approx 25$ et $b \approx 9$.

2. On entre en C1 la formule =EXP(-EXP(-(A1-a)/b) que l'on recopie vers le bas.

On entre en D1 la formule =(B1-C1)^2 que l'on recopie vers le bas.

La somme des écarts au carré est donnée par la formule =SOMME[D1 :D7].

On obtient les résultats montrés sur l'image suivante.



	A	B	C	D
1	16.8	0.1	0.09342	0.00004
2	21.8	0.26	0.24647	0.00018
3	30.8	0.54	0.58096	0.00168
4	37.3	0.74	0.76035	0.00041
5	41.6	0.86	0.83855	0.00046
6	45.5	0.94	0.89086	0.00241
7	52.7	0.98	0.94728	0.00107
8				0.00626
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				

La position optimale des curseurs est obtenue pour $a = 25$ et $b = 9{,}5$.

3. Par lecture graphique, on obtient $0{,}8 \approx F(39)$.

On a $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\frac{x-25}{9,5}}} = 0{,}8$ lorsque $-\mathrm{e}^{-\frac{x-25}{9,5}} = \ln(0{,}8)$ c'est-à-dire $-\dfrac{x-25}{9{,}5} = \ln(-\ln(0{,}8))$.

On en déduit $x = -9{,}5 \ln(-\ln(9{,}5)) + 25 \approx 39{,}25$ m^3/s.

65. **Fonctions puissances et contraste des images numériques avec GeoGebra**

1. Pour $0 < \gamma < 1$, la concavité de la courbe est tournée vers le bas.
Pour $\gamma > 1$, la concavité de la courbe est tournée vers le haut.
Image d'écran pour $\gamma = 0{,}3$:

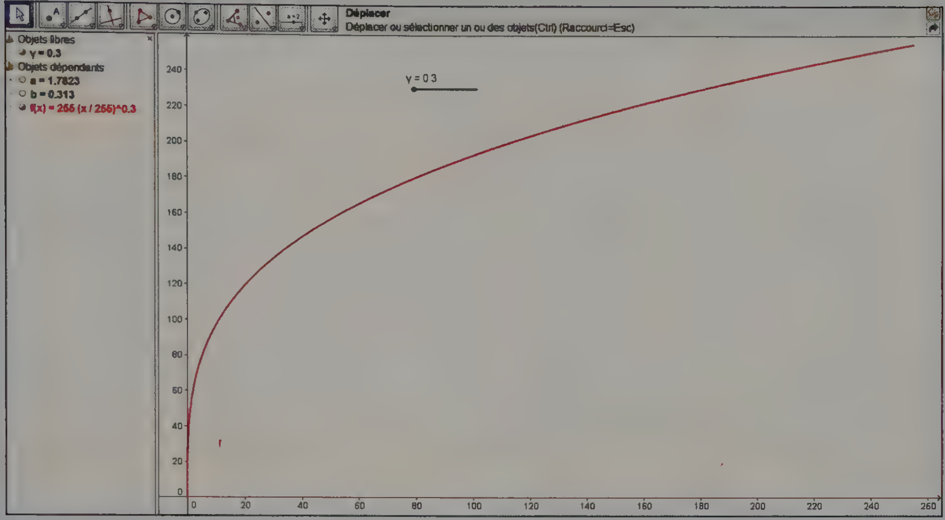
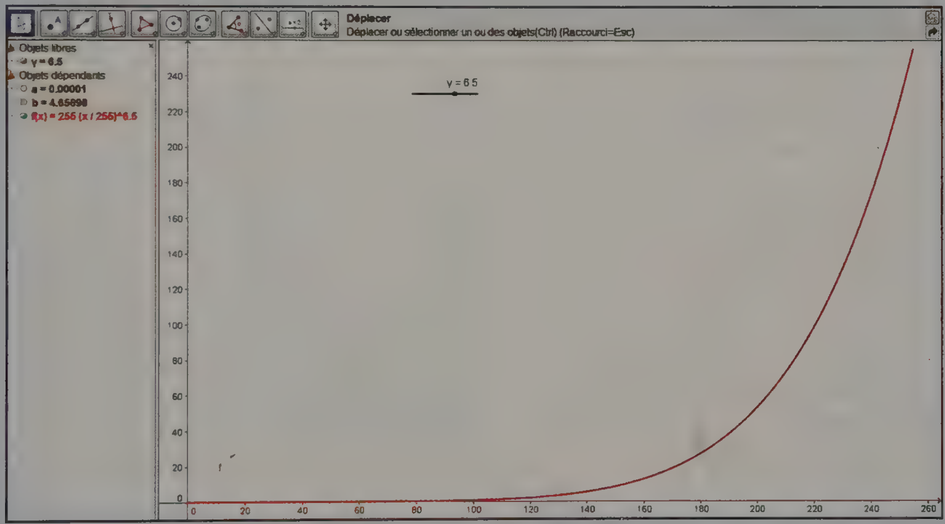


Image d'écran pour $\gamma = 6{,}5$:



2. a) Il suffit de saisir $f'(20)$ et $f'(240)$.
Pour $\gamma = 0{,}3$, on obtient : $f'(20) \approx 1{,}78$ et $f'(240) \approx 0{,}31$.
Pour $\gamma = 6{,}5$, on obtient : $f'(20) \approx 0$ et $f'(240) \approx 4{,}66$.

b) Pour $\gamma = 0{,}3$, la variation d'intensité (donnée par la dérivée) est importante pour les couleurs claires (proches de 0) et plus faible pour les couleurs sombres (proches de 255).
Pour $\gamma = 6{,}5$, la variation d'intensité (donnée par la dérivée) est importante pour les couleurs sombres (proches de 255) et faible pour les couleurs claires (proches de 0).

Faites le point

QCM

68.
1. Réponse c). **2.** Réponse b).
3. Réponse b) ou Réponse c). **4.** Réponse c).

69.
1. Réponse b). **2.** Réponse b). **3.** Réponse c).

70.
1. Réponse c). **2.** Réponse c). **3.** Réponse b).

71.
1. Réponse b). **2.** Réponse a).

Travaux pratiques TICE

TP1 Longueur d'une chaînette

A. – On obtient le résultat désiré en positionnant le curseur à $\lambda = 2$.

– On recherche λ tel que $f(0) = 0{,}5$ c'est-à-dire $\dfrac{2}{2\lambda} = 0{,}5$ ou encore $\dfrac{1}{\lambda} = 0{,}5$. On retrouve $\lambda = 2$.

B. 1. GeoGebra affiche (voir l'avant-dernière ligne de l'image d'écran ci-dessous) :

$f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - 2e^{-2x}}{4}$. On obtient le résultat demandé en simplifiant par 2.

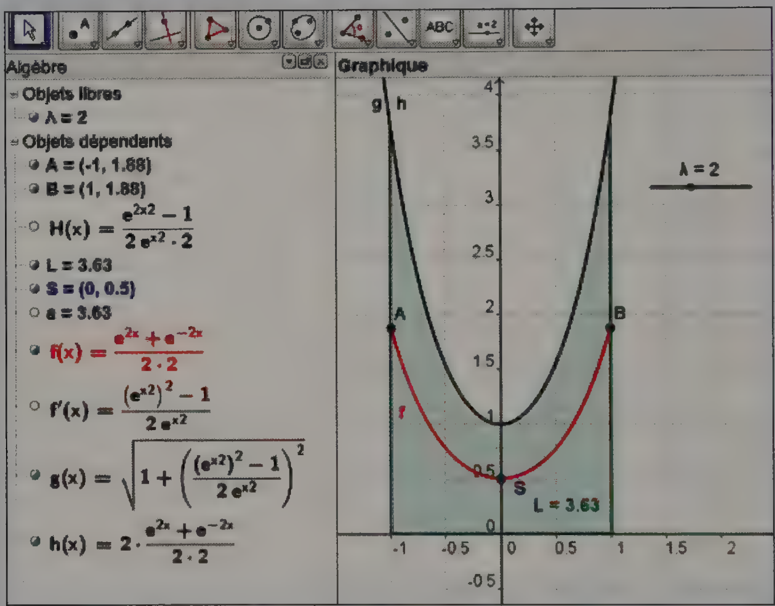
2. Les courbes représentatives de g et de h se superposent (voir les courbes en noir sur l'image ci-dessous).

3. a. On entre dans la barre de saisie L=Intégrale[h,-1,1] ou L=Intégrale[g,-1,1] et on obtient $L \approx 3{,}63$. L'aire correspondante (sous la courbe de $g = h$) est colorée (en bleu clair ci-dessous).

b. On a $L = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} dx = \frac{1}{2} \times \int_{-1}^{1} e^{2x} + e^{-2x} dx = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^{1}$

d'où $L = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}e^{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2} - \dfrac{1}{2}e^{-2} + \dfrac{1}{2}e^{2}\right) = \dfrac{1}{2} \times (e^{2} - e^{-2})$.

4. L'instruction Longueur [f,A,B] donne directement (variable notée a sur l'image d'écran ci-dessous) une longueur approchée de la chaînette.



Exercices corrigés

1. Soit f la fonction définie sur [2, 3] par $f(x) = x - 2$.

Une primitive de f est définie sur [2, 3] par :

$F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$. $I = F(3) - F(2)$.

$F(2) = -2$ et $F(3) = -1{,}5$,

d'où $I = -1{,}5 - (-2)$; $I = 0{,}5$.

2. Soit f la fonction définie sur [0, 3] par $f(x) = 2x^2 - x + 3$.

Une primitive de f est définie sur [0, 3] par

$F(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3x$. $I = F(3) - F(0)$.

$F(3) = 22{,}5$ et $F(0) = 0$, d'où $I = 22{,}5$.

3. Soit f la fonction définie sur [0, 1] par $f(x) = x^3 + x^2 + x$.

Une primitive de f est définie sur [−1, 1] par

$F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2$.

$I = F(1) - F(0)$. $F(1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{12}$.

$F(0) = 0$, d'où $I = \dfrac{13}{12}$.

11. $I = \left[\dfrac{1}{2}(x^2 + x + 1)^2\right]_{1}^{2}$, $I = 23$.

► *On peut utiliser : $f = u'u$ a pour primitive $F = \dfrac{1}{2}u^2$.*

13. $I=\frac{1}{2}\int_0^1 2(2x+1)^3\,\mathrm{d}x$, $I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(2x+1)^4\right]_0^1$,

▶ *On a mis la fonction à intégrer sous la forme $u'u^3$.*

$I=10$.

14. $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x$, $I=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2x+1}\right]_1^2$, $I=\frac{1}{15}$.

▶ *On a mis la fonction à primitiver sous la forme $\frac{u'}{u^2}$.*

17. $I=\left[\frac{1}{2}x^2+\ln x\right]_1^3$, $I=\frac{9}{2}+\ln 3-\left(\frac{1}{2}+\ln 1\right)$,

$I=\frac{9}{2}+\ln 3-\frac{1}{2}$, $I=4+\ln 3$.

20. $I=\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{5}\frac{2}{2t-1}\,\mathrm{d}t$.

▶ *On a mis la fonction à primitiver sous la forme $\frac{u'}{u}$, où $u>0$, dont une primitive est $\ln u$.*

$I=\frac{1}{2}\left[\ln(2t-1)\right]_{\frac{3}{2}}^{5}$; $I=\frac{1}{2}(\ln 9-\ln 2)$.

25. $I=\left[2e^x+x\right]_{-1}^{1}$, $I=(2e+1)-(2e^{-1}-1)$, $I=2(e-e^{-1}+1)$.

28. a) $I=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}$.

b) $J=\left[-2e^{-\frac{1}{2}t+1}\right]_0^1=-2e^{\frac{1}{2}}+2e$.

32. $I=\left[-\frac{1}{3}\cos 3x+\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}$,

$I=\left[-\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}\right]-\left[-\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}\right]$,

$I=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{2}$.

40. **1.** Pour tout x de $]0,+\infty[$, $F'(x)=1\ln x+x\left(\frac{1}{x}\right)-1$.
$F'(x)=\ln x$.

2. $I=\left[x\ln x-1\right]_1^e=(e\ln e-1)-(1\ln 1-1)$;
$I=e-1+1$; $I=e$.

47. **1.** a) $f(2)=0$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$; $f'(2)=-\frac{3}{2}$; $f'(5)=0$.

b) $[-3,-2]\cup[2,8]$ et $\left[-\frac{1}{2},5\right]$.

2. a) A est l'aire de la partie du plan ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $-2\leq x\leq 0$ et $0\leq y\leq f(x)$.
b) $2\leq A\leq 5$. A est supérieure à deux carreaux et inférieure à cinq carreaux.

49. **1.** Pour tout x de $\left[-\frac{3}{2},-1\right[$, $f(x)>0$.
$f(-1)=0$.
Pour tout x de $]-1,1[$, $f(x)>0$.
$f(1)=0$.
Pour tout x de $\left]1,\frac{3}{2}\right]$, $f(x)<0$.

2. f est positive ou nulle sur $[-1, 1]$.
L'aire cherchée est donc, en unités d'aire, $\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$.
L'unité d'aire vaut $2\times 2=4$ cm^2.
D'où l'aire cherchée est, en cm^2,

$A=4\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$,

$A=4\int_{-1}^{1}(-x^3-x^2+x+1)\,\mathrm{d}x$,

$A=4\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}$,

$A=\frac{16}{3}$ cm^2.

58. **Vitesses probables du vent**

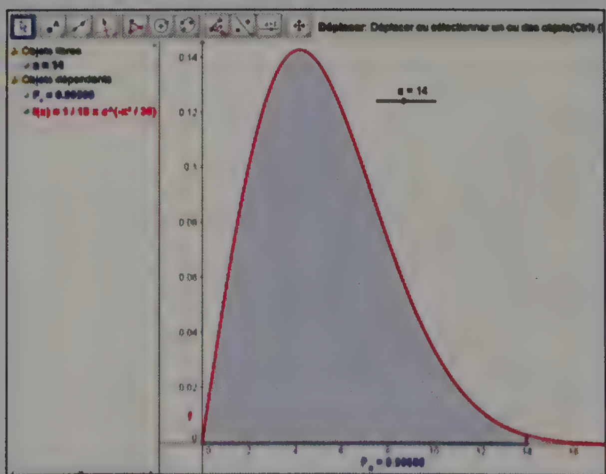
1. a) On peut entrer f(x)=Fonction[(1/18)*x*exp(-x²/36),0,30] puis régler l'échelle des axes pour optimiser l'affichage de la courbe représentative de f.

b) En déplaçant le curseur, on obtient :

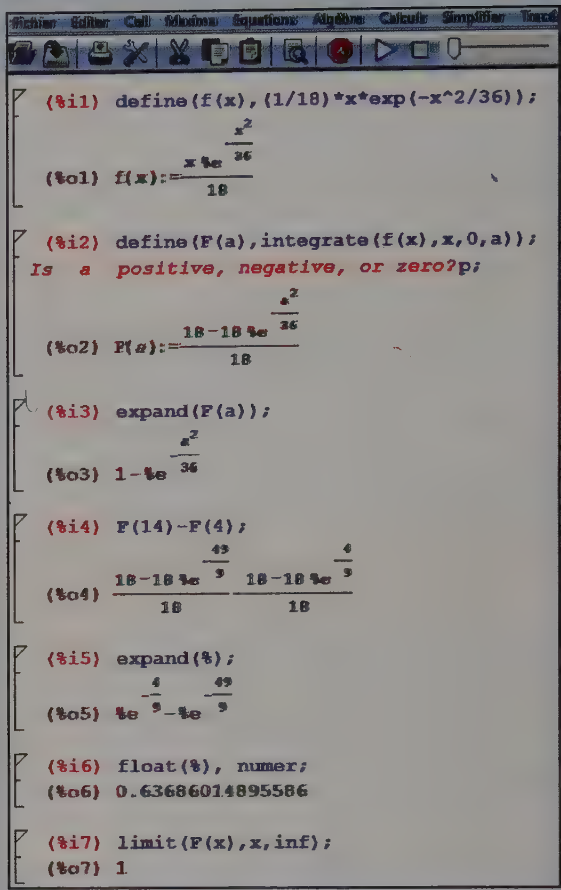
– La probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse du vent soit inférieure à 4 m/s est environ 0,359.

– La probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse du vent soit inférieure à 14 m/s est environ 0,996.

On en déduit que la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse du vent soit comprise entre 4 m/s et 14 m/s est environ $0{,}996-0{,}359\approx 0{,}64$.



2. On peut mener les calculs avec Maxima comme indiqué sur l'image d'écran.
On obtient les résultats suivant.



a) $F(a)=1-e^{-\frac{a^2}{36}}$.

b) $F(14)-F(4)=e^{-\frac{4}{9}}-e^{-\frac{49}{9}}$.
$F(14)-F(4)\approx 0{,}637$.

c) $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a)=1$.

Ce résultat était attendu puisqu'il signifie que la probabilité que le vent ait une vitesse « inférieure » à l'infini est 1 (événement certain).

Faites le point

QCM

59.
1. Réponse b). **2.** Réponse c).
3. Réponse b). **4.** Réponse b).
5. Réponse c). **6.** Réponse a).

60.
1. Réponse a). **2.** Réponse c).

61.
1. Réponse c). **2.** Réponse c).

Exercices pour le baccalauréat

66. 1. Pour tout x de $]-1,+\infty[$,
$f'(x)=a-\dfrac{4}{(x+1)^2}$.

2. On lit dans le tableau de variation que $f(1)=2$, d'où :
$a+b+\dfrac{4}{2}=2,\ a+b=0$.
On a, d'autre part, $f'(1)=0$, d'où :
$a-\dfrac{4}{4}=0,\ a-1=0,\ a=1$.
En remplaçant a par 1 dans $a+b=0$,
on obtient $1+b=0,\ b=-1$.

Pour tout x de $]-1,+\infty[$, $f(x)=x-1+\dfrac{4}{x+1}$.

3. De $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x+1}=0$,
on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\dfrac{4}{x+1}\right)=+\infty$,
c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

4. Pour tout x de $]-1,+\infty[$, $f(x)=x-1+\dfrac{4}{x+1}$,
avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x+1}=0$. D'où la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x-1$ est asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

5. $I=\displaystyle\int_1^2\frac{4}{x+1}\,dx,\ I=\left[4\ln(x+1)\right]_1^2$,
$I=4\ln 3-4\ln 2$.

Pour tout x de $[1, 2]$, $\dfrac{4}{x+1}>0$, c'est-à-dire $f(x)-(x-1)>0$.
Donc, sur $[1, 2]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la droite $\mathscr{D}$.

▶ *Vérifiez-le sur l'écran de votre calculatrice.*

L'intégrale est donc l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

70. **A. 1.** $f(-2) = 0$ et $f'(-1) = 0$.

2. (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$ avec

$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, $y_B = 0$, $y_A = 2$, $x_B = 2$, $x_A = 0$,

d'où $m = \dfrac{0-2}{2-0} = -1$.

Le point A(0, 2) est sur (AB) d'où $2 = m \times 0 + p$, $p = 2$.

Une équation de (AB) est $y = -x + 2$.

3. $f'(0) = -1$ (le coefficient directeur de (AB)).

B. 1. a) • $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) • Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$ donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On en déduit que l'axe des abscisses (la droite d'équation $y = 0$) est asymptote en $+\infty$.

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1e^{-x} + (x+2)(-e^{-x})$,

$f'(x) = e^{-x} - (x+2)e^{-x} = [1 - (x+2)]e^{-x} = (-x-1)e^{-x}$.

3. Une équation de la tangente est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$,

$y = -x + 2$.

On retrouve le résultat du **A. 2.**

C. 1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F'(x) = -e^{-x} + (-x-3)(-e^{-x})$,

$F'(x) = [-1 + x + 3]e^{-x} = (x+2)e^{-x} = f(x)$.

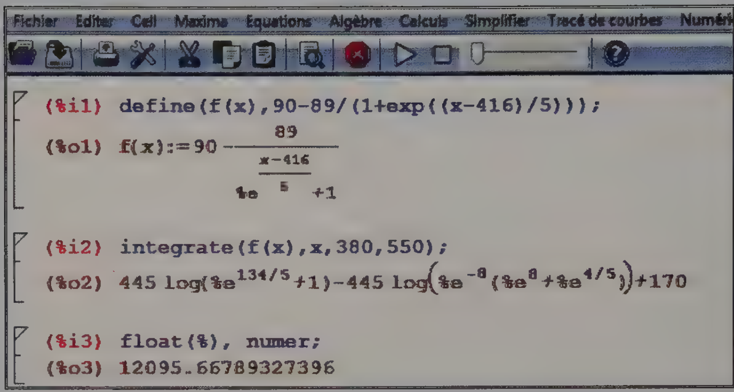
$F' = f$, F est une primitive de f.

2. L'aire est $\mathcal{A} = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx$, (puisque $f(x) > 0$ sur $[-2, 0]$).

$\mathcal{A} = F(0) - F(-2) = -3e^0 - (-e^2) = e^2 - 3$. $\mathcal{A} \approx 4{,}39$.

75. **Verres photochromiques**

On peut mener les calculs selon l'image d'écran suivante.



Le logiciel Maxima désigne le logarithme népérien par log au lieu de ln.

On obtient, en simplifiant l'écriture de la sortie n° 2 :

$I = 445 \ln(e^{26{,}8} + 1) - 445 \ln(1 + e^{-7{,}2}) + 170$.

$I \approx 12\,095{,}67$.

CHAPITRE 7

Travaux pratiques TICE

TP1 Posologie d'un médicament

A. 1. On conjecture que la limite en $+\infty$ vaut 15.

2. a) L'équation $y' + \dfrac{c}{V}y = \dfrac{d}{V}$ est du type $y' + ay = b$ avec $a = \dfrac{c}{V}$ et $b = \dfrac{d}{V}$ dont les solutions sont du type $t \mapsto ke^{-at} + \dfrac{b}{a}$. On en déduit que l'ensemble des solutions, définies sur $[0, +\infty[$, de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions $t \mapsto ke^{-\frac{c}{V}t} + \dfrac{d}{c}$ où k est une constante réelle quelconque.

b) On a $f(0) = k + \dfrac{d}{c} = 0$ d'où $k = -\dfrac{d}{c}$. Donc $f(t) = -\dfrac{d}{c}e^{-\frac{c}{V}t} + \dfrac{d}{c} = \dfrac{d}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{V}t}\right)$.

On vérifie cette expression en saisissant f(x)=Fonction[(d/c)*(1-exp(-(c/V)*x)),0,100] dans GeoGebra.

3. Les constantes c et V sont positives donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{c}{V}t} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \dfrac{d}{c}$. Ceci confirme la conjecture du **1.**, où $\dfrac{d}{c} = \dfrac{108}{7{,}2} = 15$.

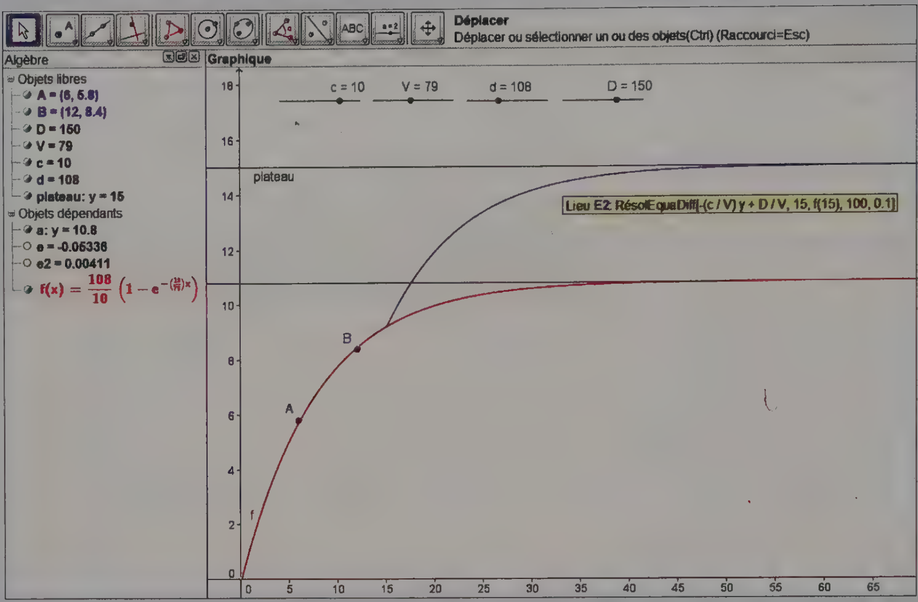
B. 1. a) Lorsque c augmente, l'élimination est plus importante et la limite de f en $+\infty$ diminue (on a vu que cette limite vaut $\dfrac{d}{c}$).

b) On obtient $c \approx 9{,}5$.

2. On saisit RésolEquaDiff[-(c/V)*y+D/V,12,f(12),100,0.1] dans GeoGebra pour obtenir le tracé de la courbe représentative de g.

On obtient $D = 15 \times 9{,}4 = 141$.

3. a) On obtient $c \approx 10$ et $V \approx 79$.



b) On en déduit $D = 15 \times 10 = 150$.

TP2 Sédimentation et traitement des eaux

Avec le logiciel Maxima, on peut effectuer les requêtes suivantes.

1. Résolution de l'équation différentielle.

```
(%i1) ode2(0.00353*'diff(y,t)+0.00786*y=0.02156, y, t);
rat: replaced -0.02156 by -539/25000 = -0.02156
rat: replaced 0.00786 by 393/50000 = 0.00786
rat: replaced 0.00353 by 353/100000 = 0.00353
rat: replaced -0.02156 by -539/25000 = -0.02156
rat: replaced 0.00786 by 393/50000 = 0.00786
rat: replaced -0.02156 by -539/25000 = -0.02156
rat: replaced 0.00786 by 393/50000 = 0.00786
rat: replaced 0.00353 by 353/100000 = 0.00353
```

(%o1) $y = \%e^{-\frac{786\,t}{353}}\left(\frac{1078\,\%e^{\frac{786\,t}{353}}}{393} + \%c\right)$

```
(%i2) ic1(%, t=0, y=0);
```

(%o2) $y = \frac{\%e^{-\frac{786\,t}{353}}\left(1078\,\%e^{\frac{786\,t}{353}} - 1078\right)}{393}$

```
(%i3) define(v(t),rhs(%));
```

(%o3) $v(t) := \frac{\%e^{-\frac{786\,t}{353}}\left(1078\,\%e^{\frac{786\,t}{353}} - 1078\right)}{393}$

```
(%i4) expand(v(t));
```

(%o4) $\frac{1078}{393} - \frac{1078\,\%e^{-\frac{786\,t}{353}}}{393}$

```
(%i5) float(1078/393);
(%o5) 2.743002544529262

(%i6) float(786/353);
(%o6) 2.226628895184136
```

2. et **3.** Vitesse limite et durée nécessaire pour atteindre le fond.

```
(%i7) limit(v(t),t,inf);
```
(%o7) $\dfrac{1078}{393}$

```
(%i8) define(h(T),integrate(v(t),t,0,T));
```
(%o8) $h(T):=\dfrac{\dfrac{\%e^{-\frac{786\,T}{353}}\left(423654\,T\,\%e^{\frac{786\,T}{353}}+190267\right)}{393}-\dfrac{190267}{393}}{393}$

```
(%i9) expand(h(T));
```
(%o9) $\dfrac{190267\,\%e^{-\frac{786\,T}{353}}}{154449}+\dfrac{1078\,T}{393}-\dfrac{190267}{154449}$

```
(%i10) find_root(h(T)=5, T, 1, 3);
(%o10) 2.269057714871094
```

La vitesse limite est d'environ 2,743 m/s.
La durée nécessaire pour atteindre le fond est d'environ 2,27 s.

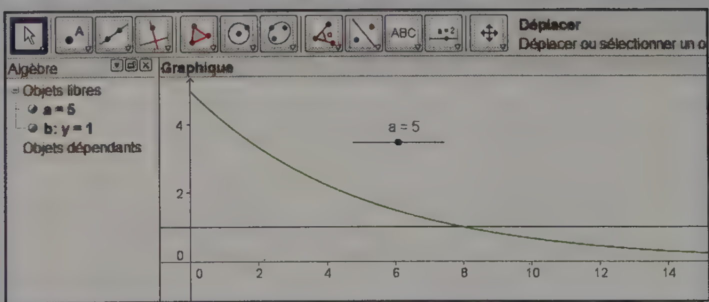
Exercices corrigés

1. 1. L'équation différentielle est de la forme $y'+ay=0$.
Toutes les solutions sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ke^{3x}$, où k est une constante réelle.
2. $f(0)=1$ équivaut à $ke^0=1$, donc $k=1$.
f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{3x}$.

2. 1. L'équation équivaut à $y'+\dfrac{1}{2}y=0$.
Toutes les solutions sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ke^{-0,5x}$ où k est une constante réelle.
2. $f(\ln 4)=1$ équivaut à $ke^{-0,5\ln 4}=1$.
$ke^{-0,5\times 2\ln 2}=1$,
$ke^{-\ln 2}=1$, $ke^{\ln\frac{1}{2}}=1$,
donc $\dfrac{1}{2}k=1$, $k=2$.
La solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2e^{-0,5x}$.

13. 1. L'équation différentielle (E) s'écrit : $y'+\dfrac{1}{2}y=\dfrac{1}{4}$.
C'est une équation de la forme $y'+ay=b$,
avec $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=\dfrac{1}{4}$.
Les solutions sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par
$$x\mapsto ke^{-\frac{1}{2}x}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=ke^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2},$$
où k est une constante réelle quelconque.
2. $\varphi(0)=0$ se traduit par :
$ke^0+\dfrac{1}{2}=0\,;\,k+\dfrac{1}{2}=0\,;\,k=-\dfrac{1}{2}$.
φ est définie par : $\varphi(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{2}$.

18. Fibre optique
1. La condition initiale $f(0)=a$ correspond au point $A(0, a)$, origine des courbes représentatives des solutions.
2. a) L'équation (E) s'écrit $y'+0,2y=0$.
D'après le cours, l'expression de $f(x)$ est $f(x)=C\,e^{-0,2x}$, où C est une constante réelle.
La condition initiale $f(0)=5$ donne $C=5$.
Donc, pour tout x de $[0,+\infty[$, $f(x)=5e^{-0,2x}$.
b) On résout l'équation $5e^{-0,2x}=1$. On a $e^{-0,2x}=\dfrac{1}{5}$ c'est-à-dire $-0,2x=\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$.
Ainsi $x=\dfrac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{-0,2}=\dfrac{\ln 5}{0,2}\approx 8,05$ km.
On peut contrôler graphiquement la réponse à l'aide de GeoGebra.



Faites le point

QCM

19. Réponse c).
20. Réponse a).
21. Réponse c).
22. Réponse c).

Exercices pour le baccalauréat

25. 1. L'équation (E) est de la forme $y'+ay=0$, avec $a=-2$.

Toutes les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=ke^{-ax}$, où k est une constante réelle quelconque, c'est-à-dire : $f(x)=ke^{2x}$, où k est une constante réelle quelconque.

2. a) $f(0)=1$ se traduit par :
$ke^0=1$, $e^0=1$, d'où $k=1$.
Pour tout réel x, $f(x)=e^{2x}$.

b) $g(0)=2$ se traduit par :
$ke^0=2$, $e^0=1$, d'où $k=2$.
Pour tout réel x, $g(x)=2e^{2x}$.

3. a) On complète la figure de l'annexe.

b) • Le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A est $f'(x_A)$, en désignant par x_A l'abscisse du point A.
Déterminons d'abord x_A.
$f(x_A)=2$ équivaut à : $e^{2x_A}=2$;

$\ln(e^{2x_A})=\ln 2$; $2x_A=\ln 2$; $x_A=\frac{1}{2}\ln 2$.

▶ *Pour tout réel a, $\ln e^a=a$.*

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=2e^{2x}$.

▶ *On utilise, $f=e^u$, $f'=u'e^u$.*

$$f'\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)=2(e^{\ln 2})=2\times 2=4.$$

▶ *Pour tout nombre réel $a>0$, $e^{\ln a}=a$.*

Le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A est 4.

• Le coefficient directeur de la tangente T' à la courbe $\mathscr{C}'$ au point B d'abscisse 0 est $g'(0)$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x)=2e^{2x}$,
donc $g'(x)=2(2e^{2x})$, $g'(x)=4e^{2x}$.
$g'(0)=4$.
Le coefficient directeur de la tangente T' à la courbe $\mathscr{C}'$ au point B est 4.

b) T et T' ont même coefficient directeur, donc sont parallèles.

38. A. 1. $h(t)=ke^{-0,01t}+2\,400$.

2. $v(t)=-2\,400e^{-0,01t}+2\,400$
ou $v(t)=2\,400(1-e^{-0,01t})$.

B. 1. De $\lim\limits_{t\to+\infty}(-0,01t)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, on déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-0,01t}=0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=2\,400$.

2. $v'(t)=24e^{-0,01t}$.

3.

t	0	$+\infty$
$v'(t)$	$+$	
$v(t)$	0 ↗	$2\,400$

4. $t=-\frac{1}{0,01}\ln 0,5$ ou $t=-100\ln 0,5$.

$t\approx 69,3$.

C. 1. La santé du bétail est menacée lorsque le volume de substance M dans le réservoir est $\frac{2}{100}\times 60=1,2$ m^3 ou 1 200 litres, donc lorsque $v(t)=1\,200$; d'après **B.4.**, la santé du bétail est menacée au bout de 69,3 heures après le début de la pollution.

2. 4 % du volume du réservoir représente 2 400 litres.
v est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=2\,400$.
Donc $v(t)$ ne peut pas dépasser 2 400.
Le volume de substance M ne peut pas dépasser 4 % du volume du réservoir.

42. Dynamique des populations

1. L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par :

$t\mapsto Ce^{-\frac{3t}{4}}+\frac{1}{500}$, où C est une constante réelle quelconque.

2. L'entrée (i%3) correspond à la recherche d'une solution particulière de (E) vérifiant la condition initiale $y(0)=\frac{1}{a}$.

3. La sortie (%o4) fournit $N(t)=\dfrac{500ae^{\frac{3t}{4}}}{ae^{\frac{3t}{4}}-a+500}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par $\dfrac{e^{-\frac{3t}{4}}}{a}$, on obtient :

$$N(t)=\frac{500}{1-e^{-\frac{3t}{4}}+\frac{500}{a}e^{-\frac{3t}{4}}}\quad \text{d'où}\quad N(t)=\frac{500}{1+\left(\frac{500}{a}-1\right)e^{-\frac{3t}{4}}}.$$

Travaux pratiques TICE

TP1 Demande de matériel de laboratoire

2. En arrondissant les coefficients à 10^{-2}, la droite d'ajustement de y en x donnée par la calculatrice a pour équation : $y = -4{,}55\,x + 883{,}11$.

3. Pour $x = 130$ €, la demande mensuelle peut être évaluée à :
$-4{,}55 \times 130 + 883{,}11 \approx 292$ unités.

TP2 Chiffre d'affaires d'un grand laboratoire

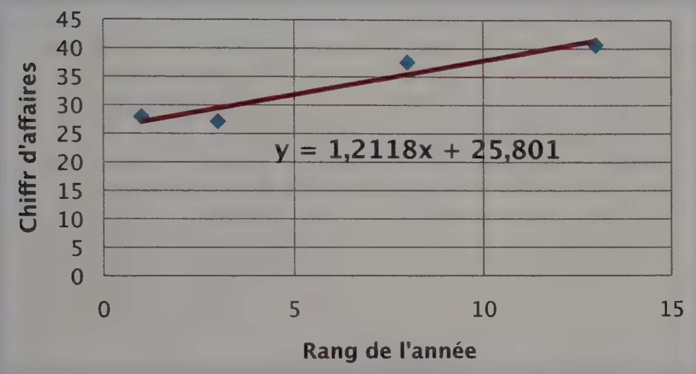
A. 1. $\overline{x}$ est calculé en B7 et $\overline{y}$ est calculé en C7.

2. La formule entrée en B9 est =C7-B8*B7 où C7 correspond à $\overline{y}$, B8 à a et B7 à $\overline{x}$.

3. Les écarts négatifs se soustraient aux écarts positifs, alors que les écarts au carré sont tous positifs.

4. On trouve $a = 1{,}2$.

B. 1. Le tableur donne comme équation : $y = 1{,}2118x + 25{,}801$.

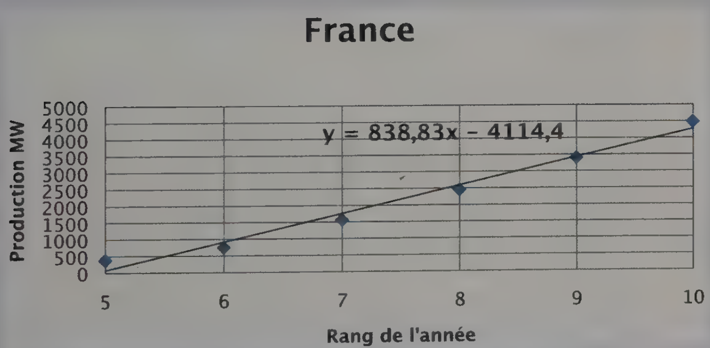


2. On a $1{,}2 \approx 1{,}2118$.

TP3 Capacité de production éolienne

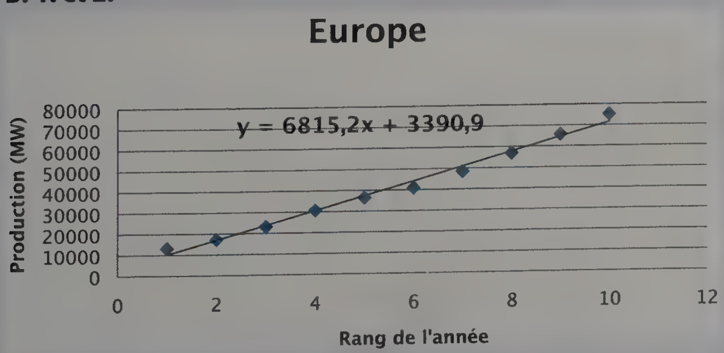
A. 1. Un ajustement affine a peu de sens ici car la forme du nuage de points n'est pas allongée le long d'une droite.

2.



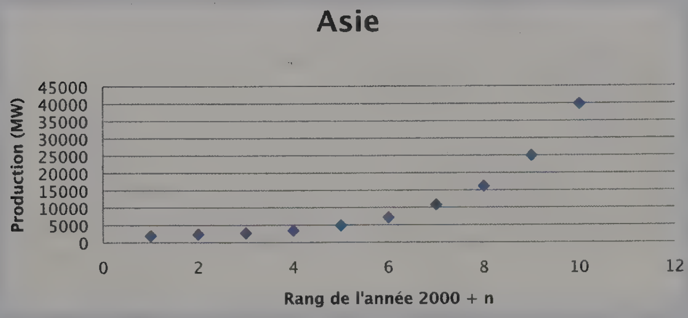
3. On peut estimer la production française en 2012 à :
$839 \times 12 - 4114 = 5954$ MW.

B. 1. et 2.



3. On peut estimer la production européenne en 2013 à :
$6815 \times 12 + 3391 = 85171$ MW.

4. et 5.



Un ajustement affine de la production en Asie n'est pas justifié car l'augmentation de la production s'accélère.

6. On peut estimer la production asiatique en 2012 à :
$973{,}77 \times 1{,}42^{12} \approx 65\,451$ MW.

Exercices corrigés

1. $y = 414{,}9x + 113\,911{,}1$.

2. $414{,}9 \times 6 + 113\,911{,}1 \approx 116\,401$. On peut estimer à 116 401 hectolitres le volume des ventes l'année de rang 6.

2. b) 15 milliards d'euros.

6. 2. On a G(6,5 ; 210).

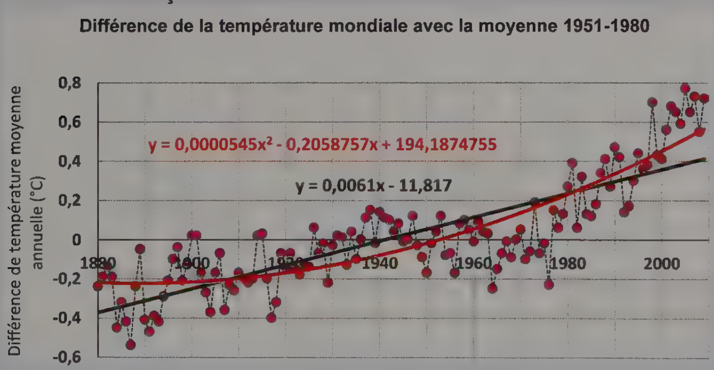
3. La calculatrice donne comme équation :
$y = 14{,}4x + 116{,}4$.

4. Il faut résoudre l'équation :

$14{,}4x + 116{,}4 > 350$; $14{,}4x > 233{,}6$; $x > \dfrac{233{,}6}{14{,}4}$.

Or $\dfrac{233{,}6}{14{,}4} \approx 16{,}2$, donc il faudra attendre le 17ᵉ mois soit le mois de mai de l'année suivante.

10. **Ça chauffe !**



1. L'équation affichée par le tableur est :
$y = 0{,}0061x - 11{,}817$.

2. L'ajustement qui semble préférable est l'ajustement par la parabole.

3. Estimation de l'écart de température globale en 2040 par rapport à la période 1951-1980,
– à l'aide de l'ajustement affine :
$0{,}0061 \times 2040 - 11{,}817 = 0{,}627$;
– à l'aide de l'ajustement parabolique :
$0{,}0000545 \times 2040^2 - 0{,}20588 \times 2040 + 149{,}19 = 1{,}002$.

Faites le point

QCM

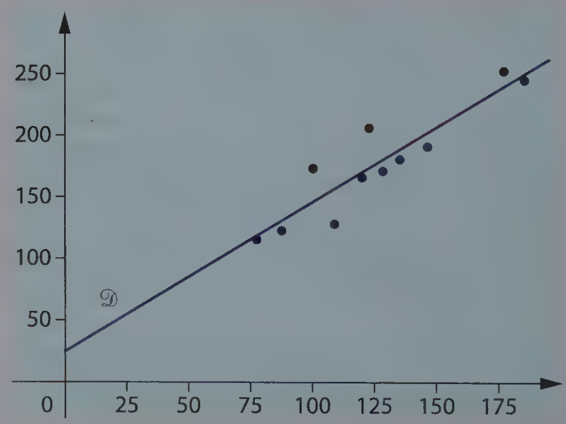
11. 1. Réponse b). **2.** Réponse c).
3. Réponse c).

12. 1. Réponse a). **2.** Réponse b).
3. Réponse b).

13. 1. Réponse b). **2.** Réponse a).
3. Réponse b).

Exercices pour le baccalauréat

15. 1.



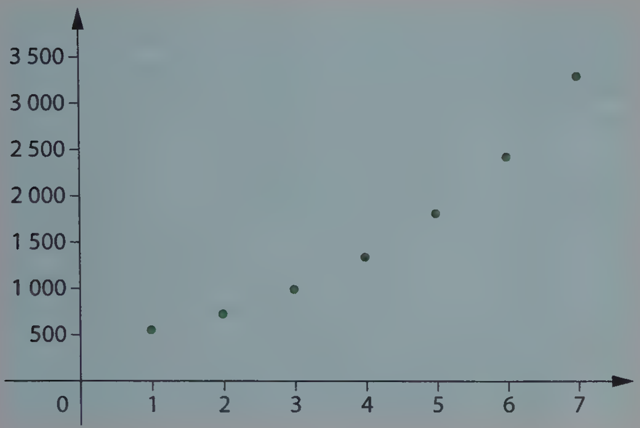
2. Avec une calculatrice, on obtient pour équation de la droite de régression $\mathscr{D}$
$y = 1{,}2x + 22{,}8$.

3. a) Le nombre de personnes occupant un poste non médical à temps plein devrait être
$y = 1{,}2 \times 35 + 22{,}8$, $\quad y = 64{,}8$.
La clinique devrait embaucher 65 personnes occupant un poste non médical à temps plein.

b) La clinique dispose en réalité de 60 postes.
La différence entre le nombre de postes théoriques et le nombre de poste réels est 5.

Cette différence $\frac{60-65}{65}=0{,}077$ soit une baisse de 7,7 % par rapport à la situation théorique.

18. 1.



On peut rejeter un modèle d'ajustement affine car les points ne semblent pas alignés et le nuage fait plutôt apparaître une croissance exponentielle.

2. Tableau

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i)$	6,29	6,58	6,89	7,19	7,5	7,79	8,1

3. Une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés est : $z = 0{,}3x + 6{,}0$ (les coefficients ont été arrondis à 10^{-1}).
On en déduit que $\ln y = 0{,}3x + 6{,}0$ d'où : $y = e^{0{,}3x+6{,}0}$.

4. a) Le nombre de consultations estimé à la dixième semaine est $e^{0{,}3\times10+6{,}0}$ soit 8 103 arrondi à l'unité.

b) Le quart de la population représente $\frac{50\,000}{4}=12\,500$ habitants et $e^{0{,}3x+6{,}0} > 12\,500$ équivaut successivement à : $\ln(e^{0{,}3x+6{,}0}) > \ln(12\,500)$ (car la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$)
$0{,}3x + 6{,}0 > \ln(12\,500)$;
$0{,}3x > \ln(12\,500) - 6{,}0$;
$x > \frac{\ln(12\,500)-6{,}0}{0{,}3}$.
$\frac{\ln(12\,500)-5{,}9}{0{,}3} \approx 11{,}4$ (arrondi au dixième) donc c'est à partir de la douzième semaine que le nombre de consultations dépassera le quart de la population.

5. Les résultats arrondis obtenus pour x entier compris entre 13 et 18 sont les suivants :

x	13	14	15	16	17
y	19 930	26 903	36 316	49 021	66 171

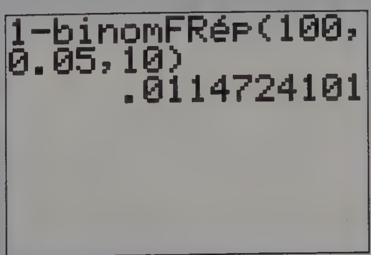
À partir de la 17^{e} semaine, il y aurait plus de consultations que d'habitants, donc le modèle choisi ne peut pas rester valable à long terme.

24. A. 2. $z = -0{,}29t + 4{,}67$
3. $c = 120 - e^{-0{,}29t+4{,}67}$.
4. $c = 118$ équivaut à $120 - e^{-0{,}29t+4{,}67} = 118$;
$2 = e^{-0{,}29t+4{,}67}$; $\ln 2 = -0{,}29t + 4{,}67$;
$0{,}29t = 4{,}67 - \ln 2$; $t = \frac{4{,}67-\ln 2}{0{,}29} \approx 13{,}7$
$c = 118$ au bout de 13,7 minutes, c'est-à-dire 13 minutes et 42 secondes.
B. 1. $f(t) = ke^{-0{,}3t} + 120$.
2. $c(t) = 120(1 - e^{-0{,}3t})$.

CHAPITRE 9

Travaux pratiques TICE

TP1 1. Chaque semaine, on est en présence de 100 épreuves aléatoires identiques et indépendantes pouvant, chacune, déboucher sur deux issues possibles : le bras du robot n° i connaît une panne (avec la probabilité $p = 0{,}05$) ou non.
La variable aléatoire X qui, à chaque semaine, associe le nombre de robots dont le bras a connu une panne suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}05$.
2. $E(X) = 5$. Sur un grand nombre de semaines, il y a en moyenne 5 pannes par semaine.
3. a. 0,081.
b. 0,118.
c. 0.011.



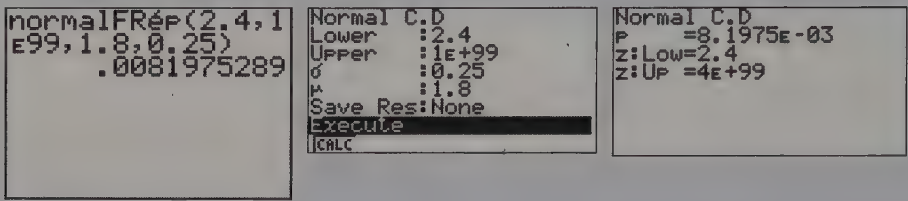
TP2 **1.** On a $F(0)=\int_0^0 f(x)\mathrm{d}x=0$

2. $P(T > t)$ correspond à la proportion (théorique) d'atomes non désintégrés au temps t.
$P(t \leq T \leq t + s)$ correspond à la proportion (théorique) d'atomes se désintégrant durant l'intervalle de temps $[t, t + s]$.
On a ensuite $P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t)$ et $P(t \leq T \leq t+s)=\int_t^{t+s} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{t+s} f(x)\mathrm{d}x-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=F(t+s)-F(t)$.

3. C'est la définition de la dérivée (on retrouve la notion de vitesse instantanée).

4. a. L'ensemble des fonctions F solutions de l'équation $\dfrac{F'(t)}{1-F(t)}=h$ est l'ensemble des fonctions du type $F(t) = ce^{-ht} + 1$ où c est un nombre réel quelconque.
b. Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = he^{-ht}$.
5. La variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre h.

TP3 **1.** $P(1{,}3 \leq X \leq 2{,}3) \approx 0{,}954$.
2. $P(X \leq 1{,}6) \approx 0{,}212$.
3. $P(X \geq 2{,}4) \approx 0{,}008$.
Pour ce dernier résultat, les images d'écran sont les suivantes.



TP4 **1. a.** La fonction f atteint son maximum pour $m=f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

b. La calculatrice, ou le tableur, fournit $P(Z \notin [-5, 5]) \approx 6.10^{-7}$.

c. Cette aire vaut environ une unité d'aire (puisque f est une densité de probabilité).
2. a. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[-5, 5]$.

b. La variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur $[0, m]$.

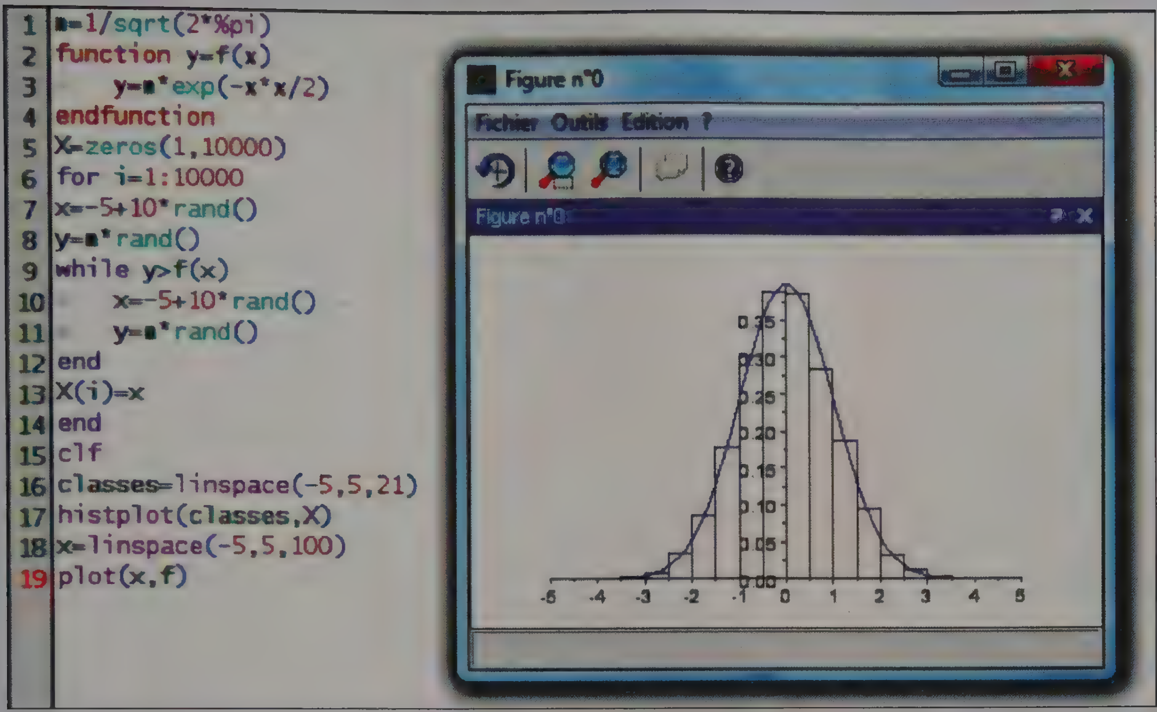
c. Une réalisation (x, y) correspond au choix d'un point au hasard dans le rectangle correspondant à $-5 \leq x \leq 5$ et $0 \leq y \leq m$.

d. Il y a rejet lorsque le point de coordonnées (x, y) est situé au-dessus de la courbe représentative de la fonction f.

e. La probabilité de rejet correspond à la proportion de l'aire du rectangle située au-dessus de la courbe représentative de f c'est-à-dire $\dfrac{10m-1}{10m}=1-\dfrac{\sqrt{2\pi}}{10}\approx 0{,}75$.

f. Sachant que x est accepté, la probabilité qu'il se situe entre a et b correspond au rapport de l'aire rouge, valant $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, à l'aire bleue, valant approximativement 1.

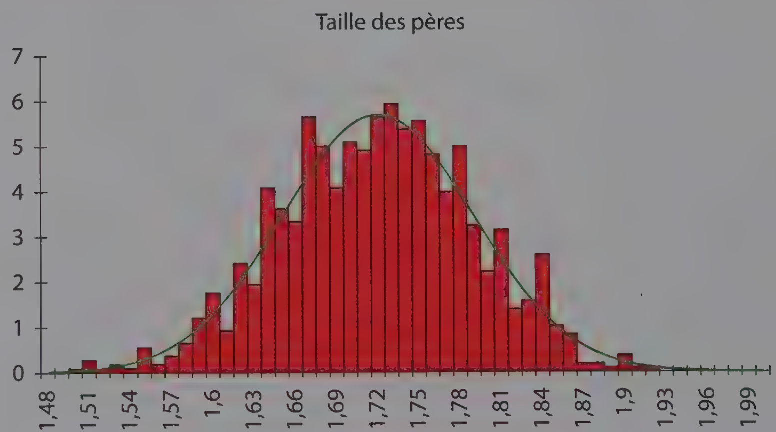
On en déduit que cette valeur x constitue une simulation d'une réalisation de la variable aléatoire Z.
3. Exemple de programme sur Scilab.



TP5 A. 1. Distribution des tailles des pères :

minimum : 1,50 m ; maximum : 1,92 m ; moyenne : 1,72 m ; écart-type : 0,07 m.

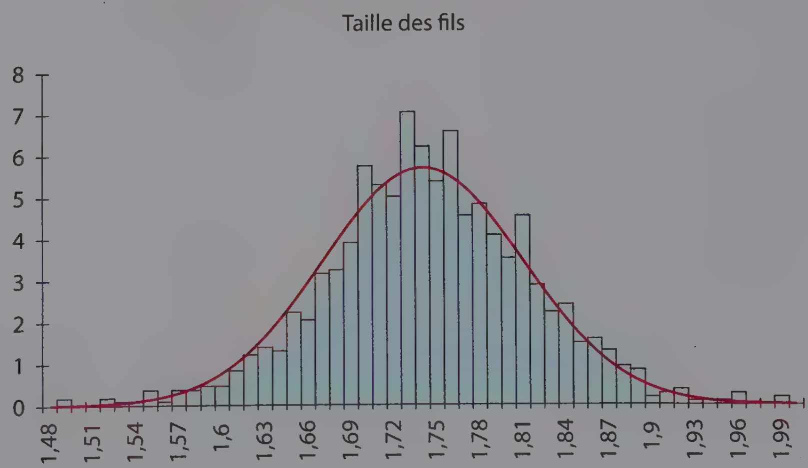
La distribution a un profil en forme de cloche. L'ajustement par la fonction de densité de la loi normale de moyenne 1,72 et d'écart type 0,07 paraît satisfaisant.



2. Distribution des tailles des fils :

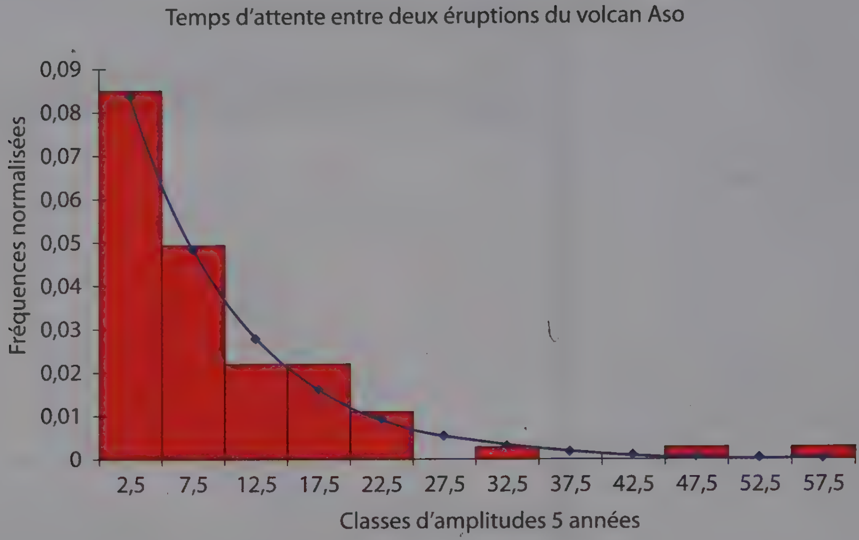
minimum : 1,49 m ; maximum : 1,99 m ; moyenne : 1,74 m ; écart-type : 0,07 m.

La distribution a un profil en forme de cloche. L'ajustement par la fonction de densité de la loi normale de moyenne 1,74 et d'écart type 0,07 paraît satisfaisant.



3. L'instruction =1-LOI.NORMALE(1,77;1,74;0,07;VRAI) affiche la valeur approchée 0,33.

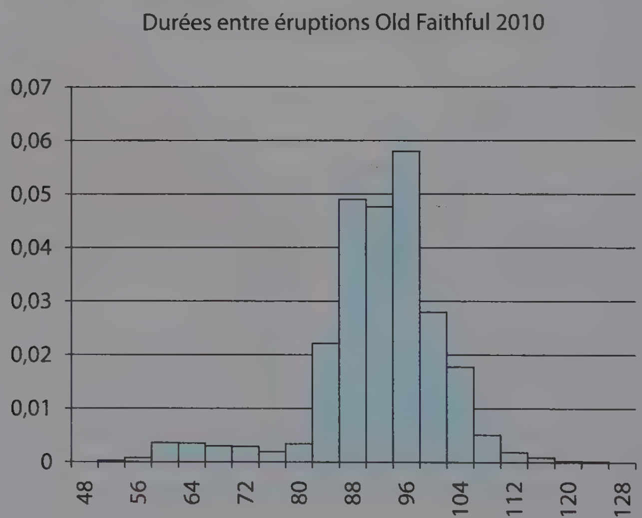
B. 1. Minimum : 1 an ; maximum : 56 ans ; moyenne : 9,28 ans ; écart-type : 10,25 ans.
Le profil de l'histogramme suggère une loi exponentielle. La moyenne étant 9,28, on peut prendre comme paramètre de la loi exponentielle $\lambda \approx 1 / 9{,}28 \approx 0{,}11$ en arrondissant à 10^{-2}.



2. On a $P(T \geq 56) = 1 - P(T < 56) = 1 - \int_0^{56} 0{,}11\,\mathrm{e}^{-0{,}11t}\,dt \approx 0{,}002$.

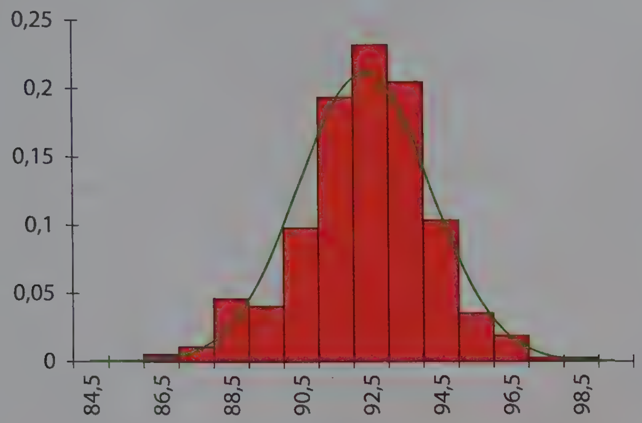
On peut aussi utiliser l'instruction =1-LOI.EXPONENTIELLE(56;0,11;VRAI).
Une telle période de repos est donc, dans ce modèle, assez exceptionnelle.

C. 1. La distribution des durées entre éruptions ne peut se modéliser par l'une des fonctions de densité figurant au programme de terminale en raison de la présence, non négligeable, de durées autour de 65 minutes, loin de la moyenne.



2. Distribution des moyennes journalière des durées entre éruptions :

Moyenne journalière des durées entre éruptions



La distribution a un profil en forme de cloche. L'ajustement par la fonction de densité de la loi normale de moyenne 92,35 et d'écart type 1,88 paraît satisfaisant.

TP6 1. a. La variable aléatoire F associe à tout échantillon aléatoire de taille 1 000 la fréquence des personnes en faveur du candidat sur cet échantillon.

b. Un intervalle de confiance de p au niveau de confiance de 95% est :

$$\left[f-1{,}96\sqrt{\frac{f(1-p)}{1000}}, f+1{,}96\sqrt{\frac{f(1-p)}{1000}}\right].$$

2. a. Non.

b. Si $p = 0{,}55$ appartient à l'intervalle de confiance, alors la formule affiche la valeur 1, sinon, elle affiche la valeur 0.

c. Environ 95%.

d. Oui.

Exercices corrigés

1. 1. La fonction de densité f de U est définie sur $[-2, 8]$ par $f(x)=\dfrac{1}{8-(-2)}=\dfrac{1}{10}=0{,}1$.

2. $P(U\in[0,3])=\dfrac{3}{10}=0{,}3$; $P(-1\leq U\leq 4)=\dfrac{4-1}{10}=\dfrac{3}{10}=0{,}3$;

$P(|U|\leq 1)=P(-1\leq U\leq 1)=\dfrac{1-(-1)}{10}=\dfrac{2}{10}=0{,}2$;

$P(U\leq 5)=\dfrac{5-(-2)}{10}=\dfrac{7}{10}=0{,}7$;

$P(U = 2) = 0$.

3. a) $E(U)=\dfrac{-2+8}{2}=3$.

b) Lorsque la variable aléatoire U prend successivement un très grand nombre de valeurs, la moyenne de celles-ci est voisine de 3.

4. $V(U)=\dfrac{(8-(-2))^2}{12}=\dfrac{100}{12}=\dfrac{25}{3}\approx 8{,}33$.

6. La fonction de densité f de X est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = 0{,}002e^{-0{,}002t}$.

Pour tout nombre réel x, on a $P(X\leq x)=\int_0^x 0{,}002e^{-0{,}002t}\,dt$,

$P(X\leq x)=[-e^{-0{,}002t}]_0^x$, donc $P(X\leq x)=-e^{-0{,}02x}+1$.

L'équation $P(X \leq x) = 0{,}3$ est équivalente à $1 - e^{-0{,}002x} = 0{,}3$ c'est-à-dire à $1 - 0{,}3 = e^{-0{,}002x}$,

$e^{-0{,}002x} = 0{,}7$

$-0{,}002x = \ln 0{,}7$ en prenant le logarithme de chaque membre de l'équation.

$x=-\dfrac{\ln 0{,}7}{0{,}002}\approx 178{,}34$.

9. b) $P(12 \leq X \leq 28) = P(X \leq 28) - P(X \leq 12)$

Donc $P(12 \leq X \leq 28) \approx 0{,}945 - 0{,}055$,

$P(12 \leq X \leq 28) \approx 0{,}890$.

10. 1. $P(X \leq 8) = 0{,}159$.

$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8)$ donc $P(X > 8) = 0{,}841$.

2. $P(9 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 9) = 0{,}533$.

$P(7 \leq X \leq 14) = P(X \leq 14) - P(X \leq 7) = 0{,}910$.

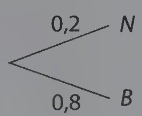
18. 1. La probabilité qu'un bouchon pris au hasard dans la production soit acceptable est $P(21{,}95 \leq X \leq 22{,}05) = P(X \leq 22{,}05) - P(X \leq 21{,}95)$.

2. $22{,}05 = 22 + 0{,}05 = m + 2\sigma$ et $21{,}95 = 22 - 0{,}05 = m - 2\sigma$.

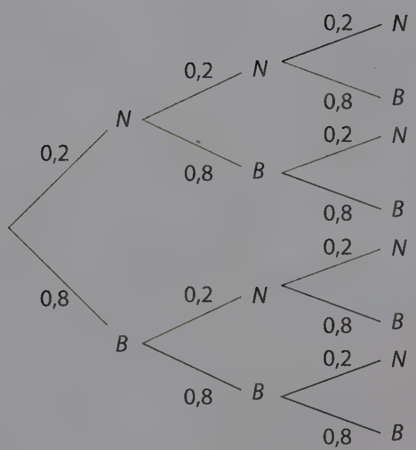
Donc $P(21{,}95 \leq X \leq 22{,}05) = P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma)$ où X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

D'après le cours, cette probabilité est égale à 0,95.

20. 1.



2. a)



b) $P(E) = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}008$.

c) Il y a trois chemins possibles pour réaliser l'événement F : (N, N, B) ; (N, B, N) et (B, N, N).
Donc $P(F) = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}2 + 0{,}8 \times 0{,}2 \times 0{,}2$,
$P(F) = 0{,}032 + 0{,}032 + 0{,}032 = 0{,}096$.

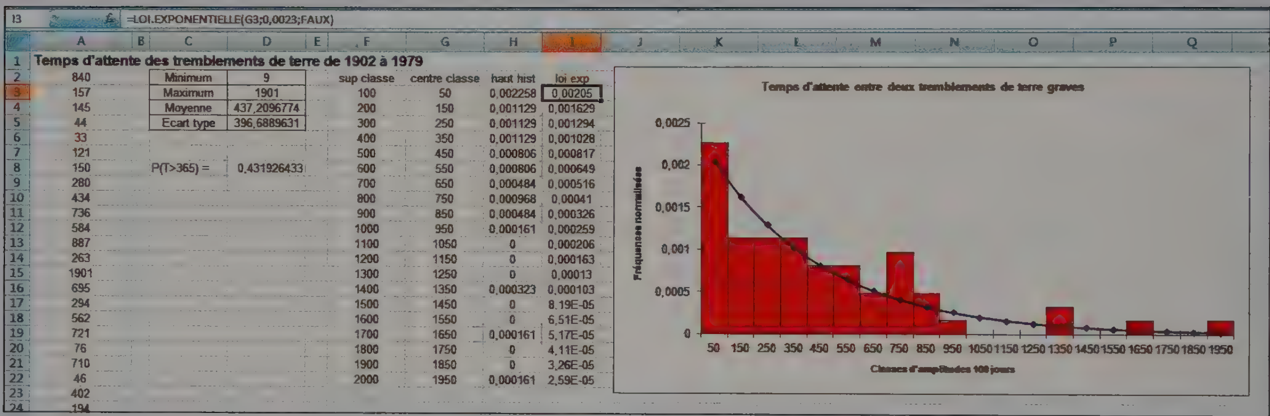
25. 1. a) $P(X \leq 40) \approx 0{,}96$.
$P(X \leq 29) \approx 0{,}05$.
$P(30 \leq X \leq 40) = P(X \leq 40) - P(X \leq 29) \approx 0{,}91$.

2. a) La loi normale approchant une loi binomiale a même espérance et même écart type.
$\mu = np$, donc ici $\mu = 50 \times 0{,}7 = 35$
$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, donc ici $\sigma = \sqrt{50 \times 0{,}7 \times 0{,}3}$
$\sigma = \sqrt{10{,}5} \approx 3{,}24$.

b) $P(30 \leq Y \leq 40) = P(Y \leq 40) - P(Y \leq 30) \approx 0{,}88$.

c) Le résultat 0,91 obtenu avec la loi binomiale et le résultat 0,88 obtenu avec la loi normale sont proches.

28. 1. On prend comme paramètre de la loi exponentielle, l'inverse de la moyenne observée (de sorte à avoir une espérance égale à la moyenne observée).
L'ajustement obtenu est relativement convenable.



	A	C	D	F	G	H	I
1	Temps d'attente des tremblements de terre de 1902 à 1979						
2	840	Minimum	9	sup classe	centre classe	haut hist	loi exp
3	157	Maximum	1901	100	50	0,002258	0,00205
4	145	Moyenne	437,2096774	200	150	0,001129	0,001629
5	44	Ecart type	396,6889631	300	250	0,001129	0,001294
6	33			400	350	0,001129	0,001028
7	121			500	450	0,000806	0,000817
8	150	P(T>365) =	0,431926433	600	550	0,000806	0,000649
9	280			700	650	0,000484	0,000516
10	434			800	750	0,000968	0,00041
11	736			900	850	0,000484	0,000326
12	584			1000	950	0,000161	0,000259
13	887			1100	1050	0	0,000206
14	263			1200	1150	0	0,000163
15	1901			1300	1250	0	0,00013
16	695			1400	1350	0,000323	0,000103
17	294			1500	1450	0	8,19E-05
18	562			1600	1550	0	6,51E-05
19	721			1700	1650	0,000161	5,17E-05
20	76			1800	1750	0	4,11E-05
21	710			1900	1850	0	3,26E-05
22	46			2000	1950	0,000161	2,59E-05
23	402						
24	194						

2. On a $P(T > 365) = 1 - P(T \leq 365) \approx 0{,}43$ obtenu, avec le tableur, en faisant :
=1-LOI.EXPONENTIELLE(365;0,0023;VRAI).

29. 1. a) On simule X en faisant rand ou Ran# sur la calculatrice, ou ALEA() sur tableur et en répétant autant de fois que désiré.

b) On a, pour tout $a \in]0, 1]$, $P(X \geq a) = \int_a^1 1\,dx = 1 - a$.

2. Si $x \in]0, 1]$, $-(1/\lambda) \ln x \in [0, +\infty[$ donc T est à valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. On a, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $P(T \leq t) = P(-(1/\lambda) \ln X \leq t) = P(X \geq e^{-\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda}$ car $e^{-\lambda t} \in]0, 1]$.

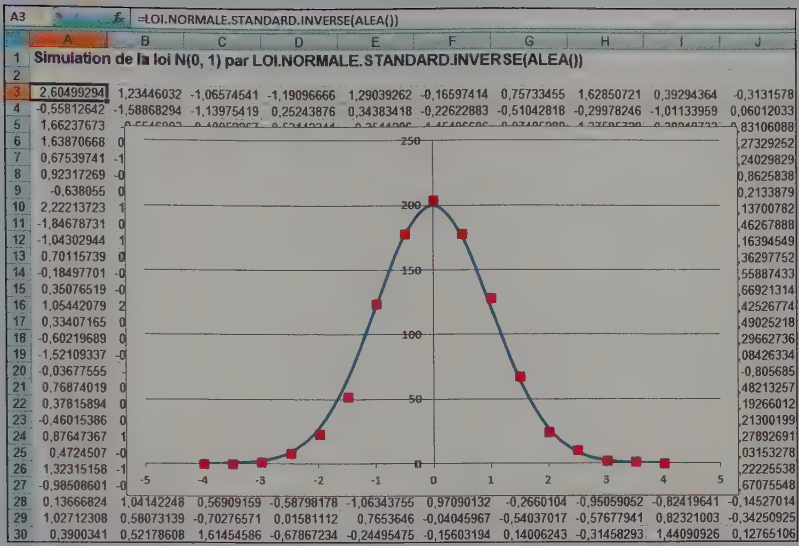
4. Si $t < 0$ alors $f(t) = 0$ car T est à valeurs dans $[0, +\infty[$.

Si $t \geq 0$, $P(T \leq t) = \int_0^t f(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda t}$ d'où $f(t) = (1 - e^{-\lambda t})' = \lambda\, e^{-\lambda t}$.

On reconnaît la fonction de densité de loi exponentielle de paramètre λ. Il s'agit donc de la loi de la variable aléatoire T.

5. D'après ce qui précède, on peut simuler une réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 0,005 par l'instruction :
– ln(rand) / 0,005 c'est-à-dire – 200 ln(rand) ou – 200 ln(Ran#) sur calculatrice ; ou – 200*LN(ALEA( )) sur tableur.

30.



Les réalisations de la variable aléatoire X se répartissent approximativement selon la densité de la variable aléatoire Z.

32. 1. a) L'algorithme fait appel 12 fois à la fonction random.

b) En sortie d'algorithme, la variable x est la somme de 12 réalisations de la fonction random.

c) La moyenne de la fonction random est 0,5.

La moyenne des valeurs de x en sortie d'algorithme est donc 6 et celle de $x - 6$ est 0.

d) La variance des valeurs de x en sortie d'algorithme est $12 \times \frac{1}{12} = 1$. Celle de $x - 6$ est la même que celle de x c'est-à-dire 1.

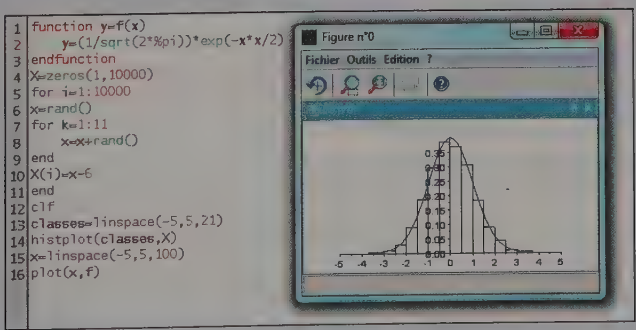
2. Algorithme modifié (en gras)

Pour *i* = 1 à 10 000
  Affecter à x la valeur random
  Pour k allant de 1 à 11
    Affecter à x la valeur x + random
  FinPour
Affecter à *X*(*i*) la valeur *x* – 6
FinPour
Afficher la liste *X*

3. La densité de la loi normale centrée réduite correspond au « profil » de l'histogramme normalisé des fréquences des 10 000 simulations.

On peut considérer que l'algorithme de la question **1.** simule assez correctement une réalisation d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Exemple d'implantation sur Scilab :



Exercices pour le baccalauréat

45. 1. • Chaque épreuve élémentaire, le prélèvement d'une facture au hasard dans la liasse, peut déboucher sur deux résultats et deux seulement : la facture est erronée, événement de probabilité $p = 0{,}03$ et la facture n'est pas erronée, événement de probabilité $q = 1 - p = 0{,}97$.

• Chaque prélèvement de 20 factures est constitué par la répétition 20 fois, de façon identique et indépendante, de l'épreuve élémentaire, puisque le prélèvement est associé à un tirage avec remise.

• Donc, la variable aléatoire X qui associe à chaque prélèvement de ce type le nombre de factures erronées de ce prélèvement suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}03$.

2. $P(X = 0) \approx 0{,}54$.

3. $P(X \leq 2) \approx 0{,}98$.

52. 1. • Chaque épreuve élémentaire, le prélèvement au hasard d'une poutre peut déboucher sur deux issues et deux seulement : la poutre est acceptée, de probabilité 0,88, et la poutre n'est pas acceptée, de probabilité 1 – 0,88 = 0,12. C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}88$.

• Chaque prélèvement de 50 poutres consiste à répéter 50 fois, de façon identique et indépendante (prélèvement assimilé à un tirage avec remise) l'épreuve élémentaire. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}88$.

• Donc la variable aléatoire, qui associe à ce schéma de Bernoulli le nombre de poutres acceptées, suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}88$.

2. a) On lit sur la table $P(X \leq 38) = 0{,}0135$ et $P(X \leq 39) = 0{,}0325$.

Donc le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ est $a = 39$.

On lit sur la table $P(X \leq 47) = 0{,}9487$ et $P(X \leq 48) = 0{,}9865$.

Donc le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$ est $b = 48$.

3. Un intervalle de fluctuation, à environ 95 %, de la fréquence des poutres acceptées dans un lot de 50 poutres prélevé au hasard et considéré comme prélevé avec remise est :

$$\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right] = \left[\frac{39}{50}, \frac{48}{50}\right] = [0{,}78\,;0{,}96].$$

4. a) Non : voir ci-dessous.

b) Oui : pour un prélèvement de 30 poutres acceptées et 20 poutres refusées, obtenues dans un ordre quelconque, la fréquence des poutres acceptées est $\frac{30}{50} = 0{,}6$.

55. 1. Voir le corrigé de question **1.** de l'exercice **52**.

2. La loi normale approchant une loi binomiale a même espérance et même écart type.

Donc $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$:

$\mu = 50 \times 0{,}88 = 44$ et $\sigma = \sqrt{50 \times 0{,}88 \times 0{,}12} \approx 2{,}30$.

3. $P(Y \leq 48) \approx 0{,}959$ est proche de $P(X \leq 48) \approx 0{,}987$.

4. a) L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des armatures acceptées dans un lot aléatoire de 50 armatures prélevées comme indiqué est :

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = [0{,}79\,;0{,}97].$$

b) $n = 50 \geq 30$.

$np = 44 \geq 5$.

$n(1 - p) = 6 \geq 5$.

Les trois conditions sont satisfaites.

c) Les intervalles [0,79 ; 0,97] et [0,78 ; 0,96] sont très proches.

5. a) Non : par exemple, dans un prélèvement de 35 armatures acceptées et 15 armatures non acceptées, la fréquence des armatures acceptées est $f = \frac{35}{50} = 0{,}7$.

b) Non : voir ci-dessus.

59. 1. • Chaque épreuve élémentaire, le prélèvement au hasard d'un client parmi les clients de l'agence de voyages, peut déboucher sur deux issues et deux seulement :

le client a pris l'option, de probabilité 0,25, et le client n'a pas pris l'option, de probabilité 1 – 0,25 = 0,75. C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}25$.

• Chaque prélèvement de 60 clients consiste à répéter 60 fois, de façon identique et indépendante (tirage avec remise) l'épreuve élémentaire. C'est un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 60$ et $p = 0{,}25$.

• Donc la variable aléatoire X, qui associe à ce schéma de Bernoulli le nombre de clients ayant pris l'option, suit la loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0{,}25$.

2. a) On lit sur la table $P(X \leq 8) = 0{,}0212$ et $P(X \leq 9) = 0{,}0452$.

Donc le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ est $a = 9$.

b) On lit sur la table $P(X \leq 21) = 0{,}9702$ et $P(X \leq 22) = 0{,}9846$.

Donc le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$ est $b = 22$.

3. Un intervalle de fluctuation, à environ 95 %, de la fréquence des clients ayant pris l'option dans un échantillon de 60 clients prélevé au hasard et avec remise est $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right] = \left[\frac{9}{60}, \frac{22}{60}\right] = [0{,}15\,;0{,}37]$.

4. Au seuil de 5 %, si la fréquence des clients ayant pris l'option dans l'échantillon observé de taille 60 appartient à l'intervalle [0,15 ; 0,37], on accepte l'affirmation du responsable de l'agence ; sinon on rejette cette affirmation.

5. Pour l'échantillon observé, la fréquence des clients ayant pris l'option est $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$ qui appartient à l'intervalle [0,15 ; 0,37].

On accepte donc l'affirmation : « un quart des clients prend l'option ».

61. 1. Voir le corrigé de question **1.** de l'exercice **59**.

2. La loi normale approchant une loi binomiale a même espérance et même écart type :

$\mu = np$, donc $\mu = 60 \times 0{,}25 = 15$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, donc $\sigma \approx 3{,}35$.

3. $P(Y \leq 21) \approx 0{,}96$ est proche de $P(X \leq 21) \approx 0{,}97$.

4. a) L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des clients ayant pris l'option dans un échantillon de 60 clients prélevé au hasard et avec remise est :

$$\left[p-1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,,\,p+1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]=[0{,}14\,;0{,}36]$$

b) $n=60\geq 30$.
$np=15\geq 5$.
$n(1-p)=45\geq 5$.
Les trois conditions sont satisfaites.
c) Les intervalles [0,14 ; 0,36] et [0,15 ; 0,37] sont très proches.
5. Au seuil de 5 %, si la fréquence des clients ayant pris l'option dans l'échantillon observé de taille 60 appartient à l'intervalle [0,14 ; 0,36], on accepte l'affirmation du responsable de l'agence ; sinon on rejette cette affirmation.
6. Pour l'échantillon observé, la fréquence des clients ayant pris l'option est $\frac{1}{3}=0{,}33$ qui appartient à l'intervalle [0,14 ; 0,36].
On accepte donc l'affirmation : « un quart des clients prend l'option ».

64. A.1. La fréquence des électeurs déclarant vouloir voter pour le candidat parmi les 1 068 électeurs interrogés est $f=\frac{550}{1068}\approx 0{,}515$.
L'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, pour la proportion des électeurs de la circonscription voulant voter pour le candidat est :

$$\left[f-1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\,,f+1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]=[0{,}485\,;0{,}545]\,;$$

c'est-à-dire, en pourcentages, [48,5 % ; 54,5 %].
2. Avec le coefficient de confiance 95 %, le pourcentage des électeurs votant pour *A* est situé dans [48,5 % ; 54,5 %]. Ce pourcentage peut très bien être 49 %, auquel cas *A* n'est pas élu.
B. L'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, correspondant à cet échantillon de taille *n* est :

$$\left[0{,}52-1{,}96\sqrt{\frac{0{,}52\times 0{,}48}{n}}\,;0{,}52+1{,}96\sqrt{\frac{0{,}52\times 0{,}48}{n}}\right].$$

Cet intervalle ne comporte que des pourcentages supérieurs à 50 % = 0,5 si et seulement si
$0{,}52-1{,}96\sqrt{\frac{0{,}52\times 0{,}48}{n}}\geq 0{,}5$ qui équivaut à
$\frac{0{,}52-0{,}5}{1{,}96}\geq\sqrt{\frac{0{,}52\times 0{,}48}{n}}$, $\left(\frac{0{,}02}{1{,}96}\right)^2\geq\frac{0{,}52\times 0{,}48}{n}$,
$n\geq\frac{0{,}52\times 0{,}48\times(1{,}96)^2}{(0{,}02)^2}$.
Le nombre minimal de personnes sondées est donc $n=2\,398$.

68. 1. La fréquence des unités de qualité supérieure dans l'échantillon de taille $n=200$ est $f=\frac{60}{200}=0{,}3$.
Un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 % de la proportion *p* d'unités de qualité supérieure dans la population des unités de ce produit proposées par cette entreprise est :

$$\left[f-1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\,,f+1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]\approx[0{,}24\,;0{,}36].$$

c'est-à-dire, en pourcentages, [24 % ; 36 %].
2. La nouvelle fréquence des unités de qualité supérieure dans le nouvel échantillon de taille $n=200$ est $f'=\frac{80}{200}=0{,}4$.
Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % de la nouvelle proportion *p'* d'unités de qualité supérieure dans la nouvelle population des unités de ce produit proposées par cette entreprise est :

$$\left[f'-1{,}96\sqrt{\frac{f'(1-f')}{n}}\,,f'+1{,}96\sqrt{\frac{f'(1-f')}{n}}\right]\approx[0{,}33\,;0{,}47].$$

c'est-à-dire, en pourcentages, [33 % ; 47 %].
3. Les deux intervalles [24 % ; 36 %] et [33 % ; 47 %] ne sont pas disjoints car leur intersection est l'intervalle [33 % ; 36 %].
Au seuil de 5 %, on juge que la différence des fréquences *f* et *f'* n'est pas significative et donc que le pourcentage d'unités de qualité supérieure est inchangé.

ÉPREUVES D'ENTRAÎNEMENT AU BACCALAURÉAT

Épreuve 1

Exercice 1

1. $I_1=0{,}77\,I_0$.
2. a) $I_n=0{,}77\,I_{n-1}$
b) (I_n) est une suite géométrique de premier terme I_0 et de raison 0,77.
$I_n=I_0(0{,}77)^n$.
3. $I_0=\frac{15}{(0{,}77)^4}\approx 42{,}67$.
4. $n\geq\frac{\ln\frac{1}{4}}{\ln 0{,}77}\approx 5{,}3\,;n\geq 6$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Exercice 2

A. 1. Réponse **c)**. **2.** Réponse **b)**.
B. 1. Réponse **b)**. **2.** Réponse **c)**.
C. 1. Réponse **d)**. **2.** Réponse **d)**.
D. 1. Réponse **b)**. **2.** Réponse **b)**.
E. 1. Réponse **a)**. **2.** Réponse **b)**.

F. 1. Réponse **d)**. **2.** Réponse **a)**.
G. 1. Réponse **b)**. **2.** Réponse **a)**.

Exercice 3

A. 1. Deux solutions : 0 et 1,5.

2. Si $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[1{,}5 ; \frac{7}{2}\right]$, $f(x) \geq 0$.

Si $x \in [0 ; 1{,}5]$, $f(x) \leq 0$.

3. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; $f'(3) = 0$.

4. $y = -3x$; $f'(0) = -3$.

5. $f'(x) > 0$ si $x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right[$.

B. 2.

0	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f		↘	$-e^{-\frac{1}{2}}$	↗	$9e^{-3}$	↘	

B. 1. $f(2) = 2e^{-2}$.

3. b) $A = 11e^{-2} - 22e^{-3} \approx 0{,}39$.

Épreuve 2

Exercice 1

3. G(30 ; 2,37).

4. $y = -0{,}019t + 2{,}939$.

5. a) $t \approx 76$.

b) $c \approx 4{,}5$.

Exercice 2

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0{,}3$.

2. a) $\mu = 150 \times 0{,}3 = 45$; $\sigma = \sqrt{150 \times 0{,}3 \times 0{,}7} \approx 5{,}6$.

b) $P(Y \leq 0) \approx 0{,}19$.

Exercice 3

1. On obtient : 1 050 ; 1 100 ; 1 150 ; 1 200.

2. Algorithme modifié :

Initialisation
u prend la valeur 1 000
n prend la valeur 1
Traitement
Tant que n < 5
u prend la valeur *u* × 1,03
n prend la valeur *n* + 1
Écrire *u*
FinTantQue

3. On peut utiliser l'algorithme modifié suivant.

Initialisation
u prend la valeur 1 000
n prend la valeur 1
Traitement
Tant que n < 2 000
u prend la valeur *u* × 1,03
n prend la valeur *n* + 1
FinTantQue
Sortie
Écrire *n* – 1

Exercice 4

A. 1. $f(1) = 3$; $f(e) = 1$; $f'(1) = 0$.

3. $\alpha \approx 3{,}2$.

4. $3 \leq \mathcal{A} \leq 4$.

B. 1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. $f'(x) = -2\ln x$.

4. $\mathcal{A} = 4\left(\frac{1}{2}e^2 + e - \frac{5}{2}\right)$.

Épreuve 3

Exercice 1

1. $c_1 = 2{,}8$.

2. a) (c_n) est une suite géométrique de raison 0,7.

b) $c_n = 4 \times (0{,}7)^n$.

d) $c_{10} \approx 0{,}11$.

3. Au bout de 13 heures.

Exercice 2

1. $f(t) = 0{,}0005\, e^{-0{,}0005t}$.

2. $P(A) \approx 0{,}12$; $P(B) \approx 0{,}78$; $P(C) \approx 0{,}29$; $P(D) = 0$.

3. $E(T) = \dfrac{1}{0{,}000\,5} = 2\,000$.

Exercice 3

1. a) L'argument « plus » correspond à $x > 0$.

b) On a $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$. On en déduit que l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f.

2. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

3. a) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x)] = 0$.

b) La droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

4. On a, pour $x > 0$, $f(x) - (-x) = -\dfrac{4}{x}$. Pour tout $x > 0$, $-\dfrac{4}{x} < 0$. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ est située en dessous de la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 4

A. 1. $f(x) < 0$.

2. $f'(x) = \dfrac{1}{x} + a$.

3. • $f(2) = -2 + \ln 2$, d'où :
$\ln 2 + 2a + b = -2 + \ln 2$; $2a + b = -2$.

• $f(10) = -6 + \ln 10$ d'où :
$\ln 10 + 10a + b = -6 + \ln 10$; $10a + b = -6$.
D'où : $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -1$.

B. 1. a) $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$.

b) L'axe des abscisses est asymptote verticale.

2. b) g est décroissante sur $]0, 10]$.

3. $y = -3x + 2$.

4. $0{,}72 < \alpha < 0{,}73$.

Épreuve 4

Exercice 1

3. a) $y = 0{,}120t + 0{,}506$.

5. 13 heures 25 minutes.

6. a) $m(t+1) - m(t)$
$= 0{,}6e^{0{,}12(t+1)} - 0{,}6e^{0{,}12t}$
$= 0{,}6e^{0{,}12t}(e^{0{,}12} - 1)$.
La réponse est non.

Exercice 2

1. $n = 50$; $p = 0{,}3$.

2. $E(X) = 15$; $\sigma(X) \approx 3{,}06$.

3. $P(10 \leq X \leq 15) \approx 0{,}68$.

4. b) $P(10 \leq Y \leq 15) \approx 0{,}59$.

c) Ils sont proches.

Exercice 3

1. La cellule B3 contient la formule =8,68*LN(A3)+93,28.

2. a) Pour x = 16 bars, on lit sur le graphique $f(x) \approx 117$ dB.

b) $8{,}68 \ln(16) + 93{,}28 \approx 117{,}35$.

3. a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0{,}5 ; 25]$, $f'(x) = 8{,}68 \times \frac{1}{x}$.

b) Pour tout réel x de l'intervalle $[0{,}5 ; 25]$, $f'(x) > 0$.

c) Tableau de variation :

x	0,5		25
$f'(x)$		+	
$f(x)$	≈ 87,26	↗	≈ 121,22

4. a) Pour $y = 120$ dB, on lit sur le graphique $x \approx 22$ bars.

b) D'après la feuille de calcul, la pression x recherchée vérifie : $21{,}7 < x < 21{,}8$.

Exercice 4

1. Réponse **c)**.
2. Réponse **b)**.
3. Réponse **b)**.
4. Réponse **a)**.

Épreuve 5

Exercice 1

1. a) $v_1 = 4 \times 0{,}9 = 0{,}36$. $v_2 = v_1 \times 0{,}9 = 0{,}324$.
$v_3 = v_2 \times 0{,}9 = 0{,}291\,6$.

b) $v_{n+1} = 0{,}9v_n$.

c) La suite géométrique de premier terme $v_0 = 4$, de raison 0,9.

d) $v_n = 4(0{,}9)^n$.

e) $v_{10} = 4(0{,}9)^{10} \approx 1{,}39$.
Une diminution de 75 % correspond à une quantité présente de 1 ml. Avec la calculatrice (ou le tableur) on obtient $v_{13} \approx 1{,}02$ et $v_{14} \approx 0{,}92$. C'est au bout de 14 heures que la quantité présente dans le sang aura diminué de 75 %.

2. Réponse **a)**.

Exercice 2

1. $n = 100$; $p = 0{,}09$.

3. $P(Y \leq 14) \approx 0{,}96$ est proche de $P(X \leq 14) \approx 0{,}97$.

4. a) [6 %, 12 %].

b) Les 3 conditions sont satisfaites.

c) L'intervalle de fluctuation asymptotique [6 %, 12 %] est assez proche de l'intervalle de fluctuation [3 %, 15 %].

5. Au seuil 5 %, si le pourcentage de véhicules ayant eu un sinistre cette année dans l'échantillon observé de taille 100 est compris entre 6 % et 12 %, on accepte l'hypothèse : 9 % des véhicules de la flotte de véhicules de l'entreprise de maintenance ont eu un sinistre cette année.
Dans le cas contraire, on rejette cette hypothèse.

6. Pour l'échantillon observé, le pourcentage obtenu 17 % n'est pas compris entre 6 % et 12 %. On rejette donc l'hypothèse.

7. Après vérification, le nouveau pourcentage 11 % est compris entre 6 % et 12 % : on accepte donc l'hypothèse.

Exercice 3

1. La valeur moyenne de la température dans le cylindre est $\frac{1}{2}\int_0^2 T(x)\mathrm{d}x$. L'affichage (%o2) donne $\int_0^2 T(x)\mathrm{d}x$ puis, après division par 2 et développement, l'affichage (%o4) montre que la valeur moyenne de la température dans le cylindre en fonction de A et de m est $A - \frac{820}{3m}$.

2. D'après l'affichage (%o6), la fonction $m \mapsto A - \frac{820}{3m}$ est une fonction croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (dérivée affichée positive). Le maximum de la valeur moyenne est obtenu à la limite lorsque m tend vers $+\infty$. D'après l'affichage (%o7), cette limite vaut A.

Exercice 4

1. a) $f(0) = 3$; $f'(0) = 2$.

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

2. $y = 2x + 3$.

3. $3 \leq \mathcal{A} \leq 4$.

4. $f'(x) = \frac{-ax + a - b}{e^x}$.

5. $\mathcal{A} = 7 - \frac{10}{e} \approx 3{,}3$.

Épreuve 6

Exercice 1

1. $f(t) = Ce^{-0{,}046t}$.

2. a) $C = 23{,}8e^{0{,}23} \approx 30$.
b) 30.
3. a) 22.
b) 50 jours.

Exercice 2

1. $p_1 \approx 0{,}789$.
2. $p_2 \approx 0{,}994$.
3. Pour une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, on a :
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}95$.
Ici $p_3 = P(52{,}95 \leq X \leq 53{,}05)$ peut s'écrire
$p_3 = P(53 - 0{,}05 \leq X \leq 53 + 0{,}05)$ avec $\mu = 53$.
Donc $p_3 = 0{,}95$ si et seulement si $2\sigma = 0{,}05$, c'est-à-dire $\sigma = 0{,}025$.

Exercice 3

1. Réponse **c)**.
2. Réponse **d)**.
3. Réponse **c)**.
4. Réponse **d)**.

Exercice 4

A. 1. a) $f'(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2}$.
b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
d) La courbe Γ admet l'axe des abscisses comme asymptote.
e)

x	0		1		
Signe de $f'(x)$	‖	+	0	–	
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

B. 2. La droite (OB) a comme coefficient directeur $f'(e^{-0{,}5})$.
C. 2. b) $\mathcal{A} = 0{,}125$.

Épreuve 7

Exercice 1

A. 2. $N_k = N_0(0{,}9876)^n$.
B. 1. On résout : $(0{,}9876)^n = 0{,}05$,
$n = \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}9876} \approx 240$.
2. $(0{,}9876)^n \geq 0{,}01$;
$n \leq \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9876)} \approx 369{,}08$
$n \leq 36\,908$ ans.

Exercice 2

1. $n = 100$, $p = 0{,}18$.
2. $E(X) = np = 18$; $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} \approx 3{,}84$.
3. $P(X \leq 24) \approx 0{,}95$ et $P(Y \leq 24) \approx 0{,}94$.
4. a) [10,5 % ; 21,8 %].
b) $n \geq 30$; $np \geq 5$; $n(1-p) \geq 5$.
[11 % ; 26 %] est proche de [10,5 % ; 21,8 %].
5. a) Oui, avec 8 lots de qualité supérieure parmi les 100 lots prélevés.
b) Oui, avec par exemple 55 lots de qualité supérieure parmi les 100 lots prélevés.

Exercice 3

1. L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par : $t \mapsto Ce^{-2t} + 10$, où C est une constante réelle quelconque.
2. Pour tout t dans l'intervalle $[0, +\infty[$, $f(t) = 400\,e^{-2t} + 10$.
3. D'après la sortie (%o6), pour tout t dans l'intervalle $[0, +\infty[$, $f'(t) = -800\,e^{-2t}$.
Pour tout t dans l'intervalle $[0, +\infty[$, $-800\,e^{-2t} < -800$ donc f est strictement décroissant sur $[0, +\infty[$.
4.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		–	
$f(t)$	410	↘	10

5. a) L'expression « $\log\left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\right)$ », logarithme d'un nombre négatif, n'a pas de signification en terminale.
b) L'équation $400\,e^{-2t} + 10 = 40$ équivaut à $e^{-2t} = \dfrac{30}{400}$ c'est-à-dire $-2t = \ln\left(\dfrac{3}{40}\right)$.

Exercice 4

1. Réponse **a)**. **2.** Réponse **c)**. **3.** Réponse **a)**.
4. Réponse **a)**. **5.** Réponse **b)**.

Épreuve 8

Exercice 1

1. $f(t) = ke^{-5.10^{-3}t} + 1200$.
2. $f(t) = -1200\,e^{-5.10^{-3}t} + 1200$.
3. On résout $f(t) = 600$; $t \approx 139$.
2 heures et 19 minutes.

Exercice 2

A. 1. On peut entrer en cellule B3 la formule =B2/4 (ou encore la formule =B2*0,25).
2. a) En cellule B18 se trouve la formule =B17/4.
b) La valeur calculée en B18 correspond au nombre de bactéries après 16 heures.
B. 1. Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4}$.
2. Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0{,}25 \times u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,25.
3. On en déduit que, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times (0{,}25)^n$ d'où $u_n = 10^{10} \times (0{,}25)^n$.

4. On résout l'inéquation $10^{10} \times (0{,}25)^n \leq 100$;

qui équivaut à $(0{,}25)^n \leq \dfrac{1}{10^8}$;

c'est-à-dire $n \ln(0{,}25) \leq -8$;

c'est-à-dire $n \geq \dfrac{-8}{\ln(0{,}25)}$ (puisque $\ln(0{,}25) < 0$).

Comme $\dfrac{-8}{\ln(0{,}25)} \approx 13{,}3$, le nombre de bactéries devient inférieur à 100 au bout de 14 heures.

Exercice 3

1. $f = \dfrac{12}{100} = 0{,}12$.

2. L'intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 95 % est $\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}, f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right]$

avec $f = 0{,}12$ et $n = 100$.

C'est donc [0,0875 ; 0,1525] ou [8,75 % ; 15,25 %] arrondi à [9 %, 15 %].

3. Non.

Remarque

La justification, non demandée, consiste à dire que si on prélève un très grand nombre de tels échantillons de 100 copies, on obtient pour environ 95 pour 100 d'entre eux un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, qui contient la proportion inconnue p. Mais comme on n'a prélevé qu'un seul échantillon, on ne sait pas si celui-ci fait partie des 95 % qui contiennent p ou des 5 % qui ne contiennent pas p.

Exercice 4

1. Pour tout $t \geq 0$, $F'(t) = 710\, e^{-710t}$ est strictement positif. La fonction F est donc croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
$F'(t) > 0$.

2. On a $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$.

La courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote en $+\infty$.

4. $t = -\dfrac{\ln 0{,}5}{710} \approx 0{,}00098$.

5. $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t) = \dfrac{I}{710} \approx 0{,}00141$.

Exercice 5

A. 3. $f(x) = 2\ln x - x + 2$.

B. 2. $G(x) = 2(x\ln x - x) - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$.

3. $A = 9\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$.

$A = 9\left(8\ln 4 - \dfrac{15}{2}\right)$ cm².

$A \approx 3{,}59$.

Programme

Programme de mathématiques – Terminale STL spécialité biotechnologies

1. Analyse

On poursuit, en classe terminale, l'apport d'outils permettant de traiter un plus grand nombre de problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets. Le travail sur les suites géométriques et les fonctions exponentielles permet de s'interroger sur le passage du discret au continu et inversement, variant ainsi les approches des problèmes et les modes de résolution. Cette partie est organisée selon quatre objectifs principaux :

- *Consolider l'ensemble des fonctions mobilisables*. On enrichit cet ensemble de nouvelles fonctions de référence : les fonctions logarithmes, exponentielles et puissances.
- *Travailler la notion de limite*. En classe de première, l'étude des suites a été l'occasion de découvrir la notion de limite. En classe terminale, la notion de limite est vue à travers celle des suites géométriques puis celle des fonctions, sans qu'aucune formalisation ne soit attendue. Cette étude, tant pour ces suites que pour les fonctions, demande à être accompagnée d'une approche graphique et numérique et à s'appuyer sur des situations variées issues des autres disciplines. Les objectifs essentiels sont la compréhension de cette notion ainsi que la recherche éventuelle de seuils ; la pratique de la recherche de limites n'a pas à être développée.
- *Introduire le calcul intégral*. La notion d'intégrale est introduite à partir de celle d'aire. Le calcul intégral, bien que modestement développé, se révèle un outil efficace tant en mathématiques que dans les autres disciplines.
- *Découvrir la notion d'équation différentielle*. La notion d'équation différentielle est introduite et travaillée dans le cadre de situations variées, par exemple les phénomènes d'évolution dans le monde du vivant, les phénomènes de saturation ou la cinétique chimique. Le programme propose l'étude d'une équation différentielle simple du premier ordre mais, selon les besoins des autres disciplines, on peut en étudier d'autres.

L'accent est mis sur la diversité des approches numérique et graphique qui contribuent à l'appropriation des concepts mathématiques.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Suites géométriques Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.	• Reconnaître et justifier la présence d'une suite géométrique dans une situation donnée. • Connaître et utiliser la formule donnant $1+q+\ldots+q^n$, où q est un réel différent de 1. • Connaître et utiliser $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ pour q positif.	On peut introduire la notation $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i$.
Limite d'une suite géométrique dont la raison est un nombre réel strictement positif.	• Rechercher le plus petit entier n tel que $q^n \geq a$ ou tel que $q^n \leq a$, avec q et a deux réels strictement positifs donnés.	Cette recherche est menée à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Limites de fonctions Asymptotes parallèles aux axes : – limite finie d'une fonction à l'infini ; – limite infinie d'une fonction en un point.	• Interpréter une représentation graphique en termes de limite. • Interpréter graphiquement une limite en termes d'asymptote.	Ces notions sont introduites par une approche numérique et graphique à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.
Limite infinie d'une fonction à l'infini.		On fait percevoir cette notion par une approche graphique ou numérique. Elle est ensuite mobilisée lors de l'étude des fonctions logarithme, exponentielle et puissances. Aucun développement théorique n'est attendu.
Limites et opérations.	• Déterminer la limite d'une fonction simple.	On se limite aux fonctions déduites des fonctions de référence par addition, multiplication ou passage à l'inverse et on évite tout excès de technicité. D'autres limites peuvent être abordées face à des situations issues d'autres disciplines. ⇄ Vitesse limite d'une réaction enzymatique.
Dérivées et primitives Calcul de dérivées : compléments.	• Calculer les dérivées des fonctions de la forme : $x \mapsto u^n(x)$, n entier relatif non nul ; $x \mapsto \ln(u(x))$; $x \mapsto e^{u(x)}$.	À partir de ces exemples, on met en évidence une expression unifiée de la dérivée de la fonction $x \mapsto f(u(x))$, mais sa connaissance n'est pas une capacité attendue.
Primitives d'une fonction sur un intervalle.	• Connaître et utiliser des primitives des fonctions de référence. • Déterminer des primitives de fonctions de la forme $u'u^n$, n entier relatif différent de -1, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$.	On se limite au cas où u est une fonction polynôme de degré 2 au plus. Dans d'autres cas où cela serait utile, une primitive est proposée et on en valide l'expression. Pour les primitives de $\frac{u'}{u}$, on se limite au cas où u est une fonction strictement positive. ⇄ Vitesse d'une réaction, vitesse de pénétration d'un principe actif.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonctions logarithmes Fonction logarithme népérien. Relation fonctionnelle. Nombre e.	• Connaître les variations, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Résoudre une inéquation d'inconnue n entier naturel, de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$, avec q et a deux réels strictement positifs donnés.	La fonction logarithme népérien est présentée comme la primitive sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Fonction logarithme décimal.		On s'appuie sur des exemples issus des autres disciplines pour introduire ces fonctions. ⇄ Mesure de l'intensité sonore, échelle des pH, etc.
Fonctions exponentielles Fonction $x \mapsto \exp(x)$.	• Connaître les variations, les limites et la représentation graphique de la fonction exponentielle.	Pour tout nombre réel a, le réel $\exp(a)$ est défini comme unique solution de l'équation d'inconnue b : $\ln b = a$.
Relation fonctionnelle. Notation e^x.	• Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Passer de $\ln x = a$ à $x = e^a$ et inversement.	On justifie la notation e^x.
Fonction exponentielle de base dix.	• Passer de $\log x = a$ à $x = 10^a$ et inversement.	Pour tout nombre réel a, le réel 10^a est défini comme l'unique solution de l'équation d'inconnue b : $\log b = a$. ⇄ Croissances bactériennes. ⇄ Radioactivité.
Fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ définies sur $]0, +\infty[$ avec $\alpha > 0$.	• Utiliser les propriétés opératoires des puissances, notamment pour résoudre une équation de la forme $x^\alpha = k$ avec $k > 0$. • Connaître l'allure de la courbe représentative de $x \mapsto x^\alpha$ suivant la position de α par rapport à 1.	L'extension des fonctions puissances aux exposants non entiers se fait à partir de la fonction exponentielle. Aucun résultat théorique sur les fonctions puissances n'est à connaître. On s'appuie sur des exemples issus des autres disciplines. On fait le lien entre les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.
Comparaison des comportements en $+\infty$ de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien avec les fonctions puissances.	• Connaître et interpréter les limites de $x \mapsto \frac{e^x}{x^n}$ et $x \mapsto \frac{\ln x}{x^n}$ en $+\infty$, n étant un entier naturel.	Ces résultats sont conjecturés puis admis. On sensibilise les élèves à différents types d'évolution, en lien avec les autres disciplines.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Intégration Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Formule $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de la fonction positive f.	• Calculer l'intégrale d'une fonction positive simple. • Déterminer l'aire du domaine défini comme l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$, f et g étant deux fonctions positives.	On se limite à une approche intuitive de la continuité et on admet que les fonctions étudiées en classe terminale sont continues sur les intervalles où elles sont intégrées. On s'appuie sur la notion intuitive d'aire. Cette formule est admise. ⇄ Détermination d'une quantité par analyse de chromatogrammes.
Équations différentielles Équation $y' + ay = b$, où a et b sont des nombres réels, avec $a \neq 0$. Existence et unicité de la solution satisfaisant une condition initiale donnée.	• Résoudre une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme $y' + ay = b$, où a et b sont des nombres réels, avec $a \neq 0$. • Déterminer la solution satisfaisant une condition initiale donnée.	Dans cette partie, on propose des exemples en lien avec les autres disciplines. On s'appuie sur les outils logiciels pour visualiser la famille des courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle. On traite tout d'abord le cas de l'équation homogène $y' + ay = 0$. En liaison avec d'autres disciplines, on peut être amené à étudier d'autres types d'équations différentielles mais ce n'est pas un attendu du programme. ⇄ Phénomènes d'évolution : injection médicamenteuse, croissance d'une plante…

2. Statistique et probabilités

En statistique et probabilités, on approfondit le travail mené les années précédentes en l'enrichissant selon trois objectifs principaux :

- *Élargir la statistique descriptive à l'étude de séries de données quantitatives à deux variables*. C'est un outil très utilisé dans d'autres disciplines pour analyser, interpréter et prévoir.
- *Découvrir et exploiter des exemples de lois à densité*. On aborde ici le champ des problèmes à données continues. La loi uniforme fournit un cadre simple pour découvrir le concept de loi à densité et les notions afférentes. Le travail se poursuit dans le cadre des lois exponentielle et normale où le lien entre probabilité et aire est consolidé. La loi normale, fréquemment rencontrée dans les autres disciplines, doit être l'occasion d'un travail interdisciplinaire.

• *Compléter la problématique de la prise de décision par celle de l'estimation par intervalle de confiance.* On s'appuie sur la loi normale et, en mathématiques, on se limite au cadre d'une proportion. Toutefois, la pertinence des méthodes statistiques utilisées dans les disciplines scientifiques et technologiques, en particulier l'estimation d'une moyenne, peut s'observer par simulation.

Dans cette partie, le recours aux représentations graphiques et aux simulations est indispensable.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Statistique descriptive à deux variables Nuage de points, point moyen.	• Représenter graphiquement un nuage de points et déterminer le point moyen.	L'objectif est d'étudier le lien éventuel entre deux caractères d'une même population.
Ajustement affine selon la méthode des moindres carrés.	• Trouver un ajustement affine selon la méthode des moindres carrés. • Utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler.	L'ajustement est réalisé avec une calculatrice ou un tableur. On observe à l'aide d'un logiciel le caractère minimal de la somme des carrés des écarts. En lien avec les autres disciplines, on réinvestit les connaissances d'analyse permettant, par un changement de variable donné, de se ramener à un ajustement affine.
Exemples de lois à densité Loi uniforme sur $[a, b]$.		Toute théorie générale des lois à densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue. L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur $[0,1]$ puis sur $[a, b]$. Si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a, b]$ et si I est un intervalle inclus dans $[a, b]$, la probabilité de l'événement « $X \in \mathrm{I}$ » est l'aire du domaine $\{\mathrm{M}(x, y)\ ;\ x \in \mathrm{I} \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où $f : x \mapsto \frac{1}{b-a}$ est la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a, b]$.
Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.	• Concevoir et exploiter une simulation dans le cadre d'une loi uniforme.	La notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité sur $[a, b]$ est définie à cette occasion par $\int_a^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t$. On note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète, rencontrée avec la loi binomiale. Par analogie avec la démarche conduisant à la définition de l'espérance, on présente une expression sous forme intégrale de la variance d'une variable aléatoire à densité sur $[a, b]$. La simulation vient à l'appui de cette démarche.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Loi exponentielle.	• Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi exponentielle.	On s'intéresse à des situations concrètes, par exemple la radioactivité (taux de désintégration).
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.	• Connaître et interpréter l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.	L'espérance est définie par $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t\,f(t)\,dt$, où f est la fonction de densité d'une loi exponentielle. On peut simuler une loi exponentielle à partir de la loi uniforme sur [0, 1].
Loi normale d'espérance μ et d'écart type σ.	• Utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer une probabilité dans le cadre d'une loi normale. • Connaître et interpréter graphiquement une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu-\sigma, \mu+\sigma]\}$, $\{X \in [\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ.	La loi normale est introduite à partir de l'observation, à l'aide d'un logiciel, du cumul des valeurs obtenues lors de la répétition à l'identique d'une expérience aléatoire dont le résultat suit une loi uniforme. On s'appuie sur des exemples issus des autres disciplines. On peut simuler une loi normale à partir de la loi uniforme sur [0, 1].
Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.	• Déterminer les paramètres de la loi normale approximant une loi binomiale donnée.	Toute théorie est exclue. On illustre cette approximation à l'aide de l'outil informatique. La correction de continuité n'est pas un attendu. ⇄ Acceptabilité d'un résultat.
Prise de décision et estimation Intervalle de fluctuation d'une fréquence.	• Connaître l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n : $\left[p-1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p+1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$ lorsque la proportion p dans la population est connue. • Exploiter un tel intervalle de fluctuation pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion.	On fait observer que cet intervalle est proche de celui déterminé en première à l'aide de la loi binomiale, dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Intervalle de confiance d'une proportion.	• Estimer une proportion inconnue avec un niveau de confiance de 95 % par l'intervalle : $\left[f-1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}, f+1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$ calculé à partir d'une fréquence f obtenue sur un échantillon de taille n.	Cette expression de l'intervalle de confiance, pour n assez grand, est admise. On constate par simulation que, pour $n \geq 30$, sur un grand nombre d'intervalles de confiance, environ 95 % contiennent la proportion à estimer.
	• Juger de l'égalité de deux proportions à l'aide des intervalles de confiance à 95 % correspondant aux fréquences de deux échantillons de taille n.	La différence entre les deux fréquences observées est considérée comme significative quand les intervalles de confiance à 95 % sont disjoints. C'est l'occasion d'étudier des méthodes statistiques pratiquées dans les disciplines scientifiques ou technologiques. En liaison avec les enseignements technologiques et scientifiques, on peut observer par simulation la pertinence d'un intervalle de confiance de la moyenne d'une population, pour un caractère suivant une loi normale. ⇄ Incertitude de mesure associée à un niveau de confiance. ⇄ Dénombrement bactérien en milieu solide.

Algorithmique

En seconde, les élèves ont conçu et mis en œuvre quelques algorithmes. Cette formation se poursuit tout au long du cycle terminal.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés à :
- décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- en réaliser quelques-uns à l'aide d'un tableur ou d'un programme sur calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
- interpréter des algorithmes plus complexes.

Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (algèbre et analyse, statistique et probabilités, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou le traitement de problèmes concrets.

À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.

Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie). Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables : • d'écrire une formule permettant un calcul ; • d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction, ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.
Boucle et itérateur, instruction conditionnelle Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables de : • programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ; • programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

Notations et raisonnement mathématiques

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.
Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés sur des exemples à : • utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ; • utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ; • distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ; • utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ; • formuler la négation d'une proposition ; • utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ; • reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Formulaire

1 Suites géométriques

Suites géométriques

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 ou u_1, de raison q.

- Pour tout entier n de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{u_{n+1} = qu_n}$.
- Lorsque le premier terme de la suite est u_0 : pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_0q^n}$.
- Lorsque le premier terme de la suite est u_1 : pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{u_n = u_1q^{n-1}}$.
- Lorsque le premier terme de la suite est u_0 : $\boldsymbol{u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1}$.
- **Pour une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique**, on peut retenir que :

$$\textbf{(Somme de termes successifs)} = \textbf{(Premier terme)} \times \frac{1-\textbf{(Raison)}^{\textbf{nombre de termes}}}{1-\textbf{(Raison)}}.$$

Augmentation ou diminution de x %

- Chaque fois qu'on est confronté à une situation du type « une population, une production, un prix … augmente de x % tous les ans », on peut définir une suite géométrique de raison $1+\dfrac{x}{100}$.
- S'il s'agit d'une diminution de x %, on peut définir une suite géométrique de raison $1-\dfrac{x}{100}$.

Limite de q^n

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.
- Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0, de raison q.

- Si, pour tout entier n, $u_n = u_0q^n$, avec $u_0 > 0$ et $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si, pour tout entier n, $u_n = u_0q^n$, avec $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2 Limites de fonctions

Limites des fonctions de référence

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$	
$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$		
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}=0$

Si la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est définie sur $]-\infty, 0[$, $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}=-\infty$

Si la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est définie sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}=+\infty$

Limite au voisinage d'une valeur a pour laquelle la fonction f est définie

Le résultat suivant s'applique à toutes les fonctions rencontrées en mathématiques en Terminale STL – Biotechnologies.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle I sur lequel f est définie.

Alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Énoncés usuels sur les limites

Dans ce qui suit, α peut être remplacé par un nombre fixé a, ou les symboles $-\infty$ et $+\infty$.

- **Somme de deux fonctions**

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=$	L			$+\infty$		$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x)=$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} [u(x)+v(x)]=$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$

? signifie que l'on ne peut pas conclure directement.

- **Produit d'une fonction par une constante non nulle**

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=$	L	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} ku(x)=$	kL	$*\infty$	$*\infty$

$*$ correspond soit à $+\infty$, soit à $-\infty$. Le signe + ou – s'obtient de façon évidente dans chaque exemple.

- **Produit de deux fonctions**

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=$	L	$L\neq0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x)=$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} [u(x)\times v(x)]=$	LL'	$*\infty$	?	$*\infty$

$*$ correspond soit à $+\infty$, soit à $-\infty$. Le signe + ou – s'obtient de façon évidente dans chaque exemple.

• **Inverse d'une fonction**

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{u(x)} =$	$\dfrac{1}{L}$	Voir théorèmes 1 et 2	0

Théorème 1

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = 0$ et si, au voisinage de α, on a $u(x) > 0$, alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{u(x)} = +\infty$.

Théorème 2

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = 0$ et si, au voisinage de α, on a $u(x) < 0$, alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{u(x)} = -\infty$.

Fonctions polynômes et rationnelles au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

• Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction polynôme a même limite que sa fonction monôme de plus haut degré.

• Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction rationnelle a même limite que le quotient des fonctions monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Asymptotes

• **Asymptote verticale**

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

La droite Δ d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.

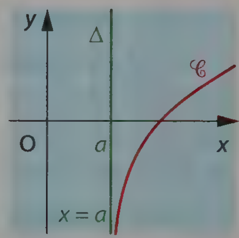


Figure 13

• **Asymptote horizontale**

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

La droite Δ d'équation $y = L$ est une **asymptote horizontale** de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.

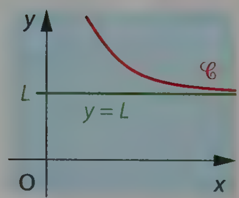


Figure 14

• **Asymptote oblique**

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} =]A, +\infty[$ (ou $\mathrm{I} =]-\infty, A[$) par $f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$).

La droite Δ d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f (en $+\infty$ ou $-\infty$).

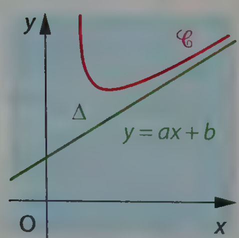


Figure 15

3 Compléments sur les dérivées et primitives

Rappels de la classe de Première

Dérivées des fonctions usuelles

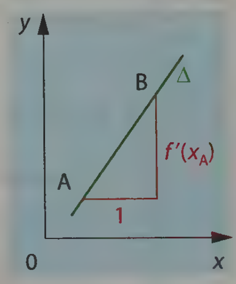
$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$mx+p$	m	$]-\infty, +\infty[$
$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\omega \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$-\omega \sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivables

$(u+v)' = u' + v'$	$(u^2)' = 2u'u$
$(ku)' = ku'$, où k est une constante réelle.	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$, où $v(x) \neq 0$ pour tout x de I.
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, où $v(x) \neq 0$ pour tout x de I.

Construire une tangente à la courbe représentative d'une fonction f en un de ses points A, d'abscisse x_A

À partir du point donné $A(x_A, y_A)$ où $y_A = f(x_A)$, on obtient un deuxième point B de la tangente Δ en ajoutant 1 à l'abscisse de A et $f'(x_A)$ à l'ordonnée de A : $x_B = x_A + 1$ et $y_B = y_A + f'(x_A)$.



Équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f, dérivable en a, au point d'abscisse a

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Sens de variation d'une fonction

- Si f est dérivable sur l'intervalle I et si la dérivée f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f est dérivable sur l'intervalle I et si la dérivée f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.
- Si f est dérivable sur l'intervalle I et si la dérivée f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.

Compléments sur la dérivation

$f(x) = [u(x)]^n$, n entier relatif non nul	$f'(x) = nu'(x)\,[u(x)]^{n-1}$
Cas particulier : n = – 1 $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$	$f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$

Primitives d'une fonction sur un intervalle

Primitives des fonctions usuelles

F donne la forme générale des primitives sur un intervalle I de la fonction f. C est une constante réelle quelconque.

$f(x)$	$F(x)$	Intervalle de validité
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ n entier non nul positif ou négatif ($n \neq -1$)	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	• si $n > 0$, $\mathbb{R}$ • si $n < 0$, $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x} + C$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$F(t) = -\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + C$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$F(t) = \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + C$	$\mathbb{R}$

Primitives de fonctions de la forme $u'u^n$

Dans ce qui suit, C est une constante réelle quelconque.

f est définie sur I par :	Les primitives F de f sont définies sur I par :
$f(x) = u'(x)[u(x)]^n$ $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1} + C$
Cas particulier : n = – 2 : $f(x) = \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{u(x)} + C$

4 Fonctions logarithmes

Définition

La **fonction logarithme népérien**, notée ln, est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.

Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels strictement positifs a, b, pour tout nombre entier relatif n,

- $\ln ab = \ln a + \ln b$;
- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$;
- $\ln a^n = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

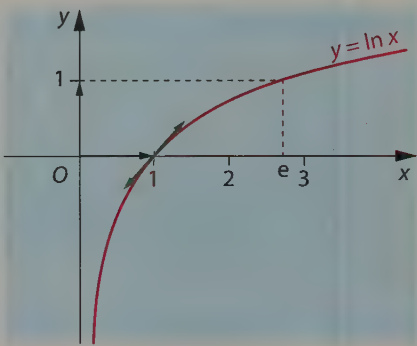
Limites

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

Pour tout nombre entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

Variations – Courbe représentative

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+	
Variations de ln	$-\infty$	↗	$+\infty$



Le nombre e

- **e** est le nombre réel défini par : **ln e = 1** (e ≈ 2,718).
- Pour tout nombre entier relatif n : $\ln e^n = n$.

Dérivée de ln *u*

Soit u une fonction dérivable et *strictement positive* sur un intervalle I.

La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Primitives de $\frac{u'}{u}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout élément x de I, $u(x) > 0$.

Les primitives de la fonction f définie sur I par $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont définies sur I par :

$F(x) = \ln[u(x)] + C$ où C est une constante réelle.

Fonction logarithme décimal

La fonction **logarithme décimal** est la fonction notée log définie sur $]0, +\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

5 Fonctions exponentielles

Définition de la fonction $x \mapsto \exp(x)$

- La **fonction exponentielle**, notée exp, est la fonction qui a tout nombre réel x associe le nombre **strictement positif** unique y tel que $x = \ln(y)$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\exp : x \mapsto y = \exp(x)$ si et seulement si $x = \ln(y)$.

Notation e^x

- Pour tout nombre réel x, $\mathbf{\exp x = e^x}$.
- Pour tout nombre réel x, $\mathbf{\ln(e^x) = x}$.
- Pour tout nombre réel $a > 0$, $\mathbf{e^{\ln(a)} = a}$.

Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels a et b,

- $\mathbf{e^{a+b} = e^a \times e^b}$;
- $\mathbf{e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}}$ et $\mathbf{e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}}$;
- Pour tout nombre réel a et tout nombre entier relatif n, $\mathbf{(e^a)^n = e^{na}}$.

Dérivée

Si pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathbf{f(x) = e^x}$ **alors** $\mathbf{f'(x) = e^x}$.

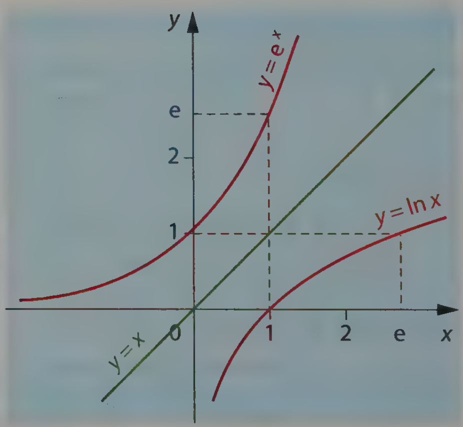
Limites en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Tableau de variation et courbe représentative

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x) = e^x$		$+$	
$f(x) = e^x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout nombre réel x, $\mathbf{e^x > 0}$.



Dérivée de e^u

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et : $\mathbf{(e^u)' = u'e^u}$.

Primitives de $u'e^u$

Si sur un intervalle I une fonction f est telle que $\mathbf{f(x) = u'(x)e^{u(x)}}$ alors les primitives F de f sur I sont définies par $\mathbf{F(x) = e^{u(x)} + C}$ (C étant une constante réelle quelconque).

Autres limites

n est un entier naturel.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0\ ;\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Fonction exponentielle de base 10

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$x \mapsto \mathbf{10^x = e^{x \ln 10}}$ est appelée **fonction exponentielle de base 10**.

Fonctions puissances

Soit α un nombre réel strictement positif.

On appelle fonction « puissance α » la fonction f_α définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

6 Intégration

Principaux résultats sur les primitives (rappels)

Les résultats suivants ont été énoncés aux chapitres 3, 4 et 5.

• Primitives des fonctions usuelles

Dans ce qui suit, C est une constante réelle quelconque.

f est définie par	Les primitives de f sont définies par	Intervalle de validité
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$	$]-\infty, +\infty[$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$	$]-\infty, +\infty[$
$f(x) = x^n$ $(n \neq -1)$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	• si $n > 0$: $\mathbb{R}$ • si $n < 0$: $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$	$]0, +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$]-\infty, +\infty[$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	$]-\infty, +\infty[$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	$]-\infty, +\infty[$

- **Primitives des fonctions composées**

Dans les formules suivantes, u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et C une constante réelle quelconque.

f est définie sur un intervalle I par	Les primitives F de f sont définies sur I par
$f(x)=u'(x)[u(x)]^n$ $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	$F(x)=\dfrac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1}+C$
$f(x)=\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}+C$
$f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)$ est strictement positif sur I.	$F(x)=\ln[u(x)]+C$
$f(x)=u'(x)e^{u(x)}$	$F(x)=e^{u(x)}+C$
Conséquence $f(x)=e^{kx}$ où k est constante réelle quelconque non nulle	$F(x)=\dfrac{1}{k}e^{kx}+C$

Intégrale d'une fonction continue et positive

- Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, et F une primitive de f sur $[a, b]$.

On appelle **intégrale de a à b de f** le nombre réel : $F(b) - F(a)$.

On note : $\int_a^b \boldsymbol{f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$.

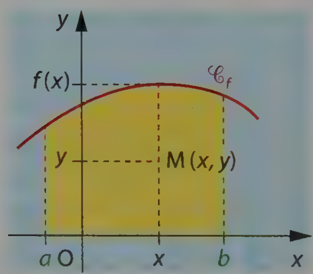
- On lit : « somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».
- On écrit aussi : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$.

Calculs d'aire

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a, b]$. L'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan, ensemble des points M de coordonnées x et y telles que :

$a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$,

est : $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

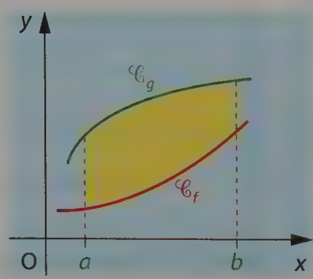


- **Aire limitée par deux courbes**

Soient f et g deux fonctions dérivables et positives sur $[a, b]$ telles que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.

L'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les courbes représentatives de f et g et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est :

$\mathscr{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x$.



7 Équations différentielles

Équation différentielle : $y' + ay = 0$

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (c'est-à-dire $y' = -ay$) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \mapsto ke^{-ax}$, où k est une constante réelle quelconque.

Équation différentielle : $y' + ay = b$

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \mapsto ke^{-ax} + \dfrac{b}{a}$, où k est une constante réelle quelconque.

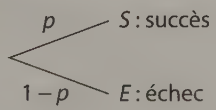
9 Probabilités et statistique

Probabilités d'événements A, B

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **Événement contraire :** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. En particulier $P(\varnothing) = 0$.
- **Si** $A \cap B = \varnothing$ (événements **disjoints** ou **incompatibles**), alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli de paramètre p** (nombre réel compris entre 0 et 1) est une épreuve aléatoire comportant deux issues :



Loi binomiale

- La **loi binomiale de paramètres n et p**, notée $\mathscr{B}(n, p)$, est la loi de la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans la répétition, de façon identique et indépendante, de n épreuves Bernoulli de paramètre p.
- **En STI2D-STL, on utilise une calculatrice ou un logiciel pour calculer directement $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$.**
- L'**espérance** de X est : $E(X) = np$.
- La **variance** de X est : $V(X) = np(1 - p)$.
- L'**écart type** de X est : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Loi uniforme sur $[a, b]$

- La **fonction de densité** f est définie sur $[a, b]$ par $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{b-a}}$.
- Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$.

Pour tout $[x_1, x_2]$ inclus dans $[a, b]$, $\boldsymbol{P(X\in[x_1, x_2])=\dfrac{x_2-x_1}{b-a}}$.

- L'**espérance** de X est $\boldsymbol{E(X)=\dfrac{a+b}{2}}$.
- La **variance** de X est $\boldsymbol{V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}}$.

Loi exponentielle

- La **fonction de densité** f est définie sur $[0, +\infty[$ par $\boldsymbol{f(t)=\lambda e^{-\lambda t}}$ où $\lambda > 0$.
- Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

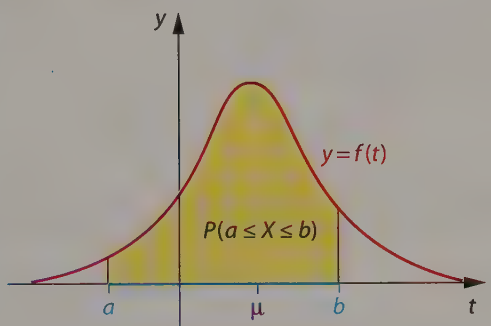
Pour tout $[x_1, x_2]$ inclus dans $[0, +\infty[$, $\boldsymbol{P(X\in[x_1, x_2])=\int_{x_1}^{x_2}\lambda e^{-\lambda t}\,dt}$.

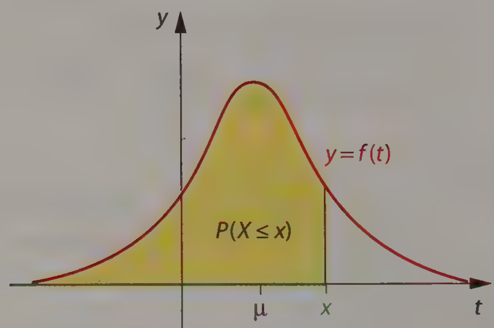
En particulier, pour tout $x \geq 0$, $\boldsymbol{P(X\leq x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt}$.

- L'**espérance** de X est $\boldsymbol{E(X)=\dfrac{1}{\lambda}}$.

Loi normale

- Soit X une variable aléatoire suivant la **loi normale** $\boldsymbol{\mathcal{N}(\mu, \sigma)}$ de fonction de densité f.





Les valeurs numériques de a, b et x étant données, on obtient les valeurs numériques de $P(a\leq X\leq b)$ ou $P(X\leq x)$ en utilisant une calculatrice ou un tableur et en remarquant, si nécessaire, que $P(a\leq X\leq b)=P(X\leq b)-P(X\leq a)$.

- Si la variable aléatoire suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$,

$P(X\in[\mu-\sigma, \mu+\sigma])\approx 0{,}68$;

$P(X\in[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma])\approx 0{,}95$;

$P(X\in[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma])\approx 0{,}997$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Si n est « **grand** » et si p n'est « ni **trop voisin** de 0 ni **trop voisin** de 1 », alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ admet pour approximation la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de **même espérance** et de **même écart type** :

$\boldsymbol{\mu=np}$ et $\boldsymbol{\sigma=\sqrt{np(1-p)}}$.

Intervalle de fluctuation, à environ 95 %, d'une fréquence avec une loi binomiale

L'**intervalle de fluctuation à 95 %** d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n, d'une variable aléatoire X de loi binomiale, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$ défini par :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

Intervalle de fluctuation asymptotique à environ 95 % d'une fréquence avec la loi normale

L'**intervalle de fluctuation asymptotique à environ 95 %** d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est $\left[p-1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p+1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$ où p est la proportion connue dans la population.

Prise de décision à l'aide d'un intervalle de fluctuation lié à la loi binomiale ou d'un intervalle de fluctuation asymptotique lié à la loi normale

Méthode :

- Repérer dans l'énoncé l'hypothèse faite sur une proportion ou une fréquence dans la population.
- Chercher l'intervalle de fluctuation correspondant, à environ 95 %, de la fréquence des échantillons aléatoires de taille n.
- Énoncer la règle de décision :
si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation considéré au seuil de 95 %, on accepte l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population ; sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p.
- Appliquer la règle de décision.

Intervalle de confiance d'une proportion

L'intervalle $\left[f-1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}, f+1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$, où f est une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n, est un **intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %**, pour la proportion p dans la population.

Comparaison de deux proportions à l'aide d'intervalles de confiance

La différence entre les deux fréquences observées f_A et f_B est considérée comme significative quand les intervalles de confiance à 95 % I_A et I_B sont disjoints.

On juge alors que les deux proportions p_A et p_B sont différentes (avec un petit risque d'erreur).

Dans le cas contraire, on juge que les deux proportions p_A et p_B sont égales (avec un petit risque d'erreur).

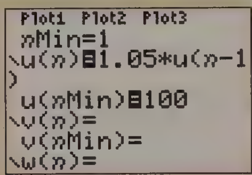
Les pages calculatrices

TI 82 stats – 83 Plus – 84 Plus
Avec instructions en français en bleu

SUITES

Édition d'une suite

On étudie la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 100$ et de raison $q = 1{,}05$.

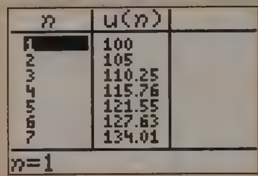


Dans MODE choisir Seq (au lieu de Func) ou Suit (au lieu de Fct).
Pour éditer la suite, taper sur Y=. ou f(x).
Pour compléter selon l'image ci-contre, taper *n* en utilisant la touche
X, T, n, et taper *u* par 2nd 7.

Tableau de valeurs

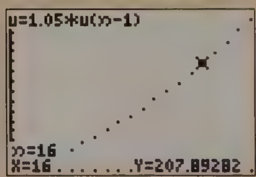
On règle la table par 2nd TBLSET ou 2nde déf table.

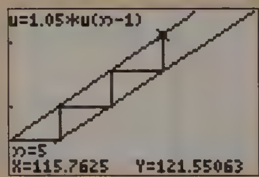
On obtient les valeurs de la suite en faisant 2nd TABLE.



Représentation graphique

• Graphique 1 (*n* en abscisse et u_n en ordonnée) :
Régler la fenêtre par WINDOW ou fenêtre.
Dans MODE choisir Dot ou NonRelié.
Dans 2nd FORMAT ou 2nde format choisir Time ou *f*(*n*).
Faire GRAPH ou graphe puis TRACE ou trace.



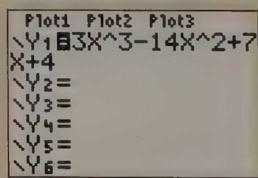


• Graphique 2 (u_n en abscisse et u_{n+1} en ordonnée) :
Régler la fenêtre par WINDOW ou fenêtre.
Dans 2nd FORMAT ou 2nde format choisir Web ou Esc.
Faire GRAPH, TRACE ou graphe trace puis ▸ pour obtenir les escaliers.

ÉTUDES DE FONCTIONS

Édition d'une fonction

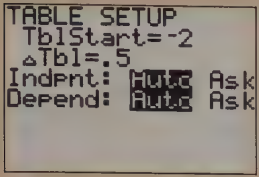
On considère la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 7x + 4$.
Pour éditer une fonction, faire Y= ou f(x) puis, à la ligne Y_1, entrer l'expression de la fonction.

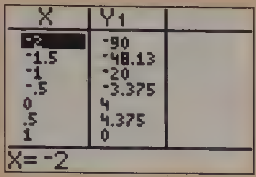


ÉTUDES DE FONCTIONS

Tableau de valeurs

Pour régler la table, faire 2nd TBLSET ou 2nde déf table puis entrer dans TblStart ou DébTable la première valeur de *x* et dans ΔTbl ou PasTable le pas entre chaque valeur de *x*.
Faire 2nd TABLE pour obtenir le tableau.

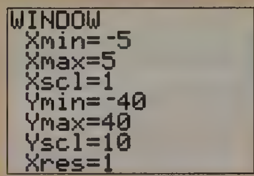




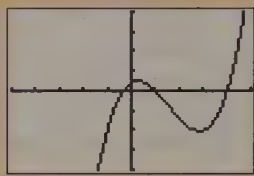
Pour calculer une valeur particulière, *f*(2) par exemple, on peut accéder à Y_1 par VARS Y-VARS puis choix **1 : Functions...** puis saisir $Y_1(2)$.
On peut également régler 2nd TBLSET en **Indpnt : Ask** ou 2nde déf table en **Valeurs : Dem**.

Courbe

Pour régler la fenêtre, faire WINDOW ou fenêtre puis entrer **Xmin** et **Xmax** selon le domaine d'étude.
Xscl ou **Xgrad** correspond au pas de graduation de l'axe.
Pour les choix de **Ymin** et **Ymax**, voir éventuellement la table.
Faire GRAPH ou graphe pour le tracé.



Pour parcourir la courbe, faire TRACE ou trace puis ◂ ou ▸.
Pour zoomer, faire ZOOM puis 1:ZBox ou 1:Zboîte
puis se déplacer par ◂ ou ▸ et valider les coins,
ou 2:Zoom In ou 2:Zoom+ pour se rapprocher
ou 3:Zoom Out ou 3:Zoom– pour s'éloigner autour du curseur.

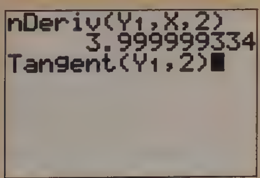


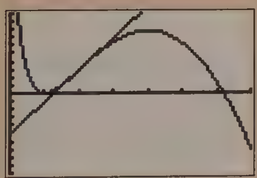
Dérivée, tangente, limite

TI 82 Stats – 83 Plus– 84 Plus
Avec instructions en français en bleu

- Sur TI 82 – 83 :

Une valeur approchée de *f* ′(2) s'obtient par
MATH 8:nDeriv(Y_1, X, 2)
ou 8:nbreDérivé(Y_1, X, 1)
avec accès à Y_1 par VARS,

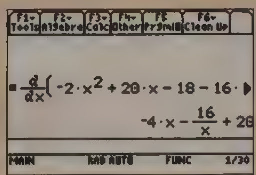


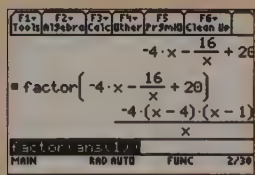


Un tracé de la tangente au point d'abscisse 2 peut s'obtenir par 2nd DRAW 5:Tangent(Y_1, 2)
ou 2nde dessin 5:Tangente(Y_1, 2).

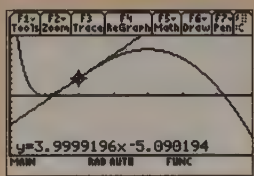
TI 89 – 92 – Voyage

Pour l'expression de la dérivée, entrer par **F3 Calc**
d(- 2x² + 20x – 18 – 16ln(x), x).





Pour la dérivée seconde,
d(- 2x² + 20x – 18 – 16ln(x), x, 2).
À partir du graphe, le tracé et une équation de la tangente s'obtient par **F5 Math** puis **A:Tangent**.



Pour calculer une limite,
par exemple la limite de *f*(*x*) en + ∞, on peut faire, par
F3 3 :limit(f(x),x,∞)

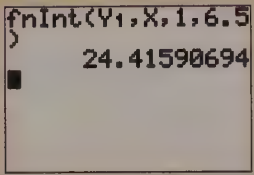
ÉTUDES DE FONCTIONS

Calcul intégral

TI 82 Stats – 83 Plus – 84 Plus
Avec instructions en français en bleu

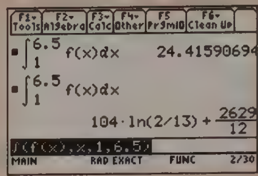
- Sur TI 82 – 83 :

Pour une valeur approchée de $\int_1^{6,5} f(x)dx$ entrer MATH 9:fnInt(Y$_1$, X, 1, 6.5),
ou fnInt(- 2X^2 + 20X – 18 – 16ln(X), X, 1, 6.5))
ou intégrFonct (- 2X^2 + 20X – 18 – 16ln(X), X, 1, 6.5))



TI 89 – 92 – Voyage

Pour une valeur exacte de $\int_1^{6,5} f(x)dx$ entrer (en MODE APPROX ou EXACT), par F3 Calc,
∫ (- 2x^2 + 20x – 18 – 16ln(x), x, 1, 6.5).



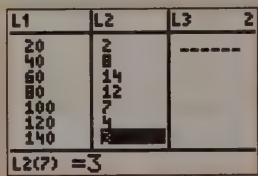
Sans entrer les bornes, on obtient une primitive de *f*.

STATISTIQUE

Statistiques à une variable

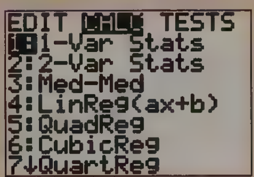
- **Edition des données :**

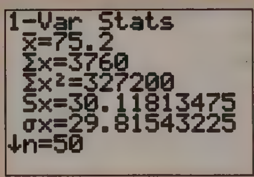
Effacement des listes par STAT EDIT 4:ClrList ENTER L$_1$, L$_2$
ou stats EDIT 4:EffListe entrer L$_1$, L$_2$
(on obtient L$_1$ et L$_2$ par 2nd ou 2nde au clavier).
Saisie des données par
STAT EDIT 1: Edit ou 1:Edite... ENTER
On entre les valeurs x_i en colonne L1 et les effectifs n_i en colonne L2.

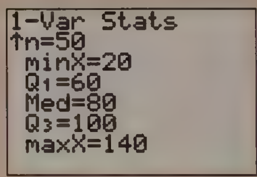


- **Calculs statistiques :**

Obtention des résultats par STAT CALC 1:1-Var Stats ENTER L$_1$, L$_2$
ou stats CALC 1:Stats 1-Var entrer L$_1$, L$_2$.



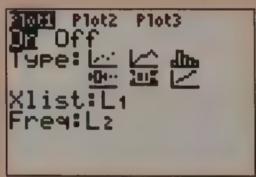


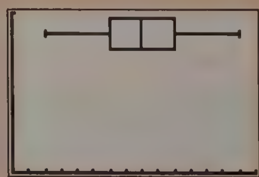


La moyenne correspond à $\overline{x}$ et l'écart type à σ**x**.
La médiane est donnée par Med ou Méd et les quartiles par Q1 et Q3 (attention, les quartiles sont parfois l'objet d'interpolations).

- **Boîte à moustaches :**

Régler l'échelle en abscisse par WINDOW
ou fenêtre.
Faire 2nd STAT PLOT ou 2nde graph stats
puis activer Plot1 en choisissant On ou 5:GraphOn ;
sélectionner le second type de boîtes
et les listes L1 et L2.
Faire GRAPH ou graphe pour l'affichage.



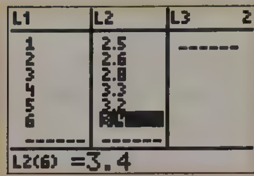


La boîte est tracée sur l'intervalle interquartile et les moustaches correspondent aux valeurs extrêmes.

Statistiques à deux variables

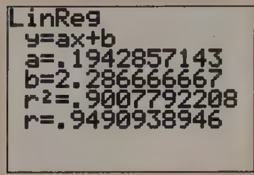
• Edition des données :

Effacement des listes par STAT EDIT 4:ClrList ENTER L_1, L_2
ou stats EDIT 4:EffListe entrer L_1, L_2.
Saisie des données par
STAT EDIT 1: Edit ENTER ou 1:Edite…
On entre les valeurs x_i en colonne L1 et les valeurs y_i en colonne L2.



• Ajustement linéaire selon les moindres carrés :

Obtention des résultats par STAT CALC 4:LinReg(ax+b) ENTER L_1, L_2
ou stats CALC 4:Réglin(ax+b) entrer.

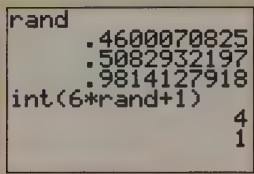


PROBABILITÉS

Simulation

Pour simuler le tirage au hasard d'un nombre décimal de l'intervalle [0, 1[faire :
MATH PRB rand puis ENTER
ou math PRB NbrAléat puis entrer.

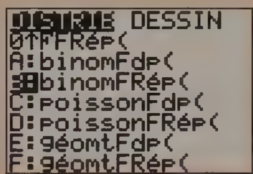
Pour simuler le lancer d'un dé équilibré faire :
int(6*rand+1) ou ent(6*NbAléat+1)
On obtient int par MATH NUM ou ent par math NUM.

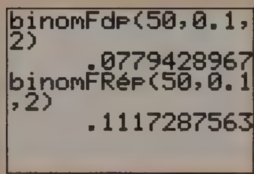


Loi binomiale

On accède au menu des distributions de probabilités par 2nd DISTR ou Distrib en français.
Supposons que X suive la loi binomiale B(50 ; 0,1).

• Pour calculer $P(X = 2)$:
binompdf(50,0.1,2)
ou binomFdp(50,0.1,2)
• Pour calculer $P(X \leq 2)$:
binomcdf(50,0.1,2)
ou binomFRép(50,0.1,2)

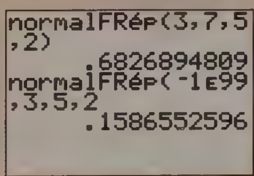


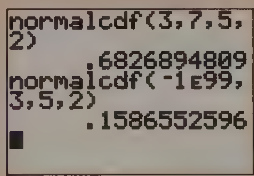


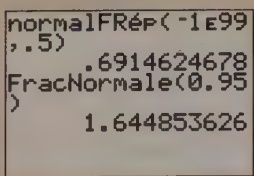
Loi normale

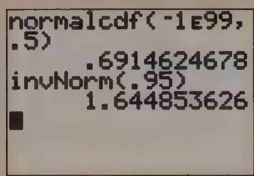
Supposons que X suive la loi normale de paramètres $\mu = 5$ et $\sigma = 2$ et que T suive la loi normale centrée réduite.

• Pour calculer $P(3 \leq X \leq 7)$:
normalcdf(3,7,5,2) ou normalFRép(3,7,5,2)
• Pour calculer $P(X \leq 3)$:
normalcdf(-1E99 , 3 , 5 , 2)
ou normalFRép(-1E99,3,5,2)
• Pour calculer a tel que $P(X \leq a) = 0{,}05$:
invNorm(0.05 , 5 , 2)
ou FracNormale(0.05,5,2)
• Pour calculer $P(T \leq 0{,}5)$:
normalcdf(-1E99,0.5)
ou normalFRép(-1E99,0.5)
• Pour calculer t tel que $P(T \leq t) = 0{,}95$:
invNorm(0.95) ou FracNormale(0.95)





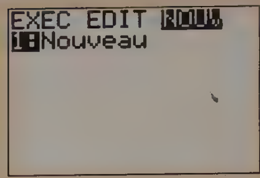




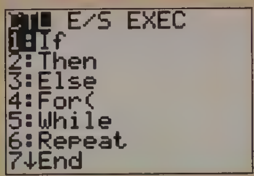
ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

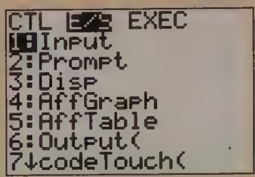
Créer un nouveau programme

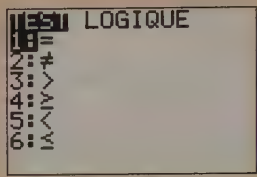
On crée un nouveau programme par prgm NEW ou NOUV.
On entre le nom du nouveau programme.



- Pour entrer If, Then, Else, For, While,
faire prgm CTL (menu de contrôle).
- Pour entrer Input, Disp,
faire prgm I/O ou E/S (menu d'entrées/sorties).
- Pour entrer la flèche d'affectation d'une valeur, utiliser la touche STO du clavier.
- Pour entrer les tests d'égalité ou d'inégalité, faire 2nde math TEST.







Sortir du mode programmation par QUIT ou quitter (2nde mode).

Exécuter un programme

On exécute un programme par prgm EXEC puis entrer le numéro du programme.

CASIO Graph 35+, Graph 65, Graph 85

SUITES

Édition d'une suite

On étudie la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 100$
et de raison $q = 1{,}05$.
Se placer dans le MENU RECUR.
Appuyer sur TYPE puis a_{n+1} pour entrer la formule de récurrence
comme sur l'écran ci-contre.

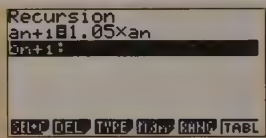
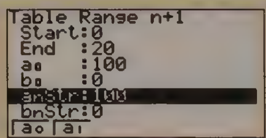
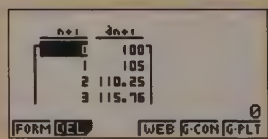


Tableau de valeurs

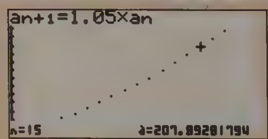
Pour obtenir les valeurs des termes de la suite,
appuyer sur RANG.
Compléter comme ci-contre puis faire TABL.



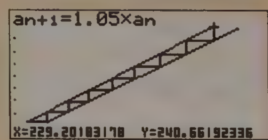


Représentation graphique

Régler la fenêtre par SHIFT V-Window.
Graphique 1 (n en abscisse et u_n en ordonnée) :
À partir de l'écran contenant la table TBL, choisir G.PLT.
Faire SHIFT Trace puis se déplacer pour afficher les points.



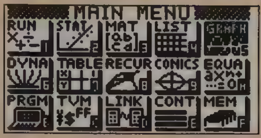
Graphique 2 (u_n en abscisse et u_{n+1} en ordonnée) :
À partir de l'écran contenant la table TBL, choisir Web.
Faire EXE pour obtenir les escaliers.



ÉTUDES DE FONCTIONS

Édition d'une fonction

Pour éditer une fonction, faire MENU GRAPH EXE Y=
puis, à la ligne Y_1, entrer l'expression de la fonction.



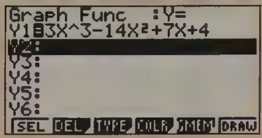
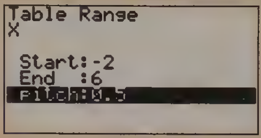
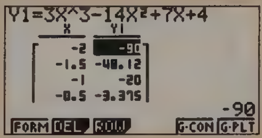


Tableau de valeurs

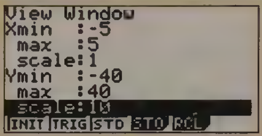
MENU TABLE EXE.
Pour régler la table, faire RANG
puis entrer la première valeur de *x* dans Start,
la dernière valeur de *x* dans End
et le pas entre chaque valeur de *x* dans pitch.
Faire TABL pour obtenir le tableau.



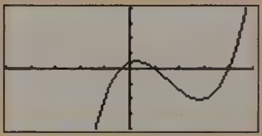


Courbe

Pour régler la fenêtre, faire SHIFT V-Window
puis entrer Xmin et max selon le domaine d'étude.
scale correspond au pas de graduation de l'axe.
Pour les choix de Ymin et max, voir éventuellement la table.



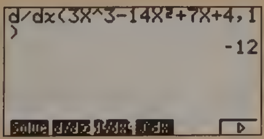
Faire MENU GRAPH EXE puis DRAW pour le tracé.
Pour parcourir la courbe, faire SHIFT Trace puis ◂ ou ▸.
Pour zoomer, faire SHIFT ZOOM puis BOX,
se déplacer par ◂ ou ▸ et valider les coins, ou,
centré sur le curseur, FACT Xfact 2 Yfact 2 EXE
IN (2 × plus près) ou OUT (2 × plus loin).



Dérivée, tangente

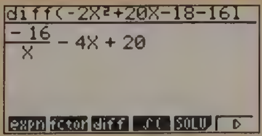
CASIO Graph 35+, Graph 65, Graph 85

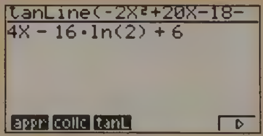
Une valeur approchée de $f'(1)$ s'obtient par
MENU RUN OPTN CALC
d/dx (3X^3 – 14X² + 7X + 4, 1).



CASIO Graph 80, Graph 100, classpad

L'expression de la dérivée est donnée par MENU ALGBR,
diff(- 2X² + 20X – 18 – 16lnX, X).
Pour la dérivée seconde,
diff(- 2X² + 20X – 18 – 16lnX, X, 2).
Pour une équation de la tangente au point d'abscisse 2 faire
tanLine(- 2X² + 20X – 18 – 16lnX, X, 2).



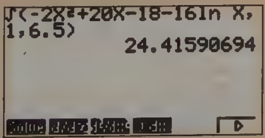


Calcul intégral

CASIO Graph 35+, Graph 65, Graph 85

Une valeur approchée de $\int_1^{6,5} f(x)\,dx$ s'obtient par

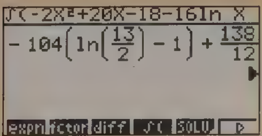
MENU RUN OPTN CALC
∫dx (- 2X² + 20X – 18 – 16lnX, 0, 1)

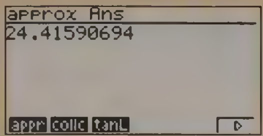


CASIO Graph 80, Graph 100, classpad

Pour une valeur exacte de $\int_1^{6,5} f(x)\,dx$ entrer, dans

le MENU ALGBR,
∫(- 2X² + 20X – 18 – 16lnX, x, 1, 6.5).
Sans entrer les bornes, on obtient une primitive de *f*.



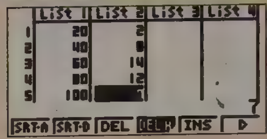


STATISTIQUE

Données statistiques à une variable

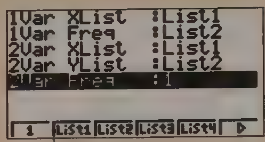
• Edition des données :

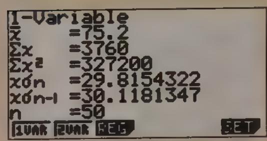
Effacement des listes par MENU STAT EXE DEL A.
Sélectionner la colonne puis YES EXE.
On entre les valeurs x_i en colonne List 1 et les effectifs n_i en colonne List 2.

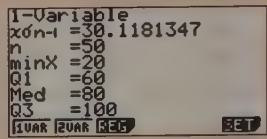


• Calculs statistiques :

Régler les colonnes par CALC SET puis :
1Var X List : List 1
1 Var Freq : List 2
EXE.
Affichage des résultats par 1-Var.
La moyenne correspond à $\bar{x}$
et l'écart type à $x\sigma n$.
La médiane est donnée par Med et les quartiles par Q1 et Q3
(attention, les quartiles sont parfois l'objet d'interpolations).



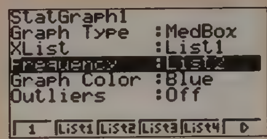


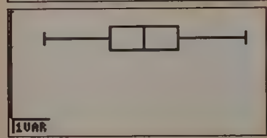


• Boîte à moustaches :

Régler l'échelle en abscisse par SHIFT V-Window.
Dans le MENU STAT appuyer sur GRPH puis sur SET
pour choisir MedBox et indiquer les listes comme ci-contre.
Faire GPH1 pour obtenir le tracé.

La boîte est tracée sur l'intervalle interquartile
et les moustaches correspondent aux valeurs extrêmes.





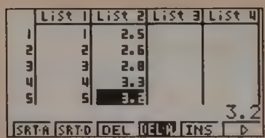
Données statistiques à deux variables

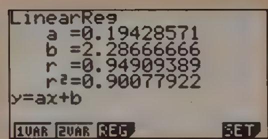
• Edition des données :

Effacement des listes par MENU STAT EXE DEL A. Sélectionner la colonne puis YES EXE.
On entre les valeurs x_i en colonne List 1 et les valeurs y_i en colonne List 2.

• Ajustement linéaire selon les moindres carrés :

Régler les colonnes par CALC SET puis :
2Var X List : List 1
2Var Freq : List 2
2Var Freq : 1 EXE.
Affichage des résultats par REG X .

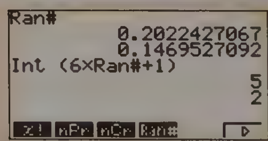




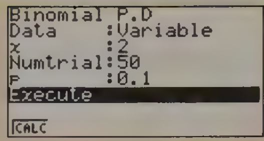
PROBABILITÉS

Simulation

Pour simuler le tirage au hasard d'un nombre décimal de l'intervalle [0, 1[faire,
dans le MENU RUN :
OPTN PROB Ran# puis EXE.
Pour simuler le lancer d'un dé équilibré faire : Int(6*Ran#+1).
On obtient Int par OPTN NUM.



Loi binomiale (Graph 65, Graph 85, Graph 100, Classpad)



On accède au menu des distributions de probabilités par $\boxed{\text{MENU}}$ $\boxed{\text{STAT}}$ $\boxed{\text{DIST}}$.
Supposons que X suive la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}1$.

- Pour calculer $P(X = 2)$:

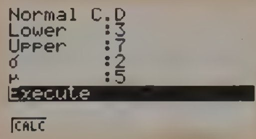
$\boxed{\text{BINM}}$ $\boxed{\text{Bpd}}$ Variable 2 50 0.1

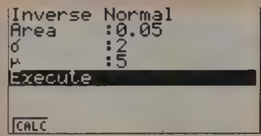
- Pour calculer $P(X \leq 2)$:

$\boxed{\text{BINM}}$ $\boxed{\text{Bcd}}$ Variable 2 50 0.1

Loi normale

Supposons que X suive la loi normale de paramètres $\mu = 5$ et $\sigma = 2$ et que T suive la loi normale centrée réduite.





- Pour calculer $P(3 \leq X \leq 7)$:

$\boxed{\text{NORM}}$ $\boxed{\text{Ncd}}$ 3 7 2 5

- Pour calculer $P(X \leq 3)$:

$\boxed{\text{NORM}}$ $\boxed{\text{Ncd}}$ - 1ᴱ99 3 2 5

- Pour calculer a tel que $P(X \leq a) = 0{,}05$:

$\boxed{\text{NORM}}$ $\boxed{\text{InvN}}$ 0.05 2 5:

- Pour calculer $P(T \leq 0{,}5)$:

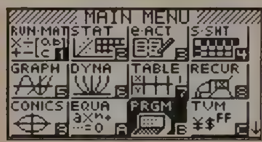
$\boxed{\text{NORM}}$ $\boxed{\text{Ncd}}$ - 1ᴱ99 3 1 0

- Pour calculer t tel que $P(T \leq t) = 0{,}95$:

$\boxed{\text{NORM}}$ $\boxed{\text{InvN}}$ 0.05 1 0

ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

Créer un nouveau programme



On entre dans le mode de programmation par $\boxed{\text{MENU}}$ PRGM.
On crée un nouveau programme par NEW (F3).
On entre le nom du nouveau programme.

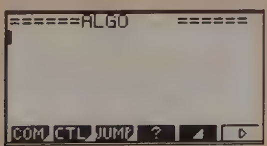
- Pour entrer If, Then, Else, For, While,

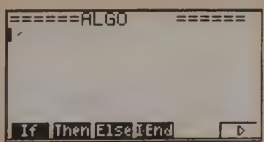
faire $\boxed{\text{prgm}}$ (SHIFT VARS).

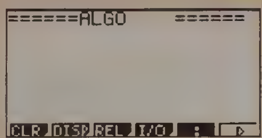
- Pour entrer ? ◢,

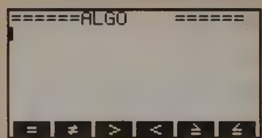
faire $\boxed{\text{prgm}}$ (SHIFT VARS).

- Pour entrer la flèche d'affectation d'une valeur, utiliser la touche ➔ du clavier.
- Pour entrer les tests d'égalité ou d'inégalité, faire prgm (SHIFT VARS) REL.









Sortir du mode programmation par $\boxed{\text{EXIT}}$ une ou plusieurs fois jusqu'à revenir à l'écran donnant la liste des programmes.

Exécuter un programme

On exécute un programme en allant dans le $\boxed{\text{MENU}}$ PRGM puis en sélectionnant le programme à exécuter, et $\boxed{\text{EXE}}$ (F1).

Index

Maquette intérieur : Fiat Lux
Composition et infographies : STDI
Éditions Foucher – Malakoff – 01 – Juin 2012 – SB – LDF/EG

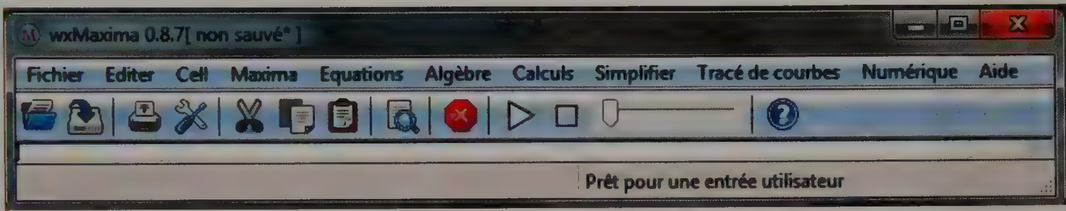
Achevé d'imprimer en France chez Loire Offset Titoulet

Maxima

Maxima est un logiciel libre et multi-plateforme. C'est un logiciel de calcul formel qui utilise et restitue sous forme d'objets mathématiques (par opposition aux logiciels de calcul numérique qui restituent des valeurs numériques).
Téléchargement : http://sourceforge.net/projects/maxima/files/

L'environnement de travail

Le lancement du logiciel fait apparaître la fenêtre suivante.



Vous pouvez utiliser Maxima en cliquant sur les menus déroulants et vous êtes guidés par des fenêtres assistants.
Vous pouvez aussi l'utiliser en ligne de commande en appuyant F5 pour faire apparaître une nouvelle commande. Une ligne de commande se termine par un point-virgule. Le résultat est restitué avec Ctrl+Entrée.
Attention, il ne doit pas y avoir d'interprétation d'opération par le logiciel : vous devez tout écrire. L'expression X^2-4X+3 s'écrit X^2-4*X+3.

Expressions littérales

Factor(E(X)) ; factorise l'expression littérale.
Expand(E(X)) ; développe l'expression littérale.
Display(E(X)) ; simplifie l'expression littérale.

```
(%i1) factor(X^2-4*X+3);
(%o1) (X-3)(X-1)
```

Calcul avec des racines carrées

Il faut commencer par entrer algebraic:true; puis ensuite ratsimp(x);
ratsimp((1+sqrt(5))/(1-sqrt(5)); donne l'écriture affichée ci-contre.

```
(%i4) algebraic:true;
(%o4) true
```

```
(%i5) ratsimp((1+sqrt(5))/(1-sqrt(5)));
```

(%o5) $-\frac{\sqrt{5}+3}{2}$

Équations et systèmes

On définit l'équation Eq en X par Eq:X^2+3*X+2=2*X+1.
Eq+5; renvoie Eq en rajoutant 5 dans les deux membres.
Eq-3*X; renvoie Eq en enlevant 3X dans les deux membres.
solve(Eq,X); résout Eq suivant la variable X.
linsolve([E1,E2,E3],[x,y,z]); renvoie les solutions du système d'équations linéaires.

Valeurs approchées à n chiffres

Définir n par fpprec:20;
Valeur approchée avec bfloat(%pi);

```
(%i2) fpprec:20;
(%o2) 20
```

```
(%i3) bfloat(%pi);
(%o3) 3.1415926535897932385b0
```

Les nombres complexes

On note z un nombre complexe. z:a+%i*b donne la valeur a+ib à z.
cabs(z); renvoie le module de z. carg(z); renvoie l'argument de z. rectform(z); renvoie la forme algébrique de z et polarform(z); renvoie la forme exponentielle de z.

Les fonctions, dérivées, limites, primitives et intégrales

define(f(x),expression); définit f(x) par son expression en fonction de x.
diff(f(x),x); renvoie la fonction dérivée de f en x.
limit(f(x),x,a); renvoie la limite de f(x) quand x tend vers a.
integrate(f(x),x); renvoie une primitive de f.
integrate(f(x),x,a,b); calcule l'intégrale de f de a à b.

Les équations différentielles

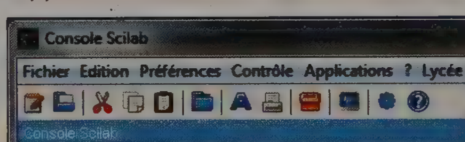
ode2('diff(y,x)+a*y=b,y,x); renvoie l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ (attention à ne pas oublier le ' dans 'diff).
ic1(%,x=0,y=c); renvoie la solution particulière de l'équation précédente pour la condition $y(0) = c$.
ode2('diff(y,x,2)+A*y=0,y,x); renvoie l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + Ay = 0$.
ic2(f(x),x=0,y=a,'diff(y,x)=b); renvoie la solution particulière de l'équation précédente vérifiant les conditions initiales $y(0) = a$ et $y'(0) = b$.

Scilab

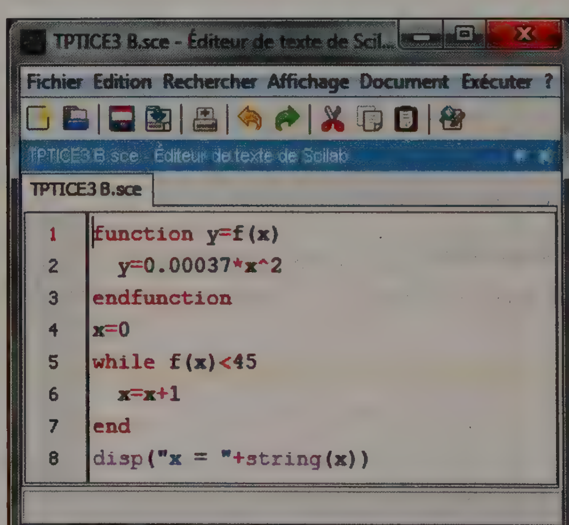
Scilab est un logiciel libre de calcul scientifique qui dispose d'un module complémentaire appelé « Module Lycée ».
Téléchargement : http://www.scilab.org/education/lycee/installation

Pour écrire un programme

Ouvrir le logiciel. La *Console* apparaît à l'écran.



Dans le menu *Applications*, cliquer sur *Editeur*.
L'éditeur s'affiche : y entrer le programme en le tapant au clavier (les lignes de commandes sont numérotées).



Pour exécuter le programme

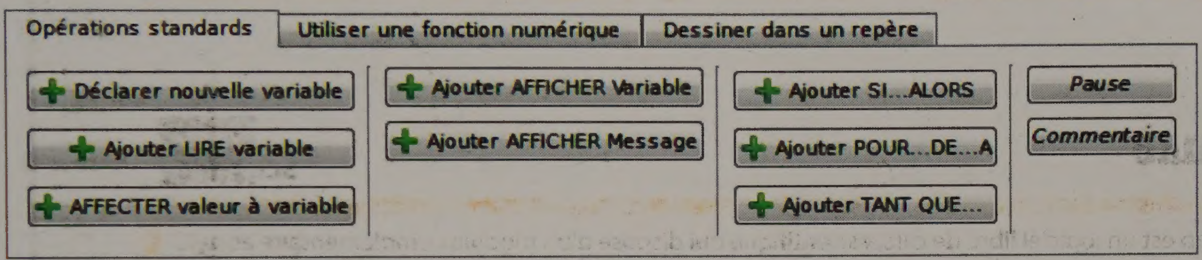
Dans le menu *Fichier* de l'*Editeur*, choisir *Enregistrer*. Dans le menu *Exécuter* de l'*Editeur*, cliquer sur *Exécuter dans Scilab*. Le programme est lancé dans la *Console*.

Algobox

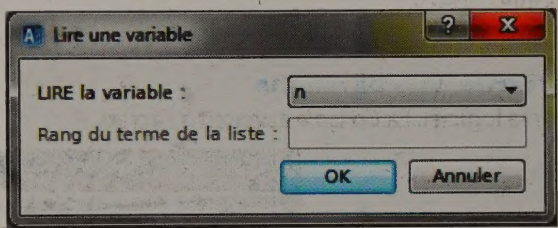
Algobox est un logiciel libre et multi-plateforme d'aide à l'élaboration et à l'exécution d'algorithmes.
Téléchargement : http://www.xm1math.net/algobox
On peut aussi y entrer une fonction numérique et tracer des points et des segments dans un repère.

Pour entrer les commandes

Cliquer sur le bouton **Nouvelle Ligne** *Nouvelle Ligne* puis sur les boutons en bas de l'écran. Une boîte de dialogue s'ouvre qu'il suffit de remplir :



En cliquant sur le bouton Ajouter LIRE variable, une boîte de dialogue s'affiche. Elle permet de choisir, parmi les variables que l'on aura déclarées au début de l'algorithme, le nom de celle que l'on souhaite demander à l'utilisateur.



Dessiner dans un repère

En cliquant sur l'onglet *Dessiner dans un repère*, il est possible de tracer un point ou un segment.

Utiliser une fonction numérique

Cet onglet permet de définir une fonction.

Pour tester l'algorithme et l'exécuter

Cliquer sur le bouton **Tester Algorithme** puis dans la fenêtre suivante sur **Lancer Algorithme**.
Une fonctionnalité bien utile : tester pas à pas l'algorithme !

Avant de lancer l'algorithme, cocher ☐ **Mode pas à pas**. Le logiciel met en couleur la ligne exécutée et affiche l'état des variables (n, x1, y1, x2, y2 et m ci-dessous) au fur et à mesure de l'exécution. On passe à la ligne suivante par **Continuer**.

COLLECTION
SIGMA

STL

SPÉCIALITÉ
BIOTECHNOLOGIES
NOUVEAU PROGRAMME

- Une utilisation importante d'outils logiciels dans le cours, les TP et les exercices
- De nombreuses activités corrigées d'algorithmique
- Un cours très progressif avec des exercices résolus
- Des QCM
- De nombreuses activités du cours, des TP et des exercices, issues des biotechnologies
- De très nombreux exercices pour le baccalauréat avec des corrigés détaillés
- Des sujets d'examen complets

MATHÉMATIQUES
TERMINALE

Philippe Dutarte
François Mailloux
Bernard Verlant

44 6883 1
9 782216 119264
ISBN 978-2-216-11926-4